

Российская академия наук  
Сибирское отделение  
Вычислительный центр СО РАН, г. Красноярск  
Красноярский государственный технический университет

Е. А. Новиков

## ЯВНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Ответственный редактор  
д. ф.-м. н., профессор *А.Н. Горбань*

ВО "НАУКА"  
НОВОСИБИРСК  
1997

УДК 519.622

ББК 22.193

Н 73

Явные методы для жестких систем. / Е.А.Новиков. — Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1997 — 195 с.

Монография посвящена проблеме построения явных численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений средней жесткости. Особое внимание уделяется контролю точности вычислений и устойчивости численной схемы, а также созданию алгоритмов интегрирования переменного порядка и шага.

Книга предназначена широкому кругу специалистов в области прикладной математики и численного анализа, а также преподавателям, аспирантам и студентам вузов.

Табл. 16 Ил. 70. Библиогр.: 152 назв.

#### Р е ц е н з е н т ы

доктор физико – математических наук *В.И.Быков*

доктор физико – математических наук *В.М.Белолипецкий*

Утверждено к печати

Вычислительным центром СО РАН (г. Красноярск)

*Р § § И*

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского  
фонда фундаментальных исследований по проекту 97-01-14187*

ISBN 5—02—031245—2

©Е.А.Новиков, 1997

©Российская Академия наук, 1997

# Глава 1

## Введение

Во многих приложениях таких как химическая кинетика, радиоэлектроника и других возникает проблема численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k. \quad (1.1)$$

Учет большого числа факторов при построении математических моделей физических процессов приводит к тому, что класс задач, описываемых жесткими системами, все более расширяется. Здесь следует отметить, что основные тенденции при построении численных методов связаны с расширением их возможностей для решения жестких систем все более высокой размерности. В ряде случаев ситуация осложняется еще и тем, что правая часть дифференциальной задачи может быть разрывной. Это характерно при описании динамики механических систем. Несмотря на рост быстродействия ЭВМ, сложность задач, возникающих в практике, опережает развитие вычислительной техники, что в свою очередь приводит к возрастающим требованиям к вычислительным алгоритмам. Поэтому проблема создания эффективных численных методов решения задачи Коши для жестких систем является актуальной задачей. При построении эффективных алгоритмов и программ интегрирования требуется разрешить ряд вопросов, которым и посвящена данная книга.

Прежде всего нужно выбрать методы, которые соответствовали бы классу решаемых задач. Здесь в основу алгоритмов интегрирования положены явные схемы типа Рунге–Кутты, которые можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi_f(t_n, y_n, h). \quad (1.2)$$

Они обладают определенными преимуществами перед многошаговыми формулами. В частности, многошаговые методы приводят в некотором смысле к осреднению решения ("срезание экстремумов"), что при моде-

лировании некоторых динамических объектов делает их неприемлемыми. Достаточно полный обзор работ, посвященных численному решению задачи (1.1) многошаговыми методами, содержится в [22, 54, 57, 59, 70], и поэтому ниже на этом вопросе останавливаться не будем.

Важность указанных задач привела к появлению огромного количества методов интегрирования жестких систем. Однако для того, чтобы от идеи метода перейти к его алгоритмической реализации, необходимо решить большой и важный круг вопросов, связанных с изменением величины шага интегрирования и оценкой точности получаемых численных результатов, что и делает метод экономичным и надежным.

Современные способы управления шагом основаны, как правило, на контроле точности численной схемы. Такой подход хорошо зарекомендовал себя во многих случаях и представляется наиболее естественным, поскольку основным критерием при проведении практических расчетов является точность нахождения решения. Многие алгоритмы интегрирования при выборе величины шага используют оценку локальной ошибки (погрешности аппроксимации). Это оправдано тем, что если на каждом шаге контролировать некоторый минимальный уровень локальной ошибки, то глобальная ошибка будет ограничена. В настоящее время можно выделить три практических способа оценки данной ошибки ([54], с. 59-65).

Классическим способом оценки локальной ошибки одношаговых методов является способ, основанный на экстраполяционной формуле Рундсона [126-127]. Его еще называют правилом Рунге, и он заключается в следующем. В каждой сеточной точке интервала интегрирования решение вычисляется с шагом  $h$  и  $0.5h$ , а искомая оценка определяется через разность приближений к решению

$$\delta_{n,p}^h = \frac{y_n^{0.5h} - y_n^h}{1 - 2^{-p}} + O(h^{p+2}), \quad \delta_{n,p}^{0.5h} = \frac{y_n^{0.5h} - y_n^h}{2^p - 1} + O(h^{p+2}),$$

где  $p$  – порядок точности метода,  $y_n^h$  и  $y_n^{0.5h}$  – приближения к решению с шагом  $h$  и  $0.5h$ ,  $\delta_{n,p}^h$  и  $\delta_{n,p}^{0.5h}$  – соответствующие локальные ошибки. Недостатком такого способа является необходимость дважды вычислять решение в каждой точке, что приводит к значительному увеличению вычислительных затрат.

Более дешевым является многошаговый способ [71]. Он заключается в том, что одношаговой формуле  $p$ -го порядка точности в соответствие ставится многошаговая схема  $(p+1)$ -го порядка

$$\sum_{i=0}^k [\alpha_i y(t_{n+i}) - h\beta_i f(y(t_{n+i}))] = O(h^{p+2}).$$

Затем данная формула преобразуется таким образом, чтобы после подстановки в нее приближений (1.2) получилась оценка локальной ошибки

одношагового метода

$$\delta_{n,p} = \left( \sum_{i=0}^k \beta_i \right)^{-1} \sum_{i=0}^k [\alpha_i y_{n+i} - h \beta_i f(y_{n+i})]. \quad (1.3)$$

Недостатком данного способа является многошаговость оценки, что приводит ко всем недостаткам многошаговых методов.

В последнее время наиболее популярной является оценка локальной ошибки с помощью вложенных методов. Суть способа заключается в следующем. Приближение к решению в каждой точке вычисляется двумя методами вида (1.2)  $p$ -го и  $(p+1)$ -го порядков точности, а затем локальная ошибка метода  $p$ -го порядка оценивается через разность полученных приближений

$$\delta_{n,p} = y_{n,p+1} - y_{n,p}.$$

Обычно такой способ используется тогда, когда для организации вычислений по методу  $p$ -го порядка не требуется дополнительных вычислений правой части и матрицы Якоби дифференциальной задачи. Следует отметить оперативность и относительную дешевизну оценки локальной ошибки с помощью вложенных методов. По затратам на шаг она лежит между оценкой ошибки с помощью правила Рунге и многошаговой оценкой. В то же время, по отношению к многошаговой оценке, в ней при вычислении ошибки используется информация только с данного шага, что повышает ее надежность. Данный способ успешно применялся в работах [54, 87, 89-91, 119, 131-132] и ниже будет использоваться здесь.

Использование оценки локальной ошибки при выборе величины шага интегрирования и для контроля точности вычислений в ряде случаев приводит к успеху. Однако с целью повышения надежности расчетов необходимо найти оценку глобальной ошибки. Наиболее известный способ определения данной ошибки основан на предположении о линейном характере накопления глобальной ошибки из локальных [97]. В результате для контроля точности предлагается использовать неравенство

$$\|\delta_n\| \leq \frac{\varepsilon h}{t_k - t_0}, \quad (1.4)$$

где  $\delta_n$  – оценка локальной ошибки,  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в  $R^N$ ,  $\varepsilon$  – требуемая точность расчетов. Такой способ успешно применялся в [70].

Очевидно, что предположение о линейном характере накопления является достаточно грубым. В [3] используется другое неравенство

$$\|\delta_n\| \leq \varepsilon |\varepsilon/c_p|^{1/p}, \quad (1.5)$$

полученное в предположении, что при интегрировании устойчивыми методами вклад начальных возмущений убывает по мере продвижения по

сетке. Здесь через  $p$  обозначен порядок точности метода, а через  $c_p$  — некоторая вычисляемая постоянная. Обоснование (1.5) для линейной скалярной задачи (1.1) приведено в ([44], с. 43-45).

Еще один способ оценки основан на интегрировании дополнительной линейной системы дифференциальных уравнений, описывающей поведение главного члена глобальной ошибки (см., например, [57], с. 40-45). Однако это связано с вычислением матрицы Якоби и дополнительными затратами на интегрирование. Поэтому такой способ применяется достаточно редко.

В последнее время при численном исследовании некоторых жестких задач все большее внимание привлекают явные методы (см. библиографию [45]). Это связано с тем, что при решении ряда задач  $A$ -устойчивыми методами возникает проблема с обращением матрицы Якоби. В то же время явные методы не нуждаются в вычислении данной матрицы и, если жесткость задачи не слишком велика, то они будут предпочтительнее. Более того, появление многопроцессорных ЭВМ позволяет взглянуть иначе на явные методы, которые легко распараллеливаются [27].

Можно выделить две основные причины, которые приводят к трудностям при использовании явных методов для решения жестких задач. Первая причина связана с противоречием между точностью и устойчивостью численной схемы на участке установления. Следствием этого является раскачивание шага интегрирования, что в ряде случаев заканчивается АВОСТом. Этого недостатка можно избежать, например, предложенным в [32] способом контроля устойчивости.

Вторая причина ограниченного применения явных методов связана с тем, что области устойчивости известных численных схем слишком малы. В настоящий момент имеется ряд работ, посвященных вопросам построения явных методов с расширенными областями устойчивости [12, 15, 20, 25-28, 32-37, 40-49, 52, 60-69, 72-81, 83-85, 92-101, 104-111, 113, 115-124, 128, 133-150]. Ясно, что расширение области устойчивости связано с ростом вычислительных затрат на шаг интегрирования. Поэтому, если шаг ограничен по точности, такие схемы будут малоэффективны. Однако, если шаг ограничен в силу устойчивости, что имеет место на участке установления, то за счет применения численных схем с расширенными областями устойчивости можно значительно повысить эффективность алгоритма интегрирования [20, 27, 36-37, 42, 45, 116, 128, 135-137, 141-143, 145]. В качестве критерия выбора подходящей численной формулы можно использовать неравенство для контроля устойчивости [32].

Очевидно, что за счет контроля устойчивости и использования численных схем с расширенными областями устойчивости можно только расширить границы применимости явных формул. Для данных методов шаг  $h$  ограничен в силу неравенства  $h|\lambda_{\max}| \leq D$ , где  $\lambda_{\max}$  есть максимальное собственное число матрицы Якоби системы (1.1), а поло-

жительная постоянная  $D$  связана с размером области устойчивости. Так как для многих жестких задач длина интервала интегрирования значительно превышает величину  $D/|\lambda_{max}|$ , то интегрирование при условии  $h|\lambda_{max}| \leq D$  оказывается непосильным для современных ЭВМ.

В [6-7, 114, 151] исследуется класс методов, основанный на дробно – рациональном представлении приближенного решения, а в [10, 53] рассмотрены методы, основанные на использовании аппарата цепных и ветвящихся дробей. Еще один подход к построению вычислительных алгоритмов заключается в конструировании численных схем, учитывающих специфику исходной задачи. Здесь можно выделить схемы экспоненциальной подгонки [19, 25], а также методы, основанные на обращении главной части дифференциального оператора [8-9]. Новый численный метод интегрирования жестких систем, в основе которого лежит принцип последовательной фильтрации членов, соответствующих наибольшим собственным значениям матрицы Якоби системы (1.1), предложен в [17]. Согласно [17] он позволяет без потери устойчивости увеличить шаг интегрирования даже в случае простейших численных схем. В [2] рассмотрены вопросы реализации методов интегрирования на Фор-трэне.

Данная монография посвящена вопросам построения эффективных алгоритмов численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе явных методов типа Рунге–Кутты. Повышение эффективности достигается как за счет более гибкого управления величиной шага интегрирования<sup>1</sup>, так и за счет построения алгоритмов переменного порядка и шага на основе методов с расширенными областями устойчивости. В качестве критерия выбора численной схемы используются неравенства для контроля точности и устойчивости. При решении жестких задач это позволяет на каждом шаге выбирать оптимальную с точки зрения вычислительных затрат численную схему.

Глава 1 посвящена построению неравенств для контроля точности и устойчивости методов вида (1.2). В первом параграфе приведены основные определения; во втором предлагаются два способа получения неравенств для контроля точности вычислений, а так же приведена формула для выбора величины шага интегрирования по точности; в третьем изучается подход к построению неравенств для контроля устойчивости явных методов; в четвертом рассматриваются вопросы реализации на ЭВМ явных методов с контролем точности и устойчивости численных схем.

Глава 2 посвящена построению алгоритмов интегрирования с контролем точности вычислений. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность построенных алгоритмов. В первом параграфе получены соотношения, связывающие параметры явных методов

---

<sup>1</sup> кроме точности вычислений дополнительно контролируется устойчивость численной схемы

типа Рунге–Кутта и коэффициенты полинома устойчивости, приведены представления приближенного и точного решений в виде рядов Тейлора; во втором на основе двух и трехстадийных численных формул построены методы второго порядка точности с неравенствами для контроля точности вычислений, причем для трехстадийной схемы область устойчивости расширена до шести по действительной оси; в третьем на основе четырехстадийной схемы построен метод третьего порядка; в четвертом получено неравенство для контроля точности метода Мерсона [119]; в пятом приведены результаты расчетов тестовых примеров, показывающие надежность неравенств для контроля точности вычислений.

Глава 3 посвящена построению алгоритмов интегрирования с контролем точности вычислений и устойчивости численной схемы. Приведены результаты расчетов, подтверждающие повышение эффективности за счет дополнительного<sup>2</sup> контроля устойчивости. В первом параграфе построен алгоритм интегрирования на основе трехстадийной схемы типа Рунге–Кутта второго порядка; во втором разработан алгоритм на основе четырехстадийной схемы третьего порядка; в третьем получены неравенства для контроля устойчивости методов Мерсона [119] и Фельберга [90]; в четвертом проведены результаты численного сравнение алгоритмов с контролем и без контроля устойчивости.

Глава 4 посвящена вопросам построения алгоритмов интегрирования переменного порядка и шага. Выбор подходящей численной схемы осуществляется с помощью неравенств для контроля точности и устойчивости. В первом параграфе построен алгоритм интегрирования на основе численных формул первого и второго порядков; во втором алгоритм основан на пятистадийных схемах первого, второго и четвертого порядков точности, причем метод четвертого порядка совпадает с методом Мерсона [119]; в третьем алгоритм интегрирования основан на тех же стадиях, что и метод Фельберга [90], а в состав алгоритма включены методы первого, второго и пятого порядков; в четвертом приведены результаты расчетов тестовых примеров.

Глава 5 посвящена автоматизации построения на ЭВМ алгоритмов интегрирования переменного порядка, шага и с переменным числом стадий. В первом параграфе разработан алгоритм определения таких коэффициентов многочленов устойчивости, что область устойчивости соответствующего метода имеет заданную форму и размер; во втором, третьем и четвертом получены формулы для определения коэффициентов явных  $m$  – стадийных методов типа Рунге–Кутта, соответственно, первого, второго и третьего порядков точности с заданной областью устойчивости; в пятом сформулирован алгоритм переменного порядка, шага и с переменным числом стадий, разработан комплекс программ генерации алгоритмов интегрирования, состав методов в котором и их

---

<sup>2</sup>кроме контроля точности



свойства устойчивости определяет вычислитель; в шестом приведены результаты расчетов построенным алгоритмом.

## Глава 2

# Контроль точности и устойчивости одношаговых методов

В последнее время при получении неравенств для контроля точности одношаговых методов применяется в основном оценка главного члена глобальной ошибки, вычисленная тем или иным способом. По сравнению с использованием локальной ошибки это позволяет повысить надежность расчетов. В данной главе предложены два способа оценки аналога глобальной ошибки, которые не приводят к значительному увеличению вычислительных затрат. В первом способе требуется вычисление матрицы Якоби дифференциальной задачи, и поэтому оценку имеет смысл использовать для контроля точности –устойчивых методов, где данная матрица участвует в вычислительном процессе. Вторым способом не нуждается в вычислении матрицы Якоби, и такую оценку можно применять в алгоритмах интегрирования на основе явных численных схем.

При применении явных методов для решения жестких задач шаг интегрирования ограничен не точностью, а в основном устойчивостью численной схемы. Поэтому соответствующие алгоритмы на основе явных формул обладают малой эффективностью. Здесь предложен способ получения неравенства для контроля устойчивости методов с ограниченной областью устойчивости, что существенно повышает надежность расчетов. Данное неравенство основано на оценке максимального собственного числа матрицы Якоби, которое определяется с использованием ранее вычисленных стадий. Приведена формула для выбора величины шага интегрирования по точности и устойчивости.

## 2.1 Основные определения

Ниже будет рассматриваться задача Коши для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (2.1)$$

где  $y$  и  $f$  – гладкие вещественные  $N$ -мерные вектор-функции,  $t$  – независимая переменная, изменяющаяся на заданном интервале  $[t_0, t_k]$ .

Предположение о гладкости правой части системы (2.1) влечет выполнение условий локальной теоремы Коши-Пикара ([50], с. 54), откуда, в свою очередь, следует существование единственного решения задачи (2.1),  $[t_0, t_k]$  – область определения решения. Поэтому всюду ниже это условие особо оговариваться не будет.

Введением дополнительной переменной систему (2.1) можно привести к автономному виду. Определив  $x = (t, y^T)^T$ ,  $g = (1, f^T)^T$ ,  $x_0 = (t_0, y_0^T)$  и переходя снова к обозначениям  $y, f, y_0$ , получим

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (2.2)$$

Поэтому часть рассуждений будем проводить для автономной системы. Случаи, когда различие (2.1) и (2.2) принципиально, будут оговариваться отдельно. Ниже будем предполагать, что задача (2.2) является жесткой.

*Определение 1 [115]. Задача Коши (2.2) называется жесткой на некотором интервале  $I \subset [t_0, t_k]$ , если для  $t \in I$  имеет место*

$$(1) \quad \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$(2) \quad \frac{\max_{1 \leq i \leq N} \operatorname{Re}(-\lambda_i)}{\min_{1 \leq i \leq N} \operatorname{Re}(-\lambda_i)} \gg 1,$$

где  $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$ , есть собственные числа матрицы Якоби  $\partial f / \partial y$ , вычисленной на решении  $y(t)$ .

Класс задач, называемых жесткими, весьма разнообразен, и поэтому в литературе встречаются другие определения жесткости, отличающиеся степенью строгости (см., например, [12, 27, 51, 54, 56-57]. Поясним кратко в чем заключается суть жесткости, а подробное обсуждение этого вопроса содержится в [12, 51, 57].

Отметим прежде всего, что речь идет в основном об устойчивых задачах, что следует, по крайней мере для автономных систем, из первой части определения 1. В определении [12] допускается наличие небольших по величине положительных собственных чисел матрицы Якоби,

что достаточно существенно расширяет класс решаемых практических задач.

В жестких задачах длина интервала интегрирования связана с медленно меняющимся решением, в то время как существуют быстро затухающие возмущения. Весь интервал можно условно разбить на несколько участков. Для некоторых из них, называемых переходными<sup>1</sup>, характерным является наличие больших производных решения, в то время как их длина мала. Имеет смысл отметить такое важное свойство жестких задач, как наличие большой классической константы Липшица. Поэтому в литературе жесткие задачи называют также задачами с большими константами Липшица (см., например, [12], с. 26).

На других участках, называемых участками установления, производные решения относительно малы, а их длина велика по сравнению с длиной переходного участка. Отметим, что переходные участки могут отсутствовать вовсе. Однако в случае жесткой задачи даже небольшие возмущения<sup>2</sup> приводят к их появлению.

Трудности решения жестких систем классическими явными методами связаны с наличием участков установления. Здесь следует отметить, что если весь интервал интегрирования представляет собой переходный участок, то такая задача в ряде случаев к жестким не относится, хотя в смысле определения 1 она может быть жесткой. Дело в том, что так как на переходном участке производные от решения велики, то шаг интегрирования из условия точности выбирается небольшим. Можно сказать, что на данном участке выполняется неравенство

$$hL(t) < C, \quad (2.3)$$

где  $h$  – шаг интегрирования,  $L(t)$  – классическая константа Липшица,  $C$  – постоянная относительно небольшой величины. Поэтому решение может быть найдено явным численным методом даже с небольшой областью устойчивости. Еще до недавнего времени полагалось, что явные методы можно использовать при  $C < 10$ . Сейчас, в связи с развитием явных методов с расширенными областями устойчивости, их возможности определяются более широко. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу.

На участке установления ситуация совершенно иная. Так как производные от решения невелики, то шаг интегрирования по точности может быть выбран достаточно большим. Можно сказать, что характерным для данного участка является выполнение неравенства

$$hL(t) \gg C. \quad (2.4)$$

Поэтому применение классических явных методов, для которых условие (2.3) необходимо для устойчивости, практически невозможно на современных ЭВМ.

<sup>1</sup>такие участки еще называют погранслоем

<sup>2</sup>например, за счет ошибок округлений

Итак, ниже под жесткими задачами будем понимать такие задачи, которые являются жесткими в смысле определения 1 и которые удовлетворяют условиям (2.3), (2.4) на интервале интегрирования. Отметим, что на практике жесткие задачи распознаются хорошо. Любая физическая система, которая моделируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений и имеет компоненты с сильно различающимися временными константами, приводит к жесткой задаче.

Далее будут рассматриваться одношаговые безитерационные методы, которые в векторной форме можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi_f(t_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2.5)$$

с заданным начальным условием  $y_0$ . Здесь  $h$  – шаг интегрирования,  $\varphi_f$  – заданная гладкая  $N$ -мерная вектор-функция, зависящая от правой части дифференциальной задачи. В форме (2.5) можно представить явные методы типа Рунге-Кутты, а также неявные и полужавные методы типа Рунге-Кутты с фиксированным итерационным процессом, в котором число итераций не зависит от номера шага интегрирования.

Рассмотрим источники погрешностей, которые могут возникать при реализации методов (2.5). Это ошибки округлений и ошибки, связанные с применением приближенных формул интегрирования. Одной из основных проблем при построении эффективных алгоритмов численного решения задачи Коши (2.2) является получение надежных оценок полной погрешности метода. Пусть приближенное решение  $y_0, y_1, \dots, y_M, Mh = t_k - t_0$ , задачи (2.2) вычислено по формуле (2.5),  $y(t)$  – точное решение (2.2).

*Определение 2. Величина  $y(t_n) - y_n$  называется полной погрешностью метода (2.5) в точке  $t = t_n$ .*

Величина ошибок округлений в сильной степени зависит от конкретного вычислительного устройства. При построении специализированных вычислительных машин с целью повышения их быстродействия стремятся длину чисел сделать как можно меньше. В такой ситуации ошибки округлений могут существенно влиять на поведение численного решения. Особое внимание ошибкам округлений следует уделять при наличии в алгоритме интегрирования итерационных процессов. Обычно о сходимости судят по близости двух соседних итераций, разность между которыми невозможно свести к нулю из-за наличия ошибок округлений. В этом случае необходимо выбрать константу, ограничивающую количество итераций ([54], с. 75-76).

С другой стороны ошибки округлений можно трактовать как возмущение правой части задачи (2.2). Если исходная задача обладает малой чувствительностью к малым возмущениям, то и от метода ее решения естественно требовать того же свойства. Такие методы называют

устойчивыми<sup>3</sup>. В дальнейшем будут рассматриваться только устойчивые методы, в которых не предполагается использование итерационных процессов. Более того, ниже будут изучаться методы относительно невысокого порядка точности, для которых ошибки за счет неточности приближенной формулы существенно превышают ошибки округлений, возникающие при реализации (2.5). Поэтому вместо полной погрешности метода будет рассматриваться только ошибка за счет неточности (2.5), которую называют глобальной ошибкой.

*Определение 3. Метод из класса (2.5) сходится, если для каждой задачи (2.2) имеет место*

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|y(t_n) - y_n\| \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0,$$

*и сходится с порядком  $p$ , если*

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^p)$$

где  $Mh = t_k - t_0$ ,  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в  $R^N$ .

Очевидно, что для решения (2.2) имеет смысл рассматривать только сходящиеся методы (2.5). При исследовании сходимости (2.5) требуется определить ошибку  $\varepsilon_n = y(t_n) - y_n$ , что в ряде случаев является достаточно сложной задачей. Поэтому в качестве предварительной оценки точности формулы (2.5) обычно используют величину, которую называют погрешностью аппроксимации.

*Определение 4. Погрешностью аппроксимации  $\delta_{n+1}$  схемы (2.5) в точке  $t_{n+1} \in [t_0, t_k]$  называется величина, определяемая по формуле*

$$\delta_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\varphi_f(t_n, y(t_n), h), \quad (2.6)$$

где  $y(t)$  есть точное решение задачи (2.2).

Если  $y_n = y(t_n)$ , то  $\delta_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$  в точке  $t_{n+1}$  совпадает с величиной глобальной ошибки, то есть погрешность аппроксимации есть ошибка, которая получается за один шаг интегрирования, причем она возникает за счет отбрасывания членов при конечной аппроксимации производной дифференциального уравнения. Поэтому в ряде работ погрешность аппроксимации называют локальной ошибкой. Ниже нам также будет удобно пользоваться этим термином.

*Определение 5. Говорят, что метод (2.5) аппроксимирует систему (2.2), если*

$$h^{-1} \max_{0 \leq n \leq M} \|\delta_n\| \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0,$$

---

<sup>3</sup>определение устойчивости см. ниже

и имеет порядок аппроксимации  $p$ , если

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|\delta_n\| = O(h^{p+1}),$$

где  $Mh = t_k - t_0$ ,  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в  $R^N$ .

Метод, удовлетворяющий определению 5, еще называют согласованным с порядком  $p$  ([54], с. 30).

Теперь перейдем к изучению устойчивости численных формул (2.5). Для этого рассмотрим вторую пару аппроксимаций  $\tilde{y}_n$  и  $\tilde{y}_{n+1}$ , которые удовлетворяют соотношению

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h\varphi_f(t_n, \tilde{y}_n, h).$$

**Определение 6.** Метод (2.5) называется *-устойчивым* на классе задач, если существуют такие вещественные числа  $h_0 > 0$  и  $\kappa$ , что для всех задач из данного класса выполняется неравенство

$$\|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\| \leq \kappa \|y_n - \tilde{y}_n\|, \quad \kappa = 1 + Ch, \quad \forall h \in (0, h_0).$$

Устойчивость в смысле определения 6 называют еще устойчивостью сходимости. Если  $\kappa < 1$ , то метод называется *контрактивным* (см. [12], с. 49-52).

Известно [102], что любой согласованный метод вида (2.5) является *-устойчивым*. Отсюда (см. [54], с. 36) следует теорема о том, что одношаговый метод из класса (2.5) сходится тогда и только тогда, когда он является согласованным. Поэтому для доказательства сходимости численных схем (2.5) достаточно показать, что они аппроксимируют задачу (2.2) с порядком  $\geq 1$ .

Из определения 6 следует, что при  $h > 0$  и для одного и того же шага интегрирования для *-устойчивых* методов разность между двумя любыми численными решениями, определенными по формуле (2.5), остается ограниченной величиной. Очевидно, что при практической реализации методов на ЭВМ этого свойства может оказаться недостаточно, так как соответствующие алгоритмы интегрирования могут быть малоэффективными. Поэтому были рассмотрены другие свойства устойчивости, такие как абсолютная устойчивость,  $A$ - и  $L$ -устойчивость и др. В отличие от устойчивости сходимости данные свойства называют вычислительной устойчивостью. Подробный анализ различных свойств устойчивости и их взаимосвязь содержится в [12]. Рассмотрим понятие абсолютной устойчивости [82] (см. также [12, 54, 57]). Оно вводится на линейном скалярном уравнении

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

с комплексным  $\lambda$ ,  $Re(\lambda) < 0$ . Ниже будем предполагать, что в формуле (2.5) функция  $\varphi_f$  линейна по  $y$ , если исходная дифференциальная система линейная. Тогда, применяя (2.5) для решения (2.7), получим

$$y_{n+1} = Q(z)y_n, \quad z = \lambda h, \quad (2.8)$$

где  $Q(z)$  называют функцией роста или функцией устойчивости метода (2.5). Для рассматриваемых ниже методов  $Q(z)$  является либо многочленом относительно  $z$ , либо рациональной функцией.

*Определение 7. Метод (2.5) называется абсолютно устойчивым для данного  $z = \lambda h$ , если  $|Q(z)| \leq 1$ . Область  $R$  комплексной плоскости  $z$  называется областью абсолютной устойчивости метода (2.5), если он устойчив при всех  $z \in R$ . Пересечение области устойчивости с вещественной осью называется интервалом устойчивости.*

Абсолютная устойчивость является естественным требованием, если выполняется неравенство  $Re(z) \leq 0$ , поскольку модуль точного решения  $y(t) = e^{\lambda t}y_0$  задачи (2.7) есть невозрастающая функция.

Несмотря на простой вид уравнения (2.7), оно успешно и достаточно долго используется в качестве модельного для предсказания устойчивости практических численных методов решения нелинейных систем общего вида. Аргументация в пользу уравнения (2.7) заключается в следующем. Пусть в некоторый момент времени  $t = t_1$  решение  $y(t)$  задачи (2.1) возмущено до некоторого значения  $\tilde{y}(t)$ . Тогда при  $t > t_1$  имеет место

$$x' = A(t)x,$$

где  $x(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$ , а матрица  $A(t)$  вычислена в соответствии с теоремой о среднем значении для векторных функций [125], то есть

$$A(t) = \int_0^1 f'(t, \theta \tilde{y}(t) + (1 - \theta)y(t))d\theta,$$

$f'(t, y(t))$  – матрица Якоби системы (2.1). Согласно ([12], с. 16-27) жесткость задачи (2.1) может быть полностью описана в терминах жесткости полученной линейной системы с переменными коэффициентами. Описанный выше прием называется глобальной линеаризацией, поскольку линеаризация осуществляется вдоль всей кривой  $y(t)$  в целом.

Следующим шагом является локальная линеаризация, которая сводится к замораживанию матрицы  $A(t)$  в точке  $t_1$ , то есть  $A = A(t_1) = f'(t_1, y(t_1))$ . Переобозначая  $x$  через  $y$ , получим линейную систему с постоянными коэффициентами, то есть

$$y' = Ay, \quad (2.9)$$



и теперь жесткость задачи (2.1) описывается в терминах линейной системы (2.9) с постоянными коэффициентами. Недостатки использования локальной линеаризации отражены в [12, 112, 115], и они связаны с тем, что спектр замороженной матрицы не всегда дает правильную информацию о качественном поведении решения задачи (2.1). В [11-12] приведены соответствующие примеры. Тем не менее для многих практических задач переход к системе (2.9) вполне оправдан ([12], с. 52-55).

Применяя (2.5) для решения задачи (2.9), получим

$$y_{n+1} = Q(hA)y_n,$$

где, в отличие от (2.8),  $Q(hA)$  есть матрица. Матричная функция  $Q(hA)$  существует, если комплекснозначная функция  $Q(z)$  определена на спектре матрицы  $hA$ , то есть  $Q(h\lambda_1), \dots, Q(h\lambda_N)$  есть собственные числа матрицы  $Q(hA)$ . Таким образом, если в задаче (2.7) трактовать  $\lambda$  как произвольное собственное число матрицы  $A$ , то становится понятным использование (2.7) для прогноза устойчивости методов (2.5). Более подробное обсуждение этого вопроса содержится в [12]. Ниже будем в основном пользоваться понятием абсолютной устойчивости, которую для сокращения будем называть просто устойчивостью.

Основной проблемой при решении жестких задач явными методами является проблема численной устойчивости. Поясним этот факт на примере явного метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Применяя его для решения задачи (2.7), получим

$$y_{n+1} = (1 + \lambda h)y_n,$$

откуда условие устойчивости имеет вид  $|1 + \lambda h| \leq 1$  или  $h \leq 2/|\lambda|$ . При больших  $Re(-\lambda)$  и достаточно большом промежутке интегрирования это условие является весьма обременительным ограничением на размер шага интегрирования. Поэтому были рассмотрены -устойчивые методы.

**Определение 8.** [82] Численный метод называется -устойчивым, если его область абсолютной устойчивости включает всю полуплоскость  $Re(\lambda h) \leq 0$ .

Свойство -устойчивости гарантирует, что  $|Q(\lambda h)| \leq 1$  для всех  $Re(\lambda h) \leq 0$ . Однако для многих одношаговых -устойчивых методов  $Q(\lambda h)$  таково, что  $|Q(\lambda h)| \rightarrow 1$  при  $Re(\lambda h) \rightarrow -\infty$ . В результате численные приближения к быстрозатухающим фундаментальным решениям с малыми временными постоянными могут затухать очень медленно. Следствием этого является понижение эффективности алгоритма интегрирования. Поэтому было введено понятие  $L$ -устойчивости.

Определение 9. [115] Одношаговый метод называется  $L$  – устойчивым, если он  $L$  – устойчив и если  $|Q(\lambda h)| \rightarrow 0$  при  $\operatorname{Re}(\lambda h) \rightarrow -\infty$ .

## 2.2 Контроль точности вычислений

Здесь и ниже будут рассматриваться оценки локальной и глобальной ошибок в смысле главного члена, то есть далее будет оцениваться только первый член при разложении соответствующих ошибок в ряды Тейлора по степеням  $h$ .

Итак, пусть для решения задачи (2.2) имеется метод вида (2.5) -го порядка точности и пусть его локальная ошибка  $\delta_{n,p}$  представима в виде

$$\delta_{n,p} = h^{p+1}\varphi(t_n) + O(h^{p+2}), \quad (2.10)$$

где  $\varphi$  есть некоторая функция, не зависящая от размера шага интегрирования. Для записи (2.10) требуется определенная гладкость правой части дифференциальной задачи, которая предполагается выполненной.

При условии (2.10) глобальную ошибку  $\varepsilon_{n,p}$  можно вычислить по формуле (см., например, [57], с. 40-45)

$$\varepsilon_{n,p} = h^p x(t_n) + O(h^{p+1}), \quad (2.11)$$

где  $x(t)$  есть решение следующей задачи Коши

$$x'(t) - f'(t, y(t))x(t) = -\varphi(t), \quad x(t_0) = 0. \quad (2.12)$$

Непосредственное использование оценки (2.11) в неравенстве для контроля точности вычислений может приводить к значительному увеличению вычислительных затрат. Дело в том, что для определения  $\varepsilon_{n,p}$  требуется оценка локальной ошибки (2.10), что, как правило, означает дополнительные вычисления правой части дифференциальной задачи. Кроме того, решение задачи (2.12) связано с вычислением  $N^2$  компонент матрицы Якоби системы (2.2) плюс затраты на интегрирование (2.12). Поэтому такой способ оценки глобальной ошибки используется лишь иногда при решении жестких систем дифференциальных уравнений, когда матрица Якоби уже известна ([54], с. 54).

Как правило, при реализации  $A$ -устойчивых методов вида (2.5) имеется матрица  $D_n$  вида

$$D_n = E - ahf'(t_n, y_n), \quad (2.13)$$

где  $E$  – единичная матрица,  $a$  – заданный параметр. Поэтому ниже будем считать ее заданной. Опишем один способ оценки глобальной ошибки  $A$ -устойчивых методов, который в ряде случаев приводит к незначительному увеличению вычислительных затрат. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. Пусть для решения задачи (2.1) имеется метод  $p$ -го порядка точности, и пусть его локальная ошибка представима в виде

$$\delta_{n,p} = h^{p+1} f'(t_n, y(t_n)) \psi(t_n) + O(h^{p+2}), \quad (2.14)$$

где  $\psi(t)$  есть некоторая функция, не зависящая от размера шага интегрирования. Тогда для любого номера шага  $n$  имеет место соотношение

$$\|x(t_n) - x_n\| = O(h), \quad (2.15)$$

где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма в  $R^N$ ,  $x(t)$  — решение задачи Коши (2.12), а  $x_n$  вычисляется по следующей рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = x_n + a^{-1}[(\psi_n - x_n) + D_n^{-1}(x_n - \psi_n)], \quad x_0 = 0, \quad \psi_n = \psi(t_n). \quad (2.16)$$

Для доказательства подставим  $\varphi(t) = f'(t, y(t))\psi(t)$  в (2.12), то есть для определения  $x(t)$  получим следующую задачу

$$x'(t) = f'(t, y(t))[x(t) - \psi(t)], \quad x(t_0) = 0. \quad (2.17)$$

Численное решение (2.17) определим с помощью схемы типа Розенброка [129] первого порядка точности, которая применительно к задаче (2.1) имеет вид

$$D_n(y_{n+1} - y_n) = hf(t_n, y_n), \quad (2.18)$$

где параметр  $a$  при задании  $D_n$  по формуле (2.13) определен при описании исходного метода  $a$ -го порядка точности. Применяя (2.18) для решения (2.17), запишем

$$D_n(x_{n+1} - x_n) = hf'(t_n, y_n)x_n - hf'(t_n, y_n)\psi_n. \quad (2.19)$$

Добавляя в правую часть равенства (2.19) соотношение  $a^{-1}(\psi_n - \psi_n + x_n - x_n)$  и группируя соответствующим образом слагаемые, получим

$$D_n(x_{n+1} - x_n) = a^{-1}[(x_n - \psi_n) + D_n(\psi_n - x_n)].$$

Применяя слева к полученному соотношению матрицу  $D_n^{-1}$ , получим формулу (2.16). Равенство (2.15) следует из сходимости схемы (2.18) с первым порядком.

Заметим, что схема (2.18) при  $a \geq 0.5$  является  $A$ -устойчивой, а при  $a = 1$  —  $L$ -устойчивой. Это означает, что при  $0 < a < 0.5$  оценка глобальной ошибки, вычисленная с применением (2.16), может возрастать, в то время как истинная ошибка будет убывать. Однако для многих  $L$ -устойчивых методов (2.5) имеет место  $0 < a < 0.5$ , и поэтому для них использование (2.16) при выборе величины шага интегрирования будет приводить к понижению эффективности алгоритма интегрирования. С

целью устранения этого недостатка рассмотрим еще  $(m, k)$ -метод [38], который применительно к задаче (2.1) имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + (1-a)k_2, \quad D_n k_1 = hf(t_n, y_n), \quad D_n k_2 = k_1. \quad (2.20)$$

Нетрудно убедиться, что при  $0.5 - 0.25\sqrt{2} < a < 0.5 + 0.25\sqrt{2}$  данная схема имеет первый порядок точности и является  $L$ -устойчивой.

*Теорема 1.2.* Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда имеет место соотношение (2.15), где

$$x_{n+1} = \psi_n + D_n^{-1} \left[ \frac{2a-1}{a}(x_n - \psi_n) + \frac{1-a}{a} D_n^{-1}(x_n - \psi_n) \right], \quad (2.21)$$

$$x_0 = 0, \quad \psi_n = \psi(t_n).$$

Для доказательства применим численную схему (2.20) для решения задачи (2.17). Получим

$$D_n(x_{n+1} - x_n) = ahf'(t_n, y_n)(x_n - \psi_n) + (1-a)D_n^{-1}hf'(t_n, y_n)(x_n - \psi_n).$$

Добавим в правую часть соотношение  $(\psi_n - x_n - \psi_n + x_n)$ . Учитывая вид матрицы  $D_n$ , сгруппируем определенным образом слагаемые и умножим слева полученное соотношение на  $D_n$ . В результате запишем

$$D_n^2(x_{n+1} - \psi_n) = D_n(x_n - \psi_n) + \frac{1-a}{a}[ahf'(t_n, y_n)x_n - ahf'(t_n, y_n)\psi_n].$$

Теперь добавим к выражению в квадратных скобках соотношение  $(\psi_n - x_n - \psi_n + x_n)$  и снова сгруппируем слагаемые, учитывая вид  $D_n$ . Получим

$$D_n^2(x_{n+1} - \psi_n) = \frac{2a-1}{a}D_n(x_n - \psi_n) + \frac{1-a}{a}(x_n - \psi_n).$$

Умножая полученное уравнение слева на матрицу  $D_n^{-2}$  получим соотношение (2.21). Равенство (2.15) следует из сходимости (2.20).

Теперь рассмотрим вопрос о том, в каком случае применение (2.16) для оценки глобальной ошибки более выгодно с точки зрения вычислительных затрат, чем непосредственное интегрирование (2.12). Прежде всего отметим, что при вычислении стадий  $A$ -устойчивых методов (2.5) будет использоваться  $LU$ -разложение матрицы  $D_n$ , то есть при вычислении приближенного решения по формуле (2.5) осуществляется декомпозиция матрицы  $D_n$ . Поэтому вычисление оценки ошибки по формуле (2.16) не приводит к значительному увеличению вычислительных затрат, которые практически определяются числом операций на выполнение обратного хода в методе Гаусса.

Далее, как уже отмечалось выше, использование (2.12) связано с необходимостью оценки локальной ошибки, что, как правило, приводит к дополнительным вычислениям правой части задачи (2.2) и, как следствие, к увеличению вычислительных затрат. При использовании (2.16) требуется оценить функцию  $\psi(t)$ , что в ряде случаев удается осуществить бесплатно. Ниже при оценке  $\psi(t)$  будем поступать следующим образом.

Пусть для решения задачи (2.2) имеются два метода вида (2.5)  $(p-1)$ -го и  $p$ -го порядков точности. Обозначим через  $y_{n,p-1}$  и  $y_{n,p}$  соответствующие приближения к решению, а через  $\delta_{n,p-1}$  и  $\delta_{n,p}$  их локальные ошибки. Выберем параметры методов такими, чтобы локальные ошибки были согласованы следующим образом

$$\begin{aligned}\delta_{n,p-1} &= c_{p-1} h^p \psi_p(t_n) + O(h^{p+1}), \\ \delta_{n,p} &= c_p h^{p+1} f'(t_n, y(t_n)) \psi_p(t_n) + O(h^{p+2}),\end{aligned}\quad (2.22)$$

где  $c_{p-1}$  и  $c_p$  — некоторые вычисляемые постоянные, а функция  $\psi_p(t)$  не зависит от размера шага интегрирования. Вычисления предполагается проводить по методу  $p$ -го порядка, для определения глобальной ошибки которого требуется оценка функции  $\psi(t) = c_p \psi_p(t)$ .

Отметим, что требование (2.22) принципиально возможно, так как в разложении ошибки в ряд Тейлора можно оставить только те члены, которые получаются на линейной задаче. Ясно также, что (2.22) означает некоторые дополнительные соотношения на параметры схемы (2.5). Однако для выполнения условий (2.22) во многих случаях могут быть использованы те коэффициенты, которые остаются свободными после удовлетворения требованиям аппроксимации [15-16, 33]. Класс методов (2.5) с условиями (2.22) не пуст. Ниже будут приведены соответствующие методы. Теперь докажем утверждение, с использованием которого далее будет определяться оценка  $\psi_p(t)$ .

*Теорема 1.3.* Пусть для решения задачи (2.2) имеется два метода вида (2.5)  $(p-1)$ -го и  $p$ -го порядков точности и пусть их локальные ошибки удовлетворяют требованиям (2.22). Тогда выполняется следующее соотношение

$$\psi_p(t_n) - c_{p-1}^{-1} h^{-p} (y_{n,p} - y_{n,p-1}) = O(h). \quad (2.23)$$

Для доказательства предположим, что приближение к решению  $y_n$  в точке  $t_n$  вычислено методом  $p$ -го порядка, то есть выполнено равенство

$$y_n = y(t_n) + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = O(h^p). \quad (2.24)$$

Тогда приближенное решение  $y_{n+1}$  в точке  $t_{n+1}$ , вычисленное методом  $p$ -го порядка, можно представить в виде

$$y_{n+1,p} = y_n + h\varphi_f(t_n, y_n, h) = y(t_n) + \varepsilon_n + h\varphi_f(t_n, y(t_n) + \varepsilon_n, h).$$

Разлагая функцию  $\varphi_f(t_n, y(t_n) + \varepsilon_n, h)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $y(t_n)$  и используя очевидное равенство

$$\frac{\partial \varphi_f(t_n, y(t_n), h)}{\partial y} - \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} = O(h), \quad (2.25)$$

получим

$$y_{n+1,p} = y(t_n) + \varepsilon_n + h\varphi_f(t_n, y(t_n), h) + hf'(t_n, y(t_n))\varepsilon_n + O(h^{p+2}).$$

Добавляя в правую часть полученного соотношения разность  $y(t_{n+1}) - y(t_{n+1})$  и учитывая определение погрешности аппроксимации, будем иметь

$$y_{n+1,p} = y(t_{n+1}) - \delta_{n+1,p} + \varepsilon_n + hf'(t_n, y(t_n))\varepsilon_n + O(h^{p+2}). \quad (2.26)$$

Проводя аналогичные рассуждения для метода  $(p-1)$ -го порядка точности, можно записать

$$y_{n+1,p-1} = y(t_{n+1}) - \delta_{n+1,p-1} + \varepsilon_n + hf'(t_n, y(t_n))\varepsilon_n + O(h^{p+2}). \quad (2.27)$$

Учитывая, что  $\delta_{n,p} = O(h^{p+1})$ ,  $\delta_{n,p-1} = O(h^p)$  и вычитая из (2.26) соотношение (2.27), имеем

$$\delta_{n+1,p-1} = y_{n+1,p} - y_{n+1,p-1} + O(h^{p+1}), \quad (2.28)$$

откуда, с учетом (2.22), следует (2.23).

При использовании описанного выше способа оценки глобальной ошибки экономия вычислительных затрат достигается за счет того, что в ряде случаев при построении метода  $(p-1)$ -го порядка точности используются те же самые стадии, что и в методе  $p$ -го порядка, то есть метод  $(p-1)$ -го порядка является побочным продуктом метода  $p$ -го порядка.

Оценка локальной ошибки с помощью вложенных методов осуществлялась рядом авторов (см. библ. [54]). Однако там метод более высокого порядка является вспомогательным и он строится с целью оценить локальную ошибку метода более низкого порядка. Поэтому это всегда приводит к увеличению вычислительных затрат. Преимуществом данного подхода является тот факт, что здесь основным является метод высокого порядка, а метод низкого порядка строится с целью оценки глобальной ошибки основного метода. В ряде случаев это приводит к экономии вычислительных затрат.

Возможны и другие способы оценки функции  $\psi_p(t)$ , не связанные с построением вспомогательного метода. При построении конкретных численных схем этот вопрос будет обсуждаться более подробно.

Вычисление оценки глобальной ошибки  $\varepsilon_{n,p}$  метода вида (2.5)  $p$ -го порядка точности по формуле

$$\varepsilon_{n,p} = h^p x_n, \quad (2.29)$$

где  $x_n$  определяется из соотношения (2.16), связано с вычислением матрицы Якоби. Во многих случаях при решении задач средней жесткости можно применить явные методы, в которых матрица Якоби не используется и для которых оценка ошибки по формуле (2.16) означает существенное увеличение вычислительных затрат. В то же время при интегрировании жестких задач явными методами основные затраты приходятся на участок установления, где шаг интегрирования ограничен не требованием точности, а устойчивостью численной схемы, и где точность расчетов, как правило, значительно завышена. Как показывают многочисленные расчеты, в этом случае в качестве оценки ошибки метода можно использовать величину  $c_p h^p \psi_p(t)$  [16, 29-31]. Докажем следующее утверждение.

*Теорема 1.4. Пусть для решения скалярной задачи (2.1) имеется метод  $p$ -го порядка точности, локальная ошибка которого имеет вид (2.22). Тогда выполняется неравенство*

$$\|x(t)\| \leq |c_p| \cdot \|\psi_p(t)\|, \quad (2.30)$$

где

$$\|x(t)\| = \max_{t_0 \leq z \leq t} |x(z)|, \quad \|\psi_p(t)\| = \max_{t_0 \leq z \leq t} |\psi_p(z)|,$$

а  $x(t)$  есть решение задачи Коши

$$x'(t) - f'(t, y(t))x(t) = -c_p f'(t, y(t))\psi_p(t), \quad x(t_0) = 0. \quad (2.31)$$

Для доказательства введем обозначение

$$F = \int_{t_0}^t f'(z, y(z)) dz.$$

В силу знакопостоянства  $f'(t, y(t))$  для скалярного уравнения вида (2.1)

с использованием теоремы о среднем можно записать

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &= \|c_p e^F \int_{t_0}^t e^{-F} f'(z, y(z)) \psi_p(z) dz\| \\ &\leq |c_p| \cdot |\psi_p(z_0)| \cdot \|e^F \int_{t_0}^t e^{-F} dF\| \leq |c_p| \cdot \|\psi_p(t)\|,\end{aligned}$$

где  $z_0 \in [t_0, t_k]$ .

Используя это соображение при  $N > 1$  будем предполагать выполнение следующего неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq N} \|x_i(t)\| \leq |c_p| \max_{1 \leq i \leq N} \|\psi_{pi}(t)\|,$$

то есть в качестве оценки глобальной ошибки  $\varepsilon_{n,p}$  будем иногда использовать следующую

$$\varepsilon_{n,p} \approx c_p h^p \psi_p(t_n). \quad (2.32)$$

Учитывая теорему 1.3, ее еще можно записать в виде

$$\varepsilon_{n,p} \approx c_p c_{p-1}^{-1} (y_{n,p} - y_{n,p-1}). \quad (2.33)$$

Теперь для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования можно использовать неравенство

$$\|\varepsilon_{n,p}\| \leq \varepsilon, \quad (2.34)$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность интегрирования,  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в  $R^N$ . Во всех приведенных ниже алгоритмах интегрирования левая часть неравенства (2.34) определяется по формуле

$$\|\varepsilon_{n,p}\| = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|\varepsilon_{n,p}^i|}{|y_n^i| + r}, \quad (2.35)$$

где  $i$  – номер компоненты,  $r$  – положительный параметр. Если по  $i$ -й компоненте решения выполняется неравенство  $|y_n^i| < r$ , то контролируется абсолютная ошибка  $\varepsilon r$ , в противном случае контролируется относительная ошибка  $\varepsilon$ .

Отметим еще одну важную особенность построенных оценок. Для этого рассмотрим  $L$ -устойчивый метод вида (2.5), который применим для решения задачи (2.7). Тогда в формуле (2.8) в силу  $L$ -устойчивости численной схемы выполняется  $Q(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Так как для точного решения  $y(t_{n+1}) = \exp(\lambda h) y(t_n)$  задачи (2.7) выполняется аналогичное свойство, то естественным является требование стремления к нулю глобальной ошибки при  $z \rightarrow -\infty$ . В силу того, что все приведенные выше рассуждения относились к оценке главного члена ошибки, то



это требование может не выполняться. Поэтому с целью исправления асимптотического поведения глобальной ошибки вместо построенных выше  $\varepsilon_{n,p}$  будем рассматривать оценку  $\varepsilon_{n,p}(j_n)$  вида

$$\varepsilon_{n,p}(j_n) = D_n^{1-j_n} \varepsilon_{n,p}, \quad 1 \leq j_n \leq J_f, \quad (2.36)$$

где параметр  $J_f$  зависит от асимптотических свойств  $\varepsilon_{n,p}$ . Теперь для контроля точности и при выборе величины шага интегрирования можно проверять следующее неравенство

$$\|D_n^{1-j_n} \varepsilon_{n,p}\| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq j_n \leq J_f. \quad (2.37)$$

Используя (2.13) нетрудно видеть, что в смысле главного члена, то есть в смысле первого члена при разложении ошибок в ряды Тейлора по степеням  $h$ ,  $\varepsilon_{n,p}$  и  $\varepsilon_{n,p}(j_n)$  совпадают при любом значении  $j_n$ ,  $1 \leq j_n \leq J_f$ . Для явных методов, в которых матрица Якоби не участвует в вычислительном процессе,  $j_n \equiv 1$ .

Отметим, что применение (2.37) вместо (2.34) к существенному увеличению вычислительных затрат не приводит. При  $z \rightarrow 0$  оценка  $\varepsilon_{n,p}(1) = \varepsilon_{n,p}$  правильно отражает поведение глобальной ошибки и нет смысла проверять (2.37) при других значениях  $j_n$ . При резком увеличении шага поведение ошибки  $\varepsilon_{n,p}$  может оказаться неудовлетворительным, что проявляется в неоправданном уменьшении величины шага и повторных вычислениях решения (возвратах). Проверка неравенства (2.37) при  $j_n \neq 1$  осуществляется достаточно редко. Однако, как показывают расчеты, использование (2.37) вместо (2.34) позволяет сократить вычислительные затраты примерно на 10 – 20%.

При практической реализации алгоритмов интегрирования неравенство (2.37) используется следующим образом. При каждом фиксированном  $n$  выбирается наименьшее значение  $j_n$ , при котором выполняется неравенство (2.37). Если оно не выполняется ни при каком  $j_n$ , включая  $j_n = J_f$ , то шаг уменьшается и происходит повторное вычисление решения.

Теперь приведем формулу для выбора величины шага интегрирования с использованием неравенства (2.37). Пусть приближение к решению  $y_n$  вычислено с шагом  $h_n$ . Учитывая, что  $\varepsilon_{n,p}(j_n) = O(h^p)$ , определим параметр  $h_{new}$  по формуле

$$h_{new} = q^{s_n} h_n, \quad (2.38)$$

где  $q$  – заданный параметр,  $q > 1$ , а значение  $s_n$  вычисляется из уравнения

$$q^{ps_n} \|\varepsilon_{n,p}(j_n)\| = \varepsilon. \quad (2.39)$$

Если  $s_n < 0$ , то есть неравенство (2.37) нарушается при всех  $j_n$ ,  $1 \leq j_n \leq J_f$ , и, следовательно, требуемая точность не выполняется, то  $h_n$

полагается равным  $h_{new}$  и происходит повторное вычисление решения. Если  $s_n \geq 0$ , то есть при некотором  $j_n$  неравенство (2.37) выполнено и, следовательно, требуемая точность достигнута, то  $h_{n+1}$  полагается равным  $h_{new}$  и выполняется следующий шаг интегрирования.

С целью упрощения в конкретных алгоритмах параметр  $s_n$  полагался целым. Тогда из формул (2.38) и (2.39) видно, что при увеличении  $q$  изменение шага будет происходить реже, но при переходе от одной сеточной точки к другой величина шага может изменяться значительно. Это может вызывать неоправданные колебания величины шага. Поэтому на основании многочисленных расчетов величина  $q$  выбрана равной 1.1 и такое значение используется во всех построенных ниже алгоритмах.

## 2.3 Контроль устойчивости

При численном решении задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, используются неявные или полужавные численные схемы. При реализации этих формул на ЭВМ требуется вычисление и обращение матрицы Якоби. В случае большой размерности дифференциальной задачи возникают трудности как с размещением элементов этой матрицы в оперативной памяти ЭВМ, так и с ее обращением. Этого недостатка лишены явные формулы, но они в большинстве своем не пригодны для решения жестких задач по следующим причинам. Обычно алгоритм управления величиной шага строится на контроле точности численной схемы. Однако при решении жестких задач явными методами на большей части интервала интегрирования шаг ограничен не точностью, а устойчивостью численной формулы. В результате на этой части интервала происходит раскачивание величины шага. Вследствие отсутствия ограничения на шаг сверху он может увеличиться настолько сильно, что рост ошибок из-за возникающей неустойчивости приводит к АВОСТу ЭВМ. В лучшем случае почти каждый шаг сопровождается повторным вычислением решения, что приводит к потере эффективности алгоритма интегрирования. Этого можно избежать, если наряду с точностью контролировать и устойчивость численной схемы. Отметим, что здесь не ставится вопрос о замене А-устойчивых методов явными. Речь идет лишь о тех задачах, где явные схемы эффективнее методов с неограниченной областью устойчивости.

Из результатов расчетов жестких дифференциальных уравнений алгоритмами на основе явных формул с выбором шага по точности и устойчивости следует, что на тех участках интервала интегрирования, где устойчивость оказывает решающую роль на размер шага, точность вычислений получается значительно выше требуемой, хотя вычислительные затраты меньше, чем при интегрировании алгоритмом

без контроля устойчивости. Это естественно, так как локальная ошибка убывает вследствие убывания производных решения, а предыдущая ошибка уменьшается за счет контроля устойчивости. В такой ситуации предпочтительнее считать по формуле более низкого порядка точности, если ее область устойчивости существенно шире области устойчивости метода более высокого порядка. В качестве критерия переключения с одной формулы на другую можно использовать неравенство для контроля устойчивости.

Еще одним соображением в пользу контроля устойчивости является следующее. При интегрировании задачи Коши для жестких систем алгоритмами на основе неявных или полуявных формул основную часть в общих вычислительных затратах занимает время обращения матрицы Якоби, причем жесткость задачи может быть настолько велика, что использование явной формулы даже с контролем устойчивости приводит к такому гигантскому числу шагов интегрирования, что такая задача становится непосильной для современных ЭВМ. Однако там, где устойчивость не влияет на размер шага, более естественно применять алгоритмы на основе явных формул. Там же, где условие устойчивости накладывает жесткие ограничения на шаг, целесообразно использовать полуявные или неявные схемы. Таким образом, эффективность алгоритма интегрирования можно повысить за счет расчетов переходных участков по явной формуле, которая не предполагает вычисление и обращение матрицы Якоби. В качестве критерия перехода с одной формулы на другую, естественно, использовать неравенство для контроля устойчивости.

Теперь перейдем к получению неравенств для контроля устойчивости методов (2.5). Применяя (2.5) к (2.7), получим

$$y_{n+1} = Q(z)y_n, \quad z = \lambda h.$$

Условие устойчивости (2.5) имеет вид  $|Q(z)| \leq 1$ . Тогда кривая  $|Q(z)| = 1$  ограничивает область устойчивости в плоскости  $z = \lambda h$ . Учитывая, что при всех  $\lambda h$  из данной области метод устойчив, условие устойчивости можно еще записать в виде  $|\lambda h| \leq D$ , где положительная постоянная  $D$  связана с размерами области устойчивости. В случае, когда размерность задачи  $N > 1$ , условие устойчивости имеет вид  $|\lambda_i h| \leq D$ , где  $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$ , есть собственные числа матрицы Якоби.

В настоящее время можно выделить два подхода к контролю устойчивости. Первый используется в [27, 130] и он связан с оценкой максимального собственного числа матрицы Якоби через ее норму с последующим контролем неравенства  $h\|f'(t, y(t))\| \leq D$ . Ясно, что для явных методов, где матрица Якоби не участвует в вычислительном процессе, это приводит дополнительно к ее нахождению и, следовательно, к значительному увеличению вычислительных затрат. В [130] данное неравенство используется для переключения с явных методов типа Рунге-

Кутта на схемы типа Розенброка и обратно.

Второй подход используется в работах [32, 45]. Он основан на оценке максимального собственного числа  $\lambda_{max}$  матрицы Якоби степенным методом через приращения правой части исходной задачи с последующим контролем неравенства  $h|\lambda_{max}| \leq D$ . Во всех рассмотренных ситуациях этот подход не приводит к значительному увеличению вычислительных затрат. Изложим этот способ подробно.

Вычитая (2.5) из (2.6), получим

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h[\varphi_f(t_n, y(t_n), h) - \varphi_f(t_n, y_n, h)] + \delta_{n+1}, \quad (2.40)$$

где  $\varepsilon_n = y(t_n) - y_n$ . Пусть размерность  $N$  дифференциальной задачи равна единице и пусть к функции  $\varphi_f$  применима теорема о среднем относительно  $y$ . Введем обозначение

$$Q(t_n, x_n, h) = E + h \frac{\partial \varphi_f(t_n, x_n, h)}{\partial y}. \quad (2.41)$$

Тогда из формулы (2.40) имеем

$$\varepsilon_{n+1} = Q(t_n, x_n, h)\varepsilon_n + \delta_{n+1}, \quad x_n \in [y(t_n), y_n]. \quad (2.42)$$

В случае произвольного  $N$  вместо (2.42) можно записать следующее неравенство ([55], с. 54-56)

$$\|\varepsilon_{n+1}\| \leq \|Q(t_n, x_n, h)\varepsilon_n\| + \|\delta_{n+1}\|, \quad (2.43)$$

где  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в  $R^N$ .

Из (2.43) следует, что величина глобальной ошибки  $\varepsilon_{n+1}$  в точке  $t_{n+1}$  зависит от величины локальной ошибки на данном шаге и от величины преобразованной предыдущей ошибки. Для того, чтобы схема (2.5) была устойчивой, достаточно чтобы оператор  $Q(t_n, x_n, h)$  не усиливал предыдущую ошибку. Ясно, что это требование будет выполнено, если при каждом  $n$  контролировать неравенство

$$\|Q(t_n, x_n, h)\varepsilon_n\| \leq D_1 \|\varepsilon_n\|, \quad (2.44)$$

где  $D_1$  – постоянная,  $0 < D_1 < 1$ .

Непосредственное использование (2.44) для контроля устойчивости численной схемы связано с вычислением оператора  $Q(t_n, x_n, h)$  в некоторой неизвестной точке  $x_n$ , что может приводить к значительным вычислительным затратам. Будем поступать следующим образом.

Пусть снова для решения задачи (2.1) имеется два метода вида (2.5)  $(p-1)$ -го и  $p$ -го порядков точности и пусть их локальные ошибки согласованы следующим образом

$$\begin{aligned} \delta_{n,p-1} &= c_{p-1} h^p f'^{p-1} f + O(h^{p+2}), \\ \delta_{n,p} &= c_p h^{p+1} f'^p f + O(h^{p+2}), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где элементарные дифференциалы вычислены в точке  $(t_n, y(t_n))$ . Заметим, что условие (2.45) более жесткое, чем (2.22), и поэтому для методов вида (2.5) с требованием (2.45) все рассуждения относительно контроля точности вычислений остаются справедливыми,  $\psi_p = f^{p-1}f$ .

Величину максимального собственного числа  $\lambda_{nmax}^c$  при условии (2.45) можно оценить с помощью степенного метода, то есть

$$h\lambda_{nmax}^c \approx \frac{c_{p-1}\delta_{n,p}^i}{c_p\delta_{n,p-1}^i}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.46)$$

Тогда для контроля устойчивости (2.5) можно использовать, например, следующее неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq N} \frac{|\delta_{n,p}^i|}{|\delta_{n,p-1}^i|} \leq \left| \frac{c_p}{c_{p-1}} \right| D, \quad (2.47)$$

где постоянная  $D$  связана с размером области устойчивости. Однако для получения (2.47) требуется выполнение (2.45), что приводит к дополнительным соотношениям на параметры численной схемы и, возможно, к дополнительным вычислениям правой части дифференциальной задачи. Дело в том, что если для организации контроля точности вычислений требовалась лишь оценка локальной ошибки метода  $(p-1)$ -го порядка, то для получения неравенства для контроля устойчивости дополнительно требуется оценка локальной ошибки метода  $p$ -го порядка. Это, как правило, приводит к увеличению вычислительных затрат.

С другой стороны, при получении неравенства для контроля устойчивости параметр  $p$  в условиях (2.45) определяет только число итераций в степенном методе. Поэтому требования типа (2.45) можно рассматривать при некотором  $l$ ,  $l \leq p$ . За счет этого можно избежать некоторых дополнительных вычислений правой части дифференциальной задачи. При построении конкретных алгоритмов интегрирования этот вопрос будет рассмотрен более подробно. Там неравенство типа (2.47) будет получено несколько иначе, хотя идейная сторона вопроса останется прежней — оценка максимального собственного числа степенным методом.

Отметим следующее важное обстоятельство. Для контроля устойчивости можно использовать и другие неравенства, отличающиеся от (2.47). Например, можно рассмотреть следующее

$$\frac{|\delta_{n,p}^j|}{\max_{1 \leq i \leq N} |\delta_{n,p-1}^i|} \leq \left| \frac{c_p}{c_{p-1}} \right| D, \quad (2.48)$$

где  $j$  есть значение  $i$ , при котором достигается максимум знаменателя. Использование того или иного неравенства зависит от цели, которой нужно достичь. Если нужно, чтобы устойчивость играла большую роль, то нужно использовать неравенство (2.47). Если же нужно построить

алгоритм, который работал бы не хуже, чем без контроля устойчивости, то целесообразнее использовать неравенство (2.48), так как в этом случае, по крайней мере для симметричных матриц Якоби, модуль максимального собственного числа, вычисленный с помощью (2.48), будет меньше истинного.

Оценка (2.46) является грубой. Это связано с тем, что максимальное собственное число матрицы Якоби вовсе не обязательно сильно отделено от остальных и, в то же время, нельзя без увеличения вычислительных затрат значительно увеличить число итераций в степенном методе, так как это связано с необходимостью получения условий типа (2.45) при достаточно большом значении параметра  $p$ . Кроме того, как видно из (2.45), дополнительные искажения в оценку максимального собственного числа будет вносить нелинейность задачи (2.1). Поэтому в ряде случаев более надежной является оценка

$$\lambda_{nmax}^{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_{nmax}^i, \quad (2.49)$$

где  $\lambda_{nmax}^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , определяются по формуле (2.46),  $n$  – номер текущей точки интегрирования.

Кроме того, в алгоритме интегрирования можно предусмотреть обращение к подпрограмме, в которой оценку задает вычислитель. Ниже оценку максимального собственного числа матрицы Якоби, вычисленную одним из приведенных выше способов, будем обозначать  $\lambda_{nmax}$ . Тогда для контроля устойчивости (2.5) при каждом  $n$  можно использовать неравенство

$$|h_n \lambda_{nmax}| \leq D, \quad (2.50)$$

где  $h_n$  есть текущий шаг интегрирования.

## 2.4 Реализация методов с контролем устойчивости

Далее речь пойдет о применении явных методов для решения задач средней жесткости. В явных методах не применяется матрица Якоби, и поэтому будет использоваться оценка ошибки типа (2.33). Отметим, что при получении (2.33) может не использоваться информация в точке  $t_{n+1}$ , потому что вовсе не обязательно, чтобы даже одна стадия метода вычислялась в точке  $(t_{n+1}, y_{n+1})$ . При решении жестких задач в случае быстрого изменения решения это может быть причиной неудовлетворительной точности. Поэтому при получении оценки (2.33) следует привлекать  $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ . В случае успешного шага интегрирования это не будет приводить к существенному увеличению вычислительных затрат, так как  $f(t_{n+1}, y_{n+1})$  используется при выполнении следующего шага.

Ниже будем предполагать, что имеется две оценки  $\varepsilon'_{n,p}$  и  $\varepsilon''_{n,p}$  глобальной ошибки, причем при вычислении  $\varepsilon''_{n,p}$  используется  $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ . В принципе, по вычислительным затратам оценка  $\varepsilon'_{n,p}$  дешевле чем  $\varepsilon''_{n,p}$ , но для некоторых методов они могут совпадать. Теперь для контроля точности вычислений и при выборе величины шага будем контролировать неравенства

$$\|\varepsilon'_{n,p}\| \leq \varepsilon, \quad \|\varepsilon''_{n,p}\| \leq \varepsilon, \quad (2.51)$$

где  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в  $R^N$ ,  $\varepsilon$  – требуемая точность расчетов.

Первое неравенство (2.51) можно использовать для контроля точности вычислений, а при выборе величины шага дополнительно проверять второе неравенство. Более жесткий контроль при выборе шага чем при контроле точности позволит избежать некоторых повторных вычислений решения (возвратов) вследствие невыполнения точности. В некоторых случаях с целью повышения надежности для контроля точности имеет смысл использовать оба неравенства (2.51).

Обозначим через  $V_n$  оценку величины  $h|\lambda_{nmax}|$ , где  $\lambda_{nmax}$  есть максимальное собственное число матрицы Якоби. Тогда для контроля устойчивости имеем неравенство

$$V_n \leq D, \quad (2.52)$$

где  $D$  связано с размером области устойчивости метода.

Пусть приближение к решению  $y_n$  в точке  $t_n$  вычислено с шагом  $h_n$ . Это означает, что выполнено первое неравенство (2.51), причем, если определить параметр  $\nu_n$  по формуле

$$q^{p\nu_n} \|\varepsilon'_{n,p}\| = \varepsilon, \quad (2.53)$$

то  $\nu_n \geq 0$ . Здесь  $p$  – порядок точности метода,  $q$  – некоторая постоянная, смысл которой определен при описании (2.38). Теперь новый шаг  $h_{new1}$  из условия точности можно вычислить по формуле

$$h_{new1} = q^{\min(\nu_n, s_n)} h_n, \quad (2.54)$$

где параметр  $s_n$  определяется из уравнения

$$q^{ps_n} \|\varepsilon''_{n,p}\| = \varepsilon. \quad (2.55)$$

При получении (2.53) и (2.55) использовались условия  $\varepsilon'_{n,p} = O(h^p)$  и  $\varepsilon''_{n,p} = O(h^p)$ . Отметим, что даже в случае успешного вычисления приближения к решению новый шаг интегрирования может быть уменьшен, так как величина  $s_n$  в (2.55) может быть отрицательной. В этом случае не имеет смысла контролировать устойчивость, а приближение к решению  $y_{n+1}$  в точке  $t_{n+1}$  вычисляется с шагом  $h_{n+1} = h_{new1}$ . Если  $s_n \geq 0$ , то при вычислении прогнозируемого шага нужно проверять неравенство (2.52).

Величину шага  $h_{new2}$  из условия устойчивости определим по формуле

$$h_{new2} = q^{r_n} h_n, \quad (2.56)$$

где параметр  $r_n$ , учитывая что  $V_n = O(h)$ , вычисляется из равенства

$$q^{r_n} V_n = D. \quad (2.57)$$

Теперь, предполагая что поведение решения не сильно меняется от шага к шагу, величину  $h_{n+1}$  можно вычислить по формуле

$$h_{n+1} = q^{-1} \min(h_{new1}, h_{new2}). \quad (2.58)$$

Постоянная  $q$  внесена в (2.58) для того, чтобы создать некоторый запас по точности и устойчивости и тем самым избежать некоторых повторных вычислений решения.

Итак, если неравенства (2.51), (2.52) надежны, а спектр матрицы Якоби и производные решения от шага к шагу изменяются незначительно, то приближение к решению  $y_{n+1}$  в точке  $t_{n+1}$  с шагом  $h_{n+1}$  должно быть вычислено успешно. Однако, так как оценка максимального собственного числа является грубой, то использование (2.58) приводит к неоправданному колебанию величины шага, что не может не сказываться на эффективности алгоритма интегрирования. Поэтому в практических алгоритмах контроль устойчивости используется как некоторый ограничитель на рост шага, то есть при  $s_n \geq 0$  величина прогнозируемого шага вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max(h_n, q^{\min(\nu_n, s_n, r_n)} h_n). \quad (2.59)$$

Эта формула является более инерционной, чем (2.58), что позволяет несколько сгладить эффект от грубости оценки максимального собственного числа. Заметим, что при использовании (2.59) допускается неустойчивость численной схемы на нескольких шагах. Однако это не приводит к катастрофическим последствиям, потому что при нарушении требуемой точности за счет неустойчивости величина шага будет уменьшена при проверке первого неравенства (2.51). Более того, интегрирование с шагом, вызывающим неустойчивость численной схемы, может иметь и положительный эффект. Например, иногда возникает следующая ситуация.

При интегрировании жестких задач явными методами на участке установления фактическая точность существенно превосходит задаваемую. Как видно из формулы (2.43) это является следствием того, что на данном промежутке старые ошибки убывают за счет устойчивости численной схемы, а новые невелики в силу малости производных решения. В результате создается определенный запас точности, который может быть использован для повышения эффективности алгоритма интегрирования. Шаг можно увеличить до некоторого значения, не приводящего к нарушению (2.51), причем величина шага иногда в десятки раз



превосходит максимально допустимую. После того, как запас точности исчерпывается, величина шага сбрасывается за счет контроля точности до такого размера, что численная схема становится устойчивой.

При использовании (2.59) описанная выше ситуация достаточно часто реализуется в практических расчетах следующим образом. После прохождения переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, шаг устанавливается вблизи границы области устойчивости, то есть  $h_n \approx D/|\lambda_{nmax}|$ , и начинает накапливаться запас в точности. Во многих случаях через некоторое время ошибка становится настолько мала, что по формуле (2.46) вместо  $\lambda_{n1} = \lambda_{nmax}$  вычисляется оценка  $\lambda_{n2}$ , где  $|\lambda_{n1}| > |\lambda_{n2}| \geq \dots \geq |\lambda_{nN}|$ ,  $\lambda_{ni}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , – собственные числа матрицы Якоби, то есть контроль устойчивости фактически прекращается. Так как переход от оценки  $\lambda_{n1}$  к  $\lambda_{n2}$  осуществляется достаточно плавно (за несколько шагов), то и шаг интегрирования также увеличивается плавно. Однако шаг может существенно вырасти, причем в силу формулы (2.59) он не будет уменьшен сразу после возникновения неустойчивости. Уменьшение произойдет после того, как будет нарушено первое неравенство (2.51). В результате несколько шагов интегрирования будут выполнены с шагом, превышающий допустимый. В такой "взрывоопасной" ситуации имеет смысл контролировать оба неравенства (2.51), тем более что она легко фиксируется.

В силу того, что участок установления существенно больше переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, то такой процесс возникает многократно. В результате для некоторых задач средний шаг может превышать максимально допустимый.

Теперь сформулируем алгоритм интегрирования на основе явного метода с контролем точности и устойчивости численной схемы.

*Шаг 1.* Вычисляется оценка ошибки  $\varepsilon'_{n,p}$ .

*Шаг 2.* Вычисляется значение параметра  $\nu_n$  по формуле (2.53).

*Шаг 3.* Если  $\nu_n < 0$ , то величина шага полагается равной  $q^{\nu_n} h_n$  и происходит возврат на шаг 1.

*Шаг 4.* Вычисляется оценка ошибки  $\varepsilon''_{n,p}$ .

*Шаг 5.* Вычисляется значение параметра  $s_n$  по формуле (2.55).

*Шаг 6.* Вычисляется оценка  $V_n$  максимального собственного числа по формуле (2.46), причем, если при всех  $j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , выполняется неравенство

$$|\delta_{n,p-1}^j| \leq \epsilon_p,$$

где  $\epsilon_p$  связана с разрядностью ЭВМ, то  $V_n$  полагается равным  $-1$ .

*Замечание.* Случай  $V_n = -1$  означает, что оценка  $\lambda_{nmax}$  по формуле (2.46) может вычисляться неправильно, и поэтому требуется контролировать оба неравенства (2.51).

*Шаг 7.* Если  $V_n < 0$  и  $s_n < 0$ , то величина шага  $h_n$  полагается равной  $q^{s_n} h_n$  и происходит возврат на шаг 1.

*Шаг 8.* Вычисляется приближение к решению по формуле (2.5) с шагом  $h_n$ .

*Шаг 9.* Если  $s_n < 0$ , то величина прогнозируемого шага  $h_{n+1}$  полагается равной  $h_{new1}$ , где  $h_{new1}$  вычислен по формуле (2.54). В противном случае новый шаг вычисляется по формуле (2.59).

*Шаг 10.* Выполняется следующий шаг интегрирования.

Описанный выше вычислительный процесс не следует рассматривать как единственно возможный. В каждом конкретном случае реализации могут различаться. Это может быть связано как со свойствами задач, на которые ориентируется алгоритм, так и с используемой численной схемой. Поэтому ниже для некоторых численных формул алгоритм будет сформулирован отдельно.

## Глава 3

# Алгоритмы с контролем точности вычислений

Построены алгоритмы переменного шага на основе явных методов второго, третьего и четвертого порядков точности. Для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования используется оценка ошибки вида (2.33).

### 3.1 Алгоритм на основе формулы трапеций

Для численного решения задачи Коши (2.1) рассмотрим следующий метод

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= y_n + h_n f(t_n, z_n), \\ y_{n+1} &= y_n + 0.5h_n[f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})], \quad z_0 = y_0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Первая формула (3.1) – явный метод Эйлера, используемый для прогноза, вторая – формула трапеций, используемая для коррекции. Заметим, что в формуле трапеций не используется итераций, а прогноз осуществляется с локальным порядком на единицу меньшим, чем коррекция. Так как имеется одновременно две формулы для вычисления решения, то контроль точности можно осуществлять без дополнительных вычислений правой части системы (2.1).

Будем интерпретировать (3.1) как метод решения системы дифференциальных уравнений следующего вида

$$z' = f(t, z), \quad y' = f(t, z), \quad t > 0, \quad z(0) = y(0) = y_0. \quad (3.2)$$

Очевидно, что  $z(t) \equiv y(t)$ .

*Теорема 2.1. Пусть на решении  $z(t) \equiv y(t)$  задачи (3.2) выполнены условия  $|df/dt| \leq A$  и  $|d^2f/dt^2| \leq C$ , а в некоторой окрестности решения*

$|\partial f/\partial z| \leq B$ . Тогда  $z_n$  и  $y_n$  сходятся к решению  $y(t)$  задачи (2.1) как  $O(h_t^2)$ ,  $h_t = \max h_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ .

Интегрируя уравнения (3.2) по  $t$  на промежутке от  $t_n$  до  $t_{n+1}$  и вычитая из полученных выражений уравнения (3.1), получим

$$z(t_{n+1}) - z_{n+1} = y(t_n) - y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(t, z(t)) - f(t_n, z_n)] dt, \quad (3.3)$$

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_n) - y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(t, z(t)) - \frac{f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})}{2}] dt. \quad (3.4)$$

Обозначим  $\varphi_n = |z(t_n) - z_n|$ ,  $\psi_n = |y(t_n) - y_n| \equiv |z(t_n) - y_n|$ . Здесь и далее будем предполагать, что

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_k,$$

то есть  $t_0 = 0$ ,  $t_{n+1} = t_n + h_n$ . Представим подинтегральные выражения в (3.3) и (3.4) в следующем виде

$$f(t, z(t)) - f(t_n, z_n) = [f(t, z(t)) - f(t_n, z(t_n))] + [f(t_n, z(t_n)) - f(t_n, z_n)], \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} f(t, z(t)) - \frac{f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})}{2} &= f(t, z(t)) \\ &- [\frac{f(t_n, z(t_n)) + f(t_{n+1}, z(t_{n+1}))}{2} \\ &- \frac{f(t_n, z(t_n)) - f(t_n, z_n)}{2} \\ &- \frac{f(t_{n+1}, z(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, z_{n+1})}{2}]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Используя в (3.5) и (3.6) формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого и второго порядков соответственно, получим

$$\begin{aligned} f(t, z(t)) - f(t_n, z_n) &= (t - t_n) \frac{df}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} (z(t_n) - z_n), \\ f(t, z(t)) - \frac{f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})}{2} &= (t - t_n) \frac{df}{dt} + 0.5(t - t_n)^2 \frac{d^2 f}{dt^2} - 0.5h_n \frac{df}{dt} - 0.25h_n^2 \frac{d^2 f}{dt^2} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z} (z(t_n) - z_n) + \frac{\partial f}{\partial z} (z(t_{n+1}) - z_{n+1}), \end{aligned}$$

где производные вычислены в соответствующих точках. Подставляя полученные выражения в (3.3) и (3.4) и переходя к норме, будем иметь

$$\varphi_{n+1} \leq \psi_n + Bh_n\varphi_n + 0.5Ah_n^2, \quad (3.7)$$

$$\psi_{n+1} \leq \psi_n + 0.5Bh_n(\varphi_n + \varphi_{n+1}) + \frac{5}{12}Ch_n^3. \quad (3.8)$$

Введем обозначение

$$r_n = \psi_n + Bh_n\varphi_n. \quad (3.9)$$

Умножим (3.7) на  $B(h_{n+1} + 0.5h_n)$  и сложим с (3.8). Усиливая полученное неравенство, имеем

$$r_{n+1} \leq [1 + B(h_{n+1} + 0.5h_n)]r_n + \frac{5}{12}Ch_n^3 + 0.5AB(h_{n+1} + 0.5h_n)h_n^2. \quad (3.10)$$

Учитывая, что при  $x > 0$  имеет место  $1 < 1 + x < e^x$ , с использованием метода математической индукции легко показать, что

$$r_n \leq e^{B(t_{n+1} + 0.5t_n)}(D_0t_n + D_1t_{n+1})h_t^2, \quad (3.11)$$

где

$$D_0 = \frac{5}{12}C + 0.25AB, \quad D_1 = 0.5AB, \quad h_t = \max_{0 \leq t_n \leq t, 0 \leq k \leq n-1} h_k.$$

Из (3.11) и (3.9) следует, что  $\psi_n = |y(t_n) - y_n| = O(h_t^2)$ .

Покажем, что величина  $z_n$  также сходится к  $y(t_n)$  с порядком  $O(h_t^2)$ . Из (3.3) следует, что

$$\varphi_{n+1} \leq \psi_n + 2Dh_n, \quad (3.12)$$

где  $D$  – максимум  $|f(t, z)|$  в некоторой окрестности решения. Вычитая первое уравнение (3.1) из второго, получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} - z_{n+1} &= 0.5h_n[f(t_{n+1}, z_{n+1}) - f(t_n, z_n)] \\ &= 0.5h_n[f(t_{n+1}, z(t_{n+1})) - f(t_n, z(t_n))] \\ &+ 0.5h_n[f(t_{n+1}, z_{n+1}) - f(t_{n+1}, z(t_{n+1}))] \\ &- 0.5h_n[f(t_n, z_n) - f(t_n, z(t_n))]. \end{aligned}$$

Используя в данном выражении формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого порядка и переходя к норме, имеем

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| \leq 0.5Ah_n^2 + 0.5Bh_n(\varphi_n + \varphi_{n+1}). \quad (3.13)$$

Подставим (3.12) в правую часть (3.13), то есть

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| \leq 0.5Bh_n(\psi_n + \psi_{n-1}) + 0.5Ah_n^2 + BDh_n(h_n + h_{n-1}). \quad (3.14)$$

Учитывая, что

$$z(t_{n+1}) - z_{n+1} = z(t_{n+1}) - y_{n+1} + y_{n+1} - z_{n+1},$$

запишем

$$\varphi_{n+1} \leq \psi_{n+1} + |z_{n+1} - y_{n+1}|.$$

Так как  $\psi_n = O(h_t^2)$ , то из этого неравенства и (3.14) следует  $\varphi_n = O(h_t^2)$ , то есть теорема 2.1 доказана.

Теперь рассмотрим некоторые свойства численного решения, полученного в результате применения схемы (3.1) к скалярному уравнению (2.7). В этом случае (3.1) приобретает следующий вид

$$\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & 1 \\ 0.5\kappa(1+\kappa) & 1+0.5\kappa \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы перехода можно найти из уравнения

$$\mu^2 - \mu(1.5\kappa + 1) + 0.5\kappa = 0, \quad (3.15)$$

а область устойчивости схемы (3.1) описывается кривой  $|\mu| = 1$  в комплексной плоскости  $\kappa$ ,  $Re(\kappa) \leq 0$ . В обозначениях  $\mu = \varepsilon + i\nu$  и  $\kappa = s + ig$  задача о нахождении области устойчивости сводится к нахождению множества точек, ограниченных кривой

$$\varepsilon^2 + \nu^2 = 1. \quad (3.16)$$

Подставляя выражения для  $\mu$  и  $\kappa$  в уравнение (3.15) и приравнявая действительную и мнимую части нулю, получим нелинейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - \nu^2 - (1.5s + 1)\varepsilon + 1.5g\nu + 0.5s &= 0, \\ 2\varepsilon\nu - (1.5s + 1)\nu - 1.5g\varepsilon + 0.5g &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3.16), умножим первое уравнение на  $\varepsilon$ , а второе на  $\nu$  и сложим. Затем умножим первое уравнение на  $\nu$ , а второе на  $-\varepsilon$  и сложим. Получим систему следующего вида

$$\begin{aligned} \varepsilon - (1.5s + 1) + 0.5(s\varepsilon + g\nu) &= 0, \\ -\nu + 1.5g + 0.5(s\nu - g\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения выразим значение  $g$

$$g = \frac{\nu(2-s)}{3-\varepsilon}, \quad (3.17)$$

а затем, подставляя его в первое уравнение, получим  $s = s(\varepsilon)$

$$s = \frac{2(\varepsilon-1)^2}{3\varepsilon-5}, \quad s(1) = 0, \quad s(-1) = -1. \quad (3.18)$$

Вычислим производную функции  $s$  по  $\varepsilon$ , то есть

$$s' = \frac{(\varepsilon - 1)(6\varepsilon - 14)}{(3\varepsilon - 5)^2}.$$

Из полученной формулы видно, что на промежутке  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$  функции  $s(\varepsilon)$  монотонная, своего максимума достигает при  $\varepsilon = 1$ , то есть  $-1 \leq s \leq 0$ . Выражая  $\varepsilon$  из (3.18), имеем

$$\varepsilon = 1 + 0.75s \pm \sqrt{5.0625s^2 - s}. \quad (3.19)$$

Так как  $s(-1) = -1$ , то корень берем со знаком минус. Подставляя  $\varepsilon$  в формулу для вычисления  $g$ , при условии (3.16), получим уравнение кривой

$$g = \frac{\pm \sqrt{1 - (1 + 0.75s - \sqrt{0.5625s^2 - s})^2} (2 - s)}{2 - 0.75s + \sqrt{0.5625s^2 - s}},$$

ограничивающей область устойчивости схемы (3.1) в комплексной плоскости  $\kappa$ .

Для определения локальной ошибки выразим из уравнения (3.15) собственные числа матрицы перехода

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= 0.5 + 0.75\kappa \pm \sqrt{0.5625\kappa^2 + 0.25\kappa + 0.25} = \\ &= 0.5 + 0.75\kappa \pm [0.5 + 0.25\kappa + 0.5\kappa^2 - 0.25\kappa^3 + O(\kappa^4)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Разложим вектор  $(z_n, y_n)$  по собственным векторам данной матрицы

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_n \\ y_n \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 1/(\mu_1 - \kappa) \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 - \kappa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/(\mu_1 - \kappa) & 1 \\ 1 & \mu_2 - \kappa \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Тогда вектор  $(c_1, c_2)$  можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{\mu_1 - \kappa}{\mu_2 - \mu_1} \begin{pmatrix} \mu_2 - \kappa & -1 \\ -1 & 1/(\mu_1 - \kappa) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что  $z_n = y_n + O(h^2)$ , получим

$$\begin{aligned} c_1 &= (\mu_1 - \kappa)(\mu_2 - \kappa - 1)y_n/(\mu_2 - \mu_1) + O(\kappa^2) = y_n + O(\kappa), \\ c_2 &= (\mu_1 - \kappa)[-1 + 1/(\mu_1 - \kappa)]y_n/(\mu_2 - \mu_1) + O(\kappa^2) \\ &= (\kappa + 1 - \mu_1)y_n/(\mu_2 - \mu_1) + O(\kappa^2) = O(\kappa^2). \end{aligned}$$

Так как  $\mu_2 = O(\kappa)$  и  $c_2 = O(\kappa^2)$ , то из (3.21) следует, что вкладом в решение, даваемым вторым собственным вектором, можно пренебречь. В

результате относительную локальную ошибку аппроксимации для схемы (3.1) в точке  $t_{n+1}$  можно вычислить по следующей приближенной формуле

$$\delta_{n+1} = e^\kappa - \mu_1(\kappa) = \frac{5}{12}\kappa^3 + O(\kappa^4).$$

Используя эти рассуждения, оценку глобальной ошибки схемы (3.1) можно вычислить по формуле (2.33), то есть для контроля точности предлагается применять неравенство

$$\|y_{n+1} - z_{n+1}\| \leq \varepsilon. \quad (3.22)$$

Алгоритм переменного шага на основе схемы (3.1) и неравенства (3.22) успешно использовался для расчета динамики подшипника скольжения [13]. Из приведенных там результатов расчетов следует, что при точности вычислений порядка 1-го процента данный алгоритм эффективнее существующих.

### 3.2 Методы типа Рунге-Кутты

Ниже для численного решения задачи Коши (2.1) и (2.2) будем применять явные методы типа Рунге-Кутты следующего вида, соответственно

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \quad k_i = hf(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad \alpha_1 = 0, \quad (3.23)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \quad k_i = hf(y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad (3.24)$$

где  $p_{mi}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ , – коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости (3.23) и (3.24),  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , – стадии метода. Там, где это не будет вызывать недоразумений, первый индекс при записи  $p_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , будем опускать.

Для упрощения выкладок далее будут исследоваться только методы (3.24). Однако все построенные ниже численные схемы можно использовать для решения неавтономных систем. Для этого достаточно в (3.23) подставить  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , определенные следующим образом

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad 2 \leq i \leq m. \quad (3.25)$$



Запишем приближенное решение (3.24) в виде ряда Тейлора в окрестности точки  $t_n$  до членов с  $h^4$  включительно. Для этого введем в рассмотрение верхнюю треугольную матрицу  $B_m$  с элементами  $b_{ij}$ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} b_{1i} &= 1, \quad 1 \leq i \leq m, \quad b_{ki} = 0, \quad 2 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq k-1, \\ b_{ki} &= \sum_{j=k-1}^{i-1} \beta_{ij} b_{k-1,j}, \quad 2 \leq k \leq m, \quad k \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $\beta_{ij}$  есть коэффициенты схемы (3.24). В дальнейшем матрицы  $B_m$  будут использоваться для автоматизированного построения методов на ЭВМ.

*Теорема 2.2. Матрица  $B_m$  невырожденная тогда и только тогда, когда*

$$\beta_{j,j-1} \neq 0, \quad 2 \leq j \leq m, \quad (3.27)$$

где  $\beta_{i,j-1}$  есть коэффициенты схемы (3.24).

Матрица  $B_m$  является верхней треугольной. С помощью (3.26) и с использованием метода математической индукции тривиально показывается, что ее диагональные элементы можно представить в виде

$$b_{ii} = \prod_{j=2}^i \beta_{j,j-1}, \quad 2 \leq i \leq m. \quad (3.28)$$

Доказательство теоремы 2.2 следует из того, что условия  $b_{ii} \neq 0$ ,  $2 \leq i \leq m$ , и (3.27) эквивалентны.

Соотношения (3.27) означают, что сразу после вычисления каждой новой стадии она вовлекается в вычислительный процесс, что является естественным условием при определении методов (3.24). Поэтому всюду ниже будем считать условия (3.27) выполненными.

*Теорема 2.3. Пусть метод (3.24) применяется для решения задачи (2.7). Тогда имеют место соотношения*

$$y_{n+1} = Q_m(z)y_n, \quad z = \lambda h, \quad Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, \quad (3.29)$$

где

$$c_{mi} = \sum_{j=i}^m b_{ij} p_{mj}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.30)$$

Сначала покажем справедливость равенства

$$k_j = \left( \sum_{l=1}^j b_{lj} z^l \right) y_n, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (3.31)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При  $j = 1$  выполнение (3.31) очевидно. Пусть (3.31) выполняется при  $j = i$ . Тогда для  $j = i + 1$  имеем

$$k_{i+1} = z(y_n + \sum_{j=1}^i \beta_{i+1,j} k_j) = z(1 + \sum_{j=1}^i \beta_{i+1,j} \sum_{l=1}^j b_{lj} z^l) y_n.$$

Учитывая соотношение  $b_{1,i+1} = 1$  и уравнения (3.26), запишем выражение в скобках по возрастающим степеням  $z$ , то есть

$$k_{i+1} = [b_{1,i+1} z + \sum_{l=1}^i z^{l+1} (\sum_{j=l}^i \beta_{i+1,j} b_{lj})] y_n,$$

откуда, с учетом последнего равенства (3.26), следует

$$k_{i+1} = (b_{1,i+1} z + \sum_{l=1}^i b_{l+1,i+1} z^{l+1}) y_n.$$

Теперь, заменяя индекс  $l + 1$  на  $l$  и внося первое слагаемое под знак суммы, получим (3.31).

Для доказательства соотношения (3.29) подставим (3.31) в первую формулу (3.24). В результате имеем

$$y_{n+1} = [1 + \sum_{i=1}^m p_{mi} (\sum_{l=1}^i b_{li} z^l)] y_n.$$

Переписывая выражение в скобках по степеням  $z$  и учитывая равенства (3.26), получим (3.29), (3.30).

Известно (см., например, [57], с. 214), что функция устойчивости  $Q_m(z)$  явного  $m$ -стадийного метода типа Рунге-Кутты представляет собой многочлен степени  $m$  относительно  $z$ . Теорема 2.3 позволяет вычислить коэффициенты этого полинома через параметры схемы (3.24). Ниже часто будем обращаться к соотношениям (3.30). Поэтому перепишем их еще в несколько ином виде. Для этого введем обозначения

$$C_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^T, \quad P_m = (p_{m1}, \dots, p_{mm})^T. \quad (3.32)$$

Тогда (3.30) можно представить в виде

$$B_m P_m = C_m. \quad (3.33)$$

где элементы матрицы  $B_m$  определены формулами (3.26).

В случае задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay + b, \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k \quad (3.34)$$

соотношения (3.33) можно применять для построения методов заданного порядка точности. Используя обозначение  $f(y) = Ay + b$ , нетрудно убедиться, что для точного решения  $y(t_{n+1})$  задачи (3.34) и приближенного решения  $y_{n+1}$ , полученного по схеме (3.24), справедливы представления

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} f^{(i-1)} f, \quad (3.35)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m c_{mi} h^i f_n^{(i-1)} f_n, \quad (3.36)$$

где элементарные дифференциалы вычислены, соответственно, в точках  $y(t_n)$  и  $y_n$ , а коэффициенты  $c_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , и параметры схемы (3.24) связаны равенствами (3.33).

Из сравнения (3.35) и (3.36) при условии  $y_n = y(t_n)$  следует, что схема (3.24) будет иметь  $p$ -й порядок точности, если

$$c_{mi} = \frac{1}{i!}, \quad 1 \leq i \leq p. \quad (3.37)$$

Теперь, задаваясь, например, значениями параметров  $\beta_{ij}$ ,  $2 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ , остальные коэффициенты схемы (3.24)  $p$ -го порядка точности получим единственным образом из линейной системы (3.33). Таким образом, если метод (3.24) применяется для решения задачи (3.34), то справедливы следующие следствия из теоремы 2.3.

*Следствие 1. Для любого целого положительного  $m$  можно построить  $m$ -стадийный метод  $m$ -го порядка точности.*

*Следствие 2. Максимальный порядок точности  $m$ -стадийной схемы не может быть больше  $m$ .*

Запишем представление точного решения в виде ряда Тейлора до членов с  $h^4$  включительно. Введем следующие обозначения элементар-

ных дифференциалов

$$\begin{aligned}
f'f &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial y_i} f_i, \\
f'^2 f &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial y_i} \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial y_j} f_j, \\
f''f^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} f_i f_j, \\
f'^3 f &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial y_i} \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial y_k} f_k, \\
f'f''f^2 &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial y_i} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_j \partial y_k} f_j f_k, \\
f''f'f^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial y_k} f_k \right) f_j, \\
f'''f^3 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^3 f}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} f_i f_j f_k.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Тогда точное решение  $y(t_{n+1})$  задачи (2.2) в окрестности точки  $t_n$  можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2} f'f + \frac{h^3}{6} (f'^2 f + f''f^2) \\
&+ \frac{h^4}{24} (f'^3 f + f'f''f^2 + 3f''f'f^2 + f'''f^3) + O(h^5),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

где элементарные дифференциалы вычислены в точке  $y(t_n)$ .

Приближенное решение  $y_{n+1}$ , полученное по схеме (3.24), представимо в виде

$$\begin{aligned}
y_{n+1} = y_n &+ \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=i}^m b_{ij} p_{mj} \right) h^i f_n'^{(i-1)} f_n + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^m b_{2i} p_{mi} \right) h^3 f_n'' f_n^2 \\
&+ \frac{1}{6} h^4 \left[ \left( \sum_{i=2}^m b_{2i}^3 p_{mi} \right) f_n''' f_n^3 + 6 \left( \sum_{i=3}^m b_{2i} b_{3i} p_{mi} \right) f_n'' f_n' f_n^2 \right. \\
&\left. + 6 \left( \sum_{i=3}^m \left( \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} b_{2j}^2 \right) p_{mi} \right) f_n' f_n'' f_n^2 \right] + O(h^5),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

где нижний индекс  $n$  при записи элементарных дифференциалов (3.38) означает, что они вычислены в точке  $y_n$ , а коэффициенты  $b_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq$

$m$ , определены формулами (3.26). Справедливость (3.40) вытекает из следующей теоремы.

*Теорема 2.4. Стадии метода (3.24) представимы в виде*

$$k_i = \sum_{j=1}^i b_{ji} h^j f_n^{(j-1)} f_n + \frac{1}{2} b_{2i}^2 h^3 f_n'' f_n^2 + \frac{1}{6} h^4 [b_{2i}^3 f_n''' f_n^3 + 6b_{2i} b_{3i} f_n'' f_n' f_n^2 + 3(\sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} b_{2j}^2) f_n' f_n'' f_n^2] + O(h^5) \quad (3.41)$$

Правильность представления (3.41) показывается методом математической индукции. Из-за громоздкости выкладок доказательство не приводится. Подставляя (3.41) в первую формулу (3.24) и учитывая верхний треугольный вид матрицы  $B_m$ , получим (3.40).

### 3.3 Схемы второго порядка точности

Для численного решения задачи Коши (2.2) рассмотрим двухстадийную формулу типа Рунге-Кутты

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2, \\ k_1 &= h f(y_n), \\ k_2 &= h f(y_n + \beta_{21} k_1). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Получим условия второго порядка точности схемы (3.42). Для этого запишем представление приближенного решения в виде ряда Тейлора. С использованием (3.40), имеем

$$y_{n+1} = y_n + (p_1 + p_2) h f_n + \alpha_2 p_2 h^2 f_n' f_n + \frac{1}{2} \alpha_2^2 p_2 h^3 f_n'' f_n^2 + O(h^4). \quad (3.43)$$

где параметр  $\alpha_2$  задается формулой (3.25).

Пусть  $y_n = y(t_n)$ . Сравнивая (3.43) и (3.39) до членов с  $h^2$  включительно, получим условия второго порядка, то есть

$$p_1 + p_2 = 1, \quad 2\alpha_2 p_2 = 1, \quad (3.44)$$

при этом локальная ошибка  $\delta_{n,2}$  схемы (3.42) имеет вид

$$\delta_{n,2} = \frac{h^3}{6} [f_n'^2 f_n + (1 - 3\alpha_2^2 p_2) f_n'' f_n^2] + O(h^4). \quad (3.45)$$

Рассмотрим одновременно метод первого порядка

$$z_{n+1} = y_n + k_1, \quad (3.46)$$

локальную ошибку  $\delta_{n,1}$  которого можно вычислить по формуле

$$\delta_{n,1} = \frac{1}{2}h^2 f' f + O(h^3). \quad (3.47)$$

Условие согласования (2.22) будет выполнено, если

$$3\alpha_2^2 p_2 = 1.$$

Теперь параметры схемы (3.42) однозначно определяются из (3.44)

$$\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{2}{3}, \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{3}{4}. \quad (3.48)$$

Введем обозначение

$$\varepsilon'_{n,2} = \frac{1}{6}(y_n - z_n) \equiv \frac{1}{4}(k_2 - k_1) = \frac{1}{6}h^2 f'_n f_n + O(h^3). \quad (3.49)$$

Тогда для контроля точности вычислений можно использовать неравенство типа (2.34), то есть

$$\|k_2 - k_1\| \leq 4\varepsilon. \quad (3.50)$$

Отметим, что так как приращение  $k_1$  зависит от размера шага линейно, то повторное вычисление решения в случае нарушения требуемой точности расчетов<sup>1</sup> будет приводить только к одному дополнительному вычислению правой части дифференциальной задачи. Учитывая что

$$hf(y_{n+1}) - k_1 = h^2 f'_n f_n + O(h^3),$$

при выборе шага будем контролировать оценку ошибки вида

$$\varepsilon''_{n,2} = \frac{1}{6}[hf(y_{n+1}) - k_1],$$

то есть при выборе шага будем дополнительно проверять неравенство

$$\|hf(y_{n+1}) - k_1\| \leq 6\varepsilon. \quad (3.51)$$

Ниже алгоритм интегрирования на основе формулы (3.42) с параметрами (3.48) и неравенствами (3.50), (3.51) будем называть RK21.

При сравнении свойств устойчивости численных схем удобно пользоваться отношением длины интервала устойчивости к количеству вычислений функции  $f$  на шаге интегрирования (см., например, [54], с. 46-48). В явном методе Эйлера, например, на одно вычисление функции  $f$  приходится две единицы длины интервала устойчивости. Исследуем схему (3.42) на линейной задаче (2.7). Применяя (3.42) с параметрами (3.48) к (2.7), получим

$$y_{n+1} = Q_{2,2}(z)y_n, \quad z = \lambda h, \quad Q_{2,2}(z) = 1 + z + 0.5z^2.$$

---

<sup>1</sup>возврат в результате невыполнения неравенства (3.50)

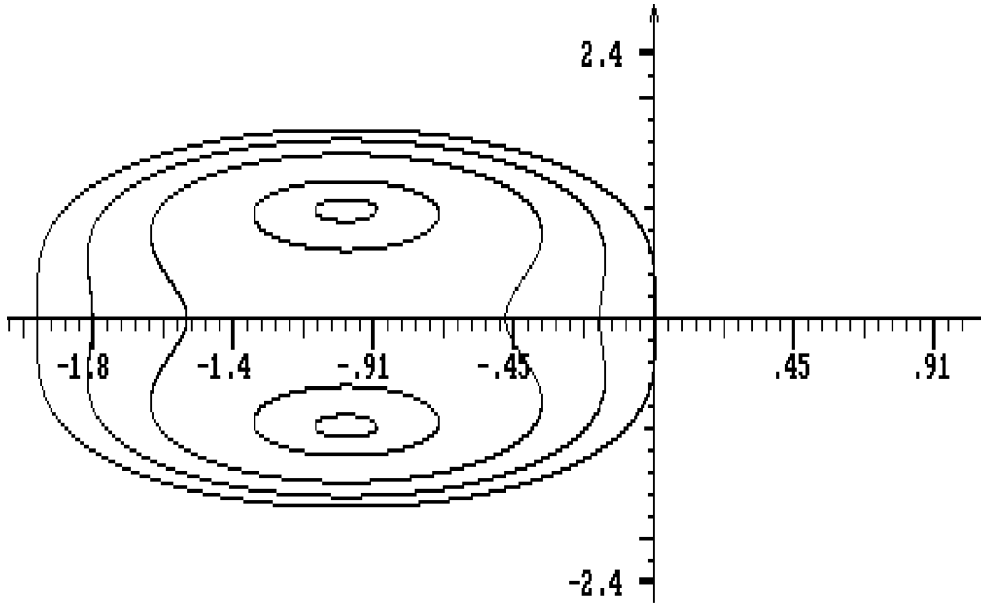


Рис. 2.1. Область устойчивости метода RK21

Формула (3.42) будет устойчива, если  $|Q_{2,2}(z)| \leq 1$ . Если переменная  $z$  вещественная, то это неравенство равносильно двум следующим

$$1 + 0.5z \geq 0, \quad z^2 + 2z + 4 \geq 0,$$

то есть  $-2 \leq z \leq 0$ . Отсюда видно, что в алгоритме RK21 на одно вычисление функции  $f$  приходится единица длины интервала устойчивости. Если шаг ограничен только в силу устойчивости, то явный метод Эйлера может оказаться эффективнее. Поэтому построим еще одну численную схему второго порядка с контролем точности вычислений, в которой на одно вычисление правой части дифференциальной задачи приходится не менее двух единиц длины интервала устойчивости. Для этого рассмотрим формулу типа Рунге-Кутты с тремя вычислениями функции  $f$  на шаге интегрирования

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \\ k_1 &= h f(y_n), \\ k_2 &= h f(y_n + \beta_{21} k_1), \\ k_3 &= h f(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Используя (3.40), получим следующее представление приближен-

ного решения

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (p_1 + p_2 + p_3)hf_n + (\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3)h^2 f'_n f_n \\ &+ \frac{1}{6}h^3 [gf_n'^2 f_n + 0.5(\alpha_2^2 p_2 + \alpha_3^2 p_3)f_n'' f_n^2] + O(h^3), \end{aligned} \quad (3.53)$$

где  $g = \alpha_2 \beta_{32} p_3$ , а  $\alpha_i, 2 \leq i \leq 3$  задаются по формуле (3.25).

Пусть  $y_n = y(t_n)$ . Сравнивая (3.53) и (3.39) до членов с  $h^2$  включительно, получим условия второго порядка точности схемы (3.52), то есть

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = \frac{1}{2}. \quad (3.54)$$

Используя для контроля точности формулу (3.46), видим, что для выполнения условий согласования (2.22) достаточно потребовать выполнения соотношения

$$3\alpha_2^2 p_2 + 3\alpha_3^2 p_3 = 1, \quad (3.55)$$

при этом локальная ошибка  $\delta_{n,2}$  формулы (3.52) имеет вид

$$\delta_{n,2} = \frac{1-6g}{6}h^3 f'^2 f + O(h^4). \quad (3.56)$$

Из (3.56) следует, что при выполнении (3.54), (3.55) и равенства  $g = 1/6$  схема (3.52) имеет третий порядок точности. Выбирая значение  $g$  близкое к  $1/6$  можно коэффициент в главном члене локальной ошибки сделать как угодно малым. Но это может привести к тому, что начнут доминировать слагаемые порядка  $O(h^4)$  и характер поведения ошибки уже не будет определяться главным членом.

Исследуем совместность (3.54), (3.55) при условии  $g = \alpha_2 \beta_{32} p_3$ . Сначала рассмотрим следующую систему

$$\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2^2 p_2 + \alpha_3^2 p_3 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 \beta_{32} p_3 = g,$$

линейную относительно  $p_2, p_3$ . Для ее совместности необходимо обращение в нуль определителя расширенной матрицы. Из (3.25) и (3.27) следует, что  $\alpha_2 \neq 0$ . Раскрывая определитель и приводя подобные члены, получим

$$6g\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) = \beta_{32}\alpha_2(2 - 3\alpha_2). \quad (3.57)$$

Выберем  $g, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\beta_{32}$  так, чтобы они удовлетворяли (3.57), причем  $\alpha_2 = \beta_{21}, \alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}$ . Тогда коэффициенты  $p_i, 1 \leq i \leq 3$ , можно найти последовательным исключением из следующей линейной системы

$$\alpha_2 \beta_{32} p_3 = g, \quad \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0.5, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (3.58)$$



Учитывая (3.46), для контроля точности вычислений (3.52) можно использовать оценку ошибки  $\varepsilon'_{n,2}$  вида

$$\varepsilon'_{n,2} = \frac{1-6g}{3}[(p_1-1)k_1 + p_2k_2 + p_3k_3] = \frac{1-6g}{6}h^2f'_nf_n + O(h^3), \quad (3.59)$$

то есть на каждом шаге нужно контролировать неравенство

$$\|(p_1-1)k_1 + p_2k_2 + p_3k_3\| \leq \frac{3\varepsilon}{|1-6g|}. \quad (3.60)$$

При применении (3.60) в случае невыполнения точности расчетов повторное определение решения будет сопровождаться двумя дополнительными вычислениями правой части дифференциальной задачи. Поэтому построим более экономичное неравенство для контроля точности вычислений. Сравнивая (3.59) с соотношением

$$k_2 - k_1 = \alpha_2 h^2 f'_n f_n + O(h^3),$$

видим, что для контроля точности (3.52) с параметрами (3.57), (3.58) можно использовать неравенство

$$\|k_2 - k_1\| \leq \frac{6|\alpha_2|\varepsilon}{|1-6g|}. \quad (3.61)$$

Так как  $k_1$  зависит от размера шага линейно, то в этом случае возврат при нарушении требуемой точности расчетов приводит всего лишь к одному дополнительному вычислению функции  $f$ .

Дополнительное неравенство для выбора величины шага интегрирования построим так же, как и для схемы (3.42). Учитывая вид разности  $(hf(y_{n+1}) - k_1)$ , оценку ошибки  $\varepsilon''_{n,2}$  можно вычислить по формуле

$$\varepsilon''_{n,2} = \frac{1-6g}{6}[hf(y_{n+1}) - k_1],$$

то есть при выборе шага, наряду с (3.61), будем контролировать неравенство

$$\|h[f(y_{n+1}) - f(y_n)]\| \leq \frac{6\varepsilon}{|1-6g|}. \quad (3.62)$$

Приведем некоторые соображения по выбору конкретных параметров схемы (3.52). Из (3.57) и (3.58) видно, что при их выборе имеется некоторый произвол. Свободные параметры  $g, \alpha_2, \alpha_3, \beta_{32}$  можно использовать, например, для улучшения свойств устойчивости схемы (3.52).

Для определения влияния величины  $g$  на размер интервала устойчивости применим (3.52) к (2.7). Учитывая (3.57), (3.58) с использованием (3.29), (3.30), получим, что функция устойчивости  $Q_{3,2}(z)$  схемы (3.52) имеет вид

$$Q_{3,2}(z) = 1 + z + 0.5z^2 + gz^3, \quad z = \lambda h. \quad (3.63)$$

Вопрос о том, как связаны коэффициенты многочлена устойчивости (3.29) с размером и формой области устойчивости, ниже будет рассматриваться подробно. Здесь ограничимся замечанием, что максимальная длина 6.26 интервала устойчивости достигается при  $g = 1/16$ . Однако при данном значении  $g$  имеет место  $Q_{3,2}(-4) = 1$ , и поэтому небольшие возмущения<sup>2</sup> могут приводить к уменьшению области устойчивости. Если исходить из требования, чтобы длина интервала устойчивости была достаточно велика, то  $g$  можно выбрать равным  $1/15$ . При этом на одно вычисление правой части дифференциальной задачи приходится примерно две единицы длины интервала устойчивости, то есть с точки зрения устойчивости данный метод и метод Эйлера различаются незначительно. В то же время формула (3.52) обладает вторым порядком точности и снабжается алгоритмом контроля точности вычислений. Поэтому она может быть полезней метода Эйлера.

Если  $Q_{3,2}(z)$  обладает монотонностью на интервале устойчивости<sup>3</sup>, то можно ожидать, что небольшие возмущения не будут приводить к сокращению области устойчивости. Требование монотонности эквивалентно тому, что производная  $Q'_{3,2}(z) = 3gz^2 + z + 1$  не меняет знак на интервале устойчивости. Учитывая, что корни уравнения  $Q'_{3,2}(z) = 0$  имеют вид

$$z_{1,2} = -\frac{1}{6g} \pm \sqrt{\frac{1-12g}{36g^2}},$$

видим, что  $Q_{3,2}(z)$  будет монотонной, если  $g \geq 1/12$ .

Далее, в процессе вычислений по формуле (3.52) приходится определять приближенное решение в двух промежуточных точках

$$y_{n+1,1} = y_n + \beta_{21}k_1, \quad y_{n+1,2} = y_n + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2.$$

Если области устойчивости промежуточных численных схем уже области устойчивости основной схемы, то приближение к решению в промежуточных точках может искажаться за счет усиления ошибок округлений, что приводит к дополнительной ошибке в решении. Потребуем, чтобы интервалы устойчивости этих схем были не меньше, чем у основной схемы. Нетрудно убедиться, что при  $\beta_{21} = 1/3$  и  $\alpha_3 = 2\beta_{32}$  длины интервалов устойчивости промежуточных численных схем не меньше шести. Теперь, полагая значение параметра  $g$  равным  $1/12$ ,  $1/15$  и  $1/16$ ,

---

<sup>2</sup>например, за счет ошибок округлений

<sup>3</sup>таким свойством обладают известные методы Мерсона и Фельберга

из (3.57), (3.58) получим следующие наборы параметров

$$\begin{aligned} g = \frac{1}{12}, \quad \alpha_2 = \beta_{21} = \beta_{31} = \beta_{32} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{3}, \\ p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{3}{4}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} g = \frac{1}{15}, \quad \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{4}, \quad \beta_{31} = \beta_{32} = \frac{3}{8}, \\ p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{3}{10}, \quad p_3 = \frac{8}{15}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} g = \frac{1}{16}, \quad \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{3}, \quad \beta_{31} = \beta_{32} = \frac{7}{18}, \quad \alpha_3 = \frac{7}{9}, \\ p_1 = \frac{1}{7}, \quad p_2 = \frac{3}{8}, \quad p_3 = \frac{27}{56}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ниже алгоритмы интегрирования на основе схемы (3.52) с параметрами (3.64) и (3.65) будем называть, соответственно, RK22 и RK23.

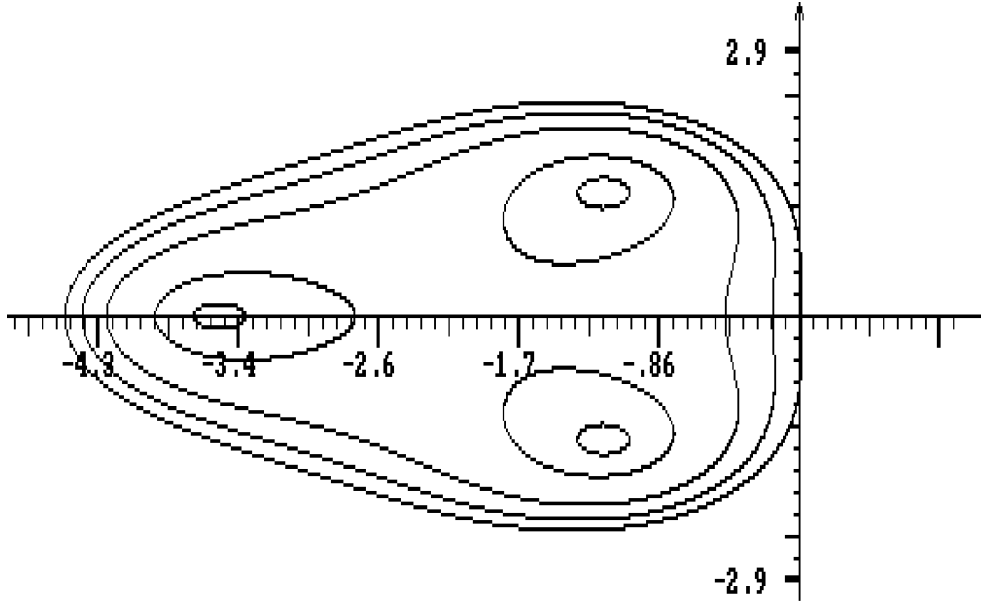


Рис. 2.2. Область устойчивости метода RK22

### 3.4 Схемы третьего порядка точности

Легко показать [15], что на основе трехстадийной схемы (3.52) нельзя построить метод третьего порядка с контролем ошибки (2.33). По-

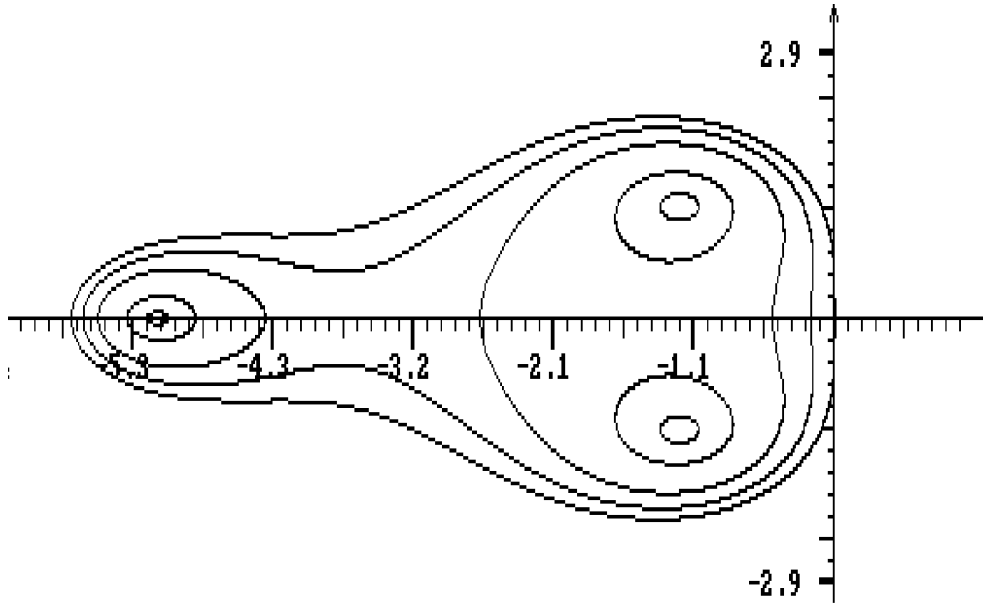


Рис. 2.3. Область устойчивости метода RK23

этому рассмотрим четырехстадийную схему

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^4 p_i k_i, \\
 k_1 &= h f(y_n), \\
 k_2 &= h f(y_n + \beta_{21} k_1), \\
 k_3 &= h f(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), \\
 k_4 &= h f(y_n + \beta_{41} k_1 + \beta_{42} k_2 + \beta_{43} k_3).
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

С использованием (3.40), имеем

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \left( \sum_{i=1}^4 p_i \right) h f_n + (\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4) h^2 f'_n f_n + h^3 [(\alpha_2 \beta_{32} p_3 \\
 &+ \alpha_2 \beta_{42} p_4 + \alpha_3 \beta_{43} p_4) f_n'^2 f_n + \frac{1}{2} (\alpha_2^2 p_2 + \alpha_3^2 p_3 + \alpha_4^2 p_4) f_n'' f_n^2] \\
 &+ h^4 [\alpha_2 \beta_{32} \beta_{43} p_4 f_n'^3 f_n + \frac{1}{2} (\alpha_2^2 \beta_{32} p_3 + \alpha_2^2 \beta_{42} p_4 + \alpha_3^2 \beta_{43} p_4) f_n' f_n'' f_n^2 \\
 &+ (\alpha_2 \alpha_3 \beta_{32} p_3 + \alpha_2 \alpha_4 \beta_{42} p_4 + \alpha_3 \alpha_4 \beta_{43} p_4) f_n'' f_n' f_n^2 \\
 &+ \frac{1}{6} (\alpha_2^3 p_2 + \alpha_3^3 p_3 + \alpha_4^3 p_4) f_n''' f_n^3] + O(h^5).
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

где элементарные дифференциалы вычислены в точке  $y_n$ , а параметры  $\alpha_i, 2 \leq i \leq 4$ , определены формулами (3.25).

Для контроля точности (3.67) будем использовать формулу второго порядка точности следующего вида

$$z_{n+1} = y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2, \quad (3.69)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  заданы в (3.67).

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при исследовании (3.52), получим условия третьего порядка точности схемы (3.67) и условия согласования ошибок (2.22), то есть

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1, \\ \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 &= \frac{1}{2}, \\ \alpha_2^2 p_2 + \alpha_3^2 p_3 + \alpha_4^2 p_4 &= \frac{1}{3}, \\ \alpha_2^3 p_2 + \alpha_3^3 p_3 + \alpha_4^3 p_4 &= \frac{1}{4}, \\ \alpha_2 \beta_{32} p_3 + \alpha_2 \beta_{42} p_4 + \alpha_3 \beta_{43} p_4 &= \frac{1}{6}, \\ \alpha_2 \alpha_3 \beta_{32} p_3 + \alpha_2 \alpha_4 \beta_{42} p_4 + \alpha_3 \alpha_4 \beta_{43} p_4 &= \frac{1}{8}, \\ \alpha_2^2 \beta_{32} p_3 + \alpha_2^2 \beta_{42} p_4 + \alpha_3^2 \beta_{43} p_4 &= \frac{(24g - 1)(2 - 3\alpha_2) + 2}{24}, \\ g = \alpha_2 \beta_{32} \beta_{43} p_4, \end{aligned} \quad (3.70)$$

где  $g$  – некоторое число,  $g \neq 0$ . При записи предпоследнего соотношения (3.70) воспользовались равенством  $2b_2\alpha_2 = 1$ , которое следует из условия второго порядка точности схемы (3.69).

Исследуем совместность (3.70). Если выбрать параметры  $g, \alpha_i, \beta_{ij}, 2 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq i - 1$ , то значения коэффициентов  $\alpha_i, 1 \leq i \leq 4$ , можно вычислить последовательным исключением из системы

$$\begin{aligned} \alpha_2 \beta_{32} \beta_{43} p_4 &= g, \\ \alpha_2 \beta_{32} p_3 + \alpha_2 \beta_{42} p_4 + \alpha_3 \beta_{43} p_4 &= \frac{1}{6}, \\ \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 &= \frac{1}{2}, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Возьмем пятое, седьмое и восьмое уравнения (3.70). Если их рассматривать как систему линейных уравнений относительно  $p_3$  и  $p_4$ , то для ее совместности требуется обращение в нуль определителя расширенной матрицы. После приведения подобных членов это условие имеет вид

$$24g\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_2\beta_{32}[4\alpha_2 - (24g - 1)(2 - 3\alpha_2) - 2] = 0. \quad (3.72)$$

Теперь умножим второе, третье и пятое уравнения (3.70) на  $\alpha_3$  и вычтем из полученных соотношений третье, четвертое и шестое равенства, соответственно. Будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha_4 - \frac{1}{3} &= \alpha_2(\alpha_4 - \alpha_2)p_2 + \alpha_3(\alpha_4 - \alpha_3)p_3, \\ \frac{1}{4}\alpha_4 - \frac{1}{4} &= \alpha_2(\alpha_4 - \alpha_2)p_2 + \alpha_3^2(\alpha_4 - \alpha_3)p_3, \\ \frac{1}{6}\alpha_4 - \frac{1}{8} &= \alpha_2\beta_{32}(\alpha_4 - \alpha_3)p_3.\end{aligned}\tag{3.73}$$

Умножим первое уравнение (3.73) на  $\alpha_2$  и вычтем второе. В результате имеем

$$\left(\frac{1}{3}\alpha_4 - \frac{1}{4}\right) - \alpha_2\left(\frac{1}{2}\alpha_4 - \frac{1}{3}\right) = \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)p_3.$$

Подставим сюда вместо  $(\alpha_4 - \alpha_3)p_3$  его выражение из последнего соотношения (3.73). Окончательно получим

$$\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)(4\alpha_4 - 3) = \alpha_2\beta_{32}(8\alpha_2 + 8\alpha_4 - 12\alpha_2\alpha_4 - 6).\tag{3.74}$$

Далее, из последнего соотношения (3.70) следует, что  $\alpha_2$  и  $\beta_{32}$  отличны от нуля. Но тогда  $\alpha_4 \neq 3/4$ , так как в противном случае из (3.74) получим, что либо  $\alpha_2 = 0$  либо  $\beta_{32} = 0$ . Умножим (3.72) на  $(4\alpha_4 - 3)$ , а (3.74) – на  $24g$ . Складывая полученные соотношения, имеем

$$4\alpha_4 = 24g + 3.\tag{3.75}$$

Потребуем совместности второго, третьего, четвертого и восьмого уравнений (3.70). Это будет выполнено, если равен нулю определитель соответствующей расширенной матрицы. Раскрывая определитель и приводя подобные члены, получим

$$\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}(12\alpha_2\alpha_3 - 8\alpha_3 - 8\alpha_2 + 6) = 24g\alpha_4(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2).\tag{3.76}$$

Наконец потребуем совместности пятого, шестого и восьмого уравнений (3.70). Это требование будет выполнено, если обращается в нуль определитель расширенной матрицы, что равносильно выполнению равенства

$$24g\alpha_2\beta_{42}(\alpha_4 - \alpha_3) = \alpha_2\beta_{32}\beta_{43}(3 - 4\alpha_3) + 24g\alpha_3\beta_{43}(\alpha_3 - \alpha_4).$$

Таким образом, если выбрать значения параметров  $g, \alpha_i, \beta_{ij}$ ,  $2 \leq$

$i \leq 4$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \beta_{21}, \\ \alpha_3 &= \beta_{31} + \beta_{32}, \\ \alpha_4 &= \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}, \\ 24\alpha_4 &= 24g + 3, \\ \alpha_2\beta_{32}(8\alpha_2 + 8\alpha_4 - 12\alpha_2\alpha_4 - 6) &= 24g\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2), \\ \alpha_2\beta_{32}\beta_{43}(12\alpha_2\alpha_3 - 8\alpha_3 - 8\alpha_2 + 6) &= 24g\alpha_4(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2), \\ 24g\alpha_2\beta_{42}(\alpha_4 - \alpha_2) &= \beta_{43}[\alpha_2\beta_{32}(3 - 4\alpha_3) + 24g\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_4)],\end{aligned}\quad (3.77)$$

то затем  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , находятся последовательным исключением из (3.71). В результате получим метод третьего порядка точности, локальная ошибка которого имеет вид

$$\delta_{n,3} = \frac{1 - 24g}{24} h^4 f' [f'^2 f + \frac{1}{2} (2 - 3\alpha_2) f'' f^2] + O(h^5). \quad (3.78)$$

Учитывая, что локальная ошибка  $\delta_{n,2}$  формулы (3.69) имеет вид

$$\delta_{n,3} = \frac{1}{6} h^3 [f'^2 f + \frac{1}{2} (2 - 3\alpha_2) f'' f^2] + O(h^4),$$

для контроля точности можно использовать неравенство вида (2.34), то есть

$$\|y_n - z_n\| \leq \frac{4\varepsilon}{|1 - 24g|}, \quad (3.79)$$

где  $y_n$  и  $z_n$  определены, соответственно, формулами (3.67), (3.69).

Далее, так как

$$y_n - z_n = (p_1 - b_1)k_1 + (p_2 - b_2)k_2 + p_3k_3 + p_4k_4,$$

то неравенство (3.79) можно переписать в виде

$$\|(p_1 - b_1)k_1 + (p_2 - b_2)k_2 + p_3k_3 + p_4k_4\| \leq \frac{4\varepsilon}{|1 - 24g|}, \quad (3.80)$$

где  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , определены в (3.71), а  $b_1$  и  $b_2$  вычисляются из требования второго порядка точности схемы (3.69)

$$b_2 = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad b_1 = 1 - b_2.$$

Теперь приведем некоторые соображения по выбору свободных коэффициентов в системе (3.77). Сначала потребуем, чтобы в главный член локальной ошибки входило только слагаемое вида  $h^4 f'^3 f$ . Очевидно, что это условие эквивалентно равенству  $\alpha_2 = 2/3$ . Далее положим  $\alpha_3 = 1$ . В этом случае стадия  $k_3$  вычисляется в точке  $t_{n+1}$ , и отпадает

необходимость в построении дополнительного неравенства для выбора величины шага интегрирования. И наконец последний свободный параметр  $g$  используем для увеличения области устойчивости (3.67). Применяя (3.67) для численного решения (2.7), получим (3.29), где функция устойчивости  $Q_{4,3}(z)$  имеет вид

$$Q_{4,3}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + gz^4, \quad z = \lambda h. \quad (3.81)$$

Ясно, что длина интервала устойчивости схемы (3.67) зависит от выбора параметра  $g$ . С помощью ЭВМ установлено, что максимальная длина интервала устойчивости достигается при  $g \approx 1/54$  и она равна примерно шести. Однако, так как при  $g = 1/54$  имеет место  $Q_{4,3}(-4.5) \approx -1$ , то небольшие возмущения могут приводить к уменьшению области устойчивости. Поэтому рассмотрим случай  $g = 1/53$ .

Далее, при  $g = 1/48$  коэффициент в локальной ошибке (3.78) меньше, чем при  $g = 1/53$ , а в некоторой окрестности точки  $z = -4.5$  выполняется неравенство  $|Q_{4,3}(z)| \leq 0.5$ . Такой запас может быть полезен при небольших возмущениях.

Итак, пусть  $\alpha_2 = 2/3$ ,  $\alpha_3 = 1$ , а параметр  $g$  принимает значения  $1/48$  и  $1/53$ . Тогда из (3.67) и (3.71) последовательным исключением найдем следующие два набора параметров

$$\begin{aligned} g = 1/48, \quad \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{2}{3}, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_{31} = \frac{11}{8}, \quad \beta_{32} = -\frac{3}{8}, \\ \alpha_4 = \frac{7}{8}, \quad \beta_{41} = \frac{1351}{1024}, \quad \beta_{42} = -\frac{525}{1024}, \quad \beta_{43} = \frac{35}{512}, \\ p_1 = \frac{17}{84}, \quad p_2 = \frac{27}{20}, \quad p_3 = \frac{2}{3}, \quad p_4 = -\frac{128}{105}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} g = 1/53, \quad \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{2}{3}, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_{31} = \frac{71}{53}, \\ \beta_{32} = -\frac{18}{53}, \quad \alpha_4 = \frac{183}{212}, \quad \beta_{41} = \frac{24387129}{19056256}, \\ \beta_{42} = -\frac{9264375}{19056256}, \quad \beta_{43} = \frac{663775}{9528128}, \\ p_1 = \frac{443}{2196}, \quad p_2 = \frac{693}{500}, \quad p_3 = \frac{53}{87}, \\ p_4 = -\frac{2382032}{1990125}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ниже алгоритмы интегрирования на основе численной формулы (3.67) с параметрами (3.82) и (3.83) будем называть, соответственно RK31 и RK32.



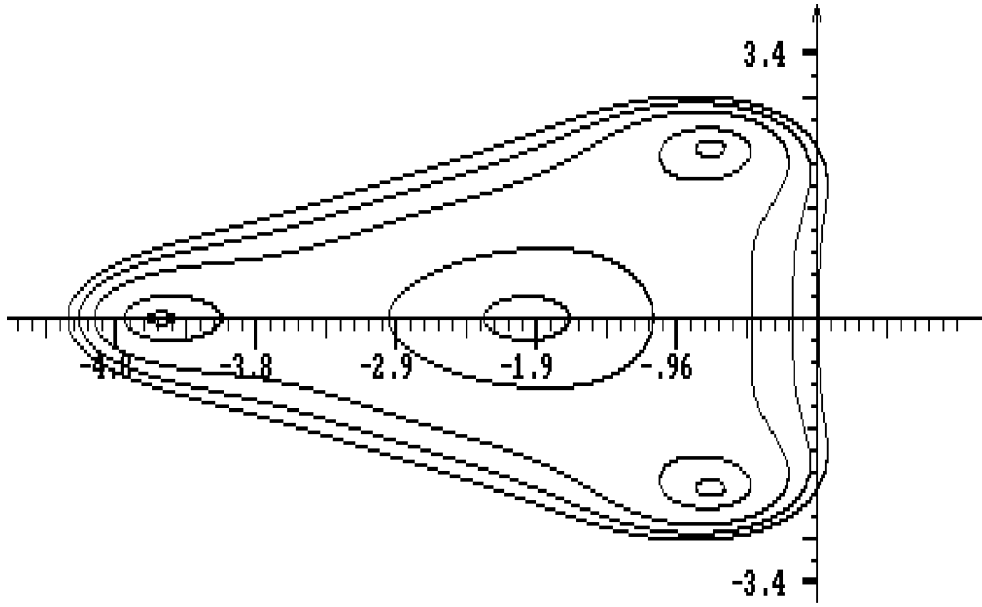


Рис. 2.4. Область устойчивости метода RK31

### 3.5 Оценка ошибки метода Мерсона

Одним из самых эффективных среди явных методов типа Рунге-Кутты четвертого порядка точности является метод Мерсона, который имеет вид

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5, \\
 k_1 &= hf(y_n), \\
 k_2 &= hf(y_n + \frac{1}{3}k_1), \\
 k_3 &= hf(y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2), \\
 k_4 &= hf(y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3), \\
 k_5 &= hf(y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4).
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Пятое вычисление правой части не дает увеличение порядка до пятого, однако позволяет расширить интервал устойчивости примерно до 3.5 и, что самое существенное, оценить величину локальной ошибки  $\delta_{n,4}$  с помощью  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , то есть

$$\delta_{n,4} = \frac{1}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5). \tag{3.85}$$

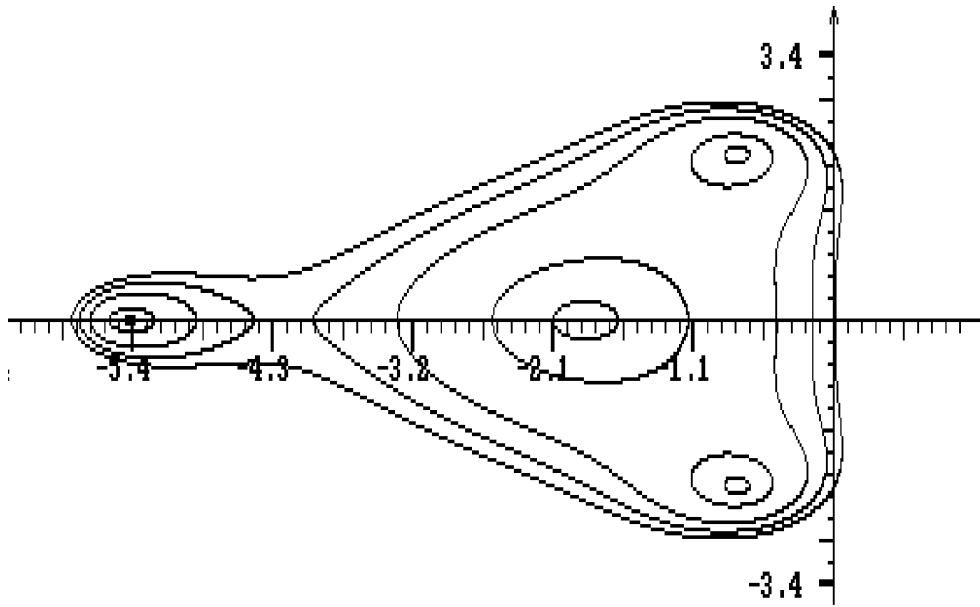


Рис. 2.5. Область устойчивости метода RK32

Во многих библиотеках программ имеется программная реализация метода Мерсона со следующим алгоритмом выбора величины шага интегрирования.

*Шаг 1.* Вычисляются приращения  $k_i, 1 \leq i \leq 5$ .

*Шаг 2.* Вычисляется оценка локальной ошибки по формуле (3.85).

*Шаг 3.* Если для некоторого  $j, 1 \leq j \leq N$ , выполняется неравенство

$$|\delta_{n,4}^j| \geq \varepsilon |y_n^j|, \quad (3.86)$$

где  $j$  есть номер компоненты, то шаг уменьшается в два раза и снова вычисляются<sup>4</sup>  $k_i, 1 \leq i \leq 5$ .

*Замечание.* Если для некоторого  $j, 1 \leq j \leq N$ , выполняется неравенство  $|y_n^j| \leq Rzero$ , то по этой компоненте точность не контролируется, то есть условие (3.86) не проверяется. Величина  $Rzero$  определяется длиной слова ЭВМ.

*Шаг 4.* Вычисляется решение по формуле (3.84).

*Шаг 5.* Если для всех  $j, 1 \leq j \leq N$ , выполняется условие

$$|\delta_{n,4}^j| \leq \varepsilon |y_n^j| / 32, \quad (3.87)$$

то шаг интегрирования удваивается. В противном случае остается без изменения.

<sup>4</sup>управление передается на шаг 1

*Шаг 6.* Выполняется следующий шаг интегрирования.

В формуле (3.87) используется константа  $1/32$ , которая вводится следующим образом. Пусть после успешного шага хотим попытаться увеличить шаг в два раза, то есть  $h_{n+1} = 2h_n$ . Учитывая, что  $\delta_{n,4} = O(h^5)$ , можно записать

$$\delta_{n,4}(h_{n+1}) = \delta_{n,4}(2h_n) = 2^5 \delta_{n,4}(h_n),$$

откуда и следует (3.87).

Изменение шага интегрирования в два раза обладает некоторыми недостатками. Если при вычислении решения шаг интегрирования часто и резко меняется<sup>5</sup>, такой алгоритм может приводить к неоправданно большим затратам времени. Кроме того, при неудачном выборе начального шага может понадобиться достаточно много шагов для достижения максимального шага.

Обоснование оценки ошибки для контроля точности вычислений проведем на линейном уравнении (2.7). Применяя (3.84) к (2.7), получим (3.29), где функция роста  $Q_{5,4}(z)$  имеет вид

$$Q_{5,4}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{144}, \quad z = \lambda h. \quad (3.88)$$

Учитывая, что

$$e^z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i!},$$

получим, что относительная локальная ошибка  $\delta'_{n,4}$  схемы (3.84) имеет вид

$$\delta'_{n,4} = \frac{z^5}{720} + O(z^6).$$

Используя формулу (2.33), получим оценку ошибки  $\varepsilon_{n,4}$ , то есть

$$\varepsilon_{n,4} \approx \frac{z^4}{720}. \quad (3.89)$$

Пусть заданная относительная точность вычислений равна  $\varepsilon$ . Учитывая (3.89), имеем  $|z| \approx (720\varepsilon)^{0.25}$ . Теперь можно записать неравенство для контроля точности через оценку локальной ошибки, то есть

$$|\delta'_{n,4}| \leq 5\varepsilon^{5/4}. \quad (3.90)$$

При получении (3.90) применялось соотношение  $5\varepsilon^{5/4} \leq 720^{1/4}\varepsilon^{5/4}$ .

Несмотря на то, что обоснование (3.90) проведено на линейном скалярном уравнении, оно с достаточно высокой надежностью использовалось для решения нелинейных задач. Кроме того, неравенство типа

---

<sup>5</sup> например, при большом количестве переходных процессов

(3.90) успешно применялось в алгоритмах интегрирования на основе других численных схем [3].

Заметим, что оценка (3.85) является величиной ( $h^5$ ) только в случае  $f(t, y) = a + bt + cy$  (см., например, [54], с. 62). В других случаях  $\delta_{n,4}$  содержит некоторые члены порядка  $O(h^4)$ . Разложением (3.84) в ряд Тейлора до членов с  $h^4$  включительно легко убедиться, что для скалярного уравнения (2.2) выполняется соотношение

$$\delta_{n,4} = -\frac{h^4}{45}[2f'''f^3 + 6f''f'f^2 + 3f'f''f^2] + O(h^5).$$

При построении алгоритма интегрирования этот факт можно учитывать следующим образом. Предположим, что  $\delta_{n,4}$  ведет себя при увеличении шага как  $O(h^5)$ , а при уменьшении — как  $O(h^4)$ . Такой небольшой запас в точности позволяет частично избежать возможных повторных вычислений решения. Отметим также, что так как  $k_5$  вычисляется в точке  $t_{n+1}$ , то отпадает необходимость в построении дополнительного неравенства для выбора величины шага интегрирования. Ниже данный алгоритм переменного шага на основе схемы (3.84) и неравенства (3.90) будем называть STEK.

### 3.6 Анализ результатов расчетов

Расчеты проводились для тестовых примеров из [1, 21] которые приведены в приложении. Решение задач 11 и 22 из [21] не вычислялось вследствие их большой жесткости. "Накладные расходы" при реализации явных методов невелики, и поэтому в качестве критерия эффективности алгоритмов выбрано количество вычислений правой части дифференциальной задачи на интервале интегрирования. Время вычисления не приводится, так как для некоторых задач оно настолько мало, что не может служить объективной характеристикой эффективности метода. Численный эксперимент проводился с целью проверки надежности соответствующих неравенств для контроля точности вычислений, а также для сравнения эффективности построенных алгоритмов с методом Мерсона. Расчеты проводились на IBM PC AT с двойной точностью.

Проверка надежности неравенств осуществлялась следующим образом. Для каждого метода определялась фактическая точность  $\varepsilon_f$  по формуле

$$\varepsilon_f = \max_n \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|y_i(t_n) - y_{in}|}{|y_i(t_n)| + r}, \quad (3.91)$$

где смысл  $r$  описан после формулы (2.35), а  $y(t_n)$  и  $y_n$  есть, соответственно, точное и приближенное решение в точке  $t_n$ .

Для задач 1, 2, 3, и 21 из [21] и примеров из [1] точное решение приведено в данных работах. Для остальных тестов под  $y(t_n)$  понимается следующее. Сначала расчеты проводились испытываемым алгоритмом, что определяло сетку  $t_n$ ,  $0 \leq n \leq M$ , по независимой переменной. Затем в каждой точке сетки решение определялось двумя алгоритмами : методом Мерсона и RK32, причем в RK32 точность вычислений контролировалось с использованием оценки (2.29), где  $x_n$  определялось по формуле (2.16) при  $\epsilon = 1$ . Если в данных двух приближениях к решению совпадало не менее 7 значащих цифр, то  $y(t_n)$  полагалось равным одному из них. Такой контроль, основанный на использовании разных методов с различными способами оценки ошибки, позволяет рассчитывать на правильность определения  $y(t_n)$ .

Тестовые расчеты проводились с требуемой точностью равной  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$  и  $10^{-6}$ . Результаты расчетов примеров [21] приведены в табл. 2.1 – 2.2.

Таблица 2.1

Результаты расчетов алгоритмами RK23 и RK32 примеров [21]

Номер задачи	RK23			RK32		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
1	138	615	5398	140	282	954
2	138	701	6896	140	284	971
3	131	1044	10205	135	596	2274
4	206147	239607	251901	239147	242721	249156
5	5080	5562	14315	6376	6525	7475
6	7781	7822	7993	9561	9723	11720
7	a	40783	41967	a	50013	53221
8	31940	31688	31443	37295	37413	38772
9	204	1095	10451	193	384	1400
10	46751	47834	59114	53415	53602	62114
12	740	1180	6936	880	1030	1095
13	521	4291	41119	349	1234	4829
14	210	415	2534	531	606	993
15	215	1486	14537	191	315	1319
16	1686	2709	13421	2024	2232	3447
17	1674	2548	12169	2054	2267	3490
18	301	2639	23012	294	1424	5363
19	270	2311	21993	251	1057	3848
20	741	5770	48877	376	1532	5772
21	302	2959	29092	185	788	3573
23	104	767	7427	112	256	1091
24	104	767	7451	109	256	1091
25	7214	7203	8009	8322	8628	8683

Решение примера 7 с точностью  $10^{-2}$  удалось вычислить только

Таблица 2.2

Результаты расчетов алгоритмами MERSON и STEK примеров [21]

Номер задачи	MERSON			STEK		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
1	245	430	1400	246	440	919
2	245	430	1405	246	440	919
3	85	165	500	59	229	520
4	344185	355090	417295	332112	344907	399776
5	9815	9940	10505	9837	9630	10206
6	15840	15865	17790	15852	15375	17379
7	a	83095	83300	a	79922	80078
8	60360	60365	61035	62054	61350	61992
9	485	720	1545	294	316	591
10	71245	73115	87015	68542	71216	82733
12	1570	1725	2910	1458	1494	2641
13	155	440	1245	113	395	1391
14	1025	91490	a	423	745	1455
15	260	325	480	228	285	432
16	3285	3700	4070	3361	3322	3686
17	3615	3730	4415	3350	3311	4075
18	205	640	1820	205	568	1997
19	155	360	960	129	317	993
20	420	1040	2950	385	977	3381
21	135	255	1010	85	300	1004
23	255	530	1085	152	192	425
24	425	1010	2230	203	464	943
25	13195	13235	13360	13106	12241	13006

программой RK21<sup>6</sup>. Причина неудачных расчетов остальными алгоритмами заключается в слишком большой жесткости данной задачи. В результате при такой грубой точности на участке установления шаг интегрирования раскачивается вследствие противоречивости требований точности и устойчивости. Если снизу величина шага обычно ограничивается минимальным шагом  $h_{\min}$ , то сверху он ничем не ограничен, что приводит к АВОСТу.

Колебание шага вследствие неустойчивости возникает и в задачах с номерами 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 17, 25. Отметим, что для данных задач вычислительные затраты не сильно зависят от задаваемой точности расчетов. Это связано с тем, что основные затраты приходятся на участок установления, где шаг ограничен не точностью, а устойчивостью. Поэтому при рассмотрении методов с контролем устойчивости в основном будут использоваться данные примеры.

Из результатов расчета следует, что для примеров 3, 18, 19, 20 и 21 требуемая точность не выполняется для всех исследуемых алгоритмов, включая метод Мерсона. Наиболее неудачными являются расчеты примера 18, где фактическая точность на два порядка ниже задаваемой. Это означает, что для получения двух верных значащих цифр в решении требуется задать точность  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Для примеров 20 и 21 фактическая точность хуже задаваемой примерно на порядок. Для задач с номерами 3 и 19 требуемая точность нарушается незначительно. Отметим, что на данных примерах наибольшее отношение  $\varepsilon_f/\varepsilon$  достигается для метода Мерсона, то есть построенные неравенства для контроля точности являются более надежными, чем используемое в MERSON.

Причиной неудовлетворительной точности расчетов примеров 3, 18, 19 и 20 является колебательный характер решения. Для таких задач при большой амплитуде колебаний даже небольшой сдвиг по фазе может приводить к значительному нарушению точности в каждой конкретной точке  $t_n$ . Поэтому для них более естественно рассматривать амплитуду, фазу или какую-либо другую подобного рода характеристику. В частности, для задачи 3 закон сохранения имеет вид

$$y_1^2 + \frac{y_2^2}{100} = \text{const},$$

и на нем точность вычислений удовлетворительная. Отметим, что для задач, решения которых носят чисто колебательный характер, допускаемые ошибки накапливаются, а не затухают по мере продвижения по сетке.

Решение задачи 21 неустойчиво<sup>7</sup>, что приводит к нарушению точности расчетов.

Аналогичная картина наблюдается при решении линейных задач

<sup>6</sup> 57745 вычислений правой части дифференциальной задачи

<sup>7</sup> в [21] приведено точное решение

[1], результаты расчетов которых приведены в табл. 2.3 – 2.4. В этом случае требуемая точность нарушается при решении примера 3л, решение которого носит колебательный характер. Для остальных задач имеет место неравенство

$$\varepsilon_f/\varepsilon \leq 1,$$

то есть требуемая точность выполняется. Отметим, что при решении задачи 5л точность вычислений лучше требуемой для всех алгоритмов, хотя задача является жестко-осциллирующей. Это связано с тем, что шаг из условия устойчивости существенно меньше шага из условия точности.

Таблица 2.3

Результаты расчетов алгоритмами RK23 и RK32 примеров [1]

Номер задачи	RK23			RK32		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
1л	692	3787	30729	415	2075	9053
2л	74	611	5991	45	183	805
3л	10824	46113	72266	5433	21505	67124
4л	6841	6579	13584	9015	9119	9491
5л	7288	13899	39614	8985	9347	13161
6л	7104	7966	16471	8987	9225	10209

Таблица 2.4

Результаты расчетов алгоритмами MERSON и STEK примеров [1]

Номер задачи	MERSON			STEK		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
1л	305	1120	3075	294	1066	2916
2л	45	125	315	40	107	285
3л	3995	12385	31760	3471	11493	30990
4л	18430	18335	18905	17785	17912	18794
5л	18665	18250	18935	17826	17930	18461
6л	19230	18980	19845	18674	17977	19177

Для алгоритмов RK21, RK22 и RK31 результаты расчетов принципиально не отличаются от приведенных в табл. 2.1 – 2.4, и поэтому для них приведены только суммарные затраты.

В табл. 2.5<sup>8</sup> – 2.6 приведены суммарное количество вычислений функции  $f$  для всех примеров, которые удалось просчитать методом Мерсона<sup>9</sup>. Из табл. 2.5 – 2.6 видно, что при  $\varepsilon = 10^{-2}$  самым эффективным по вычислительным затратам является алгоритм RK23. Это

<sup>8</sup> в таб. 2.5 затраты на интегрирование примера 7 при точности  $10^{-2}$  и примера 14 при точности  $10^{-6}$  не суммируются

<sup>9</sup> см. табл. 2.2



связано с тем, что часть тестовых примеров, на который приходится большой процент вычислений функции  $f$ , являются жесткими. Поэтому шаг для них ограничен требованием устойчивости. В то же время в алгоритме RK23 на одно вычисление функции  $f$  приходится больший отрезок интервала устойчивости, чем в других алгоритмах. В табл. 2.7 приведены длина интервала устойчивости и число вычислений функции  $f$  на шаге в исследуемых алгоритмах.

Таблица 2.5

Суммарные затраты на интегрирование примеров [21]

Метод	З а т р а т ы		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
RK21	383931	462028	832191
RK22	346124	434743	625622
RK23	312392	411796	673326
RK31	363227	416571	482129
RK32	362080	423168	471658
STEK	512440	608436	689087
MERSON	527205	717695	718325

Таблица 2.6

Суммарные затраты на интегрирование примеров [1]

Метод	З а т р а т ы		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
RK21	37219	81168	221736
RK22	33217	78644	177331
RK23	32823	74455	178655
RK31	33716	49821	109124
RK32	32880	51454	109843
STEK	58090	66485	90623
MERSON	60670	69195	92835

При  $\varepsilon = 10^{-4}$  точность начинает оказывать большее влияние на величину шага интегрирования. Как видно из таблицы 2.5, суммарное число вычислений функции  $f$  для алгоритмов RK23 и RK31 отличаются не так сильно. Такой же вывод можно сделать относительно линейных примеров [1], если в табл. 2.6 исключить результаты расчетов примера 3л, для которого шаг выбирается только из условия точности. Если среди линейных примеров исключить задачу 3л, то при  $\varepsilon = 10^{-6}$  самыми эффективными являются методы третьего порядка точности.

Таблица 2.7

Зависимость длины  $\gamma$  интервала устойчивости от числа вычислений  $m$  функции  $f$   
на шаге интегрирования

Метод	RK21	RK22	RK23	RK31	RK32	MERSON STEK
$m$	2	3	3	4	4	5
$\gamma$	2.0	4.5	5.8	5.1	5.9	3.5

## Глава 4

# Алгоритмы с контролем устойчивости

Построены неравенства для контроля устойчивости явных методов типа Рунге-Кутты второго, третьего, четвертого и пятого порядков точности. Проведено численное сравнение алгоритмов интегрирования с контролем и без контроля устойчивости.

### 4.1 Схемы второго порядка точности

Ниже для контроля устойчивости явных методов типа Рунге-Кутты (3.24) будем использовать неравенство вида (2.50). Для получения оценки максимального собственного числа требуется выполнение требования типа (2.45). Отметим, что параметр  $p$  в условиях согласования локальных ошибок (2.45) определяет число итераций в степенном методе. Поэтому требования типа (2.45) можно рассматривать при некотором  $l$ ,  $l \leq p$ . За счет этого можно избежать дополнительных соотношений на параметры численной схемы и тем самым избавиться от дополнительных вычислений правой части дифференциальной задачи. Поэтому для методов (3.24) будем поступать следующим образом.

Выберем постоянные коэффициенты  $b_i$  и  $b'_i$ ,  $1 \leq i \leq m+1$ , из условия выполнения соотношений

$$\sum_{i=1}^m b_i k_i + b_{m+1} h f(y_{n+1}) = h^{l+1} f_n^{(l)} f_n + O(h^{l+3}), \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^m b'_i k_i + b'_{m+1} h f(y_{n+1}) = h^{l+2} f_n^{(l+1)} f_n + O(h^{l+3}),$$

где  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , определены в (3.24), а элементарные дифференциалы вычислены в точке  $y_n$ .

Для получения (4.1) следует разложить  $f(y_{n+1})$  в ряд Тейлора и подставить это представление и (3.41) в левую часть (4.1). Затем нужно

приравнять нулю соотношения на параметры перед соответствующими слагаемыми. Если (4.1) выполняется только при  $l \leq 0$ , то для построения неравенства для контроля устойчивости следует увеличить число вычислений правой части на шаге, то есть нужно увеличить значение параметра  $m$  в формуле (3.24). В этом случае возможно появление свободных параметров, которые могут быть использованы для улучшения свойств точности и устойчивости численной схемы.

Заметим, что проверка неравенства для контроля устойчивости всегда осуществляется после принятия решения по точности, так как в случае невыполнения точности<sup>1</sup> величину шага интегрирования следует уменьшить. Поэтому применение в (4.1) значения  $f(y_{n+1})$  к увеличению вычислительных затрат не приводит, так как оно будет использовано при выполнении следующего шага интегрирования.

Теперь перейдем к получению неравенств для контроля устойчивости конкретных численных схем. Сначала рассмотрим двухстадийную формулу

$$y_{n+1} = y_n + 0.25k_1 + 0.75k_2, \quad k_1 = hf(y_n), \quad k_2 = hf(y_n + \frac{2}{3}k_1), \quad (4.2)$$

параметры которой однозначно определяются из требования второго порядка точности и условия выполнения второго равенства (2.45), то есть ее локальная ошибка имеет вид

$$\delta_{n,2} = \frac{1}{6}h^3 f'^2 f + O(h^3).$$

Тогда для контроля точности (4.2) можно применять неравенство

$$\|k_2 - k_1\| \leq 4\epsilon.$$

Запишем соотношение

$$\begin{aligned} c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 hf(y_{n+1}) &= (c_1 + c_2 + c_3)hf_n + (\frac{2}{3}c_2 + c_3)h^2 f'_n f_n \\ &+ \frac{1}{2}h^3 [c_3 f_n'^2 f_n + (\frac{4}{9}c_2 + c_3)f_n'' f_n^2] + O(h^4) \end{aligned}$$

с неопределенными коэффициентами  $c_i, 1 \leq i \leq 3$ . Здесь  $k_i, 1 \leq i \leq 2$ , и  $y_{n+1}$  определены по формуле (4.2). Для выполнения второго условия (4.1) при  $l = 1$  параметры  $c_i, 1 \leq i \leq 3$ , должны удовлетворять системе уравнений

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad \frac{2}{3}c_2 + c_3 = 0, \quad \frac{4}{9}c_2 + c_3 = 0,$$

которая, очевидно, совместной не является. Таким образом, построить алгоритм интегрирования с контролем точности и устойчивости на основе двухстадийной схемы типа Рунге-Кутты нельзя.

---

<sup>1</sup> независимо от устойчивости

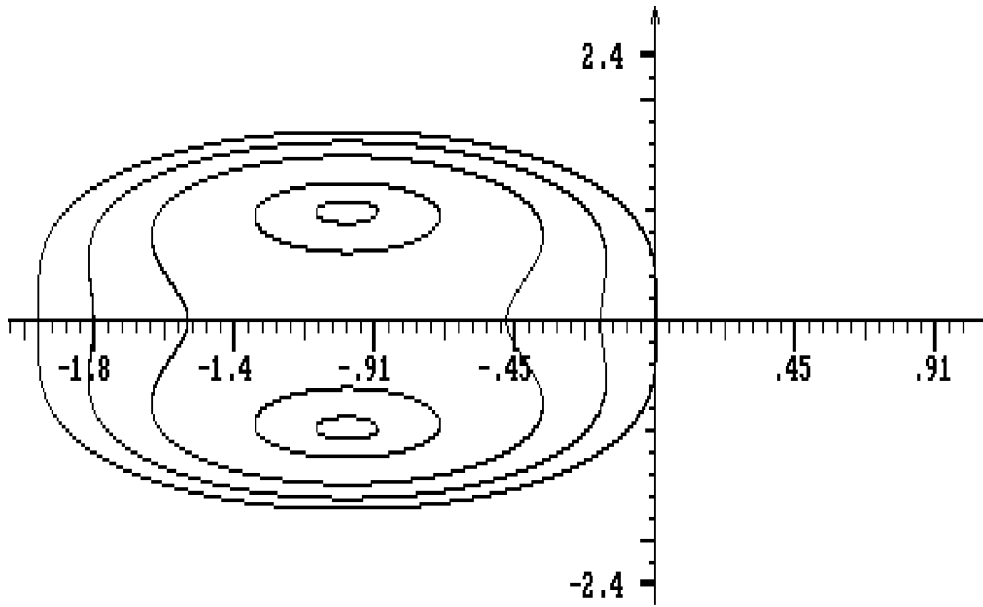


Рис. 3.1. Область устойчивости метода (4.2)

Рассмотрим трехстадийную схему вида

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \\
 k_1 &= h f(y_n), \\
 k_2 &= h f(y_n + \beta_{21} k_1), \\
 k_3 &= h f(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Будем предполагать, что ее параметры удовлетворяют соотношениям

$$6g\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) = \beta_{32}\alpha_2(2 - 3\alpha_2). \tag{4.4}$$

$$\alpha_2\beta_{32}p_3 = g, \quad \alpha_2p_2 + \alpha_3p_3 = 0.5, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1. \tag{4.5}$$

при которых она имеет второй порядок точности, а ее локальная ошибка имеет вид

$$\delta_{n,2} = \frac{1-6g}{6} h^3 f'^2 f + O(h^4). \tag{4.6}$$

Здесь  $\alpha_2 = \beta_{21}$ ,  $\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}$ . Тогда для контроля точности (4.3) при условиях (4.4), (4.5) можно применять неравенство

$$\|k_2 - k_1\| \leq \frac{6|\alpha_2|\varepsilon}{|1-6g|}. \tag{4.7}$$

Получим неравенство для контроля устойчивости. Для этого с использованием (3.41) составим линейную комбинацию векторов  $k_i$ ,  $1 \leq$

$i \leq 3$  и  $hf(y_{n+1})$  с неопределенными коэффициентами  $c_i, 1 \leq i \leq 4$ , то есть

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 c_i k_i + c_4 hf(y_{n+1}) \\ &= \left( \sum_{i=1}^4 c_i \right) hf_n + (\alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + c_4) h^2 f'_n f_n \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha_2^2 c_2 + \alpha_3^2 c_3 + c_4) h^3 f''_n f_n^2 + (\alpha_2 \beta_{32} c_3 + \frac{1}{2} c_4) h^3 f'^2_n f_n + O(h^4). \end{aligned}$$

Отсюда, полагая  $c_4$  свободным параметром, имеем, что при  $l = 1$  первое и второе условия (4.1) будут выполнены, если  $c_i, 1 \leq i \leq 4$ , удовлетворяют, соответственно, следующим системам алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \beta_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Обозначим через  $b_i$  и  $b'_i, 1 \leq i \leq 4$ , соответствующие решения (4.8). Тогда для контроля устойчивости (4.3) можно использовать неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq N} \frac{\left| \left[ \sum_{i=1}^3 b'_i k_i + b'_4 hf(y_{n+1}) \right]_j \right|}{\left| \left[ \sum_{i=1}^3 b_i k_i + b_4 hf(y_{n+1}) \right]_j \right|} \leq \left| \frac{\alpha_2 \beta_{32} b'_3 + 0.5 b'_4}{\alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + b_4} \right| D, \quad (4.9)$$

где положительная постоянная  $D$  связана с размером области устойчивости схемы (4.3). Например, если собственные числа матрицы Якоби дифференциальной задачи вещественные и отрицательные, а метод (4.3) используется с набором параметров

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{16}, & \alpha_2 &= \beta_{21} = \frac{1}{3}, & \beta_{31} &= \beta_{32} = \frac{7}{18}, & \alpha_3 &= \frac{7}{9}, \\ p_1 &= \frac{1}{7}, & p_2 &= \frac{3}{8}, & p_3 &= \frac{27}{56}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

при которых длина интервала устойчивости равна шести, то  $D \leq 6$ .

Из (4.4) и (4.5) следует, что при выборе параметров численной схемы (4.3) имеется некоторый произвол, воспользовавшись которым можно упростить неравенство (4.9). Выберем для определенности в формулах (4.4), (4.5) значение параметра  $g$  равным  $1/16$  и положим  $\alpha_2 =$

$\alpha_3, \beta_{32} = 1/3$ . Тогда коэффициенты схемы (4.3) однозначно определяются из (4.4), (4.5) и имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_3 = \beta_{21} = \frac{2}{3}, & \beta_{31} = \beta_{32} = \frac{1}{3}, \\ p_1 &= \frac{1}{4}, & p_2 = \frac{15}{32}, & p_3 = \frac{9}{32}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

при этом длина интервала устойчивости (4.3), (4.11) равна шести.

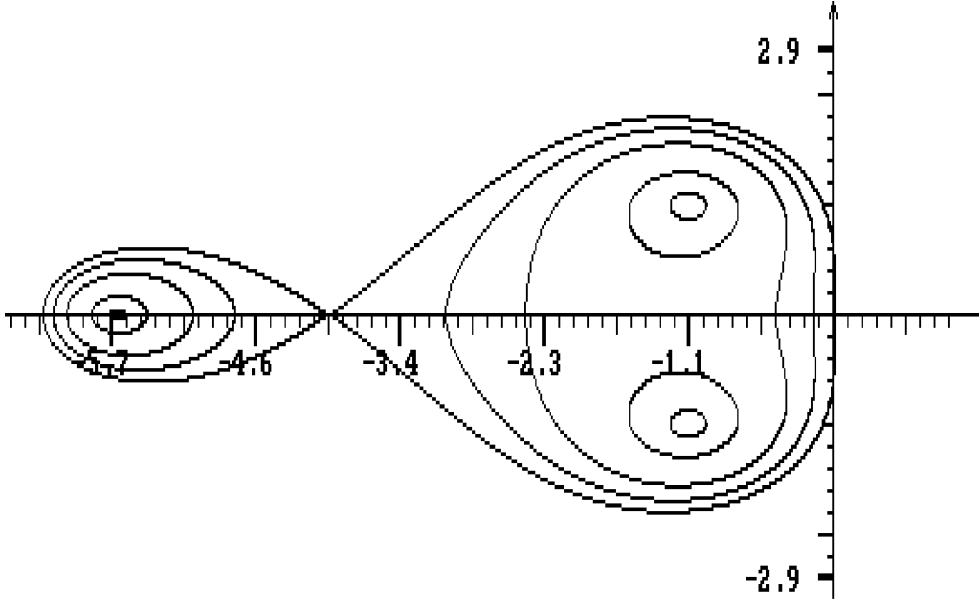


Рис. 3.2. Область устойчивости метода (4.3) при  $g = 1/16$

При получении неравенства для контроля устойчивости применим к разности  $(k_3 - k_2)$  формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого порядка, то есть

$$\begin{aligned} k_3 - k_2 &= h[f(y_n + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2) - f(y_n + \frac{2}{3}k_1)] \\ &= \frac{1}{3}h \frac{\partial f(\tilde{y}_n)}{\partial y}(k_2 - k_1), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $\tilde{y}_n$  вычислено в некоторой окрестности решения  $y(t_n)$ . Учитывая, что

$$k_2 - k_1 = \frac{2}{3}h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad (4.13)$$

для контроля устойчивости схемы (4.3) с параметрами (4.11) можно

применять следующее неравенство

$$3 \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right| \leq 6. \quad (4.14)$$

Из многочисленных расчетов задач средней жесткости следует, что неравенство (4.14) не хуже (4.9) с точки зрения эффективности алгоритма интегрирования. Поэтому далее при изучении других численных схем будем поступать по аналогии с получением (4.14).

Ниже алгоритм интегрирования на основе численной схемы (4.3) с параметрами (4.11), в котором величина шага интегрирования по точности и устойчивости выбирается с использованием неравенств (4.7), (3.62) и (4.14), будем называть RK23S.

## 4.2 Схема третьего порядка точности

Рассмотрим четырехстадийную схему

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{72g}\right)k_2 + \frac{1}{72g}k_3 + \frac{1}{6}k_4, \\ k_1 &= hf(y_n), \\ k_2 &= hf(y_n + 0.5k_1), \\ k_3 &= hf(y_n + (0.5 - 12g)k_1 + 12gk_2), \\ k_4 &= hf(y_n + k_3), \end{aligned} \quad (4.15)$$

и вспомогательный метод вида

$$z_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_4, \quad (4.16)$$

где  $g$  – постоянная. С использованием (3.41) нетрудно убедиться в том, что порядок точности численных формул (4.15) и (4.16) равен, соответственно, трем и двум, а их локальные ошибки  $\delta_{n,3}$  и  $\delta_{n,2}$  имеют вид

$$\delta_{n,2} = \frac{1}{12}h^3 f'^2 f + O(h^4), \quad \delta_{n,3} = \frac{1 - 24g}{24}h^4 f'^3 f + O(h^5). \quad (4.17)$$

Учитывая, что

$$y_{n+1} - z_{n+1} = \frac{1}{72g}(k_3 - k_2), \quad (4.18)$$

неравенство для контроля точности схемы (4.15) можно записать следующим образом

$$\|k_3 - k_2\| \leq \left| \frac{144g}{1 - 24g} \right| \varepsilon. \quad (4.19)$$



Теперь получим неравенство для контроля устойчивости схемы (4.15). Для этого применим к разности  $(k_3 - k_2)$  формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого порядка. В результате получим

$$k_3 - k_2 = 12gh \frac{\partial f(\tilde{y}_n)}{\partial y} (k_2 - k_1),$$

где  $\tilde{y}_n$  вычислено в некоторой окрестности решения  $y(t_n)$ . Учитывая, что

$$k_2 - k_1 = \frac{1}{2} h^2 f'_n f_n + O(h^3),$$

для контроля устойчивости схемы (4.15) можно использовать неравенство типа (4.14), то есть

$$\frac{1}{|12g|} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right| \leq D, \quad (4.20)$$

где постоянная  $D$  связана с размером области устойчивости схемы.

Из [40] следует, что максимальная длина интервала устойчивости четырехстадийной схемы типа Рунге-Кутты третьего порядка точности равна 6.0273, причем она достигается при  $g = 0.018456$ .

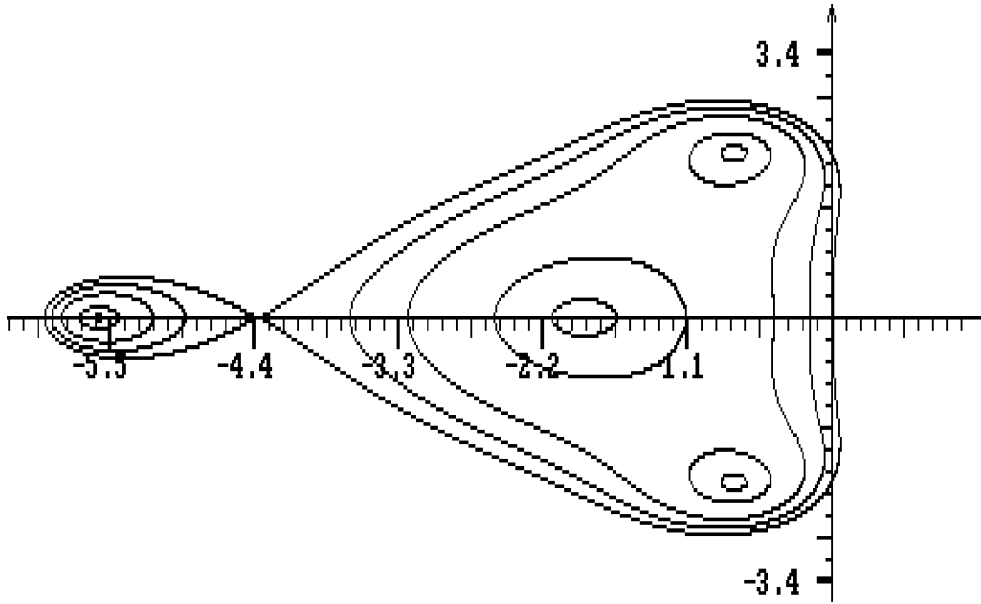


Рис. 3.3. Область устойчивости метода (4.15) при  $g = 0.018456$

Выберем данное значение  $g$  и положим  $D = 6$  в формуле (4.20). Ниже этот алгоритм будем называть RK32S.

### 4.3 Схемы четвертого и пятого порядков точности

Как показывают расчеты, контроль устойчивости численной схемы приводит не только к повышению эффективности алгоритма интегрирования, но и позволяет вычислить решение ряда задач, которые не удастся рассчитать алгоритмом без контроля устойчивости. Поэтому возникает вопрос о том, как организовать контроль устойчивости известных схем, хорошо зарекомендовавших себя при решении практических задач, не внося существенных изменений в вычислительный процесс.

К наиболее известным и удачным явным формулам типа Рунге-Кутты относятся пятистадийная схема четвертого порядка точности

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5, \\
 k_1 &= hf(y_n), \\
 k_2 &= hf(y_n + \frac{1}{3}k_1), \\
 k_3 &= hf(y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2), \\
 k_4 &= hf(y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3), \\
 k_5 &= hf(y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4),
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

построенная Мерсоном, и шестистадийная схема пятого порядка точности, полученная Фельбергом.

Одна из причин их успеха заключается, по-видимому, в экономичном способе оценки ошибки, на основе которой осуществляется контроль точности вычислений. Кроме того, области устойчивости обоих методов достаточно велики как по вещественной, так и по мнимой оси комплексной плоскости  $z = \lambda h$ . Это позволяет использовать их при решении жестких задач, собственные числа матрицы Якоби которых имеют достаточно большую мнимую часть. На примере этих двух методов рассмотрим возможность организации контроля устойчивости численных схем с заданными коэффициентами.

Сначала рассмотрим метод Мерсона, для контроля точности которого можно применять неравенство [14]

$$\frac{1}{30} \|2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5\| \leq 5\varepsilon^{5/4}. \tag{4.22}$$

Из (4.21) видно, что для данной численной схемы выполняется условие  $\alpha_2 = \alpha_3$ , где  $\alpha_2 = \beta_{21}$ ,  $\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}$ . Поэтому неравенство для контроля устойчивости получим по аналогии с (4.14). Применяя к разности  $(k_3 - k_2)$  формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого

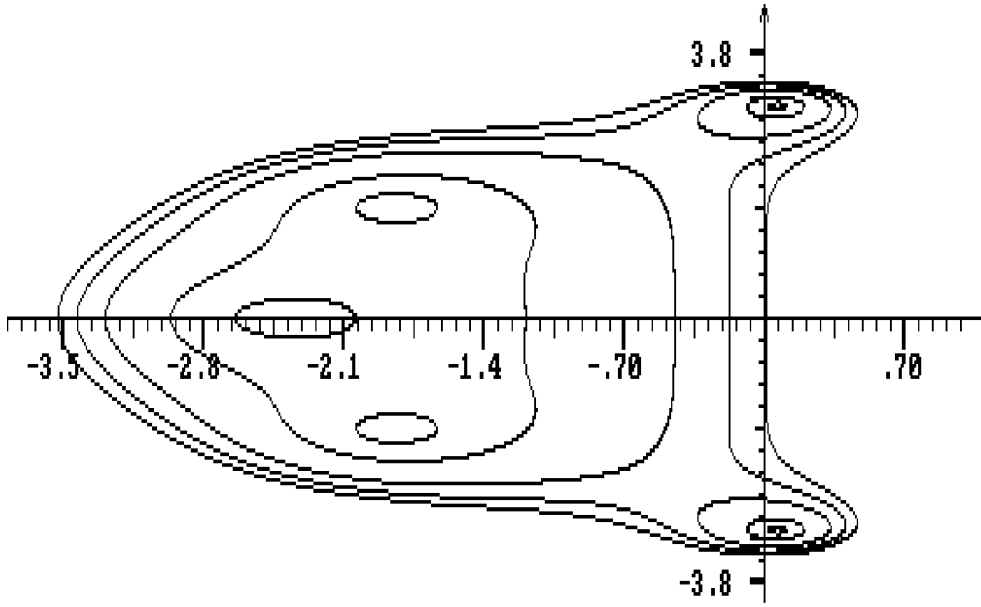


Рис. 3.4. Область устойчивости метода Мерсона

порядка, будем иметь

$$k_3 - k_2 = \frac{h}{6} \frac{\partial f(\tilde{y}_n)}{\partial y} (k_2 - k_1),$$

где вектор  $\tilde{y}_n$  вычислен в некоторой окрестности решения  $y(t_n)$ . Учитывая, что

$$k_2 - k_1 = \frac{h^2}{3} f'_n f_n + O(h^3),$$

для контроля устойчивости (4.21) можно использовать неравенство

$$6 \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right| \leq 3.5, \quad (4.23)$$

где числу 3.5 примерно равна длина интервала устойчивости численной схемы. Отметим, что по мнимой оси область устойчивости также ограничена числом 3.5.

Ниже алгоритм интегрирования на основе численной схемы (4.21), в котором для контроля точности и устойчивости используются, соответственно, неравенства (4.22) и (4.23), будем называть STEKS.

Теперь рассмотрим шестистадийный метод Рунге-Кутты-Фельберга, который имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 p_i k_i, \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n), \\
k_2 &= hf(y_n + \frac{1}{4}k_1), \\
k_3 &= hf(y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2), \\
k_4 &= hf(y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3), \\
k_5 &= hf(y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4), \\
k_6 &= hf(y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5). \tag{4.25}
\end{aligned}$$

В (4.24) первый индекс при записи коэффициентов  $p_{li}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , означает порядок точности метода. При значениях параметров

$$\begin{aligned}
p_{51} &= \frac{16}{135}, \quad p_{52} = 0, \quad p_{53} = \frac{6656}{12825}, \quad p_{54} = \frac{28561}{56430}, \\
p_{55} &= -\frac{9}{50}, \quad p_{56} = \frac{2}{55} \tag{4.26}
\end{aligned}$$

формула (4.24) совпадает с методом Фельберга и имеет пятый порядок точности. С использованием (3.41) получим, что ее локальная ошибка  $\delta_{n,5}$  представима в виде

$$\delta_{n,5} = \frac{17}{18720} h^6 f'^5 f + O(h^6), \tag{4.27}$$

где элементарный дифференциал вычисляется в точке  $y(t_n)$ .

В [90] приведен другой набор параметров

$$\begin{aligned}
p_{41} &= \frac{25}{16}, \quad p_{42} = 0, \quad p_{43} = \frac{1408}{2565}, \quad p_{44} = \frac{2197}{4104}, \\
p_{45} &= -\frac{1}{5}, \quad p_{46} = 0, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

при которых схема (4.24) имеет четвертый порядок точности, а ее локальная ошибка  $\delta_{n,4}$  представима в виде

$$\delta_{n,4} = \frac{h^5}{780} f'^4 f + O(h^5). \tag{4.29}$$

Соотношение (4.29) снова получено с применением (3.41). Так как в каждой точке имеем два приближения к решению, вычисленных методами четвертого и пятого порядков, то для контроля точности можно использовать оценку ошибки  $\varepsilon_{n,5}$  вида

$$\varepsilon_{n,5} = \frac{17}{24} \sum_{i=1}^6 (p_{5i} - p_{4i}) k_i, \tag{4.30}$$

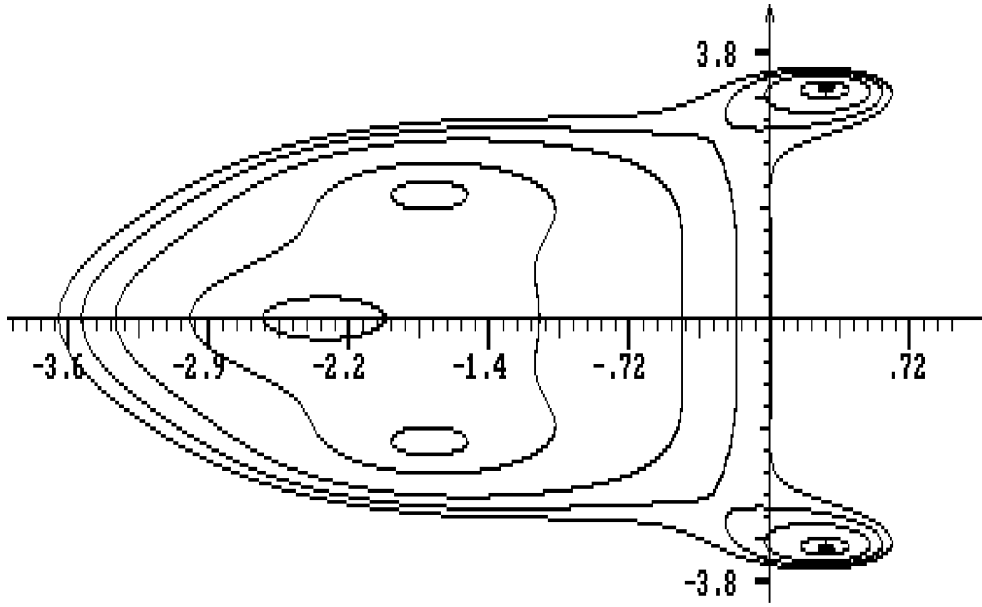


Рис. 3.5. Область устойчивости метода (4.25), (4.26)

где  $k_i, 1 \leq i \leq 6$ , определены формулами (4.25). В результате для контроля точности вычислений будем применять следующее неравенство

$$\frac{17}{24} \left\| \sum_{i=1}^6 (p_{5i} - p_{4i}) k_i \right\| \leq \varepsilon, \quad (4.31)$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность расчетов. Значения параметров  $\alpha_i, 2 \leq i \leq 6$ , определяемых по формуле (3.25), имеют вид

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{12}{13}, \quad \alpha_5 = 1, \quad \alpha_6 = \frac{1}{2}. \quad (4.32)$$

Из (4.32) видно, что приращение  $k_5$  вычисляется в точке  $t_{n+1}$ , и поэтому нет необходимости в дополнительном неравенстве для выбора величины шага интегрирования. Ниже алгоритм интегрирования на основе схемы (4.24) с контролем точности (4.31) будем называть RKF45.

Теперь перейдем к построению неравенства для контроля устойчивости. Функции устойчивости  $Q_{6,5}(z)$  и  $Q_{6,4}(z)$  методов (4.24) с параметрами (4.26) и (4.28) соответственно имеют вид

$$Q_{6,5}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{2080}, \quad (4.33)$$

$$Q_{6,4}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{104}, \quad (4.34)$$

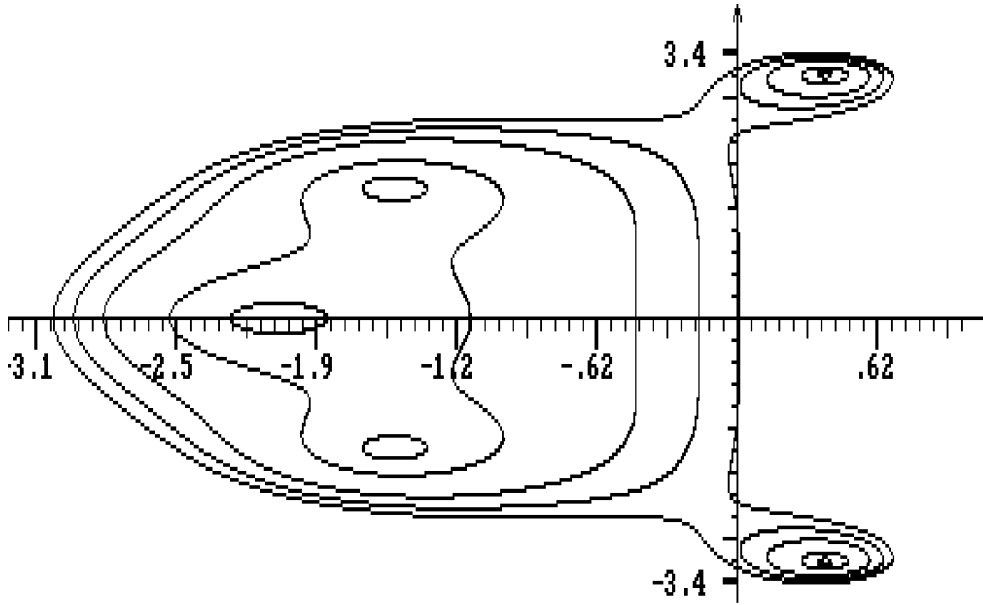


Рис. 3.6. Область устойчивости метода (4.25), (4.28)

Отметим, что так как для схемы (4.24) не выполняется условие  $\alpha_2 = \alpha_3$ , то нельзя построить неравенство типа (4.14). Поэтому при получении оценки максимального собственного числа матрицы Якоби ограничимся рассуждениями на основе линейной задачи с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay + b. \quad (4.35)$$

Запишем  $k_i, 1 \leq i \leq 3$ , применительно к задаче (4.35), то есть

$$\begin{aligned} k_1 &= h(Ay_n + b), \\ k_2 &= k_1 + \frac{1}{4}(hA)k_1, \\ k_3 &= k_1 + \frac{3}{8}(hA)k_1 + \frac{9}{128}(hA)^2k_1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Составляя из данных стадий соотношения типа (4.1), получим

$$\begin{aligned} k_2 - k_1 &= \frac{1}{4}(hA)k_1, \\ \frac{32}{9}k_3 - \frac{16}{3}k_2 + \frac{16}{9}k_1 &= \frac{1}{4}(hA)^2k_1. \end{aligned} \quad (4.37)$$

В результате для контроля устойчивости (3.3) можно применять нера-

венство

$$\frac{1}{9} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(32k_3 - 48k_2 + 16k_1)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right| \leq 3.6. \quad (4.38)$$

В данном неравенстве используется число 3.6, которое примерно равно длине интервала устойчивости схемы (4.24) с параметрами (4.26). Отметим, что по мнимой оси область устойчивости также ограничена числом 3.6.

Заметим, что так как в случае нелинейной задачи в представлениях  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , в виде рядов Тейлора имеются дополнительные слагаемые, то есть

$$\begin{aligned} k_2 - k_1 &= \frac{1}{4}h^2 f'_n f_n + \frac{1}{32}h^3 f''_n f_n^2 + O(h^4), \\ \frac{32}{9}k_3 - \frac{16}{3}k_2 + \frac{16}{9}k_1 &= \frac{1}{4}h^3 f''_n f_n + \frac{4}{3}h^3 f''_n f_n^2 + O(h^4), \end{aligned} \quad (4.39)$$

то они будут вносить дополнительные искажения в оценку максимального собственного числа. В этом смысле (4.38) грубее (4.23). Однако ниже приведены результаты расчетов, которые показывают, что использование неравенства (4.38) совместно с выбором шага по формуле (2.59) вида

$$h_{n+1} = \max(h_n, q^{\min(\nu_n, s_n, r_n)} h_n)$$

приводит к повышению эффективности по сравнению с алгоритмом без контроля устойчивости.

Ниже алгоритм интегрирования на основе численной схемы (4.24) с параметрами (4.26), в котором контроль точности и устойчивости осуществляется с использованием, соответственно, неравенств (4.31) и (4.38), будем называть RKF45S.

## 4.4 Анализ результатов расчетов

Из результатов расчетов построенными алгоритмами нежестких задач следует, что дополнительное неравенство для контроля устойчивости не влияет на эффективность алгоритма интегрирования. Поэтому здесь и ниже будем рассматривать только жесткие задачи. Это примеры с номерами 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 17 и 25 из [21] и примеры 4л, 5л и 6л из [1] (см. приложение).

Результаты расчетов приведены в табл. 3.1 – 3.3<sup>2</sup>. Отметим, что для всех исследуемых алгоритмов с контролем точности и устойчивости фактическая точность вычисления решения существенно выше требуемой для всех примеров. Это естественно, потому что фактически на всем интервале интегрирования шаг выбирается не по точности, а исходя из условия устойчивости. Из анализа табл. 3.3 следует, что

Таблица 3.1

Результаты расчетов примеров [21]

Номер задачи	RK23S			RK32S		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
4	21627	22171	69749	134843	134423	135341
5	1891	3081	12464	3953	5185	6243
6	4764	4968	9740	7333	7315	7441
7	23188	24849	27983	38247	38077	38793
8	18522	20971	28612	28343	29045	30349
10	20065	21601	44647	20693	28911	30751
12	455	1218	6838	741	997	2065
16	226	413	2510	1403	1883	2223
17	1176	1376	4007	1197	1315	1965
25	2848	3529	3871	5697	5905	5785
	STEKS			RK45S		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
4	284158	284961	291112	311247	311909	313114
5	8272	8403	9281	9654	9028	9795
6	13466	13521	14165	15561	15820	16207
7	69872	70052	70438	80414	80983	81604
8	53813	54220	58165	62279	62986	64240
10	61287	62984	67629	66002	67129	72711
12	1194	1268	1883	1380	1563	1828
16	793	680	635	433	2136	3922
17	2851	2926	3303	3295	3371	3546
25	11341	11365	11442	13087	13228	13185



Таблица 3.2

Результаты расчетов примеров [1]

Номер задачи	RK23S			RK32S		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
4л	2525	2786	13859	5569	6405	6643
5л	5139	10891	21637	5035	7242	13379
6л	5637	7101	13224	1559	3639	6727
	STEKS			RKF45S		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
4л	15291	15916	16351	17116	18094	18497
5л	15337	15874	16264	17573	17925	18014
6л	15822	16214	16927	17191	17336	17964

Таблица 3.3

Суммарные затраты на интегрирование всех примеров

Метод	З а т р а т ы		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
RK23	330246	415380	516537
RK23S	84875	124951	259141
RK32	386061	441845	472034
RK32S	216368	270542	287705
STEK	491460	656587	732004
STEKS	483625	558384	577595
RKF45	687001	794412	793616
RKF45S	534818	621508	634627
MERSON	579435	675425	759380

все алгоритмы с контролем устойчивости эффективнее соответствующих алгоритмов без контроля устойчивости. В частности, при требуемой точности  $\varepsilon = 10^{-2}$  алгоритм RK23S эффективнее RK23 почти в 4 раза.

По суммарным затратам при всех задаваемых точностях самым эффективным является метод RK23S второго порядка с тремя вычислениями правой части дифференциальной задачи. При точности  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$  и  $10^{-6}$  он эффективнее методов Мерсона и Фельберга, соответственно, более чем в 7, 5 и 2.5 раза. Успех данного алгоритма очевидно связан с размером области устойчивости (см. табл. 2.7).

---

<sup>2</sup> в табл. 3.3 затраты на интегрирование примера 7 при точности  $10^{-2}$  не суммируются

## Глава 5

# Алгоритмы переменного порядка и шага

На основе явных схем типа Рунге-Кутта с расширенными областями устойчивости разработаны алгоритмы переменного порядка и шага для решения жестких задач. Выбор подходящего метода осуществляется по точности и устойчивости. Эффективность алгоритмов достигается за счет применения на каждом участке наиболее выгодной численной схемы.

### 5.1 Алгоритм на основе трехстадийной схемы

Изучим вопросы повышения эффективности алгоритмов интегрирования за счет использования на различных участках численных схем с различными областями устойчивости. При этом будем предполагать, что все численные формулы основаны на одних и тех же стадиях, что позволяет достаточно просто организовать переключение с одной схемы на другую.

Итак, рассмотрим трехстадийную формулу типа Рунге-Кутта следующего вида

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \\k_1 &= h f(y_n), \\k_2 &= h f(y_n + \frac{2}{3} k_1), \\k_3 &= h f(y_n + \frac{1}{3} k_1 + \frac{1}{3} k_2).\end{aligned}\tag{5.1}$$

### 5.1.1 Метод второго порядка

Нетрудно видеть, что схема (5.1) будет иметь второй порядок точности, если

$$p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{3 - 18g}{4}, \quad p_3 = \frac{9}{2}g, \quad (5.2)$$

где от параметра  $g$  зависит размер и форма области устойчивости. Функция роста  $Q_{3,2}(z)$  формулы (5.1) имеет вид

$$Q_{3,2}(z) = 1 + z + 0.5z^2 + gz^3.$$

В дальнейшем для определенности будем рассматривать методы с максимальным интервалом устойчивости, что соответствует значению  $g$  равному  $1/16$ .

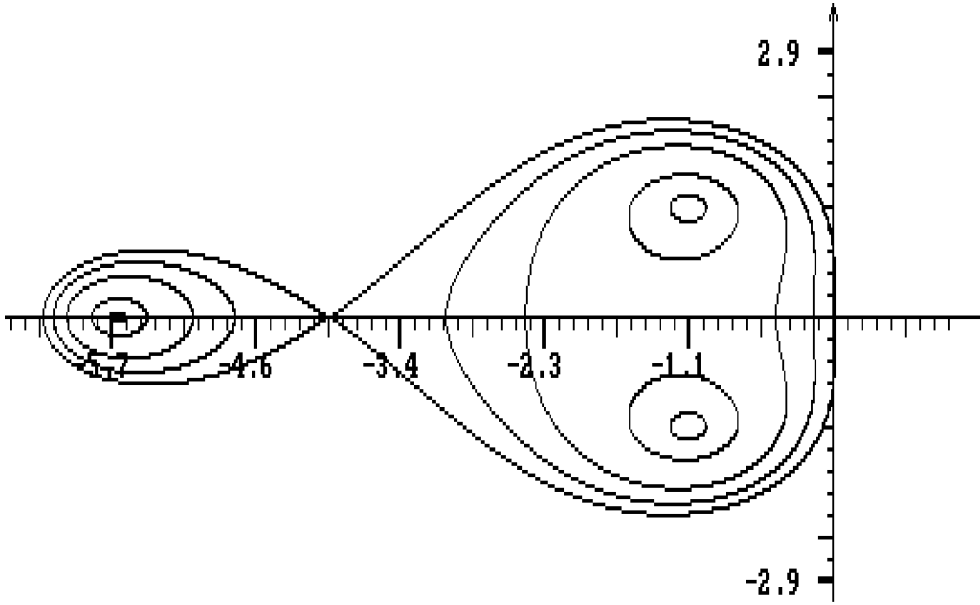


Рис. 4.1. Область устойчивости метода (5.1), (5.2)

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A'_n &= \frac{|1 - 6g|}{4} \|k_2 - k_1\|, \\ A''_n &= \frac{|1 - 6g|}{6} \|hf(y_{n+1}) - k_1\|, \\ V_n &= 3 \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма в  $R^N$ . Тогда для контроля точности и при выборе величины шага схемы (5.1) с параметрами (5.2) можно применять неравенства

$$A'_n \leq \varepsilon, \quad A''_n \leq \varepsilon, \quad (5.4)$$

а для контроля устойчивости — следующее

$$V_n \leq D. \quad (5.5)$$

При  $g = 1/16$  постоянную  $D$  можно выбрать равной 6, потому что длина интервала устойчивости схемы (5.1) с параметрами (5.2) примерно равна 6. При практической реализации алгоритма интегрирования во второй формуле (5.3) обычно используется постоянная  $|1 - 6g|/4$  вместо  $|1 - 6g|/6$  с целью уменьшения возможных повторных вычислений решения.

### 5.1.2 Метод первого порядка

Перейдем к построению формулы интегрирования более грубой в смысле точности, но с более широкой областью устойчивости. Для определенности снова будем рассматривать метод с максимальным интервалом устойчивости. Для построения такой численной схемы применим (5.1) для решения линейного тестового уравнения (2.7). Будем иметь

$$y_{n+1} = Q_{3,1}(z)y_n, \quad z = \lambda h, \\ Q_{3,1}(z) = 1 + (p_1 + p_2 + p_3)z + \frac{2}{3}(p_2 + p_3)z^2 + \frac{2}{5}p_3z^3. \quad (5.6)$$

Область устойчивости (5.1) ограничена кривой  $|Q_{3,1}(z)| = 1$  в комплексной плоскости  $z = \lambda h$ . Из вида функции роста  $Q_{3,1}(z)$  следует, что конфигурация области устойчивости схемы (5.1) зависит от параметров  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Нашей целью является получение такого набора коэффициентов  $p_1, p_2$  и  $p_3$ , чтобы схема (5.1) имела максимальный интервал устойчивости и первый порядок точности. Второе условие будет выполнено, если  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . В результате требуется построить полином вида

$$Q_{3,1}(z) = 1 + z + c_2z^2 + c_3z^3, \quad (5.7)$$

для которого неравенство  $|Q_{3,1}(z)| \leq 1$  выполняется на максимальном интервале. Здесь

$$c_2 = \frac{2(p_2 + p_3)}{3}, \quad c_3 = \frac{2p_3}{5}. \quad (5.8)$$

Рассмотрим одновременно многочлен Чебышева  $T_3(x)$  третьей степени

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad (5.9)$$

для которого выполнено неравенство  $|T_3(x)| \leq 1$  при  $x \in [-1, 1]$ . Проведем замену переменных в (5.9), полагая  $x = 1 - 2z/\gamma$ . Получим

$$T_3(z) = 1 - \frac{18z}{\gamma} + \frac{48z^2}{\gamma^2} - \frac{32z^3}{\gamma^3}, \quad (5.10)$$

при этом отрезок  $[\gamma, 0]$  отображается на отрезок  $[-1, 1]$ . Нетрудно показать, что среди всех полиномов вида (5.7) для (5.10) при  $\gamma = -18$  неравенство  $|T_3(z)| \leq 1$  выполняется на максимальном интервале  $[\gamma, 0]$ .

Потребуем совпадения коэффициентов (5.7) и (5.10), то есть

$$\frac{2(p_2 + p_3)}{3} = \frac{48}{\gamma^2}, \quad \frac{2p_3}{5} = -\frac{32}{\gamma^3}.$$

Отсюда и из условия первого порядка точности имеем

$$p_1 = -\frac{18}{\gamma} - \frac{72}{\gamma^2}, \quad p_2 = \frac{72}{\gamma^2} + \frac{144}{\gamma^3}, \quad p_3 = -\frac{144}{\gamma^3}. \quad (5.11)$$

Подставляя сюда  $\gamma = -18$ , получим параметры схемы (5.1)

$$p_1 = \frac{7}{9}, \quad p_2 = \frac{16}{81}, \quad p_3 = \frac{2}{81}, \quad (5.12)$$

при которых ее область устойчивости расширена до 18 по действительной оси. Функция роста  $Q_{3,1}(z)$  метода (5.1) с коэффициентами (5.12) имеет вид

$$Q_{3,1}(z) = 1 + x + \frac{4}{27}z^2 + \frac{4}{729}z^3.$$

Так как длина интервала устойчивости формулы (5.1) с параметрами (5.2) при  $g = 1/16$  равна примерно 6, то за счет замены (5.2) на (5.12) на участке установления получим сокращение вычислительных затрат приблизительно в три раза.

Теперь построим неравенства для контроля точности и устойчивости схемы (5.1) с параметрами (5.12). Для этого разложим  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , в ряд Тейлора и подставим в первую формулу (5.1). С применением (3.40) имеем

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + c_2 h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad (5.13)$$

где  $c_2$  вычисляется по первой формуле (5.8). В случае использования набора параметров (5.12) имеет место  $c_2 = 4/27$ .

Пусть  $y_n = y(t_n)$ . Тогда, сравнивая (3.39) и (5.13) до членов с  $h^2$  включительно, получим, что локальная ошибка  $\delta_{n,1}$  схемы первого порядка точности имеет вид

$$\delta_{n,1} = \frac{1 - 2c_2}{2} h^2 f' f + O(h^3). \quad (5.14)$$

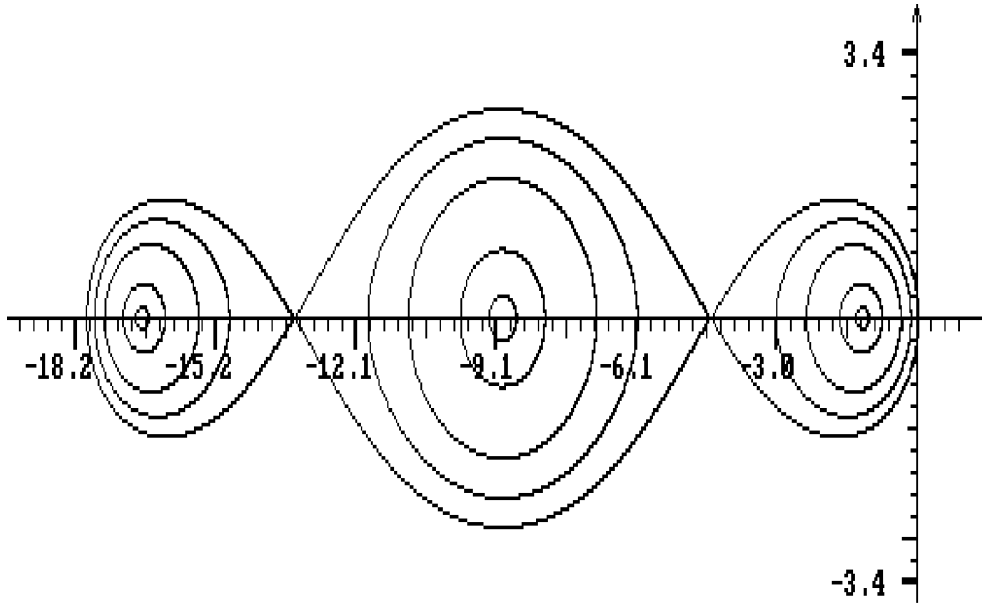


Рис. 4.2. Область устойчивости метода (5.1), (5.12)

Формулу первого порядка предполагается применять на участке установления, где ошибки за счет неточности (5.1) невелики. Поэтому для контроля точности вычислений можно применять оценку локальной ошибки. Учитывая, что

$$k_2 - k_1 = \frac{2}{3}h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad hf(y_{n+1}) - k_1 = h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad (5.15)$$

для контроля точности и при выборе величины шага интегрирования будем применять, соответственно, неравенства

$$dA'_n \leq \varepsilon, \quad dA''_n \leq \varepsilon, \quad d = |(3 - 6c_2)/(1 - 6g)|, \quad (5.16)$$

где  $A'_n$  и  $A''_n$  вычисляются по формулам (5.3). В случае (5.1), (5.12) имеем  $d = 152/45$ . Так как длина интервала устойчивости схемы (5.1), (5.12) равна 18, то для ее контроля устойчивости можно применять неравенство (5.5) при  $D \leq 18$ .

Заметим, что в неравенстве (5.5) используются постоянные 6 и 18, ограничивающие длину интервала устойчивости, в то время как для комплексных  $z = \lambda h$  их нужно уменьшить. Поэтому при настройке на конкретный тип задач они могут быть изменены. Здесь для определенности оставим их такими. Кроме того, применение оптимальных полиномов типа (5.10) в качестве функции роста приводит к тому, что внутри интервала устойчивости всегда найдется одна или несколько точек, в которых она равна +1 или -1. Это в свою очередь означает, что

соответствующая область устойчивости будет "почти"многосвязной, и небольшие возмущения могут приводить к ее сокращению. В [41, 49] описан алгоритм построения многочленов, для которых длина интервалов устойчивости близка к максимальной и, в то же время, область устойчивости в какой-то мере лишена описанного недостатка. При этом все приведенные выше рассуждения остаются в силе, а для того, чтобы воспользоваться другим многочленом устойчивости, нужно пересчитать коэффициенты  $p_i, 1 \leq i \leq 3$ , и соответствующим образом подправить константы в неравенствах (5.4), (5.5), (5.16). Данное замечание относится к приведенным ниже алгоритмам на основе других формул.

### 5.1.3 Алгоритм переменного порядка и шага

Теперь перейдем к формулировке алгоритма интегрирования на основе численной схемы (5.1) с параметрами (5.2) и (5.12). Так как в (5.1), (5.2) и (5.1), (5.12) используются одни и те же стадии  $k_i, 1 \leq i \leq 3$ , то при расчете по любой из них имеется полная информация о другой. Благодаря этому, можно сформулировать несколько вариантов алгоритмов интегрирования с различными способами выбора подходящей численной схемы. В частности, решение о выборе той или иной схемы можно принимать после вычисления стадий  $k_i, 1 \leq i \leq 3$ , на основании неравенств для контроля точности (5.4), (5.16) и устойчивости (5.5). Здесь приведен пример алгоритма интегрирования, когда схема выбирается до начала вычислений на каждом шаге. Как показывают расчеты, эффективности обоих типов алгоритмов различаются незначительно.

Первый шаг всегда выполняется по формуле (5.1), (5.2), как более точной. С учетом того, что  $A'_n = O(h^2), A''_n = O(h^2), V_n = O(h)$ , алгоритм на основе схемы (5.1) с параметрами (5.2) формулируется следующим образом.

#### Алгоритм А.

*Шаг 1а.* Вычисляются  $k_1$  и  $k_2$  по формуле (5.1).

*Шаг 2а.* Вычисляется оценка  $A'_n$  по первой формуле (5.3).

*Шаг 3а.* Вычисляется значение параметра  $s_n$  по формуле

$$q^{2s_n} A'_n = \varepsilon, \quad (5.17)$$

где  $q$  – параметр,  $q > 1$ .

*Шаг 4а.* Если  $s_n < 0$ , то происходит повторное вычисление<sup>1</sup> с шагом  $q^{s_n} h_n$ .

*Шаг 5а.* Вычисляется  $k_3$  и приближение к решению  $y_{n+1}$  по формуле (5.1) с параметрами (5.2).

---

<sup>1</sup> возврат на шаг 1



Шаг 6а. Вычисляется оценка ошибки  $A_n''$  по второй формуле (5.3).

Шаг 7а. Вычисляется значение параметра  $\nu_n$  по формуле

$$q^{2\nu_n} A_n'' = \varepsilon. \quad (5.18)$$

Замечание. Для повышения надежности расчетов здесь при  $\nu_n < 0$  можно сделать возврат на шаг 1 с шагом интегрирования  $q^{\nu_n} h_n$ .

Шаг 8а. Если  $\nu_n < 0$ , то  $h_{n+1}$  полагается равным  $q^{\nu_n} h_n$  и выполняется следующий шаг интегрирования.

Шаг 9а. Вычисляется значение  $V_n$  по последней формуле (5.3).

Шаг 10а. Вычисляются значения параметров  $s'_n, \nu'_n, r'_n$  и  $r_n$ , соответственно, по формулам

$$q^{2s'_n} dA'_n = \varepsilon, \quad q^{2\nu'_n} dA''_n = \varepsilon, \quad q^{r'_n} V_n = 18, \quad q^{r_n} V_n = 6, \quad (5.19)$$

Шаг 11а. Вычисляются параметры  $h_{new1}$  и  $h_{new2}$  по формулам

$$\begin{aligned} h_{new1} &= \max(h_n, q^{\min(s'_n, \nu'_n, r'_n)} h_n), \\ h_{new2} &= \max(h_n, q^{\min(s_n, \nu_n, r_n)} h_n), \end{aligned} \quad (5.20)$$

Шаг 12а. Если  $h_{new2} > h_{new1}$ , то выполняется следующий шаг интегрирования при  $h_{n+1} = h_{new2}$ . В противном случае  $h_{n+1} = h_{new1}$ , и управление передается алгоритму на основе численной схемы (5.1), (5.12).

Таким образом, переход со схемы (5.1), (5.2) осуществляется только в том случае, когда прогнозируемый шаг увеличивается, и из условия точности и устойчивости для схемы (5.1), (5.12) он становится больше шага для схемы (5.1), (5.2). Теперь сформулируем алгоритм на основе схемы (5.1), (5.12).

## Алгоритм Б.

Шаг 1б. Вычисляются  $k_1$  и  $k_2$  по формуле (5.1).

Шаг 2б. Вычисляется оценка ошибки  $A'_n$  по первой формуле (5.3).

Шаг 3б. Вычисляется значение параметра  $s'_n$  по формуле

$$q^{2s'_n} dA'_n = \varepsilon. \quad (5.21)$$

Шаг 4б. Если  $s'_n < 0$ , то происходит повторное вычисление<sup>2</sup> с шагом  $q^{s'_n} h_n$ .

Шаг 5б. Вычисляется  $k_3$  и приближение к решению по формуле (5.1) с параметрами (5.12).

Шаг 6б. Вычисляется оценка ошибки  $A''_n$  по второй формуле (5.3).

---

<sup>2</sup>возврат на шаг 1

Шаг 7б. Вычисляется значение параметра  $\nu'_n$  по формуле

$$q^{2\nu'_n} dA''_n = \varepsilon, \quad (5.22)$$

Замечание. Для повышения надежности здесь при  $\nu'_n < 0$  можно сделать возврат на шаг 1 с шагом интегрирования  $q^{\nu'_n} h_n$ . Кроме того, здесь же можно вычислить приближение к решению по схеме (5.1), (5.2) как более точной, заново вычислить  $hf(y_{n+1})$  и оценку  $A''_n$ . В случае выполнения второго неравенства (5.4) полученное приближение может быть принято.

Шаг 8б. Вычисляется значение  $V_n$  по последней формуле (5.3).

Шаг 9б. Вычисляются значения параметров  $r'_n, s_n, \nu_n, r_n$  по формулам

$$q^{r'_n} V_n = 18, \quad q^{2s_n} A'_n = \varepsilon, \quad q^{2\nu_n} A''_n = \varepsilon, \quad q^{r_n} V_n = 6. \quad (5.23)$$

Шаг 10б. Вычисляются параметры  $h_{new1}$  и  $h_{new2}$  по формуле (5.20).

Шаг 11б. Если  $h_{new1} > h_{new2}$ , то  $h_{n+1} = h_{new1}$ , и выполняется следующий шаг интегрирования. В противном случае  $h_{n+1} = h_{new2}$ , и управление передается на схему (5.1), (5.2).

Ниже данный алгоритм переменного порядка и шага будем называть DISPD. Отметим, что в некоторых сложных ситуациях предпочтение отдается алгоритму на основе схемы (5.1), (5.2), как более точному<sup>3</sup>. Заметим также, что по отдельности каждый из алгоритмов на основе схемы (5.1), (5.2) и на основе (5.1), (5.12) будет менее эффективен DISPD по следующей причине. Если шаг ограничен лишь требованием точности, то метод (5.1), (5.2) эффективнее (5.1), (5.12). Но как только начинается участок установления, где шаг интегрирования выбирается только из условия устойчивости, алгоритм (5.1), (5.12) сразу становится эффективнее (5.1), (5.2) в три раза. В DISPD оба метода применяются на тех участках, где они наиболее выгодны. Если сравнивать алгоритмы на основе (5.1), (5.2) и на основе (5.1), (5.12) между собой, то ни одному из них предпочтение отдать нельзя. Если шаг ограничен требованием точности на большей части интервала интегрирования, то безусловно эффективнее (5.1), (5.2). Если шаг в основном ограничен устойчивостью, то предпочтительнее алгоритм на основе (5.1), (5.12).

В алгоритме DISPD легко реализуется ситуация, когда на всем промежутке интегрирования используется одна из схем (5.1), (5.2) или (5.1), (5.12). Для этого достаточно в шагах 12 и 11 поставить запреты на переход с одной схемы на другую. Поэтому с использованием признака легко реализовать один из трех случаев:

- расчеты только по формуле (5.1), (5.2);
- расчеты только по формуле (5.1), (5.12);
- расчеты по формулам (5.1), (5.2) и (5.1), (5.12) с автоматическим выбором численной схемы.

<sup>3</sup> см., например, замечание к шагу 7б и шаг 8а

Затем с помощью эксперимента можно выбрать вариант алгоритма, наиболее выгодного на данных задачах. Отметим, что в DISPD при расчетах по фиксированной численной схеме допускается возможность вычислений без контроля устойчивости, что позволяет сравнивать алгоритмы с контролем и без контроля устойчивости. Для этого достаточно положить  $V_n = 0$ .

## 5.2 Алгоритм с применением стадий Рунге-Кутты-Мерсона

Из приведенных выше рассуждений следует, что эффективность алгоритмов интегрирования, основанных на схемах высокого порядка точности, можно повысить за счет применения численных формул более низкого порядка, но с более широкой областью устойчивости. Расширение области устойчивости, и тем самым увеличение величины шага интегрирования, не приводит к увеличению вычислительных затрат исходного алгоритма, так как это связано с заменой набора коэффициентов  $p_i, 1 \leq i \leq m$ , и с незначительными затратами на оценку максимального собственного числа матрицы Якоби. Отметим, что эффективность исходного метода не ухудшается, потому что при данном подходе он является составной частью более сложного алгоритма и по признаку может быть применен отдельно. Все это позволяет пересмотреть известные численные схемы с точки зрения построения на их основе алгоритмов переменного порядка и шага. Для изучения возникающих при этом проблем рассмотрим пятистадийный метод типа Рунге-Кутты, стадии которого совпадают с соответствующими стадиями метода Мерсона, то есть

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^5 p_i k_i, \\
 k_1 &= hf(y_n), \\
 k_2 &= hf(y_n + \frac{1}{3}k_1), \\
 k_3 &= hf(y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2), \\
 k_4 &= hf(y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3), \\
 k_5 &= hf(y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4).
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

### 5.2.1 Метод четвертого порядка

При значениях параметров

$$p_1 = p_5 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = p_3 = 0, \quad p_4 = \frac{2}{3} \quad (5.25)$$

формула (5.24) совпадает с методом Мерсона, а ее многочлен устойчивости  $Q_{5,4}(z)$  имеет вид

$$Q_{5,4}(z) = 1 + z + 0.5z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{144}z^5.$$

Введем обозначения

$$C'_n = \frac{1}{150} \|2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5\|, \\ V_n = 6 \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|. \quad (5.26)$$

Тогда для контроля точности схемы (5.24) с параметрами (5.25) можно применять неравенство

$$C'_n \leq \varepsilon^{5/4}, \quad (5.27)$$

а для контроля устойчивости — следующее

$$V_n \leq D, \quad (5.28)$$

где постоянную  $D$  можно выбрать равной 3.5, то есть примерно равной длине интервала устойчивости (5.24), (5.25).

### 5.2.2 Метод первого порядка

Теперь на основе стадий (5.24) построим формулу интегрирования более грубую в смысле точности, но с максимальным интервалом устойчивости. Для этого запишем матрицу  $B_5$  с элементами (3.26). Учитывая значения параметров  $\beta_{ij}$ ,  $2 \leq i \leq 5$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ , (см. формулу (5.24)), получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Применим (5.24) для решения задачи (2.7). С использованием (3.29), (3.30) и (5.29) получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= Q_{5,1}(z)y_n, \quad z = \lambda h, \\ Q_{5,1}(z) &= 1 + \left(\sum_{i=1}^5 p_i\right)z + \frac{1}{6}(2p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 6p_5)z^2 \\ &\quad + \frac{1}{72}(4p_3 + 9p_4 + 36p_5)z^3 + \frac{1}{48}(p_4 + 8p_5)z^4 + \frac{1}{24}p_5z^5. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Область устойчивости (5.24) ограничена кривой  $|Q_{5,1}(z)| = 1$  в комплексной плоскости  $z = \lambda h$ . Выберем параметры  $p_i, 1 \leq i \leq 5$ , таким образом, чтобы схема (5.24) имела первый порядок точности и максимальный интервал устойчивости. Первое условие будет выполнено, если

$$\sum_{i=1}^5 p_i = 1. \quad (5.31)$$

В результате задача построения численной схемы с максимальным интервалом устойчивости сводится к построению полинома вида

$$Q_{5,1}(z) = 1 + z + \sum_{i=2}^5 c_i z^i, \quad (5.32)$$

для которого неравенство  $|Q_{5,1}(z)| \leq 1$  выполняется на максимальном интервале  $[\gamma, 0]$ . Приравнявая затем коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в (5.30) и (5.32), получим линейную систему алгебраических уравнений относительно  $p_i, 1 \leq i \leq 5$ ,

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 &= 1, \\ \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{2}p_4 + p_5 &= c_2, \\ \frac{1}{18}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{2}p_5 &= c_3, \\ \frac{1}{48}p_4 + \frac{1}{6}p_5 &= c_4, \\ \frac{1}{24}p_5 &= c_5. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Разрешая (5.33), получим параметры метода первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости, то есть

$$p_1 = 1 - 3c_2 + 24c_4 - 48c_5, \quad p_2 = 3c_2 - 18c_3 + 36c_4, \quad (5.34)$$

$$p_3 = 18c_3 - 108c_4 + 216c_5, \quad p_4 = 48c_4 - 192c_5, \quad p_5 = 24c_5.$$

Для получения коэффициентов полинома (5.32) рассмотрим одновременно многочлен Чебышева  $T_5(x)$  пятой степени

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \quad (5.35)$$

для которого выполнено неравенство  $|T_5(x)| \leq 1$  при  $x \in [-1, 1]$ . Проведем замену переменных, полагая  $x = 1 - 2z/\gamma$ . Получим

$$T_5(z) = 1 - \frac{50z}{\gamma} + \frac{400z^2}{\gamma^2} - \frac{1120z^3}{\gamma^3} + \frac{1280z^4}{\gamma^4} - \frac{512z^5}{\gamma^5}, \quad (5.36)$$

при этом отрезок  $[\gamma, 0]$  отображается на отрезок  $[-1, 1]$ . Потребуем совпадения коэффициентов (5.32) и (5.36) при одинаковых степенях  $z$ . Тогда с применением (5.30) получим, что параметры  $p_i, 1 \leq i \leq 5$ , схемы (5.24) и коэффициенты многочлена (5.36) связаны соотношениями (5.33), где

$$\gamma = -50, \quad c_2 = \frac{400}{\gamma^2}, \quad c_3 = -\frac{1120}{\gamma^3}, \quad c_4 = \frac{1280}{\gamma^4}, \quad c_5 = -\frac{512}{\gamma^5}. \quad (5.37)$$

Подставляя в (5.34) коэффициенты (5.37), получим параметры

$$p_1 = 5.248365568 \cdot 10^{-1}, \quad p_2 = 3.260928 \cdot 10^{-1}, \quad (5.38)$$

$$p_3 = 1.395154944 \cdot 10^{-1}, \quad p_4 = 9.5158272 \cdot 10^{-3}, \quad p_5 = 3.93216 \cdot 10^{-5},$$

при которых схема (5.24) имеет первый порядок точности, а ее интервал устойчивости расширен до 50 по действительной оси. Функция устойчивости схемы (5.24), (5.38) совпадает с (5.36) при  $\gamma = -50$  и имеет вид

$$Q_{5,1}(z) = 1 + z + 0.16z^2 + \frac{28}{31125}z^3 + \frac{16}{78125}z^4 + \frac{16}{9765625}z^5.$$

Теперь построим неравенство для контроля точности и устойчивости схемы (5.24) с параметрами (5.38). Для этого разложим  $k_i, 1 \leq i \leq 5$ , в ряды Тейлора и подставим в первую формулу (5.24). С применением (3.40) получим

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + c_2h^2f'_nf_n + O(h^3). \quad (5.39)$$

В случае использования параметров (5.38) имеем  $c_2 = 0.16$ . Пусть  $y_n = y(t_n)$ . Тогда, сравнивая (3.39) и (5.39) до членов с  $h^2$  включительно, получим, что локальная ошибка  $\delta_{n,1}$  схемы (5.24) первого порядка точности имеет вид

$$\delta_{n,1} = (0.5 - c_2)h^2f'f + O(h^3). \quad (5.40)$$

Формулу первого порядка предполагается применять на участке установления, где ошибки за счет неточности (5.24) невелики. Поэтому для контроля точности вычислений можно использовать оценку локальной ошибки. Введем обозначения

$$\begin{aligned} A'_n &= 0.5|(3 - 6c_2)| \cdot \|k_2 - k_1\|, \\ A''_n &= 0.5|(1 - 2c_2)| \cdot \|hf(y_{n+1}) - k_1\|. \end{aligned} \quad (5.41)$$

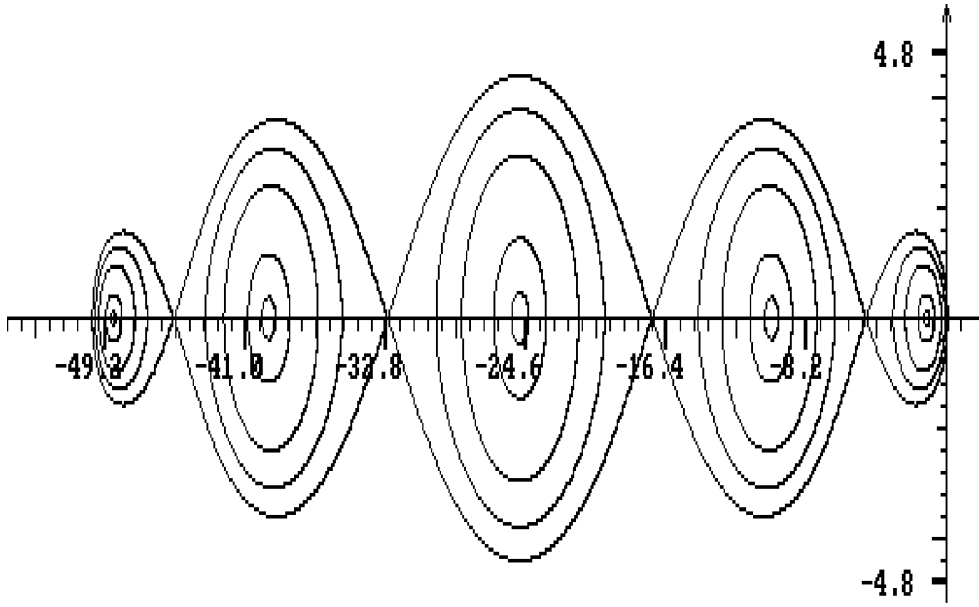


Рис. 4.3. Область устойчивости метода (5.24), (5.38)

Учитывая, что

$$\begin{aligned} k_2 - k_1 &= \frac{1}{3}h^2 f'_n f_n + O(h^3), \\ hf(y_{n+1}) - k_1 &= h^2 f'_n f_n + O(h^3), \end{aligned} \quad (5.42)$$

для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования будем применять, соответственно, неравенства

$$A'_n \leq \varepsilon, \quad A''_n \leq \varepsilon. \quad (5.43)$$

При практической реализации алгоритма во второй формуле (5.41) используется постоянная  $0.5|3 - 6c_2|$  вместо  $0.5|1 - 2c_2|$ . Более жесткое неравенство при выборе величины шага чем при контроле точности вычислений позволяет избежать некоторых повторных вычислений решения<sup>4</sup> вследствие нарушения первого неравенства (5.43). Так как длина интервала устойчивости схемы (5.24), (5.38) равна 50, то для контроля устойчивости можно применять неравенство (5.28) при  $D \leq 50$ .

В силу того, что интервал устойчивости (5.24), (5.38) примерно в 14 раз шире (5.24), (5.25), то при переходе с (5.24), (5.25) на (5.24), (5.38) шаг интегрирования, вообще говоря, может быть увеличен в 14 раз. Как показывают расчеты, в ряде случаев такое резкое увеличение шага

---

<sup>4</sup>возвратов

приводит к тому, что нарушается первое неравенство (5.43), и шаг может быть уменьшен до такой величины, что осуществляется обратный переход на формулу (5.24), (5.25). Такие неоправданные переходы с одной схемы на другую и обратно приводят к снижению эффективности алгоритма интегрирования.

Чтобы избежать таких переходов, включим в состав алгоритма интегрирования схему второго порядка, у которой интервал устойчивости шире, чем интервал устойчивости (5.24), (5.25), но уже, чем интервал устойчивости (5.24), (5.38). Переход с четвертого порядка на первый и обратно теперь будем осуществлять через посредство формулы второго порядка точности, что позволяет выбирать шаг интегрирования более плавно. Заметим, что для схемы третьего порядка точности на основе  $k_i, 1 \leq i \leq 5$ , определяемых (5.24), интервал устойчивости расширяется незначительно по отношению к (5.24), (5.25), и ее рассматривать не будем.

### 5.2.3 Метод второго порядка

Перейдем к рассмотрению численной формулы вида (5.24) второго порядка точности. Используя (3.40), приближенное решение, определяемое по схеме (5.24), можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_n + \left(\sum_{i=1}^5 p_i\right) h f_n + \left(\frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{2}p_4 + p_5\right) h^2 f'_n f_n + h^3 \left[\left(\frac{1}{18}p_2 + \frac{1}{18}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{2}p_5\right) f''_n f_n^2 + \left(\frac{1}{18}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{2}p_5\right) f_n'^2 f_n\right] + O(h^4) \quad (5.44)$$

где элементарные дифференциалы вычислены в точке  $y_n$ . Пусть  $y_n = y(t_n)$ . Тогда, сравнивая (3.39) и (5.44), получим условия второго порядка точности схемы (5.24), то есть

$$\sum_{i=1}^5 p_i = 1, \quad \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{2}p_4 + p_5 = \frac{1}{2}. \quad (5.45)$$

Для контроля точности применим неравенство вида (2.33). Сравнивая (3.39) и (5.44) до членов с  $h^3$  включительно при требовании  $y_n = y(t_n)$ , видим, что для этого необходимо выполнение соотношения

$$\frac{1}{18}p_2 + \frac{1}{18}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{2}p_5 = \frac{1}{6}, \quad (5.46)$$

обеспечивающего согласование локальных ошибок методов первого и второго порядков точности. Прежде чем выписать оценку ошибки схемы (5.24) при условиях (5.45) и (5.46), рассмотрим функцию устойчивости  $Q_{5,2}(z)$  при полученных равенствах на параметры. Учитывая в



(5.30) соотношения (5.45) и (5.46), получим

$$Q_{5,2}(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{g_1}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{g_2}z^5, \quad (5.47)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  – произвольные постоянные, причем

$$(1 - 2p_1)g_2 = 96. \quad (5.48)$$

В этом случае параметры  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , как функции  $g_1$  и  $g_2$ , определяются из (5.45), (5.46) по следующим формулам

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2g_2}(g_2 - 96), & p_2 &= 3 - 18g_1, & p_3 &= \frac{1}{4}(72g_1 - 18p_1 - 9), \\ p_4 &= 4p_1, & p_5 &= \frac{1}{4}(1 - 2p_1), \end{aligned} \quad (5.49)$$

а локальная ошибка  $\delta_{n,2}$  схемы (5.24), (5.49) имеет вид

$$\delta_{n,2} = \frac{g_1 - 6}{6g_1} h^3 f'^2 f + O(h^4). \quad (5.50)$$

Тогда для контроля точности применим оценку ошибки вида (2.33), то есть, учитывая (5.41), (5.42), для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования можно использовать, соответственно, следующие неравенства

$$dA'_n \leq \varepsilon, \quad dA''_n \leq \varepsilon, \quad d = \left| \frac{g_1 - 6}{3g_1 - 6g_1c_2} \right|, \quad (5.51)$$

где  $A'_n$  и  $A''_n$  вычислены по формулам (5.41), а  $c_2$  есть коэффициент при  $z^2$  в полиноме устойчивости метода первого порядка.

Исследуем устойчивость (5.24), (5.49). Как известно (см., например, [57], с. 215), максимальная длина интервала устойчивости формулы второго порядка с пятью вычислениями правой части примерно равна 19. Однако при вычислении  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , по формулам (5.24) коэффициент при  $z^4$  в функции устойчивости (5.47) оказался фиксированным<sup>5</sup>. Поэтому интервал устойчивости (5.24), (5.49) ограничен числом 8.6, которое получено на ЭВМ, при этом  $g_1 = 4.48$ ,  $g_2 = 393.1$ . Функция роста имеет вид

$$Q_{5,2}(z) = 1 + z + 0.5z^2 + \frac{1}{4.58}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{393.1}z^5.$$

Подставляя данные значения  $g_1$  и  $g_2$  в (5.49), получим

$$\begin{aligned} p_1 &= 3.77893665732 \cdot 10^{-1}, & p_2 &= -9.30131004367 \cdot 10^{-1}, \\ p_3 &= -2.03904914358 \cdot 10^{-2}, & p_4 &= 1.51157466294, \\ p_5 &= 6.1053167133 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

---

<sup>5</sup>коэффициент при  $z^4$  равен  $1/24$

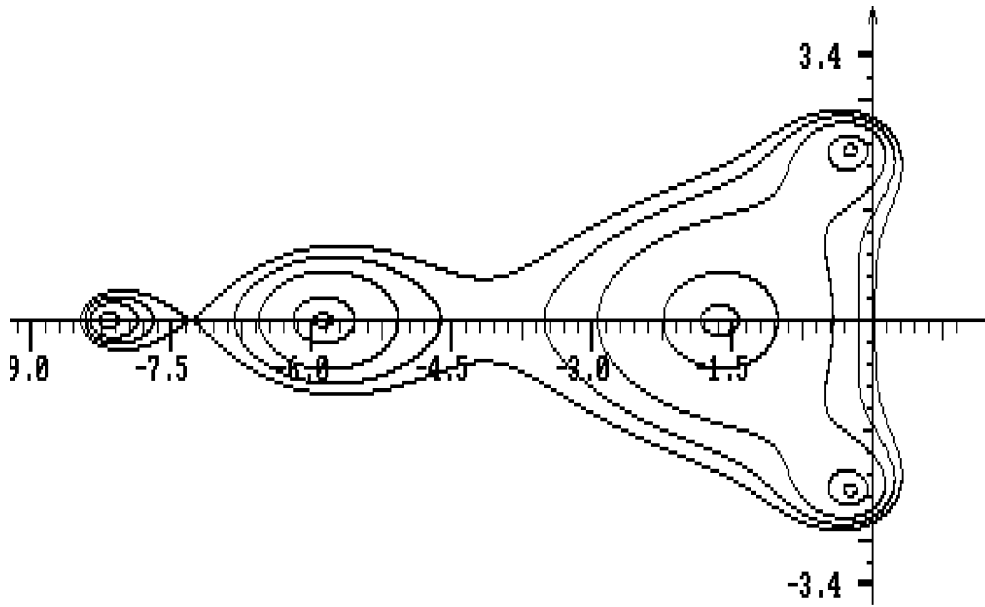


Рис. 4.4. Область устойчивости метода (5.24), (5.52)

Если параметр  $\alpha_2$  определяется по формуле (5.37), то есть метод первого порядка также используется с максимальным интервалом устойчивости, то в (5.51) имеет место  $d \approx 0.17$ .

Для контроля устойчивости схемы (5.24), (5.52) можно применять неравенство (5.28) при  $D \leq 8.6$ .

#### 5.2.4 Алгоритм переменного порядка и шага

Сформулируем алгоритм переменного порядка и шага на основе построенных формул первого, второго и четвертого порядков точности. Ниже будем учитывать, что  $A'_n = O(h^2)$ ,  $A''_n = O(h^2)$ ,  $V_n = O(h)$ . Будем предполагать, что  $C'_n$  (см. формулу (5.26)) при увеличении шага ведет себя как  $O(h^5)$ , а при уменьшении — как  $O(h^4)$ . Это позволяет избежать некоторых повторных вычислений решения вследствие невыполнения точности расчетов. В неравенстве (5.28) будем использовать постоянные  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_4$ , связанные с размером области устойчивости, соответственно, методов первого, второго и четвертого порядков точности.

Зададим два числа  $l_1$  и  $l_2$ , определяющие количества шагов без увеличения шага интегрирования и без смены численной формулы, соответственно, после возврата<sup>6</sup> и после успешного шага. Кроме того опреде-

<sup>6</sup>повторного вычисления решения вследствие невыполнения точности вычислений

лим две переменные  $l'_1$  и  $l'_2$ , которые при первом обращении к алгоритму положим равными нулю.

Режим работы описанного ниже алгоритма DISPM(IJK) будем определять тремя числами I, J, K. Параметр I может принимать значения 0, 1, 2, 4. При  $I = 0$  расчеты проводятся с переменным порядком, при  $I > 0$  — по фиксированной схеме. При  $J = 0$  устойчивость контролируется, при  $J \neq 0$  — не контролируется. Параметр K может принимать значения 0, 1, 2. При  $K = 0$  оценка максимального собственного числа матрицы Якоби вычисляется с помощью подпрограммы, составленной вычислителем, при K равном 1 оценка вычисляется степенным методом, при  $K = 2$  осредняется по формуле

$$\lambda_{nmax}^{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_{nmax}^i, \quad (5.53)$$

где  $\lambda_{nmax}^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , определяются одним из приведенных выше способов,  $n$  — номер текущей точки интегрирования. В случае  $J \neq 0$  параметр K может быть произвольным.

В данных обозначениях рассмотренные выше алгоритмы на основе схемы (5.24) с параметрами (5.25) являются частными случаями алгоритма переменного порядка и шага. В частности, алгоритм на основе схемы (3.84) с неравенством для контроля точности вычислений (3.90) соответствует DISPM (410), а этот же алгоритм с контролем устойчивости с помощью неравенства (4.23) соответствует DISPM (40K), где K может принимать одно из приведенных выше значений.

Далее будем предполагать, что при первом обращении к алгоритму определено число  $q$ ,  $q > 1$ , и вычислена стадия  $k_1$  в точке  $(t_0, y_0)$  по формуле (5.24). Ниже под алгоритмом А, Б и В понимаются, соответственно, алгоритмы интегрирования на основе численных схем (5.24), (5.38); (5.24), (5.52) и (5.24), (5.25).

### А л г о р и т м А.

*Шаг 1а.* Вычисляется стадия  $k_2$  по формуле (5.24).

*Шаг 2а.* Вычисляется оценка ошибки  $A'_n$  по первой формуле (5.41).

*Шаг 3а.* Вычисляется параметр  $s_n$  по формуле

$$q^{2s_n} A'_n = \varepsilon.$$

*Шаг 4а.* Если  $s_n < 0$ , то  $l'_1$  полагается равным  $l_1$ , и происходит повторное вычисление<sup>7</sup> с шагом  $q^{s_n} h_n$ .

*Шаг 5а.* Вычисляются стадии  $k_i$ ,  $3 \leq i \leq 5$ , по формулам (5.24).

*Шаг 6а.* Вычисляется приближение к решению  $y_{n+1}$  по формуле (5.24), (5.38).

---

<sup>7</sup> возврат на шаг 1

Шаг 7а. Вычисляется стадия  $k_{n+1,1} = h_n f(y_{n+1})$ .

Шаг 8а. Вычисляется оценка ошибки  $A''_n$  по второй формуле (5.41).

Шаг 9а. Вычисляется параметр  $\nu_n$  по формуле

$$q^{2\nu_n} A''_n = \varepsilon$$

.

Шаг 10а. Если  $\nu_n < 0$ , то  $l'_1$  полагается равным  $l_1$ , и происходит повторное вычисление<sup>8</sup> с шагом  $q^{\nu_n} h_n$ .

Шаг 11а. Параметрам  $l'_1$  и  $l'_2$  присваиваются, соответственно, значения  $(l'_1 - 1)$  и  $(l'_2 - 1)$ .

Шаг 12а. Если  $l'_1 \geq 0$  или  $l'_2 \geq 0$ , то  $h_{n+1} = h_n$  и выполняется следующий шаг интегрирования по схеме (5.24), (5.38) (переход на шаг 1а).

Шаг 13а. Параметр  $l'_2$  полагается равным  $l_2$ .

Шаг 14а. В зависимости от признака К вычисляется оценка  $V_n$  максимального собственного числа матрицы Якоби.

Шаг 15а. Вычисляется параметр  $r_n$  по формуле

$$q^{r_n} V_n = D_1,$$

причем, если  $I \neq 0$  и  $J \neq 0$ , то  $r_n = \max(s_n, \nu_n)$ .

Шаг 16а. Вычисляется новый шаг интегрирования

$$h_{n+1} = \max(h_n, q^{\min(r_n, s_n, \nu_n)} h_n).$$

Шаг 17а. Если  $I = 1$ , то выполняется следующий шаг интегрирования по схеме (5.24), (5.38).

Шаг 18а. Если выполняется неравенство

$$q^{\min(s_n, \nu_n)} V_n > D_2,$$

то выполняется следующий шаг интегрирования по схеме первого порядка. В противном случае осуществляется переход на формулу второго порядка точности.

## А л г о р и т м Б.

Шаг 1б. Вычисляется стадия  $k_2$  по формуле (5.24).

Шаг 2б. Вычисляется оценка ошибки  $A'_n$  по первой формуле (5.41).

Шаг 3б. Вычисляется параметр  $s_n$  по формуле

$$q^{2s_n} dA'_n = \varepsilon,$$

где значение  $d$  определено в (5.51).

---

<sup>8</sup>возврат на шаг 1

Шаг 4б. Если  $s_n < 0$ , то  $l'_1$  полагается равным  $l_1$ , и происходит повторное вычисление<sup>9</sup> решения с шагом  $q^{s_n} h_n$ .

Шаг 5б. Вычисляются стадии  $k_i$ ,  $3 \leq i \leq 5$ , по формуле (5.24).

Шаг 6б. Вычисляется решение по формуле (5.24), (5.52).

Шаг 7б. Вычисляется стадия  $k_{n+1,1} = hf(y_{n+1})$ .

Шаг 8б. Вычисляется оценка ошибки  $A''_n$  по второй формуле (5.41).

Шаг 9б. Вычисляется параметр  $\nu_n$  по формуле

$$q^{2\nu_n} dA''_n = \varepsilon.$$

Шаг 10б. Если  $\nu_n < 0$ , то  $l'_1$  полагается равным  $l_1$ , и происходит повторное вычисление<sup>10</sup> с шагом  $q^{\nu_n} h_n$ .

Шаг 11б. Параметрам  $l'_1$  и  $l'_2$  присваиваются, соответственно, величины  $(l'_1 - 1)$  и  $(l'_2 - 1)$ .

Шаг 12б. Если  $l'_1 \geq 0$  или  $l_2 \geq 0$ , то  $h_{n+1}$  полагается равным  $h_n$ , и выполняется следующий шаг интегрирования по схеме (5.24), (5.52) (переход на шаг 1б).

Шаг 13б. Параметр  $l'_2$  полагается равным  $l_2$ .

Шаг 14б. Вычисляется оценка ошибки  $C'_n$  по формуле (5.26) и, в зависимости от параметра  $K$ , оценка  $V_n$  максимального собственного числа матрицы Якоби.

Шаг 15б. Вычисляется параметр  $r_n$  по формуле

$$q^{r_n} V_n = D_2,$$

причем если  $I \neq 0$  и  $J \neq 0$ , то  $r_n = \max(s_n, \nu_n)$ .

Шаг 16б. Вычисляется новый шаг интегрирования

$$h_{n+1} = \max(h_n, q^{\min(r_n, s_n, \nu_n)} h_n).$$

Шаг 17б. Если  $I = 2$ , то выполняется следующий шаг интегрирования по схеме (5.24), (5.52).

Шаг 18б. Вычисляются значения параметров  $q_{n1}$  и  $q_{n2}$  по формулам

$$q_{n1} = q^{\min(s_n, \nu_n)}, \quad q_{n2} = q^{\min(r_n, s_n, \nu_n)}.$$

Шаг 19б. Если  $q_{n1} V_n > D_2$  и  $q_{n2}^2 A''_n \leq \varepsilon$ , то управление передается на схему первого порядка. Если  $q_{n1} V_n \leq D_4$  и  $q_{n1}^5 C'_n \leq \varepsilon^{5/4}$ , то осуществляется переход на метод четвертого порядка. В остальных случаях выполняется следующий шаг интегрирования по формуле (5.24), (5.52).

## А л г о р и т м В.

---

<sup>9</sup>возврат на шаг 1

<sup>10</sup>возврат на шаг 1

Шаг 1в. Вычисляются стадии  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , по формулам (5.24).

Шаг 2в. Вычисляется оценка ошибки  $C'_n$  по первой формуле (5.26).

Шаг 3в. Вычисляется значение параметра  $s_n$  по формуле

$$q^{4s_n} C'_n = \varepsilon^{5/4}.$$

Шаг 4в. Если  $s_n < 0$ , то  $l'_1$  полагается равным  $l_1$ , и происходит повторное вычисление<sup>11</sup> с шагом  $q^{s_n} h_n$ .

Шаг 5в. Перевычисляется значение параметра  $s_n$  по формуле

$$q^{5s_n} C'_n = \varepsilon^{5/4}.$$

Шаг 6в. Вычисляется приближение к решению  $y_{n+1}$  по схеме (5.24), (5.25).

Шаг 7в. Вычисляется стадия  $k_{n+1,1} = hf(y_{n+1})$ .

Шаг 8в. Параметрам  $l'_1$  и  $l'_2$  присваиваются, соответственно, величины  $(l'_1 - 1)$  и  $(l'_2 - 1)$ .

Шаг 9в. Если  $l'_1 \geq 0$  или  $l'_2 \geq 0$ , то  $h_{n+1}$  полагается равным  $h_n$ , и выполняется следующий шаг интегрирования по схеме (5.24), (5.25) (переход на шаг 1в).

Шаг 10в. Параметр  $l'_2$  полагается равным  $l_2$ .

Шаг 11в. Вычисляется оценка ошибки  $A'_n$  по формуле (5.41) и оценка  $V_n$  максимального собственного числа по формуле (5.26).

Шаг 12в. Вычисляется значение параметра  $r_n$  по формуле

$$q^{r_n} V_n = D_4,$$

причем если  $I \neq 0$  и  $J \neq 0$ , то  $r_n = s_n$ .

Шаг 13в. Вычисляется новый шаг интегрирования

$$h_{n+1} = \max(h_n, q^{\min(r_n, s_n)} h_n).$$

Шаг 14в. Если  $I = 5$ , то выполняется следующий шаг интегрирования по схеме (5.24), (5.25).

Шаг 15в. Если  $q^{s_n} V_n > D_4$  и  $q^{2s_n} dA'_n \leq \varepsilon$ , то управление передается на метод второго порядка. В противном случае выполняется следующий шаг интегрирования по схеме четвертого порядка точности.

Для конкретных расчетов может быть рекомендован следующий набор параметров:  $q = 1.1$ ,  $D_1 = 50$ ,  $D_2 = 8.6$ ,  $D_4 = 3.5$ .

---

<sup>11</sup> возврат на шаг 1

### 5.3 Алгоритм с применением стадий Рунге-Кутта-Фельберга

Рассмотрим шестистадийный метод типа Рунге-Кутта следующего вида

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^6 p_i k_i, \\
 k_1 &= hf(y_n), \\
 k_2 &= hf(y_n + \frac{1}{4}k_1), \\
 k_3 &= hf(y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2), \\
 k_4 &= hf(y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3), \\
 k_5 &= hf(y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4), \\
 k_6 &= hf(y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5). \quad (5.54)
 \end{aligned}$$

#### 5.3.1 Метод пятого порядка

При значениях параметров

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{16}{135}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{6656}{12825}, \\
 p_4 &= \frac{28561}{56430}, \quad p_5 = -\frac{9}{50}, \quad p_6 = \frac{2}{55} \quad (5.55)
 \end{aligned}$$

формула (5.54) совпадает с методом Фельберга, а ее функция роста имеет вид

$$Q_{6,5}(z) = 1 + z + 0.5z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{2080}z^6.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 C'_n &= \frac{17}{24} \left\| \sum_{i=1}^6 (p_{5i} - p_{4i}) k_i \right\|, \\
 V_n &= \frac{1}{9} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(32k_3 - 48k_2 + 16k_1)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|, \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

где  $p_{5i}$ ,  $p_{4i}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , задаются, соответственно, с помощью следующих

формул

$$\begin{aligned}
p_{51} &= \frac{16}{135}, & p_{52} &= 0, & p_{53} &= \frac{6656}{12825}, \\
p_{54} &= \frac{28561}{56430}, & p_{55} &= -\frac{9}{50}, & p_{56} &= \frac{2}{55} \\
p_{41} &= \frac{25}{16}, & p_{42} &= 0, & p_{43} &= \frac{1408}{2565}, \\
p_{44} &= \frac{2197}{4104}, & p_{45} &= -\frac{1}{5}, & p_{46} &= 0.
\end{aligned}$$

Тогда для контроля точности схемы (5.54) с параметрами (5.55) можно применять неравенство

$$C'_n \leq \varepsilon, \quad (5.57)$$

а для контроля устойчивости — следующее

$$V_n \leq D, \quad (5.58)$$

где постоянную  $D$  можно выбрать равной 3.6, то есть примерно равной длине интервала устойчивости (5.54), (5.55).

### 5.3.2 Метод первого порядка

На основе стадий  $k_i, 1 \leq i \leq 6$ , определяемых формулами (5.54), построим формулу интегрирования более грубую в смысле точности, но с максимальным интервалом устойчивости. Для этого запишем матрицу  $B_6$  с элементами (3.26). Учитывая значения параметров  $\beta_{ij}, 2 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq i-1$  (см. формулу (5.54)), получим

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{12}{13} & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & \frac{9}{128} & \frac{72}{169} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\
0 & 0 & 0 & \frac{513}{2197} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{24} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{104} & -\frac{11}{1248} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{832}
\end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Теперь применим (5.54) для решения задачи (2.7). С использовани-



ем (3.29), (3.30) и (5.59), получим

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= Q_{6,1}(z)y_n, \quad z = \lambda h, \\
 Q_{6,1}(z) &= 1 + \left(\sum_{i=1}^6 p_i\right)z + \left(\frac{1}{4}p_2 + \frac{3}{8}p_3 + \frac{12}{13}p_4 + p_5 + \frac{1}{2}p_6\right)z^2 \\
 &+ \left(\frac{9}{128}p_3 + \frac{72}{169}p_4 + \frac{1}{2}p_5 + \frac{1}{8}p_6\right)z^3 \\
 &+ \left(\frac{513}{2197}p_4 + \frac{5}{12}p_5 - \frac{1}{24}p_6\right)z^4 \\
 &- \left(\frac{5}{104}p_5 + \frac{11}{1248}p_6\right)z^5 + \frac{11}{832}p_6z^6.
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Область устойчивости (5.54) ограничена кривой  $|Q_{6,1}(z)| = 1$  в комплексной плоскости  $z = \lambda h$ . Выберем параметры  $p_i, 1 \leq i \leq 6$ , таким образом, чтобы схема (5.54) имела первый порядок точности и максимальный интервал устойчивости. Первое условие будет выполнено, если

$$\sum_{i=1}^6 p_i = 1. \tag{5.61}$$

В результате задача построения численной схемы с максимальным интервалом устойчивости сводится к построению полинома вида

$$Q_{6,1}(z) = 1 + z + \sum_{i=2}^6 c_i z^i, \tag{5.62}$$

для которого неравенство  $|Q_{6,1}(z)| \leq 1$  выполняется на максимальном интервале  $[\gamma, 0]$ . Приравнявая затем коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в (5.60) и (5.62), получим линейную систему алгебраических уравнений относительно  $p_i, 1 \leq i \leq 6$ . В обозначениях  $C_6 = (1, c_2, \dots, c_6)^T$ ,  $P_6 = (p_1, \dots, p_6)$  она имеет вид

$$B_6 P_6 = C_6. \tag{5.63}$$

Разрешая систему (5.63) с верхней треугольной матрицей  $B_6$ , получим коэффициенты метода первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости. Мы не будем приводить их явный вид в силу громоздкости соответствующих выражений.

Для получения коэффициентов полинома (5.62) рассмотрим одно- временно многочлен Чебышева  $T_6(x)$  шестой степени

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \tag{5.64}$$

для которого выполняется неравенство  $|T_6(x)| \leq 1$  при  $x \in [-1, 1]$ . Про-

ведем замену переменных, полагая  $x = 1 - 2z/\gamma$  в (5.64). Получим

$$\begin{aligned} T_6(z) = & 1 - \frac{72}{\gamma}z + \frac{840}{\gamma^2}z^2 - \frac{3584}{\gamma^3}z^3 + \\ & + \frac{6912}{\gamma^4}z^4 - \frac{6144}{\gamma^5}z^5 + \frac{2048}{\gamma^6}z^6, \end{aligned} \quad (5.65)$$

при этом отрезок  $[\gamma, 0]$  отобразится на отрезок  $[-1, 1]$ . Потребуем совпадения коэффициентов многочленов (5.62) и (5.65) при одинаковых степенях  $z$ . Тогда получим, что параметры  $p_i, 1 \leq i \leq 6$ , схемы (5.54) и коэффициенты (5.65) связаны соотношением (5.63), где

$$\begin{aligned} \gamma &= -72, \quad c_2 = \frac{840}{\gamma^2}, \quad c_3 = -\frac{3584}{\gamma^3}, \\ c_4 &= \frac{6912}{\gamma^4}, \quad c_5 = -\frac{6144}{\gamma^5}, \quad c_6 = \frac{2048}{\gamma^6}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Подставляя в (5.63) коэффициенты (5.66), получим параметры

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.41975960186956, & p_2 &= 0.44944365216575, \\ p_3 &= 0.1296419611922, & p_4 &= 0.12199235635231 \cdot 10^{-2}, \\ p_5 &= -0.66250690732054 \cdot 10^{-4}, & p_6 &= 0.11118997045939 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

при которых схема (5.54) имеет первый порядок точности, а ее интервал устойчивости расширен до 72 по действительной оси. Функция устойчивости схемы (5.54), (5.67) совпадает с (5.65) при  $\gamma = -72$  и имеет вид

$$Q_{6,1}(z) = 1 + z + \frac{35}{216}z^2 + \frac{14}{1458}z^3 + \frac{1}{3888}z^4 + \frac{1}{314928}z^5 + \frac{1}{68024448}z^6.$$

Построим неравенство для контроля точности схемы (5.54) с параметрами (5.67). Для этого разложим  $k_i, 1 \leq i \leq 6$ , в ряды Тейлора и подставим в первую формулу (5.54). С использованием (3.40) и (5.59), будем иметь

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + c_2 h^2 f'_n f_n + O(h^3). \quad (5.68)$$

При использовании параметров (5.67) здесь  $c_2 = 35/216$ . Пусть  $y_n = y(t_n)$ . Тогда, сравнивая (3.39) и (5.68) до членов с  $h^2$  включительно, получим, что локальная ошибка  $\delta_{n,1}$  схемы (5.54) первого порядка точности имеет вид

$$\delta_{n,1} = \frac{1 - 2c_2}{2} h^2 f' f + O(h^3). \quad (5.69)$$

Метод первого порядка предполагается использовать на участке установления, где ошибки за счет неточности (5.54) невелики. Поэтому для

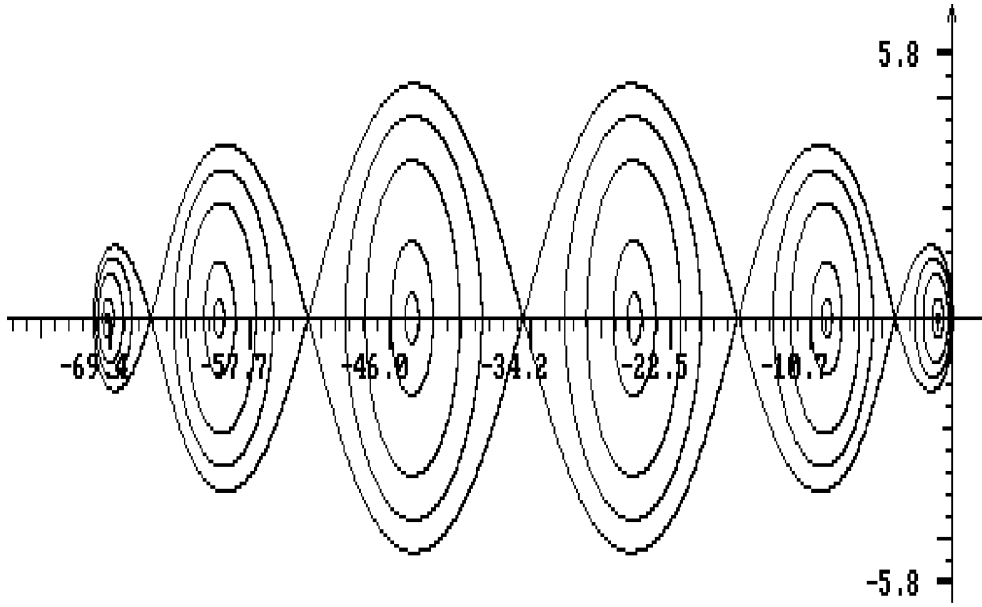


Рис. 4.5. Область устойчивости метода (5.54), (5.67)

контроля точности вычислений можно использовать оценку локальной ошибки. Введем обозначения

$$A'_n = |2 - 4c_2| \cdot \|k_2 - k_1\|, \quad (5.70)$$

$$A''_n = |1 - 2c_2| \cdot \|hf(y_{n+1}) - k_1\|.$$

Учитывая (5.70) и что

$$k_2 - k_1 = 0.25h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad (5.71)$$

$$hf(y_{n+1}) - k_1 = h^2 f'_n f_n + O(h^2),$$

для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования будем применять, соответственно, неравенства

$$A'_n \leq \varepsilon, \quad A''_n \leq \varepsilon. \quad (5.72)$$

При практической реализации алгоритма интегрирования во второй формуле (5.70) используется постоянная  $|2 - 4c_2|$  вместо  $|1 - 2c_2|$ . Более жесткое неравенство при выборе шага чем при контроле точности вычислений позволяет избежать некоторых повторных вычислений решения (возвратов) вследствие нарушения первого неравенства (5.72).

Так как длина интервала устойчивости схемы (5.54), (5.67) равна 72, то для ее контроля устойчивости можно применять неравенство (5.58) при  $D \leq 72$ .

В силу того, что интервал устойчивости (5.54), (5.67) примерно в 20 раз шире (5.54), (5.55), при переходе с (5.54), (5.55) на (5.54), (5.67) шаг интегрирования, вообще говоря, может быть увеличен в 20 раз. Как показывают расчеты, в ряде случаев такое резкое увеличение шага приводит к тому, что нарушается первое неравенство (5.72), и шаг может быть уменьшен до такой величины, что осуществляется обратный переход на формулу (5.54), (5.55).

Чтобы избежать таких неоправданных переходов, включим в состав алгоритма еще схему второго порядка, у которой интервал устойчивости шире, чем у схемы (5.54), (5.55), но уже интервала устойчивости (5.54), (5.67). Переход с пятого порядка на первый и обратно будем осуществлять через посредство формулы второго порядка точности. Это позволяет выбирать шаг интегрирования более плавно. Заметим, что для схемы третьего порядка точности на основе  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , определяемых формулами (5.54), интервал устойчивости расширяется незначительно по отношению к (5.54), (5.55), и поэтому ее рассматривать не будем.

### 5.3.3 Метод второго порядка

Перейдем к построению метода второго порядка точности с максимальным интервалом устойчивости. Из сравнения (3.39) и (3.40) до членов с  $h^2$  включительно при условии  $y_n = y(t_n)$  видно, что метод (5.54) будет иметь второй порядок точности, если его параметры связаны соотношениями (5.63), где  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0.5$ . В [40] приведен набор коэффициентов

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, & c_2 &= 0.5, & c_3 &= 0.8799401907 \cdot 10^{-1}, & c_4 &= 0.6616916777 \cdot 10^{-2}, \\ c_5 &= 0.2217607053 \cdot 10^{-3}, & c_6 &= 0.2731155893 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

при которых длина интервала устойчивости шестистадийной схемы типа Рунге-Кутты второго порядка точности максимальная и равна примерно 28.5. Подставляя (5.73) в (5.63), получим соответствующий набор параметров схемы (5.54), то есть

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.38402730263584, & p_2 &= 0.28983444250334, \\ p_3 &= 1.0619634532176, & p_4 &= 0.36673326913333 \cdot 10^{-1}, \\ p_5 &= -0.46504946987375 \cdot 10^{-2}, & p_6 &= 0.20657470028730 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Локальная ошибка  $\delta_{n,2}$  схемы (5.54) с коэффициентами (5.74) имеет вид

$$\delta_{n,2} = \frac{1 - 6c_3}{6} h^3 f'^2 f + O(h^4), \quad (5.75)$$

где коэффициент  $c_3$  определен в (5.73). Тогда для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования можно ис-

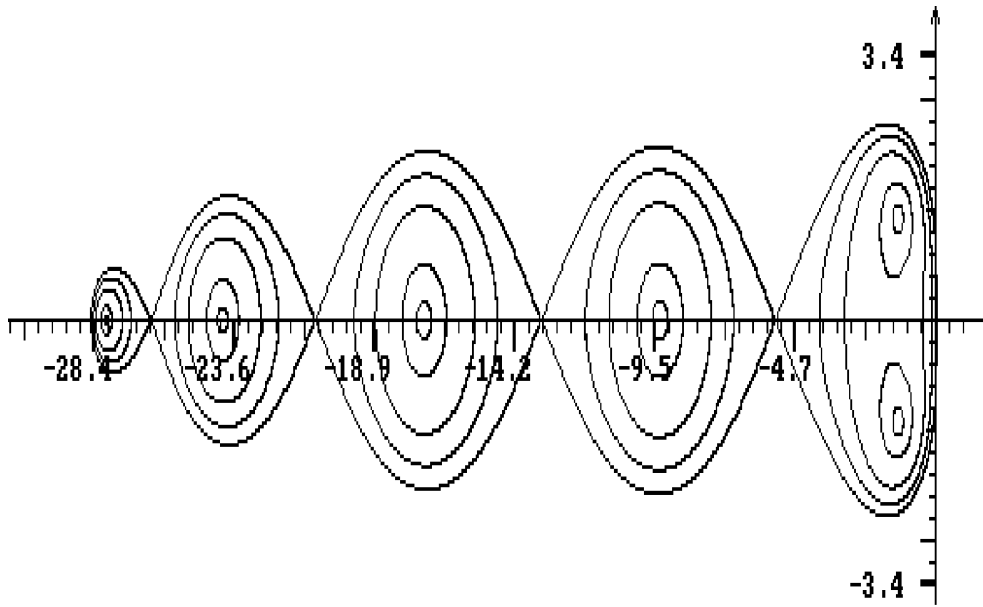


Рис. 4.6. Область устойчивости метода (5.54), (5.74)

пользовать неравенства

$$dA'_n \leq \varepsilon, \quad dA''_n \leq \varepsilon, \quad d = \left| \frac{1 - 6c_3}{3 - 6c_2} \right|, \quad (5.76)$$

где  $c_2$  есть коэффициент при  $z^2$  в многочлене устойчивости (5.62) метода первого порядка, а  $c_3$  есть коэффициент при  $z^3$  в многочлене устойчивости метода второго порядка. При использовании методов первого и второго порядков с максимальными интервалами устойчивости имеем  $d \approx 0.24$ . Для контроля устойчивости схемы (5.54) с параметрами (5.74) можно использовать неравенство (5.58) при  $D \leq 28.5$ .

Алгоритм переменного порядка и шага на основе численных формул (5.54) первого, второго и пятого порядков точности назовем DISPF(IJK). Он формулируется аналогично алгоритму DISPM(IJK) на основе стадий Рунге-Кутты-Мерсона. Режим его работы снова задается тремя числами I, J и K, смысл которых определен при описании DISPM.

Заметим, что алгоритм на основе схемы (4.24) с неравенствами для контроля точности (4.31) и устойчивости (4.38) является частным случаем алгоритма переменного порядка и шага в случае DISPF(50K), где параметр K определяет способ оценивания максимального собственного числа матрицы Якоби.

## 5.4 Анализ результатов расчетов

Результаты расчетов тестовых примеров построенными алгоритмами приведены в табл. 4.1 – 4.3<sup>12</sup>. Отметим, что несмотря на то, что теперь на значительной части интервала интегрирования приближенное решение вычисляется методом первого порядка точности, фактическая точность существенно лучше задаваемой. Причина этого заключается в том, что почти на всем интервале интегрирования шаг выбирается из условия устойчивости. Неравенство для контроля точности оказывают влияние на величину шага только при прохождении переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, а такой участок для некоторых задач отсутствует вовсе.

Из анализа табл. 4.3 следует, что при точности  $10^{-2}$  самым эффективным является метод первого порядка DISPF(101) с контролем точности и устойчивости, основанный на шестистадийной схеме типа Рунге-Кутты. Это естественно, потому что при низкой точности расчетов шаг ограничен в основном только устойчивостью численной схемы, а в данном методе на одно вычисление правой части приходится самый большой отрезок<sup>13</sup> из интервала устойчивости среди всех исследуемых алгоритмов. При более высокой точности расчетов, когда неравенство для контроля точности начинает оказывать более сильное влияние на выбор шага, эффективность данного метода существенно ниже остальных. Заметим, что при точности расчетов  $10^{-2}$  достаточно эффективным является также DISPD.

При точности расчетов  $10^{-4}$  наиболее эффективны алгоритмы переменного порядка и шага DISPM и DISPF. Это естественно, потому что при  $\varepsilon = 10^{-4}$  уже на достаточно большой части промежутка интегрирования шаг выбирается из условия точности, а в состав данных алгоритмов включены методы четвертого и пятого порядков, соответственно.

При  $\varepsilon = 10^{-6}$  наиболее эффективен алгоритм DISPF, что является следствием наличия в нем численной схемы высокого порядка.

Из анализа третьей и четвертой строки табл. 4.3 следует, что оценка максимального собственного числа матрицы Якоби степенным методом более предпочтительна, чем средняя. Однако анализ табл. 4.1 показывает, что это не всегда так. В частности, при решении примера 10 с точностью  $10^{-2}$  использование средней оценки приводит к повышению эффективности почти в 2 раза.

Сравнение табл. 3.3 и табл. 4.3 показывает безусловное преимущество алгоритмов переменного порядка и шага по сравнению с алгоритмами, основанными на фиксированных численных схемах.

<sup>12</sup> расчеты с точностью  $10^{-6}$  методами DISPF(101) и DISPF(201) не проводились вследствие низкого порядка численных формул

<sup>13</sup> 12 единиц

Таблица 4.1

Результаты расчетов примеров [21]

Номер задачи	DISPD(001)			DISPM(001)		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
4	21996	23415	28633	22739	23094	23916
5	1241	2373	11621	1255	2127	4173
6	1776	7093	9696	3551	5538	7864
7	9699	10238	25863	8036	7806	12298
8	3724	12972	26754	3539	8114	27641
10	8786	27954	59918	5273	15638	64961
12	383	1208	6745	443	696	1588
16	392	707	4532	356	380	415
17	390	1006	4419	495	788	1745
25	1392	1758	3665	947	2193	2731
	DISPF(001)			DISPF(002)		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
5	1471	1883	2873	2221	2432	4746
6	1359	4410	9733	1441	4400	11058
7	9658	8091	9489	11233	11726	12373
8	3791	8129	18681	4094	8270	22423
10	8821	18848	67198	4323	17088	72637
12	632	971	1710	905	5113	9972
16	349	578	1049	391	674	3524
17	445	600	1542	374	597	1374
25	1141	1321	1785	916	946	933

Заметим, что алгоритмы DISPD, DISPM и DISPF основаны на тех же стадиях, что и RK23, MERSON и RKF45, соответственно. Однако ценой незначительного увеличения вычислительных затрат, которые определяются операциями на оценку максимального собственного числа матрицы Якоби, их эффективность существенно увеличена (см. строки 1, 9 и 7 табл. 3.3 и строки 1, 2 и 3 табл. 4.3).

Таблица 4.2

Результаты расчетов примеров [1]

Номер задачи	DISPD(001)			DISPM(001)		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
4л	2105	2424	13237	1858	3319	15518
5л	4997	10889	21637	11746	12752	15631
6л	1561	2206	12344	1182	1291	3716
	DISPF(001)			DISPF(002)		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
4л	1385	1998	5478	2124	3661	5574
5л	9030	10133	10574	11845	12314	12947
6л	1717	1977	3638	2574	2963	4215

Таблица 4.3

Суммарные затраты на интегрирование всех примеров

Метод	З а т р а т ы		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
DISPD(001)	58442	104243	229064
DISPM(001)	61420	83736	182203
DISPF(001)	62726	82890	157415
DISPF(002)	65416	93153	184342
DISPF(101)	55581	893457	-
DISPF(201)	104718	152276	-



## Глава 6

# Алгоритмы с адаптивной областью устойчивости

Получены параметры  $m$ -стадийных методов типа Рунге-Кутты первого, второго и третьего порядков точности с заданной областью устойчивости. Задача о построении методов сведена к решению линейной системы алгебраических уравнений с невырожденной верхней треугольной матрицей. Сформулирован алгоритм переменного порядка, шага и с переменным числом стадий. Разработан алгоритм определения коэффициентов полиномов устойчивости, при которых метод имеет заданную форму и размер области устойчивости.

### 6.1 Численное конструирование областей устойчивости явных методов

Из (3.29) и (3.30) следует, что функция роста явного  $m$ -стадийного метода типа Рунге-Кутты представляет собой полином степени  $m$ . Через заданные параметры схемы (3.24) можно вычислить коэффициенты этого многочлена по формуле (3.30). Здесь рассмотрим задачу получения таких коэффициентов многочлена устойчивости, чтобы область устойчивости схемы имела заданную, естественно "разумную", форму и размер.

Итак, пусть заданы два числа  $k$  и  $m$ ,  $k \leq m$ . Рассмотрим многочлены вида

$$Q_{m,k}(x) = 1 + \sum_{i=1}^k c_i x^i + \sum_{i=k+1}^m c_i x^i, \quad (6.1)$$

где коэффициенты  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , заданы, а  $c_i$ ,  $k+1 \leq i \leq m$ , — свободные. Обычно  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , определяются из требований аппроксимации. Поэтому для определенности ниже будем предполагать, что  $c_i = 1/i!$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Обозначим экстремальные точки (6.1) через  $x_1, \dots, x_{m-1}$ , причем  $x_1 > x_2 > \dots > x_{m-1}$ . Неизвестные коэффициенты  $c_i, k+1 \leq i \leq m$ , определим из условия, чтобы многочлен (6.1) в экстремальных точках  $x_i, k \leq i \leq m-1$ , принимал заданные значения, то есть

$$Q_{m,k}(x_i) = F_i, \quad k \leq i \leq m-1, \quad (6.2)$$

где  $F(x)$  есть некоторая заданная функция,  $F_i = F(x_i)$ . Для этого на  $x_i, k \leq i \leq m-1$  и коэффициенты  $c_i, k+1 \leq j \leq m$  рассмотрим следующую алгебраическую систему уравнений

$$Q_{m,k}(x_i) = F_i, \quad Q'_{m,k}(x_i) = 0, \quad k \leq i \leq m-1, \quad (6.3)$$

где

$$Q'_{m,k}(x) = \sum_{i=1}^m i c_i x^{i-1}.$$

Перепишем (6.3) в виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Для этого обозначим через  $y, z, g, r$  векторы с координатами

$$\begin{aligned} y_i &= x_{k+i-1}, \quad z_i = c_{k+i}, \quad g_i = F_{k+i-1} - 1 - \sum_{j=1}^k c_j y_i^j, \\ r_i &= - \sum_{j=1}^k j c_j y_i^{j-1}, \quad 1 \leq i \leq m-k, \end{aligned} \quad (6.4)$$

через  $E_1, \dots, E_5$  — диагональные матрицы с элементами на диагонали, соответственно вида

$$\begin{aligned} e_1^{ii} &= k+i, \quad e_2^{ii} = \frac{1}{y_i}, \quad e_5^{ii} = (-1)^{k+i-1}, \\ e_3^{ii} &= \sum_{j=1}^k j c_j y_i^{j-1} + \sum_{j=1}^{m-k} (k+j) z_j y_i^{k+j-1}, \\ e_4^{ii} &= \sum_{j=2}^k j(j-1) c_j y_i^{j-2} + \sum_{j=1}^{m-k} (k+j)(k+j-1) z_j y_i^{k+j-2}, \\ &1 \leq i \leq m-k, \end{aligned} \quad (6.5)$$

а через  $A$  матрицу с элементами

$$a^{ij} = y_i^{k+j}, \quad 1 \leq i, j \leq m-k. \quad (6.6)$$

Заметим, что компоненты векторов (6.4), матриц (6.5) и  $A$  зависят от чисел  $m$  и  $k$ , причем  $g = g(y)$ ,  $r = r(y)$ ,  $E_2 = E_2(y)$ ,  $E_3 = E_3(y, z)$ ,  $E_4 = E_4(y, z)$ ,  $A = A(y)$ . Мы опустили индексы и аргументы для упрощения записи. С использованием введенных обозначений задачу (6.3) можно записать в виде

$$Az - g = 0, \quad E_2 A E_1 z - r = 0. \quad (6.7)$$

Система (6.7) является плохообусловленной, что приводит к определенным трудностям при использовании для ее решения метода простой итерации. Поэтому рассмотрим метод Ньютона, который имеет вид

$$\begin{pmatrix} y^{n+1} \\ z^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ z^n \end{pmatrix} - H^{-1}(y^n, z^n) \cdot \begin{pmatrix} A(y^n)z^n - g(y^n) \\ E_2(y^n)A(y^n)E_1z^n - r(y^n) \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

где  $H(y, z)$  есть матрица Якоби системы (6.7), то есть

$$H(y, z) = \left( \begin{array}{c|c} E_3(y, z) & A(y) \\ \hline E_4(y, z) & E_2(y)A(y)E_1 \end{array} \right) \quad (6.9)$$

При реализации (6.8) требуется обращение матрицы размерности  $2(m-k)$ , что приводит к значительным вычислительным затратам. С другой стороны, учитывая, что так как элементы матрицы  $E_3$  определены по формуле (см. (6.5))

$$e_3^{ii} = (E_2AE_1z - r)_i, \quad 1 \leq i \leq m-k, \quad (6.10)$$

то она вырождается в нулевую на точном решении задачи (6.7). Поэтому при достаточно хороших начальных условиях, полагая в (6.8)  $E_3 = O$ , можно рассмотреть следующий итерационный процесс

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= A^{-1}(y^n)g(y^n), \\ y^{n+1} &= y^n + E_4^{-1}(y^n, z^{n+1})[r(y^n) - E_2(y^n)A(y^n)E_1z^{n+1}]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Отметим, что оба метода (6.8) и (6.11) нуждаются в хорошем начальном условии  $y^0$ , при этом  $z^0$  вычисляется по формуле

$$z^0 = A^{-1}(y^0)g(y^0). \quad (6.12)$$

Если в (6.3) положить  $F_i = (-1)^i$ ,  $k \leq i \leq m-1$ , то есть поставить задачу нахождения полинома с максимальным размером интервала устойчивости, то вопрос о вычислении начального условия  $y^0$  решается достаточно просто с использованием значений экстремальных точек многочлена Чебышева, рассматриваемого на отрезке  $[-2m^2, 0]$ , где  $m$  есть степень (6.1). Их можно вычислить по формуле

$$y_i = m^2(\cos \frac{i\pi}{m} - 1), \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (6.13)$$

Подставляя (6.13) в первую формулу (6.7), получим коэффициенты полинома Чебышева, для которого  $|Q_{m,1}(x)| \leq 1$  при  $x \in [-2m^2, 0]$ . При любом  $k$  в качестве начальных условий процессов (6.8) и (6.11) можно взять (6.13) и, как показывают расчеты, имеется хорошая сходимость. Если же  $F \neq (-1)^i$ ,  $k \leq i \leq m-1$ , то выбор начальных условий  $y^0$  для (6.8) и (6.11) является, вообще говоря, искусством.

Опишем еще один способ решения (6.3) или (6.7), который не нуждается в хороших начальных условиях. Для численного решения (6.7) используем метод установления, который заключается в том, что для стационарной задачи строится некоторый нестационарный процесс, решение которого с течением времени устанавливается к решению исходной задачи.

Итак, рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = E_5(E_2AE_1A^{-1}g - r), \quad y(0) = y_0, \quad (6.14)$$

где элементы матрицы  $E_5$  определены по третьей формуле (6.5). Ясно, что после определения стационарной точки (6.14) коэффициенты полинома устойчивости можно вычислить из первой системы (6.7). Из результатов расчетов следует, что (6.14) является жесткой задачей. Методы решения таких задач предполагают вычисление матрицы Якоби, что в случае (6.14) связано с определенными трудностями. Поэтому для ее решения используем метод с численным вычислением матрицы Якоби [39]. Начальные условия для всех  $m$  и  $k$  будем выбирать по формуле (6.13).

Теперь перейдем к численному исследованию влияния функции  $F$  (см. (6.2)) на размер и форму области устойчивости. Сначала докажем следующую теорему.

*Теорема 5.1. Пусть в (6.3) имеет место*

$$F_i = (-1)^i, \quad k \leq i \leq m-1,$$

*и пусть*

$$|Q_{m,k}(x_i)| \leq 1,$$

*при  $1 \leq i \leq k-1$ . Тогда среди всех полиномов вида (6.1) для построенного многочлена  $Q_{m,k}(x)$  выполняется неравенство*

$$|Q_{m,k}(x)| \leq 1$$

*на максимальном интервале  $[\gamma_m, 0]$ , где  $\gamma_m < x_{m-1}$ ,  $Q(\gamma_m) = (-1)^m$ .*

Для доказательства утверждения рассмотрим одновременно многочлен  $P_{m,k}(x)$  вида

$$P_{m,k}(x) = 1 + \sum_{i=1}^k c_i x^i + \sum_{i=k+1}^m b_i x^i, \quad x \leq 0, \quad (6.15)$$

где  $b_i$ ,  $k+1 \leq i \leq m$ , есть некоторый набор коэффициентов.

Пусть  $|P_{m,k}(x)| \leq 1$  на промежутке  $[\alpha_m, 0]$ ,  $\alpha_m < 0$ . Предположим, что  $|P_{m,k}(x_i)| \leq 1 - \varepsilon$  при  $k \leq i \leq m-1$  и, в то же время,  $\alpha_m < \gamma_m$ , где  $0 < \varepsilon < 1$ , а  $\alpha_m$  есть функция от  $\varepsilon$ ,  $\alpha_m = \alpha_m(\varepsilon)$ . Рассмотрим  $Q_{m,k}(x)$  и

$P_{m,k}(x)$  на промежутке  $[\alpha_m(\varepsilon), 0]$ . Многочлен

$$Q_{m,k}(x) - P_{m,k}(x) = x^{k+1} \sum_{i=k+1}^m (c_i - b_i) x^{i-k-1} \quad (6.16)$$

имеет степень меньше либо равную  $m$ . В тоже время нуль является его  $(k+1)$ -кратным корнем, и так как

$$\begin{aligned} \text{sign}[Q_{m,k}(x_i) - P_{m,k}(x_i)] &= (-1)^i, \quad k \leq i \leq m-1, \\ \text{sign}[Q_{m,k}(\alpha_m(\varepsilon)) - P_{m,k}(\alpha_m(\varepsilon))] &= (-1)^m, \end{aligned}$$

то он меняет знак между любыми двумя точками  $x_k, \dots, x_{m-1}, \alpha_m(\varepsilon)$ . Следовательно на промежутке  $[\alpha_m(\varepsilon), x_k]$  многочлен  $[Q_{m,k}(x) - P_{m,k}(x)]$  имеет дополнительно  $(m-k)$  корней. В результате получим, что из условия  $\alpha_m(\varepsilon) < \gamma_m$  следует, что полином (6.16) степени меньше либо равной  $m$  имеет  $(m+1)$  корень. Из полученного противоречия следует, что  $\alpha_m(\varepsilon) \geq \gamma_m$ . Окончательное доказательство получим, если выбрать  $\alpha_m$  как точную верхнюю грань  $\alpha_m(\varepsilon)$  по всем  $\varepsilon$ .

Таким образом, задача о построении метода с максимальным интервалом устойчивости сводится к решению (6.3) при условии  $F_i = (-1)^i$ ,  $k \leq i \leq m-1$ . Из результатов расчетов следует, что коэффициент  $c_m$  многочлена (6.1) убывает с ростом  $m$  и, в частности, при  $m = 13$  и  $k = 2$  величина  $c_m$  порядка  $10^{-20}$ . Поэтому применение (6.1) при  $m \geq 13$  представляется проблематичным на современных ЭВМ. В табл. 1 приведены длины интервалов устойчивости оптимальных полиномов при  $3 \leq m \leq 13$ ,  $2 \leq k \leq m-1$ .

Таблица 1  
Зависимость длины интервала устойчивости от числа стадий

$m$ $k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	6.26	12.0	19.5	28.5	39.2	51.5	65.5	81.1	98.4	117.	138.
3		6.03	10.5	16.0	22.6	30.1	38.6	48.1	58.6	70.2	82.7
4			6.06	9.97	14.6	19.9	26.0	32.7	40.2	48.4	57.3
5				6.26	9.81	13.9	18.6	23.8	29.5	35.9	42.7
6					6.51	9.83	13.6	17.8	22.5	27.6	33.2
7						6.81	9.96	13.5	17.4	21.7	26.3
8							7.12	10.1	13.5	17.2	21.2
9								7.46	10.4	13.6	17.1
10									7.8	10.7	13.8
11										8.15	11.0
12											8.51

Результаты численного эксперимента по определению влияния функции  $F$  (см. (6.2)) на размер и форму области устойчивости приведены в

приложении. Сейчас разработан комплекс программ DPOL автоматизированного построения полиномов устойчивости. На вход комплекса подаются параметры: степень полинома  $m$ , число заданных коэффициентов  $k$ , значения функции  $F$  (см.(6.2)). Выходные данные: графическое изображение области устойчивости  $|Q_{m,k}(x)| = d$  при  $d$  равном 0.05, 0.3, 0.7, 1; коэффициенты  $c_j$ ,  $k+1 \leq j \leq m$ ; значения экстремальных точек  $x_i$ ,  $k \leq i \leq m-1$ ; длина интервала устойчивости. Комплекс реализован на языке Фортран 77 для ЭВМ РС АТ.

## 6.2 Методы первого порядка

Введем обозначения

$$C_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^T, \quad P_m = (p_{m1}, \dots, p_{mm})^T,$$

где  $c_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , – коэффициенты многочлена устойчивости (6.1),  $p_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , – параметры схемы (3.24). При записи компонент векторов  $C_m$  и  $P_m$  введен второй индекс  $m$  для того, чтобы подчеркнуть связь с  $m$ -стадийной численной схемой. Из (3.29) и (3.30) следует, что коэффициенты многочлена устойчивости и параметры численной схемы связаны соотношениями

$$B_m P_m = C_m, \quad (6.17)$$

где элементы треугольной матрицы  $B_m$  определены формулами (3.26).

*Теорема 5.2. Пусть  $m_1 = 1$ . Тогда схема (3.24) имеет второй порядок точности.*

При требовании  $c_{m1} = 1$  доказательство следует из сравнения разложений в виде рядов Тейлора для точного и приближенного решений до членов с  $h$  включительно. Оставшиеся коэффициенты  $c_{mi}$ ,  $2 \leq i \leq m$ , можно использовать для расширения области устойчивости.

При заданных  $\beta_{ij}$ ,  $2 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ , и  $c_{mi}$ ,  $2 \leq i \leq m$ , задача (6.17) имеет единственное решение в силу невырожденности матрицы  $B_m$ . При выборе  $\beta_{ij}$  можно руководствоваться различными соображениями. Если, например, имеются трудности с оперативной памятью ЭВМ, то, выбрав все  $\beta_{ij}$ ,  $2 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ , равными между собой, при реализации (3.24) можно обойтись не более чем тремя одномерными массивами размерности  $N$ . Если же набор формул (3.24) используется совместно с методом более высокого порядка точности, то и в схемах первого порядка естественно использовать те же самые  $k_i$ .

Отметим далее, что параметр  $m$  в формуле (3.24) не может быть выбран слишком большим, поскольку последнее уравнение (6.17) имеет

вид

$$p_{mm} \prod_{j=2}^m \beta_{j,j-1} = c_{mm}, \quad (6.18)$$

причем  $c_{mm} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Поэтому при достаточно больших  $m$  либо  $p_{mm}$ , либо  $\beta_{j,j-1}$ ,  $2 \leq j \leq m$ , достигают машинного нуля, что делает бессмысленным дальнейшее увеличение  $m$ .

Итак, если параметры схемы (3.24) и коэффициенты полинома (6.1) связаны соотношениями (6.17) при условии  $c_{m1} = 1$ , то решение (6.17) дает параметры  $m$ -стадийной схемы (3.24) первого порядка точности. Получим неравенства для контроля точности и устойчивости. Предварительно заметим, что схемы первого порядка предполагается использовать на участке установления, где шаг ограничен устойчивостью, а не точностью. Контроль точности в этом случае носит вспомогательный характер, и поэтому для получения соответствующего неравенства будем использовать оценку локальной ошибки. Из сравнения (3.39) и (3.40) до членов  $h^2$  включительно при условии  $y_n = y(t_n)$  видим, что локальная ошибка  $\delta_{n,1}$  схемы (3.24) первого порядка точности имеет вид

$$\delta_{n,1} = (0.5 - \sum_{i=2}^m b_{2i} p_{mi}) h^2 f' f + O(h^3). \quad (6.19)$$

Учитывая (3.40), ее можно переписать следующим образом

$$\delta_{n,1} = 0.5(1 - 2c_{m2}) h^2 f' f + O(h^3), \quad (6.20)$$

где  $c_{m2}$  есть заданный коэффициент при  $x^2$  в (6.1).

Величину  $\delta_{n,1}$  с помощью уже вычисленных стадий  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , можно оценить многими способами. Будем поступать следующим образом. Введем обозначение

$$A'_n = g'_{m1} \|k_2 - k_1\|, \quad A''_n = g''_{m1} \|hf(y_{n+1}) - k_1\|, \quad (6.21)$$

где

$$g''_{m1} = \frac{1}{2} |1 - 2c_{m2}|, \quad g'_{m1} = \frac{g''_{m1}}{|\beta_{21}|}. \quad (6.22)$$

Тогда, учитывая что

$$k_2 - k_1 = \beta_{21} h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad (6.23)$$

$$hf(y_{n+1}) - k_1 = h^2 f'_n f_n + O(h^3),$$

для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования можно применять, соответственно, неравенства

$$A'_n \leq \varepsilon, \quad A''_n \leq \varepsilon. \quad (6.24)$$

Вектор  $k_1$  зависит от размера шага линейно. Поэтому при применении первого неравенства (6.24) повторное вычисление решения<sup>1</sup> будет сопровождаться всего лишь одним дополнительным вычислением правой части дифференциальной задачи. В случае успешного шага использование второго неравенства (6.24) к увеличению вычислительных затрат не приводит, потому что вектор  $f(y_{n+1})$  применяется на следующем шаге интегрирования. Отметим, что если второе неравенство (6.24) используется для контроля точности вычислений, то возврат при невыполнении точности будет дорогим, причем с ростом  $m$  затраты увеличиваются. Однако предварительный контроль  $A'_n$  позволяет в основном избежать таких повторных вычислений решения.

В случае применения численных формул (3.24) с переменным числом стадий при  $2 \leq m \leq M$ , где  $M$  есть заданное целое число, можно поступать следующим образом. Введем обозначения

$$g''_{M2} = \max_{2 \leq m \leq M} g''_{m1}, \quad g'_{M1} = \frac{g''_{M2}}{|\beta_{21}|}, \quad (6.25)$$

где  $g''_{m1}$  вычисляются по первой формуле (6.22). Оценку ошибки, вместо (6.21), определим по формулам

$$A'_n = g'_{M1} \|k_2 - k_1\|, \quad A''_n = g''_{M1} \|hf(y_{n+1}) - k_1\|. \quad (6.26)$$

Тогда для контроля точности и при выборе величины шага интегрирования сразу для всего набора формул снова можно использовать неравенства  $A'_n \leq \varepsilon$ ,  $A''_n \leq \varepsilon$ .

Теперь перейдем к получению неравенства для контроля устойчивости. Ниже будем предполагать выполненными соотношения

$$\beta_{21} = \beta_{31} + \beta_{32}, \quad m \geq 3, \quad (6.27)$$

где  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{31}$ ,  $\beta_{32}$  есть параметры схемы (3.24).

Неравенство для контроля устойчивости получим следующим образом. Запишем разность  $(k_3 - k_2)$  в форме Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого рода, то есть

$$k_3 - k_2 = \beta_{32} h \frac{\partial f(\tilde{y}_n)}{\partial y} (k_2 - k_1), \quad (6.28)$$

где матрица Якоби вычисляется в некоторой точке  $\tilde{y}_n$ . Тогда, учитывая вид разности  $(k_2 - k_1)$ , для оценки максимального собственного числа матрицы Якоби можно использовать степенной метод, то есть для контроля устойчивости методов (3.24) первого порядка точности будем применять следующее неравенство

$$\frac{1}{|\beta_{32}|} \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right| \leq \gamma_{m,1}, \quad (6.29)$$

---

<sup>1</sup> возврат вследствие невыполнения требуемой точности расчетов



где положительные постоянные  $\gamma_{m,1}$ ,  $3 \leq m \leq M$ , связаны с размером области устойчивости численных схем. Неравенство (6.29) можно использовать на каждом шаге для выбора наиболее эффективной численной схемы.

Таким образом, задача о построении явных методов типа Рунге-Кутты первого порядка точности с заданной областью устойчивости сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (6.17) с невырожденной матрицей  $B_m$ , где компоненты вектора  $C_m$  определяют размер и форму области устойчивости. Ниже с применением построенных численных схем сформулируем алгоритм интегрирования, в котором допускаются расчеты как по фиксированной схеме, так и с переменным числом стадий. Параметры методов можно хранить в виде двумерного массива  $E$  с элементами  $e_{ij}$  вида

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \beta_{ij}, & 2 \leq i \leq M, & 1 \leq j \leq i-1, \\ e_{jm} &= p_{mj}, & 3 \leq m \leq M, & 1 \leq j \leq m, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где  $M$  есть максимальное число стадий в наборе методов. Величины  $\gamma_{m,1}$ ,  $3 \leq m \leq M$ , будем хранить в одномерном массиве.

В заключение раздела приведем коэффициенты оптимальных многочленов устойчивости. Как известно, максимальная длина  $|\gamma_m|$  интервала устойчивости  $m$ -стадийной явной формулы типа Рунге-Кутты первого порядка точности равна  $2m^2$ . Для построения таких методов сначала рассмотрим полином Чебышева  $T_m(x)$  при  $x \in [-1, 1]$  и выпишем коэффициенты при  $x^i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Затем заменой переменных  $x = 1 - 2z/\gamma_m$  переведем отрезок  $[\gamma_m, 0]$  в  $[-1, 1]$ . При этом получим многочлен  $Q_m(z)$ , для которого  $Q_m(0) = 1$  и  $|Q_m(z)| \leq 1$  на максимальном интервале  $[\gamma_m, 0]$ ,  $\gamma_m = -2m^2$ . Подставляя коэффициенты данного многочлена в (6.17), получим параметры схемы (3.24), у которой интервал устойчивости расширен до величины  $2m^2$ .

Рассмотрим полиномы Чебышева (см., например, [5], с. 56-59), которые определяются рекуррентной формулой

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1, \quad x \in [-1, 1], \quad (6.31)$$

где  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ . Приведем (6.31) к виду, удобному для получения на ЭВМ коэффициентов при степенях  $x$ . Для этого определим

элементы  $a_{ij}$  нижней треугольной матрицы  $A$  по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{22} &= 1, \\ a_{2k+1, 2k-2i+3} &= -1^{i-1} \frac{2k(2k-i)!}{(i-1)!(2k-2i+2)!} 2^{2k-2i+1}, \\ a_{2k+2, 2k-2i+4} &= -1^{i-1} \frac{(2k+1)(2k-i+1)!}{(i-1)!(2k-2i+2)!} 2^{2k-2i+2}, \\ k &\geq 1, & 1 \leq i &\leq k+1. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Тогда, согласно ([24], с. 769), полином  $k$ -ой степени можно записать в виде

$$T_k(x) = \sum_{i=0}^k a_{k+1, i+1} x^i, \quad (6.33)$$

то есть коэффициенты полинома Чебышева  $k$ -й степени содержатся в  $(k+1)$ -й строке матрицы  $A$ . Проведем замену переменных в (6.33). Полагая  $x = 1 - 2z/\gamma_m$ , для полинома степени  $m$  получим

$$Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, \quad m \geq 1, \quad z \in [\gamma_m, 0], \quad (6.34)$$

где  $c_{ij}$  снова можно объединить в виде нижней треугольной матрицы  $C$ , причем

$$\begin{aligned} c_{ij} &= -\frac{2}{\gamma_i} \sum_{k=j+1}^{i+1} \frac{(k-1)(k-2) \cdots (k-j)}{j!} a_{i+1, k}, \\ k &\leq j \leq i, & i &\geq 1. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Таким образом, элементы  $m$ -й строки матрицы являются коэффициентами при степенях  $z$  многочлена  $Q_m(z)$ . Условие первого порядка точности схемы (3.24) имеет вид  $m_1 = 1$ ,  $m \geq 1$ . Отсюда можно выразить  $\gamma_m$ , то есть

$$\gamma_m = -2 \sum_{j=2}^{m+1} (j-1) a_{m+1, j}, \quad m \geq 1. \quad (6.36)$$

Подставляя полученные коэффициенты  $c_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , в систему (6.17), получим параметры методов с максимальным интервалом устойчивости.

### 6.3 Методы второго порядка

Перейдем к построению методов вида (3.24) второго порядка точности с заданным интервалом устойчивости. Для этого докажем следующую теорему.

*Теорема 5.3. Пусть для параметров  $\alpha_i$ ,  $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}$ ,  $2 \leq i \leq m$ ,  $m$ -стадийной схемы (3.24) выполняются соотношения*

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = \frac{2}{3}, \quad m \geq 3. \quad (6.37)$$

Тогда при  $c_{m1} = 1$ ,  $c_{m2} = 0.5$  она имеет второй порядок точности, а ее локальная ошибка  $\delta_{n,2}$  представима в виде

$$\delta_{n,2} = \frac{1 - 6c_{m3}}{6} h^3 f'^2 f + O(h^4), \quad (6.38)$$

где  $c_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , – соответствующие коэффициенты полинома устойчивости.

Для доказательства применим (3.24) для численного решения (2.7). Получим, что параметры схемы и коэффициенты многочлена устойчивости связаны соотношениями (6.17). Запишем отдельно два первых уравнения (6.17), то есть

$$\sum_{i=1}^m p_{mi} = c_{m1}, \quad \sum_{i=2}^m \alpha_i p_{mi} = c_{m2}. \quad (6.39)$$

Второе равенство (6.39) следует из соотношений  $b_{2i} = \alpha_i$ ,  $2 \leq i \leq m$ , которые очевидны из построения матрицы  $_m$  по формулам (3.26).

Пусть  $y_n = y(t_n)$ . Тогда из сравнения (3.39) и (3.40) до членов с  $h^3$  включительно следует, что схема (3.24) будет иметь второй порядок точности, если условия (6.39) выполняются при  $c_{m1} = 1$  и  $c_{m2} = 0.5$ , а ее локальная ошибка будет иметь вид (6.38), если

$$\sum_{i=2}^m \alpha_i^2 p_{mi} = \frac{1}{3}. \quad (6.40)$$

Применяя (6.37) получаем, что второе соотношение (6.39) и (6.40) совпадают, откуда и следует доказательство теоремы.

Таким образом, при заданных параметрах  $\beta_{ij}$ ,  $2 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ , которые связаны с  $\alpha_i$ ,  $2 \leq i \leq m$ , равенствами

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad 2 \leq i \leq m, \quad (6.41)$$

и заданных коэффициентах  $c_{mi}$ ,  $3 \leq i \leq m$ , полинома устойчивости, параметры схемы (3.24) второго порядка точности с требованием (6.38) можно вычислить из линейной системы алгебраических уравнений (6.17) с невырожденной верхней треугольной матрицей  $_m$ . Свободные коэффициенты  $c_{mi}$ ,  $3 \leq i \leq m$ , можно использовать для построения методов с областью устойчивости заданной конфигурации и размера.

Для контроля точности методов второго порядка будем использовать оценку ошибки вида (2.33). Тогда, учитывая (6.21), (6.23) и (6.38), для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования можно применять, соответственно, неравенства

$$B'_n \leq \varepsilon, \quad B''_n \leq \varepsilon$$

причем  $B'_n$  и  $B''_n$  вычисляются по формулам

$$B'_n = g'_{m1} \|k_2 - k_1\|, \quad B''_n = g''_{m1} \|hf(y_{n+1}) - k_1\|, \quad (6.42)$$

где

$$g''_{m2} = |1 - 6c_{m3}|/6, \quad g'_{m1} = 1.5g''_{m2}. \quad (6.43)$$

При получении второго соотношения (6.43) учитывается, что  $\alpha_2 = 2/3$ .

В случае использования численных формул (3.24) с переменным числом стадий при  $3 \leq m \leq M$ , где  $M$  есть заданное число, будем поступать следующим образом. Введем обозначения

$$g''_{M2} = \max_{3 \leq m \leq M} g''_{m2}, \quad g'_{M1} = 1.5g''_{M2}, \quad (6.44)$$

где  $g''_{m2}$  определяется по первой формуле (6.43). Оценку ошибки, вместо (6.42), будем определять по формулам

$$B'_n = g'_{M1} \|k_2 - k_1\|, \quad B''_n = g''_{M1} \|hf(y_{n+1}) - k_1\|. \quad (6.45)$$

Тогда для контроля точности и при выборе величины шага интегрирования сразу для всего набора формул снова можно использовать неравенства  $B'_n \leq \varepsilon$ ,  $B''_n \leq \varepsilon$ .

Теперь получим неравенство для контроля устойчивости. Введем обозначение

$$V_n = \frac{1}{|\beta_{32}|} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|. \quad (6.46)$$

Так как из (6.37) следует (6.27), то для контроля устойчивости построенного набора формул можно использовать неравенство типа (6.29), то есть

$$V_n \leq \gamma_{m,2}, \quad (6.47)$$

где положительные постоянные  $\gamma_{m,2}$ ,  $3 \leq m \leq M$ , связаны с областью устойчивости  $m$ -стадийной численной схемы (3.24).

Ниже на основе построенных численных схем сформулируем алгоритм интегрирования, в котором допускаются расчеты как по фиксированной схеме, так и с переменным числом стадий. Параметры методов снова можно хранить в виде двумерного массива с элементами (6.30).

## 6.4 Методы третьего порядка

Получим параметры  $m$ -стадийных методов вида (3.24) третьего порядка точности с заданной областью устойчивости. Для этого докажем следующую теорему.

*Теорема 5.4. Пусть для параметров  $\beta_{ij}$ ,  $2 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ ,  $m > 4$ ,  $m$ -стадийной схемы (3.24) выполняются соотношения*

$$\begin{aligned}\beta_{ij} &= 0, & 4 \leq i \leq m, & \quad 2 \leq j \leq i-2, \\ \beta_{i1} &= 0, & 3 \leq i \leq m, & \quad i \neq m-1, \\ \beta_{m-1,1} &= 0.5 - 3 \cdot 2^{m-2} c_{mm}, \\ \beta_{i,i-1} &= 0.5, & 2 \leq i \leq m-2, \\ \beta_{m-1,m-2} &= 3 \cdot 2^{m-2} c_{mm}, \\ \beta_{m,m-1} &= 1.\end{aligned}\tag{6.48}$$

Тогда при  $c_{m1} = 1$ ,  $c_{m2} = 0.5$ ,  $c_{m3} = 1/6$  она имеет третий порядок точности, а ее локальная ошибка  $\delta_{n,3}$  представима в виде

$$\delta_{n,3} = \frac{1 - 24c_{m4}}{24} h^4 f'^3 f + O(h^5),\tag{6.49}$$

где  $c_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , – соответствующие коэффициенты многочлена устойчивости.

Для доказательства применим (3.24) для численного решения (2.7). С использованием (3.29) и (3.30) получим, что параметры схемы и коэффициенты многочлена устойчивости связаны соотношениями (6.17). Запишем отдельно три первых уравнения (6.17), то есть

$$\sum_{j=1}^m b_{ij} p_{mj} = c_{mi}, \quad 1 \leq i \leq 3,\tag{6.50}$$

где  $b_{ij}$  определены формулами (3.26).

Пусть  $y_n = y(t_n)$ . Тогда из сравнения (3.39) и (3.40) до членов с  $h^3$  включительно следует, что схема (3.24) будет иметь третий порядок точности, если в (6.50) выполняется  $c_{m1} = 1$ ,  $c_{m2} = 0.5$ ,  $c_{m3} = 1/6$  и имеет место соотношение

$$\sum_{i=2}^m b_{2i}^2 p_{mi} = \frac{1}{3}.\tag{6.51}$$

Далее, сравнивая (3.39) и (3.40) до членов с  $h^4$  включительно, получим, что требование (6.49) будет выполнено, если

$$\sum_{i=2}^m b_{2i}^3 p_{mi} = \frac{1}{4}, \quad \sum_{i=3}^m b_{2i} b_{3i} p_{mi} = \frac{1}{8}, \quad \sum_{i=3}^m \left( \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} b_{2j}^2 \right) p_{mi} = \frac{1}{12}. \quad (6.52)$$

Для доказательства утверждения достаточно установить совместность нелинейной системы алгебраических уравнений (6.50), (6.51) и (6.52), причем в (6.50) имеет место  $c_{m1} = 1$ ,  $c_{m2} = 0.5$ ,  $c_{m3} = 1/6$ .

Запишем очевидные равенства, которые следуют из (3.26) и (6.48)

$$\begin{aligned} b_{2i} &= \alpha_i = \frac{1}{2}, \quad 2 \leq i \leq m-1, \\ b_{2m} &= \alpha_m = 1, \\ \prod_{j=2}^m \beta_{j,j-1} &= 6c_{mm}, \\ \sum_{j=2}^{m-1} \beta_{mj} b_{2j}^2 &= \beta_{m,m-1} b_{2,m-1}^2 = \frac{1}{4}, \\ b_{3m} &= \sum_{j=2}^{m-1} \beta_{mj} b_{2j} = b_{2,m-1} = \frac{1}{2}, \\ b_{3i} &= \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} b_{2j} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} = \frac{1}{2} \beta_{i,i-1}, \quad 3 \leq i \leq m-1, \\ \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} b_{2j}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} = \frac{1}{4} \beta_{i,i-1}, \quad 3 \leq i \leq m-1. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Нетрудно видеть, что последнее уравнение (6.17) имеет вид

$$p_{mm} \prod_{j=2}^m \beta_{j,j-1} = c_{mm}. \quad (6.54)$$

Отсюда и из третьего равенства (6.53) следует, что  $p_{mm} = 1/6$  при любом значении  $m$ ,  $m \geq 4$ . Покажем, что второе равенство (6.50), уравнение (6.51) и первое соотношение (6.52) совпадают. Для этого подставим в них значение  $p_{mm} = 1/6$ . Тогда, учитывая второе равенство (6.53), получим

$$\sum_{j=2}^{m-1} b_{2j} p_{mj} = \frac{1}{3}, \quad \sum_{j=2}^{m-1} b_{2j}^2 p_{mj} = \frac{1}{6}, \quad \sum_{j=2}^{m-1} b_{2j}^3 p_{mj} = \frac{1}{12}. \quad (6.55)$$

С использованием первого равенства (6.53) имеем, что все три урав-

нения (6.55) эквивалентны и совпадают со следующими

$$\sum_{j=2}^{m-1} p_{mj} = \frac{2}{3}, \quad (6.56)$$

Теперь покажем эквивалентность третьего уравнения (6.50) и двух последних соотношений (6.52). Для этого перепишем их, следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{m-1} b_{3i} p_{mi} &= \frac{1}{6} - b_{3m} p_{mm}, \\ \sum_{i=3}^{m-1} b_{2i} b_{3i} p_{mi} &= \frac{1}{8} - b_{2m} b_{3m} p_{mm}, \\ \sum_{i=3}^{m-1} \left( \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} b_{2j}^2 \right) p_{mi} &= \frac{1}{12} - \left( \sum_{j=2}^{m-1} \beta_{mj} b_{2j}^2 \right) p_{mm}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Используя равенства (6.53) получим, что все три уравнения (6.57) совпадают со следующим

$$\sum_{i=3}^{m-1} \beta_{i,i-1} p_{mi} = \frac{1}{6}, \quad (6.58)$$

что завершает доказательство теоремы.

Пусть теперь заданы коэффициенты  $c_{mi}$ ,  $4 \leq i \leq m$ ,  $m \geq 4$ , полинома устойчивости, обеспечивающие заданные свойства области устойчивости. Тогда, учитывая, что (6.50) совпадают с первыми тремя уравнениями (6.17), получим, что решение  $p_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , линейной системы (6.17) с невырожденной верхней треугольной матрицей  $B_m$  является коэффициентами метода вида (3.24) третьего порядка точности, локальная ошибка которого имеет вид (6.49). Запишем в явном виде параметры  $p_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $m \geq 4$ . Ниже будем различать случаи при значении  $m$  равном 4, 5, 6 и  $m \geq 7$ , так как при данных значениях  $m$  получаются различные формулы для определения  $p_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Первое уравнение (6.17) имеет вид

$$\sum_{i=1}^m p_{mi} = 1.$$

Подставляя сюда (6.56) и равенство  $p_{mm} = 1/6$ , будем иметь, что  $p_{m1} = 1/6$  при всех значениях  $m$ ,  $m \geq 4$ .

С использованием (6.48) получим, что элементы матрицы (3.26)

определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 b_{1i} &= 1, \quad 1 \leq i \leq m, \\
 b_{2i} &= \alpha_i, \quad 2 \leq i \leq m, \\
 b_{ki} &= 0, \quad 2 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq k-1, \\
 b_{ki} &= \beta_{i,i-1} b_{k-1,i-1}, \quad 3 \leq k \leq m, \quad k \leq i \leq m.
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

Отсюда получим матрицы  $_4$ ,  $_5$  и  $_6$ , то есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 6c_{44} & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 6c_{44} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.25 & 12c_{55} & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 6c_{55} & 12c_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6c_{55} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 24c_{66} & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 12c_{66} & 24c_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6c_{66} & 12c_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6c_{66} \end{pmatrix},$$

Рассматривая систему (6.17) при  $c_{m1} = 1$ ,  $c_{m2} = 0.5$ ,  $c_{m3} = 1/6$  без первого и последнего уравнений, последовательным исключением при  $4 \leq m \leq 6$ , получим

$$m = 4, \quad p_{41} = p_{44} = \frac{1}{6}, \quad p_{43} = \frac{1}{72c_{44}}, \quad p_{42} = \frac{2}{3} - p_{43}, \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}
 m = 5, \quad p_{51} = p_{55} &= \frac{1}{6}, \quad p_{54} = \frac{c_{54} - 2c_{55}}{6c_{55}}, \\
 p_{53} &= \frac{1}{3} - 8c_{54} + 16c_{55}, \quad p_{52} = \frac{2}{3} - p_{53} - p_{54},
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

$$\begin{aligned}
 m = 6, \quad p_{61} = p_{66} &= \frac{1}{6}, \quad p_{65} = \frac{c_{65} - 2c_{66}}{6c_{66}}, \\
 p_{64} &= 8c_{64} - 16c_{65}, \quad p_{63} = \frac{1}{3} + 32c_{66} - 8c_{64}, \\
 p_{62} &= \frac{2}{3} - p_{63} - p_{64} - p_{65}.
 \end{aligned} \tag{6.62}$$



Рассмотрим случай  $m \geq 7$ . Для этого запишем систему (6.17) без четырех первых и последнего уравнений, то есть

$$\begin{aligned} & \sum_{i=j}^{m-2} p_{mi} + 3 \cdot 2^{m-1} c_{mm} p_{m,m-1} + 2^{m-1} c_{mm} \\ & = 2^{j-1} c_{mj}, \quad 5 \leq j \leq m-2, \\ & 3 \cdot 2^{m-1} c_{mm} p_{m,m-1} + 2^{m-1} c_{mm} = 2^{m-2} c_{m,m-1}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

При получении (6.63)  $j$ -ое уравнение (6.17) домножается на  $2^{j-1}$  и учитывается равенство  $p_{mm} = 1/6$  и соотношения (6.59).

Последовательно вычитая из первого уравнения (6.63) второе, из второго третье и т.д., получим  $p_{mi}$ ,  $5 \leq i \leq m-1$ . Оставшиеся  $p_{mi}$ ,  $2 \leq i \leq 4$ , определим из второго, третьего и четвертого уравнений (6.17) последовательным исключением. Отметим, что второе и третье уравнения (6.17) эквивалентны (6.56) и (6.58), соответственно, а четвертое имеет вид :

$$\sum_{i=4}^{m-2} p_{mi} + 2^{m-2} c_{m,m-1} = 8c_{m4}.$$

В результате при  $m \geq 7$  имеем

$$\begin{aligned} p_{m1} &= p_{mm} = \frac{1}{6}, \\ p_{m,m-1} &= \frac{c_{m,m-1} - 2c_{mm}}{6c_{mm}}, \\ p_{mi} &= 2^{i-1}(c_{mi} - 2c_{m,i+1}), \quad 5 \leq i \leq m-2, \\ p_{m2} &= \frac{1}{3} + 2^{m-2}(c_{m,m-1} - 2c_{mm}) - p_{m,m-1}, \\ p_{m3} &= \frac{1}{3} - 8c_{m4} + 2^{m-1}c_{mm}, \\ p_{m4} &= 8c_{m4} - 2^{m-2}c_{m,m-1} - \sum_{i=5}^{m-2} p_{mi}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Для контроля точности методов третьего порядка будем использовать оценку ошибки вида (2.33). С использованием (6.59), получим

$$k_3 - k_2 = b_{33} h^3 f'_n f_n + O(h^4), \quad (6.65)$$

где  $b_{33}$  определяется по последней формуле (6.59), причем  $b_{33} = 6c_{44}$  при  $m = 4$  и  $b_{33} = 0.25$  при  $m \geq 5$ .

Введем обозначение

$$C'_n = g_{m3} \|k_3 - k_2\|, \quad (6.66)$$

где

$$g_{m3} = \frac{|1 - 24c_{m4}|}{|24b_{33}|}. \quad (6.67)$$

Учитывая (6.65), получим, что для контроля точности  $m$ -стадийного метода третьего порядка точности можно использовать неравенство

$$C'_n \leq \varepsilon. \quad (6.68)$$

Пусть теперь задано целое число  $M$ ,  $M \geq 4$ , и имеется набор формул (3.24) третьего порядка точности с числом стадий  $m$ ,  $4 \leq m \leq M$ . Введем обозначение

$$g_{M3} = \max_{4 \leq m \leq M} g_{m3}, \quad (6.69)$$

где  $g_{m3}$  определяется по формуле (6.67). Тогда для контроля точности всего набора численных схем можно использовать неравенство (6.68), где  $C'_n$  вычислено следующим образом

$$C'_n = g_{M3} \|k_3 - k_2\|. \quad (6.70)$$

Получим неравенство для контроля устойчивости. Учитывая (6.65) и соотношение

$$k_2 - k_1 = 0.5h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad (6.71)$$

для контроля устойчивости всего набора формул можно использовать неравенство

$$V_n \leq \gamma_{m,3}, \quad (6.72)$$

где положительные постоянные  $\gamma_{m,3}$ ,  $4 \leq m \leq M$ , связаны с размером области устойчивости, а значение  $V_n$  определяется по формуле

$$V_n = \frac{1}{2|b_{33}|} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|. \quad (6.73)$$

Если собственные числа матрицы Якоби задачи (2.2) отрицательные и вещественные, и если шаг ограничен только требованием устойчивости, то, как следует из табл. 2, с увеличением числа стадий  $m$  эффективность метода возрастает.

## 6.5 Алгоритм переменного порядка, шага и с переменным числом стадий

Пусть имеется три набора параметров численных схем вида (3.24), при которых методы имеют, соответственно, первый, второй и третий

Таблица 2

Зависимость максимальной длины  $\gamma_{m,3}$  интервала устойчивости от числа стадий  $m$ ,  $4 \leq m \leq 13$ , методов третьего порядка точности

$m$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma_{m,3}$	6.03	10.5	16.0	22.6	30.1	38.6	48.1	58.6	70.2	82.7

порядок точности. В каждом наборе содержатся методы с числом стадий, соответственно,  $3 \leq m \leq M_1$ ,  $3 \leq m \leq M_2$  и  $4 \leq m \leq M_3$ . Ниже для простоты описания алгоритма будем предполагать, что число стадий в двух соседних методах одного и того же порядка точности отличаются на единицу, хотя в программной реализации алгоритма число стадий двух соседних методов может отличаться на любое число.

Через  $V_n$  будем обозначать величину  $h_n \lambda_{nmax}$ , где  $\lambda_{nmax}$  есть оценка максимального собственного числа матрицы Якоби, которая в зависимости от признака определяется либо внутри программы, либо задается вычислителем. Внутри программы она может быть вычислена степенным методом<sup>2</sup> или осреднена по формуле (2.49). Через  $\gamma_{m,1}$ ,  $3 \leq m \leq M_1$ ,  $\gamma_{m,2}$ ,  $3 \leq m \leq M_2$ ,  $\gamma_{m,3}$ ,  $4 \leq m \leq M_3$ , будем обозначать положительные постоянные, связанные с размером областей устойчивости соответствующих методов. Они используются в неравенствах (6.29), (6.47) и (6.72).

Для контроля точности методов первого, второго и третьего порядков будем использовать, соответственно, оценки ошибок  $A'_n$  и  $A''_n$  — (6.26),  $B'_n$  и  $B''_n$  — (6.45) и  $C'_n$  — (6.70). Отметим, что  $V_n = O(h)$ ,  $A'_n = O(h^2)$ ,  $A''_n = O(h^2)$ ,  $B'_n = O(h^2)$ ,  $B''_n = O(h^2)$ ,  $C'_n = O(h^3)$ .

Режим работы приведенного ниже алгоритма DISPS(IJKL) будем определять с помощью четырех чисел I, J, K и L.

Параметр I может принимать значения 0, 1, 2, 3. При I = 0 — расчеты проводятся с переменным порядком, при I равном 1, 2 или 3 — по схемам соответствующего порядка точности.

При J = 0 — расчеты с переменным числом стадий, при J = m — по фиксированной m-стадийной схеме. Если I = 0, то независимо от J расчеты осуществляются с переменным числом стадий.

При K = 0 устойчивость контролируется, при K = 1 — не контролируется. Режим K = 1 возможен только при расчетах по фиксированной численной схеме.

При L = 0 оценка максимального собственного числа матрицы Яко-

<sup>2</sup>см. соотношение (6.46) для методов первого и второго порядков и (6.73) — для методов третьего порядка точности

би вычисляется с помощью подпрограммы, составленной вычислителем. При  $L$  равном 1 или 2 оценка вычисляется либо степенным методом, либо осредняется формуле (2.49), соответственно. В случае  $K = 1$  параметр  $L$  произвольный.

При  $I = 0$ , то есть при расчетах с переменным порядком, вычисления всегда начинаются методом третьего порядка. При всех значениях  $I$  и при  $J = 0$ , то есть при расчетах с переменным числом стадий, первый шаг интегрирования выполняется по численной схеме с наименьшим количеством стадий.

Зададим два числа  $l_1$  и  $l_2$ , определяющие количество шагов без увеличения шага интегрирования и без смены численной формулы, соответственно, после возврата (повторного вычисления решения вследствие невыполнения точности) и после успешного шага. Эти постоянные задаются вычислителем и могут быть использованы для настройки алгоритма на конкретный тип задач. Они позволяют избежать некоторых неоправданных колебаний величины шага интегрирования на участке установления, которые могут возникать, например, за счет грубости оценки максимального собственного числа матрицы Якоби. Кроме того, определим две переменные  $l'_1$  и  $l'_n$ , которые при первом обращении к алгоритму положим равными нулю. Будем предполагать, что при первом обращении к алгоритму вычислена стадия  $k_1$  в точке  $(t_0, y_0)$  по формуле (3.24).

### 6.5.1 Алгоритм интегрирования

Сформулируем алгоритм интегрирования на основе набора численных формул первого порядка точности.

*Шаг 1.* Вычисляется стадия  $k_2$  по формуле (3.24).

*Шаг 2.* Вычисляется оценка ошибки  $A'_n$  по формуле (6.26).

*Шаг 3.* Вычисляется значение параметра  $s_n$  по формуле

$$q^{2s_n} A'_n = \varepsilon.$$

*Шаг 4.* Если  $s_n < 0$ , то  $l'_1$  полагается равным  $l_1$ , и происходит повторное вычисление решения с шагом  $q^{s_n} h_n$  (возврат на шаг 1).

*Шаг 5.* Вычисляются стадии  $k_i$ ,  $3 \leq i \leq m$ , по формулам (3.24).

*Шаг 6.* Вычисляется приближение к решению в точке  $t_{n+1}$  по  $m$ -стадийной схеме (3.24).

*Шаг 7.* Вычисляется стадия  $h_n f(y_{n+1})$ .

*Шаг 8.* Вычисляется оценка ошибки  $A''_n$  по формуле (6.26).

*Шаг 9.* Вычисляется значение параметра  $\nu_n$  по формуле

$$q^{2\nu_n} A''_n = \varepsilon.$$

*Шаг 10.* Если  $\nu_n < 0$ , то  $l'_1$  полагается равным  $l_1$ , и происходит повторное вычисление решения с шагом  $q^{\nu_n} h_n$  (возврат на шаг 1).

*Шаг 11.* Параметрам  $l'_1$  и  $l'_2$  присваиваются, соответственно, величины  $(l'_1 - 1)$  и  $(l'_2 - 1)$ .

*Шаг 12.* Если  $l'_1 \geq 0$  или  $l'_2 \geq 0$ , то  $h_{n+1}$  полагается равным  $h_n$  и выполняется следующий шаг интегрирования снова по  $m$ -стадийной схеме.

*Шаг 13.* Параметр  $l'_2$  полагается равным  $l_2$ .

*Шаг 14.* Значения  $A'_n$  и  $A''_n$  удваиваются, и заново перевычисляются параметры  $s_n$  и  $\nu_n$  с целью создания запаса в точности при выборе величины шага для избежания возможных возвратов.

*Шаг 15.* Если  $I > 0$ ,  $J > 0$  и  $K = 1$ , то есть расчеты по фиксированной схеме без контроля устойчивости, то значение параметра  $r_n$  вычисляется по формуле

$$r_n = \max(s_n, \nu_n),$$

и управление передается на шаг 21.

*Шаг 16.* Вычисляется значение  $V_n$  по формуле

$$V_n = h_n \lambda_{nmax},$$

где  $\lambda_{nmax}$  определяется в зависимости от значения параметра  $L$ .

*Шаг 17.* Вычисляется значение параметра  $r_n$  по формуле

$$q^{r_n} V_n = \gamma_{m,1}.$$

*Шаг 18.* Если  $I > 0$  и  $J > 0$ , то есть расчеты по фиксированной схеме, то управление передается на шаг 21.

*Шаг 19.* Вычисляется значение параметра  $q_n$  по формуле

$$q_n = q^{\min(s_n, \nu_n)}.$$

*Шаг 20.* Определяется число стадий для выполнения следующего шага интегрирования. Если  $q_n V_n > \gamma_{m,1}$ , и  $m < M_1$ , то параметр  $m$  полагается равным  $(m + 1)$ . Если  $m > 3$  и  $q_n V_n < \gamma_{m-1,1}$ , то  $m$  полагается равным  $(m - 1)$ . В остальных случаях параметр  $m$  не изменяется.

*Шаг 21.* Вычисляется новый шаг интегрирования

$$h_{n+1} = \max(h_n, q^{\min(s_n, \nu_n, r_n)} h_n).$$

*Шаг 22.* Если  $m = 3$ ,  $I = 0$ ,  $q_n V_n \leq \gamma_{m,2}$ , где  $\gamma_{m,2}$  связана с размером области устойчивости  $m$ -стадийной схемы второго порядка точности, то управление передается алгоритму на основе численных схем второго порядка. В противном случае выполняется следующий шаг интегрирования.

Алгоритмы на основе численных формул второго и третьего порядков формулируются аналогично, за исключением последнего шага.

Переход с методов второго порядка на первый осуществляется следующим образом. Если число стадий выросло до максимального значения  $M_2$ ,  $I = 0$  и  $q_n V_n > \gamma_{M_2,2}$ , то осуществляется переход на  $m$ -стадийную схему первого порядка точности, где  $m$  вычисляется из соотношения

$$\gamma_{m-1,1} \leq \gamma_{M_2,2} \leq \gamma_{m,1}.$$

Если при расчетах по методу второго порядка имеет место  $m = 3$ ,  $I = 0$  и  $q_n V_n < \gamma_{m,3}$ , где  $\gamma_{m,3}$  связана с размером области устойчивости  $m$ -стадийной схемы третьего порядка точности, то управление передается алгоритму на основе численных схем третьего порядка.

Если число стадий в алгоритме на основе методов третьего порядка точности выросло до максимального значения  $M_3$ ,  $I = 0$  и  $q_n V_n > \gamma_{M_3,3}$ , то происходит переход на  $m$ -стадийную схему второго порядка, где  $m$  вычисляется из соотношения

$$\gamma_{m-1,2} \leq \gamma_{M_3,3} \leq \gamma_{m,2}.$$

### 6.5.2 Автоматизация построения методов

Описанный выше алгоритм интегрирования зависит от набора параметров  $\beta_{ij}$  схемы (3.24), коэффициентов многочлена устойчивости и количества входящих в его состав методов. Параметры  $\beta_{ij}$  определяют свойства устойчивости промежуточных численных схем

$$y_{n+1,i} = y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j, \quad 2 \leq i \leq m,$$

и при их разумном выборе они не сильно влияют на основную схему. Поэтому ниже будем считать их заданными. В этом случае задача о построении методов первого, второго или третьего порядков точности сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений вида (6.17) с невырожденной верхней треугольной матрицей  $B_m$ .

Области устойчивости методов (3.24) непрерывным образом зависят от коэффициентов  $c_{mi}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , многочлена устойчивости. В совокупности с приведенными выше рассуждениями это позволяет поставить задачу автоматизации построения алгоритмов интегрирования, в состав которого включаются методы с заданными областями устойчивости. В этом случае вычислитель, не обладающий специальными знаниями в области численных методов, но хорошо понимающий специфику своей задачи, имеет возможность сгенерировать такие параметры методов (3.24), что алгоритм интегрирования будет в определенном смысле оптимальным. Функциональная схема комплекса программ автоматизации построения алгоритмов переменного порядка и шага приведена на рис. 1.

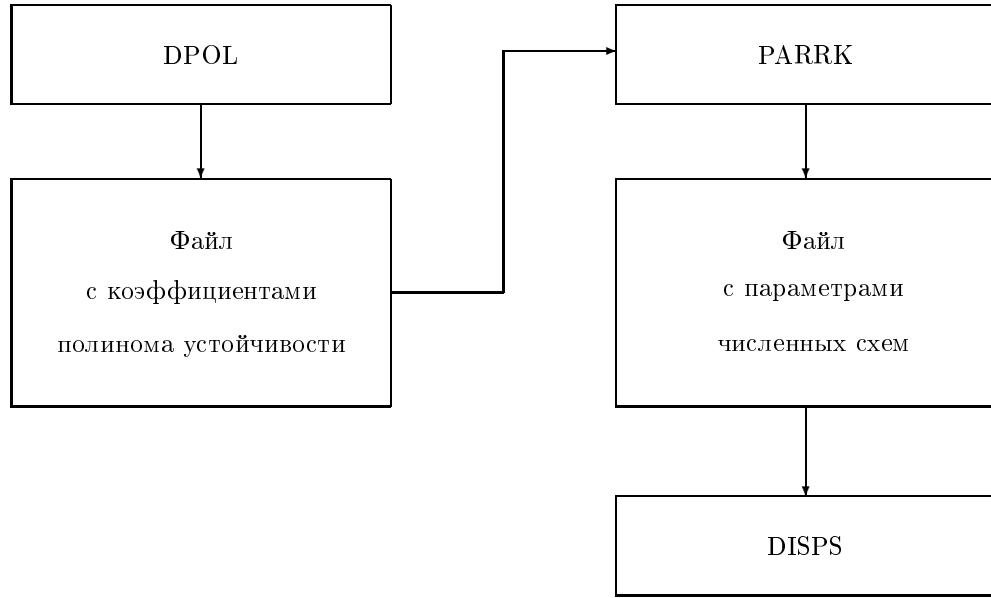


Рис. 1. Функциональная схема комплекса программ автоматизации построения алгоритмов переменного порядка, шага и с переменным числом стадий

Набор подпрограмм DPOL служит для расчета коэффициентов полиномов устойчивости по описанному выше алгоритму. Программа PARRK служит для расчета параметров методов (3.24) при заданных коэффициентах многочлена устойчивости и для вычисления вспомогательных величин (см. формулы (6.22) и (6.25), (6.43) и (6.44), (6.67) и (6.69)). В качестве входных данных используется файл, подготовленный подпрограммой DPOL. Выходными параметрами являются три файла с коэффициентами методов первого, второго и третьего порядков точности. В программе DISPS реализован описанный выше алгоритм интегрирования. Данный алгоритм рассматривается как открытая система, то есть допускается включение наборов методов более высокого порядка точности.

## 6.6 Анализ результатов расчетов

Результаты расчетов тестовых примеров алгоритмом DISPS приведены в табл. 5.3. В программе DISPS использовались 8 методов первого порядка с числом стадий  $m$ ,  $3 \leq m \leq 10$ ; 2 метода второго порядка при  $m$  равном 3 и 4; два метода третьего порядка при  $m$  равном 4 и 5. Для всех методов области устойчивости генерировались при условии  $F_i = (-1)^i \cdot 0.9$ ,  $k \leq i \leq m - 1$ , где  $k$  – порядок точности (см. уравнение (6.2)), то есть численные схемы рассматривались почти с максимальным интервалом устойчивости.

Таблица 5.3

Результаты расчетов алгоритмом DISPS

Номер задачи	DISPS(0001)			DISPS(1001)
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$
4	10780	10790	10816	10741
5	569	1019	2145	526
6	1355	2610	5116	1523
7	3252	3407	5043	3286
8	3665	6354	15200	3500
10	2699	9764	42731	6095
12	353	573	1559	300
16	305	608	1530	290
17	352	729	1754	360
25	999	1029	1275	924
4л	1587	2243	4399	1571
5л	5460	6954	14070	6576
6л	772	1234	3484	761
Всего	32148	47314	109122	36453

В табл. 5.3 приведены результаты расчетов алгоритмом переменного порядка, шага и с переменным числом стадий DISPS(0001) при задаваемой точности  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$  и  $10^{-6}$ , а алгоритмом DISPS(1001) на основе численных формул первого порядка с переменным числом стадий — при точности  $10^{-2}$ . При точности расчетов  $10^{-4}$  и выше для DISPS(1001) вычислительные затраты значительно возрастают и он становится не конкурентоспособен DISPS(0001).

Из сравнения последних строк табл. 5.3 и табл. 3.3 главы 3 следует, что алгоритм DISPS эффективнее методов Мерсона и Фельберга при точности расчетов  $\varepsilon = 10^{-2}$  — в 18 раз, при  $\varepsilon = 10^{-4}$  — в 14 раз, при  $\varepsilon = 10^{-6}$  — в 4 раза. Из сравнения табл. 5.3 и табл. 4.3 главы 4 следует, что использование алгоритма переменного порядка, шага и с переменным числом стадий приводит к значительному повышению эффективности по сравнению с другими методами.

Алгоритмом DISPS проводились расчеты и с другими наборами методов. Из анализа результатов расчетов можно сделать следующие выводы. Во-первых, для многих из рассматриваемых задач за счет специального подбора формы области устойчивости эффективность DISPS можно повысить. Во-вторых, в состав алгоритма интегрирования, возможно, не имеет смысла включать много методов высокого порядка точности, потому что при выходе на участок установления, независимо от числа методов высокого порядка, достаточно быстро осуществляется переход на численные схемы более низкого порядка точности.



Приведем еще результаты расчета уравнения Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_2' &= 100(1 - y_1^2)y_2 - y_1, \\ y_1(0) &= 2, & y_2(0) &= 0, & h_0 &= 2 \cdot 10^{-2}, & 0 \leq t \leq 1000. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Для нахождения решения задачи (6.74) методом Адамса переменного порядка и шага с точностью  $10^{-2}$  потребовалось 396927 вычислений правой части [23]. Для построенных выше методов результаты приведены в табл. 5.4. Все алгоритмы использовались с переменным порядком кроме, естественно, MERSON и RKF45.

Таблица 5.4

Результаты расчетов задачи (6.74)

Метод	З а т р а т ы		
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
MERSON	363195	392570	412155
RKF45	366384	381550	402866
DISPD	32962	68561	112278
DISPM	33416	49614	101853
DISPF	35588	50434	98874
DISPS	19317	34263	72636

## Глава 7

# Приложение

Приведены тестовые примеры и графические изображения областей устойчивости.

### 7.1 Тестовые примеры 1

Ниже приведены тестовые примеры из [1].

**Пример 1.**

$$\begin{aligned}y' &= -100y, & y(0) &= 1, \\h_0 &= 10^{-2}, & t_k &= 1, & \lambda &= -100, & y(t) &= e^{-100t}\end{aligned}$$

**Пример 2.**

$$\begin{aligned}y'_1 &= y_1, & y_1(0) &= 1, \\y'_2 &= -100y_2, & y_2(0) &= 1, \\h_0 &= 10^{-2}, & t_k &= 1, & \lambda_1 &= 1, & \lambda_2 &= -100, \\y_1(t) &= e^t, & y_2(t) &= e^{-100t}.\end{aligned}$$

**Пример 3.**

$$\begin{aligned}y'_1 &= y_2, & y_1(0) &= 1, \\y'_2 &= -100y_1, & y_2(0) &= 1, \\h_0 &= 10^{-2}, & t_k &= 1, \\y_1(t) &= \cos(10t) + \sin(10t), & y_2(t) &= 10[\cos(10t) - \sin(10t)]\end{aligned}$$

**Пример 4**[87].

$$\begin{aligned}y_1' &= -0.013y_1 - 1000y_1y_3, \quad y_1(0) = 1, \\y_2' &= -2500y_2y_3, \quad y_2(0) = 1, \\y_3' &= -0.013y_1 - 1000y_1y_3 - 2500y_2y_3, \quad y_3(0) = 0, \\h_0 &= 2.9 \cdot 10^{-4}, \quad t_k = 50, \\ \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_2 = -9.3 \cdot 10^{-3} \rightarrow -4 \cdot 10^{-3} \rightarrow -6.3 \cdot 10^{-3}, \\ \lambda_3 &= -3.5 \cdot 10^{-3} \rightarrow -3.8 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

**Пример 5**[87].

$$\begin{aligned}y_1' &= y_3 - 100y_1y_2, \quad y_1(0) = 1, \\y_2' &= y_3 + 2y_4 - 100y_1y_2 - 2 \cdot 10^4y_2^2, \quad y_2(0) = 1, \\y_3' &= -y_3 + 100y_1y_2, \quad y_3(0) = 0, \\y_4' &= -y_4 + 10^4y_2^2, \quad y_4(0) = 0, \\h_0 &= 2.5 \cdot 10^{-5}, \quad t_k = 20, \\ \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_2 = -100 \rightarrow -4, \quad \lambda_3 = -4, \quad \lambda_4 = -10^4 \rightarrow -290\end{aligned}$$

**Пример 6**[87].

$$\begin{aligned}y_1' &= 0.2(y_2 - y_1), \quad y_1(0) = 0, \\y_2' &= 10y_1 - (60 - 0.125y_3)y_2 + 0.125y_3, \quad y_2(0) = 0, \\y_3' &= 1, \quad y_3(0) = 0, \\h_0 &= 1.7 \cdot 10^{-2}, \quad t_k = 200, \\ \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_2 = -0.17 \rightarrow -0.012, \quad \lambda_3 = -60 \rightarrow -10\end{aligned}$$

**Пример 7**[87].

$$\begin{aligned}y_1' &= 0.01 - [1 + (y_1 + 1000)(y_1 + 1)](0.01 + y_1 + y_2), \quad y_1(0) = 0, \\y_2' &= 0.01 - (1 + y_2^2)(0.01 + y_1 + y_2), \quad y_2(0) = 0, \\h_0 &= 10^{-4}, \quad t_k = 100, \\ \lambda_1 &= -0.01 \rightarrow -2 \cdot 10^{-4} \rightarrow -2 \cdot 10^{-3}, \\ \lambda_2 &= -1000 \rightarrow -400\end{aligned}$$

**Пример 8**[87].

$$\begin{aligned}y_1' &= -(55 + y_3)y_1 + 65y_2, \quad y_1(0) = 1, \\y_2' &= 0.0785(y_1 - y_2), \quad y_2(0) = 1, \\y_3' &= 0.1y_1, \quad y_3(0) = 0, \\h_0 &= 2 \cdot 10^{-2}, \quad t_k = 500, \\ \lambda_{1,2} &= 0.0062 \pm 0.01i \rightarrow 0.0014 \pm 0.014i, \quad \lambda_3 = -55 \rightarrow -81\end{aligned}$$

**Пример 9**[103].

$$y_1' = -y_1,$$

$$y_2' = y_1 - 2y_2,$$

$$y_i' = (i-1)y_{i-1} - iy_i, \quad 3 \leq i \leq 9,$$

$$y_{10} = 9y_9, \quad y_1(0) = 1, \quad y_j(0) = 0, \quad 2 \leq j \leq 10,$$

$$h_0 = 5 \cdot 10^{-2}, \quad t_k = 20,$$

**Пример 10.**

$$y_1' = -1800y_1 + 900y_2,$$

$$y_i' = y_{i-1} - 0.2y_i + y_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 8,$$

$$y_9 = 1000y_8 - 2000y_9 + 1000, \quad y_j(0) = 0, \quad 1 \leq j \leq 9,$$

$$h_0 = 5 \cdot 10^{-4}, \quad t_k = 20,$$

$$\lambda_{1,2} = -0.1, \quad \lambda_{3,4} = -1, \quad \lambda_5 = -2.6, \quad \lambda_6 = -3.3,$$

$$\lambda_7 = -3.8, \quad \lambda_{8,9} = -2000,$$

**Пример 11**[87].

$$y_1' = -y_1 + 10^8 y_3(1 - y_1), \quad y_1(0) = 1,$$

$$y_2' = -10y_2 + 3 \cdot 10^7 y_3(1 - y_2), \quad y_2(0) = 0,$$

$$y_3' = -y_1' - y_2', \quad y_3(0) = 0,$$

$$h_0 = 3.3 \cdot 10^{-8}, \quad t_k = 1,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1 \rightarrow -8.6, \quad \lambda_3 = -3 \cdot 10^7 \rightarrow -4 \cdot 10^7$$

**Пример 12.**

$$y_1' = -\frac{30y_1y_2}{41 + y_1}, \quad y_1(0) = 1230.0,$$

$$y_2' = \frac{1.5y_2y_3}{(0.002 + y_3)(0.23 + y_3)(23 + y_4)}, \quad y_2(0) = 1.03,$$

$$y_3' = -y_1' - 71y_2' - \frac{265y_2y_3}{3.1 + y_3}, \quad y_3(0) = 0,$$

$$y_4' = \frac{265y_2y_3}{3.1 + y_3} - \frac{1263y_2y_3}{(14.4 + y_4)(12.3 + y_4)}, \quad y_4(0) = 0,$$

$$h_0 = 10^{-1}, \quad t_k = 10,$$

**Пример 13.**

$$y_1' = 2(y_1 - y_1y_2), \quad y_1(0) = 1,$$

$$y_2' = -(y_2 - y_1y_2), \quad y_2(0) = 3,$$

$$h_0 = 2, \quad t_k = 20$$

**Пример 14**[87].

$$y_1' = y_2, \quad y_1(0) = 0,$$

$$y_2' = y_3, \quad y_2(0) = 0,$$

$$y_3' = y_4, \quad y_3(0) = 0,$$

$$y_4' = (y_1^2 - \sin(y_1) - g^4)y_1 + \left(\frac{y_2 y_3}{y_1^2 + 1} - 4g^3\right)y_2 + (1 - 6g^2)y_3$$

$$+ (10e^{-y_4^2} - 4g)y_4 + f(t), \quad y_4(0) = 0, \quad f(t) = 1, \quad g = 100,$$

$$h_0 = 6.8 \cdot 10^{-3}, \quad t_k = 1,$$

$$\lambda_{1,2} = -130 \pm 69i, \quad \lambda_{3,4} = -64 \pm 22i$$

**Пример 15.**

$$y_1' = \frac{27 - 0.04y_3 - 3.4y_1}{0.0024}, \quad y_1(0) = 0,$$

$$y_2' = y_3, \quad y_2(0) = 0,$$

$$y_3' = \frac{200y_1 - 0.02y_3}{0.036}, \quad y_3(0) = 0,$$

$$h_0 = 10^{-3}, \quad t_k = 0.1$$

**Пример 16**[87].

$$y_1' = -y_1 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2, \quad y_1(0) = 1,$$

$$y_2' = -10y_2 + 10(y_3^2 + y_4^2), \quad y_2(0) = 1,$$

$$y_3' = -40y_3 + 40y_4^2, \quad y_3(0) = 1,$$

$$y_4' = -100y_4 + 2, \quad y_4(0) = 1,$$

$$h_0 = 10^{-2}, \quad t_k = 20$$

**Пример 17**[87].

$$y_1' = -y_1 + 2, \quad y_1(0) = 1,$$

$$y_2' = -10y_2 + 0.1y_1^2, \quad y_2(0) = 1,$$

$$y_3' = -40y_3 + 0.4(y_1^2 + y_2^2), \quad y_3(0) = 1,$$

$$y_4' = -100y_4 + y_1^2 + y_2^2 y_3^2, \quad y_4(0) = 1,$$

$$h_0 = 10^{-2}, \quad t_k = 20$$

**Пример 18**[103].

$$y_1' = y_3, \quad y_1(0) = 1 - e,$$

$$y_2' = y_4, \quad y_2(0) = 0,$$

$$y_3' = -\frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{1.5}}, \quad y_3(0) = 0,$$

$$y_4' = -\frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{1.5}}, \quad y_4(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

$$h_0 = 10^{-2}, \quad t_k = 20, \quad e = 0.1.$$

**Пример 19**[103].

$$y_1' = y_2, \quad y_1(0) = J_{1/2} = 0.671396707,$$

$$y_2' = -\left(\frac{y_2}{t+1} + \left(1 - \frac{0.25}{t+1^2}\right)y_1\right), \quad y_2(0) = J_{1/2}' = 0.0955400515,$$

$$h_0 = 2 \cdot 10^{-2}, \quad t_k = 20$$

**Пример 20**[103].

$$y_1' = y_2, \quad y_1(0) = 2,$$

$$y_2' = (1 - y_1^2)y_2 - y_1, \quad y_2(0) = 0,$$

$$h_0 = 2 \cdot 10^{-2}, \quad t_k = 20$$

**Пример 21.**

$$y_1' = \left(a + \frac{1}{t+1}\right)y_1 + \frac{1}{(t+1)^4}\left(b - a - \frac{3}{t+1}\right)y_2, \quad y_1(0) = 2,$$

$$y_2' = \left(b + \frac{2}{t+1}\right)y_2, \quad y_2(0) = 1,$$

$$y_3' = \frac{1}{(t+1)^3}\left(b - c - \frac{4}{t+1}\right)y_2 + \left(c + \frac{3}{t+1}\right)y_3, \quad y_3(0) = 2,$$

$$h_0 = 5 \cdot 10^{-3}, \quad t_k = 0.5, \quad a = 60, \quad b = -50, \quad c = 0.1$$

$$\lambda_1 = a + \frac{1}{t+1}, \quad \lambda_2 = b + \frac{2}{t+1}, \quad \lambda_3 = c + \frac{3}{t+1},$$

$$y_1(t) = (t+1)e^{at} + \frac{1}{(t+1)^2}e^{bt},$$

$$y_2(t) = (t+1)^2e^{bt},$$

$$y_3(t) = \frac{1}{t+1}e^{bt} + (t+1)^3e^{ct}$$

**Пример 22**[87].

$$y_i' = -i^5 y_i, \quad y_i(0) = 1, \quad 1 \leq i \leq 10,$$

$$h_0 = 10^{-5}, \quad t_k = 1$$

**Пример 23**[103].

$$y_1' = -2y_1 + y_2, \quad y_1(0) = 1,$$

$$y_2' = y_1 - 2y_2 + y_3, \quad y_2(0) = 0,$$

$$y_i' = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}, \quad y_i(0) = 0, \quad 3 \leq i \leq 9,$$

$$y_{10}' = y_9 - 2y_{10}, \quad y_{10}(0) = 0,$$

$$h_0 = 10^{-2}, \quad t_k = 20$$

**Пример 24.**

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2, & y_1(0) &= 1, \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + y_3, & y_2(0) &= 0, \\ y_i' &= y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}, & y_i(0) &= 0, \quad 3 \leq i \leq 49, \\ y_{50}' &= y_{49} - 2y_{50}, & y_{50}(0) &= 0, \\ h_0 &= 10^{-2}, & t_k &= 20 \end{aligned}$$

**Пример 25.**

$$\begin{aligned} y_1' &= -2000y_1 + 1000y_2 + 1, & y_1(0) &= 0, \\ y_2' &= y_1 - y_2, & y_2(0) &= 0, \\ h_0 &= 5 \cdot 10^{-3}, & t_k &= 4, \\ \lambda_1 &\approx -2000, & \lambda_2 &\approx -0.5 \end{aligned}$$

## 7.2 Тестовые примеры 2

Общая форма записи [1]:

$$\begin{aligned} y_1' &= \mu_0 y_1, \\ y_2' &= (\mu_0 - \mu_1)y_1 + (\mu_1 + \nu_1)y_2 - \nu_1 y_3, \\ y_3' &= (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1)y_3, \\ y_4' &= (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2)y_3 \\ &\quad + (\mu_2 + \nu_2)y_4 - \nu_2 y_5, \\ y_5' &= (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2 - \nu_2)y_3 \\ &\quad + 2\nu_2 y_4 + (\mu_2 - \nu_2)y_5 \end{aligned}$$

Начальный шаг и конечная точка интервала интегрирования:

$$h_0 = 10^{-5}, \quad t_k = 1$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = \mu_0, \quad \lambda_{2,3} = \mu_1 \pm i\nu_1, \quad \lambda_{4,5} = \mu_2 \pm i\nu_2$$

Точное решение:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= e^{\mu_0 t} y_1(0), \\
 y_2(t) &= e^{\mu_0 t} y_1(0) + e^{\mu_1 t} [y_2(0) - y_1(0)] \cos(\nu_1 t) \\
 &\quad + e^{\mu_1 t} [y_2(0) - y_3(0)] \sin(\nu_1 t), \\
 y_3(t) &= e^{\mu_0 t} y_1(0) + e^{\mu_1 t} [y_3(0) - y_1(0)] \cos(\nu_1 t) \\
 &\quad + e^{\mu_1 t} [2y_2(0) - y_1(0) - y_3(0)] \sin(\nu_1 t), \\
 y_4(t) &= y_3(t) + e^{\mu_2 t} [y_4(0) - y_3(0)] \cos(\nu_2 t) \\
 &\quad + e^{\mu_2 t} [y_4(0) - y_5(0)] \sin(\nu_2 t), \\
 y_5(t) &= y_3(t) + e^{\mu_2 t} [y_5(0) - y_3(0)] \cos(\nu_2 t) \\
 &\quad + e^{\mu_2 t} [2y_4(0) - y_3(0) - y_5(0)] \sin(\nu_2 t)
 \end{aligned}$$



**Пример 1.**

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 10, & \mu_1 &= 4, & \mu_2 &= 5, & \nu_1 &= 20\pi, & \nu_2 &= 100, \\ y_1(0) &= 0.1, & y_2(0) &= y_3(0) = 1, & y_4(0) &= y_5(0) = 0.5\end{aligned}$$

**Пример 2.**

$$\begin{aligned}\mu_0 &= -2, & \mu_1 &= 1, & \mu_2 &= -1, & \nu_1 &= 1, & \nu_2 &= 10, \\ y_1(0) &= 1, & y_2(0) &= y_3(0) = 1.5, & y_4(0) &= y_5(0) = 2.5\end{aligned}$$

**Пример 3.**

$$\begin{aligned}\mu_0 &= -2, & \mu_1 &= 1, & \mu_2 &= -1, & \nu_1 &= 1, & \nu_2 &= 1000, \\ y_1(0) &= 0.5, & y_2(0) &= y_3(0) = 0.8, & y_4(0) &= y_5(0) = 2\end{aligned}$$

**Пример 4.**

$$\begin{aligned}\mu_0 &= -100, & \mu_1 &= -1, & \mu_2 &= -10000, & \nu_1 &= 1, & \nu_2 &= 10, \\ y_1(0) &= 10, & y_2(0) &= y_3(0) = 11, & y_4(0) &= y_5(0) = 111\end{aligned}$$

**Пример 5.**

$$\begin{aligned}\mu_0 &= -10000, & \mu_1 &= 1, & \mu_2 &= -100, & \nu_1 &= 1, & \nu_2 &= 1000, \\ y_1(0) &= 100, & y_2(0) &= y_3(0) = 101, & y_4(0) &= y_5(0) = 201\end{aligned}$$

**Пример 6.**

$$\begin{aligned}y_1' &= \lambda_1 y_1, & y_1(0) &= 1, \\ y_2' &= a y_1 + \lambda_1 y_2, & y_2(0) &= 1, \\ y_3' &= \lambda_2 y_3, & y_3(0) &= 1000, \\ y_4' &= a_1 y_3 + \lambda_2 y_4, & y_4(0) &= 1000, \\ y_5' &= a_2 y_4 + \lambda_2 y_5, & y_5(0) &= 1000, \\ y_6' &= a_3 y_5 + \lambda_2 y_6, & y_6(0) &= 1000, \\ h_0 &= 10^{-5}, & t_k &= 1, \\ a &= a_1 = 1, & a_2 &= 2, & a_3 &= 3, & \lambda_1 &= -1, & \lambda_2 &= -10000, \\ y_1(t) &= e^{\lambda_1 t} y_1(0), \\ y_2(t) &= e^{\lambda_1 t} [y_2(0) + a t y_1(0)], \\ y_3(t) &= e^{\lambda_2 t} y_3(0), \\ y_4(t) &= e^{\lambda_2 t} [y_4(0) + a_1 t y_3(0)], \\ y_5(t) &= e^{\lambda_2 t} [y_5(0) + a_2 t y_4(0) + 0.5 a_1 a_2 t^2 y_3(0)], \\ y_6(t) &= e^{\lambda_2 t} [y_6(0) + a_3 t y_5(0) + 0.5 a_2 a_3 t^2 y_4(0) + \frac{1}{6} a_1 a_2 a_3 t^3 y_3(0)]\end{aligned}$$

### 7.3 Области устойчивости

Кратко опишем результаты численного эксперимента по определению влияния функции  $F$  (см. (6.2)) на размер и форму области устойчивости. Сначала для задания  $F$  рассмотрим следующую формулу

$$F_i = (-1)^i u, \quad k \leq i \leq m-1, \quad (7.1)$$

где  $u$  – некоторое положительное число. Если рассматривать задачу построения многочленов с максимальным интервалом устойчивости, то нужно положить  $u = 1$ . Соответствующие области устойчивости приведены на рис. 1 – 4. Из рис. 1 – 3 следует, что области устойчивости таких методов "почти"многосвязные. Поэтому, если требуется, чтобы интервал устойчивости был достаточно велик, можно выбрать  $u = 0.9$ . В этом случае области устойчивости приведены на рис. 5 – 7, из которых видно, что, по крайней мере, появление мнимых частей собственных чисел матрицы Якоби дифференциальной задачи за счет ошибок округлений не будет приводить к сокращению области устойчивости. На рис. 8 – 25 приведены области устойчивости при значениях параметра  $u$ , соответственно, равном 0.8, 0.7,  $\dots$ , 0.3.

Из анализа рис. 1 – 54 следует, что форма, размер и структура области устойчивости зависят от расположения корней многочлена

$$Q_{m,k}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} + \sum_{i=k+1}^m c_i x^i \quad (7.2)$$

в комплексной плоскости  $x$ . На расположение корней можно влиять выбором функции  $F$ . При решении дифференциальных задач, собственные числа матрицы Якоби которых имеют большие мнимые части и решения которых носят осциллирующий характер, часто не требуется значительное расширение интервала устойчивости. В этом случае шаг из условия точности выбирается достаточно малым, и поэтому расширение области устойчивости требуется в основном по мнимой оси. В случае наличия чисто мнимых собственных чисел нужно, чтобы на достаточно большом участке мнимой оси выполнялось условие  $|Q_{m,k}(x)| = 1$ . При повышении порядка точности, то есть с ростом  $k$ , это условие выполняется само собой (см. рис. 4, 47 – 54). Для методов низкого порядка расширения области устойчивости по мнимой оси можно добиться двумя путями, которые можно комбинировать.

Во-первых, за счет сближения действительных корней полинома устойчивости. При вычислении  $F$  по формуле (7.1) это достигается выбором достаточно малого значения параметра  $u$ . Однако, это приводит к значительному сокращению интервала устойчивости и, что более существенно, не приводит к включению мнимой оси в область устойчивости.

Во-вторых, за счет выбора коэффициентов  $c_j$ ,  $k+1 \leq j \leq m$ , в (7.2) таким образом, чтобы корни многочлена устойчивости были комплекс-

ными. При четном  $m$  для этого достаточно выбрать функцию  $F$  так, чтобы выполнялось неравенство  $0 < F \leq 1$  (см. рис. 26 – 35). В случае нечетного  $m$  (см. рис. 41 – 46) один корень обязательно действительный и, в зависимости от того, как он расположен относительно комплексных, изменяется размер, форма и структура области устойчивости. В частности, при  $m = 5$ , если действительный корень расположен между комплексными, область устойчивости "почти прямоугольная" (см. рис. 43).

Отметим одну важную особенность многочленов устойчивости. При увеличении порядка точности при  $m = k$  область устойчивости становится многосвязной. При  $k = 6$  происходит отделение пары комплексно-сопряженных корней, которые в правой полуплоскости образуют "островки устойчивости". Вторая пара корней отрывается при  $k = 11$ . Представляется, что этот процесс носит регулярный характер.

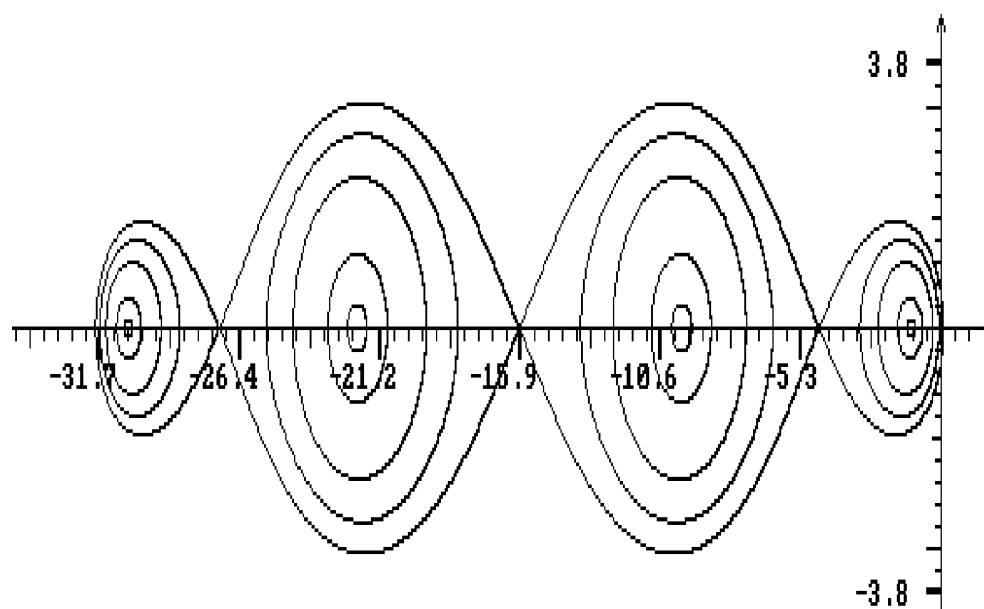


Рис. 1.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 32.00$ ;  $F : -1, 1, -1$   
 $c_2 = 0.15625$ ,  $c_3 = 0.78125 \cdot 10^{-2}$ ,  $c_4 = 0.12207 \cdot 10^{-3}$

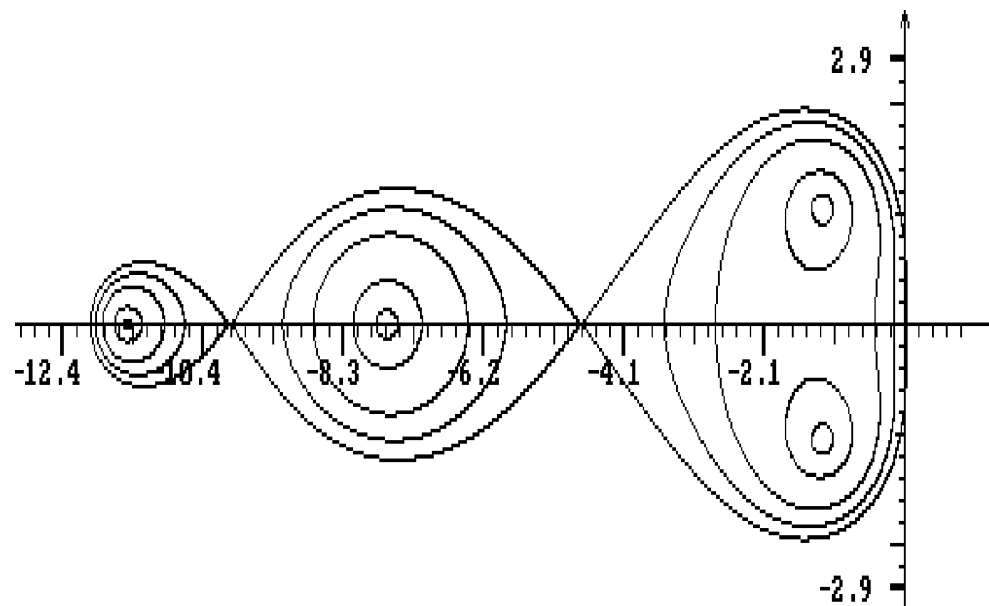


Рис. 2.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 12.05$ ;  $F : 1, -1$   
 $c_3 = 0.78084 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.36085 \cdot 10^{-2}$

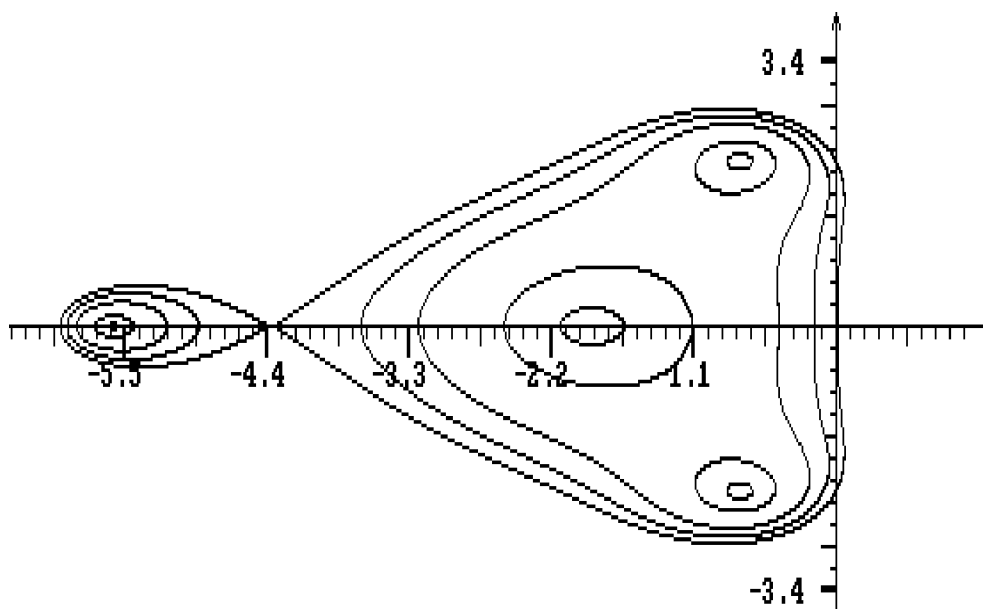


Рис. 3.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 6.027$ ;  $F : -1$   
 $c_4 = 0.18456 \cdot 10^{-1}$

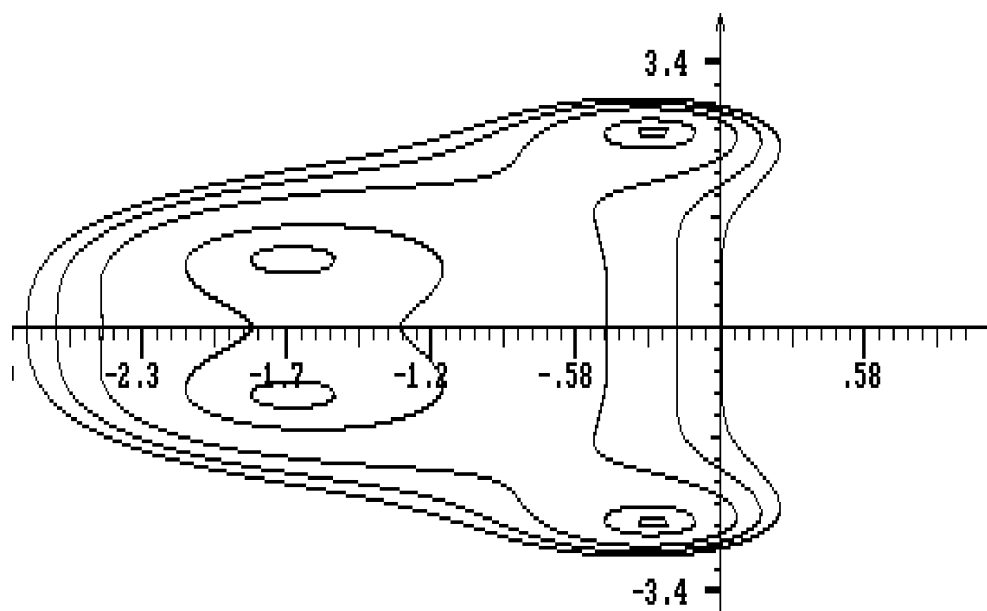


Рис. 4.  $m = 4$ ;  $k = 4$ ;  $\gamma = 2.785$ ;

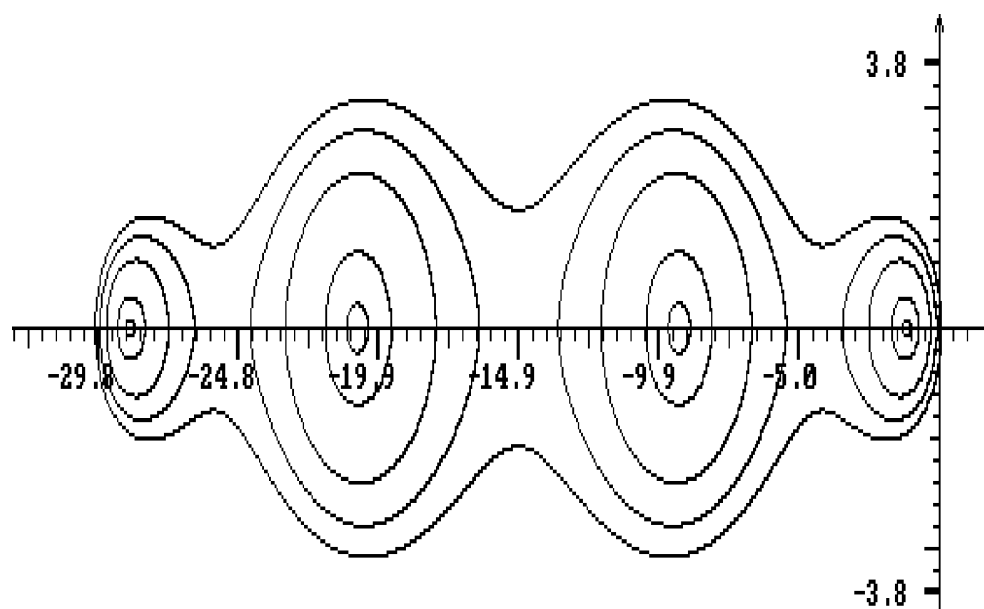


Рис. 5.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 30.00$ ;  $F : -0.9, 0.9, -0.9$   
 $c_2 = 0.16492$ ,  $c_3 = 0.87735 \cdot 10^{-2}$ ,  $c_4 = 0.14625 \cdot 10^{-3}$

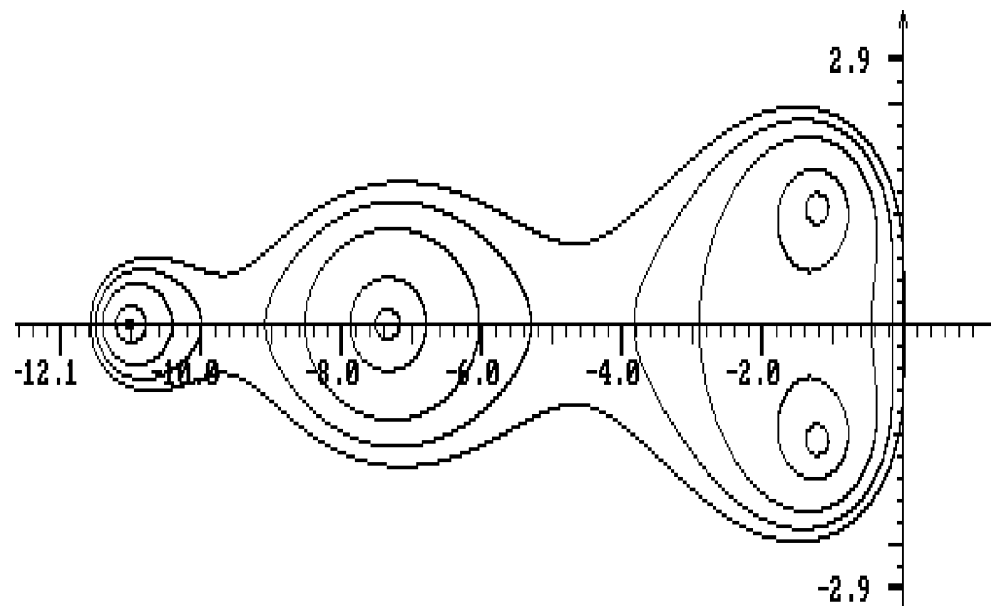


Рис. 6.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 11.65$ ;  $F : 0.9, -0.9$   
 $c_3 = 0.80023 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.38170 \cdot 10^{-2}$

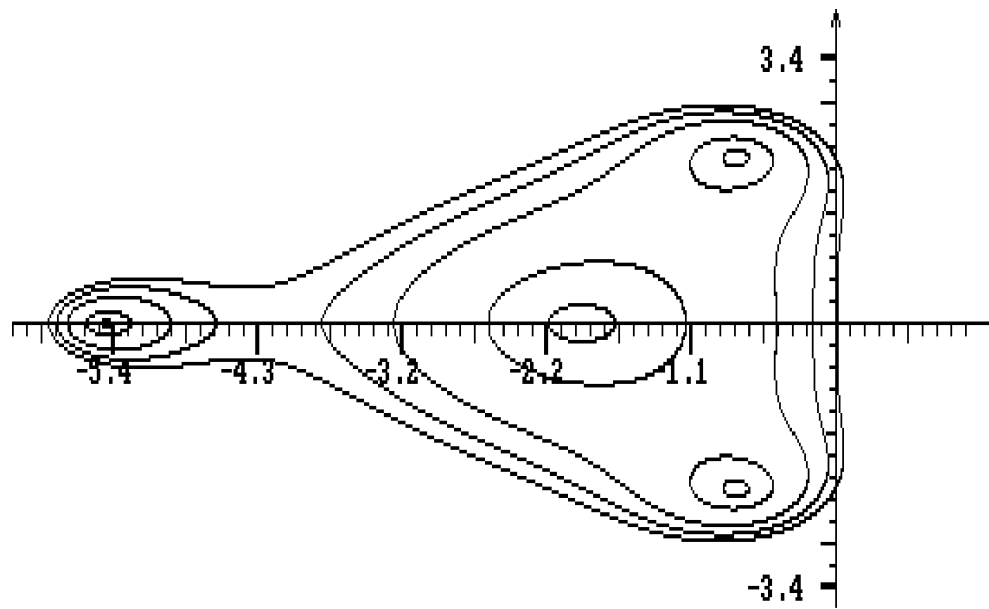


Рис. 7.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 5.907$ ;  $F : -0.9$   
 $c_4 = 0.18738 \cdot 10^{-1}$

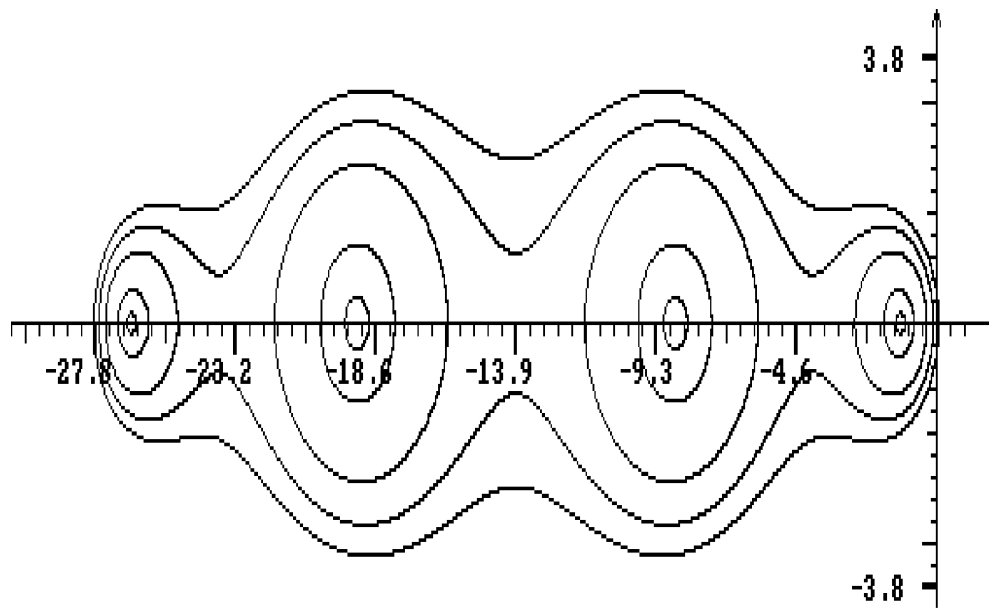


Рис. 8.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 27.98$ ;  $F : -0.8, 0.8, -0.8$   
 $c_2 = 0.17463$ ,  $c_3 = 0.99290 \cdot -2$ ,  $c_4 = 0.17745 \cdot 10^{-3}$

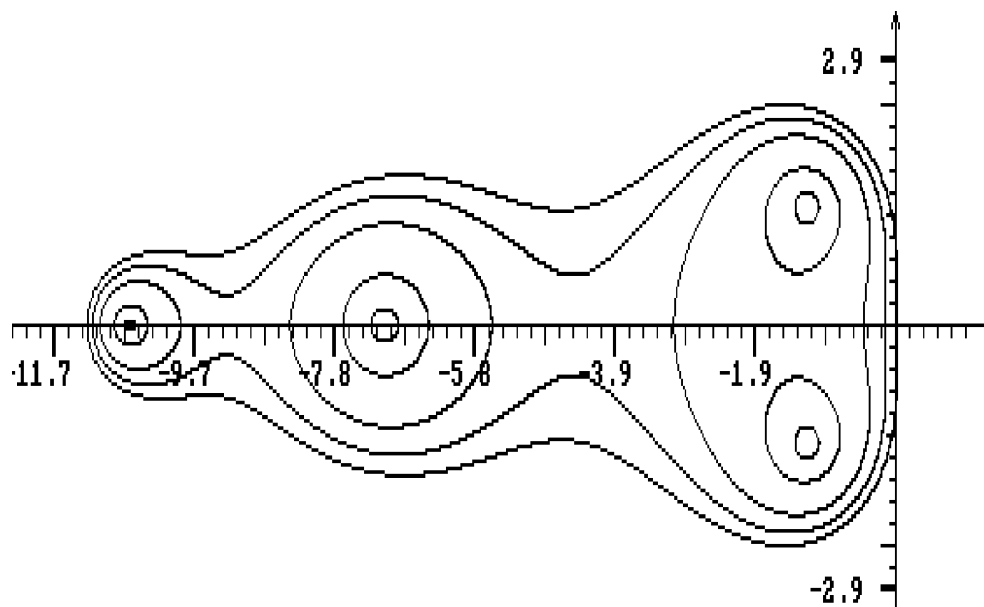


Рис. 9.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 11.24$ ;  $F : 0.8, -0.8$   
 $c_3 = 0.82199 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.40603 \cdot 10^{-2}$

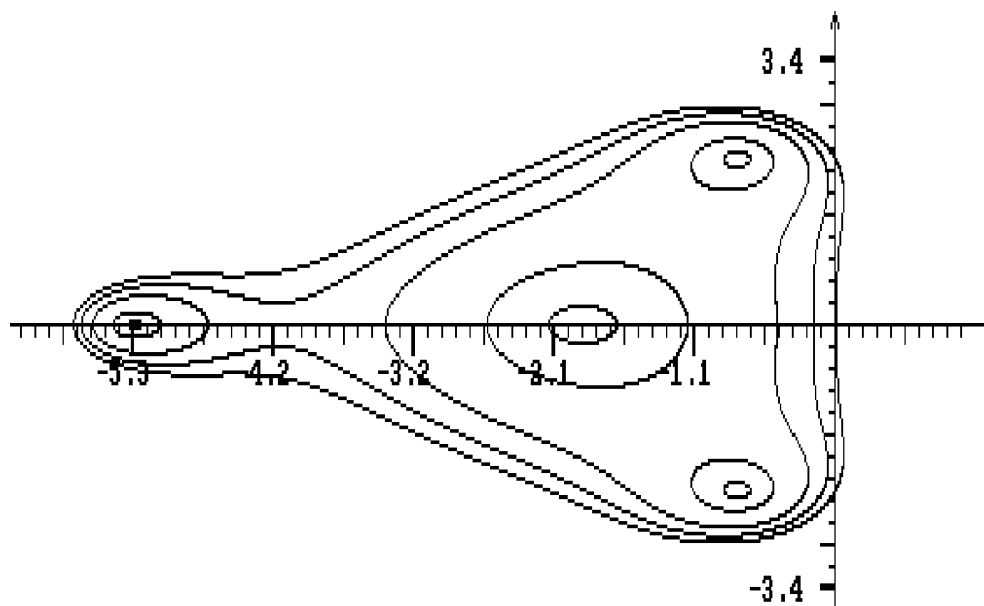


Рис. 10.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 5.778$ ;  $F : -0.8$   
 $c_4 = 0.19052 \cdot 10^{-1}$



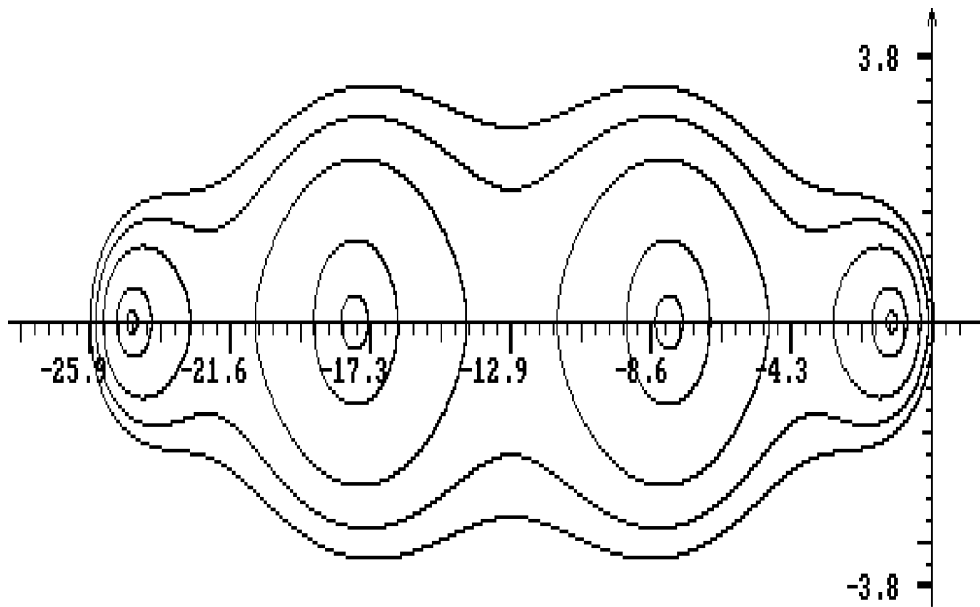


Рис. 11.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 25.94$ ;  $F : -0.7, 0.7, -0.7$   
 $c_2 = 0.18561$ ,  $c_3 = 0.11338 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.21852 \cdot 10^{-3}$

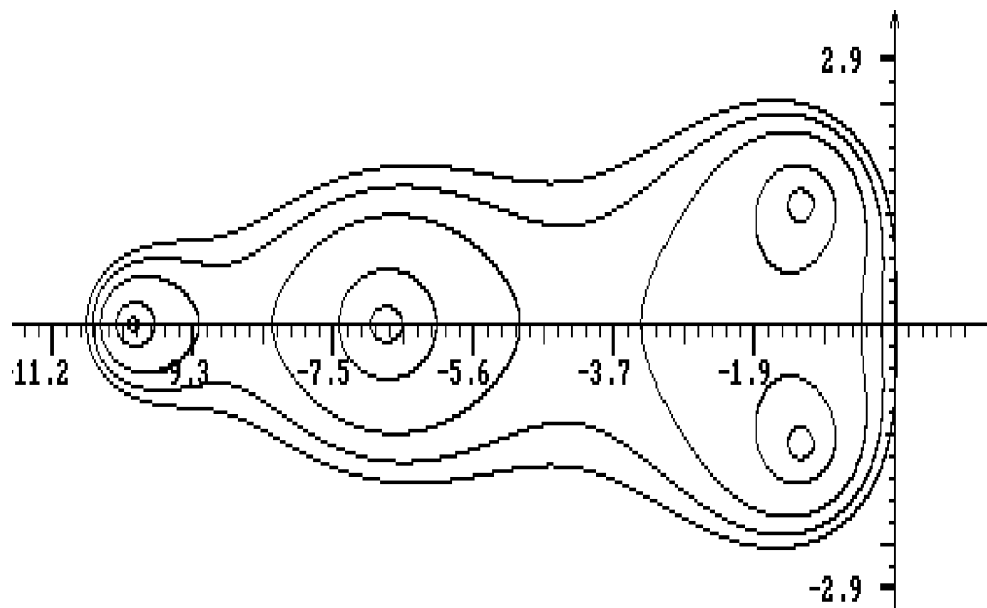


Рис. 12.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 10.79$ ;  $F : 0.7, -0.7$   
 $c_3 = 0.84680 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.43500 \cdot 10^{-2}$

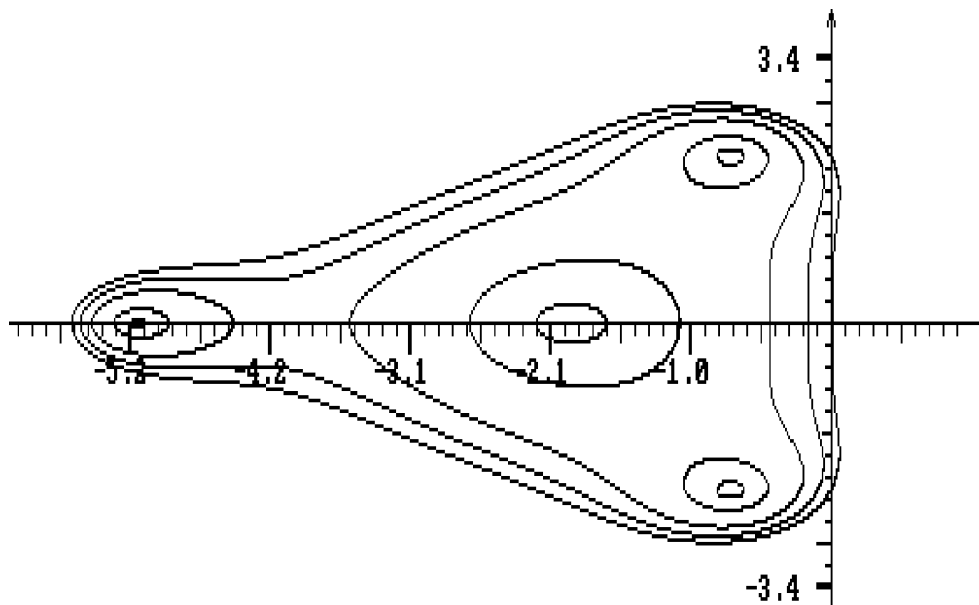


Рис. 13.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 5.641$ ;  $F : -0.7$   
 $c_4 = 0.19404 \cdot 10^{-1}$

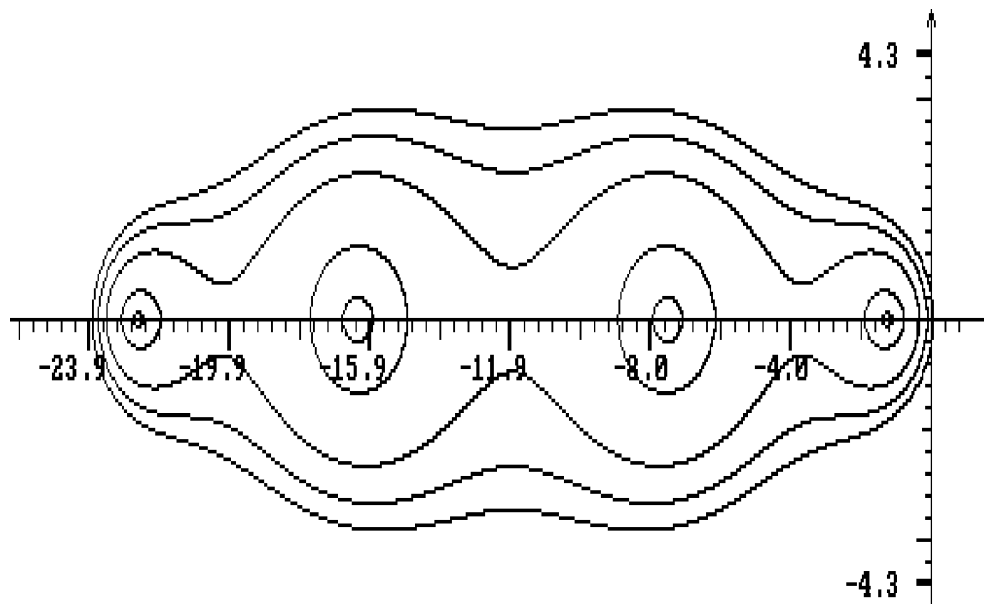


Рис. 14.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 23.89$ ;  $F : -0.6, 0.6, -0.6$   
 $c_2 = 0.19812$ ,  $c_3 = 0.13083 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.27388 \cdot 10^{-3}$

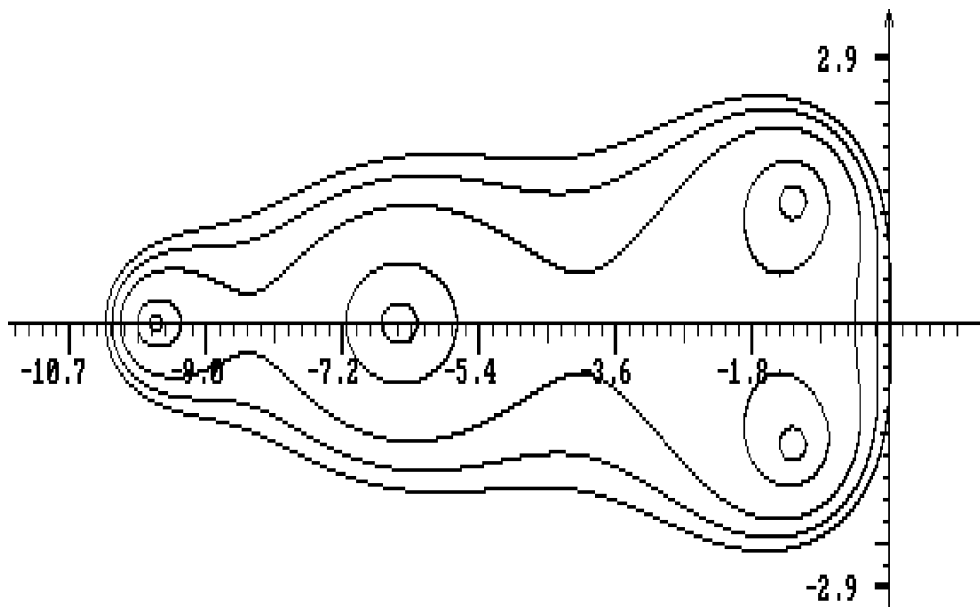


Рис. 15.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 10.30$ ;  $F : 0.6, -0.6$   
 $c_3 = 0.87568 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.47044 \cdot 10^{-2}$

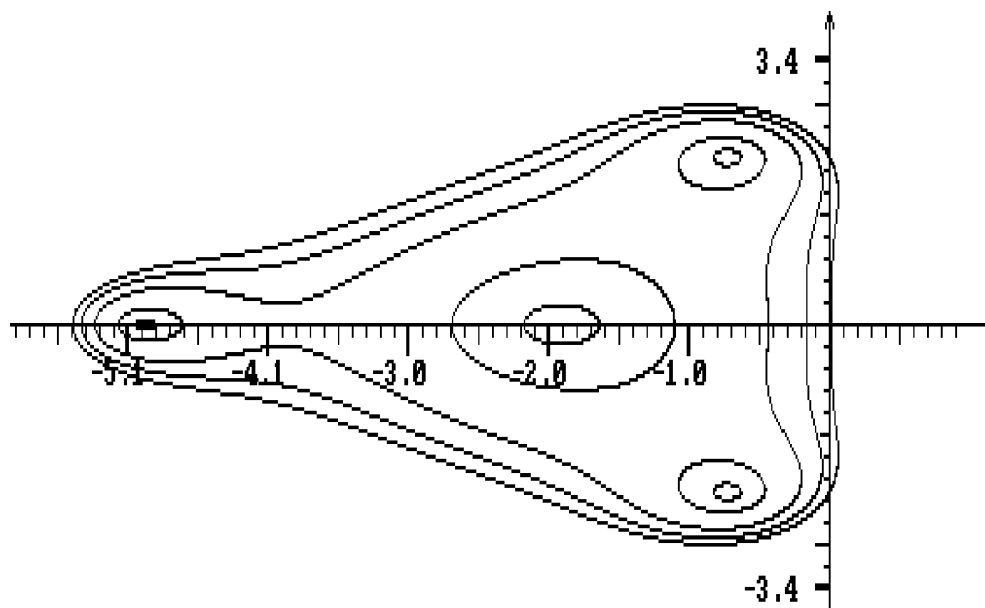


Рис. 16.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 5.493$ ;  $F : -0.6$   
 $c_4 = 0.19804 \cdot 10^{-1}$

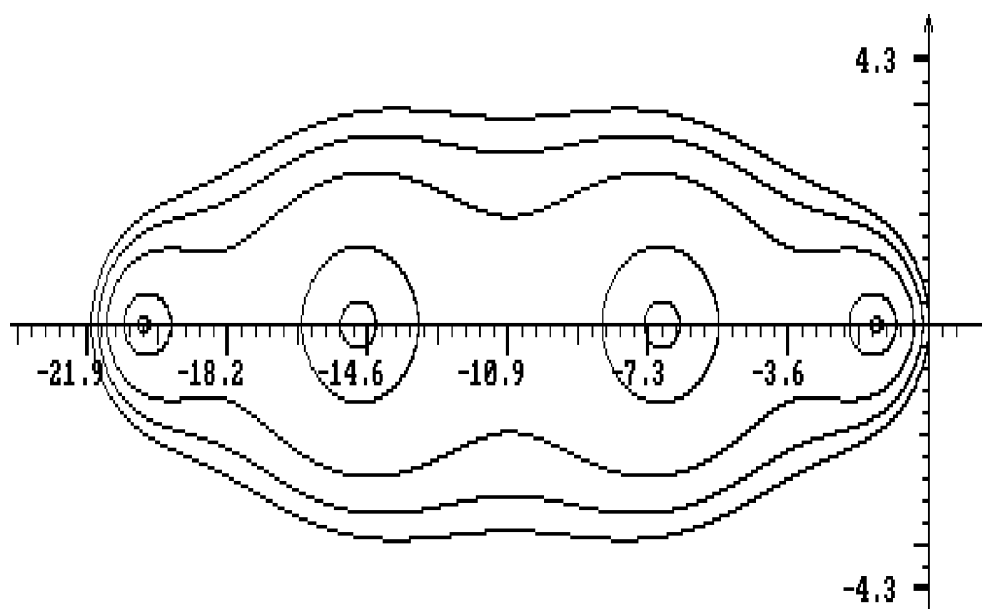


Рис. 17.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 21.80$ ;  $F : -0.5, 0.5, -0.5$   
 $c_2 = 0.21254$ ,  $c_3 = 0.15292 \cdot -1$ ,  $c_4 = 0.35077 \cdot 10^{-3}$

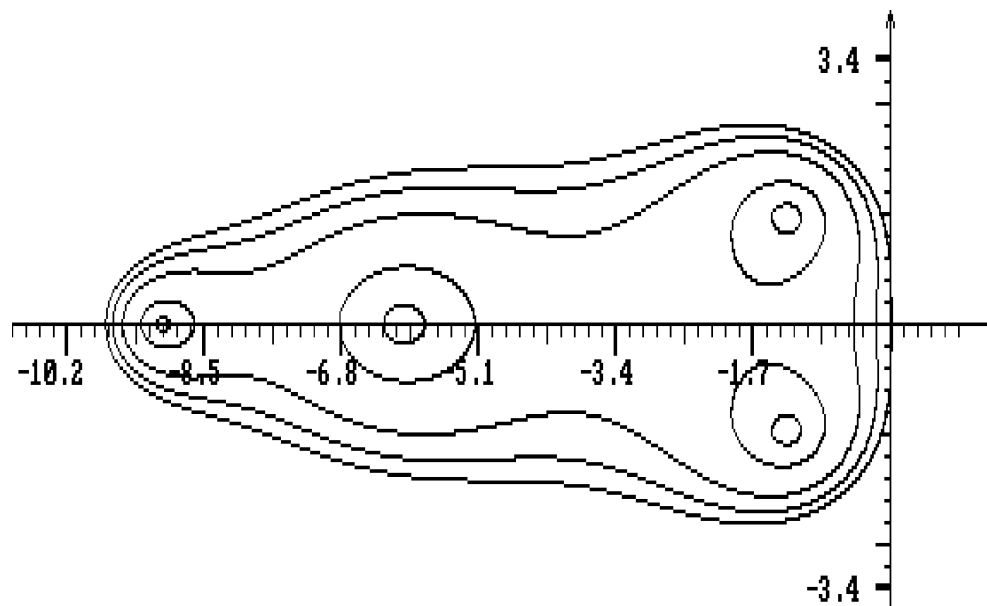


Рис. 18.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 9.755$ ;  $F : 0.5, -0.5$   
 $c_3 = 0.91037 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.51554 \cdot 10^{-2}$

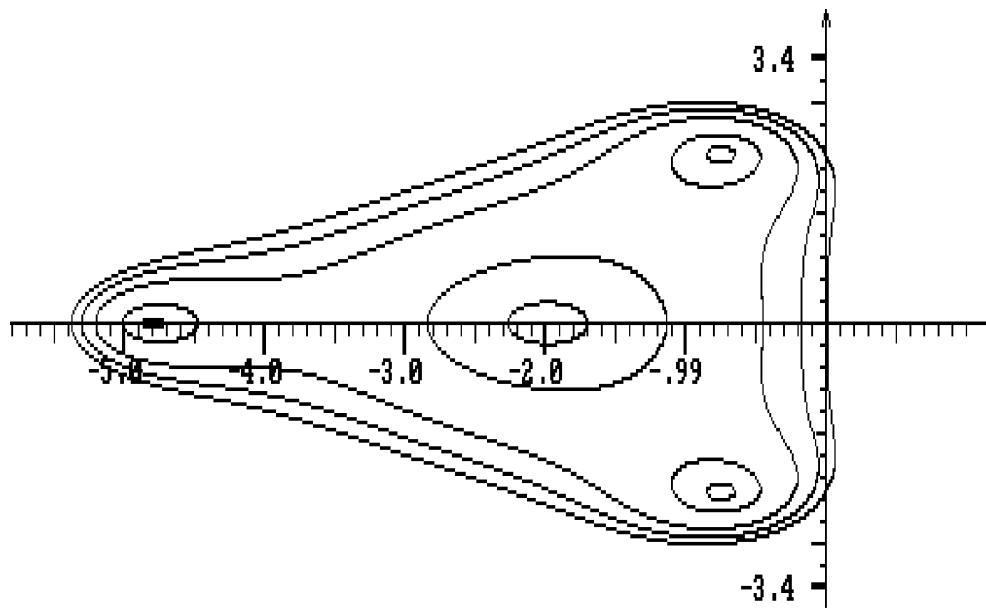


Рис. 19.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 5.332$ ;  $F : -0.5$   
 $c_4 = 0.20267 \cdot 10^{-1}$

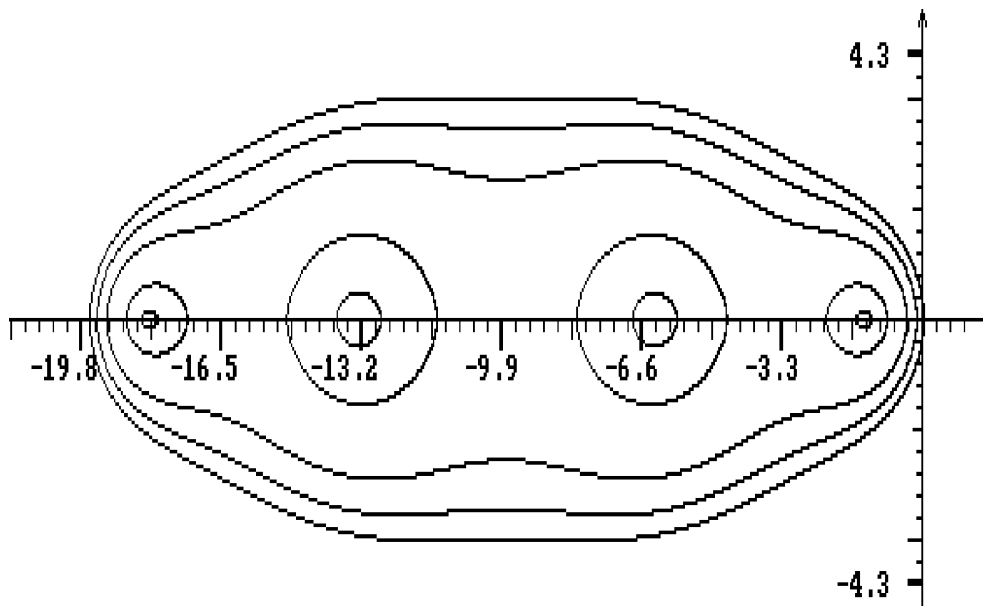


Рис. 20.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 19.67$ ;  $F : -0.4, 0.4, -0.4$   
 $c_2 = 0.22942$ ,  $c_3 = 0.18160 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.46170 \cdot 10^{-3}$

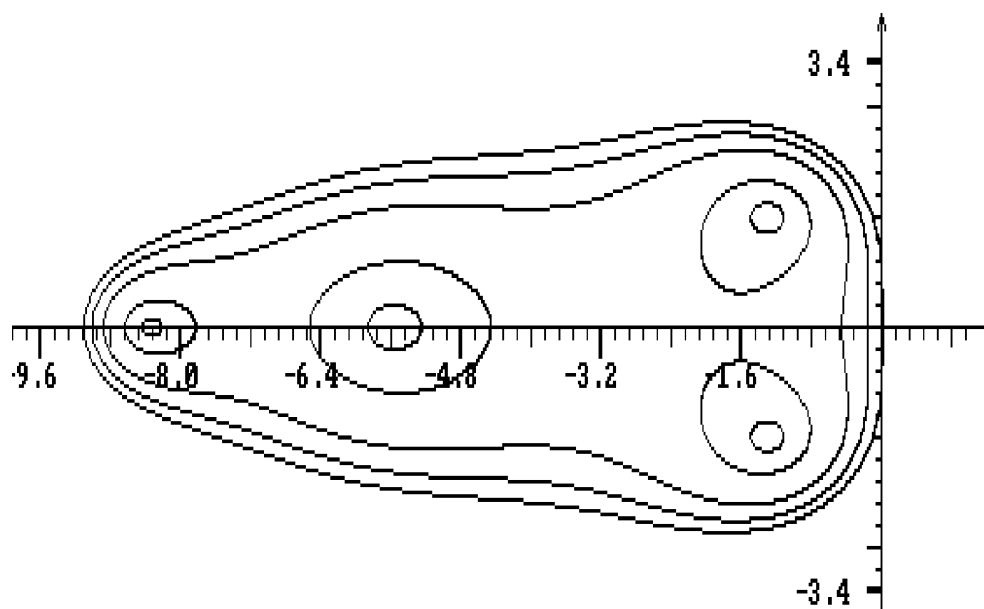


Рис. 21.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 9.131$ ;  $F : 0.4, -0.4$   
 $c_3 = 0.95430 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.57677 \cdot 10^{-2}$

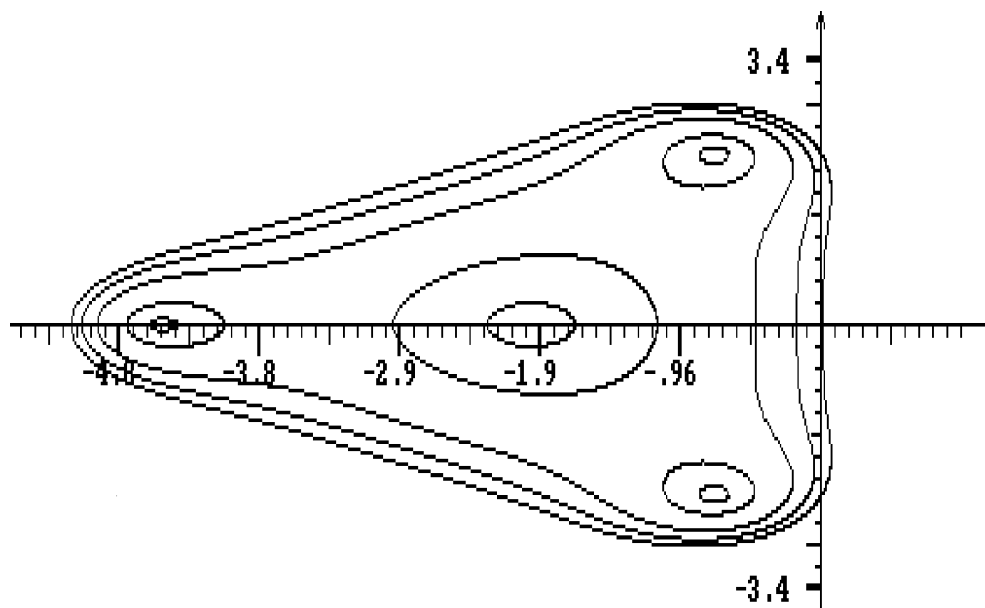


Рис. 22.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 5.155$ ;  $F : -0.4$   
 $c_4 = 0.20814 \cdot 10^{-1}$

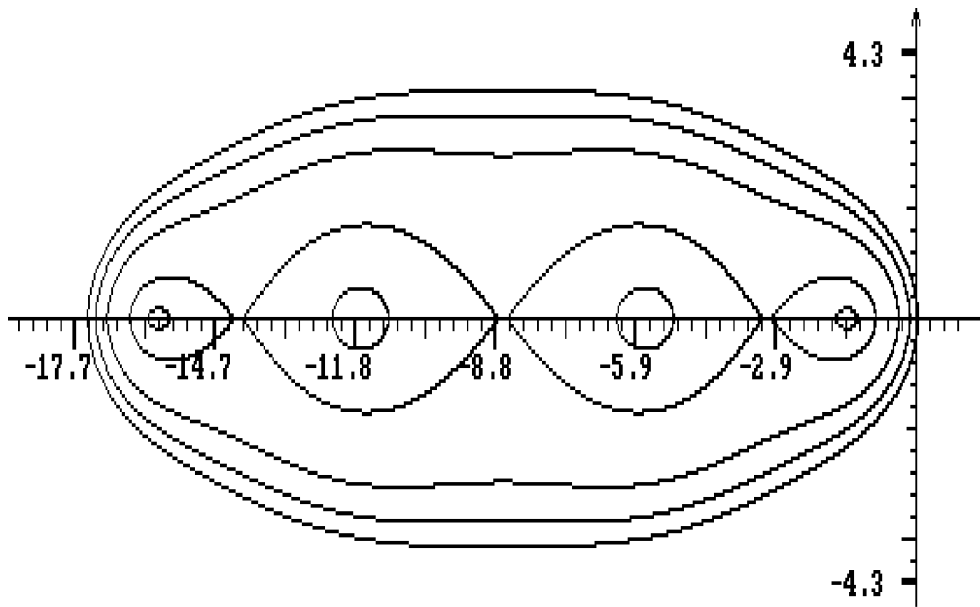


Рис. 23.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 17.47$ ;  $F : -0.3, 0.3, -0.3$   
 $c_2 = 0.24956$ ,  $c_3 = 0.22022 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.63043 \cdot 10^{-3}$

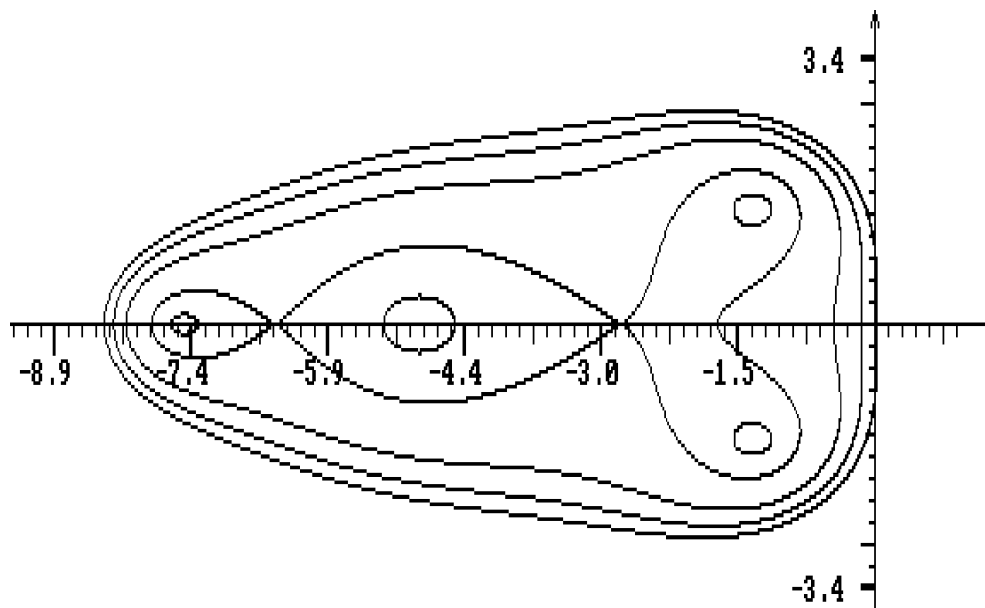


Рис. 24.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 8.347$ ;  $F : 0.3, -0.3$   
 $c_3 = 0.10177$ ,  $c_4 = 0.67355 \cdot 10^{-2}$

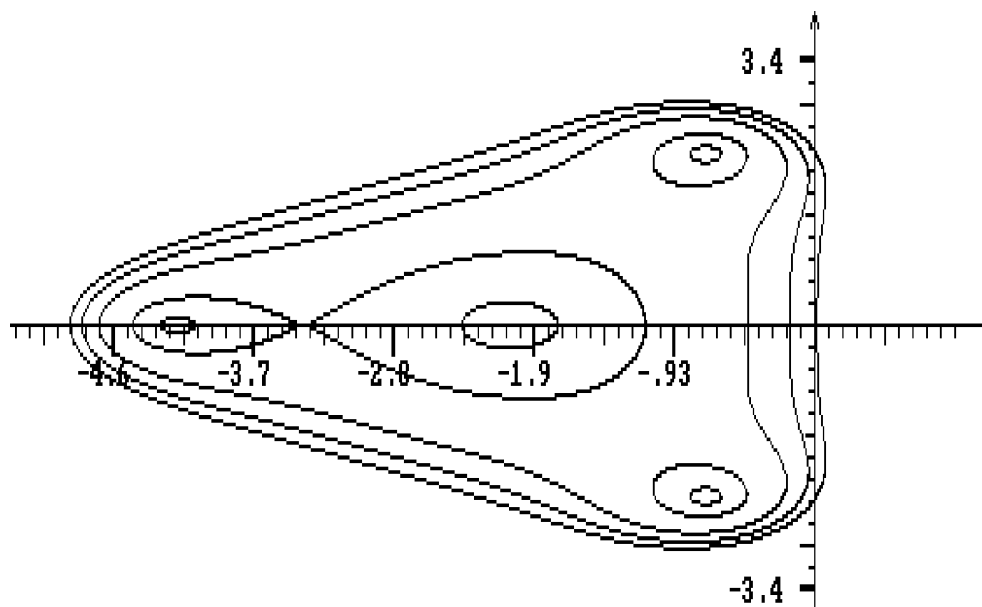


Рис. 25.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 4.958$ ;  $F : -0.3$   
 $c_4 = 0.21482 \cdot 10^{-1}$

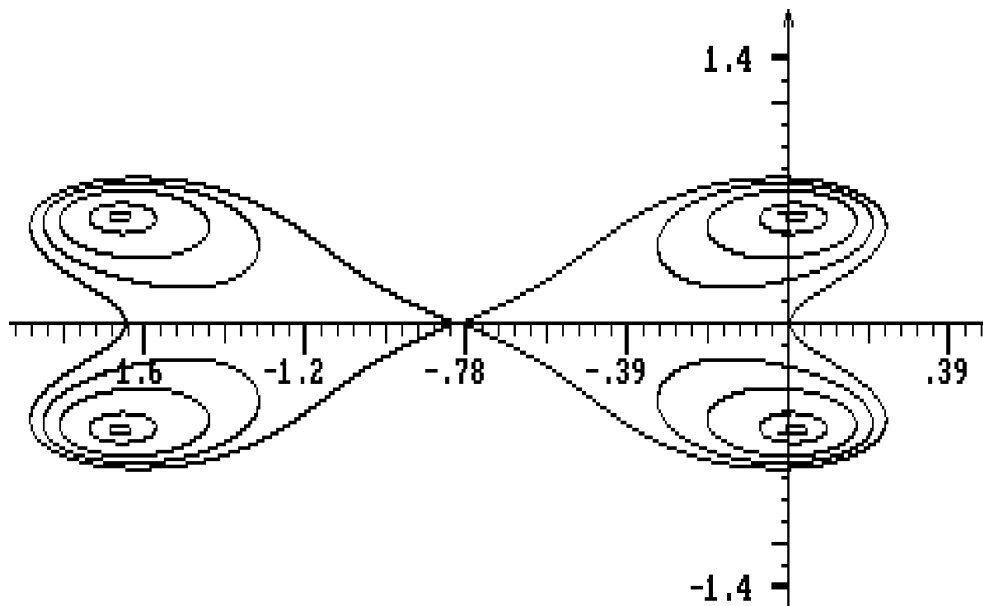


Рис. 26.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 1.600$ ;  $F : 0.9, 1., 0.9$   
 $c_2 = 0.31250 \cdot 10^1$ ,  $c_3 = 0.31250 \cdot 10^1$ ,  $c_4 = 0.97656$



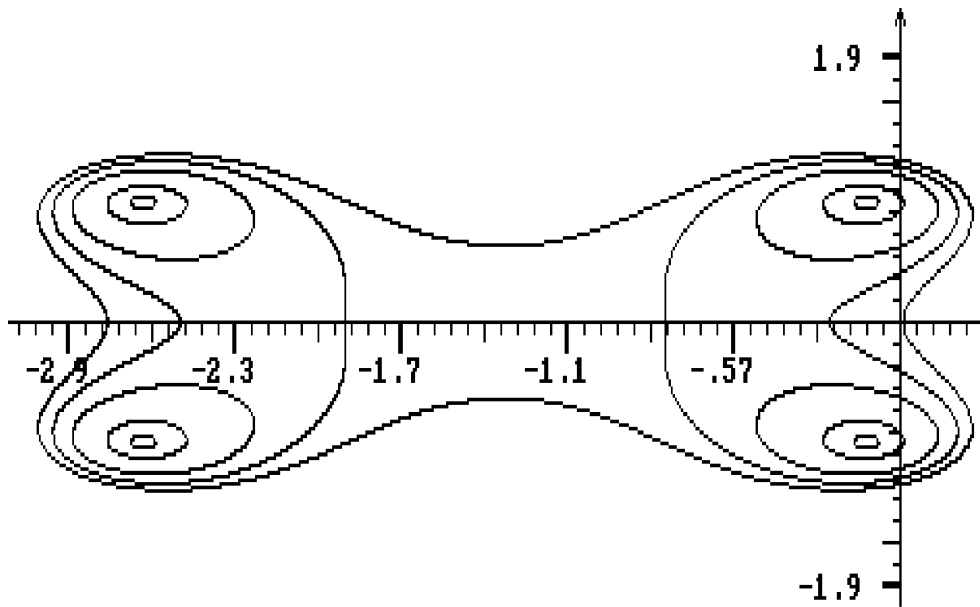


Рис. 27.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 2.731$ ;  $F : 0.8, 0.9, 0.8$   
 $c_2 = 0.16161 \cdot 10^1$ ,  $c_3 = 0.91529$ ,  $c_4 = 0.16755$

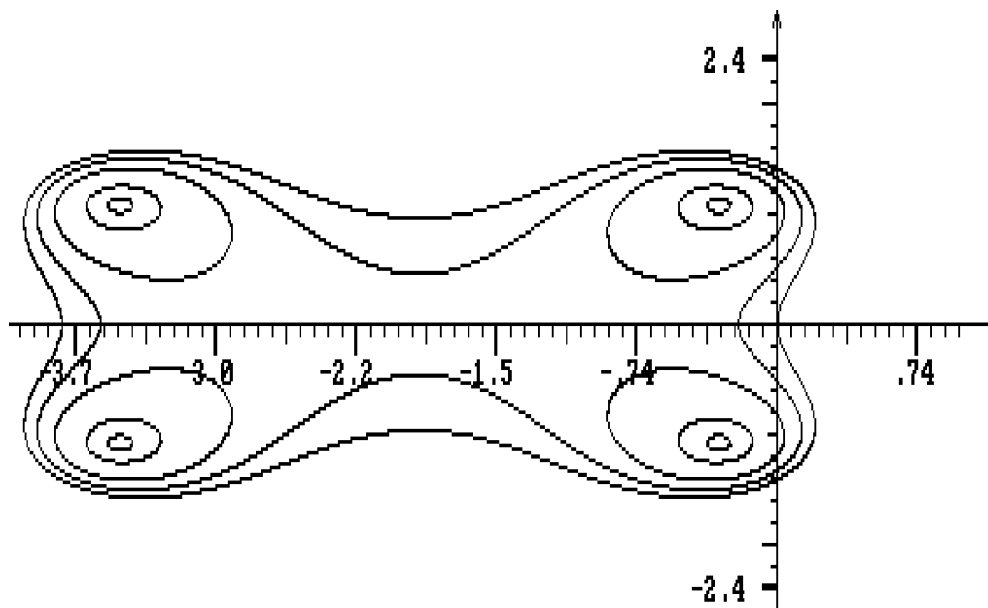


Рис. 28.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 3.786$ ;  $F : 0.7, 0.8, 0.7$   
 $c_2 = 0.10975 \cdot 10^1$ ,  $c_3 = 0.44026$ ,  $c_4 = 0.58149 \cdot 10^{-1}$

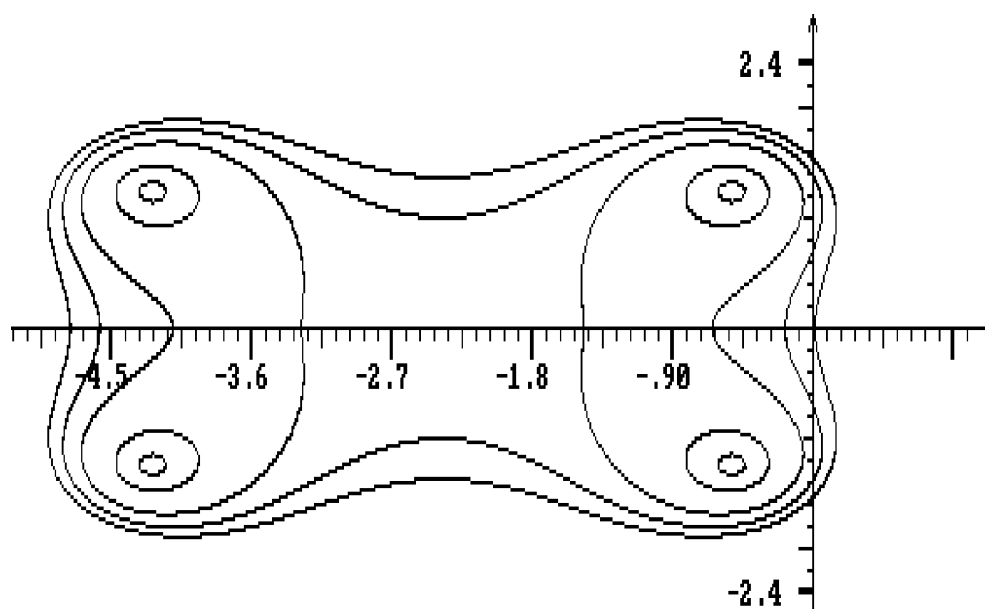


Рис. 29.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 4.800$ ;  $F : 0.6, 0.7, 0.6$   
 $c_2 = 0.83333$ ,  $c_3 = 0.26042$ ,  $c_4 = 0.27127 \cdot 10^{-1}$

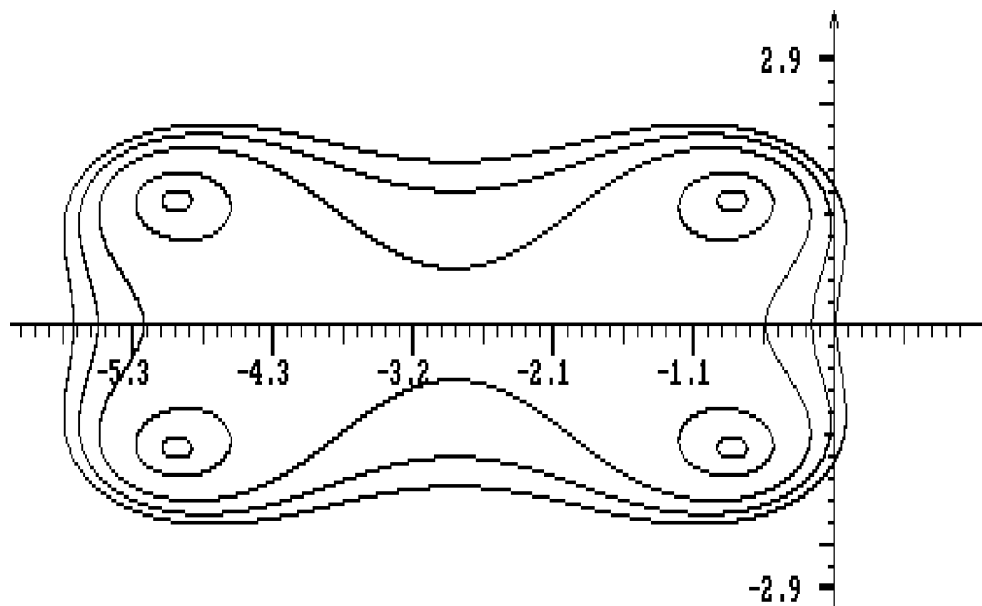


Рис. 30.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 5.789$ ;  $F : 0.5, 0.6, 0.5$   
 $c_2 = 0.67275$ ,  $c_3 = 0.17275$ ,  $c_4 = 0.14921 \cdot 10^{-1}$

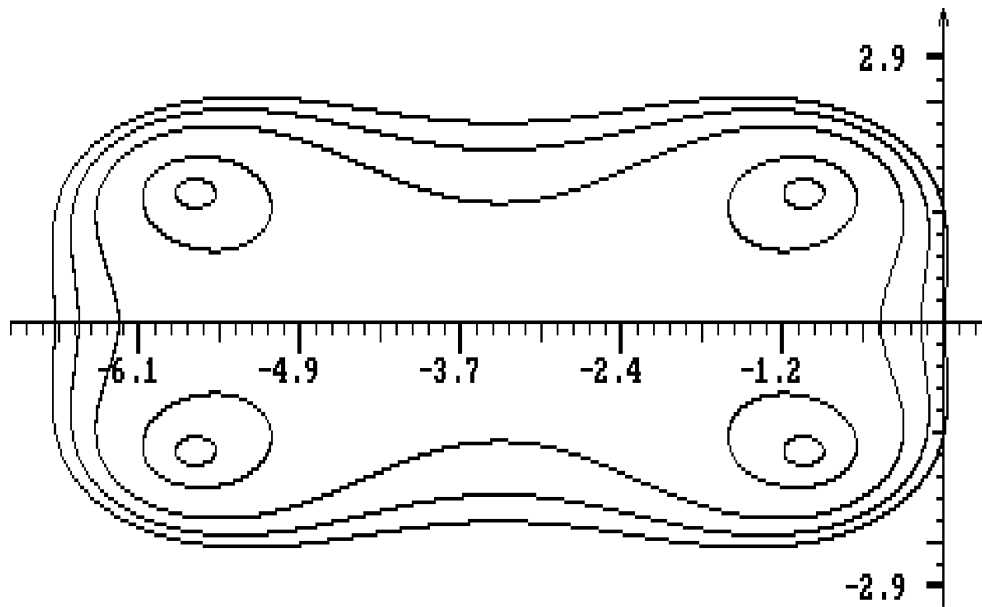


Рис. 31.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 6.760$ ;  $F : 0.4, 0.5, 0.4$   
 $c_2 = 0.56460$ ,  $c_3 = 0.12328$ ,  $c_4 = 0.91190 \cdot 10^{-2}$

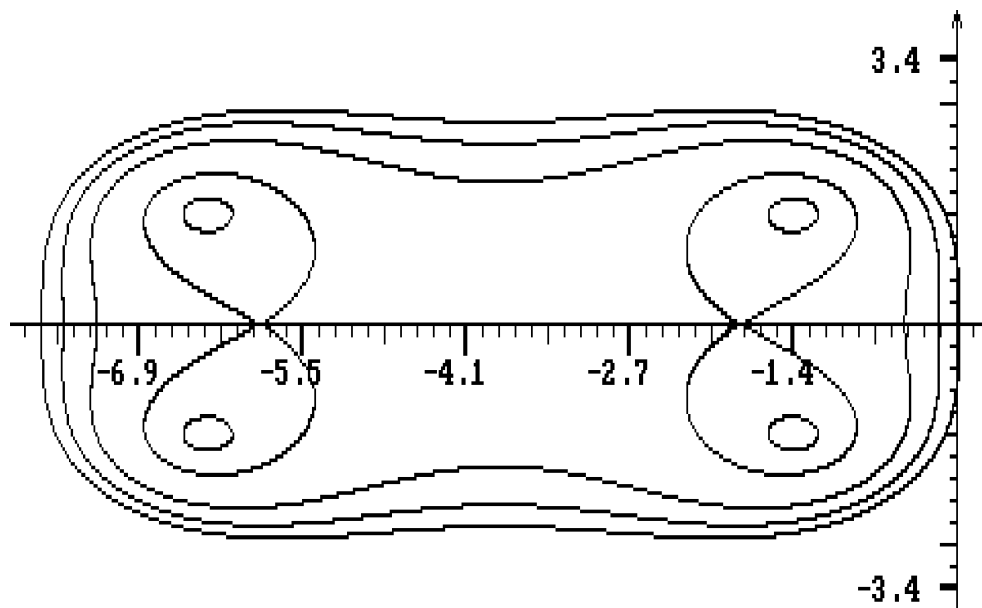


Рис. 32.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 7.717$ ;  $F : 0.3, 0.4, 0.3$   
 $c_2 = 0.48673$ ,  $c_3 = 0.92565 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.59978 \cdot 10^{-2}$

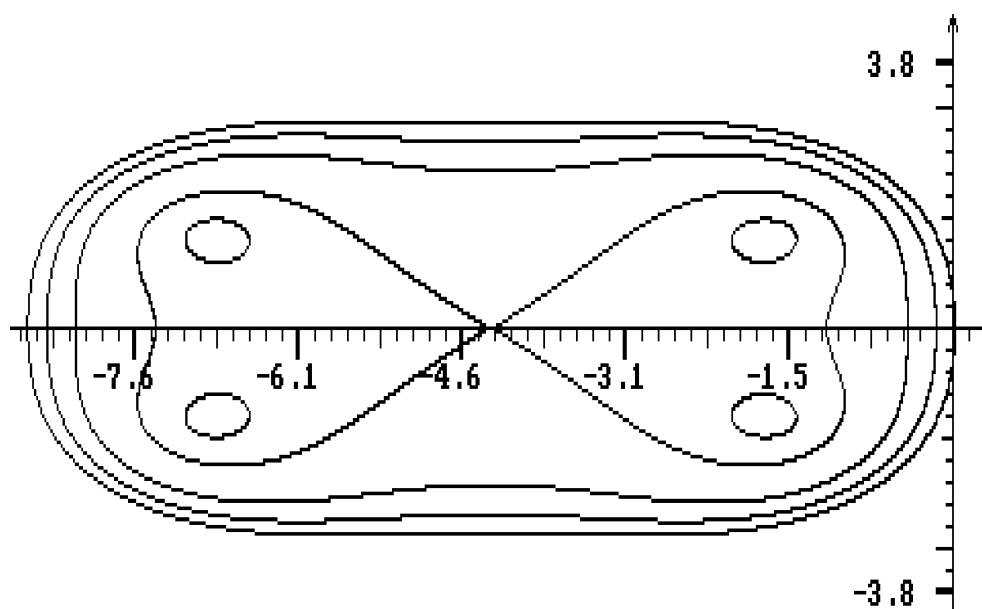


Рис. 33.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 8.663$ ;  $F : 0.2, 0.3, 0.2$   
 $c_2 = 0.42794$ ,  $c_3 = 0.72148 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.41643 \cdot 10^{-2}$

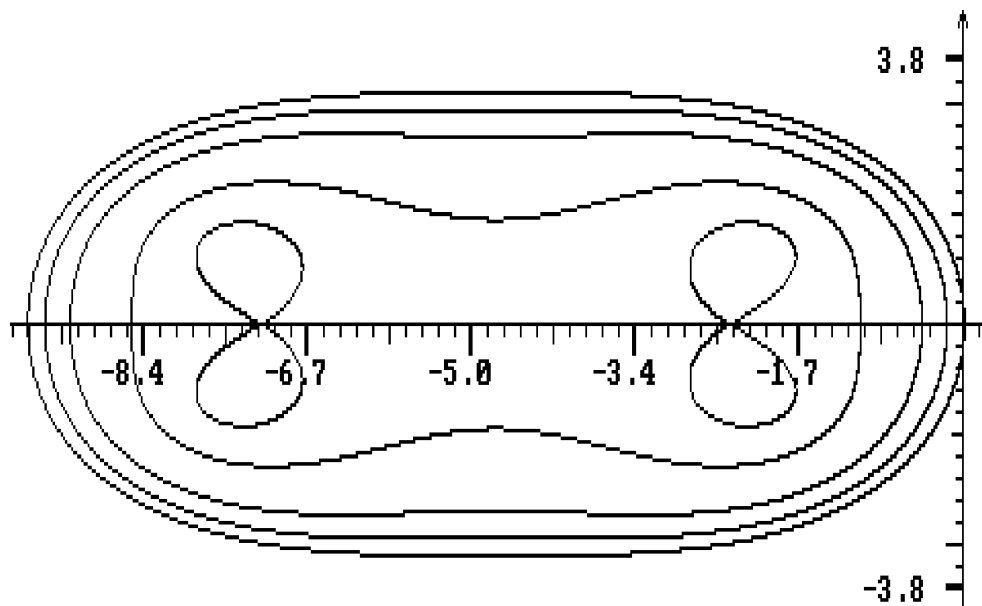


Рис. 34.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 9.600$ ;  $F : 0.1, 0.2, 0.1$   
 $c_2 = 0.38194$ ,  $c_3 = 0.57870 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.30141 \cdot 10^{-2}$

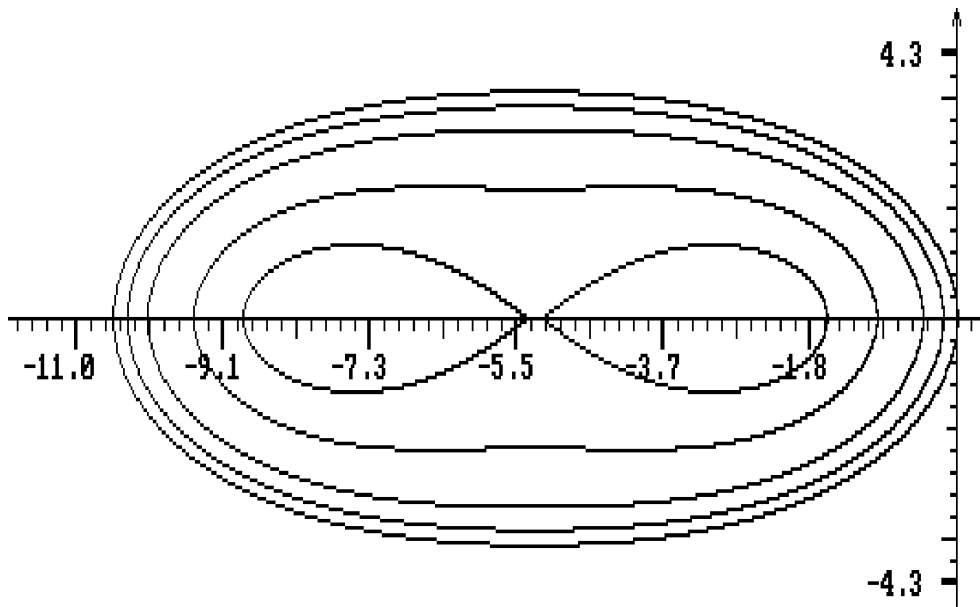


Рис. 35.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 10.53$ ;  $F : 0.0, 0.1, 0.0$   
 $c_2 = 0.34497$ ,  $c_3 = 0.47484 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.22547 \cdot 10^{-2}$

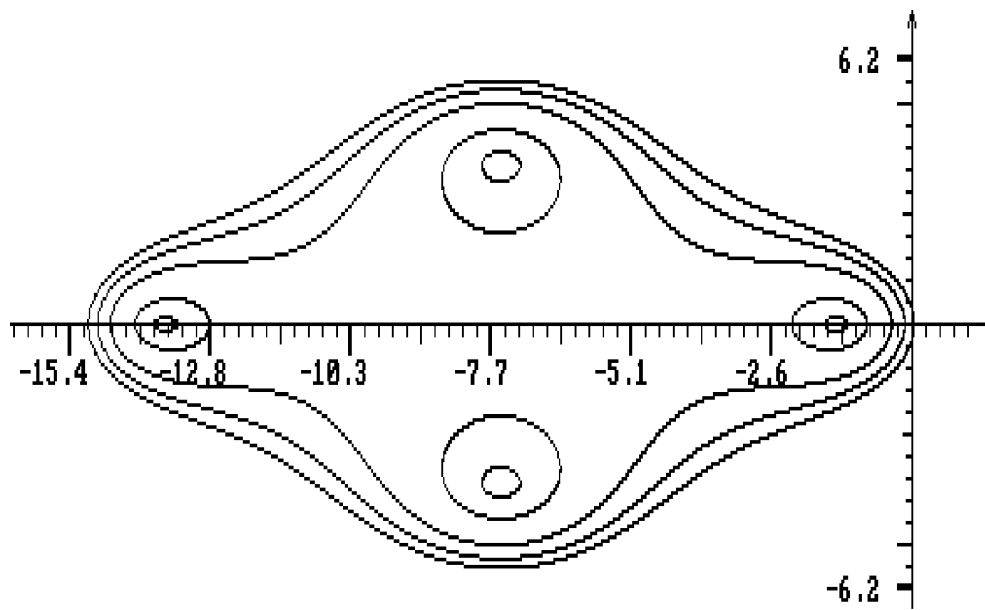


Рис. 36.  $m = 4$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 15.10$ ;  $F : -0.5, -0.4, -0.5$   
 $c_2 = 0.23290$ ,  $c_3 = 0.22077 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.73112 \cdot 10^{-3}$

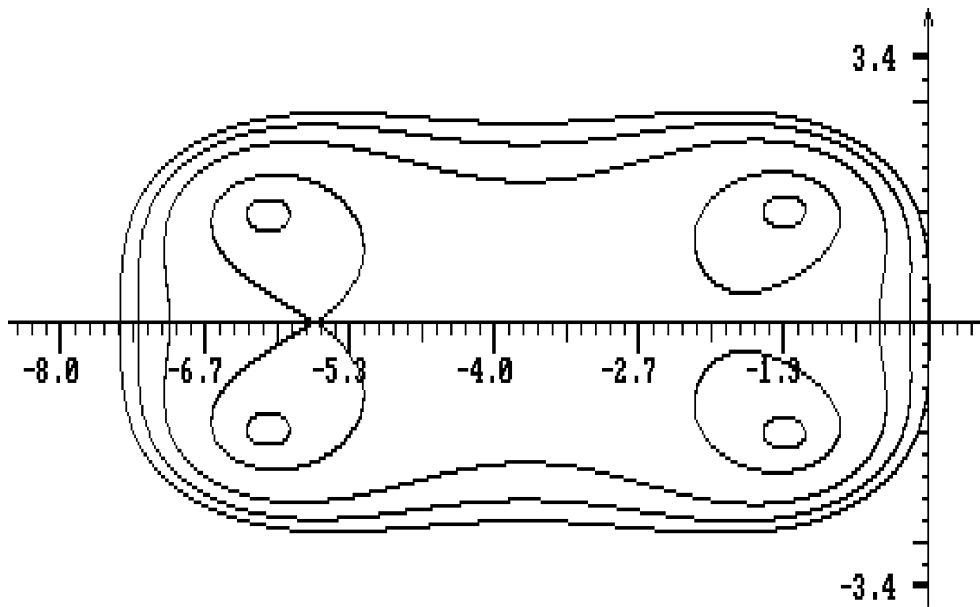


Рис. 37.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 7.475$ ;  $F : 0.4, 0.3$   
 $c_3 = 0.98382 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.66073 \cdot 10^{-2}$

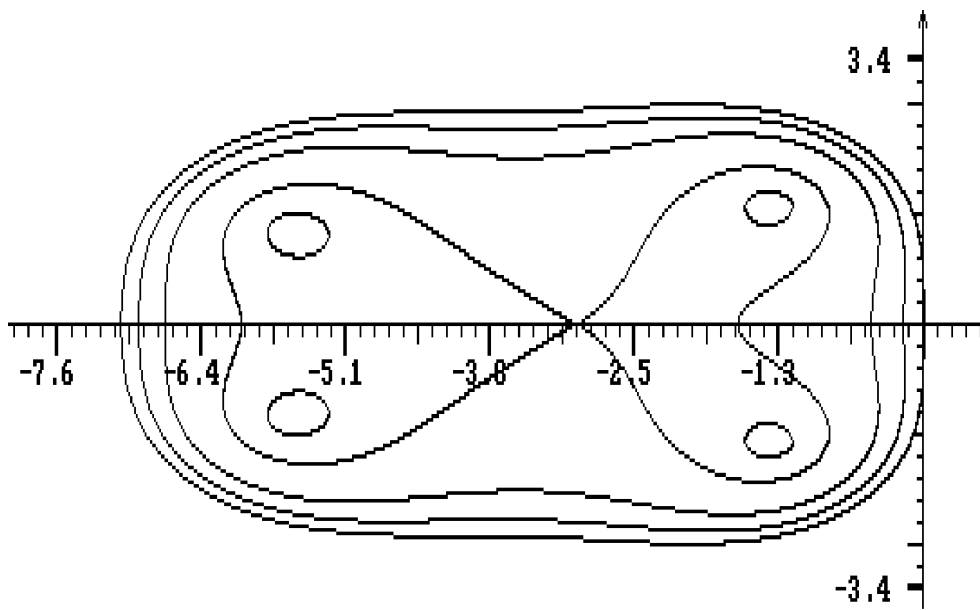


Рис. 38.  $m = 4$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 7.075$ ;  $F : 0.3, 0.2$   
 $c_3 = 0.10416$ ,  $c_4 = 0.75568 \cdot 10^{-2}$

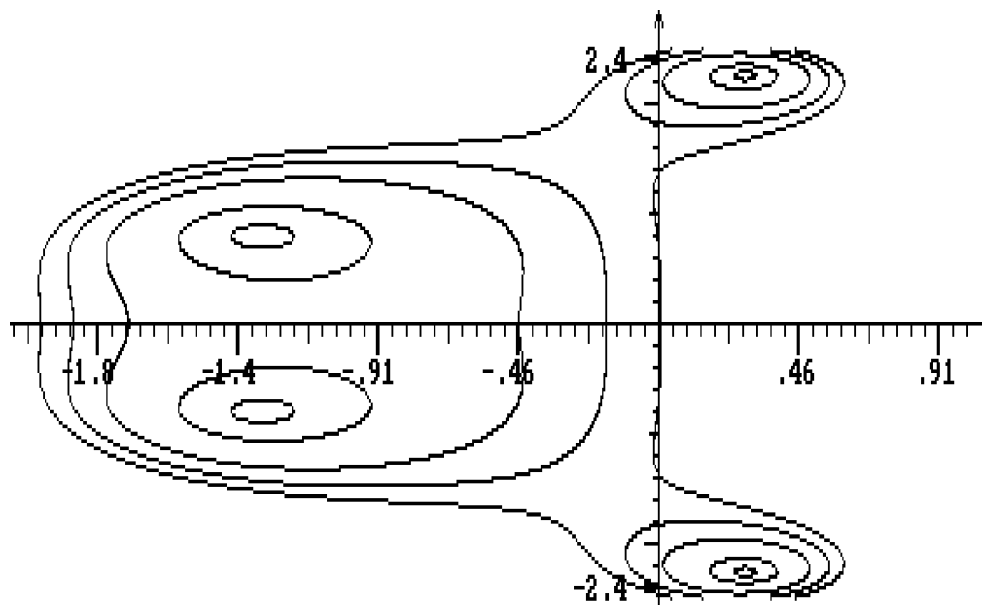


Рис. 39.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 2.019$ ;  $F : 0.4$   
 $c_4 = 0.81385 \cdot 10^{-1}$

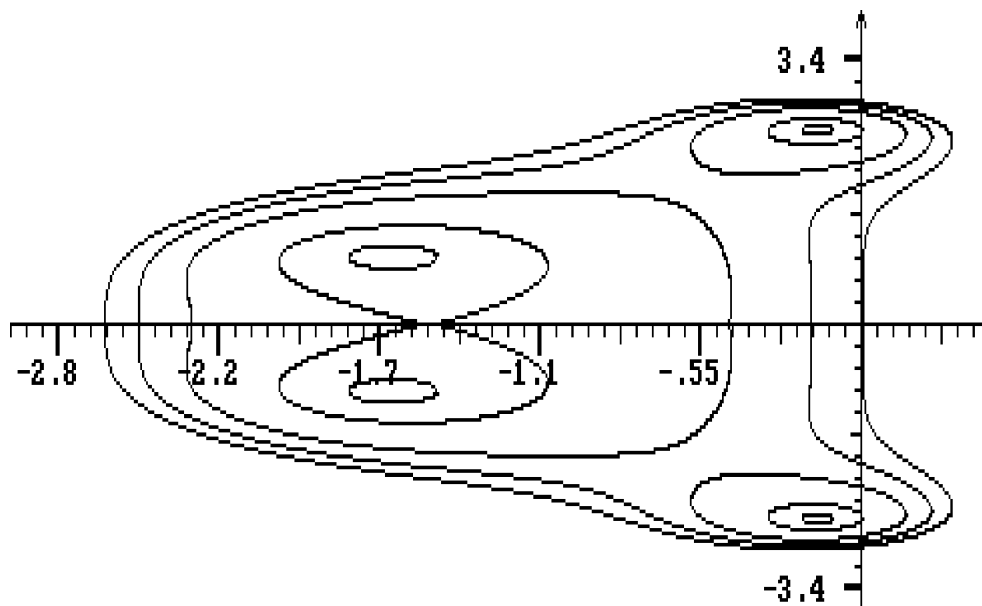


Рис. 40.  $m = 4$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 2.603$ ;  $F : 0.3$   
 $c_4 = 0.46923 \cdot 10^{-1}$

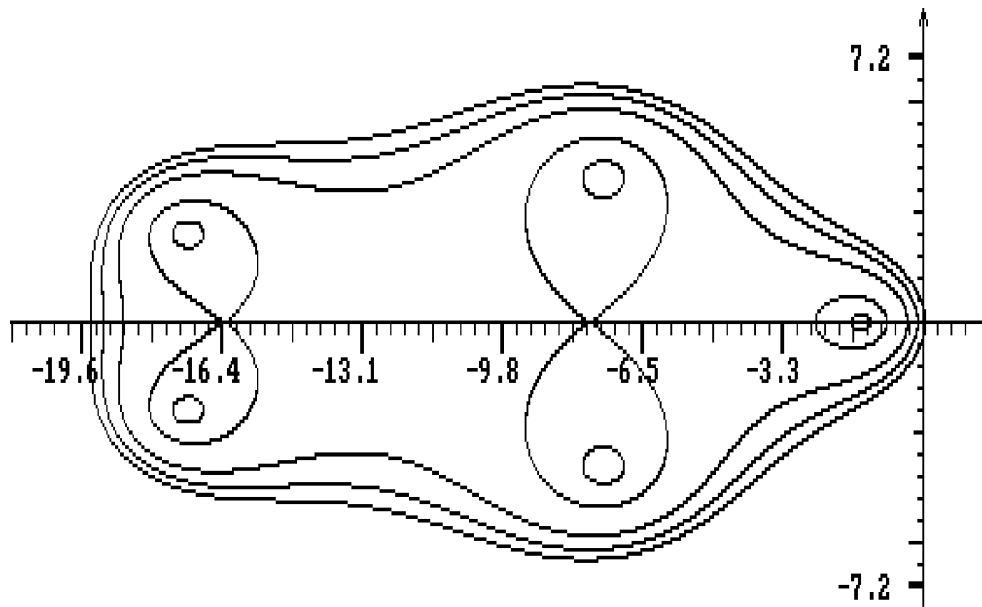


Рис. 41.  $m = 5$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 19.47$ ;  $F : -0.4, -0.3, -0.4, -0.3$   
 $c_2 = 0.25904$ ,  $c_3 = 0.29970 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_4 = 0.15833 \cdot 10^{-2}$ ,  $c_5 = 0.31114 \cdot 10^{-4}$

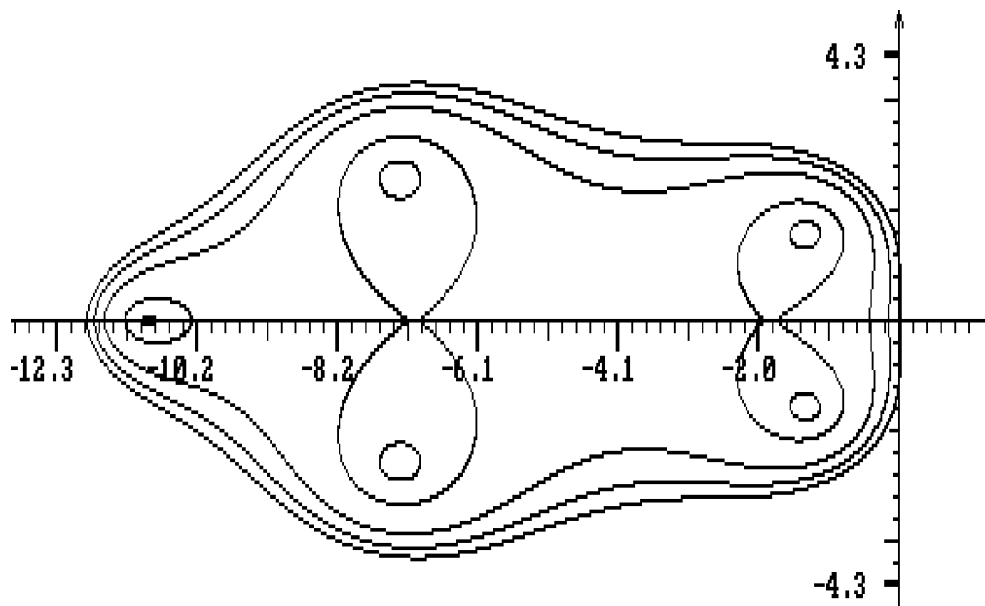


Рис. 42.  $m = 5$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 11.86$ ;  $F : 0.3, 0.4, 0.3, 0.4$   
 $c_2 = 0.50431$ ,  $c_3 = 0.10913$ ,  $c_4 = 0.10526 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_5 = 0.37198 \cdot 10^{-3}$



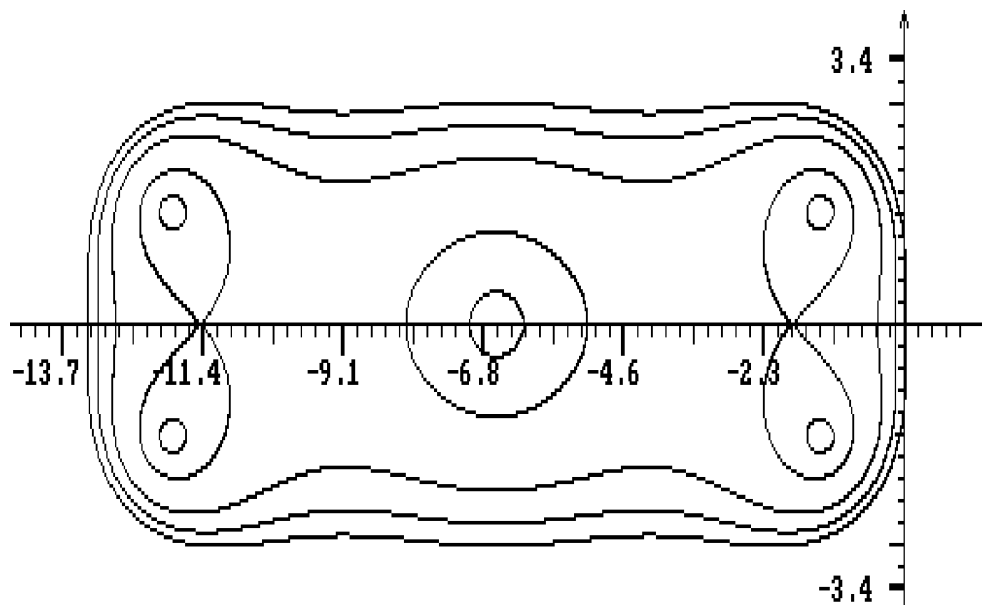


Рис. 43.  $m = 5$ ;  $k = 1$ ;  $\gamma = 13.34$ ;  $F : 0.3, 0.4, -0.4, -0.3$   
 $c_2 = 0.49430$ ,  $c_3 = 0.10044$ ,  $c_4 = 0.85154 \cdot 10^{-2}$ ,  $c_5 = 0.25531 \cdot 10^{-3}$

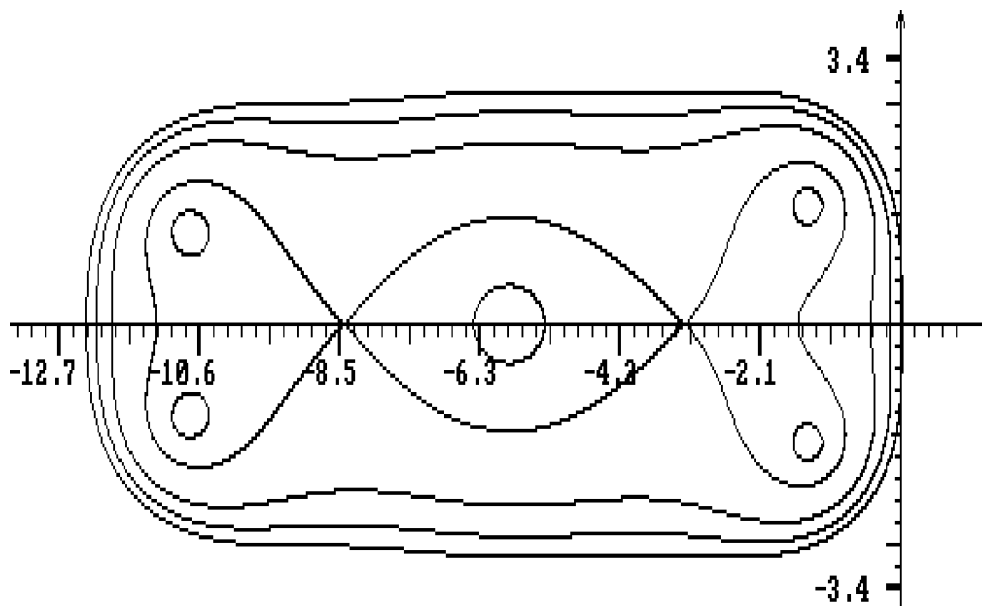


Рис. 44.  $m = 5$ ;  $k = 2$ ;  $\gamma = 12.30$ ;  $F : 0.3, -0.3, -0.2$   
 $c_3 = 0.10891$ ,  $c_4 = 0.10118 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_5 = 0.33481 \cdot 10^{-3}$

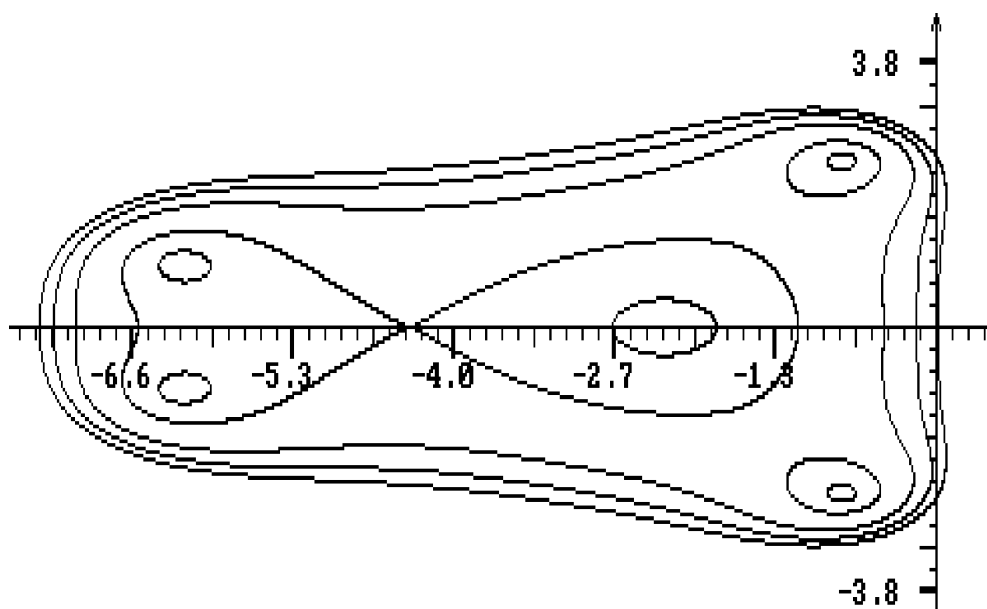


Рис. 45.  $m = 5$ ;  $k = 3$ ;  $\gamma = 7.421$ ;  $F : -0.3, -0.2$   
 $c_4 = 0.27834 \cdot 10^{-1}$ ,  $c_5 = 0.17069 \cdot 10^{-2}$

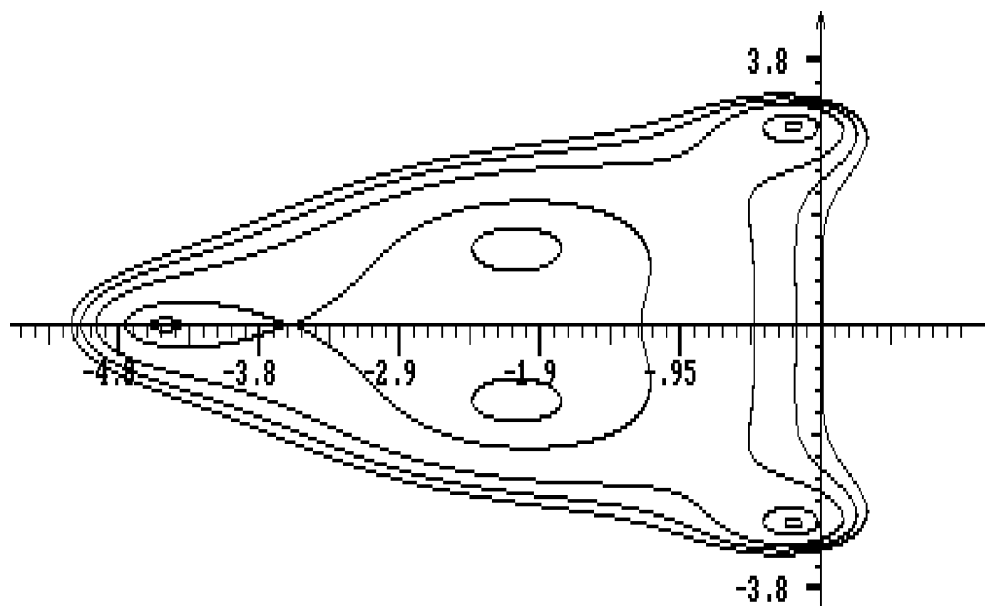
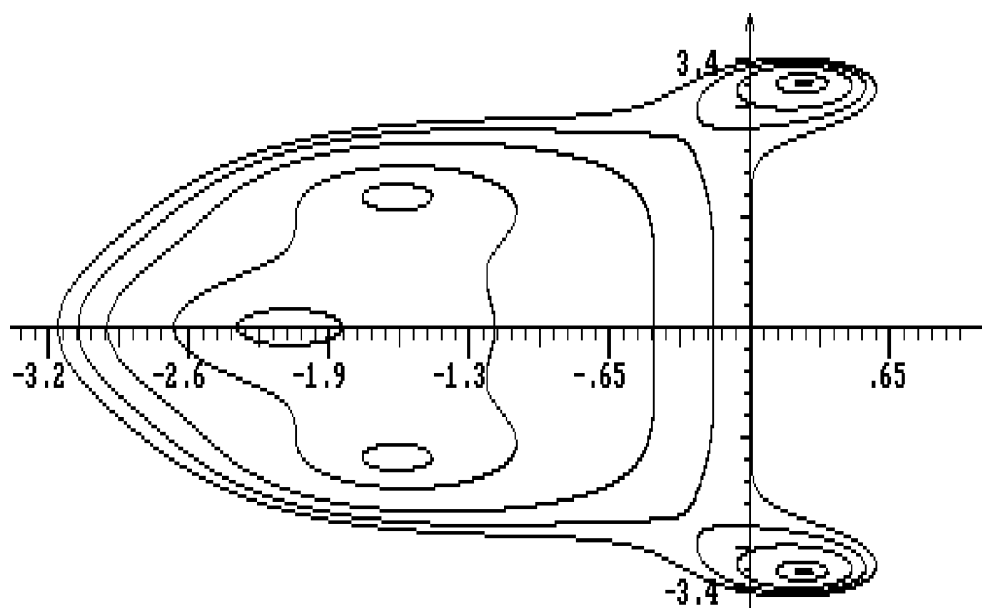
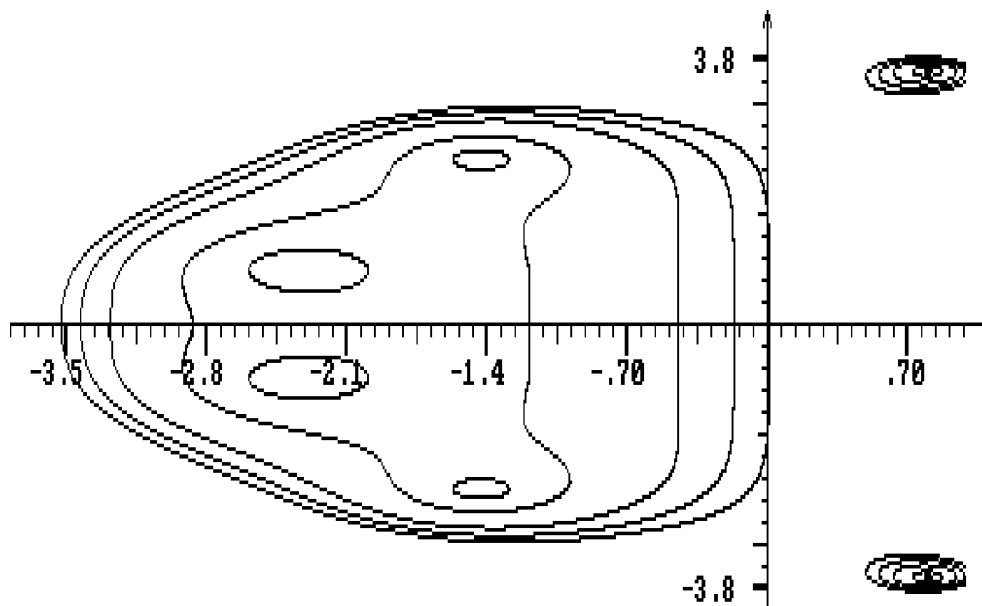
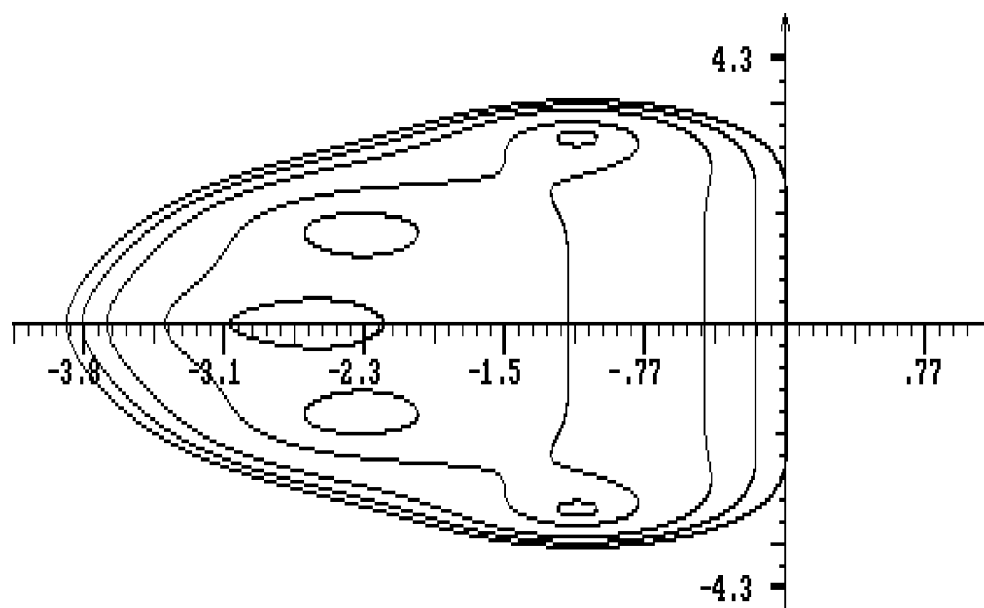
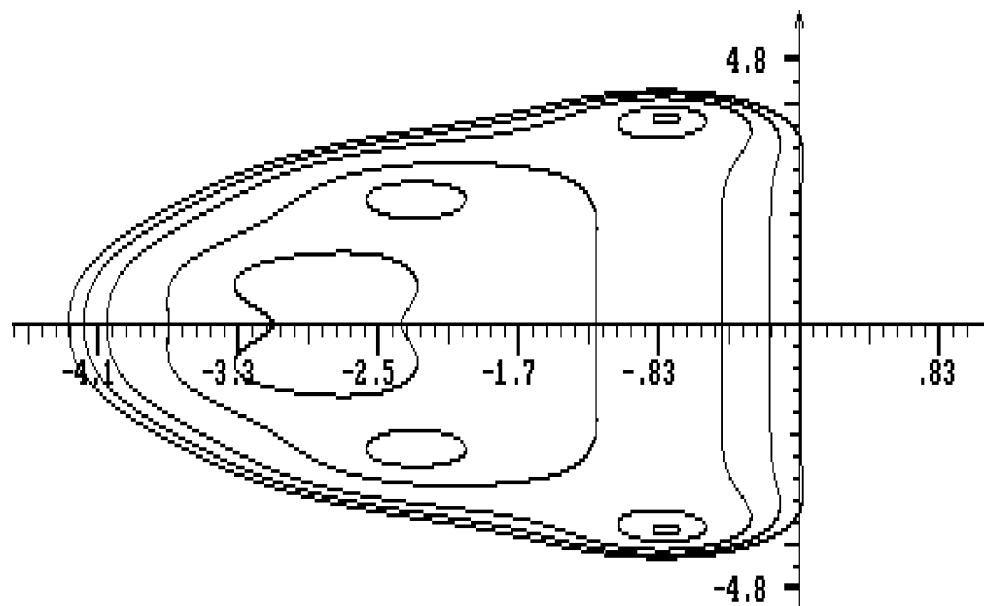
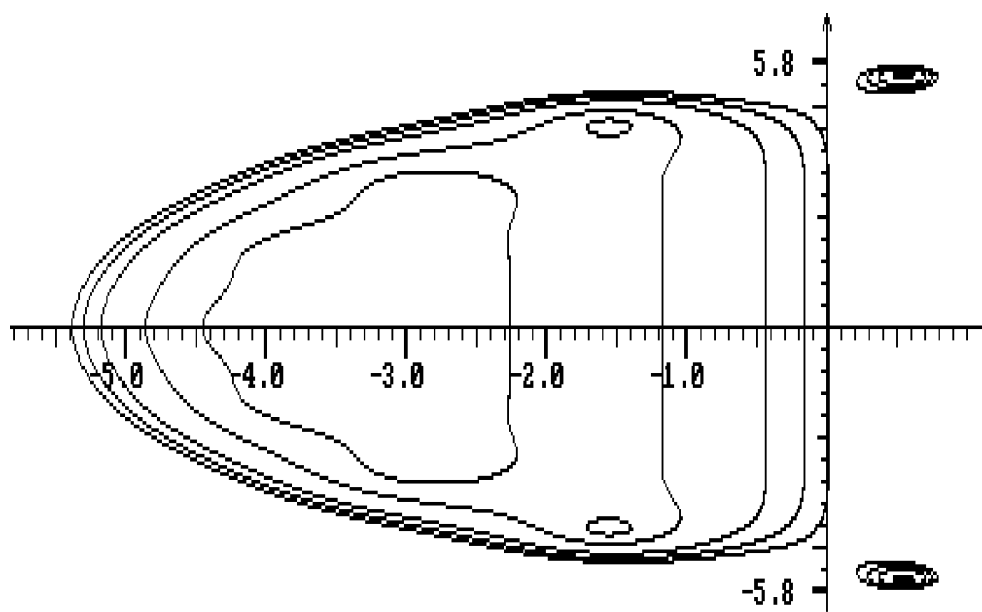
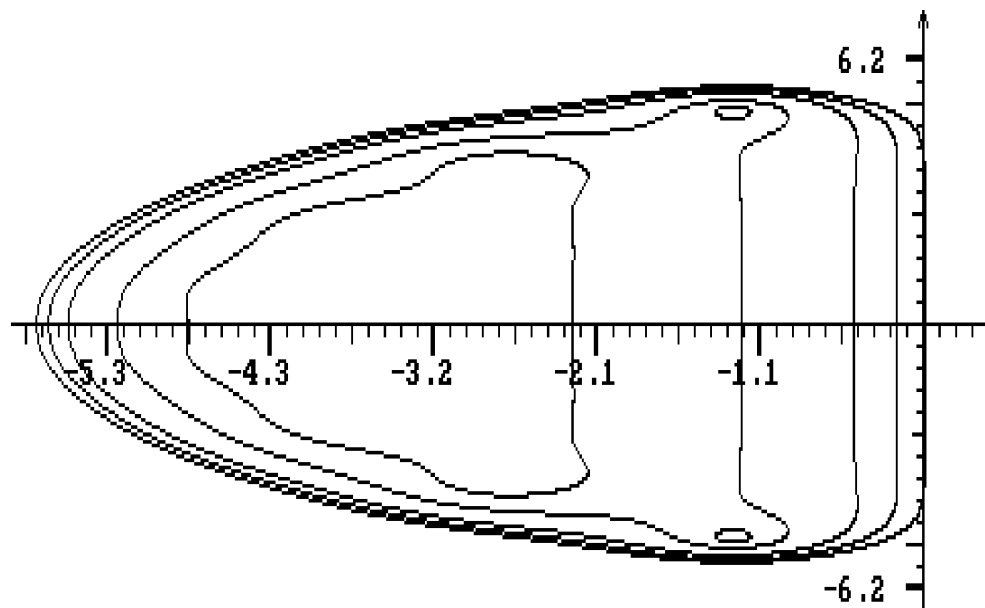


Рис. 46.  $m = 5$ ;  $k = 4$ ;  $\gamma = 5.098$ ;  $F : 0.3$   
 $c_5 = 0.46347 \cdot 10^{-2}$

Рис. 47.  $m = 5$ ;  $k = 5$ ;  $\gamma = 3.217$ Рис. 48.  $m = 6$ ;  $k = 6$ ;  $\gamma = 3.553$ ;

Рис. 49.  $m = 7$ ;  $k = 7$ ;  $\gamma = 3.954$ Рис. 50.  $m = 8$ ;  $k = 8$ ;  $\gamma = 4.314$ ;

Рис. 53.  $m = 11$ ;  $k = 11$ ;  $\gamma = 5.450$ Рис. 54.  $m = 12$ ;  $k = 12$ ;  $\gamma = 5.823$

# Литература

- [1] Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф., Захаров А.Ю., Калиткин Н.Н. О тестировании программ решения обыкновенных дифференциальных уравнений. / Препринт у139, М.: ИПМ АН СССР, 1983.
- [2] Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Издательство Московского университета, 1990.
- [3] Артемьев С.С., Демидов Г.В. Алгоритм переменного порядка и шага для численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР, 1978, т. 238, у3, с. 517 – 520.
- [4] Артемьев С.С., Демидов Г.В. Алгоритм переменного порядка и шага для численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. / Препринт у45, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978.
- [5] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975, т. 1,
- [6] Бобков В.В. Об одном семействе нелинейных разностных схем. // Дифференциальные уравнения, 1977, у11, с. 2086 – 2078.
- [7] Бобков В.В. Новые явные А – устойчивые методы численного решения дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения, 1978, у12, с. 2249 – 2252.
- [8] Бобков В.В. Об одном способе построения методов численного решения дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения, 1983, у7, с. 1115 – 1122.
- [9] Бобков В.В., Мандрик П.А., Репников В.И. Об одном классе разностных схем для дифференциальных уравнений. // Вестник Белорусского ун. – та, 1985, Сер.1, Физ. матем. и мех. у3, с. 31 – 34.
- [10] Боднарчук П.И. Одношаговые итерационные численные методы для исследования жестких задач. // Числ. решение ОДЕ, М.: ИПМ АН СССР, 1988, с. 111 – 123.

- [11] Виноград Р.Э. Об одном критерии неустойчивости в смысле Ляпунова решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР, 1952, т. 84, с. 201 – 204.
- [12] Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
- [13] Демидов Г.В., Новиков Е.А. Экономичный алгоритм интегрирования нежестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Числ. методы мат. физики, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979, с. 69 – 83.
- [14] Демидов Г.В., Новиков Е.А. Программа STEK (модификация программы MERSON). / Препринт у313, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981.
- [15] Демидов Г.В., Новиков Е.А. О контроле точности явных формул типа Рунге – Кутта второго и третьего порядков аппроксимации с помощью формул более низкого порядка. // Числ. методы мех. сплош. среды, Новосибирск, 1984, т. 15, у6, с. 59 – 74.
- [16] Демидов Г.В., Новиков Е.А. Оценка ошибки одношаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. // Числ. мет. мех. сплош. среды, Новосибирск, 1985, т. 16, у1, с. 27 – 39.
- [17] Демирчян К.С., Ракитский Ю.В. О фильтрации составляющих с большими производными в динамических системах. / Препринт у3, М.: ИВТАН СССР, 1984.
- [18] Дубовицкий А. Я., Дубовицкий В. А. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений неизотермической кинетики с использованием медленных комбинаций. / Препринт, Черноголовка: ИХФ АН СССР, 1982
- [19] Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.
- [20] Дуракова В.К., Новиков В.А., Новиков Е.А. Явные методы типа Рунге – Кутта первого порядка точности с заданным размером интервала устойчивости. // ЖВМ и МФ, 1988, т. 28, у4, с. 603 – 607.
- [21] Захаров А.Ю. Некоторые результаты сравнения эффективности методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. / Препринт у125, М.: ИПМ АН СССР, 1979.

- [22] Захаров А.Ю., Кальянова Н.А., Капуста В.О., Шульмина Т.П. О программах, комплексах и пакетах программ для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. / Препринт у160, М.: ИПМ АН СССР, 1984.
- [23] Кальянова Н, А., Захаров А.Ю., Маркачев Ю.Е. LSODA – пакет программ для численного решения жестких и нежестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. / Инструкция, М.: ИПМ АН СССР, 1988.
- [24] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984.
- [25] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения, Минск: Наука и техника, 1982.
- [26] Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
- [27] Лебедев В.И. Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений. / Препринт у177, М.: ОВМ АН СССР, 1987.
- [28] Локуциевский В.О., Локуциевский О.В. Применение чебышевских параметров для численного решения некоторых эволюционных задач. / Препринт у98, М.: ИПМ АН СССР, 1984.
- [29] Новиков Е.А. Программа для решения нежестких систем обыкновенных уравнений (TRAP) П005215. // Алгоритмы и программы, 1982, М.: ВНТИцентр, у3(47).
- [30] Новиков Е.А. Программа для решения нежестких систем обыкновенных уравнений (MERS) П005217. // Алгоритмы и программы, 1982, М.: ВНТИцентр, у3(47).
- [31] Новиков Е.А. Некоторые эффективные алгоритмы численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. / Автореферат дисс... канд. физ. – мат. наук, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.
- [32] Новиков В.А., Новиков Е.А. Контроль устойчивости явных одношаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР, 1984, т. 277. у5, с. 1058 – 1062.
- [33] Новиков Е.А. Построение алгоритма интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений на неоднородных схемах. // ДАН СССР, 1984, т. 278, у2, с. 272 – 275.



- [34] Новиков В.А., Новиков Е.А. Два эффективных алгоритма численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. / Препринт у5 – 84, Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1984.
- [35] Новиков В.А., Новиков Е.А. Повышение эффективности алгоритмов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений за счет контроля устойчивости. // ЖВМ и МФ, 1985, т. 25. у7. с. 1023 – 1030.
- [36] Новиков В.А., Новиков Е.А. Об алгоритме переменной структуры на основе явных формул типа Рунге – Кутты первого и второго порядков точности. / Препринт у112, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
- [37] Новиков В.А., Новиков Е.А. Явные методы для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. / Препринт у629, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
- [38] Новиков Е.А., Шитов Ю.А. Исследование  $(m, k)$  – методов решения жестких систем с одним и двумя вычислениями правой части. / Препринт у15, Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1987.
- [39] Новиков Е.А., Шитов Ю.А. Алгоритм интегрирования жестких систем на основе  $(m, k)$  – метода второго порядка точности с численным вычислением матрицы Якоби. / Препринт у20, Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1988.
- [40] Новиков В.А., Новиков Е.А. О построении явных методов типа Рунге – Кутта с расширенными областями устойчивости. / Препринт у9, Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1988.
- [41] Новиков В.А., Новиков Е.А. Численное конструирование областей устойчивости явных методов. / Препринт у15, Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1988.
- [42] Новиков Е.А., Дуракова В.К. Алгоритм переменного порядка и шага на основе явной шестистадийной схемы типа Рунге – Кутта. / Препринт у11, Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1988.
- [43] Новиков В.А., Новиков Е.А., Шокин Ю.И. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с небольшой точностью. // Вопросы качественной теории диф. уравнений, Новосибирск: Наука, 1988. с. 29 – 35.
- [44] Новиков В.А., Новиков Е.А. Одношаговые методы интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. / Красноярск: КГУ, 1989, ч.1, 1989.

- [45] Новиков В.А., Новиков Е.А., Дуракова В.К. Автоматизация построения на ЭВМ явных методов первого и второго порядков точности с адаптивной областью устойчивости. / Препринт у17 и у18. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1989.
- [46] Новиков Е.А. Численные методы решения дифференциальных уравнений химической кинетики. // В кн.: Матем. методы в хим. кин., Новосибирск: Наука, 1990, с. 53 – 68.
- [47] Новиков Е.А., Бабушок В.И. Комбинированный численный алгоритм расчета кинетики взрывных процессов. // ФГВ, 1990, с. 85 – 93.
- [48] Новиков В.А., Новиков Е.А. Одношаговые методы интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Явные методы для решения жестких систем. / Красноярск: КГУ, ч.2, 1990.
- [49] Новиков Е.А. Одношаговые безитерационные методы решения жестких систем. / Автореферат дисс... доктора физ. – мат. наук, Новосибирск, 1991. – 32с.
- [50] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
- [51] Ракитский Е.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
- [52] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
- [53] Слоневский Р.В. Новые дробно – рациональные численные методы решения жестких систем. // Числ. реш. ОДЕ, М.: ИПМ АН СССР, 1988, с. 124 – 138
- [54] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта, М.: Мир, 1979.
- [55] Шилов Г.Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). М.: Наука, 1972.
- [56] Ширококов Н.В. К определению жестких дифференциальных задач. // ЖВМ и МФ, 1984, т. 24, у4, с. 599 – 601.
- [57] Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1978.
- [58] Федоренко Р.П. О регулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР, 1983, т. 273, у6, с. 1318 – 1322.

- [59] Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
- [60] Юань Чжао – Дин. Некоторые разностные схемы решения первой краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Дисс. МГУ, 1958.
- [61] Ansorge R., Tornig W. Zur stabilitat des Nystromschen verfahren. // Z. Angew. Math. Mech., 1960, 40, p. 568 – 570.
- [62] Bakker M. Analytic aspects of a minimax problem (Dutch). / Report TN 62, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1971.
- [63] Beentjes P.A., Dekker K.A. 5th order, 6th stage Runge – Kutta formula with optimal stability boundary(Dutch). / Report NR 27. Amsterdam: Mathemastisch Centrum, 1972.
- [64] Beentjes P.A. Some special formulas of the Englund class of fifth – order Runge – Kutta schemes./ Report NW14/74, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1974.
- [65] Bettis D.G. Numerical integration of products of Fourier and ordinary polynomials. // Numer. Math., 1970, y14, p. 421 – 434.
- [66] Bettis D.G. Runge – Kutta algorithms for oscillatory problems. // Z. Angew. Math. Phys., 1979, y30, p. 699 – 704.
- [67] Burrage K. Order and stability properties of explicit multivalued methods. // Appl.Numer.Math., 1985, y1, p. 363 – 379.
- [68] Butcher J.C. On the convergence of numerical solutions to ordinary differential equations. // Math.Comp., 1966, y20, p. 1 – 10.
- [69] Butcher J.C. The numerical analysis of ordinary differential equations, Runge – Kutta and general linear methods. // New York: Wiley, 1987.
- [70] Byrne G.D., Hindmarsh A.C. Stiff ODE solvers: a review of current and coming attractions. // J. of Comput. Physics, 1986, y70, p. 1 – 62.
- [71] Ceschino F., Kuntzman J. Numerical solution of initial value problems. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, A – New Jersey, 1966.
- [72] Chawla M.M., Sharma S.R. Intervals of periodicity and absolute stability of explicit Nystrom methods for  $y'' = f(t, y)$ . // BIT, 1981, y21, p. 455 – 464.
- [73] Chawla M.M., Sharma S.R. Families of fifth – order nystrom methods for  $y'' = f(x, y)$  and intervals of periodicity. // Computing, 1981, y26, p. 247 – 256.

- [74] Chawla M.M., Sharma S.R. Absolute stability of explicit Runge – Kutta – Nystrom methods for  $y'' = f(x, y, y')$ . // J. Comp. Appl. Math., 1984, y10, p. 163 – 168
- [75] Chawla M.M. Numerov made explicit has better stability. // BIT. 1984, y24, p. 117 – 118.
- [76] Chawla M.M. On the order and attainable intervals of periodicity of explicit Nustrom methods for  $y'' = f(t, y)$ . // SIAM J.: Numer. Anal., 1985, y22, p. 127 – 131.
- [77] Chawla M.M. A new class of explicit two – step fourth – order methods for  $y'' = f(t, y)$  with extended intervals of periodicity. // J. Comput. Appl. Math., 1986, y14, p. 467 – 470.
- [78] Chawla M.M., Rao P.S. Phase – lag analysis of explicit Nystrom methods for  $y'' = f(x, y)$ . // BIT, 1986, y26, p. 64 – 70.
- [79] Chawla M.M., Rao P.S. A numerov – type method with minimal phaselag for the integration of second – order periodic initial value problems ii.explicit method. // J. Comp. Appl. Math., 15, 1986, p. 327 – 329.
- [80] Chawla M.M., Rao P.S. An explicit sixth – order method with phase – lag of order eight for  $y'' = f(t, y)$ . // J. Comp. Appl. Math., 1987, y17, p. 365 – 368.
- [81] Crane A.L., Klopfenstein A.W. A predictor – corrector algorithm with an increased range of absolute stability. // J. ACM, 1965, 12, p. 227 – 241.
- [82] Dalquist G. A special stability problem for linear multistep methods. // BIT, 1963, v. 3, p. 23 – 43.
- [83] Dekker K. Generalized Runge – Kutta methods for coupled systems of hyperbolic differential equations. // J. Comp. Appl. Math., 1977, y3, p. 221 – 233.
- [84] Dekker K. Stability of linear multistep methods on the imaginary axis. // BIT, 1981, y21, p. 66 – 69.
- [85] Du Fort E.C., Frankel S.P..Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations. // M.T.A.C., 1953, y7, p. 135 – 152.
- [86] England R. Automatic methods for solving systems of ordinary differential equations. // Ph.Thesis, Univ. of Liverpool, 1967.
- [87] England R. Error estimates for Runge – Kutta type solutions to systems of ODE's. // Comput.J., 1969, 12, p. 166 – 169.

- [88] Enright W.H., Hull T.E., Lindberg B. Comparing numerical methods for the solutions of stiff systems of ODE's. // BIT, 1975, y15, p. 10 – 48.
- [89] Fehlberg E. Classical fifth, sixth, seventh and eight order Runge – Kutta formulas with stepsize control. // NASA T.R., 1968.
- [90] Fehlberg E. Klassische Runge – Kutta – Formeln funfter und siebenter Ordnung mit Schrittweitenkontrolle. // Computing, 1969, 4, s. 93 – 106.
- [91] Fehlberg E. Low order classical Runge – Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems. // NASA T.R., 1969.
- [92] Filippi S., Obermann J. Ein Program zur Aufstellung des Stabilitätspolynoms und zur Ermittlung des Bereiches der absoluten Stabilität von Runge – Kutta und Prediktor – Korrektor – Verfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. // Angewandte Informatik, 1980, y10, p. 409 – 416.
- [93] Filippi S. Bereiche der absoluten Stabilität zu den Runge – Kutta – Fehlberg – Formelpaaren fuer gewöhnlichen Differentialgleichungen. // ZAMM, 1985, y65, p. 312 – 314.
- [94] Frank W. Solution of linear systems by Richardson's method. // J. Assoc. Comput. Mach., 1960, y7, p. 274 – 286.
- [95] Franklin J.N. Numerical stability in digital and analogue computation for diffusion problems. // J.Math. Phys., 1959, y37, p. 305 – 315.
- [96] Gear C.W. Hybrid methods for initial value problems in ordinary differential equations. // SIAM J. Numer.Anal., 1965, y2, p. 69 – 86.
- [97] Gear C.W. The automatic integration of stiff ordinary differential equations. // Infor. Proc., 1969, p. 187 – 193.
- [98] Gear C.W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Prentice Hall, Englewood Cliffs N.Y., 1973.
- [99] Gentzsch W., Schluter A. Ueber ein Einschrittverfahren mit zyklischer Schrittweitenänderung zur Lösung parabolischer Differentialgleichungen. // ZAMM, 1978, y58, p. t415 – t416.
- [100] Gragg W.B., Stetter H.J. Generalized multistep predictor – corrector methods. // J. Assoc. Comput. Mach., 1964, y11, p. 188 – 209.
- [101] Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. Wiley, New York, 1962.

- [102] Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. New York – London: John Wiley & Sons., Inc. 1962.
- [103] Hull T. E., Lindberg W. E., Fellen B. M., Sedgwick A. E. Computing numerical methods for ordinary differential equations // SIAM, J. Numer. Anal., 1972, v. 9, p. 603 – 637.
- [104] Jeltsch R. Stability on the imaginary axis and A-stability of linear multistep methods. // BIT, 1977, y18, p. 170 – 174.
- [105] Jeltsch R. Complete characterization of multistep methods with an interval of periodicity for solving  $y'' = f(x, y)$ . // Math. Comp., 1978, y32, p. 1108 – 1114.
- [106] Jeltsch R., Nevanlinna O. Largest disk of stability of explicit Runge – Kutta methods. // BIT, 1978, y18, p. 500 – 502.
- [107] Jeltsch R., Nevanlinna O. Stability and accuracy of time discretizations for initial value problems: / Report HTKK – MAT – A187, Helsinki: Univ. of Technology, 1981.
- [108] Jeltsch R., Nevanlinna O. Stability of explicit time discretizations for solving initial value problems. // Num. Math., 1981, y37, p. 61 – 91.
- [109] Kinnmark I.P.E., Gray W.G. One – step integration methods with maximum stability regions. // Math. Comput. Simulation, 1984, y16, p. 87 – 92.
- [110] Kinnmark I.P.E., Gray W.G. One – step integration methods of thirdfourth order accuracy with large hyperbolic stability limits. // Math. Comput. Simulation, 1984, y16, p. 181 – 184.
- [111] Kinnmark I.P.E., Gray W.G. Fourth – order accurate one – step integration methods with large imaginary stability limits. // Numer. Math. for Partial Differential Equations, 1986, y2. p. 63 – 70.
- [112] Kreiss H.O. Difference methods for stiff ordinary differential equations. // SIAM J.Numer. Anal., 1978, y15, p. 21 – 58.
- [113] Krogh F.T. Predictor – corrector methods of high order with improved stability characteristics. // J. ACM. 1966, y13, p. 374 – 385.
- [114] Lambert J.D., Shaw B. On the numerical solution of  $y' = f(t, y)$  by a class of formulas based on rational approximation. // Math. Comp., 1965, y19, p. 456 – 462.
- [115] Lambert J. D. Computational methods in ordinary differential equations, Wiley, New York, 1973.
- [116] Lapidus L., Seinfeld J. H. Numerical solution of ordinary differential equation, Academic Press, New York, 1971.

- [117] Lawrence E. May. A note on the maximal real interval of stability of on explicit Runge – Kutta method. // Carleton Math., Ser.A, y223, 1988, p. 1 – 4.
- [118] Lomax H. On the construction of highly stable, explicit numerical methods for integrating coupled ODE's with parasitic eigenvalues. / NASA Technical Note NASAIN d/4547, 1968.
- [119] Merson R.H. An operational methods for integration processes. // Proc. of Symp. on Data Processing. Weapons Research Establishmrnt. Salisbury, Australia. 1957.
- [120] Metzger C.L. Methodes de Runge – Kutta de rang superieure a i'ordre. // Thesis (Troisieme cycle), Univ. de Grenoble, 1967.
- [121] Novikov V.A., Novikov E.A. On the accuracy and stability control of one – step methods of integration of ordinary differential equations. // In.: Proc. BAIL – III Conf., Bool Press, 1984, p. 81 – 93.
- [122] Novikov V.A., Novikov E.A. Explicit methods for stiff systems of ordinary differential equations. // In.: Proc. II Conf.: Numerical analysis and applications held in Benin City, Nigeria, Bool Press, 1986.
- [123] Novikov V.A., Novikov E.A. Explicit methods of Runge – Kutta type with adaptive stability Region. //In.:Proc.BAIL – V Conf., Bool Press, 1988, p. 269 – 276.
- [124] Novikov E.A. Application of explicit Runge – Kutta methods to solve stiff ODE's. // Advances in Modeling & Analysis, A, AMSE Press, v.16, y1, 1992, p. 23 – 35.
- [125] Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York – London: Academic Press, 1970.
- [126] Richardson L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stress in a massory dam. // Philos. Trans. Roy. Soc., London, 1910, ser. A, 210, p. 307 - 357.
- [127] Richardson L.F. The differed approach to the limit. 1: Single lattice. // Philos. Trans. Roy. Soc., London, 1927, ser. A, 226, p. 299 - 349.
- [128] Riha W. Optimal stability polynomials. // Computing, 1972, y9, p. 37 – 43.
- [129] Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations. // Computer, 1963, y5, p. 329 – 330.

- [130] Shampine L.F. Implementation of Rosenbrock methods. //ACM Transaction on Math. Software, 1982, V.8, y2, p. 93 – 113.
- [131] Shintani H. On a one – step method of order 4. // J. Sei. Hiroshima Univ. 1966. Ser. A – 1 Math., 30, p. 91 – 107.
- [132] Shintani H. Two – step processes by one0step methods of order 3 and of order 4. // J. Sei. Hiroshima Univ., 1966, Ser. A–1 Math., 30, p. 183 - 195.
- [133] Showalter K., Noyes R.M., Bar – Eli K. A modified oregonator model, exhibiting complicated limit cycle behaviour in a flow system. // J. Chem. Phys., 1978, v. 69, p. 2514.
- [134] Sommeijer B.P., Verwer G.D. A performance evaluation of a class of Runge – Kutta – Chebyshev methods for solving semi – discrete parabolic differential equations. / Report NW 91/80, Amsterdam: Math.centrum, 1980.
- [135] Sommeijer B.P., Van der Houwen P.J. On the economization of stabilized Runge – Kutta methods with applications to parabolic initial value problems. // ZAMM, 1981, y61, p. 105 – 114.
- [136] Sonneveld P., van Leer B. A minimax problem along the imaginari axis. // Nieuw Archief voor Wiskunde(4), 1985, y4, p. 19 – 22.
- [137] Stetter H. J. Improved absolute stability of predictor – corrector schemes. // Computing, 1966, y3, p. 286 – 296.
- [138] Van der Houwen P.J. One – step methods for linear initialvalue problems. // ZAMM, 1971, y51, p. t59 – t60.
- [139] Van der Houwen P.J. Explicit Runge – Kutta methods with increased stability boundaries. // Numer. Math., 1972, y20, p. 149 – 164.
- [140] Van der Houwen P.J. Construction of integration formulas for initial – value problems. North – Holl and Amsterdam, 1977.
- [141] Van der Houwen P.J. Stabilized Runge – Kutta methods for second – order differential equations without first derivatives. // SIAM J. Numer. Anal., 1979, y16, p. 523 – 537.
- [142] Van der Houwen P.J. Modified Nystrom methods for semi – discrete hyperbolic differential equations. // SIAM J. Numer. Anal. 1981, y18, p. 1081 – 1097.
- [143] Van der Houwen P.J. On the time integration of parabolic differential equations. //In: G.A.Watson (ed.) Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics, New York: Springer, 1981, y912, p. 157 – 168.



- [144] Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P. A special class of multistep Runge – Kutta methods with extended real stability interval. // IMA J. Numer. Anal., 1982, y2, p. 183 – 209.
- [145] Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P. Predictor – corrector methods with improved absolute stability regions. // IMA J. Numer. Anal. 1983, y3, p. 417 – 437.
- [146] Verwer J.D. A class of stabilized three – step Runge – Kutta methods for the numerical integration of parabolic equations. // J. Comput. Appl. Math., 3, 1977, p. 155 – 166.
- [147] Verwer J.D. An implementation of a class of stabilized explicit methods for the integration of parabolic equations. // ACM Trans. Math. Software, 1980, y3, p. 188 – 205.
- [148] Verwer J.D. A note on a Runge – Kutta – Chebyshev method. // ZAMM, 1982, y62, p. 561 – 563.
- [149] Vichnevetsky R. Stability charts in the numerical approximation of partial differential equations. // Math. Comput. Simulation, 1979, y16, p. 170 – 177.
- [150] Vichnevetsky R. New stability theorems concerning one – step numerical methods for ordinary differential equations. // Math. Comput. Simulation, 1983, y25, p. 199 – 205.
- [151] Wambecq A. Some properties of rational methods for solving ordinary differential equations. // Lect. Notes Math., 1979, y765, p. 352 – 365.
- [152] Wanner G. Letter to S.P.Norsett and unpublished communications to P.Kaps and A.Wolfbrandt. 1973.