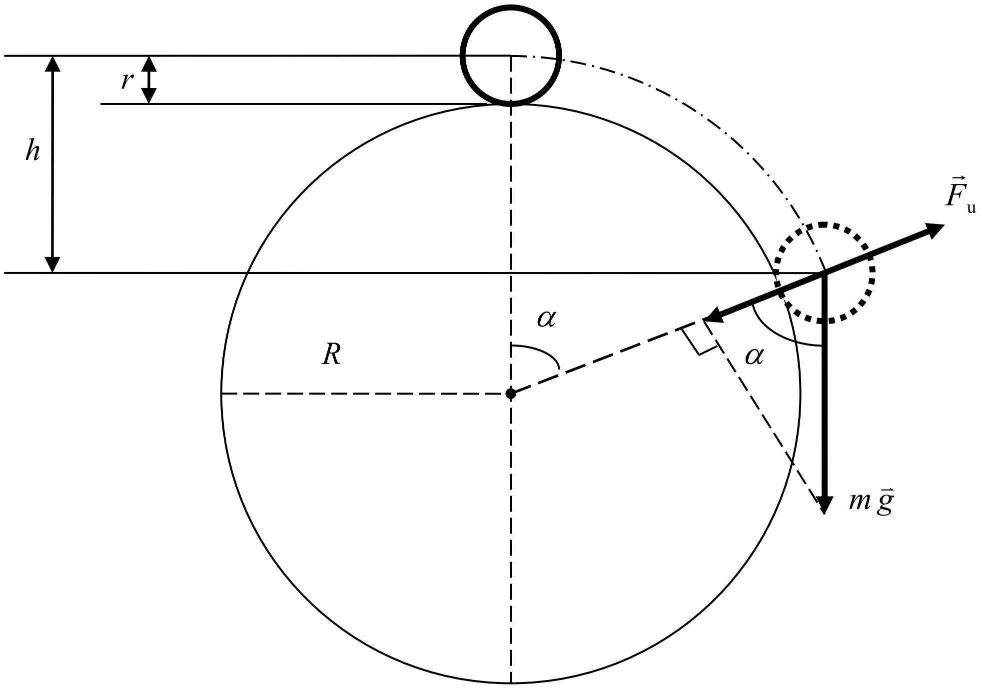
Задача 27(д).

Однородный шар радиусом r скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом R. Определите угловую скорость шара после отрыва от поверхности сферы.

Дано:	
$r = 30$ см	$= 0{,}3$ м
$R = 0{,}4$ м	
$\omega - ?$	

Решение.



Шар (точнее центр масс шара) до момента отрыва шара от поверхности сферы будет двигаться по окружности радиусом $R + r$. Следовательно, шар будет обладать нормальным ускорением, равным:

$$a_{\text{n}} = \frac{V^2}{R + r},$$

где V – линейная скорость шара.

Тогда на шар будет действовать сила инерции (центробежная сила):

$$\vec{F}_{\text{u}} = -m\vec{a}_{\text{n}};$$

$$F_{\text{u}} = m a_{\text{n}} = \frac{mV^2}{R + r}.$$

Линейная скорость ω шара связана с его угловой скоростью ω соотношением: $V = \omega r$.

Тогда сила инерции равна:

$$F_{\text{u}} = m a_{\text{n}} = \frac{m\left(\omega r\right)^2}{R + r} = \frac{m\omega^2 r^2}{R + r}.$$

Шар будет катиться по сфере, пока выполняется условие:

$$mg\cos\alpha \ge F_{\text{u}}.$$

Отрыв шара произойдёт, когда:

$$mg\cos\alpha = F_{ц} \quad \Rightarrow \quad mg\cos\alpha = \frac{m\omega^2 r^2}{R+r}.$$

Отсюда найдём угол α в момент отрыва шара:

$$\cos\alpha = \frac{\omega^2 r^2}{(R+r)\,g}.$$

Высота шара в момент отрыва относительно верхней точки сферы уменьшилась на h, причём из рисунка следует, что:

$$h = (R+r) - (R+r)\cos\alpha = (R+r)(1-\cos\alpha).$$

Следовательно, потенциальная энергия шара уменьшится на величину:

$$\Pi = mgh = mg\,(R+r)(1-\cos\alpha).$$

Кинетическая энергия тела, катящегося без скольжения, равна:

$$\mathrm{T} = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Момент инерции однородного шара равен:

$$J = \frac{2}{5}\,mr^2.$$

Найдём кинетическую энергию шара:

$$\mathrm{T} = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m(\omega r)^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}\,mr^2\cdot\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{5} = \frac{7}{10}\,m\omega^2 r^2.$$

Согласно закону сохранения энергии можем записать:

$$\Pi = \mathrm{T} \quad \Rightarrow \quad mg\,(R+r)(1-\cos\alpha) = \frac{7}{10}\,m\omega^2 r^2;$$

$$g\,(R+r)(1-\cos\alpha) = \frac{7}{10}\,\omega^2 r^2.$$

Откуда, подставляя выражение для угла α, найдём угловую скорость шара в момент отрыва:

$$g\,(R+r)\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{(R+r)\,g}\right) = \frac{7}{10}\,\omega^2 r^2;$$

$$g\,(R+r) - \omega^2 r^2 = \frac{7}{10}\,\omega^2 r^2;$$

$$\frac{17}{10}\,\omega^2 r^2 = g\,(R+r);$$

$$\frac{17}{10}\,\omega^2 r^2 = g\,(R+r);$$

$$\omega^2 = \frac{10}{17}\,\frac{g\,(R+r)}{r^2};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{17}\,\frac{g\,(R+r)}{r^2}}\,.$$

Проверим размерность:

$$[\omega] = \sqrt{\frac{\frac{м}{с^2}\cdot м}{м^2}} = \sqrt{\frac{1}{с^2}} = \frac{1}{с}.$$ (верно)

Произведём вычисления:

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{17} \cdot \frac{9{,}81 \cdot \left(0{,}4 + 0{,}3\right)}{0{,}3^{\,2}}} \approx 6{,}70 \text{ рад/с.}$$

Ответ: $\omega = 6{,}70$ рад/с.