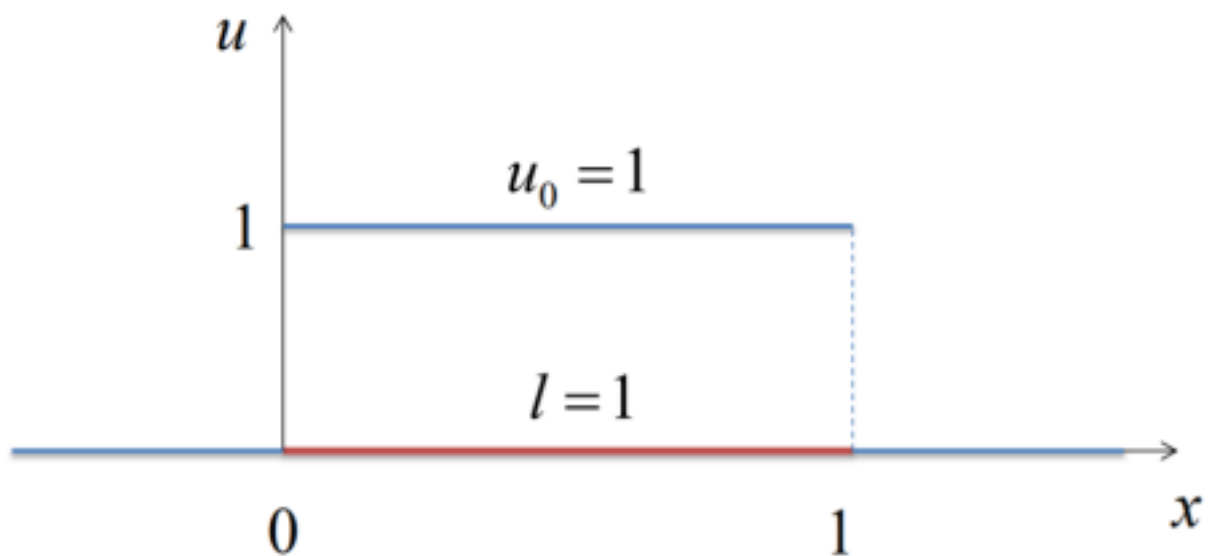


## Домашнее задание №3 (MPI)

### Задача о распараллеливание уравнения теплопроводности

#### Постановка задачи

Решить одномерное однородное уравнение теплопроводности с использование средств распараллеливания MPI.



Стержень длиной  $l = 1$  в момент времени  $t_0 = 0$  имеет температуру

$u_0 = 1$ . Температура окружающей среды поддерживается равной 0.

Начальное условие:  $u(x, 0) = u_0$ .

Граничное условие:  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

Начальное распределение температуры задаётся на 0 процессе и в конце алгоритма распределения температуры собираются на 0 процесс.

Необходимо решить одномерное однородное уравнение теплопроводности, которое представлено в виде конечно разностной схемы:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k\tau}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$\frac{k\tau}{h^2} < 1 \Rightarrow \tau < \frac{h^2}{k}$$

### Задания

- 1) проверка правильной работы алгоритма:  
реализовать параллельную версию алгоритма и получить  
распределение температуры вдоль стержня на момент времени  $T = 0.1$ , используя следующие параметры:  $k = 1$  (коэффициент теплопроводности),  $h = 0.02$  (шаг по пространству);  $\Delta t = 0.0002$  (шаг по времени).  
Вычислить значения температуры в 11-ти точках длиной 0.1 включая начало (0, 0.1, 0.2, ..., 1) и сравнить полученные значения с точным решением:

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-k\pi^2(2m+1)^2 \frac{t}{l^2}\right)}{2m+1} \sin\left(\frac{\pi(2m+1)x}{l}\right) \quad 2)$$

- сравнить время работы программы для (1,2,4,8,16,24) процессов и разного кол-ва точек ( $N = 10000, 25000, 50000$ , конечное время можно уменьшить до  $10^{-4}$ )

для уменьшения времени работы, условие для величины шага (♦♦) приведены выше), построить 3 графика соответственно кол-ву точек.

- 3) использовать коллективные операции для рассылки начального распределения температур и сбора итоговых результатов

Примечание по распараллеливанию: разумно будет поделить весь отрезок на NumberOfProc частей, чтобы каждый процессор считал свою часть ( $N/\text{NumberOfProc}$ ), при нахождении на границе между процессами воспользоваться передачей граничных значений “соседнему” процессору.

### Дополнение

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k\tau}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

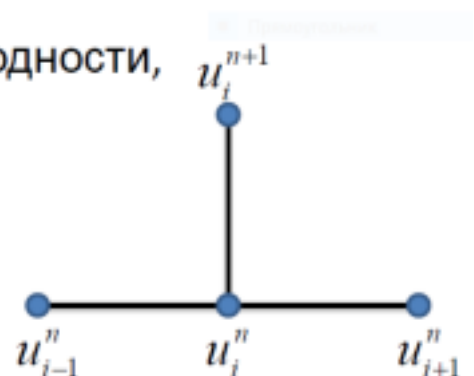
$$\frac{k\tau}{h^2} < 1 \Rightarrow \tau < \frac{h^2}{k}$$

где:

$k$  - коэффициент температуропроводности,

$\tau$  - шаг по времени,

$h$  - шаг по пространству



Задача состоит в нахождении распределения температур в момент времени  $n+1$ , таким образом нижний индекс – это индекс по пространству, а верхний индекс – это индекс по времени.

Как работает формула?

Пусть у нас есть начальный момент времени  $n = 0$ , в котором у нас задано распределение температуры ( $T_{i \in \Omega}^0 = 1, T_{i \notin \Omega}^0 = 0$ ) и мы хотим найти распределение в следующий момент времени ( $T_{i \in \Omega}^1$ ), то есть в момент времени  $n+1 = \tau$ . Рассмотрим самую первую точку  $i = 0$ :

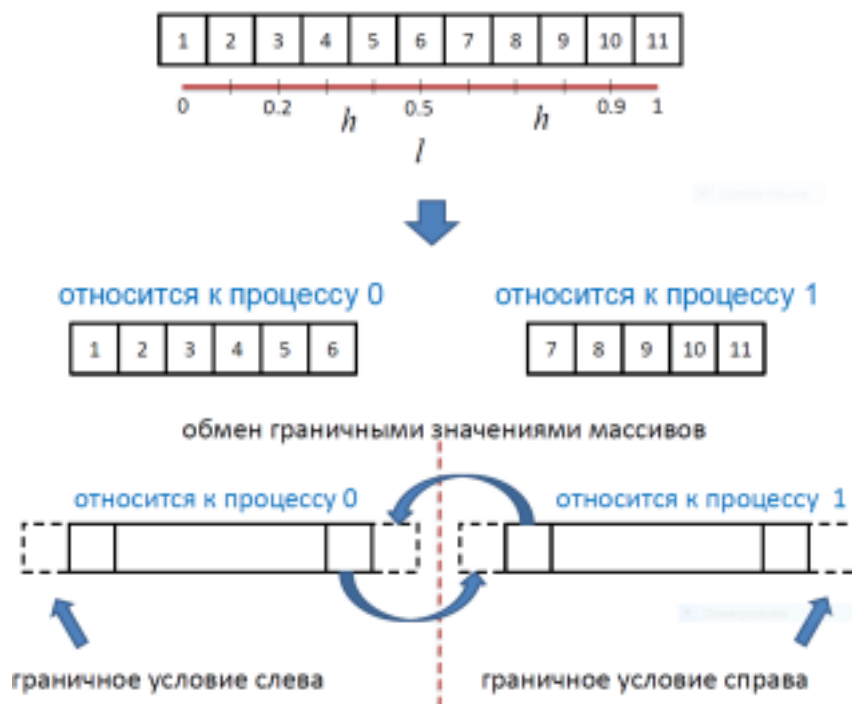
$$T_{0 \in \Omega}^1 = T_{0 \in \Omega}^0 + \frac{\tau}{h} \left( T_{1 \in \Omega}^0 - 2T_{0 \in \Omega}^0 + T_{-1 \in \Omega}^0 \right)$$

$$T_{0 \in \Omega}^1 = 1 + 0.5(1 - 2 + 0)$$

$$T_{0 \in \Omega}^1 = 0.5$$

Таким образом мы получили значение в следующий момент времени для точки  $i = 0$ .

Как это работает параллельно? Допустим у нас есть 2 процесса и мы разделили весь стержень на 11 точек, соответственно 0-ой процесс будет обрабатывать 6 точек, а 1-ый процесс 5 точек. При расчёте граничных точек нужно воспользоваться передачей с предыдущего или следующего процесса, чтобы получить значение в предыдущей или следующей точке соответственно. В данном примере нужно было бы при расчёте 0 процессом в следующий момент времени в точке  $i = 6$  передавать с 1-ого процесса значение в точке  $i = 7$ .



## Оценивание

Задание 1: 4 балла

Задание 2: 4 балла

Задание 3: 2 балла

Сдача будет происходить очно на семинаре. После сдачи задания вам нужно будет его прикрепить в [GoogleClassroom](https://classroom.google.com/). Файл программы нужно называть "heat\_%Фамилия%\_%группа%.cpp", например "heat\_Ivanov\_211.cpp".

Файл с графиком "heat\_%Фамилия%\_%№ группы%.pdf", например "heat\_Ivanov\_211.pdf"

## Дедлайн

Проверка задания будет 13.12.2022