МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Г. М. Жислин

ЛЕКЦИИ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета «Высшая школа общей и прикладной физики» для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.04.02 — Физика

Нижний Новгород
2022

УДК 517.972 требует проверки в библиотеке университета
ББК 22.161.8 требует проверки в библиотеке университета
Ж73

Рецензент: д. ф.-м. н., зав. лаб. ИФМ РАН **Шерешевский И. А.**

Ж73 Жислин Г. М. ЛЕКЦИИ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2022. – 136 с.

Настоящие лекции читались на факультете «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Они содержат основные понятия и результаты стандартного курса «Вариационное исчисление». Но основной упор сделан на те понятия и результаты, которые нужны для курса «Методы математической физики» (спектральные свойства операторов Штурма и Шрёдингера, теорема Стеклова и т. д.).

УДК 517.972 требует проверки в библиотеке университета
ББК 22.161.8 требует проверки в библиотеке университета

Содержание

Введение

В пособии рассматриваются методы отыскания экстремумов функционалов в различных классах функций. Особенно подробно изучается задача минимизации квадратичного функционала. Эта задача приводит к необходимости отыскания собственных значений и собственных функций обычной или обобщённой задачи Штурма. Свойства этих собственных значений и собственных функций (экстремальные свойства, принцип минимакса, теорема сравнения, теорема Стеклова и т. д.) подробно изучаются. Далее в лекциях рассматривается задача минимизации функционала специального вида (функционала Бесселя), приводящая к уравнению Бесселя. Свойства его решений — функций Бесселя — выводятся из свойств решений соответствующей обобщённой задачи Штурма.

Задачи минимизации функционалов, зависящих от функций нескольких переменных, изучаются менее подробно, чем одномерный случай. Здесь, как и в одномерном случае, главное внимание уделено квадратичному функционалу. Его минимизация приводит к задаче изучения свойств собственных функций и собственных значений оператора Шрёдингера (и Лапласа). Такое изучение проводится с упором на сравнение с аналогичной задачей для оператора Штурма. Наконец, в заключение мы рассматриваем некоторые обобщения: оператор Штурма с периодическими граничными условиями, оператор Шрёдингера в неограниченной области. Оператор Шрёдингера рассматривается применительно к задачам квантовой механики. Для гамильтонианов атомов и их ионов формулируется теорема Хунцикера–ван Винтера–Жислина о положении сплошного спектра, а для нейтральных атомов и (+)-ионов — теорема Жислина о бесконечности числа собственных значений.

Настоящее пособие представляет собой чуть расширенный конспект лекций, читавшихся автором на факультете «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского. Такая форма учебного пособия имеет свои недостатки, но, надеюсь, и некоторые преимущества. Недостатки (видные автору) заключаются в том, что из-за ограниченности времени и из-за того, что лекции читались не на математическом факультете, многие утверждения не доказываются и ряд математических тонкостей в рассуждениях опускается. С другой стороны подобный подход позволяет выделить главные — принципиальные — моменты в рассказываемом материале и донести до читателя живое слово лектора. Кроме того, тот факт, что конспект лекций сделал слушатель-студент (А. Г. Чубаров), придаёт материалу форму, наиболее удобную для восприятия.

В заключение автор хочет выразить искреннюю признательность А. Г. Чубарову. Он не только законспектировал лекции, упростил некоторые формулировки, исправил описки, но и набрал весь текст лекций для публикации. Без его помощи данные лекции почти наверняка не были бы изданы.

Лекция 1

Мы начинаем первую часть нашего курса. Эта часть — «Вариационное исчисление».

1. Определение функционала. Примеры вариационных задач

До сих пор вам в основном встречалось два типа зависимостей:

a) Функция: каждому числу или совокупности чисел (в случае функции многих переменных) ставится в соответствие число или совокупность чисел (в случае вектор-функции).

b) Оператор: каждой функции или набору функций ставится в соответствии функция или набор функций. Например, если рассматривать оператор дифференцирования на функциях, имеющих производную, то $f(x) \to f'(x)$, или $f(x_1, \ldots, x_n) \to$ $\to f(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n))$, где $\varphi_i(x_i)$ — некоторые функции.

Вариационное исчисление изучает другие зависимости — когда каждой функции или набору функций из определённого класса ставится в соответствие число.

Примеры:

1) $S[f] = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ — площадь заштрихованной фигуры, $f(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$.

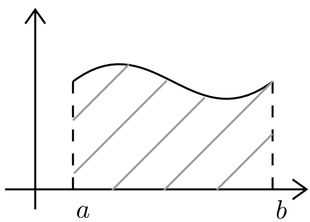


Рис. 1.1

2) $l[f] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$ — длина кривой, $f \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$ — класс непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций.

Дадим общее определение для подобного рода зависимостей.

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{K} = \{f(x_1, \ldots, x_n)\}$ — класс неких функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, определённых в области $\mathcal{D}$ n-мерного пространства. Будем говорить, что **задан функционал $\boldsymbol{\mathcal{J}[f]}$**, если задан закон, по которому каждой функции $f \in \mathcal{K}$ ставится в соответствие число $\mathcal{J}[f]$. Это число обозначается $\mathcal{J}[f]$ и называется значением функционала на функции f.

В приведённых выше примерах
$S[f]$ задан на $\mathcal{K} = \left\{f(x) \middle| f \in \mathcal{C}_{[a,b]}\right\}$,
$l[f]$ задан на $\mathcal{K} = \left\{f(x) \middle| f \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}\right\}$.
Разумеется, могут быть и другие классы для функционалов $S[f]$ и $l[f]$ в зависимости от рассматриваемых задач.

Исследуя свойства функций в курсе математики, вы решали задачи о нахождении экстремумов функций, однако целый ряд задач требует отыскания экстремумов не функций, а функционалов. Именно этим и занимается «Вариационное исчисление».

Приведём примеры задач, решаемых в вариационном исчислении.

1. **Задача о кривой наискорейшего спуска (задача о брахистохроне)**
   Пусть на вертикальной плоскости x, y заданы две точки $A(a, y_0)$ и $B(b, y_1)$, $y_1 < y_0$.

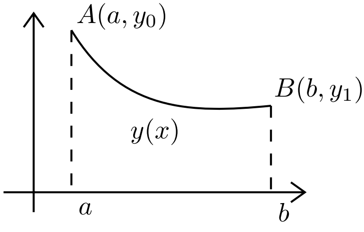


Рис. 1.2

Задача: найти кривую, соединяющую точки A и B, по которой материальная точка скатится из A в B за минимальное время.
Пусть $y(x)$ — произвольная допустимая кривая. Найдём время скатывания по этой кривой. Разобъём отрезок $[a, b]$ на n частей

$$\Delta x \overset{def}{=} \frac{b-a}{n}$$

и определим время скатывания по элементарному отрезку кривой над Δx.

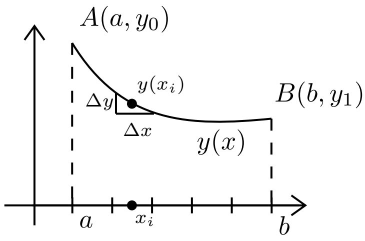


Рис. 1.3

Длина этого участка

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x.$$

Пусть $v(x_i, y_i)$ — скорость на участке Δx. Тогда элементарное время скатывания

$$\Delta t = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x}{v(x_i, y_i)}.$$

Суммируя по всем элементарным участкам Δx и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим время скатывания по кривой $y(x)$.

$$T[y] = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)}\, dx.$$

Величину скорости находим из закона сохранения энергии. Пусть m — масса материальной точки, начальная скорость скатывания равна 0; тогда при $x = a$ потенциальная энергия равна $m \cdot g \cdot y_0$, кинетическая равна нулю. В точке x потенциальная энергия равна $m \cdot g \cdot y$, а кинетическая — $\frac{m \cdot v^2}{2}$. Таким образом,

$$m \cdot g \cdot y_0 = m \cdot g \cdot y + \frac{m \cdot v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (y_0 - y)}.$$

Таким образом,

$$T[y] = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot (y_0 - y)}}\, dx.$$

Класс $\mathcal{K}$ допустимых кривых $y = y(x)$ в этой задаче описывается равенством

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}, y(a) = y_0, y(b) = y_1 \right\}.$$

Таким образом, надо найти $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} T[y]$. Функция, дающая минимум (или максимум) функционала, называется *минимайзером* (или *максимайзером*). Минимайзер рассматриваемой задачи — кривая наискорейшего спуска. Она называется брахистохрона.

2. **Задача о геодезических**

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана поверхность $\varphi(x, y, z) = 0$ и $A(a_0, b_0, c_0)$, $B(a_1, b_1, c_1)$ — произвольные точки на поверхности.

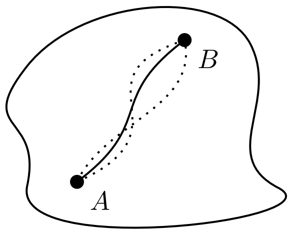


Рис. 1.4

Задача: проложить по поверхности кратчайший путь, соединяющий точки A и B, то есть найти кривую минимальной длины, лежащую на поверхности и проходящую через A и B. Кривые мы будем задавать параметрически:

$$\Gamma = \left\{x(t), y(t), z(t); t_0 \leqslant t \leqslant t_1\right\}.$$

Класс допустимых к рассмотрению кривых определяется, во-первых, условием принадлежности к поверхности

$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

во-вторых, условием прохождения через точки A, B:

$$x(t_i) = a_i, y(t_i) = b_i, z(t_i) = c_i, \quad i = 0, 1;$$

в-третьих: $\Gamma \in \mathcal{C}^1_{[t_0, t_1]}$.
Длина кривой

$$l[\Gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Мы должны минимизировать функционал $l[\Gamma]$ в классе допустимых функций, описанных выше. Кривые, дающие решение задачи на $\min l[\Gamma]$, называются геодезическими, и сама задача — задача о геодезических.

3. **Изопериметрическая задача**
   Словесная формулировка: имеется проволока заданной длины; надо на плоскости огородить наибольшую площадь. Определим класс $\mathcal{K}$ допустимых кривых.

$$\mathcal{K} = \left\{ \Gamma \left| \Gamma = (x(t), y(t)) \in \mathcal{C}^1_{[t_0,t_1]}, x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1)^{\mathrm{i}}, \right.\right.$$

$$\left. (*) \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = l_0{}^{\mathrm{ii}} \right\}.$$

$$S[\Gamma] = \frac{1}{2} \left| \int\limits_{t_0}^{t_1} (x' \cdot y - y' \cdot x)\ dt \right| \text{ — площадь,}$$

ограниченная кривой Γ.

Задача: найти $\max\limits_{\Gamma \in \mathcal{K}} S[\Gamma]$.

Задачи, подобные этой, получили название изопериметрических («изо» $\equiv$ равный, «периметр» $\equiv$ длина), хотя интегральное условие связи типа $(*)$ может иметь совершенно другой смысл.

Исторически так сложилось, что именно три перечисленные задачи сыграли решающую роль в развитии вариационного исчисления как науки об отыскании максимумов или минимумов, то есть экстремумов функционалов. Хотя первые вариационные задачи решались ещё древними греками, вариационное исчисление стало наукой только после трудов Леонарда Эйлера в XVIII веке. Швейцарец по национальности, он долго работал в России, где и опубликовал главные труды по вариационному исчислению (на немецком; Эйлер так и не выучил русский язык).

---

[i] Условие замкнутости кривой.
[ii] Задана длина.

2. Вариационные задачи для функционалов, зависящих от одной функции одной переменной с неподвижными концами

Пусть $y(x)$ — некоторая функция $x \in [a, b]$, и

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx.$$

Предполагается, что функция F определена и дважды непрерывно дифференцируема, когда $x \in [a, b]$, $y < M$, $\forall y'$. Здесь M — некоторая большая константа. Условимся далее писать, что если какая-то функция ψ непрерывна вместе со всеми производными до порядка n включительно, то пишем $\psi \in \mathcal{C}^n$, для непрерывных функций $\psi \in \mathcal{C}$. Часто пишут, например, $y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$, то есть указывают область (в данном случае — отрезок $[a, b]$), где функция обладает заданной гладкостью. Итак, $F \in \in \mathcal{C}^2$. Класс функций $\mathcal{K}$, в котором ищется экстремум функционала $\mathcal{J}[y]$, определён так:

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}, y(a) = y_0, y(b) = y_1, |y| < M \right\}.$$

Геометрический смысл функций из $\mathcal{K}$ — это гладкие кривые, соединяющие точки (a, y_0) и (b, y_1), где y_0, y_1 — произвольные, но фиксированные для данного класса числа.

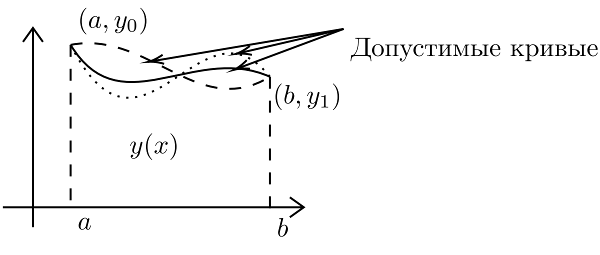


Рис. 1.5

Так как методы нахождения максимума и минимума — одинаковы, то далее будем ставить задачу на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$ (тем более, что максимайзер для функционала $\mathcal{J}[y]$ является минимайзером для функционала $-\mathcal{J}[y]$).

Что значит найти минимайзер? Это значит найти такую функцию $y \in \mathcal{K}$, что $\mathcal{J}[y] \leqslant \mathcal{J}[\tilde{y}]$ при $\forall \tilde{y} \in \mathcal{K}$. Мы сейчас не обсуждаем существование минимайзера — он может и не существовать (позже будет дано достаточное условие существование минимайзера). Итак, пусть минимайзер $y(x)$ существует. *Как его найти?*

Определение 2.1. Будем называть функцию $\eta(x)$ **допустимым изменением**, если

$$\tilde{y}(x) \overset{def}{=} y(x) + t \cdot \eta(x) \in \mathcal{K} \quad \text{при } |t| \ll 1.$$

Так как $y(x), \tilde{y}(x) \in \mathcal{K}$, то

$$\eta(x) = \frac{\tilde{y}(x) - y(x)}{t} \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$$

и

$$\eta(a) = \eta(b) = 0.$$

Кроме того, если

$$M_1 \overset{def}{=} \max_{x \in [a,b]} |\eta(x)|, \quad M_2 \overset{def}{=} \max_{x \in [a,b]} |y(x)| < M$$

то

$$\max_{x \in [a,b]} |y(x) + t \cdot \eta(x)| \leqslant M_2 + |t| \cdot M_1 \overset{?}{<} M.$$

Последний переход верен, если

$$|t| < \frac{M - M_2}{M_1}.$$

Таким образом, мы описали все требуемые свойства допустимого изменения $\eta(x)$, при которых $\tilde{y}(x) \in \mathcal{K}$.

Так как $y(x)$ — минимайзер, то

$$\mathcal{J}[y + t \cdot \eta] \geqslant \mathcal{J}[y], \quad |t| \ll 1. \tag{2.1}$$

Положим

$$\varphi(t) \overset{def}{=} \mathcal{J}[y + t \cdot \eta] = \int_a^b F(x, y + t \cdot \eta, y' + t \cdot \eta')\, dx. \tag{2.2}$$

В силу (2.1) $\varphi(t) \geqslant \varphi(0), |t| \ll 1$. Следовательно, функция $\varphi(t)$ имеет минимум при $t = 0$. Так как $F \in \mathcal{C}^2$, то $\varphi(t) \in \mathcal{C}^2$, и, следовательно, выполняется необходимое условие экстремума — $\varphi'(0) = 0$, то есть

$$\varphi'(0) = \left.\frac{d}{dt}\int\limits_a^b F(x, y + t\cdot\eta, y' + t\cdot\eta')\,dx\right|_{t=0} = 0. \tag{2.3}$$

Выясним смысл данного условия. По формуле Тейлора разложим $\varphi(t)$ в окрестности $t = 0$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\cdot\varphi'(0) + o(t). \tag{2.4}$$

Таким образом,

$$\varphi(t) - \varphi(0) = t\cdot\varphi'(0) + o(t). \tag{2.5}$$

То есть $t\cdot\varphi'(0)$ — это главная часть приращения функции $\varphi(t)$ в окрестности $t = 0$. В силу (2.2), (2.5) – это

$$\mathcal{J}[y + t\cdot\eta] - \mathcal{J}[y] = t\cdot\left.\frac{d}{dt}\int\limits_a^b F(x, y + t\cdot\eta, y' + t\cdot\eta')\,dx\right|_{t=0} + o(t). \tag{2.6}$$

Определение 2.2. Величина

$$t\cdot\left.\frac{d}{dt}\int\limits_a^b F(x, y + t\cdot\eta, y' + t\cdot\eta')\,dx\right|_{t=0}$$

называется **первой вариацией** и обозначается через $\delta\mathcal{J}$.

Таким образом, первая вариация $\delta\mathcal{J}$ — это главная часть приращения функционала в окрестности функции y, а если y — минимайзер, то в силу (2.3) должно выполняться условие

$$\delta\mathcal{J} = 0. \tag{2.7}$$

Именно его мы будем использовать для вывода уравнения для минимайзера.

Имеем, полагая $\widetilde{F} \overset{def}{=} F(x, y + t\cdot\eta, y' + t\cdot\eta') = F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')$,

$$\delta\mathcal{J} = t\cdot\left.\frac{d}{dt}\int\limits_a^b F(x, \underbrace{y + t\cdot\eta}_{\tilde{y}}, \underbrace{y' + t\cdot\eta'}_{\tilde{y}'})\,dx\right|_{t=0} =$$

$$= t\cdot\left.\int\limits_a^b \left(\widetilde{F}_{\tilde{y}}\cdot\eta + \widetilde{F}_{\tilde{y}'}\cdot\eta'\right)\,dx\right|_{t=0} = t\cdot\int\limits_a^b \left(F_y\cdot\eta + F_{y'}\cdot\eta'\right)\,dx = 0. \tag{2.8}$$

Всегда, когда в выражении первой вариации под знаком интеграла содержится производная от допустимого изменения, надо пытаться избавится от неё путём интегрирования по частям (для функций многих переменных — с помощью формулы Остроградского–Гаусса). Мы будем интегрировать по частям слагаемое $F_{y'} \cdot \eta'$, но для этого нужна гладкость $F_{y'} \in \mathcal{C}^1$ как функции от x, а для этого надо, чтобы аргумент y' в $F_{y'}(x, y(x), y'(x))$ принадлежал $\mathcal{C}^1$, в то время как класс допустимых функций не требует $y' \in \mathcal{C}^1$ (то есть не требует $y \in \mathcal{C}^2$). Однако можно доказать, что минимайзер обладает повышенной гладкостью — $\mathcal{C}^2$, а значит $y' \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$ и мы можем интегрировать по частям

$$\int\limits_a^b \underbrace{F_{y'}}_{v} \cdot \underbrace{\eta'\,dx}_{du} = F_{y'} \cdot \eta \Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \cdot \eta\,dx.\text{[i]} \tag{2.9}$$

Подставляя это выражение в (2.8) мы получим выражение первой вариации при $y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}$, $\eta \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$, независимо от граничных условий,

$$\delta\mathcal{J} = t\left\{\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) \cdot \eta\,dx + F_{y'} \cdot \eta\Big|_a^b\right\}. \tag{A}$$

Если y — минимайзер и η — допустимое изменение, то $\eta(a) = \eta(b) = 0$, и в силу (2.7) для минимайзера y и $\forall\eta$

$$t\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) \cdot \eta\,dx = 0. \tag{2.10}$$

В силу произвольности допустимого изменения замечаем, что

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0. \tag{2.11}$$

Этот вывод основан на основной лемме вариационного исчисления — лемме Лагранжа, которую мы сейчас докажем.

Лемма 2.1 (лемма Лагранжа)**.** Пусть для некоторой непрерывной функции $\Phi(x)$ и любой функции η, являющейся допустимым измене-

---

[i] Иногда допустимые функции с самого начала берут из класса $\mathcal{C}^2$. Тогда минимайзер автоматически будет иметь нужную гладкость. Однако такой подход выглядит искусственным, ибо связан не с постановкой задачи, а только с используемой техникой.

нием, выполняется

$$\int\limits_a^b \Phi(x)\cdot\eta(x)\,dx = 0, \tag{2.12}$$

тогда $\Phi(x)\equiv 0$.

Применив эту лемму к (2.10) с $\Phi \equiv F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}$, получаем (2.11).

Доказательство леммы Лагранжа. Предположим, что (2.12) верно при $\forall\eta$ и при некоторой функции $\Phi(x)\not\equiv 0$. Тогда $\exists x_0$, такое, что $\Phi(x_0)\neq 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $a < x_0 < b$ и что $\Phi(x_0) > 0$. Так как $\Phi(x)\in\mathcal{C}_{[a,b]}$, то $\exists\delta > 0$, так что $\Phi(x) > 0$ при $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Положим

$$\eta \overset{def}{=} \begin{cases} 0, & x\notin[x_0-\delta, x_0+\delta];\\ \big(x-(x_0-\delta)\big)^2\big(x-(x_0+\delta)\big)^2, & x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]. \end{cases}$$

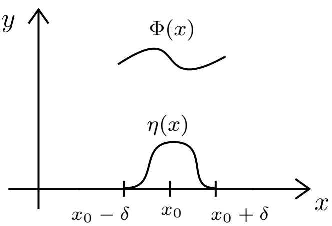


Рис. 1.6

Тогда

$$\int\limits_a^b \Phi(x)\cdot\eta(x)\,dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \Phi(x)\cdot\eta(x)\,dx > 0, \tag{2.13}$$

ибо на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ функции $\Phi(x)$ и $\eta(x)$ положительны. В то же время, так как $\eta(x)$ — допустимое изменение, то, по условию леммы, выполняется (2.12). Значит, (2.13) неверно, и причина этого — предположение о том, что $\exists x_0$, такое, что $\Phi(x_0)\neq 0$. Таким образом, $\Phi(x)\equiv 0$. $\square$

Уравнение

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{2.14}$$

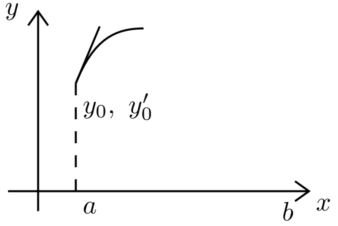
называется уравнением Эйлера–Лагранжа ((2.11) было тождеством, так как туда был подставлен минимайзер). Мы должны искать решение уравнения (2.14) с условиями $y(x) \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}, y(a) = y_0, y(b) = y_1$. Такие решения называются экстремалями.

Проведя в (2.14) дифференцирование, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0. \tag{2.15}$$

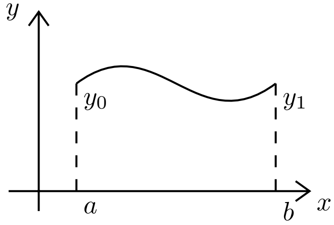
Решение (2.15) ищется при условиях $y(a) = y_0,\ y(b) = y_1$, то есть это не задача Коши, когда при $x = a$ задаётся $y(a),\ y'(a)$, а так называемая *краевая задача*, когда заданы условия на искомую функцию на обоих концах отрезка.

Задача Коши.



Задано $y(a) = y_0,\ y'(a) = y_0'$. Другими словами, задано значение $y(a)$ и наклон касательной $y'(a)$

Краевая задача.



Задано $y(a) = y_0,\ y(b) = y_1$. $y'(a)$ — не задано, но должно быть таким, чтобы решение (2.15) в точке b имело значение y_1.

Мы уже говорили, что когда минимайзер существует, то, решая (2.15), мы его найдём. Если решений у (2.15) нет, то минимайзер — отсутствует. А теперь главный вопрос: нашли экстремаль (решение (2.15)) с заданными граничными условиями – это минимайзер? А может быть, это максимайзер (ведь для максимайзера уравнение такое же)? Начнём с того, что найденная экстремаль не обязана быть ни минимайзером, ни максимайзером. Это связанно с тем, что

1) Мы сравнивали значение функционала на минимайзере $\mathcal{J}[y]$ не со значением на любой другой функции из $\mathcal{K}$, а только со значением $\mathcal{J}[y+t\cdot\eta]$ на функциях $y+t\cdot\eta$. Поэтому даже если y — минимайзер среди этих функций, он может не быть минимайзером во всём классе $\mathcal{K}$.
2) Мы используем *необходимое условие экстремума* — равенство нулю первой производной, а не достаточное.

Обсудим 2). Достаточное условие минимума (среди функций $y+t\cdot\eta\,!$) —

неравенство

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{J}[y+t\cdot\eta]\Big|_{t=0} > 0, \quad \forall\eta.$$

Если оно выполнено, то экстремаль $y(x)$ не может быть максимайзером в $\mathcal{K}$, иначе она была бы максимайзером среди функций $y+t\cdot\eta$ и тогда

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{J}[y+t\cdot\eta]\Big|_{t=0} < 0,$$

а у нас противоположное неравенство. Таким образом, неравенство

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{J}[y+t\cdot\eta]\Big|_{t=0} > 0, \quad \forall\eta$$

говорит, что y не может быть максимайзером (противоположное неравенство запрещает экстремали быть минимайзером).

Из тех же соображений, если знак $\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{J}[y+t\cdot\eta]\Big|_{t=0}$ зависит от η, y не может быть ни минимайзером, ни максимайзером. Это соответствует точке перегиба.

Что касается 1), то достаточное условие для того, чтобы экстремаль $y(x)$ была минимайзером $\{$максимайзером$\}$ есть выполнение для всех η и какой-либо константы $c_0 > 0$ неравенства

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{J}[y+t\cdot\eta]\Big|_{t=0} \geqslant c_0\int\limits_a^b \left(\eta^2+\eta'^2\right)\,dx,$$

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{J}[y+t\cdot\eta]\Big|_{t=0} \leqslant -c_0\int\limits_a^b \left(\eta^2+\eta'^2\right)\,dx\right\}.$$

Причём минимайзер или максимайзер будет таковым не во всём классе $\mathcal{K}$, а среди функций близких к y в метрике

$$\sup_{x\in[a,b]}\{|y(x)-\hat{y}(x)|+|y'(x)-\hat{y}'(x)|\} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — малое фиксированное число.

Прежде чем переходить к примерам решения уравнения Эйлера, остановимся на важном случае, когда интегрант $F(x,y,y')$ может иметь особенности. Например, в задаче о брахистохроне в знаменателе интегранта содержится $\sqrt{y_0-y(x)}$, и при $x=a$ мы имеем в знаменателе $\sqrt{y_0-y_0}=0$. Выясним, как быть в подобной ситуации. Пусть

$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, и на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция $F(x, y, y')$ не имеет особенностей. Возьмём допустимое изменение $\eta(x) \equiv 0$ вне $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\mathcal{J}[y + t \cdot \eta] = \int\limits_a^b F(x, y + t \cdot \eta, y' + t \cdot \eta')\, dx =$$

$$= \int\limits_a^\alpha F(x, y, y')\, dx + \int\limits_\beta^b F(x, y, y')\, dx + \int\limits_\alpha^\beta F(x, y + t \cdot \eta, y' + t \cdot \eta')\, dx.$$

Два первых слагаемых не зависят от t. Поэтому

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}[y + t \cdot \eta] = \frac{d}{dt} \int\limits_\alpha^\beta F(x, y + t \cdot \eta, y' + t \cdot \eta')\, dx,$$

и так как на отрезке $[\alpha, \beta]$ $F \in \mathcal{C}^2$, то мы можем провести все те же рассуждения, что проводили раньше для отрезка $[a, b]$ и получить, что на отрезке $[\alpha, \beta]$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение Эйлера выполняется в любой точке, где нет особенностей F.

Ещё одно замечание. Мы в классе $\mathcal{K}$ требуем, чтобы $y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$. Можно заменить его на требование кусочно–непрерывной дифференцируемости, но разрывы производных должны быть типа «конечного скачка».

В заключение – пример задачи, где минимайзер не существует. Пусть

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_0^1 x^2 \cdot y'^2\, dx, \quad \mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[0,1]}, y(0) = 1, y(1) = 0 \right\}.$$

Ясно, что $\mathcal{J}[y] > 0, y \in \mathcal{K}$. Покажем, что $\inf\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y] = 0$. Рассмотрим функции

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} (x - \alpha)^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2}, & 0 \leqslant x \leqslant \alpha; \\ 0, & \alpha \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ — малое число.

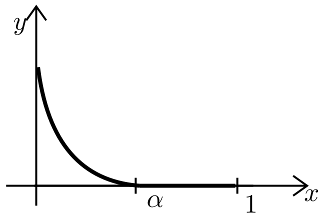


Рис. 1.7

$$\mathcal{J}[y_\alpha] = 4\int\limits_0^\alpha x^2 \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{\alpha^4}\,dx \leqslant \frac{4}{\alpha^2}\int\limits_0^\alpha (x-\alpha)^2\,dx =$$

$$= \frac{4}{3\cdot\alpha^2}(x-\alpha)^3\Big|_0^\alpha \to 0 \text{ при } \alpha \to 0.$$

Значит $\inf\limits_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y] = 0$, и поэтому минимайзер не существует.

Задание. Докажите, что максимайзер тоже не существует.

Лекция 2

На прошлой лекции мы установили, что минимайзер в задаче на

$$\min_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y], \text{ где } \mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx,$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}, y(a) = y_0, y(b) = y_1, |y| < M \right\}$$

удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \tag{0.1}$$

которое надо решать при условиях

$$y(a) = y_0,\ y(b) = y_1. \tag{0.2}$$

1. Примеры решения уравнения Эйлера–Лагранжа

Рассмотрим следующие частные случаи.

1) $F = F(x,y)$ — нет зависимости от y'. Уравнение (0.1) принимает вид $F_y = 0$, откуда при $F_{yy} \neq 0$ можно по теореме о неявной функции найти $y = y(x)$. Так как функция $y(x)$ не содержит свободных констант, то в общем случае[i] $y(a) \neq y_0$, $y(b) \neq y_1$, то есть решения нет.
2) $F = \alpha(x,y)\cdot y' + \beta(x,y)$ — функция линейна по y'. Уравнение Эйлера в этом случае

$$\alpha_y \cdot y' + \beta_y - \frac{d}{dx}\alpha(x,y) = \underline{\alpha_y \cdot y'} + \beta_y - \alpha_x - \underline{\alpha_y \cdot y'} = \beta_y - \alpha_x = 0 \tag{1.1}$$

Далее возможны два варианта. Первый: $\beta_y - \alpha_x$ равно нулю не тождественно, то есть (1.1) можно рассматривать как уравнение

[i]Здесь важно, что именно в *общем случае*. Поскольку задача могла быть придумана хитрыми составителями задачников таким образом, чтобы решение удовлетворяло условиям $y(a) = y_0,\ y(b) = y_1$.

относительно y, и мы приходим к 1): в общем случае решения нет. Второй вариант: $\beta_y - \alpha_x \equiv 0$, то есть уравнения нет и, значит, любая кривая из $\mathcal{K}$ — экстремаль. Но при $\beta_y = \alpha_x$ можно указать такую функцию $\widetilde{\varphi}(x,y)$, что $\alpha(x,y) = \widetilde{\varphi}_y$, $\beta(x,y) = \widetilde{\varphi}_x$ и интегрант

$$\alpha(x,y) \cdot y' + \beta(x,y) = \frac{d\widetilde{\varphi}}{dx}.$$

Поэтому

$$\int\limits_a^b (\alpha \cdot y' + \beta)\, dx = \int\limits_a^b \frac{d\widetilde{\varphi}}{dx}(x,y)\, dx = \widetilde{\varphi}(b, y(b)) - \widetilde{\varphi}(a, y(a)) =$$

$$= \widetilde{\varphi}(b, y_1) - \widetilde{\varphi}(a, y_0).$$

Таким образом, значение интеграла не зависит от функций $y(x) \in \in \mathcal{K}$, и задача на $\min\limits_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$ и $\max\limits_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$ не имеет смысла.

3) $F = F(y')$. Уравнение $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \to F_{y'} = const$, и при $F_{y'y'} \neq 0$ мы получаем, что $y(x) = c_1 \cdot x + c_2$, где константы c_1 и c_2 находятся из граничных условий.
4) $F = F(y, y')$ — нет явной зависимости от аргумента x, зависимость только через $y(x)$, $y'(x)$. Это наиболее часто встречающийся частный случай. Покажем, что в этом случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл
$$F - y' \cdot F_{y'} = const. \tag{1.2}$$
То есть убедимся, что на любом решении $y = y(x)$ уравнения (0.1) выполняется (1.2). Проверим (1.2), подставив туда произвольную функцию $y(x)$, удовлетворяющую (0.1), и взяв полную производную по x от левой части (1.2). Получим
$$F_y \cdot y' + \underline{F_{y'} \cdot y''} - \underline{y'' \cdot F_{y'}} - y' \cdot \frac{d}{dx}F_{y'} = y' \underbrace{\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)}_{\text{левая часть (0.1)}} \equiv 0.$$
Значит, левая часть (1.2) — действительно константа при y из (0.1).

Задание. Пусть (1.2) выполняется. Могут ли у уравнения (1.2) быть решения, не удовлетворяющие (0.1)?

2. Вариационные задачи для функционалов, зависящих от n функций одной переменной

Сейчас мы будем рассматривать функционалы вида

$$\mathcal{J}[y_1, \dots, y_n] = \int\limits_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\, dx.$$

Приведём пример задачи, в которой возникает необходимость найти минимум функционала подобного рода. Пусть $A(a_0, b_0, c_0)$ и $B(a_1, b_1, c_1)$ — произвольные точки, и в точке A помещён источник света.

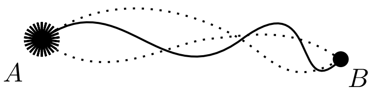


Рис. 2.1

Надо определить траекторию луча от A к B. Согласно принципу Ферма, свет распространяется по кривой, по которой время его прохождения от A к B меньше (или равно) времени распространения по близким кривым. Пусть $\Gamma = \{x(s), y(s), z(s)\}$ — произвольная кривая, соединяющая точки A (при $s = s_0$) и B (при $s = s_1$). Мы будем параметризовать все подобные кривые так, что $x(s_j) = a_j$, $y(s_j) = b_j$, $z(s_j) = c_j$, $j = 0, 1$, где s_0 и s_1 — фиксированные числа, одни и те же для всех таких кривых. Тогда время прохождения луча по кривой Γ

$$T[\Gamma] = \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{\sqrt{x'^2(s) + y'^2(s) + z'^2(s)}}{v(x(s), y(s), z(s))}\, ds,$$

где $v(x, y, z)$ — скорость света в точке x, y, z в изотропной среде; в не изотропной $v = v(x, y, z, x', y', z')$.

Для нахождения траектории света от A к B надо найти $\min\limits_{\Gamma} T[\Gamma]$ по гладким кривым Γ, соединяющим A и B.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $\boldsymbol{y}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$ — вектор-функция в $(n+1)$-мерном пространстве, где $y_i = y_i(x)$ $a \leqslant x \leqslant b$. Или по-другому $\Gamma = \{y_1, \dots, y_n\}$ — кривая в $(n+1)$-мерном пространстве. Пусть

$$\mathcal{J}[\Gamma] = \mathcal{J}[\boldsymbol{y}] = \int\limits_a^b F(x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx \text{ — функционал}$$

$$\text{на вектор-функциях } \boldsymbol{y}(x),$$

где $F \in \mathcal{C}^2$, $x \in [a,b]$; $|y_j| < M$, y_j' — любое, $j = \overline{1,n}$. Будем говорить, что $\boldsymbol{y}(x) \in \mathcal{C}^k_{[a,b]}$, если $y_j(x) \in \mathcal{C}^k_{[a,b]}$, $j = \overline{1,n}$. Пусть $A = (a, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, $B = (b, y_1^1, \ldots, y_n^1)$ — произвольные фиксированные точки в $\mathbb{R}^{n+1}$. Будем говорить, что кривая $\Gamma = \boldsymbol{y}(x)$ проходит через точку $A\{B\}$, если $y_i(a) = y_i^0$, $i = \overline{1,n}$ $\{y_i(b) = y_i^1,\ i = \overline{1,n}\}$. Пусть

$$\mathcal{K} = \Big\{\boldsymbol{y}(x) \Big| \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n), \boldsymbol{y} \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ (a, \boldsymbol{y}(a)) = A,\ (b, \boldsymbol{y}(b)) = B;$$
$$|y_j(x)| < M,\ j = \overline{1,n},\ x \in [a,b]\Big\}.$$

Мы будем рассматривать задачу на $\min\limits_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[\boldsymbol{y}]$; вектор

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x))$$

назовём *допустимым изменением*, если вектор

$$\tilde{\boldsymbol{y}} \overset{def}{=} \boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K}^{\text{i}} \quad \text{при } |t| \ll 1.$$

Как и в случае простейшей задачи, рассмотренной на прошлой лекции, можно убедиться, что $\boldsymbol{\eta}(x)$ допустимое изменение, если $\boldsymbol{\eta}(x) \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$ и $\eta_j(a) = \eta_j(b) = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Замечание. Иногда вместо требования $|y_j| < M$, $j = \overline{1,n}$, для $\boldsymbol{y} \in \mathcal{K}$ накладывается требование: кривые Γ из $\mathcal{K}$ должны лежать в некоторой *открытой* области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. В определении допустимого изменения в этом случае появляется требование: кривая $\widetilde{\Gamma}$, определяемая функциями $y_1 + t \cdot \eta_1, \ldots, y_n + t \cdot \eta_n$, лежит в Ω. Ограничения на $\boldsymbol{\eta}$ — те же, что при условии $|y_j| < M$, но малость $|t|$ зависит от расстояния между кривой Γ и границей области Ω.

Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — минимайзер в задаче на $\min\limits_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[\boldsymbol{y}]$. Тогда

$$\mathcal{J}[\boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta}] \geqslant \mathcal{J}[\boldsymbol{y}] \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) \overset{def}{=} \mathcal{J}[\boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta}] \geqslant \mathcal{J}[\boldsymbol{y}] = \varphi(0). \qquad (2.1)$$

[i] То есть кривая $\widetilde{\Gamma}$ определяется вектором $\tilde{\boldsymbol{y}}(x) = (\tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x))$.

Значит функция $\varphi(t)$ в точке $t = 0$ имеет минимальное значение, и так как она дифференцируема, то должно выполняться необходимое условие экстремума

$$\frac{d}{dt}\mathcal{J}[\boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta}]\bigg|_{t=0} = \frac{d\varphi}{dt}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{2.2}$$

Мы чуть позже используем это равенство для вывода уравнений для компонент минимайзера $\boldsymbol{y}(x) = (y_1, \ldots, y_n)$, а пока выясним его смысл. Имеем

$$\varphi(t) - \varphi(0) = t \cdot \varphi'(0) + o(t)$$

или

$$\mathcal{J}[\boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta}] - \mathcal{J}[\boldsymbol{y}] = t \cdot \frac{d}{dt}\mathcal{J}[\boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta}]\bigg|_{t=0} + o(t).$$

Таким образом, $t \cdot \varphi'(0)$ — главная часть приращения функции в окрестности $t = 0$, а $t \cdot \dfrac{d}{dt}\mathcal{J}[\boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta}]\bigg|_{t=0}$ — главная часть приращения значений функционала $\mathcal{J}[\boldsymbol{y}]$ в окрестности $\boldsymbol{y}$ для приращений аргумента $t \cdot \boldsymbol{\eta}$. Отметим, что эти утверждения не зависят от того, какой $\boldsymbol{y}$ взят из $\mathcal{K}$. Положим

$$\delta\mathcal{J} = t \cdot \frac{d}{dt}\mathcal{J}[\boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta}]\bigg|_{t=0.}$$

Величина $\delta\mathcal{J}$ называется *первой вариацией* функционала $\mathcal{J}[\boldsymbol{y}]$. Если $\boldsymbol{y}$ — минимайзер, то в силу (2.2)

$$\delta\mathcal{J} = 0. \tag{2.3}$$

Таким образом, необходимое условие экстремума — равенство нулю первой вариации. Уравнение (2.3) означает, что полагая

$$\tilde{\boldsymbol{y}} \overset{def}{=} \boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta} = (\underbrace{y_1 + t \cdot \eta_1}_{\tilde{y}_1} \ldots, \underbrace{y_i + t \cdot \eta_i}_{\tilde{y}_i} \ldots, \underbrace{y_n + t \cdot \eta_n}_{\tilde{y}_n})$$

получим:

$$t \cdot \frac{d}{dt}\mathcal{J}[\boldsymbol{y} + t \cdot \boldsymbol{\eta}]\bigg|_{t=0} = t\cdot$$

$$\cdot \frac{d}{dt}\int\limits_a^b \underbrace{F(x, y_1 + t \cdot \eta_1, \ldots, y_n + t \cdot \eta_n, y_1' + t \cdot \eta_1', \ldots, y_n' + t \cdot \eta_n')}_{\widetilde{F}}\, dx\Bigg|_{t=0} =$$

$$= t \cdot \int\limits_a^b \left(\sum_{i=1}^n \widetilde{F}_{\tilde{y}_i} \cdot \eta_i + \sum_{i=1}^n \widetilde{F}_{\tilde{y}'_i} \cdot \eta'_i \right) dx \Bigg|_{t=0} =$$

$$= t \cdot \int\limits_a^b \left(\sum_{i=1}^n F_{y_i} \cdot \eta_i + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \cdot \eta'_i \right) dx = 0. \quad (2.4)$$

Как было сказано на первой лекции, если под интегралом стоят производные от допустимого изменения, надо их истребить. Имеем

$$\int\limits_a^b \underbrace{F_{y'_i}}_{v} \cdot \underbrace{\eta'_i\, dx}_{du} = \underbrace{F_{y'_i} \cdot \eta_i \Big|_a^b}_{\substack{=0,\ \text{ибо} \\ \eta_i(a)=\eta_i(b)=0}} - \int\limits_a^b \frac{d}{dx} F_{y'_i} \cdot \eta_i \, dx =$$

$$= - \int\limits_a^b \frac{d}{dx} F_{y'_i} \cdot \eta_i \, dx, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получим

$$\delta \mathcal{J} = t \cdot \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) \cdot \eta_i \, dx = 0. \quad (2.6)$$

Пусть теперь $j \in [1, 2, \ldots, n]$. Выберем допустимое изменение $\boldsymbol{\eta}(x)$ так, что $\eta_i \equiv 0$, $i = \overline{1, j-1}, \overline{j+1, n}$, а η_j — произвольно. Тогда в силу (2.6)

$$\int\limits_a^b \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \cdot \eta_j \, dx = 0, \quad \forall \eta_j. \quad (2.7)$$

Отсюда, применяя лемму Лагранжа, получим

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \equiv 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.8)$$

То есть для нахождения минимайзера $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ мы должны решить систему n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Решение этой системы — функции $y_i = y_i(x, c_1, \ldots, c_{2n})$, где константы $c_1, \ldots, c_{2n}$ находятся из $2n$ граничных условий

$$y_i(a) = y_i^0, \; y_i(b) = y_i^1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.10)$$

Таким образом, если минимайзер существует, то мы его найдём, но в общем случае кривая Γ, определяемая решениями (2.9), (2.10), — лишь подозрительная на экстремум. Система (2.9) нsазывается системой Эйлера–Лагранжа. При её выводе в (2.5) мы использовали повышенную гладкость минимайзера.

3. Примеры решения системы Эйлера–Лагранжа

1) $F = F(x, y(x), z(x))$. Уравнения (2.9) примут вид $F_y = 0$, $F_z = 0$. Если $\dfrac{\partial(F_y, F_z)}{\partial(y, z)} \neq 0$, то отсюда находим $y = y(x)$, $z = z(x)$, и решения, удовлетворяющего граничным условиям в общем случае нет, так как нет зависимости $y(x)$, $z(x)$ от свободных констант.

   Задание. Привести примеры, когда $\dfrac{\partial(F_y, F_z)}{\partial(y, z)} \equiv 0$

2) $F = F(y', z')$. Система уравнений (2.9):
$$\frac{d}{dx}F_{y'} = 0,\ \frac{d}{dx}F_{z'} = 0,$$
   откуда
$$F_{y'} = c_1,\ F_{z'} = c_2. \tag{3.1}$$
   Если
$$\frac{\partial(F_{y'}, F_{z'})}{\partial(y', z')} \neq 0, \tag{3.2}$$
   то из системы (3.1) мы находим $y' = d_1$, $z' = d_2$. Но если якобиан для y и z в (3.2) равен нулю $x \in [a, b]$, то экстремали не только прямые. Например, пусть $F = (y' + z')^2$. Тогда решаемая система уравнений выглядит так:
$$\frac{d}{dx}(y' + z') = 0,$$
   то есть
$$y' + z' = c_1 \quad \Rightarrow \quad y + z = c_1 \cdot x + c_2.$$
   Следовательно, можно взять любую функцию $z(x)$, удовлетворяющую граничным условиям $z(a) = z^0$, $z(b) = z^1$, и далее положить $y = c_1 \cdot x + c_2 - z$, а константы найдём из условий $y(a) + z(a) = c_1 \cdot a + c_2$ и $y(b) + z(b) = c_1 \cdot b + c_2$

3) $F = F(x, y', z')$ — разобрать самостоятельно.

4) $F = F(y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ — нет явной зависимости от аргумента x. Докажем, что в этом случае система уравнений Эйлера–Лагранжа (2.9) имеет первый интеграл

$$F - \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot F_{y_i'} = C. \tag{3.3}$$

Проверим это так же, как и в случае $n = 1$. Подставим в (3.3) решения (2.9) и продифференцируем левую часть по x. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i} \cdot y_i' + \underline{\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \cdot y_i''} - \underline{\sum_{i=1}^{n} y_i'' \cdot F_{y_i'}} - \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot \frac{d}{dx} F_{y_i'} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot \underbrace{\left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right)}_{=0 \text{ в силу } (2.9)} = 0.$$

Значит, (3.3) — верно.

4. Принцип Гамильтона

Рассмотрим механическую систему. Она может состоять из конечного числа материальных точек или быть распределённой (например, струна или мембрана). Предположим, что под действием потенциальных сил система из какого-то состояния в момент t_0 переходит в другое состояние в момент $t = t_1$. Для нас состояние — это совокупность координат точек. Принцип Гамильтона даёт ответ на вопрос: по какой траектории система перейдёт (переместится) из начального состояния в конечное. Пусть $T(t)$ и $V(t)$ — кинетическая и потенциальная энергия системы в момент t и

$$\mathcal{J} \stackrel{def}{=} \int_{t_0}^{t_1} (T(t) - V(t))\, dt.$$

Интергал $\mathcal{J}$ называется интегралом действия. Принцип Гамильтона состоит в следующем:

> Переход системы из одного состояния в другое происходит по траектории, которая обращает в ноль вариацию $\delta\mathcal{J}$ от интеграла действия, то есть равенство $\delta\mathcal{J} = 0$ должно быть соотношением, определяющим траекторию системы.

Принцип Гамильтона не доказывается — это обобщение опытных фактов.

Применим принцип Гамильтона к системе n материальных точек, находящихся под действием потенциальных сил. Пусть m_i и $\boldsymbol{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$ — масса и радиус-вектор i–ой точки. Пусть в начальный момент t_0 координаты i-й частицы были (x_i^0, y_i^0, z_i^0), а в конечный момент t_1 — (x_i^1, y_i^1, z_i^1), $i = \overline{1,n}$. Пусть $\boldsymbol{F_i} = (X_i, Y_i, Z_i)$ — сила, действующая на i–ю точку. Предположим, что силы $\boldsymbol{F_i}$ — потенциальны, то есть $\exists U = U(t, \boldsymbol{r_1}, \ldots, \boldsymbol{r_n})$ так, что

$$\boldsymbol{F_i} = -\nabla_i U \quad \Rightarrow \quad X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i},\ Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Мы считаем (и это видно из записи U), что потенциал U не зависит от скоростей $(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$ частиц[i]. Кинетическая энергия системы

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)}{2},$$

потенциальная

$$V = U.$$

Заметим, что потенциальная энергия системы совпадает с потенциалом сил, если эти силы действуют на систему, и отличается знаком от потенциала, если сама система работает. Таким образом,

$$\mathcal{J} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)}{2} - U \right) dt.$$

Из равенства $\delta \mathcal{J} = 0$ следуют уравнения Эйлера–Лагранжа, которые мы уже выводили. Имеем

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i} = 0, \quad F_{y_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}_i} = 0, \quad F_{z_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{z}_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

То есть

$$X_i - m_i \cdot \ddot{x}_i = 0, \quad Y_i - m_i \cdot \ddot{y}_i = 0, \quad Z_i - m_i \cdot \ddot{z}_i = 0, \quad i = \overline{1,n}. \quad (4.1)$$

Таким образом, мы получили уравнения, выражающие второй закон Ньютона.

Докажем теперь закон сохранения энергии в рассматриваемой ситуации при условии, что потенциал U не зависит явно от времени.

[i] Точка над функцией означает производную по времени.

Как мы установили, в рассматриваемом случае, когда $F = T - V$ не зависит явно от переменной t, у системы Эйлера–Лагранжа есть первый интеграл

$$F - \sum_{i=1}^{n} (\dot{x}_i \cdot F_{\dot{x}_i} + \dot{y}_i \cdot F_{\dot{y}_i} + \dot{z}_i \cdot F_{\dot{z}_i}) = const,$$

то есть

$$T - U - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) = T - U - 2 \cdot T = -T - U = const.$$

Но $U = V$, и поэтому $T+V = const$, то есть суммарная энергия системы не зависит от времени.

5. Вариационные задачи для функционалов, зависящих от старших производных

Сразу скажем, что в деталях мы будем изучать вариационные задачи для функционалов, зависящих от второй производной, ибо присутствие производных более высокого порядка не приводит ни к каким принципиальным отличиям. Но сначала, как всегда, — пример реальной задачи, в которой необходимо будет минимизировать функционал, зависящий от второй производной.

Задача о равновесии балки с жёстко закреплёнными концами.
Непрогнувшаяся балка занимала бы отрезок $[-l, l]$ оси x. Но балка прогнулась и её возможный профиль $y = y(x)$ дан на картинке.

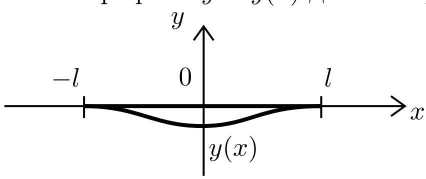


Рис. 2.2

Балка жёстко закреплена на концах, поэтому кроме условия обычного закрепления $y(-l) = y(l) = 0$ должно выполняться условие $y'(-l) = y'(l) = 0$. В положении равновесия у балки будет минимальное значение потенциальной энергии. Когда происходит прогиб балки, то потенциальная энергия за счёт силы тяжести уменьшается, так как уменьшается ордината центра тяжести, и увеличивается за счёт появления изгибающего момента. Запишем полное выражение потенциальной энергии балки без вывода

$$E[y] = g \cdot \int\limits_{-l}^{+l} \rho \cdot \sqrt{1 + y'^2} \cdot y \, dx + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-l}^{+l} \frac{\mu \cdot y''^2}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} \, dx. \tag{5.1}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность на единицу длины балки, μ — коэффициент, описывающий упругие свойства балки. Так как её прогиб, очевидно, небольшой, то $|y'| \ll 1$. Поэтому в (5.1) можно пренебречь членом y'^2, и, таким образом, окончательно мы приходим к задаче:

$$\text{найти } \min_{y \in \mathcal{K}} E[y], \text{ где } E[y] = \int\limits_{-l}^{+l} \left(g \cdot \rho \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot y''^2 \right) dx,$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(l) = y'(l) = y(-l) = y'(-l) = 0 \right\}.$$

После построения общей теории мы вернёмся к этой задаче и решим её.

Лекция 3

1. Вариационные задачи для функционалов, зависящих от старших производных (продолжение)

Итак, мы рассматриваем функционал

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y', y'')\, dx. \tag{1.1}$$

Считаем, что $F \in \mathcal{C}^3$, $x \in [a, b]$, $|y| < M$, $\forall y'$, y''. Будем искать минимум функционала (1.1) в классе функций

$$\mathcal{K} = \Big\{ y(x) \Big| \, y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a) = y_0,\, y'(a) = y'_0, \\ y(b) = y_1,\, y'(b) = y'_1,\ |y| < M \Big\}.$$

Как обычно, предполагаем, что минимайзер существует. Обозначим его через y и введём понятие допустимого изменения $\eta(x)$ по аналогии с предыдущими случаями.

Определение 1.1. $\eta(x)$ — **допустимое изменение**, если

$$\tilde{y} \overset{def}{=} y + t \cdot \eta \in \mathcal{K}, \quad \text{при } |t| \ll 1.$$

Отсюда

$$\eta = \frac{\tilde{y} - y}{t},$$

и поэтому

$$\eta \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}, \quad \eta(a) = \eta'(a) = \eta(b) = \eta'(b) = 0.$$

Далее

$$\mathcal{J}[y + t \cdot \eta] \geqslant \mathcal{J}[y], \quad |t| \ll 1, \tag{1.2}$$

и, полагая $\varphi(t) = \mathcal{J}[y + t \cdot \eta]$, видим, что

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(0). \tag{1.3}$$

Так как $t = 0$ — точка минимума для функции $\varphi(t)$, то должно выполняться необходимое условие минимума,

$$\varphi'(0) = 0, \tag{1.4}$$

то есть

$$\frac{d}{dt}\mathcal{J}[y + t \cdot \eta]\bigg|_{t=0} = 0. \tag{1.5}$$

Дадим истолкование левым частям (1.4), (1.5), не предполагая, что η — допустимое изменение, а считая только $\eta \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}$. Тогда по формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t \cdot \varphi'(0) + o(t)$$

и

$$\varphi(t) - \varphi(0) = t \cdot \varphi'(0) + o(t).$$

Соответственно,

$$\mathcal{J}[y + t \cdot \eta] = \mathcal{J}[y] + t \cdot \frac{d}{dt}\mathcal{J}[y + t \cdot \eta]\bigg|_{t=0} + o(t)$$

и

$$\mathcal{J}[y + t \cdot \eta] - \mathcal{J}[y] = t \cdot \frac{d}{dt}\mathcal{J}[y + t \cdot \eta]\bigg|_{t=0} + o(t).$$

Назовём величину $t \cdot \dfrac{d}{dt}\mathcal{J}[y + t \cdot \eta]\bigg|_{t=0}$ *первой вариацией* и обозначим через $\delta\mathcal{J}$. Таким образом, первая вариация — это главная часть приращения функционала $\mathcal{J}[y]$ при замене y на $y + t \cdot \eta$. Из (1.5) следует, что если y — минимайзер (или максимайзер — рассуждения не меняются), то

$$\delta\mathcal{J} = 0. \tag{1.6}$$

Найдём выражение для первой вариации. Имеем

$$\delta\mathcal{J} = t \cdot \frac{d}{dt}\mathcal{J}[y + t \cdot \eta]\bigg|_{t=0} =$$

$$= t \cdot \frac{d}{dt}\int\limits_a^b F(x, y + t \cdot \eta, y' + t \cdot \eta', y'' + t \cdot \eta'')\, dx\Bigg|_{t=0}.$$

Вводим обычные обозначения $\tilde{y} \overset{def}{=} y + t\cdot\eta$, $\widetilde{F} \overset{def}{=} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}'')$. Тогда

$$\delta\mathcal{J} = t\cdot\int\limits_a^b \left(\widetilde{F}_{\tilde{y}}\cdot\eta + \widetilde{F}_{\tilde{y}'}\cdot\eta' + \widetilde{F}_{\tilde{y}''}\cdot\eta''\right)dx\Bigg|_{t=0} =$$
$$= t\cdot\int\limits_a^b \left(F_y\cdot\eta + F_{y'}\cdot\eta' + F_{y''}\cdot\eta''\right)dx.$$

Как уже говорилось раньше, надо избавиться от η', η'' под знаком интеграла. Сделаем это, проведя интегрирование по частям. При этом мы будем использовать повышенную гладкость минимайзера. Имеем

$$\int\limits_a^b \underbrace{F_{y'}}_{u}\cdot\underbrace{\eta'\,dx}_{dv} = F_{y'}\cdot\eta\Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{d}{dx}F_{y'}\cdot\eta\,dx,$$

$$\int\limits_a^b \underbrace{F_{y''}}_{u}\cdot\underbrace{\eta''\,dx}_{dv} = F_{y''}\cdot\eta'\Big|_a^b - \int\limits_a^b \underbrace{\frac{d}{dx}F_{y''}}_{u}\cdot\underbrace{\eta'\,dx}_{dv} =$$
$$= \left(F_{y''}\cdot\eta' - \frac{d}{dx}F_{y''}\cdot\eta\right)\Bigg|_a^b + \int\limits_a^b \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\cdot\eta\,dx.$$

Подставляя эти результаты в выражение для $\delta\mathcal{J}$, получим

$$\delta\mathcal{J} = t\cdot\left[\left(F_{y'}\cdot\eta + F_{y''}\cdot\eta' - \frac{d}{dx}F_{y''}\cdot\eta\right)\Bigg|_a^b + \right.$$
$$\left. + \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right)\cdot\eta\,dx\right]. \quad \text{(B)}$$

Это главная часть приращения функционала $\mathcal{J}[y]$ при замене y на $y+$ $+t\cdot\eta$. Мы её вывели при $y\in\mathcal{C}^4$. Для этой формулы введено обозначение (B), так как формула (A) была на первой лекции, но для $F = F(x, y, y')$.

Пусть η — допустимое изменение. Тогда в силу (1.6) приравнивая $\delta\mathcal{J} = 0$, мы получаем уравнение, из которого с помощью леммы Лагранжа выведем уравнение для минимайзера. Так как η — допустимое изменение, то $\eta = \eta' = 0$, при $x = a, b$, и поэтому внеинтегральных членов в $\delta\mathcal{J}$ не будет, и равенство $\delta\mathcal{J} = 0$ влечёт соотношение

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right) \cdot \eta\, dx = 0, \quad \forall\eta \text{ — допустимое.}$$

Откуда с помощью леммы Лагранжа получим для минимайзера *уравнение Эйлера–Пуассона*:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0. \tag{1.7}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение четвёртого порядка и его решение $y = y(x, c_1, c_2, c_3, c_4)$.

Из граничных условий в общем случае константы $c_1, \ldots, c_4$ можно найти:

$$y_0 = y(a, c_1, \ldots, c_4),\ y_0' = y'(a, c_1, \ldots, c_4),$$
$$y_1 = y(b, c_1, \ldots, c_4),\ y_1' = y'(b, c_1, \ldots, c_4).$$

Для простоты мы ограничились случаем, когда интегрант зависит от производных только первого и второго порядка. Но на этом же пути можно рассмотреть случай, когда интегрант зависит от производных любого порядка. Приведём без доказательства полученные результаты.

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx,$$
$$F \in \mathcal{C}^{n+1},\ x \in [a, b],\ |y| < M,\ y', \ldots, y^{(n)} \text{ — любые},$$
$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) | y \in \mathcal{C}^n_{[a,b]},\ y^{(j)}(a) = y_0^{(j)},\ y^{(j)}(b) = y_1^{(j)},\ j = \overline{0, n-1} \right\},$$

здесь $y^{(0)}(x) \equiv y(x)$, $y_0^{(j)}$ и $y_1^{(j)}$ — произвольные фиксированные константы. Тогда минимайзер в задаче на $\min\limits_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$ удовлетворяет уравнению

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0, \tag{1.8}$$

решение которого ищется в классе $y \in \mathcal{C}^{2n}_{[a,b]}$, $y^{(j)}(a) = y_0^{(j)}$, $y^{(j)}(b) = y_1^{(j)}$, $j = \overline{0, n-1}$.

Разумеется всё, что мы говорили о решениях уравнений Эйлера–Лагранжа, мы повторяем и здесь: если экстремайзер существует, то мы его ищем, решая (1.8). Если о его существовании ничего не известно, то решение (1.8) — кривая, подозрительная на экстремум. Если (1.8) не имеет решений, то экстремайзера нет. Исследование знака второй вариации подсказывает, чем может являться найденная экстремаль (точнее — чем не может...)

Возвратимся к задаче о равновесии балки. Мы получили там функционал

$$E[y] = \int\limits_{-l}^{+l} \left(g \cdot \rho \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot y''^2 \right) dx,$$

где g, ρ, μ — постоянные. Уравнение Эйлера–Пуассона

$$g \cdot \rho + \mu \cdot y^{IV} = 0,$$

откуда

$$y(x) = -\frac{g \cdot \rho}{4! \cdot \mu} \cdot x^4 + c_1 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x + c_4.$$

Используя граничные условия $y(-l) = y(+l) = y'(-l) = y'(+l) = 0$, получим

$$y = -\frac{g \cdot \rho}{24 \cdot \mu} (x - l)^2 \cdot (x + l)^2.$$

2. Вариационные задачи со свободной границей для функционалов, зависящих от функций одной переменной

До сих пор мы рассматривали вариационные задачи, в которых допустимые функции принимали заданные значения на границах отрезка. Но это вовсе не обязательно. Вернёмся к задаче о брахистохроне. Мы установили, что время скатывания материальной точки с высоты y_0 по кривой $y(x)$ до правой стенки

$$T[y] = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot (y_0 - y)}}\, dx.$$

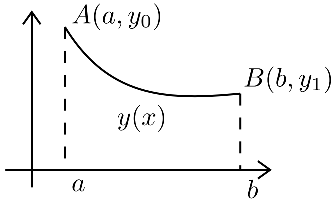


Рис. 3.1

Мы искали минимум функционала по траекториям, для которых были заданы начальная и конечная точки. Но можно поставить задачу по-другому: не задавать конечную точку! И тогда класс $\mathcal{K}$ допустимых кривых будет выглядеть так:

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y(a) = y_0,\ |y| < M \right\}.$$

Найти $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} T[y]$.

Переходим к общему случаю. Пусть функционал $\mathcal{J}[y]$ тот же, что в первой лекции:

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx, \quad F \in \mathcal{C}^2,\ x \in [a,b],\ |y| < M,\ \forall y';$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ |y| < M \right\}.$$

Допустимы любые кривые класса $\mathcal{C}^1_{[a,b]}$, $|y| < M$.

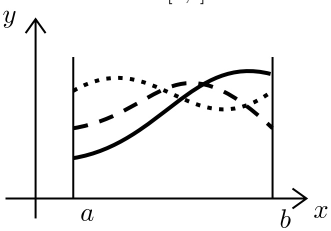


Рис. 3.2

Пусть y — минимайзер в задаче на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$. Функция η — допустимое изменение, если

$$\tilde{y} \overset{def}{=} y + t \cdot \eta \in \mathcal{K}, \quad |t| \ll 1.$$

Отсюда следует, что единственное ограничение на η — требование гладкости: $\eta(x) \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$. Рассуждая стандартным образом, мы получим, что необходимое условие экстремума — это обращение в ноль первой вариации. Выражение для первой вариации даётся равенством (A) первой лекции. Перепишем его:

$$\delta\mathcal{J} = t \left\{ \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \cdot \eta\, dx + F_{y'} \cdot \eta \Big|_a^b \right\}. \tag{2.1}$$

Так как y — экстремайзер, то $\delta\mathcal{J} = 0$, при $\forall\eta$ — допустимом. Возьмём

$\eta(a) = \eta(b) = 0$. Тогда из равенства $\delta\mathcal{J} = 0$ получим

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) \cdot \eta \, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}, \; \eta(a) = \eta(b) = 0.$$

Отсюда в силу леммы Лагранжа получаем уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) не зависит от выбора η (η туда не входит). Поэтому в силу (2.1) для любых η

$$\delta\mathcal{J} = t \cdot F_{y'} \cdot \eta \Big|_a^b = 0.$$

Взяв сначала $\eta(b) = 1$, $\eta(a) = 0$, получим $F_{y'}\big|_{x=b} = 0$; при $\eta(b) = 0$, $\eta(a) = 1$ получим $F_{y'}\big|_{x=a} = 0$. Таким образом, несмотря на отсутствие граничных условий в классе допустимых функций $\mathcal{K}$, экстремайзер должен удовлетворять так называемым *естественным граничным условиям* (ЕГУ)

$$F_{y'}(a, y(a), y'(a)) = 0; \; F_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0. \tag{2.3}$$

Разумеется, если на каком-то конце отрезка граничные условия заданы, то на этом конце ЕГУ отсутствует.

Рассмотрим важный частный случай

$$F = \frac{A(x,y)}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad A(x,y) > 0.$$

В этом случае на свободном конце ЕГУ

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{A(x,y) \cdot 2 \cdot y'}{(1+y'^2)^{3/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 0.$$

То есть траектория ортогональна к границе.

Варианты с неполным заданием граничных условий могут быть и в случае функционалов, зависящих от старших производных. Рассмотрим

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y', y'') \, dx.$$

Мы решали задачу на

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y],$$

где

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a),\, y'(a),\, y(b),\, y'(b) \text{ — заданы},\ |y| < M \right\}.$$

Давайте рассмотрим теперь класс допустимых функций

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a) = y_0,\, y'(b) = y_1^{(1)},\ |y| < M \right\}.$$

Таким образом, в отличие от рассмотренного ранее случая, свободны $y'(a)$ и $y(b)$. Пусть $\eta(x) \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}$. Мы находим главную часть приращения

$$\mathcal{J}[y + t \cdot \eta] - \mathcal{J}[y] = \delta\mathcal{J} + o(t),$$

где $\delta\mathcal{J}$ даётся равенством (B) текущей лекции (на стр. 34).

Функция $\eta(x)$ — допустимое изменение для задачи $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$, если

$$\tilde{y} \stackrel{def}{=} y + t \cdot \eta \in \mathcal{K}, \quad t \ll 1.$$

Так как

$$\eta = \frac{\tilde{y} - y}{t},$$

то

$$\eta(a) = 0,\ \eta'(b) = 0.$$

Значения $\eta'(a)$ и $\eta(b)$ — свободны. Разумеется, $\eta \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}$. Условие экстремума: $\delta\mathcal{J} = 0$ при допустимых η. Так как не запрещено взять $\eta(a) = \eta'(a) = \eta(b) = \eta'(b) = 0$, то, как и раньше, в силу (B)[i], получим для минимайзера $y(x)$ уравнение

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0.$$

Поэтому в формуле первой вариации в случае минимайзера останутся только внеинтегральные члены, которые должны равняться нулю.

---

[i]

$$\delta\mathcal{J} = t \cdot \left[\left(F_{y'} \cdot \eta + F_{y''} \cdot \eta' - \frac{d}{dx} F_{y''} \cdot \eta \right) \Bigg|_a^b + \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \right) \cdot \eta \, dx \right]. \quad \text{(B)}$$

Имеем

$$\left(F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''}\right) \cdot \eta \,\Big|_a^b + F_{y''} \cdot \eta' \,\Big|_a^b = 0. \tag{2.4}$$

Так как $\eta(a) = 0$ и $\eta'(b) = 0$, то из (2.4) получим

$$\left(F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''}\right)\Big|_{x=b} \cdot \eta(b) - F_{y''}\Big|_{x=a} \cdot \eta'(a) = 0. \tag{2.5}$$

Отсюда, полагая сначала $\eta'(a) = 0$, $\eta(b) = 1$, имеем

$$\left(F_{y'} - \frac{d}{dx}F_{y''}\right)\Big|_{x=b} = 0, \tag{2.6}$$

а потом при $\eta'(a) = 1$, $\eta(b) = 0$ получим

$$F_{y''}\Big|_{x=a} = 0. \tag{2.7}$$

(2.6) и (2.7) — это ЕГУ в данном случае.

Прежде чем переходить к другому типу задач, вернёмся к стандартной задаче со свободной границей, но вместо функционала

$$\mathcal{J}[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

рассмотрим функционал

$$\widehat{\mathcal{J}}[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx + d_1 \cdot y^2(a) + d_2 \cdot y^2(b), \tag{2.8}$$

где $d_1 \geqslant 0$, $d_2 \geqslant 0$ — фиксированные константы. Раньше мы не могли рассматривать подобные функционалы, поскольку $y(a)$ и $y(b)$ были заданы и добавка $d_1 \cdot y^2(a) + d_2 \cdot y^2(b)$ являлась бы фиксированным числом, не зависящим от $y(x)$. Но теперь у нас $y(a)$ и $y(b)$ не заданы и значение $\widehat{\mathcal{J}}[y]$ зависит от них. Пусть

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ |y| < M \right\},\ \eta \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}.$$

Тогда, как и раньше, $\tilde{y} = y + t \cdot \eta \in \mathcal{K}$, при $y \in \mathcal{K}$, $t \ll 1$. Если y — минимайзер, то

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathcal{J}}[y + t \cdot \eta]\Big|_{t=0} = 0,$$

то есть в силу (2.1)

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\cdot\eta\,dx + F_{y'}\cdot\eta\Big|_a^b + 2\cdot d_1\cdot y(a)\cdot\eta(a) + 2\cdot d_2\cdot y(b)\cdot\eta(b) = 0. \quad (2.9)$$

Отсюда при $\eta(a) = \eta(b) = 0$ получаем, как и раньше, уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dy}F_{y'} = 0,$$

и поэтому (2.9) запишется в виде

$$(F_{y'} + 2\cdot d_2\cdot y)\cdot\eta\Big|_{x=b} + (-F_{y'} + 2\cdot d_1\cdot y)\cdot\eta\Big|_{x=a} = 0. \quad (2.10)$$

Из (2.10) сначала при $\eta(a) = 1$, $\eta(b) = 0$, а потом при $\eta(a) = 0$, $\eta(b) = 1$ получим ЕГУ для данного случая

$$F_{y'}(b, y(b), y'(b)) = -2\cdot y(b)\cdot d_2,\;\; F_{y'}(a, y(a), y'(a)) = 2\cdot y(a)\cdot d_1. \quad (2.11)$$

Пример, когда возникают функционалы вида (2.8), будет приведён позже.

3. Задачи с «подвижными концами»

В рассмотренных нами случаях появления естественных граничных условий интервал, на котором были заданы допустимые функции, – это $[a, b]$. Однако есть целый ряд задач, в которых интервал не задан, ибо он может быть разным для разных допустимых функций. Такая ситуация возникает, когда концы кривых, отвечающих допустимым функциям $y(x)$, лежат на некоторых заданных фиксированных кривых. Рассмотрим пример.

Пусть в плоской среде со скоростью распространения света $v(x, y)$ заданы две кривые $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$.

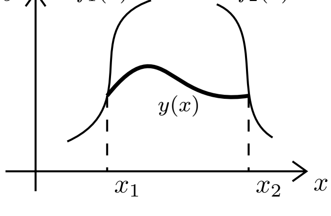


Рис. 3.3

Задача: найти точку на кривой $y_1 = f_1(x)$ так, чтобы свет из неё до кривой $y_2 = f_2(x)$ дошёл за минимальное время, и найти траекторию светового луча.

Пусть $y(x)$ — произвольная кривая из $\mathcal{C}^1$ и $y(x_1) = f_1(x_1)$, $y(x_2) = f_2(x_2)$. Тогда время прохождения света по кривой $y = y(x)$ есть

$$T[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y(x))}\, dx,$$

где $v(x, y(x))$ — скорость света в точке $x,\ y(x)$. Нужно найти $\min T[y]$ по всем гладким функциям $y(x)$, «графики» которых пересекают заданные кривые.

Дадим точную постановку задачи в общем случае. Пусть даны две кривые $y_1 = f_1(x)$, $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$; $y_2 = f_2(x)$, $a_2 \leqslant x \leqslant b_2$, $a \overset{def}{=} \min\{a_1, a_2\}$, $b \overset{def}{=} \max\{b_1, b_2\}$. Определим класс функций

$$\mathcal{K} = \Big\{ y(x) \Big| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ \exists x_1, x_2 \text{ такие, что } y(x_1) = f_1(x_1),$$
$$y(x_2) = f_2(x_2),\ x_1 \in (a_1, b_1),\ x_2 \in (a_2, b_2),\ |y| < M \Big\},$$

где точки x_1, x_2, конечно, зависят от функции y. Пусть

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx,$$

где $F \in \mathcal{C}^2,\ x \in [a,b],\ |y| < M,\ \forall y'$. Мы решаем задачу на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$. Пусть $y(x)$ — минимайзер в этой задаче, пересекающий граничные кривые в некоторых точках α_0 и β_0, не являющихся крайними, то есть

$$y(\alpha_0) = f_1(\alpha_0), \quad y(\beta_0) = f_2(\beta_0), \quad a_1 < \alpha_0 < b_1, \quad a_2 < \beta_0 < b_2.$$

Кроме того, мы предполагаем, что в точках α_0, β_0 нет касания граничных кривых, то есть

$$y'(\alpha_0) \neq f_1'(\alpha_0), \quad y'(\beta_0) \neq f_2'(\beta_0).$$

Допустимое изменение $\eta(x)$ определяем, как обычно, условием $\tilde{y} \overset{def}{=} y + t \cdot \eta \in \mathcal{K}$, при $|t| \ll 1$. Ясно, что единственное ограничение на η — требование $\eta(x) \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$. Точки пересечения кривой $\tilde{y} = y + t \cdot \eta$ с граничными кривыми обозначим через $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

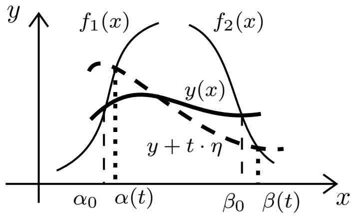


Рис. 3.4

Таким образом,

$$\mathcal{J}[y + t \cdot \eta] = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(x, y + t \cdot \eta, y' + t \cdot \eta')\, dx \geqslant \mathcal{J}[y] = \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} F(x, y, y')\, dx.$$

Абсолютно так же, как раньше, получим, что главная часть $\delta\mathcal{J}$ приращения

$$\mathcal{J}[y + t \cdot \eta] - \mathcal{J}[y] = \delta\mathcal{J} + \ldots,$$

есть

$$\delta\mathcal{J} = t \cdot \frac{d}{dx}\mathcal{J}[y + t \cdot \eta]\Big|_{t=0} \text{ — первая вариация,}$$

и что на минимайзере

$$\delta\mathcal{J} = 0.$$

Положим, как обычно, $\tilde{y} = y + t \cdot \eta$, $\widetilde{F} = F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')$ и найдём выражение для $\delta\mathcal{J}$. Имеем

$$\delta\mathcal{J} = t \cdot \frac{d}{dt} \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\, dx \Bigg|_{t=0} = t \cdot \Bigg\{ \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\widetilde{F}_{\tilde{y}} \cdot \eta + \widetilde{F}_{\tilde{y}'} \cdot \eta'\right) dx \Bigg|_{t=0} +$$

$$+ \Big[F\big(\beta(t), y(\beta(t)) + t \cdot \eta(\beta(t)), y'(\beta(t)) + t \cdot \eta'(\beta(t))\big) \cdot \beta'(t) -$$

$$- F\big(\alpha(t), y(\alpha(t)) + t \cdot \eta(\alpha(t)), y'(\alpha(t)) + t \cdot \eta'(\alpha(t))\big) \cdot \alpha'(t)\Big]_{t=0} \Bigg\} =$$

$$= t \cdot \Bigg\{ \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(F_y \cdot \eta + F_{y'} \cdot \eta'\right)\, dx + F\big(\beta_0, y(\beta_0), y'(\beta_0)\big) \cdot \beta'(0) -$$

$$- F\big(\alpha_0, y(\alpha_0), y'(\alpha_0)\big) \cdot \alpha'(0) \Bigg\}. \quad (3.1)$$

Производные $\beta'(0)$ и $\alpha'(0)$ находим из равенств

$$\tilde{y}(\alpha(t)) = y(\alpha(t)) + t\cdot\eta(\alpha(t)) = f_1(\alpha(t));$$
$$\tilde{y}(\beta(t)) = y(\beta(t)) + t\cdot\eta(\beta(t)) = f_2(\beta(t)).$$

Продифференцируем эти равенства по t и положим $t=0$. Получим

$$y'(\alpha_0)\cdot\alpha'(0) + \eta(\alpha_0) = f_1'(\alpha_0)\cdot\alpha'(0),$$
$$y'(\beta_0)\cdot\beta'(0) + \eta(\beta_0) = f_2'(\beta_0)\cdot\beta'(0).$$

Отсюда

$$\alpha'(0) = \frac{\eta(\alpha_0)}{f_1'(\alpha_0) - y'(\alpha_0)}, \quad \beta'(0) = \frac{\eta(\beta_0)}{f_2'(\beta_0) - y'(\beta_0)}. \tag{3.2}$$

Именно здесь мы использовали тот факт, что график минимайзера не касается граничных кривых, а их пересекает (то есть производные $f_1'(\alpha_0)\neq y'(\alpha_0)$, $f_2'(\beta_0)\neq y'(\beta_0)$). Далее интегрируем по частям

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} \underbrace{F_{y'}}_{u}\cdot\underbrace{\eta'\,dx}_{dv} = F_{y'}\cdot\eta\,\Big|_{\alpha_0}^{\beta_0} - \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0}\frac{d}{dx}F_{y'}\cdot\eta\,dx. \tag{3.3}$$

Учтём формулы (3.2), (3.3) в выражении (3.1) для $\delta\mathcal{J}$ и запишем, что $\delta\mathcal{J}=0$

$$t\cdot\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\cdot\eta\,dx + \left(F\cdot\frac{\eta}{f_2'-y'} + F_{y'}\cdot\eta\right)\Big|_{x=\beta_0} - \right.$$
$$\left. - \left(F\cdot\frac{\eta}{f_1'-y'} + F_{y'}\cdot\eta\right)\Big|_{x=\alpha_0}\right\} = 0. \tag{3.4}$$

Взяв здесь $\eta(\alpha_0)=\eta(\beta_0)=0$ и применяя лемму Лагранжа, получим, что минимайзер удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{3.5}$$

Учитывая это, получаем согласно (3.4)

$$\left(\frac{F}{f_2'-y'} + F_{y'}\right)\cdot\eta\Big|_{x=\beta_0} - \left(\frac{F}{f_1'-y'} + F_{y'}\right)\cdot\eta\Big|_{x=\alpha_0} = 0.$$

Полагая здесь $\eta(\beta_0)=1$, $\eta(\alpha_0)=0$, а потом $\eta(\beta_0)=0$, $\eta(\alpha_0)=1$, получим условия

$$\Big(F + (f_2'-y')\cdot F_{y'}\Big)\Big|_{x=\beta_0} = 0, \quad \Big(F + (f_1'-y')\cdot F_{y'}\Big)\Big|_{x=\alpha_0} = 0. \tag{3.6}$$

Условия (3.6) называются *условиями трансверсальности*. Они играют ту же роль, что ЕГУ.

При решении уравнения (3.5) мы получили $y = y(x, c_1, c_2)$. Для нахождения неизвестных $c_1,\ c_2,\ \alpha_0,\ \beta_0$ у нас есть четыре условия: два в (3.6) и два условия

$$y(\alpha_0) = f_1(\alpha_0),\ y(\beta_0) = f_2(\beta_0).$$

Задание. Пусть $F(x, y, y') = A(x, y) \cdot \sqrt{1 + y'^2}$ и $A(x, y) > 0$. Докажите, что в этом случае условия трансверсальности переходят в условия ортогональности.

Лекция 4

1. Изопериметрические задачи

Переходим к изучению нового типа задач, в которых на допустимые функции накладывается требование типа

$$\int_a^b G(x, y, y')\, dx = l,$$

где l — заданное число, а $G(x, y, y')$ — некоторая известная функция. Рассмотрим пример.

Задача о равновесии тяжёлой нерастяжимой нити.

Пусть тяжёлая нить плотности ρ подвешена в точках (a, y_0), (b, y_1).

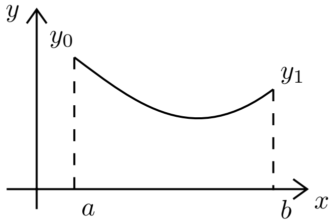


Рис. 4.1

Ясно, что её положение будет отвечать минимальному значению потенциальной энергии[i]

$$E[y] = \int_a^b g \cdot \rho \cdot \sqrt{1 + y'^2} \cdot y\, dx, \quad y(a) = y_0,\ y(b) = y_1,$$

при условии нерастяжимости

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l,$$

[i]В этом смысле задача похожа на задачу о равновесии балки, только здесь нет изгибающего момента, но есть условие нерастяжимости.

где l — длина нити. Надо найти $\min E[y]$ при описанных здесь условиях.

Сформулируем теперь общую постановку задачи. Пусть

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx,\ F \in \mathcal{C}^2,\ x \in [a,b],\ |y| < M,\ y' \text{ — любое},$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \,\middle|\, y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y(a) = y_0,\ y(b) = y_1,\ |y| < M,\ \int\limits_a^b G(x,y,y')\,dx = l \right\}.$$

Надо найти $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$. Пусть

$$\mathcal{J}_1[y] \stackrel{def}{=} \int\limits_a^b G(x,y,y')\,dx.$$

Будем предполагать, что ни одна из функций $y(x) \in \mathcal{K}$ не является экстремалью функционала $\mathcal{J}_1[y]$, то есть не удовлетворяет уравнению

$$G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \equiv 0. \tag{1.1}$$

Если это не так, то есть $\exists y \in \mathcal{K}$, для которого (1.1) выполняется, то тогда, считая, что функционал $\mathcal{J}_1[y]$ принимает на экстремалях экстремальные значения, получаем, что $\mathcal{J}_1[y] = l$ — экстремальное значение. Но это равенство должно выполняться на любой функции из $\mathcal{K}$. Значит, весь класс $\mathcal{K}$ в этом случае состоит из экстремалей функционала $\mathcal{J}_1[y]$. Но экстремаль — в общем случае — одна. Поэтому при выполнении (1.1) мы получаем, что, как правило, весь класс $\mathcal{K}$ вырождается в одну функцию и задача на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$ теряет смысл.

Введём понятие допустимого изменения для рассматриваемой задачи. Оно в данном случае определяется не стандартно, что вызвано особенностями задачи.

Определение 1.1. Пусть $y(x)$ — минимайзер рассматриваемой задачи. Функцию

$$\eta(x) \stackrel{def}{=} t \cdot \eta_1(x) + \alpha(t) \cdot \eta_2(x)$$

назовём **допустимым изменением**, если удаётся найти такую функцию $\alpha(t)$, $\alpha(0) = 0$ и такую функцию $\eta_2(x)$, что $\tilde{y} \stackrel{def}{=} y + \eta(x) \in \mathcal{K}$, при $|t| \ll 1$ и любых $\eta_1(x)$.

Построим $\eta(x)$. Функции $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ берём из $\mathcal{C}^1_{[a,b]}$, $\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0$, $i = 1, 2$. Попробуем обеспечить выполнение условия $\mathcal{J}_1[\tilde{y}] = l$. Положим

$$\Psi(t, \alpha) \overset{def}{=} \int\limits_a^b \overbrace{G\big(x, \underbrace{y + t\cdot\eta_1 + \alpha(t)\cdot\eta_2}_{\tilde{y}}, \underbrace{y' + t\cdot\eta_1' + \alpha(t)\cdot\eta_2'}_{\tilde{y}'}\big)}^{\widetilde{G}}\, dx.$$

Нам надо найти η_2 и функцию $\alpha(t)$ так, чтобы при $\forall \eta_1$ и $|t| \ll 1$

$$\Psi(t, \alpha(t)) \equiv l, \quad |t| \ll 1. \tag{1.2}$$

Попробуем из (1.2) найти $\alpha(t)$ в окрестности $t = 0$, $\alpha = 0$, зная, что, очевидно, при $t = 0$, $\alpha(0) = 0$ (1.2) выполняется. По теореме о неявных функциях, для этого надо, чтобы $\Psi_\alpha(0, 0) \neq 0$. Имеем

$$\left.\frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\substack{t=0\\ \alpha=0}} = \left.\int\limits_a^b \left(\widetilde{G}_{\tilde{y}}\cdot\eta_2 + \widetilde{G}_{\tilde{y}'}\cdot\eta_2'\right)\, dx\right|_{\substack{t=0\\ \alpha=0}} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(G_y\cdot\eta_2 + G_{y'}\cdot\eta_2'\right)\, dx = \int\limits_a^b \left(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}\right)\cdot\eta_2\, dx + G_{y'}\cdot\eta_2\Big|_a^b =$$

$$= \int\limits_a^b \left(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}\right)\cdot\eta_2\, dx. \tag{1.3}$$

Если бы правая часть (1.3) равнялась нулю при $\forall \eta_2$, $\eta_2 \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$, $\eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$, то в силу леммы Лагранжа выполнялось бы (1.1). Но (1.1) — не верно по предположению. Значит мы можем найти η_2 так, что

$$\left.\frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\substack{t=0\\ \alpha=0}} \neq 0. \tag{1.4}$$

Выберем такую функцию $\eta_2(x)$ и зафиксируем её. После этого в силу (1.4), по теореме о неявных функциях, из равенства (1.2), *верного при* $t = 0$, $\alpha = 0$, мы находим $\alpha(t)$, $|t| \ll 1$, обеспечивая тем самым выполнение изопериметрического условия. Таким образом, при выбранных $\alpha = \alpha(t)$ и η_2 функция $\eta = t\cdot\eta_1(x) + \alpha(t)\cdot\eta_2(x)$ — допустимое изменение.

Для дальнейшего нам понадобится

$$\left.\frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ \alpha=0}}.$$

Чтобы найти эту величину, достаточно в (1.3) заменить η_2 на η_1, и мы получим

$$\left.\frac{\partial\Psi(t,\alpha)}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ \alpha=0}} = \int\limits_a^b \left(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}\right)\cdot\eta_1\,dx. \tag{1.5}$$

Возвратимся теперь к нашему доказательству. Так как $\tilde{y} = y+\eta \in \mathcal{K}$, то, поскольку y — минимайзер, то

$$\mathcal{J}[y+\eta] \geqslant \mathcal{J}[y]. \tag{1.6}$$

Если положить $\varphi(t) \overset{def}{=} \mathcal{J}[y + t\cdot\eta_1 + \alpha(t)\cdot\eta_2]$, то $\varphi(0) = \mathcal{J}[y]$, и (1.6) означает, что

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(0). \tag{1.7}$$

Значит, функция $\varphi(t)$ принимает минимальное значение при $t = 0$, и поэтому

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{1.8}$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} &= \left.\frac{d\mathcal{J}[y + t\cdot\eta_1 + \alpha(t)\cdot\eta_2]}{dt}\right|_{t=0} = \\
&= \left.\frac{d}{dt}\int\limits_a^b \overbrace{F\big(x, \underbrace{y + t\cdot\eta_1 + \alpha(t)\cdot\eta_2}_{\tilde{y}}, \underbrace{y' + t\cdot\eta_1' + \alpha(t)\cdot\eta_2'}_{\tilde{y}'}\big)}^{\widetilde{F}}\,dx\right|_{t=0} = \\
&= \left.\int\limits_a^b \Big[\widetilde{F}_{\tilde{y}}\cdot\big(\eta_1 + \alpha'(t)\cdot\eta_2\big) + \widetilde{F}_{\tilde{y}'}\cdot\big(\eta_1' + \alpha'(t)\cdot\eta_2'\big)\Big]\,dx\right|_{t=0} = \\
&= \int\limits_a^b \big[F_y\cdot\big(\eta_1 + \alpha'(0)\cdot\eta_2\big) + F_{y'}\cdot\big(\eta_1' + \alpha'(0)\cdot\eta_2'\big)\big]\,dx = 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Обычное интегрирование по частям показывает, что

$$\int\limits_a^b F_{y'}\cdot\big(\eta_1' + \alpha'(0)\cdot\eta_2'\big)\,dx = -\int\limits_a^b \frac{d}{dx}F_{y'}\cdot\big(\eta_1 + \alpha'(0)\cdot\eta_2\big)\,dx. \tag{1.10}$$

Далее находим $\alpha'(0)$. Так как

$$\Psi(t,\alpha(t)) \equiv l, \quad |t| \ll 1,$$

то, дифференцируя это тождество по t, получим

$$\left.\frac{d\Psi}{dt}\right|_{t=0} = \Psi_t + \Psi_\alpha \cdot \alpha'(0) = 0.$$

Откуда

$$\alpha'(0) = -\frac{\Psi_t(0,0)}{\Psi_\alpha(0,0)} = -\frac{\int\limits_a^b \left(G_y - \dfrac{d}{dx}G_{y'}\right) \cdot \eta_1 \, dx}{\int\limits_a^b \left(G_y - \dfrac{d}{dx}G_{y'}\right) \cdot \eta_2 \, dx}, \tag{1.11}$$

где в силу (1.4) знаменатель не равен нулю.

Подставим выражения (1.10) и (1.11) в равенство (1.9) и затем там сгруппируем слагаемые, содержащие η_1 и η_2. Получим

$$\left.\frac{d}{dt}\mathcal{J}[y + t \cdot \eta_1 + \alpha(t) \cdot \eta_2]\right|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left[F_y \cdot \big(\eta_1 + \alpha'(0) \cdot \eta_2\big) + F_{y'} \cdot \big(\eta_1' + \alpha'(0) \cdot \eta_2'\big)\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) \cdot \eta_1 \, dx -$$

$$- \frac{\int\limits_a^b \left(G_y - \dfrac{d}{dx}G_{y'}\right) \cdot \eta_1 \, dx}{\int\limits_a^b \left(G_y - \dfrac{d}{dx}G_{y'}\right) \cdot \eta_2 \, dx} \cdot \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) \cdot \eta_2 \, dx = 0. \tag{1.12}$$

Отношение

$$\frac{\int\limits_a^b \left(F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'}\right) \cdot \eta_2 \, dx}{\int\limits_a^b \left(G_y - \dfrac{d}{dx}G_{y'}\right) \cdot \eta_2 \, dx}$$

обозначим через λ.

Подставляя в (1.12), получим

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\cdot\eta_1\,dx - \lambda\cdot\int\limits_a^b \left(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}\right)\cdot\eta_1\,dx = 0,$$

откуда, полагая

$$F^* = F - \lambda\cdot G,$$

окончательно получим

$$\int\limits_a^b \left(F^*_y - \frac{d}{dx}F^*_{y'}\right)\cdot\eta_1\,dx = 0, \quad \forall\eta_1. \tag{1.13}$$

По лемме Лагранжа отсюда получаем (так как η_1 — произвольное)

$$F^*_y - \frac{d}{dx}F^*_{y'} = 0. \tag{1.14}$$

Из (1.14) находим $y = y(x, c_1, c_2, \lambda)$.

Для нахождения неизвестных c_1, c_2, λ у нас есть граничные условия

$$y(a, c_1, c_2, \lambda) = y_0, \quad y(b, c_1, c_2, \lambda) = y_1$$

и изопериметрическое условие

$$\int\limits_a^b G(x, y, y')\,dx = l.$$

Рассмотрим (без доказательства) некоторые обобщения.

1. Рассмотрим ситуацию, когда изопериметрических условий — несколько.

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx,$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y(a) = y_0,\ y(b) = y_1, \right.$$

$$\left. \int\limits_a^b G_i(x, y, y')\,dx = l_i,\ i = \overline{1, m} \right\}.$$

В этом случае для нахождения минимайзера составляют

$$F^* = F - \sum_{i=1}^m \lambda_i\cdot G_i.$$

Далее для F^* пишем уравнение Эйлера и оттуда находим $y = y(x, c_1, c_2, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Неизвестные $c_1, c_2, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ находятся из двух граничных и m изопериметрических условий

$$\int\limits_a^b G_i(x, y, y')\,dx = l_i,\ i = \overline{1, m}.$$

Заметим, что совершенно аналогичная ситуация имеет место, если $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор. Тогда мы получим не одно уравнение, а систему уравнений Эйлера–Лагранжа

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

и

$$y_j = y_j(x, c_1, \ldots, c_{2n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

Неизвестные константы $c_1, \ldots, c_{2n}$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ определяются из $2n$ граничных условий

$$y_j\Big|_{x=a} = y_j^0, \quad y_j\Big|_{x=b} = y_j^1, \quad j = \overline{1, n}$$

и m изопериметрических условий

$$\int\limits_a^b G_i(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,dx = l_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

2. Рассматриваем функционал

$$\mathcal{J}[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,dx$$

в классе

$$\mathcal{K} = \Big\{ y_1, \ldots, y_n \Big| y_i(a) = y_i^0,\ y_i(b) = y_i^1,\ y_i(x) \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}, \\ |y_i| < M,\ i = \overline{1, n},\ G_j(x, y_1, \ldots, y_n) = 0,\ j = \overline{1, m} \Big\}$$

или в классе

$$\mathcal{K}' = \Big\{ y_1, \ldots, y_n \Big| y_i(a) = y_i^0,\ y_i(b) = y_i^1,\ y_i(x) \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}, \\ |y_i| < M,\ i = \overline{1, n},\ G_j(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0,\ j = \overline{1, m} \Big\}.$$

При решении задачи на $\min\limits_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y_1,\dots,y_n]$ или $\min\limits_{y\in\mathcal{K}'} \mathcal{J}[y_1,\dots,y_n]$ условия связи выражаются некоторыми (не интегральными) соотношениями. В случае класса $\mathcal{K}$ связи называются **голономными**, в случае класса $\mathcal{K}'$ — когда связи содержат производные — **неголономными**.

Рассмотрим сначала голономные связи

$$G_j(x,y_1,\dots,y_n)=0, \quad j=\overline{1,m}. \tag{1.15}$$

Если $m=n$, то в общем случае (когда соответствующий якобиан не равен нулю) из (1.15) функции $y_1,\dots,y_n$ как функции от x находятся однозначно и ни о какой экстремальной задачи речи нет. При $m>n$ (1.15) — переопределённая система — как правило — и опять вариационная задача не имеет смысла. Поэтому далее считаем $m<n$. Решение задачи на $\min \mathcal{J}[y_1,\dots,y_n]$ в классе $\mathcal{K}$ возможно двумя способами.

a. Из m условий связи (1.15) выражаем m функций y_j через x и остальные. Например $y_1,\dots,y_m$ через $x,y_{m+1},\dots,y_n$. После этого мы забываем об условиях (1.15) и подставляем $y_j=f_j(x,y_{m+1},\dots,y_n)$, $j=\overline{1,m}$ в функционал $\mathcal{J}[y_1,\dots,y_n]$. Получим

$$\mathcal{J}[f_1,f_2,\dots,f_m,y_{m+1},\dots,y_n]=\widehat{\mathcal{J}}[y_{m+1},\dots,y_n]=$$
$$=\int\limits_a^b \widehat{F}(x,y_{m+1},\dots,y_n,y'_{m+1},\dots,y'_n)\,dx,$$

который минимизируется в классе $\mathcal{K}$, *но без учёта* голономных связей. Мы получили обычную задачу, рассмотренную на 2[ой] лекции, и для экстремалей будем иметь уравнения

$$\widehat{F}_{y_j}-\frac{d}{dx}\widehat{F}_{y'_j}=0, \quad j=\overline{m+1,n}.$$

Чем плох этот способ? Он неоправданно выделяет из n функций какие-то m, что приводит к минимизации по остальным $(n-m)$... А может, с физической точки , надо было не первые m выражать, а какие-то другие.[i]

b. Рекомендуемый в литературе метод. Составляют функцию

$$F^*=F-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\cdot G_i. \tag{$*$}$$

[i]**Непедагогичное замечание**: мне этот метод нравится.

Далее пишут систему уравнений

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.16}$$

то есть

$$F_{y_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \cdot \frac{\partial G_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

и плюс m уравнений (1.15). В случае неголономных связей рецептура та же, то есть аналогично $(*)$ составляется F^* и затем рассматриваем (1.15) вместе с (1.16).

Приведём пример решения изопериметрической задачи. Среди кривых, соединяющих точки A и B и ограничивающих вместе с отрезками aA и bB заданную площадь S, найти кривую наименьшей длины.

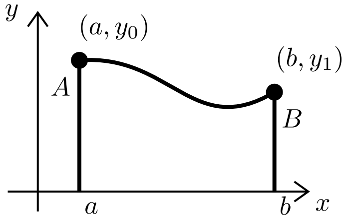


Рис. 4.2

Итак, минимизируемый функционал

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \,\middle|\, y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}\ y(a) = y_0,\, y(b) = y_1,\ \int\limits_a^b y\, dx = S \right\}.$$

Ищем $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$. Для функционала $\mathcal{J}_1[y] = \int\limits_a^b y\, dx$ значение S — не экстремальное, поэтому применима общая теория

$$F^* \stackrel{def}{=} \sqrt{1 + y'^2} - \lambda \cdot y \quad \Rightarrow \quad F^*_y - \frac{d}{dx} F^*_{y'} = 0.$$

Так как F^* не содержит x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$F^* - y' \cdot F^*_{y'} = c_1$, то есть

$$\sqrt{1+y'^2} - \lambda \cdot y - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1 + \lambda \cdot y \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(c_1+\lambda \cdot y)^2} = 1 + y'^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{\frac{1}{(c_1+\lambda \cdot y)^2} - 1} = \pm\frac{\sqrt{1-(c_1+\lambda \cdot y)^2}}{c_1+\lambda \cdot y} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \pm\frac{c_1+\lambda \cdot y}{\sqrt{1-(c_1+\lambda \cdot y)^2}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x + c_2 = \pm\sqrt{1-(c_1+\lambda \cdot y)^2} \;/\; \lambda \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (x+c_2)^2 + (y+c_3)^2 = 1 \;/\; \lambda^2.$$

остальное — дело техники.

2. Квадратичный функционал. Оператор Штурма–Лиувилля

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b \Big(Q \cdot y'^2 + P \cdot y^2\Big)\, dx,$$

где $Q(x) \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$, $Q(x) > 0$, $x \neq a$, $P(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, или $P(x) \geqslant 0$, $P(x) \in$ $\in \mathcal{C}_{(a,b]}$. Класс функций

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \,\middle|\, y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0,\ \int\limits_a^b y^2\, dx = 1 \right\}.$$

Покажем, что $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y] > -\infty$, то есть задача отыскания $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$ имеет смысл. Очевидно,

$$\mathcal{J}[y] \geqslant \int\limits_a^b P \cdot y^2\, dx \geqslant P_0 > -\infty, \text{ где } P_0 = \inf_{x \in [a,b]} P(x).$$

Далее, значение $\mathcal{J}_1[y] = \int\limits_a^b y^2\, dx = 1$ — не является экстремальным для функционала $\mathcal{J}_1[y]$, поэтому применима общая теория решения изопериметрических задач. Положим

$$F^* \stackrel{def}{=} F - \lambda \cdot G = Q \cdot y'^2 + P \cdot y^2 - \lambda \cdot y^2$$

и напишем для F^* уравнение Эйлера

$$2 \cdot P \cdot y - 2 \cdot \lambda \cdot y - 2 \cdot \frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big) = 0$$

или

$$-\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big) + P \cdot y = \lambda \cdot y. \tag{2.1}$$

Решение (2.1) ищем в классе $y(x) \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}$, $y(a) = y(b) = 0$.
Оператор в левой части (2.1) называется оператором Штурма–Лиувилля и обозначается через L, то есть (2.1) запишется в виде

$$Ly = \lambda \cdot y. \tag{2.2}$$

Оператор L рассматривается в области

$$\mathcal{D}_L = \Big\{ y(x) \Big| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0 \Big\}.$$

Очевидно, что оператор L — линейный, и решения (2.2) — это собственные функции, отвечающие собственному значению λ.

Далее мы займёмся изучением свойств собственных функций и собственных значений в (2.2). Для того, чтобы понять, что можно ожидать в общем случае, мы рассмотрим сначала случай постоянных коэффициентов: $Q = c_1$, $P = c_2$, причём $Q > 0$, а в качестве отрезка $[a, b]$ возьмём отрезок $[0, l]$. Таким образом, мы приходим к задаче

$$-c_1 \cdot y'' + c_2 \cdot y = \lambda \cdot y \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{\lambda - c_2}{c_1} \cdot y = 0, \tag{2.3}$$

при $y(0) = y(l) = 0$. Обозначим $\omega^2 \stackrel{def}{=} (\lambda - c_2) \,/\, c_1$ и покажем, что $\omega^2 > 0$[i]. Умножим (2.3) на $\overline{y}$ и проинтегрируем по $[0, l]$. Тогда, так как

$$\int\limits_0^l \underbrace{\overline{y}}_{u} \cdot \underbrace{y''\,dx}_{dv} = \underbrace{y' \cdot \overline{y}\Big|_0^l}_{\substack{=0,\ \text{ибо} \\ y(0)=y(l)=0}} - \int\limits_0^l |y'|^2\,dx = -\int\limits_0^l |y'|^2\,dx,$$

[i]Мы пока не знаем, может быть, ω^2 — отрицательно или не вещественно.

то получим

$$-\int_0^l |y'|^2\,dx + \omega^2 \cdot \int_0^l |y|^2\,dx = 0,$$

то есть

$$\omega^2 \geqslant 0.$$

При $\omega = 0$ получаем $y' \equiv 0$, то есть $y = const$, но $y(0) = 0$. Значит, $y \equiv 0$, что нас не устраивает, поэтому $\omega^2 > 0$.

Таким образом, (2.3) приобретает вид

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0,$$

и решение

$$y(x) = d_1 \cdot \sin\big(\omega \cdot x\big) + d_2 \cdot \cos\big(\omega \cdot x\big),$$

где d_1, d_2 — произвольные константы. Так как $y(0) = 0$, то $d_2 = 0$. Так как $y(l) = 0$, то

$$d_1 \cdot \sin\big(\omega \cdot l\big) = 0.$$

Поскольку $d_1 \neq 0$ (иначе $y(x) \equiv 0$), то

$$\sin\big(\omega \cdot l\big) = 0$$

и, значит,

$$\omega \cdot l = \pi \cdot k, \quad k = 1, \ldots,$$

откуда

$$\omega_k = \frac{\pi \cdot k}{l}, \quad \frac{\lambda_k - c_2}{c_1} = \left(\frac{\pi \cdot k}{l}\right)^2, \quad \lambda_k = c_1 \cdot \left(\frac{\pi \cdot k}{l}\right)^2 + c_2,$$

а собственные функции

$$y_k = d_{1k} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k}{l} \cdot x\right).$$

Для выполнения изопериметрического условия считаем

$$\int_0^l y_k^2\,dx = d_{1k}^2 \cdot \int_0^l \left(\sin\left(\frac{\pi \cdot k}{l} \cdot x\right)\right)^2 dx =$$

$$= d_{1k}^2 \cdot \int_0^l \frac{1 - \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{l} \cdot x\right)}{2}\,dx = d_{1k}^2 \cdot \frac{l}{2} = 1,$$

откуда $d_{1k} = \pm\sqrt{\frac{2}{l}}$. Окончательно получаем, что

$$y_k = \pm\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k}{l} \cdot x\right), \quad \lambda_k = c_1 \cdot \left(\frac{\pi \cdot k}{l}\right)^2 + c_2.$$

Что мы узнали в нашем частном случае:

1. Собственные значения — вещественны.
2. Собственные значения λ_k стремятся к ∞ со скоростью k^2.
3. Собственные пространства $\mathcal{U}_{\lambda_k}$, отвечающие собственным значениям λ_k — одномерны (или по-другому: каждому собственному значению отвечает единственная — с точностью до знака— собственная функция, для которой выполнено изопериметрическое условие).
4. Собственные функции y_k и y_m, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_k \neq \lambda_m$, удовлетворяют соотношению
$$\int\limits_0^l y_k \cdot y_m \, dx = 0, \quad k \neq m.$$
5. Из теории рядов Фурье следует, что если $y(x) \in \mathcal{C}^2_{[0,l]}$ и $y(0) = y(l) = 0$, то
$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k}{l} \cdot x\right),$$
где A_k — коэффициенты Фурье, и ряд по собственным функциям сходится равномерно.

Мы выяснили, что можно ожидать от свойств собственных значений и собственных функций оператора Штурма. Далее мы установим, что и в случае переменных (а не постоянных!) коэффициентов $Q(x)$ и $P(x)$ выполняются утверждения 1.–5.

Лекция 5

1. Квадратичный функционал. Оператор Штурма–Лиувилля (продолжение)

Возвращаемся к оператору Штурма с переменными коэффициентами

$$Ly = -\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big) + P \cdot y \tag{1.1}$$

в области

$$\mathcal{D}_L = \Big\{ y(x) \Big| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0 \Big\}.$$

Оператор L будем рассматривать в пространстве $\mathscr{L}_2[a,b]$.

$$\mathscr{L}_2[a,b] \overset{def}{=} \left\{ y(x) \middle| \int\limits_a^b |y(x)|^2\,dx < +\infty \right\}.$$

Пространство $\mathscr{L}_2[a,b]$ состоит из функций, которые интегрируемы с квадратом в смысле Лебега, мы же рассматриваем только функции интегрируемые по Риману, как и в предыдущих курсах математики.[i]

В $\mathscr{L}_2[a,b]$ введём скалярное произведение: при $y(x),\ z(x) \in \mathscr{L}_2[a,b]$

$$(y, z) \overset{def}{=} \int\limits_a^b y(x) \cdot \overline{z}(x)\,dx$$

и норму

$$\|y\| \overset{def}{=} \sqrt{\int\limits_a^b |y(x)|^2\,dx}.$$

Определение 1.1. Под **сходимостью** $z_m \to z$ в $\mathscr{L}_2[a,b]$ мы будем понимать сходимость по норме

$$\|z_m - z\| \to 0, \quad m \to \infty.$$

[i]Заметим, что если функция интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу, и оба интеграла совпадают.

Данная сходимость называется сходимостью в среднем или в среднеквадратичном. Действительно, пусть $\Delta x = (b-a)/n$ и $x_i \in i$-му отрезку Δx

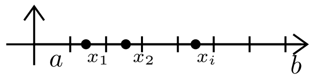


Рис. 5.1

$$\|z_m - z\| = \sqrt{\int\limits_a^b \left|z_m(x) - z(x)\right|^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|z_m(x_i) - z(x_i)\right|^2}{n} \cdot (b-a)},$$

а это и есть среднее с точностью до множителя $\sqrt{b-a}$.

Зачем нужно пространство $\mathscr{L}_2(a,b)$? В курсе линейной алгебры [1] мы изучали линейные операторы в пространствах со скалярным произведением и выделили некоторые классы операторов, обладающих важными свойствами. Для нас будут важны симметричные (эрмитовы) операторы A, для которых

$$(Ay, z) = (y, Az)$$

при y, $z \in \mathcal{D}_A$ (в области определения A). Мы покажем далее, что оператор Штурма — эрмитов.

Есть ещё одно преимущество рассмотрения пространства $\mathscr{L}_2(a,b)$: это сходимость.

Определение 1.2. Если $z_m(x)$ — последовательность непрерывных функций, то говорят, что она **сходится равномерно** к функции $z(x)$ если

$$\sup_{x\in[a,b]} |z_m(x) - z(x)| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Определение 1.3. Расстояние между функциями в равномерной метрике — это

$$\sup_{x\in[a,b]} |z_m(x) - z(x)|.$$

Например, пусть $[a, b] = [0, 1]$ и

$$\begin{aligned} z &= 1 \quad && x \in [0,1], \\ z_m &= 0 && x \in [0,1], \end{aligned}$$

тогда

$$\boxed{\sup_{x\in[0,1]} |z_m(x) - z(x)| = 1.}$$

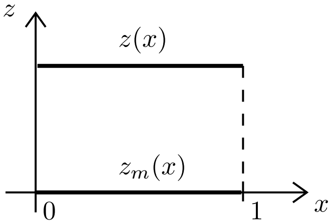


Рис. 5.2

Пусть

$$\tilde z_m = \begin{cases} m\cdot x & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{m} \\ 1 & \frac{1}{m}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad z-\tilde z_m = \begin{cases} 1-m\cdot x & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{1}{m}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

и

$$\boxed{\sup_{x\in[0,1]} |\tilde z_m(x) - z(x)| = 1.}$$

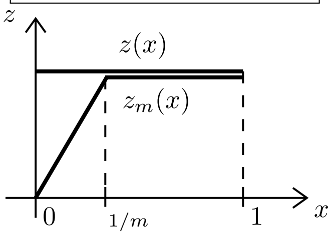


Рис. 5.3

Сравним две последовательности: z_m и $\tilde z_m$.

$z_m - z{=}1$ во всех точках

$\tilde z_m - z{=}1$ только при $x = 0$, а при $1 \big/ m \leqslant x \leqslant 1$ $\tilde z = z$.

Но метрика $\sup\limits_{x\in[0,1]} |\tilde z_m(x) - z(x)|$ этого не чувствует, хотя при $m\to\infty$ интервал совпадений функций $\tilde z_m$ и z стремится ко всему интервалу! В тоже время $\|z_m - z\| = 1$, а

$$\|\tilde z_m - z\|^2 = \int\limits_0^{1/m} (m\cdot x - 1)^2\,dx \to 0,$$

то есть метрика в $\mathscr{L}_2[a,b]$ «чувствует» ситуацию и описывает её более точно.

Вернёмся теперь к оператору L. Докажем, что оператор L — эрмитов в $\mathcal{D}_L$. Пусть $y(x)$, $z(x) \in \mathcal{D}_L$. Тогда

$$(Ly, z) = \int\limits_a^b \underbrace{\overline{z}}_{v} \cdot \underbrace{\left(-\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big)\right) dx}_{du} + \int\limits_a^b P \cdot y \cdot \overline{z}\, dx =$$

$$= -Q \cdot y' \cdot \overline{z}\,\Big|_a^b + \int\limits_a^b (Q \cdot y' \cdot \overline{z}' + P \cdot y \cdot \overline{z})\, dx.$$

Так как $z(a) = z(b) = 0$, то в итоге

$$\big(Ly, z\big) = \int\limits_a^b (Q \cdot y' \cdot \overline{z}' + P \cdot y \cdot \overline{z})\, dx. \tag{1.2}$$

Далее $\big(y, Lz\big) = \overline{\big(Lz, y\big)}$. Значит, для получения $\big(y, Lz\big)$ надо в (1.2) поменять местами y и z и взять комплексное сопряжение. Если это сделать, то окажется, что

$$\big(Ly, z\big) = \big(y, Lz\big),$$

то есть оператор L — эрмитов. Отсюда следует, что его собственные значения вещественны. Действительно, пусть $Ly = \lambda \cdot y$. Умножим на y скалярно обе части. Получим

$$\big(Ly, y\big) = \lambda \cdot \|y\|^2,$$

но $\big(Ly, y\big) = \big(y, Ly\big)$ — в силу эрмитовости, а $\big(y, Ly\big) = \overline{\big(Ly, y\big)}$. Значит $\big(Ly, y\big)$ — вещественно, то есть λ — вещественно. Кстати, это можно было получить из (1.2), полагая там $z = y$:

$$\big(Ly, y\big) = \int\limits_a^b \big(Q \cdot |y'|^2 + P \cdot |y|^2\big)\, dx = \mathcal{J}[y]^{\mathrm{i}}. \tag{1.3}$$

Так как λ — вещественно, то собственные функции оператора L можно считать вещественными, ибо если $y = \mathcal{R}e\, y + i \cdot \mathcal{I}m\, y$, то

$$L\left(\mathcal{R}e\, y + i \cdot \mathcal{I}m\, y\right) = \lambda \cdot \left(\mathcal{R}e\, y + i \cdot \mathcal{I}m\, y\right)$$

и, значит,

$$L\mathcal{I}m\, y = \lambda \cdot \mathcal{I}m\, y, \quad L\mathcal{R}e\, y = \lambda \cdot \mathcal{R}e\, y.$$

[i] Конечно $\big(Ly, y\big) = \mathcal{J}[y]$ — для вещественных y.

Далее, собственные функции оператора L, отвечающие его различным собственным значениям, взаимно ортогональны. Докажем это. Имеем

$$Ly = \lambda \cdot y, \quad Lz = \nu \cdot z, \quad y,\, z \in \mathcal{D}_L, \quad \lambda \neq \nu.$$

Тогда

$$\big(y, z\big) = 0. \tag{1.4}$$

Действительно, умножим равенство $Ly = \lambda \cdot y$ на z скалярно. Получим

$$\big(Ly, z\big) = \lambda \cdot \big(y, z\big),$$

но

$$\big(Ly, z\big) = \big(y, Lz\big) = \big(y, \nu \cdot z\big) = \nu \cdot \big(y,\, z\big)^{\mathrm{i}}.$$

Таким образом,

$$\big(Ly, z\big) = \nu \cdot \big(y, z\big) = \lambda \cdot \big(y, z\big) \quad \Rightarrow \quad \big(\nu - \lambda\big) \cdot \big(y, z\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(y, z\big) = 0.$$

То есть (1.4) — доказано.

Докажем теперь, что собственные подпространства оператора Штурма одномерны (эквивалентная формулировка: собственные значения не вырождены[ii]).

Итак, пусть

$$Ly = \lambda \cdot y \tag{1.5}$$

и

$$\mathcal{U}_\lambda = \left\{ y(x) | y \in \mathcal{D}_L,\ Ly = \lambda \cdot y \right\}.$$

Докажем, что $\dim \mathcal{U}_\lambda = 1$. Перепишем равенство (1.5) в виде

$$-\frac{d}{dx}\big(Q \cdot y'\big) + P \cdot y = \lambda \cdot y \quad \Rightarrow \quad -Q \cdot y'' - Q' \cdot y' + P \cdot y = \lambda \cdot y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'' + \frac{Q'(x)}{Q(x)} \cdot y' + \frac{\lambda - P}{Q(x)} \cdot y = 0, \tag{1.6}$$

так как $\mathcal{U}_\lambda \subset \mathcal{D}_L$. Таким образом, все собственные функции из собственного подпространства есть решения уравнения (1.6) с граничными условиями $y(a) = y(b) = 0$.

Пусть $y_1,\, y_2 \in \mathcal{U}_\lambda$. Так как оператор L — линейный, то любая линейная комбинация

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 \in \mathcal{U}_\lambda$$

[i] Напомним, что ν — вещественно.

[ii] Напомним, что мы называем собственное значение λ **вырожденным**, если для собственного подпространства $\mathcal{U}_\lambda$ выполняется $\dim \mathcal{U}_\lambda \geqslant 2$.

и, значит, удовлетворяет (1.6). Положим

$$y(x) \stackrel{def}{=} y_1(x) \cdot y_2'(a) - y_2(x) \cdot y_1'(a).$$

В силу граничных условий $y_1(a) = y_2(a) = 0$, и поэтому $y(a) = 0$. Далее

$$y'(x) = y_1'(x) \cdot y_2'(a) - y_2'(x) \cdot y_1'(a).$$

Очевидно, $y'(a) = 0$. Таким образом, решение $y(x)$ уравнения (1.6) удовлетворяет условию $y(a) = y'(a) = 0$. При $Q(a) \neq 0$, в силу теоремы единственности решение $y(x)$ совпадает с решением $y \equiv 0$. Таким образом,

$$y_1(x) \cdot y_2'(a) - y_2(x) \cdot y_1'(a) \equiv 0. \tag{1.7}$$

$y_1'(a) \neq 0$, ибо иначе $y_1 \equiv 0$, поскольку $y_1(a) = 0$, поэтому из (1.7)

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \frac{y_2'(a)}{y_1'(a)}.$$

Следовательно, любые решения (1.6) (то есть любая функция из $\mathcal{U}_\lambda$) получается умножением фиксированной функции на подходящую константу. Поэтому $\dim \mathcal{U}_\lambda = 1$, что и требовалось доказать.

Следствие. Нормированная собственная функция, отвечающая данному собственному значению, единственна с точностью до знака.

Задание. Доказательство проведено в случае $Q(x) > 0$, $x \in [a, b]$, но у нас будет и другой случай: $Q(x) = x$, $[a, b] = [0, R]$. Здесь $Q(a) = 0$. Как провести доказательство в этом случае?

2. Экстремальные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма

Решая задачу на

$$\min_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y], \quad \mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b \left(Q\cdot y'^2 + P\cdot y^2\right)\,dx$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y\in\mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y(a)=y(b)=0,\ \int\limits_a^b y^2\,dx = 1 \right\},$$

мы пришли к тому, что минимайзер есть собственная функция оператора Штурма

$$Ly = \lambda\cdot y, \tag{2.1}$$

где

$$Ly = -\frac{d}{dx}\bigl(Q\cdot y'\bigr) + P\cdot y, \quad \mathcal{D}_L = \left\{ y(x) \middle| y\in\mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a)=y(b)=0 \right\}.$$

Рассматривая случаи постоянных коэффициентов $Q(x)=c_1$, $P(x)=$ $=c_2$, мы нашли *бесконечную серию* собственных значений λ_k и соответствующих собственных функций y_k. Естественно, возникает вопрос: какое отношение имеют эти собственные значения и собственные функции к функционалу $\mathcal{J}[y]$ и вообще к вариационным задачам? Ответ на этот вопрос дают теоремы 2.1–2.3, которые мы сейчас сформулируем и докажем для оператора Штурма с переменными коэффициентами. Нам удобно в дальнейшем переобозначить класс $\mathcal{K}$, положив $\mathcal{K}_1\equiv\mathcal{K}$.

Теорема 2.1. Минимайзер задачи на $\min\limits_{y\in\mathcal{K}_1} \mathcal{J}[y]$ есть собственная функция $y_1(x)$ оператора Штурма, отвечающая его наименьшему собственному значению λ_1 и $\lambda_1 = \mathcal{J}[y_1]$.

Теорема 2.2. Пусть

$$\mathcal{K}_2 \overset{def}{=} \left\{ y(x) \middle| y\in\mathcal{K}_1,\ \bigl(y,y_1\bigr)=0 \right\}.$$

Тогда минимайзер задачи на $\min\limits_{y\in\mathcal{K}_2} \mathcal{J}[y]$ есть собственная функция $y_2(x)$ оператора Штурма, отвечающая его второму по величине собственному значению λ_2, и $\lambda_2 = \mathcal{J}[y_2]$.

Теорема 2.3. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ — нормированные собственные функции оператора Штурма, отвечающие его первым $p-1$ (по величине) собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$, и

$$\mathcal{K}_p \overset{def}{=} \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{K}_1,\ \big(y, y_j\big) = 0,\ j = \overline{1, p-1} \right\}.$$

Тогда минимайзер в задаче на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}_p} \mathcal{J}[y]$ есть собственная функция, отвечающая p-ому (по величине) собственному значению λ_p оператора Штурма, и $\lambda_p = \mathcal{J}[y_p]$.

Переходим к доказательству теорем 2.1–2.3. Всюду считаем, что минимайзеры в рассматриваемых задачах существуют (доказательство — вне нашего курса).

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $y_1(x)$ — минимайзер в задаче на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}_1} \mathcal{J}[y]$. Как мы знаем, тогда

$$Ly_1 = \lambda \cdot y_1$$

и $\lambda = \big(Ly_1, y_1\big) = \mathcal{J}[y_1]$. Покажем, что λ — наименьшее собственное значение λ_1 оператора L. Пусть ν — произвольное собственное значение оператора L и $z = z(x)$ — соответствующая собственная функция: $Lz = \nu \cdot z$. Считаем, что $\|z\| = 1$ и тогда $\nu = \big(Lz, z\big) = \mathcal{J}[z]$. Но $z \in \mathcal{D}_L$ и $\|z\| = 1$, поэтому $z \in \mathcal{K}_1$ и, значит, $\mathcal{J}[z] \geqslant \min\limits_{y \in \mathcal{K}_1} \mathcal{J}[y] = \mathcal{J}[y_1]$. Но $\mathcal{J}[y_1] = \lambda$ и значит $\nu \geqslant \lambda$. Таким образом, λ действительно наименьшее собственное значение λ_1 оператора Штурма, а y_1 — соответствующая собственная функция. □

Доказательство теоремы 2.2. Пусть

$$\mathcal{K}_2 = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{K}_1,\ \big(y, y_1\big) = 0 \right\},$$
$$\left[\mathcal{K}_1 = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0,\ \|y\| = 1 \right\} \right].$$

и y_2 — минимайзер в задаче на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}_2} \mathcal{J}[y]$. Найдём уравнение для y_2. Согласно общей теории изопериметрических задач, составляем

$$F^* = F - \lambda \cdot y^2 - \mu \cdot y \cdot y_1$$

и пишем уравнение Эйлера

$$F^*_y - \frac{d}{dx} F^*_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot P \cdot y_2 - 2 \cdot \lambda \cdot y_2 - \mu \cdot y_1 - 2 \cdot \frac{d}{dx}\big(Q \cdot y_2'\big) = 0,$$

где λ и μ — неизвестные константы.

Перепишем это уравнение в виде

$$Ly_2 = \lambda \cdot y_2 + \frac{\mu}{2} \cdot y_1. \tag{2.2}$$

Докажем, что $\mu = 0$. Умножим обе части (2.2) на y_1 скалярно. Получим

$$\big(Ly_2, y_1\big) = \lambda \cdot \big(y_2, y_1\big) + \frac{\mu}{2} \cdot \|y_1\|^2, \tag{2.3}$$

но $\big(Ly_2, y_1\big) = \big(y_2, Ly_1\big) = \lambda_1 \cdot \big(y_2, y_1\big)$. Поскольку $y_2 \in \mathcal{K}_2$, то $\big(y_2, y_1\big) = 0$ поэтому в (2.3)

$$0{,}5 \cdot \mu \cdot \|y_1\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0.$$

Следовательно, (2.2) переходит в

$$Ly_2 = \lambda \cdot y_2,$$

где $\lambda = \big(Ly_2, y_2\big) = \mathcal{J}[y_2]$. Остаётся доказать, что λ — второе по величине собственное значение оператора Штурма. Пусть ν — произвольное собственное значение оператора Штурма $\nu > \lambda_1$, и $z(x)$ — соответствующая нормированная собственная функция. Имеем

$$Lz = \nu \cdot z.$$

Откуда $\big(Lz, z\big) = \mathcal{J}[z] = \nu$. Так как $z \in \mathcal{D}_L$, то $z \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}$, $z(a) = z(b) = 0$. Кроме того, поскольку $\nu \neq \lambda_1$, то в силу взаимной ортогональности собственных функций отвечающих, *различным* собственным значениям оператора L, выполняется $\big(z, y_1\big) = 0$. Из вышесказанного вытекает, что $z \in \mathcal{K}_2$ и, следовательно,

$$\nu = \mathcal{J}[z] \geqslant \mathcal{J}[y_2] = \lambda.$$

Следовательно λ является вторым по величине собственным значением λ_2 оператора Штурма. *Теорема 2.2 доказана.* □

Доказательство теоремы 2.3. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{p-1}$ — первые $(p-1)$ собственные значения оператора Штурма и $y_1,\ y_2, \ldots, y_{p-1}$ — соответствующие нормированные собственные функции,

$$\mathcal{K}_p = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{K}_1,\ \big(y, y_j\big) = 0,\ j = \overline{1, p-1} \right\}.$$

Докажем, что минимайзер y_p задачи на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}_p} \mathcal{J}[y]$ есть собственная функция оператора L, отвечающая его p-ому по величине собственному значению λ_p. Для доказательства запишем уравнение для y_p. Согласно теории изопериметрических задач, составляем

$$F^* = Q \cdot y'^2 + P \cdot y^2 - \lambda \cdot y^2 - \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j \cdot y_j \cdot y$$

и пишем уравнение для y_p

$$2 \cdot P \cdot y_p - 2 \cdot \lambda \cdot y_p - \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j \cdot y_j - 2 \cdot \frac{d}{dx}\big(Q \cdot y_p'\big) = 0,$$

откуда

$$Ly_p = -\frac{d}{dx}\big(Q \cdot y_p'\big) + P \cdot y_p = \lambda \cdot y_p + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\mu_j \cdot y_j}{2}. \tag{2.4}$$

Как и в теореме 2.2, покажем, что $\mu_j = 0$, $j = \overline{1, p-1}$. Для этого домножим обе части (2.4) на y_i скалярно. Тогда получим

$$\big(Ly_p, y_i\big) = \lambda \cdot \big(y_p, y_i\big) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j \cdot \big(y_j, y_i\big). \tag{2.5}$$

Как мы знаем, $\big(y_j, y_i\big) = \delta_{ij}$. Кроме того,

$$\big(Ly_p, y_i\big) = \big(y_p, \lambda_i \cdot y_i\big) = \lambda_i \cdot \big(y_p, y_i\big) = 0,$$

при $i \leqslant p-1$ по определению класса $\mathcal{K}_p$. Учитывая сказанное, получим в (2.5)

$$0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j \cdot \delta_{ij} = \frac{\mu_i}{2}, \quad \forall i, 1 \leqslant i \leqslant p-1.$$

Поэтому уравнение (2.4) примет вид $Ly_p = \lambda \cdot y_p$ и нам остаётся доказать, что $\lambda = \lambda_p$.

Очевидно, $\mathcal{J}[y_p] = \lambda$ и $\lambda_j \neq \lambda$, $j = \overline{1, p-1}$, ибо иначе собственному значению λ_j отвечали бы две взаимно ортогональные функции y_j и y_p, это невозможно, ибо $\dim \mathcal{U}_{\lambda_j} = 1$, а y_j и y_p — линейно независимы. Пусть ν — любое собственное значение оператора L, не совпадающее с $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$. Покажем, что $\nu \geqslant \lambda$. Пусть $z(x)$ — нормированная собственная функция, отвечающая ν. Тогда

$$Lz = \nu \cdot z \quad \Rightarrow \quad \big(Lz, z\big) = \mathcal{J}[z] = \nu.$$

Так как $\nu \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$, то $\big(z, y_j\big) = 0$, $j = \overline{1, p-1}$, поэтому $z \in \mathcal{K}_p$ и, значит,

$$\mathcal{J}[z] \geqslant \min_{y \in \mathcal{K}_p} \mathcal{J}[y] = \mathcal{J}[y_p] = \lambda.$$

Значит $\nu \geqslant \lambda$, то есть λ — действительно p-ое по величине собственное значение λ_p оператора L. *Теорема 2.3 доказана.* $\square$

Наряду с этими теоремами существует ещё одна, которая позволяет описать p-ое собственное значение оператора Штурма с помощью решения некоторых вариационных задач без знания собственных функций, отвечающих первым $p-1$ собственным значениям.

Теорема 2.4 (принцип минимакса)**.** Пусть, как и раньше, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{p-1}$ — первые $(p-1)$ собственные значения оператора Штурма и $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ — соответствующие нормированные собственные функции, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ — произвольные функции из $\mathscr{L}_2[a,b]$. Теорема утверждает, что

$$\lambda_p = \max_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}} \min_{\substack{y\in\mathcal{K},\\ y\perp\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{p-1}}} J[y]. \tag{2.6}$$

Доказательство. Для фиксированного набора $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ положим

$$\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) \overset{def}{=} \min_{\substack{y\in\mathcal{K},\\ y\perp\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{p-1}}} J[y], \tag{2.7}$$

тогда (2.6) означает, что

$$\lambda_p = \max_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}} \nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}). \tag{2.8}$$

Положим $\alpha \overset{def}{=} \max\limits_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}} \nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1})$. Нам надо установить, что $\alpha = \lambda_p$. В силу теоремы 2.3 $\nu(y_1, \ldots, y_{p-1}) = \lambda_p$, и, значит, $\alpha \geqslant \lambda_p$. Остаётся показать, что

$$\alpha \leqslant \lambda_p. \tag{2.9}$$

Для доказательства (2.9) мы покажем, что $\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) \leqslant \lambda_p$ при $\forall\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$. А так как $\alpha = \max\limits_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}} \nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1})$, то тогда $\alpha \leqslant \lambda_p$.

Итак, пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ — любой набор из $\mathscr{L}_2[a,b]$ и мы докажем, что

$$\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) \leqslant \lambda_p. \tag{2.10}$$

Рассмотрим

$$\tilde{y}_0 = \sum_{j=1}^{p} \tilde{c}_j \cdot y_j$$

и подберём коэффициенты $\tilde{c}_j$ так, чтобы $\big(\tilde{y}_0, \varphi_i\big) = 0$, $i = \overline{1, p-1}$. Чтобы эти равенства выполнялись, очевидно, числа $\tilde{c}_j$ должны удовлетворять условиям

$$\sum_{j=1}^{p} \tilde{c}_j \cdot \big(y_j, \varphi_i\big) = 0, \quad i = \overline{1, p-1}. \tag{2.11}$$

(2.11) — система $(p-1)$ однородных уравнений относительно p неизвестных $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_p$. Так как число неизвестных больше числа уравнений, то существует не нулевое решение $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_p$. Так как решение (2.11) определено с точностью до произвольного множителя, то числа

$$c_j \stackrel{def}{=} \frac{\tilde{c}_j}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} |\tilde{c}_i|^2}}, \quad j = \overline{1, p}$$

тоже будут решением (2.11), и поэтому функция $y_0 = \sum\limits_{j=1}^{p} c_j \cdot y_j$ ортогональна к $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$. Кроме того,

$$(y_0, y_0) = \left(\sum_{j=1}^{p} c_j \cdot y_j, \sum_{s=1}^{p} c_s \cdot y_s \right) = \sum_{s=1}^{p} |c_s|^2 = 1.$$

Очевидно, что $y_0(x) \in \mathcal{K}$, поэтому

$$\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) = \min_{\substack{y \in \mathcal{K}, \\ y \perp \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{p-1}}} J[y] \leqslant \mathcal{J}[y_0]. \tag{2.12}$$

Вычислим правую часть (2.12). Имеем

$$\mathcal{J}[y_0] = \big(Ly_0, y_0\big) = \left(\sum_{j=1}^{p} c_j \cdot Ly_j, \sum_{s=1}^{p} c_s \cdot y_s \right) =$$

$$= \sum_{j,s=1}^{p} c_j \cdot \lambda_j \cdot \overline{c}_s \cdot \big(y_j, y_s\big) = \sum_{j,s=1}^{p} \lambda_j \cdot c_j \cdot \overline{c}_s \cdot \delta_{js} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot |c_j|^2 \leqslant \lambda_p. \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) следует, что при произвольном наборе $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$

$$\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) \leqslant \lambda_p$$

и, значит, $\alpha = \sup\limits_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}} \nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) \leqslant \lambda_p$. А противоположное неравенство $\alpha \geqslant \lambda_p$ было доказано раньше. Значит, $\alpha = \lambda_p$, и *теорема 2.4 доказана.* $\square$

Лекция 6

На прошлой лекции мы доказали принцип минимакса. Он редко используется на практике, но с его помощью мы сейчас получим результат, имеющий как теоретическое, так и практическое значение.

1. Теорема сравнения

Пусть

$$Ly = -\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big) + P \cdot y \quad \text{и} \quad \widetilde{L}y = -\frac{d}{dx}\Big(\widetilde{Q} \cdot y'\Big) + \widetilde{P} \cdot y$$

— операторы Штурма с областью определения

$$\mathcal{D}_L = \mathcal{D}_{\widetilde{L}} = \Big\{ y(x) \Big| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0 \Big\}.$$

Обозначим через λ_k и $\widetilde{\lambda}_k$ их собственные значения, $k = 1, 2, ...$

Теорема 1.1 (теорема сравнения)**.** Если $Q \geqslant \widetilde{Q}$ и $P \geqslant \widetilde{P}$, то $\lambda_k \geqslant \widetilde{\lambda}_k$, то есть бо́льшим коэффициентам отвечают бо́льшие собственные значения.

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — произвольный набор функций из $\mathscr{L}_2[a,b]$, $y \in \mathcal{K}$, $y \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_k$. В силу неравенств для коэффициентов

$$\underset{\substack{y \in \mathcal{K},\\ y \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_k}}{\mathcal{J}[y]} = \int\limits_a^b \left(Q \cdot y'^2 + P \cdot y^2\right) dx \geqslant \int\limits_a^b \left(\widetilde{Q} \cdot y'^2 + \widetilde{P} \cdot y^2\right) dx = \underset{\substack{y \in \mathcal{K},\\ y \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_k}}{\widetilde{\mathcal{J}}[y]}. \tag{1.1}$$

Фиксируем слева y, а справа возьмём минимум по всем $\tilde{y}$, $\tilde{y} \in \mathcal{K}$, $\tilde{y} \perp \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_k$

$$\underset{\substack{y \in \mathcal{K},\\ y \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_k}}{\mathcal{J}[y]} \geqslant \min_{\substack{\tilde{y} \in \mathcal{K},\\ \tilde{y} \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_k}} \widetilde{\mathcal{J}}[\tilde{y}]. \tag{1.2}$$

Так как правая часть не зависит от y, то неравенство сохранится при взятии слева минимума по y:

$$\min_{\substack{y \in \mathcal{K},\\ y \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_k}} \mathcal{J}[y] \geqslant \min_{\substack{\tilde{y} \in \mathcal{K},\\ \tilde{y} \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_k}} \widetilde{\mathcal{J}}[\tilde{y}]. \tag{1.3}$$

Фиксируем набор $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ справа в (1.3), а слева возьмём максимум по всем наборам

$$\max_{\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_k} \min_{\substack{y\in\mathcal{K},\\ y\perp\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_k}} \mathcal{J}[y] \geqslant \min_{\substack{\tilde{y}\in\mathcal{K},\\ \tilde{y}\perp\varphi_1,\ldots,\varphi_k}} \widetilde{\mathcal{J}}[\tilde{y}]. \tag{1.4}$$

Так как левая часть не зависит от $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (то есть (1.4) верно при $\forall\varphi_1, \ldots, \varphi_k$), возьмём в (1.4) справа максимум по $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$:

$$\max_{\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_k} \min_{\substack{y\in\mathcal{K},\\ y\perp\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_k}} \mathcal{J}[y] \geqslant \max_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k} \min_{\substack{\tilde{y}\in\mathcal{K},\\ \tilde{y}\perp\varphi_1,\ldots,\varphi_k}} \widetilde{\mathcal{J}}[\tilde{y}]. \tag{1.5}$$

В силу принципа минимакса слева в (1.5) λ_{k+1}, справа $\widetilde{\lambda}_{k+1}$, то есть (1.5) это

$$\lambda_{k+1} \geqslant \widetilde{\lambda}_{k+1}. \tag{1.6}$$

Теорема доказана. □

Данная теорема позволяет получить двусторонние оценки для собственных значений оператора Штурма с переменными коэффициентами. Пусть

$$\widetilde{C}_1 \stackrel{def}{=} \min_{x\in[a,b]} Q(x), \quad \widetilde{C}_2 \stackrel{def}{=} \min_{x\in[a,b]} P(x).$$

Собственные значения оператора Штурма

$$\widetilde{L}y = -\frac{d}{dx}\Big(\widetilde{Q}\cdot y'\Big) + \widetilde{P}\cdot y$$

с

$$\widetilde{Q} = \widetilde{C}_1, \quad \widetilde{P} = \widetilde{C}_2$$

известны:

$$\widetilde{\lambda}_k = \widetilde{C}_1 \cdot \frac{(\pi\cdot k)^2}{(b-a)^2} + \widetilde{C}_2.$$

В силу теоремы сравнения

$$\lambda_k \geqslant \widetilde{C}_1 \cdot \left(\frac{\pi\cdot k}{b-a}\right)^2 + \widetilde{C}_2. \tag{1.7}$$

С другой стороны, если положить

$$\widehat{C}_1 \stackrel{def}{=} \max_{x\in[a,b]} Q(x), \quad \widehat{C}_2 \stackrel{def}{=} \max_{x\in[a,b]} P(x)$$

и рассмотреть опрератор Штурма

$$\widehat{L}y = -\frac{d}{dx}\Big(\widehat{Q} \cdot y'\Big) + \widehat{P} \cdot y$$

с

$$\widehat{Q} = \widehat{C}_1, \quad \widehat{P} = \widehat{C}_2,$$

то, поскольку $\widehat{Q} \geqslant Q$, $\widehat{P} \geqslant P$, то для собственных значений $\widehat{\lambda}_k$ оператора $\widehat{L}$ будет верно неравенство

$$\widehat{\lambda}_k \geqslant \lambda_k, \tag{1.8}$$

но

$$\widehat{\lambda}_k = \widehat{C}_1 \cdot \left(\frac{\pi \cdot k}{b-a}\right)^2 + \widehat{C}_2,$$

поэтому в силу (1.7), (1.8) мы получаем

$$\widehat{C}_1 \cdot \left(\frac{\pi \cdot k}{b-a}\right)^2 + \widehat{C}_2 \geqslant \lambda_k \geqslant \widetilde{C}_1 \cdot \left(\frac{\pi \cdot k}{b-a}\right)^2 + \widetilde{C}_2. \tag{1.9}$$

Разумеется, здесь мы рассматриваем случай, когда $\widetilde{C}_1 > 0$, $\widetilde{C}_2$ и $\widehat{C}_2$ — конечны.

Из (1.9) следует, что для $k \gg 1$ и некоторых констант $d > 0$ и $d_1 > 0$

$$d_1 \cdot k^2 \geqslant \lambda_k \geqslant d \cdot k^2. \tag{1.10}$$

2. Разложение по собственным функциям оператора Штурма. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля. Теорема Стеклова

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ — бесконечная ортонормированная система из $\mathscr{L}_2[a,b]$, то есть $\big(y_i, y_j\big) = \delta_{ij}$ и $y \in \mathscr{L}_2[a,b]$. Составим так называемые обобщённые коэффициенты Фурье

$$C_k = \big(y, y_k\big) = \int\limits_a^b y \cdot \overline{y}_k \, dx \tag{2.1}$$

и обобщённый ряд Фурье, отвечающий функции $y(x)$:

$$y(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k. \tag{2.2}$$

Естественные вопросы о ряде (2.2):

1) сходится ли?
2) если да — в каком смысле?
3) к какой функции сходится?

Как и при исследовании обычных рядов, для ответа на эти вопросы надо исследовать поведение частичной суммы ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Возможны следующие варианты:

1) $\exists \tilde{y}(x)$ такая что $|\tilde{y}(x) - S_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$, $\forall x \in [a,b]$. Этот случай означает поточечную сходимость обобщённого ряда Фурье к $\tilde{y}(x)$.
2) $\exists \tilde{\tilde{y}}$ такая, что $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\tilde{\tilde{y}} - S_n(x)\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Этот случай означает равномерную сходимость обобщённого ряда Фурье к функции $\tilde{\tilde{y}}$.
3) $\exists \hat{y}(x)$ такая, что $\|\hat{y} - S_n(x)\| \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае говорят, что обобщённый ряд Фурье сходится к функции $\hat{y}$ в среднем.

А к какой функции ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$ может сходиться? Хотя коэффициенты C_k мы считали для функции $y(x)$, сам ряд не обязан к ней сходиться. Пример такой ситуации легко привести. Допустим, $\|y - S_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ и $C_1 \neq 0$. Положим

$$\tilde{y}_1 = y_2,\ \tilde{y}_2 = y_3, \ldots, \tilde{y}_k = y_{k+1},\ \widehat{C}_k = \big(y, \tilde{y}_k\big) = C_{k+1}.$$

Тогда

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{C}_k \cdot \tilde{y}_k = \sum_{k=2}^{n+1} C_k \cdot y_k = S_{n+1} - C_1 \cdot y_1$$

и

$$\|y - S_{n+1}\| = \left\|(y - C_1 \cdot y_1) - \widetilde{S}_n\right\| \to 0,$$

то есть нет сходимости к $y(x)$ для системы $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k \ldots$

Определение 2.1. Пусть задан некоторый класс функций $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{L}_2[a,b]$. Будем говорить, что ортонормированная система $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ **полна** в $\mathscr{K}$ в среднем {в смысле равномерной сходимости}, если для $\forall y \in \mathscr{K}$ её обобщённый ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$ сходится к ней в среднем {равномерно}. Полная система играет роль базиса в $\mathscr{K}$.

К вопросу о полноте мы ещё вернёмся, а пока исследуем некоторые свойства $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k$. Пусть $R_n \overset{def}{=} y - S_n$. Свойства R_n:

$\underline{(1)}$ $\big(R_n, y_j\big) = 0$, $j = \overline{1, n}$. Действительно,

$$\big(R_n, y_j\big) = \big(y - \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k, y_j\big) = \big(y, y_j\big) - \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \big(y_k, y_j\big) = $$
$$= C_j - \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \delta_{kj} = C_j - C_j = 0.$$

$\underline{(2)}$ $\big(R_n, S_n\big) = 0$. Это следует из $\underline{(1)}$, ибо

$$\big(R_n, S_n\big) = \sum_{j=1}^{n} \big(R_n, C_j \cdot y_j\big) = 0.$$

$\underline{(3)}$ $\|y\|^2 = \|R_n\|^2 + \|S_n\|^2$. Это следует из $\underline{(2)}$, ибо

$$\begin{aligned}\big(y, y\big) &= \big(R_n + S_n, R_n + S_n\big) = \\ &= \|R_n\|^2 + \|S_n\|^2 + \underbrace{\big(R_n, S_n\big)}_{=0 \text{ из } \underline{(2)}} + \underbrace{\big(S_n, R_n\big)}_{=0 \text{ из } \underline{(2)}} = \|R_n\|^2 + \|S_n\|^2.\end{aligned}$$

$\underline{(4)}$ $\|S_n\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |C_k|^2$, так как

$$\big(S_n, S_n\big) = \big(\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i, \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k\big) = \sum_{k,i=1}^{n} C_i \cdot \overline{C}_k \cdot \underbrace{\big(y_i, y_k\big)}_{=\delta_{ik}} = \sum_{k=1}^{n} |C_k|^2.$$

Из свойств $\underline{(3)}$ и $\underline{(4)}$ следует неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \leqslant \|y\|^2. \tag{2.3}$$

Действительно, в силу $\underline{(3)}$, $\underline{(4)}$ $\|y\|^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |C_k|^2$. В пределе при $n \to \infty$ получаем (2.3). Если в (2.3) имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|y\|^2, \tag{2.4}$$

то (2.4) называется равенством Парсеваля. *Оно является необходимым и достаточным условием сходимости в среднем обобщённого ряда Фурье к раскладываемой функции.*

Доказательство. Достаточность. Пусть (2.4) выполняется. Докажем, что $\|R_n\| \to 0$. В силу свойства (3)

$$\|R_n\|^2 = \|y\|^2 - \|S_n\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |C_k|^2 \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{2.5}$$

если равенство Парсеваля верно. *Достаточность доказана.*

Необходимость. Если $\|R_n\| \to 0$, то в силу (2.5)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |C_k|^2 - \|y\|^2 = 0,$$

то есть (2.4) верно.

Таким образом, если для рассматриваемой ортонормированной системы $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ и $\forall y \in \mathscr{K} \subseteq \mathscr{L}_2[a,b]$ выполняется (2.4), то система $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ полна в $\mathscr{K}$ в среднем. $\square$

В заключение отметим, что обобщённый ряд Фурье всегда сходится в среднем. Действительно, мы в курсе линейной алгебры [1] говорили, что пространство $\mathscr{L}_2[a,b]$ — полное, то есть любая фундаментальная последовательность из $\mathscr{L}_2$ сходится в среднем к какой-то функции из $\mathscr{L}_2[a,b]$. Покажем, что последовательность $S_n(x)$ — фундаментальна. Имеем (пусть $n > m$)

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} C_k \cdot y_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |C_k|^2 \to 0, \quad \text{при} \quad m, n \to \infty,$$

так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$ сходится в силу неравенства Бесселя (2.3). Значит, $\exists \hat{y} \in \mathscr{L}_2[a,b]$ так, что $\|\hat{y} - S_n\| \to 0$ при $n \to \infty$[i].

Теорема 2.1 (теорема Стеклова)**.** Ортонормированная система собственных функций $y_1, \ldots, y_n, \ldots$, отвечающая всем собственным значениям $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ оператора Штурма, является *полной*

1) в $\mathcal{D}_L$ — в смысле равномерной сходимости;
2) в $\mathscr{L}_2[a,b]$ — в смысле сходимости в среднем.

Доказательство. Оно сложное, поэтому проведём его поэтапно. Рассмотрим сначала $y \in \mathcal{D}_L$. Пусть

$$C_k \overset{def}{=} (y, y_k), \quad S_n(x) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k.$$

[i]Разумеется, в общем случае $\hat{y}$ может не совпадать с y.

Идея доказательства состоит в следующем. Сначала докажем, что

$$\|y - S_n(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.6}$$

Потом покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$ равномерно сходится к некоторой (пока неизвестно, какой!) непрерывной функции $\hat{y}$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} \big|\hat{y} - S_n(x)\big| = 0. \tag{2.7}$$

Но из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, так как

$$\|\hat{y} - S_n\|^2 = \int\limits_a^b |\hat{y} - S_n(x)|^2\, dx \leqslant \max_{x\in[a,b]} |\hat{y} - S_n(x)|^2 \cdot (b-a) \to 0 \text{ в силу (2.7).}$$

Таким образом, мы получаем, что последовательность $S_n(x)$ сходится в среднем к $y(x)$ — в силу (2.6) — и к $\hat{y}$, что только что показано. Поэтому

$$\|y - \hat{y}\| = \|y - S_n + S_n - \hat{y}\| \leqslant \|y - S_n\| + \|S_n - \hat{y}\| \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Значит, $\hat{y} = y$, и (2.7) даёт первое утверждение теоремы Стеклова.

Переходим к выполнению программы. Пусть $y \in \mathcal{D}_L$, $R_n = y - S_n$. Доказываем, что

$$\|R_n\| = \|y - S_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.8}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{R}_n \overset{def}{=} R_n \,/\, \|R_n\|$, $\left\|\widetilde{R}_n\right\| = 1$[i], кроме того, в силу свойств R_n выполняются равенства $\big(\widetilde{R}_n, y_j\big) = 0$, $j = \overline{1,n}$. Наконец, $\widetilde{R}_n(a) = \widetilde{R}_n(b) = 0$, так как $y_j(a) = y_j(b) = 0$. Из этих рассуждений следует, что $\widetilde{R}_n(x) \in \mathcal{K}_{n+1}$ и, значит,

$$\mathcal{J}[\widetilde{R}_n] \equiv \frac{\mathcal{J}[R_n]}{\|R_n\|^2} \geqslant \lambda_{n+1},$$

то есть

$$\frac{\mathcal{J}[R_n]}{\lambda_{n+1}} \geq \|R_n\|^2 \quad n \gg 1. \tag{2.9}$$

Здесь мы берём столь большое n, что $\lambda_{n+1} > 0$ (при $\lambda_{n+1} < 0$ надо было бы изменить знак неравенства на противоположный). Покажем, что

$$\sup_n \mathcal{J}[R_n] < +\infty. \tag{2.10}$$

[i]Если $\|R_n\| = 0$, то (2.8) — очевидно, и тогда вводить $\widetilde{R}_n$ не надо, поэтому мы считаем $\|R_n\| \neq 0$.

Тогда, поскольку $\lambda_{n+1} \to +\infty$ при $n \to \infty$, мы получим из (2.9), что

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n\|^2 = 0, \tag{2.11}$$

то есть доказано равенство (2.8). Оценим $\mathcal{J}[R_n]$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{J}[R_n] = \mathcal{J}[y - S_n] = \big(L(y - S_n), y - S_n\big) = \\ = \big(Ly, y\big) - \big(LS_n, y\big) - \big(Ly, S_n\big) + \big(LS_n, S_n\big).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Очевидно,

$$\big(LS_n, y\big) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \big(Ly_k, y\big) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \lambda_k \cdot \big(y_k, y\big) = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{n} |C_k|^2 \cdot \lambda_k}},$$

$$\big(Ly, S_n\big) = \big(y, LS_n\big) = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{n} |C_k|^2 \cdot \lambda_k}},$$

$$\begin{aligned}\big(LS_n, S_n\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \lambda_k \cdot y_k, \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot y_j\right) = \\ = \sum_{k,j=1}^{n} C_k \cdot \overline{C}_j \cdot \lambda_k \cdot \underbrace{\big(y_k, y_j\big)}_{\delta_{kj}} = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{n} |C_k|^2 \cdot \lambda_k}}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (2.12), получим

$$\mathcal{J}[R_n] = \mathcal{J}[y] - \sum_{k=1}^{n} |C_k|^2 \cdot \lambda_k.$$

Пусть N таково, что $\lambda_n > 0$ при $n > N$. Тогда при $n > N$ видим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{J}[R_n] = \mathcal{J}[y] - \sum_{k=1}^{N} |C_k|^2 \cdot \lambda_k - \sum_{k=N+1}^{n} |C_k|^2 \cdot \lambda_k \leqslant \\ \leqslant \mathcal{J}[y] - \sum_{k=1}^{N} |C_k|^2 \cdot \lambda_k \equiv \mathcal{J}[R_N].\end{aligned}$$

Значит, при $n > N$ $\mathcal{J}[R_n] \leqslant \mathcal{J}[R_N]$, то есть (2.10) доказано.

Нам осталось провести самую сложную часть доказательства. Заметим, что мы нигде не будем использовать тот факт, что функции из $\mathcal{D}_L$ равны нулю на концах отрезка. Это делается специально для того, чтобы приведённое ниже доказательство можно было использовать для оператора Штурма с другими граничными условиями.

Итак, $y \in \mathcal{D}_L$, $C_k = \big(y, y_k\big)$. Мы хотим доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$. Для этого построим сходящийся числовой ряд с членами, мажорирующими по модулю члены $C_k \cdot y_k$ рассматриваемого функционального ряда. Имеем

$$\big|C_k \cdot y_k\big| \leqslant \big|\big(y, y_k\big)\big| \cdot |y_k| \leqslant \left|\left(y, \frac{Ly_k}{\lambda_k}\right)\right| \cdot |y_k| = \\ = \frac{\big|\big(Ly, y_k\big)\big|}{|\lambda_k|} \cdot |y_k| = \frac{|d_k|}{|\lambda_k|} \cdot |y_k|, \quad (2.13)$$

где $d_k = \big(Ly, y_k\big)$ — обобщённые коэффициенты Фурье функции Ly, и поэтому в силу неравенства Бесселя $\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |d_k|^2 \leqslant \|Ly\|^2\Big)$ $d_k \to 0$ при $k \to \infty$. Переходим к оценке $|y_k(x)|$. Пусть x, $x' \in [a, b]$. Имеем

$$\big|\big(y_k^2(x) - y_k^2(x')\big)\big| = \left|\int\limits_{x'}^{x} \frac{d}{ds} y_k^2(s)\, ds\right| \leqslant 2 \cdot \int\limits_a^b |y_k(s)| \cdot |y_k'(s)|\, ds \leqslant \\ \leqslant 2 \cdot \sqrt{\int\limits_a^b y_k^2(s)\, ds} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b |y_k'(s)|^2\, ds}, \quad (2.14)$$

где $\int\limits_a^b y_k^2\, ds = 1$. Оценим $\int\limits_a^b y_k'^2(s)\, ds$. Имеем

$$\big(Ly_k, y_k\big) = \lambda_k = \mathcal{J}[y_k] = \int\limits_a^b \left(P \cdot y_k^2 + Q \cdot y_k'^2\right)\, ds \geqslant \\ \geqslant P_0 + Q_0 \cdot \int\limits_a^b y_k'^2(s)\, ds, \quad (2.15)$$

где $P_0 = \min\limits_{s \in [a,b]} P(s)$, $Q_0 = \min\limits_{s \in [a,b]} Q(s) > 0$. Отметим, что при $Q_0 = 0$ *наше доказательство не проходит.* Из (2.15) следует, что

$$\int\limits_a^b y_k'^2\, ds \leqslant (\lambda_k - P_0)\, /\, Q_0 \leqslant \beta_1 \cdot \lambda_k, \quad k \gg 1 \quad (2.16)$$

для некоторой константы $\beta_1 > 0$. Подставляя (2.16) в (2.14), мы получим

$$y_k^2(x) \leqslant \beta_2 \cdot \sqrt{\lambda_k} + y_k^2(x'). \tag{2.16a}$$

Интегрируя здесь по x' от a до b, получим

$$(b-a) \cdot y_k^2(x) \leqslant \beta_2 \cdot \sqrt{\lambda_k} \cdot (b-a) + 1,$$

откуда

$$y_k^2(x) \leqslant \beta_3 \cdot \sqrt{\lambda_k},$$

где $\beta_3 > 0$ — некоторое число. Следовательно,

$$|y_k(x)| \leqslant \beta_4 \cdot \lambda_k^{1/4}, \quad k \gg 1, \tag{2.17}$$

где $\beta_4 > 0$ — фиксированное число.
Подставим в (2.13) оценку (2.17). Имеем

$$\big|C_k \cdot y_k\big| \leqslant \frac{|d_k|}{|\lambda_k|} \cdot |y_k| \leqslant \frac{\beta_5}{|\lambda_k|^{3/4}}, \quad \beta_5 > 0. \tag{2.18}$$

С помощью теоремы сравнения мы ранее установили, что скорость роста собственных значений λ_k есть k^2, или, точнее, $\lambda_k \geqslant \beta_6 \cdot k^2$ для некоторого $\beta_6 > 0$. Подставляя эту оценку в (2.18), окончательно получаем

$$\big|C_k \cdot y_k\big| \leqslant \frac{\beta_5}{\beta_6 \cdot k^{3/2}} \leqslant \beta_7 \cdot \frac{1}{k^{3/2}}. \tag{2.19}$$

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{3/2}}$ сходится, значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $\hat{y}(x)$. А как мы доказали ранее, $\hat{y}(x) \equiv y(x)$, и тем самым мы доказали первое утверждение теоремы Стеклова — о равномерной сходимости обобщённого ряда Фурье для функции из $\mathcal{D}_L$.

Пусть теперь $y(x) \in \mathscr{L}_{2[a,b]}$, $C_k = \big(y, y_k\big)$. Составляем обобщённый ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$. Мы уже говорили, что, поскольку последовательность частных сумм фундаментальна, то есть

$$\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |C_k|^2 \to 0, \quad m, n \to \infty,\ n > m,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$ сходится в среднем к некоторой функции $\tilde{y} \in \mathscr{L}_{2(a,b)}$, то есть

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k, \tag{2.20}$$

где $C_j = \big(\tilde{y}, y_j\big)$, ибо

$$\big(\tilde{y}, y_j\big) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \underbrace{\big(y_k, y_j\big)}_{\delta_{kj}} = C_j.$$

Следовательно, обобщённые коэффициенты Фурье одинаковы у функций $\tilde{y}$ и y

$$\big(\tilde{y}, y_j\big) = \big(y, y_j\big) \quad \Rightarrow \quad \big(\tilde{y} - y, y_j\big) = 0. \tag{2.21}$$

Таким образом, функция $z \overset{def}{=} \tilde{y} - y$ ортогональна к любой собственной функции оператора Штурма и, значит, $z \perp S_n$. Отсюда следует, что $z(x)$ ортогональна к $\forall f(x) \in \mathcal{D}_L$. Докажем это. Пусть $\varepsilon > 0$; так как обобщённый ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится к ней равномерно — согласно первой части теоремы Стеклова — то

$$\text{по } \varepsilon > 0 \ \exists n, \text{ что } \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot y_k(x) \right| < \varepsilon, \text{ где } \alpha_k = \big(f, y_k\big).$$

Имеем, полагая $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot y_k$,

$$\big|\big(z, f\big)\big| = \big|\big(z, f - S_n\big)\big| \leqslant \|z\| \cdot \|f - S_n\| \leqslant \varepsilon \cdot \sqrt{b-a} \cdot \|z\|, \tag{2.22}$$

ибо

$$\|f - S_n\| = \sqrt{\int\limits_a^b |f - S_n|^2 \, dx} \leqslant \varepsilon \cdot \sqrt{b-a}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое число, то из (2.22) следует, что

$$\big(z, f\big) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}_L. \tag{2.23}$$

Можно доказать, что любую функцию из $\mathscr{L}_2[a,b]$ можно аппроксимировать с заданной точностью $\varepsilon > 0$ по норме $\mathscr{L}_2$ функцией из $\mathcal{D}_L$[i]. Пусть $f_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}_L$ и

$$\|z - f_\varepsilon\|^2 < \varepsilon \ \Rightarrow \ \big(z - f_\varepsilon, z - f_\varepsilon\big) = \|z\|^2 - \big(f_\varepsilon, z\big) - \big(z, f_\varepsilon\big) + \|f_\varepsilon\|^2 < \varepsilon. \tag{2.24}$$

Но в силу (2.23) $\big(f_\varepsilon, z\big) = \big(z, f_\varepsilon\big) = 0$, так как $f_\varepsilon \in \mathcal{D}_L$. Поэтому из (2.24) следует, что $\|z\|^2 < \varepsilon$, то есть

$$\|z\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \|y - \tilde{y}\| = 0.$$

Значит, сумма $\tilde{y}$ обобщённого ряда Фурье, написанного для функции $y(x)$, есть $y(x)$. Таким образом, второе утверждение теоремы Стеклова доказано. $\square$

[i] Этот факт — без доказательства.

Лекция 7

1. Оператор Штурма с другими граничными условиями

В физических задачах, которые приводят к нахождению собственных значений оператора Штурма, кроме граничных условий $y(a) = y(b) = 0$ встречаются и другие типы граничных условий[i]. Поэтому возникает необходимость в изучении подобных задач.

Общий вид граничных условий:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot y'(a) + \alpha_2 \cdot y(a) = 0, \\ \beta_1 \cdot y'(b) + \beta_2 \cdot y(b) = 0, \end{cases}$$

где α_j, β_j — фиксированные числа. Если $\alpha_1 = 0$ (или $\beta_1 = 0$), то тогда граничные условия переходят соответственно в

$$\alpha_2 \cdot y(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(a) = 0 \qquad (\text{или в } \beta_2 \cdot y(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(b) = 0).$$

Поэтому мы будем считать $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$. Тогда, поделив на α_1 и β_1, мы получим

$$y'(a) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot y(a), \quad y'(b) = -\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot y(b).$$

Положим $\gamma_1 \stackrel{def}{=} -\alpha_2/\alpha_1$, $\gamma_2 \stackrel{def}{=} \beta_2/\beta_1$. В физических задачах $\gamma_1, \gamma_2 \geqslant 0$. Таким образом, мы будем рассматривать граничные условия

$$y'(a) = \gamma_1 \cdot y(a),\ y'(b) = -\gamma_2 \cdot y(b), \quad \gamma_1, \gamma_2 \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Следовательно, в качестве области определения оператора Штурма

$$Ly = -\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big) + P \cdot y$$

надо взять область

$$\mathcal{D}_L^0 \stackrel{def}{=} \Big\{y(x) \Big| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y'(a) = \gamma_1 \cdot y(a),\ y'(b) = -\gamma_2 \cdot y(b),\ \gamma_1, \gamma_2 \geqslant 0\Big\}.$$

[i]Мы увидим это в «Лекциях по уравнениям математической физики. Часть 1» [2].

Как и при изучении оператора L в $\mathcal{D}_L$[i], мы в первую очередь рассмотрим оператор L в $\mathcal{D}_L^0$ с постоянными коэффициентами $Q(x) = C_1$, $P(x) = C_2$, $[a, b] = [0, l]$. Как и раньше, надо взять $C_1 > 0$; что касается отрезка $[0, l]$, то мы можем перейти к нему от произвольного отрезка $[a, b]$ заменой переменной: $x' = x - a$. Тогда $x' \in [0, l]$, где $l = b - a$. Чтобы не загромождать изложение, мы штрих писать не будем.

Итак, рассматриваем задачу на нахождение собственных значений и собственных функций оператора

$$Ly = -C_1 \cdot y'' + C_2 \cdot y = \lambda \cdot y, \quad y \in \mathcal{D}_L^0. \tag{1.2}$$

Переносим $\lambda \cdot y$ в левую часть (1.2) и делим на $-C_1$. Получаем

$$y'' + \frac{\lambda - C_2}{C_1} \cdot y = 0. \tag{1.3}$$

Положим $\omega^2 \overset{def}{=} (\lambda - C_2)/C_1$ и попытаемся доказать, что ω^2 — вещественно, и определить знак ω^2 (мы пока не знаем, что ω^2 — вещественно). Умножим обе части (1.3) на y скалярно. Получим

$$\int\limits_0^l y'' \cdot \overline{y}\, dx + \omega^2 \cdot \int\limits_0^l |y|^2\, dx = 0. \tag{1.4}$$

Далее

$$\int\limits_0^l \underbrace{\overline{y}}_{v} \cdot \underbrace{y''\, dx}_{du} = y' \cdot \overline{y}\Big|_0^l - \int\limits_0^l |y'|^2\, dx =$$

$$= y'(l) \cdot \overline{y}(l) - y'(0) \cdot \overline{y}(0) - \int\limits_0^l |y'|^2\, dx = \left| \begin{matrix} \text{в силу} \\ \text{граничных} \\ \text{условий} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\gamma_2 \cdot |y(l)|^2 - \gamma_1 \cdot |y(0)|^2 - \int\limits_0^l |y'(x)|^2\, dx.$$

Подставляя полученное выражение в (1.4), имеем

$$-\gamma_2 \cdot |y(l)|^2 - \gamma_1 \cdot |y(0)|^2 - \int\limits_0^l |y'(x)|^2\, dx + \omega^2 \cdot \int\limits_0^l |y|^2\, dx = 0. \tag{1.5}$$

---

[i]

$$\mathcal{D}_L = \left\{ y(x) \Big| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0 \right\}.$$

Отсюда следует, что ω^2 — вещественно и $\omega^2 \geqslant 0$. Посмотрим, возможно ли равенство $\omega^2 = 0$. При $\omega^2 = 0$ из (1.5) следует, что

$$\int\limits_0^l |y'(x)|^2\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = const.$$

В этом случае $y(0) \neq 0$, $y(l) \neq 0$ (иначе $y(x) \equiv 0$). Поэтому из (1.5) видим, что $\omega^2 = 0$ может быть при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$. Функция $y(x) = const$ в этом случае удовлетворяет уравнению (1.3) с $\omega^2 = 0$ и граничным условиям $y'(0) = y'(l) = 0$. Если мы нормируем $y(x)$, то получим $y = 1\big/\sqrt{l}$. Далее будем считать $\omega^2 > 0$. Итак, решаем уравнение (1.3)

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0. \tag{1.6}$$

Общее решение:

$$y = d_1 \cdot \sin(\omega \cdot x) + d_2 \cdot \cos(\omega \cdot x).$$

Находим $y'(0)$, $y'(l)$ и записываем граничные условия:

$$y'(0) = \gamma_1 \cdot y(0), \quad y'(l) = -\gamma_2 \cdot y(l).$$

$y'(x) = \omega \cdot d_1 \cdot \cos(\omega \cdot x) - \omega \cdot d_2 \cdot \sin(\omega \cdot x)$, поэтому

$$\begin{cases} \omega \cdot d_1 = \gamma_1 \cdot d_2, \\ d_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot l) - d_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot l) = \\ \qquad\qquad = -d_1 \cdot \gamma_2 \cdot \sin(\omega \cdot l) - d_2 \cdot \gamma_2 \cdot \cos(\omega \cdot l). \end{cases} \tag{1.7}$$

Получили систему двух однородных линейных уравнений с двумя неизвестными: d_1, d_2. Для существования ненулевого решения определитель системы должен равняться нулю[i]. Выпишем определитель системы (1.7)

$$\begin{vmatrix} \omega & -\gamma_1 \\ \omega \cdot \cos(\omega \cdot l) + \gamma_2 \cdot \sin(\omega \cdot l) & \gamma_2 \cdot \cos(\omega \cdot l) - \omega \cdot \sin(\omega \cdot l) \end{vmatrix} = 0,$$

то есть

$$\omega \cdot \gamma_2 \cdot \cos(\omega \cdot l) - \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot l) + \gamma_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot l) + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \sin(\omega \cdot l) = 0. \tag{1.8}$$

Легко видеть, что если ω есть решение (1.8), то $-\omega$ также удовлетворяет (1.8). Поэтому далее считаем $\omega > 0$. Если $\cos(\omega \cdot l) = 0$, то $\sin(\omega \cdot l) \neq 0$,

[i]Конечно, можно из первого уравнения выразить d_1 через d_2, или d_2 через d_1 и подставить во второе уравнение. Ошибки не будет. Однако стандартный способ решения (приравнивание определителя к нулю) лучше и надо приучаться к нему.

и, сокращая в (1.8) на $\sin(\omega\cdot l)$ (после зануления $\cos(\omega\cdot l)$), мы получим

$$-\omega^2+\gamma_1\cdot\gamma_2=0,\quad \omega=\sqrt{\gamma_1\cdot\gamma_2},$$

но, так как $\cos(\omega\cdot l)=0$, то $l\cdot\omega_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k$. Таким образом, этот случай имеет место, если для какого-то k ($k=0,1,2,\ldots$)

$$\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k=\sqrt{\gamma_1\cdot\gamma_2}\cdot l, \tag{1.9}$$

то есть число $(l\cdot\sqrt{\gamma_1\cdot\gamma_2}-\pi/2)\,/\,\pi$ — целое. Тогда мы получаем из равенства $\omega=\sqrt{\gamma_1\cdot\gamma_2}$ собственное значение

$$\frac{\lambda-C_2}{C_1}=\gamma_1\cdot\gamma_2\quad\Rightarrow\quad\lambda_0=C_1\cdot\gamma_1\cdot\gamma_2+C_2$$

и затем из первого уравнения системы (1.7) находим $d_2=d_1\cdot\sqrt{\gamma_2\,/\,\gamma_1}$, подставляем в решение уравнения (1.6) и получаем

$$y_0=d_1\cdot\left(\sin(\omega\cdot x)+\sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\cdot\cos(\omega\cdot x)\right).$$

Это и есть собственная функция, отвечающая собственному значению λ_0 при выполнении (1.9) для какого-то целого k.

Далее считаем $\cos(\omega\cdot l)\neq 0$. Перенесём в выражении определителя (1.8) члены с $\sin(\omega\cdot l)$ в правую часть равенства, получим

$$\begin{aligned}\omega\cdot\cos(\omega\cdot l)\cdot(\gamma_1+\gamma_2)=\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot l)-\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\sin(\omega\cdot l)=\\=(\omega^2-\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\sin(\omega\cdot l),\end{aligned}\tag{1.10c}$$

где $\cos(\omega\cdot l)\neq 0$ и $\omega^2-\gamma_1\cdot\gamma_2\neq 0$[i]. После деления (1.10c) на $\cos(\omega\cdot l)$ имеем

$$\omega\cdot(\gamma_1+\gamma_2)=(\omega^2-\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\operatorname{tg}(\omega\cdot l), \tag{1.10a}$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\omega\cdot l)=\frac{\omega\cdot(\gamma_1+\gamma_2)}{\omega^2-\gamma_1\cdot\gamma_2}\quad\text{или}\quad\operatorname{tg}(\omega\cdot l)=\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\omega-\dfrac{\gamma_1\cdot\gamma_2}{\omega}}. \tag{1.10b}$$

[i]Если бы $\omega^2-\gamma_1\cdot\gamma_2=0$, то в силу (1.10c) $\cos(\omega\cdot l)\cdot(\gamma_1+\gamma_2)=0$, но $\cos(\omega\cdot l)\neq$ $\neq 0\ \Rightarrow\ \gamma_1+\gamma_2=0$, так как $\gamma_1\geqslant 0$, $\gamma_2\geqslant 0$, то это возможно, если $\gamma_1=\gamma_2=0\ \Rightarrow\ \omega=$ $=0$, а этот случай нами уже рассмотрен. Следовательно, мы можем считать $\omega\neq 0$, то есть $\omega^2-\gamma_1\cdot\gamma_2\neq 0$.

Удобно положить $z = l \cdot \omega$, тогда уравнение (1.10b) запишется в виде

$$\operatorname{tg}(z) = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot l}{z - \dfrac{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot l^2}{z}}. \tag{1.11}$$

Это и есть уравнение для нахождения z, а значит и ω, и λ.

Рассмотрим в уравнении (1.11) сначала частный случай, когда (1.11) можно решить в явном виде. Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то есть граничные условия $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$. В этом случае решения уравнения (1.11) получаем из условия

$$\operatorname{tg}(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \omega \cdot l = \pi \cdot k,\ k = 1, 2, \ldots{}^{\mathrm{i}},$$

откуда

$$\omega_k = \frac{\pi \cdot k}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_k - C_2}{C_1} = \left(\frac{\pi \cdot k}{l}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = C_1 \cdot \left(\frac{\pi \cdot k}{l}\right)^2 + C_2.$$

Собственная функция y_k есть

$$y_k = d_{1k} \cdot \sin(\omega_k \cdot x) + d_{2k} \cdot \cos(\omega_k \cdot x),$$

где связь между d_{1k} и d_{2k} даётся первым уравнением системы (1.6)

$$\omega_k \cdot d_{1k} = \gamma_1 \cdot d_{2k} \quad \Rightarrow \quad d_{1k} = 0,\ d_{2k} \text{ — произвольное число.}$$

Таким образом,

$$y_k = d_{2k} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{l} \cdot x\right),$$

где d_{2k} выбирается из условия $\|y_k\| = 1$.

Вернёмся к решаемому уравнению (1.11) и обозначим его правую часть через $\Psi(z)$:

$$\operatorname{tg}(z) = \Psi(z), \tag{1.11a}$$

где $\Psi(z) = \dfrac{(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot l}{z - \dfrac{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot l^2}{z}}$.

При $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ (а мы рассматриваем именно этот случай) мы не можем найти аналитически решения уравнения (1.11a) и вынуждены искать их графически. Для этого на плоскости y, z построим графики функций $y_1 = \operatorname{tg}(z)$, $y_2 = \Psi(z)$, тогда «абсциссы» (то есть точки z_k), отвечающие точкам пересечения графиков, и дадут решения (1.11a). Рассмотрим

---

[i] $k = 0$ — рассматривали раньше.

сначала случай, когда одно (только одно!) из чисел γ_1, γ_2 равно нулю. Пусть для определённости $\gamma_2 = 0$. Уравнение (1.11a) примет вид

$$\operatorname{tg}(z) = \frac{\gamma_1 \cdot l}{z}.$$

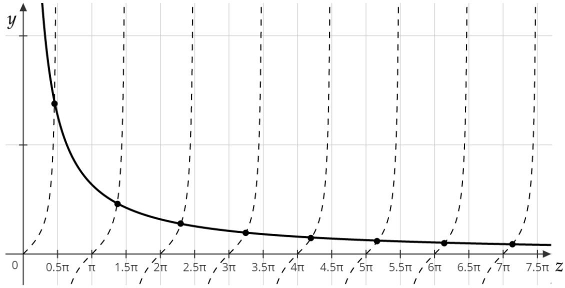


Рис. 7.1

Рисуя графики (см. рис. 7.1), мы видим, что точки пересечения графиков отвечают всё меньшим значениям $\operatorname{tg}(z)$, то есть стремятся к $\pi \cdot k$, то есть очевидно, что $|z_k - \pi \cdot k| \to 0$, при $k \to \infty$. Откуда

$$z_k^2 = l^2 \cdot \omega_k^2 = \frac{l^2 \cdot (\lambda_k - C_2)}{C_1} \geqslant C_0 \cdot k^2,$$

где $C_0 > 0$ некоторая константа. Отсюда

$$\lambda_k \geqslant \frac{C_0 \cdot C_1}{l^2} \cdot k^2 + C_2.$$

Аналогичную оценку для λ_k можно получить сверху с какой-то константой C вместо C_0. Значит, собственные значения растут со скоростью k^2.

Рассмотрим, наконец, общий случай $\gamma_1 \cdot \gamma_2 > 0$. В этом случае функция $\Psi(z)$ имеет разрыв при $z = z_0 = l \cdot \sqrt{\gamma_1 \cdot \gamma_2}$, и $\Psi(z_0 + 0) = +\infty$, $\Psi(z_0 - 0) = -\infty$.

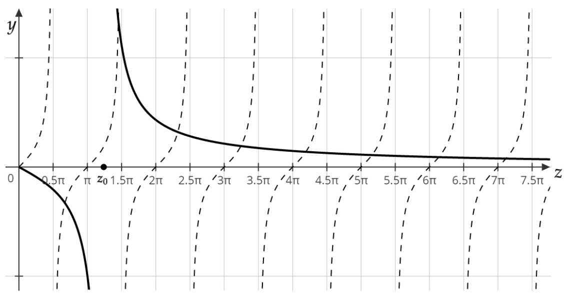


Рис. 7.2

На чертеже (см. рис. 7.2) $\pi < z_0 < \frac{3}{2} \cdot \pi$. Мы видим, что появилась новая точка пересечения графиков $\Psi(z)$ и $\mathrm{tg}(z)$. В зависимости от положения z_0 таких точек или нет — если $z_0 \leqslant \pi/2$ — или не меньше одной при $z > \pi/2$. Пусть слева от z_0 имеется m_0 решений уравнения (1.11a), $m_0 \geqslant 0$ и число m_1 таково, что $\pi \cdot m_1 \leqslant z_0 \leqslant \pi \cdot (m_1 + 1)$, $m_1 \geqslant 0$ (связь m_0 и m_1 нам не интересна). Тогда из графиков $\mathrm{tg}(z)$ и $\Psi(z)$ видно, что решения z_{m_0+k} будут асимптотически стремиться к $(m_1 + k) \cdot \pi$, то есть

$$z_{m_0+k} - \pi \cdot (m_1 + k) \to 0,$$

откуда, полагая $s = m_0 + k$, получаем

$$z_s - \pi \cdot (m_1 - m_0 + s) \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

и, значит,

$$z_s^2 = \omega_s^2 \cdot l^2 = \frac{\lambda_s - C_2}{C_1} \geqslant \beta_0 \cdot s^2, \quad s \gg 1,$$

для некоторых $\beta_0 > 0$, β_0 не зависит от s. Отсюда, как и раньше, получим

$$\lambda_s \geqslant \beta_1 \cdot s^2, \quad s \gg 1,$$

β_1 — некоторая константа. Аналогичную оценку получаем для λ_s сверху с некоторой константой β_2 вместо β_1. Это означает, что при произвольных γ_1, γ_2 собственные значения λ_s оператора Штурма с новыми граничными условиями растут при $s \to \infty$ со скоростью s^2.

Задание. Рассмотрите случай $\omega < 0$. Зависят ли собственные функции от знака ω?

Рассмотрим теперь общий случай: оператор Штурма с переменными коэффициентами.

$$Ly = -\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big) + P \cdot y,$$
$$\mathcal{D}_L^0 = \Big\{y(x)\Big| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y'(a) = \gamma_1 \cdot y(a),\ y'(b) = -\gamma_2 \cdot y(b), \gamma_1 \cdot \gamma_2 \geqslant 0\Big\}.$$

Покажем, что оператор Штурма эрмитов в $\mathcal{D}_L^0$. Пусть $y(x)$, $z(x) \in \mathcal{D}_L^0$. Имеем

$$(Ly, z) = \int\limits_a^b \underbrace{\overline{z}}_{v} \underbrace{\left(-\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big)\right)\, dx}_{du} + \int\limits_a^b P \cdot y \cdot \overline{z}\, dx =$$

$$= -Q \cdot y' \cdot \overline{z}\Big|_a^b + \int\limits_a^b \left(Q \cdot y' \cdot \overline{z}' + P \cdot y \cdot \overline{z}\right)\, dx = Q(b) \cdot y(b) \cdot \overline{z}(b) \cdot \gamma_2 +$$

$$+ Q(a) \cdot y(a) \cdot \overline{z}(a) \cdot \gamma_1 + \int\limits_a^b (Q \cdot y' \cdot \overline{z}' + P \cdot y \cdot \overline{z})\, dx. \quad (1.12)$$

Для вычисления $\big(y, Lz\big) = \overline{\big(Lz, y\big)}$ используем (1.12), меняя там местами y и z и взяв комплексное сопряжение. Тогда получим, что $\big(Ly, z\big) = \big(y, Lz\big)$. Значит, оператор L в $\mathcal{D}_L^0$ эрмитов[i].

Задание. Доказать, что если $\mathcal{I}m\ \gamma_1 \neq 0$ или $\mathcal{I}m\ \gamma_2 \neq 0$, то оператор L — не эрмитов.

Из эрмитовости оператора L следует, что собственные значения его — вещественные и что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.

Докажем теперь, что собственные подпространства оператора L — одномерны. Пусть

$$\mathcal{U}_\lambda = \big\{ y(x) \big| y \in \mathcal{D}_L^0,\ Ly = \lambda \cdot y \big\}\,.$$

Если y_1, $y_2 \in \mathcal{U}_\lambda$, то функция $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 \in \mathcal{U}_\lambda$, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Положим

$$y(x) = y_1(x) \cdot y_2(a) - y_2(x) \cdot y_1(a).$$

Очевидно,

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = y_1'(a) \cdot y_2(a) - y_2'(a) \cdot y_1(a) = \\ = \gamma_1 \cdot \big(y_1(a) \cdot y_2(a) - y_2(a) \cdot y_1(a)\big) = 0.$$

Так как $Ly = \lambda \cdot y$, то при $Q(a) \neq 0$ в силу теоремы единственности получаем $y \equiv 0$, поскольку $y_2(a) \neq 0$ (иначе $y_2'(a) = 0$ и тогда $y_2(x) \equiv 0$), то функции y_1, y_2 линейно зависимы. Значит, $\dim \mathcal{U}_\lambda = 1$.

Теперь поговорим об экстремальных свойствах собственных значений и собственных функций оператора L в $\mathcal{D}_L^0$. Вспомним, что при $y(a) = y(b) = 0$, то есть в $\mathcal{D}_L$

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b \big(Q \cdot y'^2 + P \cdot y^2\big)\, dx = \big(Ly, y\big),$$

и в этом случае экстремальные свойства были связаны с функционалом $\mathcal{J}[y]$. Найдём $\big(Ly, y\big)$ при $y \in \mathcal{D}_L^0$.

[i]Заметим, кстати, что положительность γ_1, γ_2 не используется, а вот вещественность — нужна.

Имеем в силу (1.12) при $z = y$

$$\mathcal{J}_0[y] \overset{def}{=} \big(Ly, y\big) = \int\limits_a^b \big(Q \cdot y'^2 + P \cdot y^2\big)\, dx + \\ + \gamma_2 \cdot y^2(b) \cdot Q(b) + \gamma_1 \cdot y^2(a) \cdot Q(a). \quad (1.13)$$

Пусть

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y'(a) = \gamma_1 \cdot y(a),\ y'(b) = -\gamma_2 \cdot y(b) \right\}.$$

Рассмотрим задачу на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}_0[y]$.

Функцию $\eta(x)$ назовём допустимым изменением, если $y + t \cdot \eta \in \mathcal{K}$ при $|t| \ll 1$, откуда $\eta'(a) = \gamma_1 \cdot \eta(a)$, $\eta'(b) = -\gamma_2 \cdot \eta(b)$. Можно взять $\eta'(a) = \eta'(b) = \eta(a) = \eta(b) = 0$. Пусть y — минимайзер для $\mathcal{J}_0$ в $\mathcal{K}$. Тогда, как и раньше, убеждаемся, что $\dfrac{d}{dt}\mathcal{J}_0[y + t \cdot \eta]\Big|_{t=0} = 0$. Проведём необходимые вычисления, считая что минимайзер обладает повышенной гладкостью, то есть $y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]}$, $\eta(x) \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}$ и η — не обязательно допустимое изменение. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{J}_0[y + t \cdot \eta]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left\{ \int\limits_a^b \Big(Q \cdot (y' + t \cdot \eta')^2 + P \cdot (y + t \cdot \eta)^2\Big)\, dx + \right.$$

$$\left. + \gamma_2 \cdot Q(b) \cdot \Big(y(b) + t \cdot \eta(b)\Big)^2 + \gamma_1 \cdot Q(a) \cdot \Big(y(a) + t \cdot \eta(a)\Big)^2 \right\}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= 2 \cdot \int\limits_a^b \Big(Q \cdot y' \cdot \eta' + P \cdot y \cdot \eta\Big)\, dx + 2 \cdot \gamma_2 \cdot Q(b) \cdot y(b) \cdot \eta(b) +$$

$$+ 2 \cdot \gamma_1 \cdot Q(a) \cdot y(a) \cdot \eta(a) = 2 \cdot \int\limits_a^b \left(-\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y\Big) + P \cdot y\right) \cdot \eta\, dx +$$

$$+ 2 \cdot Q \cdot y' \cdot \eta\Big|_a^b + 2 \cdot \left[\Big(\gamma_2 \cdot Q \cdot y \cdot \eta\Big)\Big|_{x=b} + \Big(\gamma_1 \cdot Q \cdot y \cdot \eta\Big)\Big|_{x=a}\right].$$

В силу граничных условий вне интегральные члены равны нулю, так что никаких дополнительных граничных условий не возникает, поэтому при допустимых $\eta(x)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{J}_0[y+t\cdot\eta]\bigg|_{t=0} = \int\limits_a^b \left(-\frac{d}{dx}\Big(Q\cdot y\Big) + P\cdot y\right)\cdot\eta\,dx = 0.$$

Отсюда в силу леммы Лагранжа мы получаем обычное уравнение Эйлера $Ly = 0$. Для нахождения экстремальных свойств собственных функций и собственных значений оператора Штурма в $\mathcal{D}_L^0$ мы будем рассматривать задачу на минимум $\mathcal{J}_0[y]$ в классе

$$\mathcal{K}^0 \overset{def}{=} \left\{ y(x) \middle| y\in\mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y'(a) = \gamma_1\cdot y(a),\ y'(b) = -\gamma_2\cdot y(b),\ \int\limits_a^b y^2\,dx = 1 \right\}.$$

Так как задача на $\min\limits_{y\in\mathcal{K}^0}\mathcal{J}_0[y]$ — изопериметрическая, то надо повторить вывод, который мы делали раньше. Если y — минимайзер, то мы полагаем $\tilde{y} = y + \alpha\cdot\eta_1 + \beta(\alpha)\cdot\eta_2$, где $\eta_i(a) = \eta_i'(a) = 0$, $\eta_i'(b) = \eta_i(b) = 0$. Тогда, действуя так же, как в случае простейших граничных условий, мы получим, что минимайзер в задаче на $\min\limits_{y\in\mathcal{K}^0}\mathcal{J}_0[y]$ удовлетворяет уравнению Эйлера для интегранта $Q\cdot y'^2 + P\cdot y^2 - \lambda\cdot y^2$ $(F^* = F - \lambda\cdot G)$, то есть уравнению $Ly = \lambda\cdot y$. После этого доказываем экстремальные свойства собственных значений и собственных функций оператора L, а также принцип минимакса, беря всюду $\mathcal{J}_0[y]$ вместо $\mathcal{J}[y]$. После этого доказываем теорему сравнения и с её помощью устанавливаем рост собственных значений $\lambda_k \geqslant C\cdot k^2$ для оператора с переменными $Q(x)$, $P(x)$, после чего доказываем теорему Стеклова, следуя использованной ранее схеме. Советую вам попытаться это сделать. Теперь о практике. Необходимо уметь находить собственные значения и собственные функции с любыми граничными условиями как на левом, так и на правом конце. Приведём эти условия в таблице.

$x = a$	$x = b$
$y(a) = 0$	$y(b) = 0$
$y'(a) = 0$	$y'(b) = 0$
$y'(a) = \gamma_1\cdot y(a)$, $\gamma_1 > 0$	$y'(b) = -\gamma_2\cdot y(b)$, $\gamma_2 > 0$

Лекция 8

1. Обобщённая задача Штурма

Мы возвращаемся к простейшим граничным условиям для допустимых функций, но изопериметрическое условие $\int\limits_a^b y^2\,dx = 1$ мы заменим более общим.

Итак,

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_a^b \Big(Q\cdot y'^2 + P\cdot y^2\Big)\,dx,$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0,\ \int\limits_a^b \rho\cdot y^2\,dx = 1 \right\},$$

где $\rho(x) > 0$ при $x \in (a,b]$ — некоторая непрерывная на $[a,b]$ функция. При $\rho(a) = 0$ мы всегда считаем, что $P(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$, иначе был бы возможен случай, когда $\inf\limits_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y] = -\infty$; попробуйте привести пример такой ситуации. Ищем $\min\limits_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$. Составляем

$$F^* = F - \lambda\cdot G = Q\cdot y'^2 + P\cdot y^2 - \lambda\cdot\rho\cdot y^2$$

и пишем для F^* уравнение Эйлера. Получим

$$P\cdot y - \frac{d}{dx}\Big(Q\cdot y'\Big) - \lambda\cdot\rho\cdot y = 0 \quad \text{или} \quad Ly = \lambda\cdot\rho\cdot y. \tag{1.1}$$

Оператор L рассматривается в

$$\mathcal{D}_L \stackrel{def}{=} \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0 \right\}.$$

Функция, удовлетворяющая (1.1), называется собственной функцией обобщённой задачи Штурма, а λ — собственным значением этой задачи. Так как оператор L — эрмитов, то

$$\big(Ly, y\big) = \big(y, Ly\big) = \overline{\big(Ly, y\big)}.$$

Значит, число $\big(Ly, y\big)$ — вещественно и поэтому из (1.1) следует вещественность собственного значения λ обобщённой задачи Штурма:

$$\big(Ly, y\big) = \lambda \cdot \big(\rho \cdot y, y\big) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \big(Ly, y\big) \Big/ \big(\rho \cdot y, y\big) \text{ — вещественно.} \tag{1.2}$$

Далее, собственные функции обобщённой задачи Штурма, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны с весом ρ.

Доказательство. Действительно, если $Ly_1 = \lambda_1 \cdot \rho \cdot y_1$, $Ly_2 = \lambda_2 \cdot \rho \cdot y_2$ и $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то, умножая первое соотношение на y_2 скалярно, получим $\big(Ly_1, y_2\big) = \lambda_1 \cdot \big(\rho \cdot y_1, y_2\big)$ и одновременно

$$\big(Ly_1, y_2\big) = \big(y_1, Ly_2\big) = \big(y_1, \lambda_2 \cdot \rho \cdot y_2\big) = \lambda_2 \cdot \big(y_1, \rho \cdot y_2\big). \tag{1.3}$$

Отсюда

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \big(y_1, \rho \cdot y_2\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(y_1, \rho \cdot y_2\big) = 0. \tag{1.4}$$

□

Пусть $\mathcal{U}_\lambda = \{y(x) | y \in \mathcal{D}_L,\ Ly = \lambda \cdot \rho \cdot y\}$ — собственное подпространство для обобщённой задачи Штурма. Точно так же, как и в обычной задаче Штурма, доказывается, что $\dim \mathcal{U}_\lambda = 1$, то есть собственные значения обобщённой задачи Штурма — не вырождены и, значит, каждому λ отвечает одна (с точностью до знака) собственная функция обобщённой задачи Штурма, удовлетворяющая изопериметрическому условию $\int\limits_a^b \rho \cdot y^2\, dx = 1$.

Далее введём пространство функций $\mathscr{L}_2\big([a,b];\rho\big)$, интегрируемых с весом ρ, $\rho(x) > 0$ $x \in (a, b]$, $\rho(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$:

$$\mathscr{L}_2\big([a,b];\rho\big) \overset{def}{=} \left\{ y(x) \middle| \int\limits_a^b \rho |y|^2\, dx < +\infty \right\}.$$

Если $\rho(a) = 0$, то $\mathscr{L}_2\big([a,b];\rho\big) \supset \mathscr{L}_2[a,b]$ (приведите обоснование!), если $\inf\limits_{x \in [a,b]} \rho(x) > 0$, то $\mathscr{L}_2\big([a,b];\rho\big) = \mathscr{L}_2[a,b]$. В пространстве $\mathscr{L}_2\big([a,b];\rho\big)$ введём скалярное произведение и норму:

$$\big(u(x), v(x)\big)_1 \overset{def}{=} \int\limits_a^b \rho \cdot u \cdot \overline{v}\, dx = \big(u, \rho \cdot v\big), \quad \|u\|_1^2 \overset{def}{=} \big(u, u\big)_1.$$

Таким образом, класс $\mathcal{K}$ запишется так:

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]},\ y(a) = y(b) = 0,\ \|y\|_1 = 1 \right\},$$

а условие ортогональности с весом $\{(u, \rho \cdot v) = 0\} \sim \{(u, v)_1 = 0\}$. Таким образом, если $Ly_1 = \lambda_1 \cdot \rho \cdot y_1$, $Ly_2 = \lambda_2 \cdot \rho \cdot y_2$, $y_i \in \mathcal{D}_L$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(y_1, y_2)_1 = 0$.

Далее устанавливаем экстремальные свойства собственных значений и собственных функций обобщённой задачи Штурма. При этом используем соотношения $(Ly, y) = \mathcal{J}[y]$ и $(Ly, y) = \lambda$, если $Ly = \lambda \cdot \rho \cdot y$ и $\|y\|_1 = 1$. Тогда $\inf\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$ — наименьшее собственное значение обобщённой задачи Штурма, а минимайзер y_1 этой задачи — соответствующая собственная функция. Далее $\inf\limits_{\substack{y \in \mathcal{K},\\ (y, y_1)_1 = 0}} \mathcal{J}[y]$ — второе по величине собственное значение обобщённой задачи Штурма и так далее. Доказательство практически полностью повторяет приведённое для стандартной задачи Штурма.

Далее для обобщённой задачи Штурма устанавливается принцип минимакса. Это делается так же, как раньше, только вместо $\|\cdot\|$ надо брать $\|\cdot\|_1$; вместо условия ортогональности $(\cdot\,,\cdot) = 0$ надо брать $(\cdot\,,\cdot)_1 = 0$, и вместо $\varphi_j \in \mathscr{L}_2[a,b]$ надо брать $\varphi_j \in \mathscr{L}_2([a,b];\rho)$. После этого устанавливаем теорему сравнения. Она устанавливается так же, как и раньше: если

$$L_i y = -\frac{d}{dx}\Big(Q_i \cdot y'\Big) + P_i \cdot y,\ i = 1, 2$$

и

$$L_1 y_k^{(1)} = \lambda_k^{(1)} \cdot \rho \cdot y_k^{(1)},\ L_2 y_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)} \cdot \rho \cdot y_k^{(2)},$$

то при $Q_1 \geqslant Q_2$, $P_1 \geqslant P_2$ выполняется $\lambda_k^{(1)} \geqslant \lambda_k^{(2)}$. Обратите внимание, что для обоих операторов сравнения ρ — *одно и то же.*

В случае обычной задачи Штурма мы брали

$$Q_2 = \min_{x \in [a,b]} Q_1(x), \quad P_2 = \min_{x \in [a,b]} P_1(x)$$

и получали оператор L_2 с постоянными коэффициентами, для которого было известно, что собственные значения $\lambda_k^{(2)}$ растут со скоростью k^2 ($\rho = 1!$).

В случае обобщённой задачи Штурма мы не можем найти собственные значения $\lambda_k^{(2)}$ даже при постоянных P_2 и Q_2 из-за наличия функции $\rho(x)$. Поэтому нам понадобится ещё одна теорема сравнения.

Прежде чем её формулировать, рассмотрим пример, подсказывающий, какого поведения собственных значений обобщённой задачи Штурма можно ожидать при росте $\rho(x)$. Пусть λ_k и y_k, $k = 1, 2, \ldots$ —

— собственные значения и собственные функции оператора Штурма:

$$Ly_k = \lambda_k \cdot y_k.$$

Для $\forall d_1 > 0$, очевидно,

$$Ly_k = \lambda_k(d_1) \cdot d_1 \cdot y_k,$$

где $\lambda_k(d_1) = \lambda_k/d_1$. Поэтому $\lambda_k(d_1)$ можно рассматривать как k-ое собственное значение обобщённой задачи Штурма с $\rho(x) = d_1$. Аналогично, при $d_2 \geqslant d_1$ имеем

$$Ly_k = \lambda_k(d_2) \cdot d_2 \cdot y_k,$$

где $\lambda_k(d_2) = \lambda_k/d_2$. Так как $d_2 \geqslant d_1$, то при положительных λ_k

$$\lambda_k(d_2) \leqslant \lambda_k(d_1) \quad \text{при } d_2 \geqslant d_1.$$

Это неравенство и есть подсказка возможного поведения собственных значений обобщённой задачи Штурма при росте $\rho(x)$.

Теорема 1.1 (вторая теорема сравнения)**.** Пусть $\lambda_k^{(i)}$; $k = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2$ — собственные значения двух обобщённых задач Штурма с одним и тем же оператором L и с разными $\rho(x)$:

$$Ly_k^{(i)} = \lambda_k^{(i)} \cdot \rho_i(x) \cdot y_k^{(i)}; \quad k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2,$$

и пусть

$$\mathscr{J}[y] \overset{def}{=} \bigl(Ly, y\bigr) \geqslant 0,\ y \in \mathcal{D}_L, \quad \sup_{x \in [a,b]} \frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} < +\infty.$$

Тогда, если $\rho_2(x) \geqslant \rho_1(x)$, то

$$\lambda_k^{(2)} \leqslant \lambda_k^{(1)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.5}$$

Для доказательства теоремы нам понадобится

Лемма 1.1. Положим

$$M_{ij} = \frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)}, \quad A_1 = \bigl\{M_{12} \cdot \varphi(x) \big| \forall \varphi \in \mathscr{L}_2\bigl([a,b];\rho_1\bigr)\bigr\}, \quad A_2 = \mathscr{L}_2\bigl([a,b];\rho_2\bigr)$$

и пусть

$$\overline{M}_{ij} = \max_{x \in [a,b]} M_{ij}(x) < +\infty, \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда

$$A_1 = A_2.$$

Доказательство леммы 1.1. Пусть $\psi \in A_2$ и $\varphi = M_{21} \cdot \psi$. Очевидно, $M_{12} \cdot \varphi = \psi$ и

$$\|\varphi\|_1^2 = \int\limits_a^b M_{21}^2 \cdot |\psi|^2 \cdot \rho_1 \, dx = \int\limits_a^b M_{21} \cdot |\psi|^2 \cdot \rho_2 \, dx \leqslant \overline{M}_{21} \cdot \|\psi\|_2^2 < +\infty^{\mathrm{i}}.$$

Значит, $\varphi \in \mathscr{L}_2\big({\scriptstyle [a,b];\rho_1}\big)$ и поэтому $\psi = M_{12} \cdot \varphi \in A_1$. Следовательно,

$$A_2 \subseteq A_1.$$

Рассмотрим теперь $\psi = M_{12} \cdot \varphi \in A_1$ и покажем, что $\psi \in A_2$. Имеем

$$\|\psi\|_2^2 = \int\limits_a^b M_{12}^2 \cdot |\varphi|^2 \cdot \rho_2 \, dx = \int\limits_a^b M_{12} \cdot |\varphi|^2 \cdot \rho_1 \, dx \leqslant \overline{M}_{12} \cdot \|\varphi\|_1^2 < +\infty.$$

Значит, $\psi \in A_2$ и поэтому

$$A_1 \subseteq A_2.$$

Но раньше мы получили, что $A_2 \subseteq A_1$, следовательно,

$$A_1 = A_2$$

и *лемма 1.1 доказана.* □

Замечание. Если $\rho_1 > 0$, $\rho_2(x) > 0$, $x \in [a, b]$, то $\overline{M}_{ij} < +\infty$, $i, j = 1, 2$.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть

$$T = \Big\{ y(x) \Big| y \in \mathcal{C}^1_{[a,b]}, \ y(a) = y(b) = 0 \Big\}$$

и $y \in T$. Тогда, так как $\|y\|_2 \geqslant \|y\|_1$, то

$$\mathcal{J}[y] \cdot \|y\|_2^{-2} \leqslant \mathcal{J}[y] \cdot \|y\|_1^{-2}. \tag{1.6}$$

Пусть далее $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ — произвольные фиксированные функции из $\mathscr{L}_2\big({\scriptstyle [a,b];\rho_1}\big)$ и $\big(y, \varphi_i\big)_1 = 0$, $i = \overline{1, n}$. Положим $\psi_i = M_{12} \cdot \varphi_i$. Так как

$$\big(y, \varphi_i\big)_1 = \big(y, \rho_1 \cdot \varphi_i\big) = \big(y, M_{12} \cdot \rho_2 \cdot \varphi_i\big) = \big(y, \psi_i\big)_2,$$

то условие $\big(y, \varphi_i\big)_1 = 0$ эквивалентно условию $\big(y, \psi_i\big)_2 = 0$ при $\psi_i = M_{12} \cdot \varphi_i$. При фиксированных y и φ_i, $i = \overline{1, n}$ возьмём в левой части (1.6) минимум по всем $\widetilde{y} \in T$, $\big(\widetilde{y}, \psi_i\big)_2 = 0$, $i = \overline{1, n}$. Получим

$$\nu_2(\psi_1, \ldots, \psi_n) \overset{def}{=} \min_{\substack{\widetilde{y} \in T, \\ (\widetilde{y}, \psi_i)_2 = 0, \ i = \overline{1,n}}} \mathcal{J}[\widetilde{y}] \cdot \|\widetilde{y}\|_2^{-2} \leqslant \mathcal{J}[y] \cdot \|y\|_1^{-2}. \tag{1.6a}$$

---

[i]Здесь и далее для любых функций $u(x), v(x)$ $\|u\|_i^2 = \big(u, u\big)_i$, $(u, v)_i = (u, v \cdot \rho_i)$, $i = 1, 2$.

Теперь в правой части (1.6a) возьмём минимум по всем $y \in T$, $\big(y, \varphi_i\big)_1 = 0$, $i = \overline{1, n}$. Тогда в силу (1.6a)

$$\nu_2(\psi_1, \ldots, \psi_n) \leqslant \nu_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \overset{def}{=} \min_{\substack{y \in T, \\ (y,\varphi_i)_1 = 0,\ i=\overline{1,n}}} \mathcal{J}[y] \cdot \|y\|_1^{-2}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство

$$\nu_2(\psi_1, \ldots \psi_n) \leqslant \nu_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \tag{1.6b}$$

которое верно при $\forall \varphi_i \in \mathscr{L}_2\big([a,b]; \rho_1\big)$ и $\psi_i = M_{12} \cdot \varphi_i$, $i = \overline{1, n}$. Возьмём в правой части (1.6b) максимум по всем $\widetilde{\varphi}_i \in \mathscr{L}_2\big([a,b]; \rho_1\big)$ при фиксированных слева $\psi_i = M_{12} \cdot \varphi_i$. Получим

$$\nu_2(\psi_1, \ldots, \psi_n) \leqslant \max_{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n \in \mathscr{L}_2([a,b]; \rho_1)} \nu_1(\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n). \tag{1.6c}$$

Так как данное неравенство верно при $\forall \varphi_i \in \mathscr{L}_2\big([a,b]; \rho_1\big)$ и так как $\psi_i = M_{12} \cdot \varphi_i$, то мы можем слева в (1.6c) взять максимум по всем φ_i, но в силу леммы 1.1, когда набор $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ будет пробегать все системы n функций из $\mathscr{L}_2\big([a,b]; \rho_1\big)$, набор $\psi_1, \ldots, \psi_n$ будет пробегать все системы n функций из $\mathscr{L}_2\big([a,b]; \rho_2\big)$, поэтому слева в (1.6c) мы можем взять максимум по всем системам $\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_n$ из $\mathscr{L}_2\big([a,b]; \rho_2\big)$. Получим

$$\max_{\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_n \in \mathscr{L}_2([a,b]; \rho_2)} \nu_2(\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_n) \leqslant \max_{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n \in \mathscr{L}_2([a,b]; \rho_1)} \nu_1(\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n). \tag{1.6d}$$

В силу принципа минимакса (1.6d) — это и есть доказываемое неравенство (1.5). □

Применим теорему 1.1, считая $\overline{M}_{21} < +\infty$ и взяв $\rho_2 = \max\limits_{x \in [a,b]} \rho_1(x)$. Тогда обобщённая задача Штурма

$$Ly_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)} \cdot \rho_2 \cdot y_k^{(2)}$$

превращается в обычную задачу Штурма для оператора L/ρ_2. А для этого оператора мы знаем, что $\exists c_0 > 0$ так, что

$$\lambda_k^{(2)} \geqslant c_0 \cdot k^2, \quad k \gg 1.$$

В силу (1.5) получаем

$$\lambda_k^{(1)} \geqslant c_0 \cdot k^2, \quad k \gg 1. \tag{1.7}$$

Совершенно аналогично можно установить неравенство

$$\lambda_k^{(2)} < c_1 \cdot k^2, \tag{1.7a}$$

если взять $\rho_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} \rho_2(x)$ при $\rho_1 > 0$.

В силу (1.7), (1.7a) собственные значения обобщённой задачи Штурма растут со скоростью k^2 при росте k.

Все эти результаты получены при условии $\mathcal{J}[y] \geqslant 0$ при $y \in \mathcal{D}_L$, то есть при неотрицательности всех собственных значений обобщённой (и обычной!) задачи Штурма. Рассмотрим теперь случай, когда

$$\beta \overset{def}{=} \inf_{i\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y] < 0.$$

Пусть $\alpha > -\beta$ и

$$L(\alpha)y = Ly + \alpha\cdot\rho\cdot y.$$

Тогда

$$\mathcal{J}^{(\alpha)}(y) \overset{def}{=} \big(L(\alpha)y, y\big) = \big(Ly, y\big) + \alpha\cdot\big(\rho\cdot y, y\big) = \mathcal{J}[y] + \alpha\cdot\|y\|_1^2 > 0.$$

Следовательно, собственные значения $\lambda_k(\alpha)$ обобщённой задачи Штурма для оператора $L(\alpha)$ стремятся к $+\infty$ при $k\to\infty$ со скоростью $c_3\cdot k^2$, где $c_3 > 0$ — некоторая константа. Так как для исходной задачи Штурма

$$Ly_k = \lambda_k\cdot\rho\cdot y_k,$$

то

$$L(\alpha)y_k = Ly_k + \alpha\cdot\rho\cdot y_k = \lambda_k\cdot\rho\cdot y_k + \alpha\cdot\rho\cdot y_k = (\lambda_k+\alpha)\cdot\rho\cdot y_k.$$

Значит,

$$\lambda_k(\alpha) = \lambda_k + \alpha$$

и, следовательно, $\lambda_k \to +\infty$ со скоростью $c_3\cdot k^2$.

Если $\rho(x) > 0$, $x\in[a,b]$ и $\rho(x)\in\mathcal{C}^2_{[a,b]}$, то можно обойтись без теоремы сравнения 1.1 следующим образом. Пусть $\rho_1(x) > 0$, $x\in[a,b]$, $\rho_1(x)\in\mathcal{C}^2_{[a,b]}$ и

$$L_1 y_k \overset{def}{=} -\frac{d}{dx}\Big(Q_1\cdot y_k'\Big) + P_1\cdot y_k = \lambda_k^{(1)}\cdot\rho_1\cdot y_k. \tag{1.8}$$

Вводим функцию $z_k \overset{def}{=} \sqrt{\rho_1}\cdot y_k$ и поделим обе части (1.8) на $\sqrt{\rho_1}$. Тогда полученное уравнение можно записать в виде

$$L_0 z_k \overset{def}{=} -\frac{d}{dx}\Big(Q_0\cdot z_k'\Big) + P_0\cdot z_k = \lambda_k^{(1)}\cdot z_k, \tag{1.9}$$

где $Q_0 = \dfrac{Q_1}{\rho_1}$, $P_0 = \dfrac{P_1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\sqrt{\rho_1}}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{Q_1\cdot\rho_1'}{\rho_1^{3/2}}\right)$.

Таким образом, собственные значения $\lambda_k^{(1)}$ оператора L_1 обобщённой задачи Штурма совпадают с собственными значениями оператора L_0 обычной задачи Штурма. Отсюда следует рост собственных значений $\lambda_k^{(1)}$ со скоростью k^2 при $k \to \infty$. Далее можно сформулировать и доказать неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, а также определить понятие полной системы. Разумеется, при этом надо обобщённые коэффициенты Фурье считать с помощью скалярного произведения $\big(\,\cdot\,,\cdot\,\big)_1$ и вместо $\|\cdot\|$ брать $\|\cdot\|_1$.

Далее можно передоказать теорему Стеклова, но в предположении, что $\rho(x) > 0$, $x \in [a,b]$. Наметим основные формулировки. Пусть $y \in \mathscr{L}_2\big([a,b];\rho\big)$, y_k — собственные функции обобщённой задачи Штурма, $\|y_k\|_1 = 1$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$C_k = \big(y, y_k\big)_1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k, \quad R_n = y - S_n.$$

Теорема 1.2 (теорема Стеклова)**.**
п. 1. Для $\forall y \in \mathscr{L}_2\big([a,b];\rho\big)$ выполняется $\|y - S_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, то есть

$$\int\limits_a^b \left| y - \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k \right|^2 \cdot \rho(x)\, dx \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

(Это сходимость в среднем с весом ρ.)
п. 2. Для $y \in \mathcal{D}_L$

$$\sup_{x \in [a,b]} \left| y(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k \right| \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

(Это равномерная сходимость.)

Доказательство п. 2. я приведу прямо сейчас, п. 1. — без доказательства.

В заключение отметим, что если $0 < \underline{\rho} \leqslant \rho(x) \leqslant \overline{\rho}$ для $\forall x \in [a,b]$, где $\underline{\rho}$, $\overline{\rho}$ — константы, то

$$\underline{\rho} \cdot \|y - S_n\|^2 \leqslant \|y - S_n\|_1^2 \leqslant \overline{\rho} \cdot \|y - S_n\|^2\,,$$

то есть из сходимости обобщённого ряда Фурье в метрике $\|\cdot\|_1$ следует сходимость в метрике $\|\cdot\|$ и наоборот. Разумеется, здесь в сумме S_n имеем $C_k = \big(y, y_k\big)_1$ независимо от того, берётся ли норма $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|$.

Доказательство п. 2. теоремы Стеклова.
Мы будем следовать схеме доказательства теоремы Стеклова, которую

мы рассматривали раньше. Пусть

$$y_k \in \mathcal{D}_L, \quad y_k : Ly_k = \lambda_k \cdot \rho \cdot y_k.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k, \quad C_k = \big(y, y_k\big)_1, \quad R_n = y - S_n, \quad \widetilde{R}_n = \frac{R_n}{\|R_n\|_1}.$$

Так как

$$\big(\widetilde{R}_n, y_j\big)_1 = 0,\ j = \overline{1,n} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{R}_n \in \mathcal{K}_{n+1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{J}[\widetilde{R}_n] \geqslant \lambda_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}[R_n] \geqslant \lambda_{n+1} \cdot \|R_n\|_1^2.$$

Если $\sup\limits_n \mathcal{J}[R_n] < +\infty$, то из неравенства (верного при $n \gg 1 \ \Rightarrow\ \lambda_{n+1} > > 0$)

$$\frac{\mathcal{J}[R_n]}{\lambda_{n+1}} \geqslant \|R_n\|_1^2 \quad \Rightarrow \quad \|R_n\|_1 \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Оценим

$$\mathcal{J}[R_n] = \big(LR_n, R_n\big) =$$
$$= \big(Ly - LS_n, y - S_n\big) = \big(Ly, y\big) + \big(LS_n, S_n\big) - \big(Ly, S_n\big) - \big(LS_n, y\big).$$

$$\underline{\big(LS_n, S_n\big)} = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot Ly_k, \sum_{m=1}^{n} C_m \cdot y_m\right) = \sum_{k,m=1}^{n} C_k \cdot \overline{C}_m \cdot \big(\rho \cdot \lambda_k \cdot y_k, y_m\big) =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{n} C_k \cdot \overline{C}_m \cdot \lambda_k \cdot \underbrace{\big(\rho \cdot y_k, y_m\big)}_{= (y_k, y_m)_1} = \sum_{k,m=1}^{n} C_k \cdot \overline{C}_m \cdot \lambda_k \cdot \delta_{km} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot |C_k|^2.$$

Далее

$$\underline{\big(LS_n, y\big)} = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot Ly_k, y\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \big(\lambda_k \cdot \rho \cdot y_k, y\big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \lambda_k \underbrace{\big(\rho \cdot y_k, y\big)}_{= \overline{C}_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot |C_k|^2;$$

$$\underline{\big(Ly, S_n\big)} = \big(y, LS_n\big) = \overline{\big(LS_n, y\big)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot |C_k|^2.$$

В силу этих равенств

$$\mathcal{J}[R_n] = \big(Ly, y\big) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot |C_k|^2.$$

Так как $\lambda_k \to \infty$, то $\exists n_0$, $\lambda_k > 0$ при $k > n_0$. Тогда, взяв $n > n_0$, получим

$$\mathcal{J}[R_n] = \big(Ly, y\big) - \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \cdot |C_k|^2 - \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k \cdot |C_k|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \big(Ly, y\big) - \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \cdot |C_k|^2 = \mathcal{J}[R_{n_0}],$$

и, значит,

$$\sup_n \mathcal{J}[R_n] < +\infty,$$

и поэтому в силу вышесказанного

$$\|R_n\|_1 \to 0.$$

Докажем теперь равномерную сходимость обобщённого ряда Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$. Оценим C_k.

$$|C_k| = \big|\big(y, \rho \cdot y_k\big)\big| = \left|\left(y, \frac{Ly_k}{\lambda_k}\right)\right| = \frac{1}{|\lambda_k|} \cdot \big|\big(Ly, y_k\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|\lambda_k|} \cdot \left|\left(\frac{Ly}{\rho}, \rho \cdot y_k\right)\right| = \frac{1}{|\lambda_k|} \cdot d_k,$$

где $d_k \to 0$ при $k \to \infty$ в силу неравенства Бесселя для обобщённых коэффициентов Фурье функции Ly/ρ по собственным функциям y_k обобщённой задачи Штурма.

Далее оцениваем $|y_k|$. Действуем так же, как в теореме Стеклова для обычной задачи Штурма, но учитываем, что

$$\|y_k\|^2 = \int\limits_a^b \frac{y_k^2 \cdot \rho}{\rho}\, ds \leqslant \|y_k\|_1^2 \cdot \frac{1}{\rho_0} \quad \big(\rho_0 \overset{def}{=} \min \rho(x)\big).$$

Имеем

$$y_k^2(x) - y_k^2(x') = \int\limits_{x'}^{x} \frac{d}{ds} y_k^s(s)\, ds \leqslant 2 \cdot \int\limits_a^b \big|y_k(s)\big| \cdot \big|y_k'(s)\big|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot \sqrt{\int\limits_a^b y_k'^2\, ds} \cdot \frac{\|y_k\|_1}{\sqrt{\rho_0}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\int_a^b y_k'^2\, ds}}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (1.10)$$

$$\mathcal{J}[y_k] = \lambda_k = \int\limits_a^b \Big(Q \cdot y_k'^2 + P \cdot y_k^2\Big)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant Q_0 \cdot \int\limits_a^b y_k'^2\,dx + P_0 \cdot \int\limits_a^b \frac{y_k^2 \cdot \rho}{\rho}\,ds \geqslant Q_0 \cdot \int\limits_a^b y_k'^2\,dx - \frac{|P_0|}{\rho_0},$$

где $P_0 = \min\limits_{x \in [a,b]} P(x)$ и поэтому

$$\int\limits_a^b y_k'^2\,dx \leqslant \frac{\lambda_k}{Q_0} + \frac{|P_0|}{Q_0 \cdot \rho_0} \leqslant \beta_1 \cdot \lambda_k.$$

Подставляя эту оценку в (1.10), получим

$$y_k^2(x) - y_k^2(x') \leqslant \beta_2 \cdot \sqrt{\lambda_k}.$$

Интегрируем по x' и получаем

$$(b-a) \cdot y_k^2(x) \leqslant \beta_2 \cdot \sqrt{\lambda_k} \cdot (b-a) + \int\limits_a^b \frac{y_k^2(x') \cdot \rho(x')}{\rho(x')}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \beta_2 \cdot \sqrt{\lambda_k} \cdot (b-a) + \frac{1}{\rho_0} \leqslant \beta_3 \cdot \sqrt{\lambda_k}.$$

Откуда

$$|y_k(x)| \leqslant \beta_4 \cdot |\lambda_k|^{1/4}.$$

Подставим эту оценку и оценку $|C_k| \leqslant d_k \big/ |\lambda_k|$ в оценку общего члена обобщённого ряда Фурье в силу (1.7а)

$$|C_k \cdot y_k| \leqslant \frac{d_k}{|\lambda_k|} \cdot \beta_4 \cdot |\lambda_k|^{1/4} \leqslant \beta_5 \cdot \frac{1}{|\lambda_k|^{3/4}} \leqslant \beta_6 \cdot \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Эта оценка позволяет утверждать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k$ сходится равномерно к какой-то функции $\tilde{y}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Но так как

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot y_k \right\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то $\tilde{y}(x) = y(x)$. $\square$

2. Квадратичный функционал специального вида. Уравнение Бесселя

Рассмотрим важный особый случай задачи на отыскание минимума квадратичного функционала. Пусть

$$\mathcal{J}[y] = \int\limits_0^R \left(x \cdot y'^2 + \frac{\nu^2}{x} \cdot y^2 \right) dx,$$

где $\nu^2 \geqslant 0$, $Q(x) = x$, $P(x) = \nu^2 / x$.

Будем искать минимум $\mathcal{J}[y]$ при условии $\int\limits_0^R x \cdot y^2 \, dx = 1$, то есть $\rho(x) = x$. В связи с тем, что $Q(0) = 0$, $\rho(0) = 0$, $P(0) = +\infty$ при $\nu > 0$, класс допустимых функций определяется не стандартно

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y(x) \in \mathcal{C}_{[0,R]}, \ y(R) = 0, \right.$$

$$\left. \begin{array}{lll} \nu > 0 & : & y(0) = 0, \ y \in \mathcal{C}^1_{(0,R]}, \\ \nu = 0 & : & y \in \mathcal{C}^1_{[0,R]}, \end{array} \quad \int\limits_0^R x \cdot y^2 \, dx = 1 \right\}.$$

Здесь требование $y(0) = 0$ при $\nu > 0$ вызвано тем, что при $|y(0)| > 0$ значение функционала будет бесконечным из-за наличия члена ν^2/x. Этот же член не позволяет требовать от $y(x)$ гладкость $\mathcal{C}^1$ при $x = 0$. Так как в точке $x = 0$ интегрант может иметь особенность, то при выводе уравнения Эйлера мы возьмём функции $\eta_i(x) \equiv 0$, $x \in [0, \delta]$ для какого-то малого $\delta > 0$. Тогда, действуя обычным образом, мы получим уравнение для минимайзера в задаче на $\min\limits_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[y]$

$$Ly = -\frac{d}{dx}\big(x \cdot y'\big) + \frac{\nu^2}{x} \cdot y = \lambda \cdot x \cdot y,$$

при $x \in [\delta, R] \ \Rightarrow$ при $x \in (0, R]$, так как $\delta > 0$ — любое. В случае $\nu = 0$ мы можем сразу сделать вывод для отрезка $[0, R]$, и, так как в данном случае у нас нет граничного условия при $x = 0$, то мы получаем ЕГУ: $F_{y'}\Big|_{x=0} = 0$, то есть $x \cdot y'\Big|_{x=0} = 0$, но это условие выполняется автоматически, ибо $y \in \mathcal{C}^1_{[0,R]}$. Таким образом, условие гладкости на левом конце является ЕГУ.

Введём теперь область определения для оператора L учитывая, что решение уравнения $Ly = \lambda \cdot y \cdot x$ — это минимайзер из $\mathcal{K}$.

$$\mathcal{D}_L = \left\{ y(x) \middle| y \in \mathcal{C}_{[0,R]},\ y(R) = 0, \right.$$
$$\left. \begin{array}{lcl} \text{при } \nu = 0 & : & y \in \mathcal{C}^2_{[0,R]}, \\ \text{при } \nu > 0 & : & y(0) = 0,\ y \in \mathcal{C}^2_{(0,R]},\ \|Ly\|_1 < +\infty,\ \mathcal{J}[y] < +\infty \end{array} \right\}.$$

Требование $\|Ly\|_1 < +\infty$ означает, что действие оператора L на функции из $\mathcal{D}_L$ не выводит нас из пространства $\mathscr{L}_2\bigl([0,R];x\bigr)$, а условие $\mathcal{J}[y] < +\infty$ — наследие класса $\mathcal{K}$, которому принадлежал минимайзер.

Докажем, что оператор L в области $\mathcal{D}_L$ — эрмитов, и что $\bigl(Ly, y\bigr) = \mathcal{J}[y]$. В случае $\nu = 0$ это показывается так же, как для обычного квадратичного функционала.

Доказательство при $\nu > 0$. Оно непростое и требует внимания.

Пусть f, $g \in \mathcal{D}_L$, $\varepsilon > 0$. Имеем, применяя неравенство Буняковского,

$$\left| \int\limits_\varepsilon^R Lf \cdot \overline{g}\, dx \right| \leqslant \int\limits_\varepsilon^R \bigl| Lf \cdot \overline{g} \bigr|\, dx \leqslant \int\limits_0^R \bigl|\sqrt{x} \cdot Lf\bigr| \cdot \left| \frac{\overline{g}}{\sqrt{x}} \right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int\limits_0^R x \cdot \bigl|Lf\bigr|^2 dx} \cdot \sqrt{\int\limits_0^R \frac{|g|^2}{x}\, dx} < +\infty, \qquad (2.1)$$

ибо:

i) первый множитель справа в (2.1) — это $\|Lf\|_1$, а эта норма конечна;

ii) второй множитель не превосходит $\sqrt{\dfrac{1}{\nu^2} \cdot \mathcal{J}[g]} < +\infty$.

Далее

$$\int\limits_\varepsilon^R Lf \cdot \overline{g}\, dx = -\int\limits_\varepsilon^R \frac{d}{dx}\bigl(x \cdot f'\bigr) \cdot \overline{g}\, dx + \int\limits_\varepsilon^R \frac{\nu^2 \cdot f \cdot \overline{g}}{|x|}\, dx. \qquad (2.2)$$

Второй интеграл конечен при $\varepsilon \to 0$, ибо по неравенству Буняковского

$$\left| \int\limits_\varepsilon^R \frac{\nu^2 \cdot f \cdot \overline{g}}{x}\, dx \right| \leqslant \int\limits_\varepsilon^R \frac{\nu \cdot |f|}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\nu \cdot |g|}{\sqrt{x}}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^R \frac{\nu^2\cdot|f|^2}{x}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^R \frac{\nu^2\cdot|g|^2}{x}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\mathcal{J}[f]\cdot\mathcal{J}[g]}<\infty. \quad (2.3)$$

Поэтому нам надо оценить (вычислить) только первое слагаемое справа в (2.2). Интегрируя по частям, получаем

$$-\int\limits_\varepsilon^R \underbrace{\overline{g}}_{v}\cdot\underbrace{\frac{d}{dx}\Big(x\cdot f'\Big)\,dx}_{du} = -x\cdot f'\cdot\overline{g}\,\Big|_\varepsilon^R + \int\limits_\varepsilon^R x\cdot f'\cdot\overline{g}'\,dx =$$

$$= \varepsilon\cdot f'(\varepsilon)\cdot\overline{g}(\varepsilon) + \int\limits_\varepsilon^R x\cdot f'\cdot\overline{g}'\,dx. \quad (2.4)$$

В силу (2.1) и (2.2) предел левой части (2.4) при $\varepsilon\to 0$ существует; $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^R x\cdot f'\cdot\overline{g}'\,dx$ тоже существует, так как

$$\int\limits_\varepsilon^R |f'|\cdot|g'|\cdot x\,dx \leqslant \sqrt{\int\limits_0^R x\cdot|f'|^2\,dx}\cdot\sqrt{\int\limits_0^R x\cdot|g'|^2\,dx} \leqslant \sqrt{\mathcal{J}[f]\cdot\mathcal{J}[g]} < +\infty.$$

Следовательно, в (2.4) должен существовать $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\cdot f'(\varepsilon)\cdot\overline{g}(\varepsilon)$. Обозначим этот предел через α и покажем, что $\alpha=0$.

Действительно, так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\cdot f'(\varepsilon)\cdot\overline{g}(\varepsilon)=\alpha$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\cdot|f'(\varepsilon)\cdot\overline{g}(\varepsilon)| = |\alpha|$, и поэтому при $|\alpha|>0$ для малых ε выполняется: $\varepsilon\cdot|f'(\varepsilon)|\cdot|\overline{g}(\varepsilon)| \geqslant |\alpha|/2$, откуда

$$\sqrt{\varepsilon}\cdot|f'(\varepsilon)|\cdot\frac{|\overline{g}(\varepsilon)|}{\sqrt{\varepsilon}} \geqslant \frac{|\alpha|}{2\cdot\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon\cdot|f'(\varepsilon)|^2+\frac{|\overline{g}(\varepsilon)|^2}{\varepsilon} \geqslant \frac{|\alpha|}{2\cdot\varepsilon}.$$

Интегрируя по ε от нуля до $\varepsilon_0>0$, получим справа $+\infty$, а слева — конечное число, так как $\mathcal{J}[f]<+\infty$, $\mathcal{J}[g]<+\infty$. Значит, $\alpha=0$, и в силу (2.4)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int\limits_\varepsilon^R \frac{d}{dx}\big(x\cdot f'\big)\cdot\overline{g}\,dx\right) = \int\limits_0^R x\cdot f'\cdot\overline{g}'\,dx. \quad (2.5)$$

Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в (2.2) в силу (2.3), (2.5), получим

$$(Lf,g) = \int\limits_0^R x\cdot f'\cdot\overline{g}'\,dx + \int\limits_0^R \frac{\nu^2}{x}\cdot f\cdot\overline{g}\,dx. \quad (2.6)$$

Чтобы доказать эрмитовость оператора L, вычислим $\big(f, Lg\big)$. Имеем

$$\big(f, Lg\big) = \overline{\big(Lg, f\big)} = \int\limits_0^R x \cdot \overline{g}' \cdot \overline{\overline{f}}'\, dx + \int\limits_0^R \frac{\nu^2}{x} \cdot \overline{g} \cdot \overline{\overline{f}}\, dx = \big(Lf, g\big)$$

(«двойная черта» обозначает «двойное сопряжение») и, значит, оператор L — эрмитов. Отметим в заключение, что в силу (2.6)

$$\big(Lf, f\big) = \mathcal{J}[f], \quad f \in \mathcal{D}_L.$$

$\square$

Как обычно, из эрмитовости оператора L в $\mathcal{D}_L$ вытекают два следствия для обобщённой задачи Штурма (вес — x)

1. Собственные значения оператора L — вещественны.
2. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям обобщённой задачи Штурма, ортогональны с весом x, то есть если $Ly = \lambda_1 \cdot x \cdot y$, $Lz = \lambda_2 \cdot x \cdot z$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$\big(y, z\big)_1 = \int\limits_0^R x \cdot y \cdot \overline{z}\, dx = 0.$$

Лекция 9

1. Квадратичный функционал специального вида. Уравнение Бесселя (продолжение)

Итак, рассматривая задачу на

$$\min_{y\in\mathcal{K}} \mathcal{J}[y] \quad \text{для} \quad \mathcal{J}[y] = \int\limits_0^R \left(x\cdot y'^2 + \frac{\nu^2}{x}\cdot y^2 \right) dx,$$

$$\mathcal{K} = \left\{ y(x) \middle| y(x)\in\mathcal{C}_{[0,R]},\ y(R)=0, \right.$$

$$\left. \begin{array}{lcl} \nu>0 & : & y(0)=0,\ y\in\mathcal{C}^1_{(0,R]}, \\ \nu=0 & : & y\in\mathcal{C}^1_{[0,R]}, \end{array} \quad \int\limits_0^R x\cdot y^2\,dx = 1 \right\},$$

мы установили, что минимайзер должен удовлетворять уравнению

$$Ly \overset{def}{=} -\frac{d}{dx}\Big(x\cdot y'\Big) + \frac{\nu^2}{x}\cdot y = \lambda\cdot x\cdot y, \tag{1.1}$$

то есть быть собственной функцией обобщённой задачи Штурма. Оператор L рассматривается в области

$$\mathcal{D}_L = \left\{ y(x) \middle| y\in\mathcal{C}_{[0,R]},\ y(R)=0, \right.$$

$$\left. \begin{array}{lcl} \text{при } \nu=0 & : & y\in\mathcal{C}^2_{[0,R]}, \\ \text{при } \nu>0 & : & y(0)=0,\ y\in\mathcal{C}^2_{(0,R]},\ \|Ly\|_1<+\infty,\ \mathcal{J}[y]<+\infty \end{array} \right\}.$$

Было установлено, что в этой области оператор L — эрмитов и

$$\Big(Ly, y\Big) = \mathcal{J}[y]. \tag{1.2}$$

Из (1.1) следует, что в скалярном произведении $(u, v)_1 = \int\limits_0^R x \cdot u(x) \cdot \overline{v}(x)\, dx$ собственные функции обобщённой задачи Штурма, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны, а собственные значения — в силу (1.2) — неотрицательны, а при $\nu > 0$ — строго положительны, ибо в силу (1.1), (1.2)

$$\big(Ly, y\big) = \mathcal{J}[y] = \int\limits_0^R \left(x \cdot y'^2 + \frac{\nu^2}{x} \cdot y^2 \right) dx = \lambda \cdot \|y\|_1^2 . \tag{1.3}$$

Отметим, что при $\nu = 0$ равенство $\lambda = 0$ возможно лишь при $y' = 0$, то есть при $y = const$, а так как $y(R) = 0$, то $y \equiv 0$. Значит, $\lambda > 0$. Однако, если бы было другое граничное условие при $x = R$: $y'(R) = 0$, то функция $y \equiv const$ и $\lambda = 0$ были бы собственной функцией и собственным значением обобщённой задачи Штурма. Мы позже вернёмся к этому случаю, а пока считаем, что $y(R) = 0$ и, значит, $\lambda > 0$. Так как оператор L зависит от параметра ν, то в (1.1) мы будем писать $L = L(\nu)$, а решения (1.1) и числа λ обозначим через $y_{\nu k}$ и $\lambda_{\nu k}$, $k = 1, 2, \ldots$, где ν — фиксировано, а k нумерует собственные значения и собственные функции обобщённой задачи Штурма. Таким образом, (1.1) запишется в виде

$$L(\nu) y_{\nu k} = \lambda_{\nu k} \cdot x \cdot y_{\nu k}. \tag{1.4}$$

Введём в (1.4) новую независимую переменную $\rho \overset{def}{=} \sqrt{\lambda_{\nu k}} \cdot x$ и положим $z_{\nu k}(\rho) \equiv y_{\nu k}(x)$. Считаем ν и k фиксированными; у функции $z_{\nu k}(\rho) = z(\rho)$ эти индексы писать не будем. Легко видеть, что для функции $z(\rho)$ мы получим следующее уравнение:

$$\rho^2 \cdot z'' + \rho \cdot z' + \big(\rho^2 - \nu^2\big) \cdot z = 0, \tag{1.5}$$

где в силу граничных условий и условий гладкости для функций $y_{\nu k}(x)$ мы должны потребовать

$$z(\sqrt{\lambda} \cdot R) = 0, \qquad z(\rho) \in \mathcal{C}^2_{[0,R]} \text{ при } \nu = 0;$$

$$z(\sqrt{\lambda} \cdot R) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(\rho) \in \mathcal{C}^2_{(0,R]} \text{ при } \nu > 0.$$

Уравнение (1.5) хорошо известно. Это уравнение Бесселя, его решения — функции Бесселя ν-ого порядка. Так как уравнение (1.5) — уравнение второго порядка — то оно имеет два линейно независимых решения, называемые функциями Бесселя первого и второго рода. Но функция Бесселя второго рода имеет особенность при $\rho = 0$. Остаётся функция Бесселя первого рода ν-ого порядка, или просто функция

Бесселя ν-ого порядка $J_\nu(\rho)$. Решение уравнения (1.5) можно искать в виде ряда

$$\rho^\nu \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(\nu)} \cdot \rho^k.$$

После подстановки в (1.5) получим, что

$$J_\nu(\rho) = \rho^\nu \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{2\cdot k}^{(\nu)} \cdot \rho^{2\cdot k}, \tag{1.6}$$

где $C_{2\cdot k}^{(\nu)} = -C_{2\cdot k-2}^{(\nu)} \cdot \dfrac{1}{4 \cdot k \cdot (k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots$

Таким образом, все коэффициенты выражаются через коэффициент $C_0^{(\nu)}$, который свободен[i].

Итак, решение (1.5) — это $z(\rho) = J_\nu(\rho)$. Так как $y_{\nu k}(R) = 0$, то $z(\sqrt{\lambda} \cdot R) = 0 = J_\nu\left(\sqrt{\lambda} \cdot R\right)$. Обозначим через $\mu_{\nu k}$, $k = 1, 2, \ldots$ нули функции $J_\nu(\rho) :\ J_\nu\left(\mu_{\nu k}\right) = 0$. Тогда $\sqrt{\lambda_{\nu k}} \cdot R = \mu_{\nu k}$ и

$$\lambda_{\nu k} = \left(\frac{\mu_{\nu k}}{R}\right)^2. \tag{1.7}$$

Таким образом, так как $\rho = \sqrt{\lambda} \cdot x$,

$$y_{\nu k}(x) = z(\rho) = J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{R} \cdot x\right)^{\text{ii}}. \tag{1.8}$$

Мы получили явный вид собственных функций $y_{\nu k}$ и собственных значений $\lambda_{\nu k}$ обобщённой задачи Штурма. Так как в выражения (1.7), (1.8) входят нули функции Бесселя $J_\nu(\rho)$, то проведём небольшое исследование тех точек $\mu_{\nu k}$, в которых $J_\nu\left(\mu_{\nu k}\right) = 0$, то есть изучим — хотя бы поверхностно — свойства нулей функции Бесселя. Для этого воспользуемся известной асимптотикой функции Бесселя при больших ρ

$$\sqrt{\rho} \cdot J_\nu(\rho) = a_\nu \cdot \cos(\rho - b_\nu) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{1.9}$$

где $a_\nu > 0$ — некоторое число, $b_\nu = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi \cdot \nu}{2}$. Отсюда видно, что при $\rho = \rho_k = \pi \cdot k + b_\nu$ выполняется

$$\sqrt{\rho_k} \cdot J_\nu(\rho_k) = (-1)^k \cdot a_\nu + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right). \tag{1.10}$$

---

[i]Решение определено с точностью до множителя.

[ii]Теперь, когда $y_{\nu k}(x) = z$ найдены, надо проверить неравенства $\mathcal{J}[y_{\nu k}] < +\infty$, $\|Ly_{\nu k}\|_1 < +\infty$, которые должны выполняться в $\mathcal{D}_L$. Мы это сделаем позже.

Величины $J_\nu(\rho_k)$ и $J_\nu(\rho_{k+1})$ при больших ρ имеют в силу (1.10) разные знаки. И так как функция $J_\nu(\rho)$ непрерывна на отрезке $[\rho_k, \rho_{k+1}]$, на этом отрезке обязательно найдётся нечётное число точек, в которой $J_\nu(\rho)$ обращается в ноль. В тоже время, так как функция $J_\nu(\rho)$ — аналитична на отрезке $[\rho_k, \rho_{k+1}]$ при $\rho_k > 0$, то на этом отрезке *не может быть бесконечного числа нулей*[i]. Это относится вообще к любому отрезку $[\alpha, \beta]$ при $\alpha > 0$. Что касается отрезка $[0, \alpha]$, то в силу (1.6) при $0 < \alpha < 1$

$$J_\nu(\rho) = \rho^\nu \cdot \left(C_0^{(\nu)} + O(\rho)\right) \quad \text{при} \quad \rho \ll 1.$$

Следовательно, нули $\mu_{\nu k}$ функции $J_\nu(\rho)$ могут накапливаться только на бесконечности. Поэтому при $k \to \infty$ собственные значения $\lambda_{\nu k} = (\mu_{\nu k}/R)^2 \to \infty$. Таким образом, мы получили бесконечную последовательность при $k \to \infty$ собственных функций обобщённой задачи Штурма

$$y_{\nu k}(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{R} \cdot x\right),$$

отвечающих собственным значениям

$$\lambda_{\nu k} = \left(\frac{\mu_{\nu k}}{R}\right)^2 \to \infty, \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

В силу свойств решений обобщённой задачи Штурма

$$\left(y_{\nu k}, y_{\nu m}\right)_1 = \left(J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{R} \cdot x\right), J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu m}}{R} \cdot x\right)\right)_1 = 0, \quad k \neq m.$$

Теорема 1.1 (теорема Стеклова)**.** Пусть

$$d_k^{(\nu)} \stackrel{def}{=} \left(y, J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{R} \cdot x\right)\right)_1 \Big/ \left\|J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{R} \cdot x\right)\right\|_1^2.$$

Тогда

---

[i]Можно доказать, что для больших значений k на отрезке $[\rho_k, \rho_{k+1}]$ находится всего один нуль функции Бесселя. Идея доказательства состоит в следующем. Обозначим через $\Phi(\rho)$ левую часть (1.9). В силу (1.9) функция $\Phi(\rho)$ — а значит и функция Бесселя — на этом отрезке может обращаться в ноль только там, где модуль косинуса мал, то есть в малой окрестности точки $d_k = \pi \cdot (k + 1/2) + b_\nu$. Из формул (1.9) и (1.11) следует, что асимптотика для производной $\dfrac{d\Phi}{d\rho}$ даётся правой частью формулы (1.11). Значит, в окрестности точки d_k модуль $\dfrac{d\Phi}{d\rho}$ близок к $a_{\nu-1} > 0$ не зависимо от k. Поэтому в окрестности d_k может быть только один ноль функции $\Phi(\rho)$ — а значит и функции Бесселя, так как в противном случае в окрестности этой точки должны были бы существовать нули $\dfrac{d\Phi}{d\rho}$, а их — нет.

п. 1. при $y \in \mathscr{L}_2([0,R];x)$ $\left\| y - \sum_{k=1}^{n} d_k^{(\nu)} \cdot J_\nu \left(\frac{\mu_{\nu k}}{R} \cdot x \right) \right\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$,

п. 2. при $y \in \mathcal{D}_L$ $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left| y - \sum_{k=1}^{n} d_k^{(\nu)} \cdot J_\nu \left(\frac{\mu_{\nu k}}{R} \cdot x \right) \right| \to 0$ при $n \to \infty$.

п. 2. — без доказательства, а п. 1. — доказать самостоятельно при $y \in \mathcal{D}_L$.

Рассмотрим теперь случай граничного условия $y'(R) = 0$ вместо $y(R) = 0$. Обозначим соответствующие собственные функции и собственные значения обобщённой задачи Штурма через $\tilde{y}_{\nu k}(x)$ и через $\tilde{\lambda}_{\nu k}$. Вводим функцию $\tilde{z}(\rho) = \tilde{y}_{\nu k}(x)$, где $\rho = \sqrt{\tilde{\lambda}_{\nu k}} \cdot x$. Для функции $\tilde{z}(\rho)$ мы, как и раньше, получим уравнение Бесселя, выберем нужное нам решение $J_\nu(\rho)$, но теперь граничное условие при $x = R$, то есть при $\rho = \sqrt{\tilde{\lambda}} \cdot R$, будет $J'_\nu\left(\sqrt{\tilde{\lambda}} \cdot R\right) = 0$. Обозначим нули функции $J'_\nu(\rho)$ через $\tilde{\mu}_{\nu k}$ и тогда

$$\tilde{\lambda}_{\nu k} = \left(\frac{\tilde{\mu}_{\nu k}}{R} \right)^2, \quad \tilde{y}_{\nu k}(x) = J_\nu \left(\frac{\tilde{\mu}_{\nu k}}{R} \cdot x \right).$$

Чтобы убедиться в существовании бесконечного числа нулей $\tilde{\mu}_{\nu k}$ функции $J'_\nu(\rho)$, рассмотрим её асимптотику при $\rho \gg 1$

$$\sqrt{\rho} \cdot J'_\nu(\rho) = a_{\nu-1} \cdot \sin(\rho - b_\nu) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{1.11}$$

и будем действовать аналогично предыдущему. Дальнейшее рассмотрение обобщённой задачи Штурма с изменённым граничным условием не отличается от рассмотрения задачи с граничным условием $y(R) = 0$.

Теперь проверим, что функции $y_{\nu k} \in \mathcal{D}_L$. Нам осталось проверить два утверждения: $\mathcal{J}[y_{\nu k}] < +\infty$ и $\|Ly_{\nu k}\|_1 < +\infty$ $(\nu > 0)$. В силу (1.6) и (1.8) можно записать

$$y_{\nu k}(x) = x^\nu \cdot \Phi(x),$$

где, конечно, $\Phi(x) = \Phi_{\nu k}(x)$, но у нас ν и k — фиксированы и мы опускаем эти индексы. $\Phi(x)$ — бесконечно дифференцируема на $[0, +\infty)$. Найдём $y'_{\nu k}$ и $y''_{\nu k}$:

$$y'_{\nu k} = \nu \cdot x^{\nu-1} \cdot \Phi(x) + x^\nu \cdot \Phi'(x),$$
$$y''_{\nu k} = \nu \cdot (\nu - 1) \cdot x^{\nu-2} \cdot \Phi(x) + 2 \cdot \nu \cdot x^{\nu-1} \cdot \Phi'(x) + x^\nu \cdot \Phi''(x).$$

Очевидно,

$$x \cdot y'^2_{\nu k} \leqslant const \cdot \left(x^{2\cdot\nu} \cdot \Phi'^2(x) \cdot x + x^{2\cdot\nu} \cdot |\Phi(x)| \cdot |\Phi'(x)| + x^{2\cdot\nu-1} \cdot \Phi^2(x) \right).$$

Так как $\nu > 0$, то

$$\int_0^R \left(x \cdot y_{\nu k}'^2 + \frac{\nu^2}{x} \cdot y_{\nu k}^2 \right) dx < +\infty$$

и

$$\|Ly_k\|_1^2 = \int_0^R x \cdot \left[-\frac{d}{dx} \left(x \cdot y_{\nu k}' \right) + \frac{\nu^2}{x} \cdot y_{\nu k} \right]^2 dx < +\infty.$$

то есть $y_{\nu k} \in \mathcal{D}_L$.

Но можно было проще: $Ly_{\nu k} = x \cdot \lambda_{\nu k} \cdot y_{\nu k}$ и, значит,

$$\|Ly_{\nu k}\|_1^2 = \lambda_{\nu k}^2 \cdot \|x \cdot y_{\nu k}\|_1^2 = \lambda_{\nu k}^2 \cdot \int_0^R x^3 y_{\nu k}^2 \, dx < +\infty.$$

2. Вариационные задачи для функционалов, зависящих от функций двух переменных

Рассмотрим следующую задачу. Пусть дана цилиндрическая ёмкость с образующими, параллельными оси z. В плоскости x, y «дно» этой ёмкости образует какую-то область G. Сверху ёмкость не закрыта, граница цилиндрической поверхности сверху — функция $f(x, y)$, $x, y \in \partial G$ (∂G — граница G).

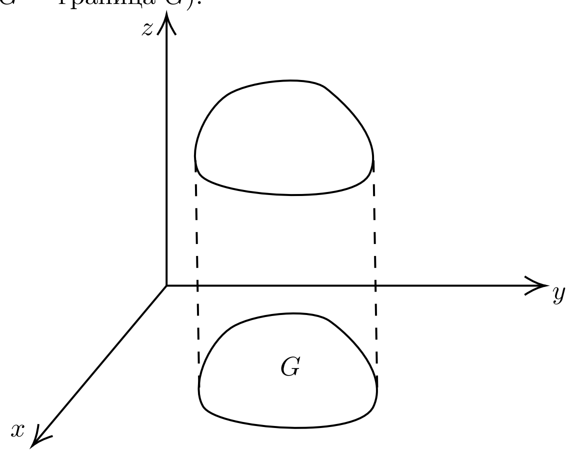


Рис. 9.1

Задача: закрыть цилиндр крышкой наименьшей площади. Если обозначить закрывающую поверхность через $z(x,y)$, то площадь крышки

$$S[z] = \iint\limits_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy,$$

и мы должны минимизировать функционал $S[z]$ в классе функций $z(x,y)$, $z\Big|_{\partial G} = f(x,y)$, $z \in \mathcal{C}^1(G)$.

Перейдём теперь к общему случаю. Вводим обозначения $p \overset{def}{=} \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q \overset{def}{=} \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}[z] = \iint\limits_G F(x,y,z,p,q)\, dxdy,$$

где G — некоторая область в плоскости $x,\ y$, $F \in \mathcal{C}^2$ при $(x,y) \in G$, $|z| < M$, $\forall p,\ q$; здесь M — какая-то большая константа. Пусть $P \overset{def}{=} (x,y)$. И пусть

$$\mathcal{K} \overset{def}{=} \left\{ z(x,y) \Big| z \in \mathcal{C}^1(\overline{G}),\ z\Big|_{\partial G} = f(P),\ |z| < M \right\}.$$

Мы будем рассматривать задачу на $\min\limits_{z \in \mathcal{K}} \mathcal{J}[z]$. Как обычно, предполагаем, что минимайзер существует и обладает повышенной гладкостью. Пусть $z = z(x,y)$ — минимайзер в рассматриваемой задаче.

Определение 2.1. Функцию $\eta(x,y)$ назовём **допустимым изменением**, если $\tilde{z} \overset{def}{=} z + t \cdot \eta \in \mathcal{K}$ при $|t| \ll 1$.

Легко видеть, что отсюда вытекают такие ограничения на η: $\eta\Big|_{\partial G} = 0$, $\eta \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$. Далее проводим стандартные рассуждения. Полагаем $\varphi(t) = \mathcal{J}[z + t \cdot \eta]$. Тогда

$$\mathcal{J}[z + t \cdot \eta] \geqslant \mathcal{J}[z] \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) \geqslant \varphi(0);$$

$$\mathcal{J}[z + t \cdot \eta] - \mathcal{J}[z] = \delta\mathcal{J} + \ldots, \qquad \varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(0) \cdot t + \ldots;$$

$$\delta\mathcal{J} = t \cdot \varphi'(0) = t \cdot \frac{d}{dt}\mathcal{J}[z + t \cdot \eta]\Big|_{t=0} \text{ — первая вариация.}$$

Так как $\varphi(0)$ — минимальное значение $\varphi(t)$ при $|t| \ll 1$, то $\varphi'(0) = 0$ (функция $\varphi(t) \in \mathcal{C}^1$!), то есть $\delta\mathcal{J} = 0$ — необходимое условие минимума (для максимума — тоже). Вычислим первую вариацию функционала

$$\mathcal{J}[z+t\cdot\eta]=\iint\limits_G \overbrace{F(x,y,\underbrace{z+t\cdot\eta}_{\tilde z},\underbrace{p+t\cdot\eta_x}_{\tilde z_x},\underbrace{q+t\cdot\eta_y}_{\tilde z_y})}^{\widetilde F}\,dxdy.$$

Имеем (предполагая только $z\in\mathcal{C}^2$, $\eta\in\mathcal{C}^1$)

$$\delta\mathcal{J}=t\cdot\frac{d}{dt}\iint\limits_G \widetilde F\,dxdy\Bigg|_{t=0}=t\cdot\iint\limits_G\left(\widetilde F_{\tilde z}\cdot\eta+\widetilde F_{\tilde z_x}\cdot\eta_x+\widetilde F_{\tilde z_y}\cdot\eta_y\right)\,dxdy\Bigg|_{t=0}=$$
$$=t\cdot\iint\limits_G\left(F_z\cdot\eta+F_{z_x}\cdot\eta_x+F_{z_y}\cdot\eta_y\right)\,dxdy.$$

Преобразуем полученное выражение так, чтобы производные η_x и η_y входили только в выражение дивергенции некоторого вектора. Имеем

$$\iint\limits_G\left(F_p\cdot\eta_x+F_q\cdot\eta_y\right)\,dxdy=\iint\limits_G\left(\frac{d}{dx}(F_p\cdot\eta)+\frac{d}{dy}(F_q\cdot\eta)\right)\,dxdy-$$
$$-\iint\limits_G\left(\frac{d}{dx}F_p+\frac{d}{dy}F_q\right)\cdot\eta\,dxdy.$$

Таким образом, первая вариация

$$\delta\mathcal{J}=t\left[\iint\limits_G\left(F_z-\frac{d}{dx}F_p-\frac{d}{dy}F_q\right)\cdot\eta\,dxdy+\right.$$
$$\left.+\iint\limits_G\left(\frac{d}{dx}(F_p\cdot\eta)+\frac{d}{dy}(F_q\cdot\eta)\right)\,dxdy\right].$$

Введём в рассмотрение вектор $\boldsymbol{\Phi}=(F_p\cdot\eta,F_q\cdot\eta)$. Его компоненты обладают гладкостью $\mathcal{C}^1(G)$ и $\mathcal{C}(\overline{G})$. Поэтому можно применить формулу Остроградского–Гаусса, согласно которой

$$\boxed{\iint\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}\,dxdy=\int\limits_{\partial G}\left(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{n}\right)_{\mathbb{R}^2}dl,}$$

где $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ — единичная внешняя нормаль к границе ∂G.

Используя эту формулу, получаем окончательное выражение для первой вариации:

$$\delta\mathcal{J} = t\cdot\iint\limits_G \left(F_z - \frac{d}{dx}F_p - \frac{d}{dy}F_q\right)\cdot\eta\,dxdy + \\ + t\cdot\int\limits_{\partial G}(F_p\cdot\cos\alpha + F_q\cdot\cos\beta)\cdot\eta\,dl. \quad (2.1)$$

Заметим, что это выражение даёт главную часть приращения $\mathcal{J}[z+t\cdot\eta]-\mathcal{J}[z]$ независимо ни от каких свойств z и η, кроме гладкости. Мы этим будем пользоваться.

Теперь возвращаемся к нашей вариационной задаче. Если z — минимайзер и η — допустимое изменение, то $\eta\Big|_{\partial G}\equiv 0$ и $\delta\mathcal{J}=0$, то есть

$$\iint\limits_G \left(F_z - \frac{d}{dx}F_p - \frac{d}{dy}F_q\right)\cdot\eta\,dxdy = 0, \quad \forall\eta \text{ — допустимое.} \quad (2.2)$$

Пусть $\Psi\equiv F_z - \dfrac{d}{dx}F_p - \dfrac{d}{dy}F_q$. Тогда (2.2) означает, что

$$\iint\limits_G \Psi(x,y)\cdot\eta\,dxdy = 0, \quad \forall\eta \text{ — допустимое.} \quad (2.3)$$

Из равенства (2.3) вытекает, что $\Psi(x,y)\equiv 0$, $x,y\in G$ (обобщение леммы Лагранжа на плоскость). Действительно, пусть в некоторой точке x_0, y_0 выполняется $\Psi(x_0,y_0)>0$. Так как функция $\Psi(x,y)$ — непрерывная, то можно указать такой квадрат A со стороной $2\cdot\delta$: $|x-x_0|\leqslant\delta$, $|y-y_0|\leqslant\delta$, что $\Psi(x,y)>0$, $x,y\in A$.

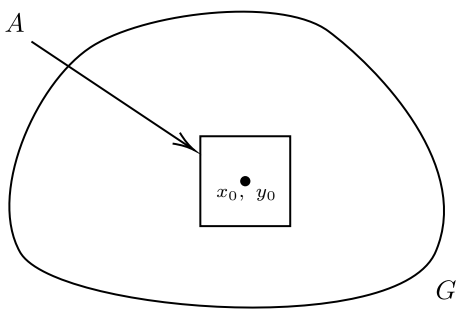


Рис. 9.2

Определим функцию $\eta(x,y)$ равенствами

$$\eta(x,y) = \\ = \begin{cases} \left[(x-x_0+\delta)^2\cdot(x-x_0-\delta)^2\cdot(y-y_0+\delta)^2\cdot(y-y_0-\delta)^2\right] & x,y\in A, \\ 0 & x,y\notin A. \end{cases}$$

Ясно, что по определению $\eta\Big|_{\partial A}=0$ и $\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=\dfrac{\partial\eta}{\partial y}=0$, $x,y\in\partial A$. Поэтому нет разрывов функции η и её производных на ∂A и, значит, $\eta\in\mathcal{C}^1(\overline{G})$. Подставляя в (2.2), получим

$$\iint\limits_A \Psi(x,y)\cdot\eta(x,y)\,dxdy=0,$$

что невозможно, ибо в области A функции $\Psi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ — положительны (кроме границы). Значит, не может существовать такая точка x_0,y_0 в которой $\Psi(x_0,y_0)>0$. Аналогично убеждаемся, что не может быть точки x_0,y_0, в которой $\Psi(x_0,y_0)<0$. Значит $\Psi(x,y)\equiv 0$, то есть

$$F_z-\frac{d}{dx}F_p-\frac{d}{dy}F_q\equiv 0,$$

если в функцию $F(x,y,z,p,q)$ подставили минимайзер, то есть для нахождения минимайзера надо решить уравнение

$$F_z-\frac{d}{dx}F_p-\frac{d}{dy}F_q=0. \tag{2.4}$$

Это — **уравнение Остроградского**. Мы должны решать его в классе функций $z(x,y)\in\mathcal{C}^2(G)$, $z\Big|_{\partial G}=f(x,y)$.

Уравнение (2.4) — это уравнение в частных производных второго порядка. Проведя в (2.4) дифференцирование, получим

$$F_z-F_{px}-F_{pz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-F_{pp}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-F_{pq}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-F_{qy}-F_{qz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}- \\ -F_{qp}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-F_{qq}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

то есть

$$-F_{pp}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\cdot F_{pq}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-F_{qq}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=W(x,y,z,p,q). \tag{2.5}$$

Рассмотрим пример. Интеграл

$$\mathcal{J}[z] = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = \iint\limits_G \left(p^2 + q^2 \right) \, dxdy$$

называется интегралом Дирихле. Уравнение Остроградского для него

$$-\frac{d}{dx}(2 \cdot z_x) - \frac{d}{dy}(2 \cdot z_y) = 0,$$

то есть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ — уравнение Лапласа,}$$

оператор $\Delta \overset{def}{=} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

<u>Обобщение</u>. Рассмотрим функционал $\mathcal{J}[z]$ для функции $z = z(x_1, \ldots, x_n)$, зависящей от n переменных. Пусть $p_i \overset{def}{=} \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — некоторая область,

$$\mathcal{J}[z] = \int \underset{\Omega}{\cdots} \int F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) \, d\Omega$$

и $z\Big|_{\partial\Omega} = f(x_1, \ldots, x_n)$. Уравнение Остроградского для этого функционала выводится совершенно аналогично случаю $n = 2$. В результате мы получим

$$F_z - \frac{d}{dx_1} F_{p_1} - \frac{d}{dx_2} F_{p_2} - \ldots - \frac{d}{dx_n} F_{p_n} = 0.$$

3. Вариационные задачи со свободной границей

Возвращаемся к исходному функционалу

$$\mathcal{J}[z] = \iint\limits_G F(x, y, z, p, q) \, dxdy,$$

но класс допустимых функций в задаче на $\min \mathcal{J}[z]$ определим по-другому. Пусть кривая $\Gamma \overset{def}{=} \partial G$. Разобьём Γ произвольным образом на две части $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причём

а) одна из частей может отсутствовать,

b) кривые Γ_1 и Γ_2 могут состоять каждая из отдельных кусков (см. рис. 9.3, например; Γ_1 выделена жирным).

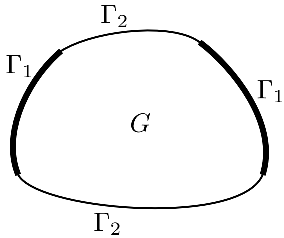


Рис. 9.3

Причина подобного разбиения — необходимость описать ситуацию, когда часть границы — скажем Γ_2 — свободна, а на Γ_1 задано граничное условие (до сих пор $\Gamma_2 = \varnothing$).

Итак, определим класс допустимых функций

$$\mathcal{K} = \left\{ z(x,y) \middle| z \in \mathcal{C}^1(\overline{G}),\ z\Big|_{\Gamma_1} = f(x,y),\ \Gamma_2 \neq \varnothing,\ |z| < M \right\}.$$

Тогда, чтобы $z + t \cdot \eta \in \mathcal{K}$, нам необходимо требовать, чтобы $\eta(x,y) \equiv 0$ не на всей кривой $\Gamma = \partial G$, а только на Γ_1. Достаточно условия: $\eta\Big|_{\Gamma_1} \equiv 0$, а $\eta\Big|_{\Gamma_2}$ — произвольна. Разумеется, требование $\eta(x,y) \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$ — сохраняется. Если z — минимайзер, то $\delta\mathcal{J} = 0$, а формула для $\delta\mathcal{J}$ — это (2.1). Значит,

$$\delta\mathcal{J} = t \left[\iint\limits_G \left(F_z - \frac{d}{dx} F_p - \frac{d}{dy} F_q \right) \cdot \eta \, dxdy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\Gamma (F_p \cdot \cos\alpha + F_q \cdot \cos\beta) \cdot \eta \, dl \right] = 0.$$

Взяв $\eta\Big|_\Gamma \equiv 0$ (это не запрещено), мы получаем, что

$$\iint\limits_G \left(F_z - \frac{d}{dx} F_p - \frac{d}{dy} F_q \right) \cdot \eta \, dxdy = 0,$$

откуда, как и раньше, выводим уравнение Остроградского

$$F_z - \frac{d}{dx} F_p - \frac{d}{dy} F_q = 0.$$

Поэтому равенство $\delta\mathcal{J} = 0$ сводится к равенству

$$\int\limits_{\Gamma} (F_p \cdot \cos\alpha + F_q \cdot \cos\beta) \cdot \eta\, dl = 0, \quad \forall\eta \text{ — допустимое.}$$

Но так как $\eta\Big|_{\Gamma_1} \equiv 0$, а $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то мы получаем, что

$$\int\limits_{\Gamma_2} (F_p \cdot \cos\alpha + F_q \cdot \cos\beta) \cdot \eta\, dl = 0. \tag{3.1}$$

В силу произвольности функции η на Γ_2 мы, обобщая лемму Лагранжа на случай кривой, получим, что

$$F_p \cdot \cos\alpha + F_q \cdot \cos\beta = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2. \tag{3.2}$$

Это — естественное граничное условие для свободной части границы. Если $\Gamma_1 = \varnothing$, то условие (3.2) должно выполняться на всей границе $\Gamma = \partial G$. Таким образом, уравнение Остроградского надо решать с граничными условиями: на Γ_2 — (3.2), $z\Big|_{\Gamma_1} = f(x, y)$.

Приведём пример. Пусть $F = z_x^2 + z_y^2$, то есть мы рассматриваем интеграл Дирихле. Тогда

$$F_p \cdot \cos\alpha + F_q \cdot \cos\beta = 2 \cdot (z_x \cdot \cos\alpha + z_y \cdot \cos\beta) = 2 \cdot \big(\nabla z, \boldsymbol{n}\big)_{\mathbb{R}^2} = 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial n}$$

и естественное граничное условие на свободной части границы $\dfrac{\partial z}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0$. Например, для прямоугольника (см. картинку) со свободными левой и правой сторонами естественные граничные условия таковы:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=b} = 0, \ -\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0.$$

Рис. 9.4

Лекция 10

1. Квадратичный функционал в случае функций, зависящих от нескольких переменных. Оператор Шрёдингера

Для функционалов, зависящих от функций нескольких переменных, можно ставить изопериметрические задачи аналогично ситуации с функционалом от функций одной переменной. Однако мы не будем этого делать в общем случае, а ограничимся случаем *квадратичных* функционалов для функций трёх переменных

$$B[u] = \iiint\limits_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + P(x,y,z) \cdot u^2\right)\, d\Omega, \tag{1.1}$$

где $u = u(x,y,z)$, $P(x,y,z) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$. Минимум $B[u]$ ищем в классе

$$\mathcal{K} = \left\{ u(x,y,z) \middle| u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \iiint\limits_{\Omega} u^2\, d\Omega = 1 \right\}.$$

Повторяя рассуждения, проведённые для изопериметрических задач в случае $\mathcal{J}[y]$, $y = y(x)$, мы получим, что минимайзер в задаче на $\min\limits_{u\in\mathcal{K}} B[u]$ удовлетворяет уравнению Пуассона для интегранта

$$F^* = F - \lambda \cdot u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + P \cdot u^2 - \lambda \cdot u^2,$$

и, значит, уравнение Пуассона можно записать в виде

$$-\Delta u + P \cdot u = \lambda \cdot u \qquad \left(\Delta \overset{def}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{1.2}$$

Оператор $H = -\Delta + P$ называется оператором Шрёдингера, при $P = 0$ — оператором Лапласа. Мы рассматриваем функцию трёх переменных, но можно рассматривать и двух, и вообще n. Решение (1.2) ищется в классе функций $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, $u\Big|_S = 0$ и $S = \partial\Omega$. Таким образом, минимайзер является собственной функцией оператора

Шрёдингера, отвечающей собственному значению λ. Докажем эрмитовость оператора H в $\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ при заданном условии $u\Big|_S=0$ и при других возможных граничных условиях (аналогичных тем, что были в одномерной ситуации)

$$u\Big|_S=0; \tag{A}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma\cdot u\right)\Bigg|_S=0,\quad \gamma\geqslant 0; \tag{B}$$

где $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Мы рассматриваем оператор Шрёдингера в пространстве

$$\mathscr{L}_2(\Omega)=\left\{u(x,y,z)\,\middle|\,\iiint\limits_{\Omega}|u|^2\,d\Omega<+\infty\right\}.$$

При $u,v\in\mathscr{L}_2(\Omega)$ полагаем $\big(u,v\big)\overset{def}{=}\iiint\limits_{\Omega}u\cdot\overline{v}\,d\Omega$. Оператор H определим на $\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ с граничным условием (A) или (B). Нам надо доказать, что при $u,\ v\in\mathcal{D}_H$ (область определения)

$$\big(Hu,v\big)=\big(u,Hv\big). \tag{1.3}$$

Так как в выражении H (см. (1.2)) функция P — вещественна, то для справедливости (1.3) достаточно проверить равенство

$$\big(-\Delta u,v\big)=\big(u,-\Delta v\big). \tag{1.4}$$

Имеем, выделяя дивергенцию вектора $\boldsymbol{\Phi}=(u_x\cdot\overline{v},u_y\cdot\overline{v},u_z\cdot\overline{v})$,

$$\begin{aligned}\big(-\Delta u,v\big)&=-\iiint\limits_{\Omega}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})\cdot\overline{v}\,d\Omega=\\&=-\iiint\limits_{\Omega}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(u_x\cdot\overline{v}\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(u_y\cdot\overline{v}\big)+\frac{\partial}{\partial z}\big(u_z\cdot\overline{v}\big)\right)}_{\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}}d\Omega+\end{aligned}$$

$$+\iiint\limits_{\Omega}(u_x\cdot\overline{v}_x+u_y\cdot\overline{v}_y+u_z\cdot\overline{v}_z)\,d\Omega=\iiint\limits_{\Omega}\big(\nabla u,\nabla v\big)_{\mathbb{R}^3}\,d\Omega-\iint\limits_{S}\big(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{n}\big)_{\mathbb{R}^3}\,dS, \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к S: $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$[i]. В

[i]Мы применили здесь формулу Остроградского–Гаусса, и именно для этого потребовали $u,\ v\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Кроме того, требование $u,\ v\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ обязательно при условии (B) на границе.

силу (1.5)

$$\bigl(-\Delta u, v\bigr) = \iiint\limits_{\Omega} \bigl(\nabla u, \nabla v\bigr)_{\mathbb{R}^3}\, d\Omega - \iint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n}\cdot \overline{v}\, dS. \tag{1.6}$$

Далее

$$-\bigl(u, \Delta v\bigr) = -\overline{\bigl(\Delta v, u\bigr)} = \overline{\iiint\limits_{\Omega} \bigl(\nabla v, \nabla u\bigr)_{\mathbb{R}^3}\, d\Omega} - \iint\limits_{S} \frac{\partial \overline{v}}{\partial n}\cdot u\, dS. \tag{1.7}$$

Таким образом, для эрмитовости оператора Лапласа надо, чтобы на границе S

$$\frac{\partial u}{\partial n}\cdot \overline{v} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial n}\cdot u.$$

При условии (A) получаем, что $0 = 0$, а при условии (B) получаем, что $-\gamma\cdot u\cdot\overline{v} = -\overline{\gamma}\cdot\overline{v}\cdot u$[i]. Таким образом, при вещественном γ оператор Δ эрмитов в случае условия (B), а при γ — комплексном — нет. Кроме того, заметим, что при условии (A) при $u = v$

$$\bigl(Hu, u\bigr) = B[u], \tag{1.8}$$

а при условии (B)

$$\bigl(Hu, u\bigr) = \widetilde{B}[u] \stackrel{def}{=} \iiint\limits_{\Omega} \Bigl(|\nabla u|^2 + P\cdot|u|^2\Bigr)\, d\Omega + \gamma\cdot\iint\limits_{S} |u|^2\, dS. \tag{1.9}$$

В силу эрмитовости оператора H замечаем, что собственные значения H — вещественны и собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны (как и для оператора Штурма). Однако по сравнению с ним есть существенное отличие. Кроме наименьшего собственного значения оператора H, все остальные могут быть вырожденными. Другими словами, если $Hu = \lambda\cdot u$, и λ — не минимальное собственное значение оператора H, то $\dim\mathcal{U}_\lambda \geqslant 2$ (в общем случае). Приведём пример (для простоты — в двумерном случае).

Пусть

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

область $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\cdot\pi$. $u(x,0) = u(x, 2\cdot\pi) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$.

---

[i]На части S может выполняться (A), на части (B) — рассуждения сохраняются.

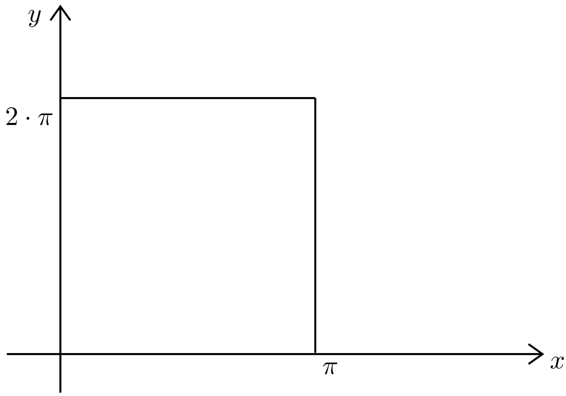


Рис. 10.1

Рассмотрим

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin(x) \cdot \sin(2 \cdot y), \\ u_2 &= \sin(2 \cdot x) \cdot \sin(y). \end{aligned}$$

Эти функции удовлетворяют граничным условиям и

$$-\Delta u_1 = 5 \cdot u_1, \quad -\Delta u_2 = 5 \cdot u_2.$$

В то же время, для наименьшего собственного значения можно строго доказать, что отвечающее ему собственное подпространство одномерно. В связи с этим формулировки экстремальных свойств собственных значений и собственных функций оператора H меняются, кроме теорем 1 и 2. Я дам сейчас формулировки, считая везде граничное условие (A) и функционал $B[u]$ вида (1.1) стр. 120. В случае граничного условия (B) надо брать функционал $\widetilde{B}[u]$ из (1.9).

Пусть

$$\mathcal{K}_1 = \left\{ u \middle| u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ u\Big|_S = 0,\ \iiint\limits_{\Omega} u^2\, d\Omega = 1 \right\}.$$

Теорема 1.1. Пусть u_1 — минимайзер задачи на $\min\limits_{u \in \mathcal{K}_1} B[u]$ и $\lambda_1 = B[u_1]$. Тогда λ_1 — наименьшее собственное значение оператора H и u_1 — отвечающая ему собственная функция.

Теорема 1.2. Пусть $\mathcal{K}_2 = \big\{ u \big| u \in \mathcal{K}_1,\ \big(u, u_1\big) = 0 \big\}$ и u_2 — минимайзер задачи на $\min\limits_{u \in \mathcal{K}_2} B[u]$, $\lambda_2 = B[u_2]$. Тогда λ_2 — второе по величине собственное значение оператора H и u_2 — отвечающая ему собственная функция.

Эти две теоремы по формулировке и по доказательству не отличаются от соответствующих теорем для оператора Штурма.

Теорема 1.3. Пусть $\mathcal{K}_3 = \{u \big| u \in \mathcal{K}_1,\ (u, u_1) = (u, u_2) = 0\}$ и u_3 — минимайзер задачи на $\min\limits_{u \in \mathcal{K}_3} B[u]$, $\lambda_3 = B[u_3]$. Тогда или $\lambda_3 = \lambda_2$, или λ_3 — третье по величине собственное значение оператора H.

Таким образом, мы видим, что решение вариационных задач попрежнему дают собственные значения, но возможен вариант $\lambda_3 = \lambda_2$, и тогда $u_3 \in \mathcal{U}_{\lambda_2}$, то есть $\dim \mathcal{U}_{\lambda_2} \geqslant 2$.

Аналогично, если мы всегда будем определять классы, в которых решаются вариационные задачи, ставя условие ортогональности к решениям предыдущих вариационных задач (то есть к уже найденным собственным функциям оператора Шрёдингера), то мы получим собственную функцию, отвечающую или последнему из ранее найденных собственных значений, или следующему за ним по величине. Таким образом, мы можем записать

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \lambda_1 & < & \lambda_2 & \leqslant & \lambda_3 & \leqslant & \lambda_4 & \leqslant & \ldots & \leqslant & \lambda_k & \leqslant & \ldots, \\ u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 & & & & u_k & & \end{array} \tag{1.10}$$

где u_j — собственная функция, отвечающая j-ой вариационной задаче, $u_j \perp u_i$, $i < j$. Следует заметить, что если, например,

$$\lambda_5 < \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 < \lambda_{10},$$

то собственное подпространство $\mathcal{U}_{\lambda_6} = \mathscr{L}\{u_6, u_7, u_8, u_9\}$, то есть решения с шестой по девятую вариационных задач дают ортонормированный базис в $\mathcal{U}_{\lambda_6}$. И в этом случае, решая задачу с условием ортогональности к u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 мы получаем не единственный минимайзер. Просто за u_6 мы взяли *один из* существующих минимайзеров. Таким образом, в качестве u_6 — u_9 может оказаться любой ортонормированный базис из линейной оболочки $\mathscr{L}\{u_6, u_7, u_8, u_9\}$ тех функций, которые мы получили, решая вариационные задачи. Далее формулируем *принцип минимакса.*

Теорема 1.4 (принцип минимакса)**.** Пусть λ_{n+1} — собственное значение оператора Шрёдингера, определяемое значением функционала $B[u]$ на решении $(n+1)$-ой вариационной задачи[i]. Тогда

$$\lambda_{n+1} = \max_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n} \min_{\substack{u \in \mathcal{K}_1, \\ u \perp \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}} B[u], \tag{1.11}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — произвольный набор n функций из $\mathscr{L}_2(\Omega)$.

[i]Напомним, что мы пишем $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, где каждое λ_j повторяется число раз, равное $\dim \mathcal{U}_{\lambda_j}$.

Доказательство (1.11) не отличается от аналогичного доказательства для оператора Штурма.

Используя принцип минимакса, устанавливаем теорему сравнения. Пусть $P = P(x, y, z)$, $\widetilde{P} = \widetilde{P}(x, y, z) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$,

$$H = -\Delta + P, \quad \widetilde{H} = -\Delta + \overline{P}.$$

Обозначим через λ_j и $\widetilde{\lambda}_j$ собственные значения этих операторов с областью

$$\mathcal{D}_H = \mathcal{D}_{\widetilde{H}} = \left\{ u \middle| u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Теорема 1.5. (теорема сравнения 1). Пусть $\widetilde{P} \leqslant P$. Тогда

$$\widetilde{\lambda}_j \leqslant \lambda_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \ldots. \tag{1.12}$$

Доказательство неравенства (1.12), как и доказательство равенства (1.11), не отличается от аналогичного доказательства для собственных значений оператора Штурма.

Теорема сравнения нужна для того, чтобы оценивать собственные значения оператора Шрёдингера с переменными коэффициентами через собственные значения оператора Шрёдингера с постоянными коэффициентами и особенно для доказательства соотношения

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty.$$

Отсюда, в частности, (с учётом сноски i стр. 124) будет следовать невозможность того, что размерность какого-то собственного подпространства бесконечна, ибо тогда $\exists j_0$ так, что $\lambda_{j_0} = \lambda_s$, $s > j$.

Пусть

$$P_- \overset{def}{=} \min_{x,y,z \in \overline{\Omega}} P(x, y, z), \quad P_+ \overset{def}{=} \max_{x,y,z \in \overline{\Omega}} P(x, y, z), \quad H_\pm = -\Delta + P_\pm$$

и $\lambda_k^\pm$ — собственные значения операторов $H_\pm$. Тогда, поскольку $P_- \leqslant P \leqslant P_+$, то из теоремы сравнения следует, что

$$\lambda_k^- \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_k^+, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.13}$$

Однако при произвольной форме области Ω найти $\lambda_k^\pm$ в явном виде не удаётся, поэтому нам понадобится ещё одна теорема сравнения — по области. То есть мы будем сравнивать собственные значения $\lambda_k\big(\Omega\big)$ и $\lambda_k\big(\widehat{\Omega}\big)$ одного и того же оператора $H = -\Delta + P$ в областях Ω и $\widehat{\Omega}$ с одним и тем же граничным условием на $\partial\Omega$ и $\partial\widehat{\Omega}$ при $\widehat{\Omega} \supseteq \Omega$. Итак, пусть

$$\mathcal{D}_H = \left\{ u(x,y,z) \middle| u \in \mathcal{C}^2\big(\Omega\big) \cap \mathcal{C}^1\big(\overline{\Omega}\big),\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_H = \left\{ u(x,y,z) \middle| u \in \mathcal{C}^2\big(\widehat{\Omega}\big) \cap \mathcal{C}^1\big(\overline{\widehat{\Omega}}\big),\ u\Big|_{\partial\widehat{\Omega}} = 0 \right\}$$

и $\lambda_k\big(\Omega\big)$, $\lambda_k\big(\widehat{\Omega}\big)$ — собственные значения оператора $H = -\Delta + P$ в этих областях.

Теорема 1.6 (теорема сравнения 2)**.** Если $\widehat{\Omega} \supseteq \Omega$, то

$$\lambda_k(\Omega) \geqslant \lambda_k(\widehat{\Omega}),$$

то есть расширение области не увеличивает собственные значения.

Доказательство. Пусть $\widehat{\Omega} \supseteq \Omega$.

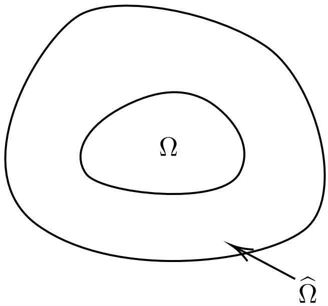


Рис. 10.2

Пусть также

$$\mathcal{K}_1(\Omega) = \left\{ u \middle| u \in \mathcal{C}^1(\Omega),\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \iiint\limits_{\Omega} u^2\, d\Omega = 1 \right\},$$

$$\overset{0}{\mathcal{K}}_1(\widehat{\Omega}) = \left\{ u \middle| u \in \mathcal{K}_1(\Omega),\ u(x,y,z) \equiv 0,\ (x,y,z) \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega \right\},$$

$$\mathcal{K}_1(\widehat{\Omega}) = \left\{ u \middle| u \in \mathcal{C}^1\big(\widehat{\Omega}\big) \text{ — кусочно},\ u\Big|_{\partial\widehat{\Omega}} = 0,\ \iiint\limits_{\widehat{\Omega}} u^2\, d\Omega = 1 \right\}.$$

При $u \in \mathcal{K}_1\big(\widehat{\Omega}\big)$ положим

$$\widehat{B}[u] = \iiint\limits_{\widehat{\Omega}} \Big(|\nabla u|^2 + P \cdot |u|^2 \Big)\, d\Omega.$$

Из определения класса $\overset{0}{\mathcal{K}}_1\big(\widehat{\Omega}\big)$ следует, что при $u \in \overset{0}{\mathcal{K}}_1\big(\widehat{\Omega}\big)$

$$\widehat{B}[u] = B[u] = \iiint\limits_{\Omega} \Big(|\nabla u|^2 + P \cdot |u|^2 \Big)\, d\Omega.$$

Далее, для $\forall \varphi \in \mathscr{L}_2(\widehat{\Omega})$ положим

$$\check{\varphi}(x,y,z) = \begin{cases} \varphi & (x,y,z) \in \Omega, \\ 0 & (x,y,z) \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — любые фиксированные функции из $\mathscr{L}_2(\widehat{\Omega})$. Тогда для $u \in \overset{0}{\mathcal{K}}_1(\widehat{\Omega})$, очевидно, $\big(u, \varphi_j\big)_{\widehat{\Omega}} = \big(u, \check{\varphi}_j\big)_{\Omega}$. Имеем

$$\begin{array}{rcl} \widehat{B}[u] & = & B[u], \\ u \in \overset{0}{\mathcal{K}}_1(\widehat{\Omega}) & & u \in \overset{0}{\mathcal{K}}_1(\widehat{\Omega}), \\ \big(u, \varphi_j\big)_{\widehat{\Omega}} = 0,\ j = \overline{1,k} & & \big(u, \check{\varphi}_j\big)_{\Omega} = 0,\ j = \overline{1,k}. \end{array} \tag{1.13a}$$

Оставляя справа в (1.13a) функцию u фиксированной, слева возьмём минимум по $v \in \mathcal{K}_1\big(\widehat{\Omega}\big) \supseteq \overset{0}{\mathcal{K}}_1(\widehat{\Omega})$. Получим

$$\begin{array}{rcl} \min \widehat{B}[v] & \leqslant & B[u], \\ v \in \mathcal{K}_1(\widehat{\Omega}) & & u \in \overset{0}{\mathcal{K}}_1(\widehat{\Omega}), \\ \big(v, \varphi_j\big)_{\widehat{\Omega}} = 0,\ j = \overline{1,k} & & \big(u, \check{\varphi}_j\big)_{\Omega} = 0,\ j = \overline{1,k}. \end{array} \tag{1.13b}$$

Так как (1.13b) выполняется для $\forall u \in \overset{0}{\mathcal{K}}_1(\widehat{\Omega})$, возьмём справа минимум по функциям u, причём вместо $\overset{0}{\mathcal{K}}_1(\widehat{\Omega})$ возьмём $\mathcal{K}_1(\Omega)$.

$$\begin{array}{rcl} \min \widehat{B}[v] & \leqslant & \min B[u], \\ v \in \mathcal{K}_1(\widehat{\Omega}) & & u \in \mathcal{K}_1(\Omega), \\ \big(v, \varphi_j\big)_{\widehat{\Omega}} = 0,\ j = \overline{1,k} & & \big(u, \check{\varphi}_j\big)_{\Omega} = 0,\ j = \overline{1,k}. \end{array} \tag{1.14}$$

Оставляя слева $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ фиксированными, возьмём справа в (1.14) максимум в условии ортогональности $\big(u, \check{\varphi}_j\big)_{\Omega} = 0$ по всевозможным $\psi_j \in \mathscr{L}_2(\Omega)$. Получим

$$\begin{array}{rcll} \min \widehat{B}[v] & \leqslant & \max & \min B[u], \\ v \in \mathcal{K}_1(\widehat{\Omega}) & & \psi_1, \ldots, \psi_k & u \in \mathcal{K}_1(\Omega), \\ \big(v, \varphi_j\big)_{\widehat{\Omega}} = 0,\ j = \overline{1,k} & & & \big(u, \check{\psi}_j\big)_{\Omega} = 0,\ j = \overline{1,k}. \end{array} \tag{1.15}$$

А теперь возьмём в (1.15) слева максимум по $\forall \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathscr{L}_2(\widehat{\Omega})$. Получим окончательно

$$\max_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k} \min_{\substack{v\in\mathcal{K}_1(\widehat{\Omega})\\ (v,\varphi_j)_{\widehat{\Omega}}=0,\ j=\overline{1,k}}} \widehat{B}[v] \leqslant \max_{\psi_1,\ldots,\psi_k} \min_{\substack{u\in\mathcal{K}_1(\Omega),\\ (u,\check{\psi}_j)_{\Omega}=0,\ j=\overline{1,k}.}} B[u], \tag{1.16}$$

Согласно принципу минимакса слева в (1.16) $\lambda_{k+1}(\widetilde{\Omega})$, справа $\lambda_{k+1}(\Omega)$ и, таким образом, теорема 1.6 доказана, так как в (1.16): $\lambda_{k+1}(\widetilde{\Omega}) \leqslant \leqslant \lambda_{k+1}(\Omega)$. □

Возьмём теперь два произвольных куба A_1, A_2, один из которых, A_2, содержит Ω (можно считать в теореме 1.6 $A_2=\widehat{\Omega}$), а другой, $A_1\subset\Omega$. Пусть $\lambda_k(A_s)$ — собственные значения оператора $H(A_s)$, то есть оператора Hв кубе A_s с нулевым граничным условием на ∂A_s, $s=1,2$. В силу теоремы 1.6

$$\lambda_k(A_1)\geqslant\lambda_k\geqslant\lambda_k(A_2). \tag{1.17}$$

Пусть

$$P_+^{(1)}=\max_{r\in A_1}P(r),\quad P_-^{(2)}=\min_{r\in A_2}P(r),\quad r=(x,y,z)$$

и $\lambda_k^+(A_1)$, $\lambda_k^-(A_2)$ — собственные значения операторов

$$H_+(A_1)=-\Delta+P_+^{(1)} \text{ и } H_-(A_2)=-\Delta+P_-^{(2)}$$

в кубах A_1, A_2 с нулевым условием на ∂A_1, ∂A_2. Тогда в силу теоремы 1.5

$$\lambda_k^+(A_1)\geqslant\lambda_k(A_1),\quad \lambda_k^-(A_2)\leqslant\lambda_k(A_2)$$

и в силу (1.17)

$$\lambda_k^+(A_1)\geqslant\lambda_k\geqslant\lambda_k^-(A_2),$$

но для любого куба A собственные значения $\lambda_k^0(A)$ оператора $H_0(A)= =-\Delta+P_0$, где P_0 произвольная константа, известны[i] и $\lambda_k^0\to+\infty$ при $k\to\infty$. Значит $\lambda_k\to+\infty$ при $k\to\infty$, что мы и хотели доказать.

Теперь переходим к теореме Стеклова. Пусть $u_1,\ u_2,\ldots,u_k,\ldots$ — ортонормированные собственные функции оператора Шрёдингера в области Ω с нулевыми условиями на $\partial\Omega$ и пусть $\lambda_1<\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$ — соответствующие собственныые значения, $C_k=(u,u_k)$, $u\in\mathscr{L}_2(\Omega)$.

---

[i]Мы покажем в «Лекциях по уравнениям математической физики. Часть 1» [2], что для куба A со стороной l собственные значения оператора $H_0(A)=-\Delta+P_0$ при нулевом граничном условии на ∂A суть $\nu_{k_1k_2k_3}=\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2\cdot(k_1^2+k_2^2+k_3^2)+P_0$, где $k_1,\ k_2\ k_3=1,2,3,\ldots$. Мы упорядочиваем их по величине $(k_1^2+k_2^2+k_3^2)$ и обозначаем $\lambda_k^0(A)$.

Теорема 1.7 (теорема Стеклова)**.**

1) Для любой функции $u \in \mathscr{L}_2(\Omega)$ обобщённый ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot u_k$ сходится к u в среднем.
2) Для любой функции $u \in \mathcal{D}_H$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot u_k$ сходится к ней равномерно.

Утверждение 1) доказывается так же, как в одномерном случае. Сначала показывается, что при $u \in \mathcal{D}_H$ выполняется $\|u - S_n\| \to 0$, а затем без доказательства используем, что для $\forall u \in \mathscr{L}_2(\Omega)$ по $\forall \varepsilon > 0$ $\exists u_\varepsilon \in \mathcal{D}_H$ так, что $\|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon$. Утверждение 2) теоремы Стеклова — без доказательства.

2. Различные обобщения

I Оператор Штурма. Случай периодических граничных условий

Пусть

$$Ly = -\frac{d}{dx}\Big(Q \cdot y'\Big) + P \cdot y,$$

$$\mathcal{D}_L = \Big\{ y \Big| y \in \mathcal{C}^2_{[a,b]},\ y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b) \Big\}.$$

Легко проверить, что при $Q(a) = Q(b)$ оператор L — эрмитов и, значит, собственные значения вещественны и собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны. Есть отличие от рассмотренных нами ранее ситуаций: отличие, которое нам подсказывает оператор

$$Ly = -\frac{d^2}{dx^2} y \quad \text{при } [a,b] = [0,l].$$

Мы получаем собственные значения

$$\lambda_k = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{l}\right)^2$$

и нормированные линейно независимые собственные функции (две!), отвечающие каждому собственному значению $\lambda_k \neq 0$

$$y_{k1} = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{l} \cdot x\right), \quad y_{k2} = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{l} \cdot x\right), \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{l}}.$$

В остальном — доказательство свойств оператора Штурма с периодическими граничными условиями не отличается от проведённого для обычного оператора Штурма при условиях $y(a) = y(b) = 0$. Заметим только, что при $l = 2\cdot\pi$ мы в теореме Стеклова получим разложение в обычный ряд Фурье.

II Случай неограниченной области

Рассмотрим оператор $Ly = -y''$ на полуоси $[0, +\infty)$ в пространстве $\mathscr{L}_2[0,+\infty)$, с заданным условием $y(0) = 0$ и условием $\int\limits_0^\infty |y'|^2\,dx < +\infty$, заменяющим условие на бесконечности.

Если $-y'' = \lambda\cdot y$, то $y'' \in \mathscr{L}_2[0,\infty)$. Найдём знак λ. Пусть $N \gg 1$,

$$-\underline{\int\limits_0^N y''\cdot\overline{y}\,dx} = -y'\cdot\overline{y}\,\Bigg|_0^N + \underline{\int\limits_0^N |y'|^2\,dx} = -y'\cdot\overline{y}\Big|_{x=N} + \underline{\int\limits_0^N |y'|^2\,dx} = \lambda\cdot\underline{\int\limits_0^N |y|^2\,dx}.$$

При $N\to\infty$ подчёркнутые интегралы имеют конечный предел, значит, и $\alpha = \lim\limits_{N\to\infty} y'(N)\cdot y(N)$ — существует и конечен. Но так как интеграл $\int\limits_0^\infty |y'\cdot y|\,dx$ — конечен, то $\alpha = 0$, и поэтому в пределе при $N\to\infty$ мы получаем, что

$$\int\limits_0^\infty |y'|^2\,dx = \lambda\cdot\int\limits_0^\infty y^2\,dx.$$

Значит, $\lambda \geqslant 0$. Полагая $\lambda = \nu^2$, из условия $-y'' = \nu^2\cdot y$ находим $y = c_1\cdot\sin(\nu\cdot x)$. Но $y \notin \mathscr{L}_2[0,\infty)$, хотя формально удовлетворяет уравнению $-y'' = \nu^2\cdot y$. Таким образом, у рассматриваемого оператора в $\mathscr{L}_2[0,\infty)$ нет собственных функций. Поэтому в привычном виде нет теоремы Стеклова. В то же время, если $y \in \mathscr{L}_2[0,\infty)\cap\mathscr{L}_1[0,\infty)$[i] то для

$$\overline{y}(\nu) \overset{def}{=} \int\limits_0^\infty y(x)\cdot\sin(\nu\cdot x)\,dx$$

имеет место

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^\infty \overline{y}(\nu)\cdot\sin(\nu\cdot x)\,d\nu.$$

---

[i]

$$\mathscr{L}_1[0,\infty) = \left\{ y(x) \,\middle|\, \int\limits_0^\infty |y(x)|\,dx < +\infty \right\}.$$

Здесь $\overline{y}(\nu)$ — это не комплексно сопряжённая функция, а обозначение[i]. Функция $\sin(\nu \cdot x)$ называется собственной функцией непрерывного спектра, $\overline{y}(\nu)$ — аналог коэффициента Фурье. Если рассмотреть на полуоси оператор

$$Ly = -y'' + P(x) \cdot y, \quad P(x) < 0, \; P(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0,$$

тогда может быть какое-то число отрицательных собственных значений λ_n. Пусть собственные функции суть $y_n(x)$, тогда

$$y(x) = \sum_n C_n \cdot y_n + \int \ldots .$$

3. Оператор Шрёдингера во всём пространстве

Поскольку такие операторы встречаются в квантовой механике, то мы будем обсуждать ситуацию применительно к ней.

I Одночастичный случай

Пусть $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, оператор энергии

$$Hu = -a \cdot \Delta u + P(\boldsymbol{r}) \cdot u.$$

Область определения

$$\mathcal{D}_H = \left\{ u(\boldsymbol{r}) \middle| u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3), \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) d\Omega < +\infty, \; Hu \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

Пример:

$$Hu = -a \cdot \Delta u - \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} \cdot u \text{ — гамильтониан атома водорода.}$$

В общем случае

$$Hu = -a \cdot \Delta u + P(\boldsymbol{r}) \cdot u,$$

где $P(\boldsymbol{r}) \to 0$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$.

Для простоты считаем, что $P(\boldsymbol{r}) < 0$ при $|\boldsymbol{r}| \gg 1$. Тогда доказано, что если $|\boldsymbol{r}|^2 \cdot |P(\boldsymbol{r})| \to 0$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$, то слева от точки 0 может быть не

[i]Приведённые формулы относятся к синус-преобразованию, которое мы будем изучать в последних лекциях [3].

более чем конечное число собственных значений. Это так называемые короткодействующие взаимодействия $P(\boldsymbol{r})$, характерные для взаимодействий между нуклонами. Если $|\boldsymbol{r}|^2 \cdot |P(\boldsymbol{r})| \to +\infty$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ — то это — длиннодействие. Пример $P(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{c}{|\boldsymbol{r}|}$ $(c > 0)$ — случай атома водорода. При отрицательном длиннодействии имеется бесконечное число собственных значений $\lambda_k < 0$, $\lambda_k \to 0$, $k \to \infty$ (см. рис. 10.3).

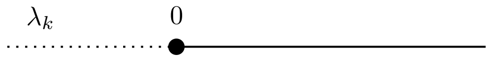


Рис. 10.3

В обоих случаях ось $[0, +\infty)$ заполнена «непрерывным спектром» — то есть точкам $\nu > 0$ отвечают неинтегрируемые с квадратом собственные функции, и теорема Стеклова будет выглядеть так:

$$u(x) = \sum_k C_k \cdot u_k + \iiint \ldots .$$

А если $P(\boldsymbol{r}) \to +\infty$ $|\boldsymbol{r}| \to \infty$, то у оператора H не будет непрерывного спектра, собственные значения $\lambda_k \to +\infty$, и теорема Стеклова справедлива в обычной формулировке.

II Многоэлектронный атом с неподвижным ядром

Оператор энергии n-электронного атома

$$H_n u = -\sum_{i=1}^{n} a \cdot \Delta_i u - Z \cdot e^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_i|} \cdot u + e^2 \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_{ij}|} \cdot u,$$

где $u = u(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n)$, $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — координаты i-ого электрона, $|Z \cdot e|$ — заряд ядра, e — заряд электрона, $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$,

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}.$$

Для нейтрального атома $Z = n$, для (+) иона $Z > n$.

$$\mathcal{D}_{H_n} = \left\{ u(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n) \middle| u \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^{3\cdot n}\right) \text{ — кусочно,} \right.$$

$$\left. \int\limits_{\mathbb{R}^{3\cdot n}} \cdots \int \left(|u|^2 + |\nabla u|^2 + |Hu|^2\right) d\Omega < +\infty \right\}.$$

Уравнение

$$H_n u = \lambda \cdot u$$

описывает стационарные (связанные) состояния атома (иона) с энергией λ. Хотя написанное уравнение является одним из основных уравнений нерелятивистской квантовой механики, вопрос о существовании собственных значений, их числе и местоположении не был решён к шестидесятым годам прошлого века. Задача исследования этого вопроса была поставлена мне в аспирантуре (1956-1959). Результаты решения этой задачи я привожу ниже. При $Z \geqslant n$ (случай нейтральных атомов ($Z = n$) и положительных ионов ($Z > n$)) существует бесконечная серия собственных значений $\lambda_k(n) \to \lambda_0(n-1)$ при $k \to \infty$, где $\lambda_0(n-1)$ — наименьшее собственное значение оператора H_{n-1}, то есть при $Z = n$ это нижняя грань энергии (+)-иона, получившегося удалением из системы одного электрона (теорема Жислина). Сплошной спектр заполняет луч $\big[\lambda_0(n-1), +\infty\big)$ (HWZ–theorem, теорема Хунцикера–ван Винтера–Жислина).

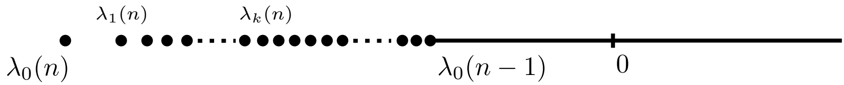


Рис. 10.4

Список литературы

[1] Жислин, Г. М. Лекции по линейной алгебре для физиков и математиков / Г. М. Жислин. — Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2021. — 160 с.

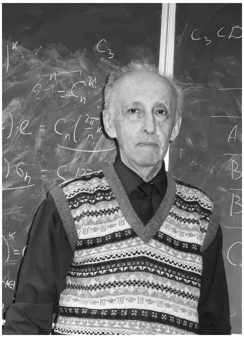
[2] Жислин, Г. М. Лекции по уравнениям математической физики. Часть 1 / Г. М. Жислин. — Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2022. — 108 с.

[3] Жислин, Г. М. Интегральные преобразования в задачах математической физики / Г. М. Жислин. — Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2012. — 83 с.

[4] Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1969. — 424 с.

[5] Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. — Москва : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 228 с.

[6] Буслаев, В. С. Вариационное исчисление / В. С. Буслаев. — Ленинград : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 288 с.



ЖИСЛИН ГРИГОРИЙ МОИСЕЕВИЧ

Российский учёный-математик, профессор, доктор физико-математических наук, почетный работник науки и техники Российской Федерации. Им получены выдающиеся результаты в области математических задач квантовой механики (исследование спектральных свойств многочастичных гамильтонианов). Теорема о локализации существенного спектра многочастичных систем известна как теорема Хунцикера–Ван Винтера–Жислина, а теорема о бесконечности дискретного спектра гамильтонианов атомов называется в литературе теоремой Жислина. Автор около 150 научных статей, член Американского математического общества и Международной ассоциации математической физики, Г. М. Жислин читает общие курсы по математической физике, линейной алгебре и теории групп на факультете «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета им. Лобачевского.

Григорий Моисеевич **Жислин**

ЛЕКЦИИ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ.

Учебно-методическое пособие

Компьютерная верстка – А. Г. Чубаров

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.