Лекция 6

26 марта 2021 г.

1 Решение систем уравнений

$$A : 0 < \lambda_{min} < \ldots < \lambda_i < \ldots < \lambda_{max}.$$

$$G = E - \tau A.$$

Рассмотрим следующую функцию $\mid \mu(t) \mid = \mid 1 - \tau\lambda \mid$, следовательно $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$.

$$\ln\frac{1}{q} = v.$$

$$q(\tau_{opt}) = \min_{\tau}\max_{\lambda} \mid 1 - \tau\lambda \mid .$$

$$\mid 1 - \tau_{opt}\lambda_{\min} \mid = \mid 1 - \tau_{opt}\lambda_{\max} \mid .$$

$$1 - \tau_{opt} = -(1 - \tau_{opt}\lambda_{\max}).$$

Тогда итерационный параметр при котором достигается максимальная скорость будет:

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A)}.$$

$$q(\tau_{opt}) = \mid 1 - \tau_{opt}\lambda_{\min} \mid = \mid 1 - \tau_{opt}\lambda_{\max} \mid .$$

$$q(\tau_{opt}) = \mid 1 - \frac{2\lambda_{\min}}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} \mid = \mid \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \mid .$$

$$n_0(\varepsilon) = [\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{q}}] + 1.$$

$$\ln\frac{1}{q} = \ln\frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

$$n_0(\varepsilon) = [\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{2\xi}] + 1 \ O(\frac{1}{\xi}).$$

2 Итерационные методы вариационного типа

Пусть у нас есть СЛАУ

$$A\vec{x} = \vec{f} \tag{1}$$

$$A\vec{x^{(*)}} = \vec{f}.$$

$$\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) - 2(\vec{f}, \vec{x}) \tag{2}$$

Покажем, что $\nabla\Phi(\vec{x}) = 0$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, i = 1, m.$$

$$\nabla\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) + (A\vec{x}, \vec{x}) = 2\vec{f} = (A\vec{x}, \vec{x}) + (A\vec{x}, \vec{x}) - 2\vec{f} = 2A\vec{x} - 2\vec{f} = 2(A\vec{x^{(*)}}, \vec{x}).$$

Мы должны получить последовательность векторов, которая минимизирует нашу функцию: $\{\vec{x^{(0)}}, \vec{x^{(1)}}, \ldots, \vec{x^{(n)}}, \ldots\}$

Подставим в уравнение произвольный вектор:

$$A\vec{x^{(n)}} = \vec{f} = \vec{r^{(n)}} \tag{3}$$

Будем искать последовательность векторов по следующей рекурентной формуле:

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x^{(n)}} + \tau_n \vec{r^{(n)}} \tag{4}$$

Надо минимизировать функцию:

$$\Phi(\vec{x}^{(n+1)} = \Phi(\vec{x}^{(n)} - \tau_n \vec{r}^{(n)} = g(\tau_n) \to \min_{\tau_n}.$$

$$\frac{dq(\tau_n)}{d\tau_n} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\Phi(\vec{x}^{(n+1)})}{\partial x_i^{(n+1)}}.$$

Умножим формулу 4 слева на матрицу А.

$$A\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \tau_n A\vec{r}^{(n)}.$$

$$A\vec{x}^{(n+1)} - \vec{f} = A\vec{x}^{(n)} - \vec{f} - \tau_n A\vec{r}^{(n)}.$$

$$(\vec{r}^{(n+1)}, \vec{r}^{(n)}) = (\vec{r}^{(n)}, \vec{r}^{n}) - \tau_n (A\vec{r}^{(n)}, \vec{r}^{(n)}).$$

$$\tau_n = \frac{(\vec{r}^{(n)}, \vec{r}^{(n)})}{(A\vec{r}^{(n)}, \vec{r}^{(n)})}.$$

3 Алгоритм метода наискорейшего спуска

1. Задаем n = 0, $\vec{x}^{(0)}$ - задаем. Вычисляем $\vec{r}^{(0)} = A\vec{x}^{(0)} - \vec{f}$
2. находим $\tau_n = \frac{(\vec{r}^{(n)}, \vec{r}^{(n)})}{(A\vec{r}^{(n)}, \vec{r}^{(n)})}$
3. $\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \tau_n \vec{r}^{(n)}$
4. $n = n + 1$, goto 2)

Посмотрим, что собой представляет формула 4.

$$\frac{\vec{x}^{(n+1)} - \vec{x}^{(n)}}{\tau_n} = \vec{r}^{(n)}.$$

$$E\frac{\vec{x}^{(n+1)} - \vec{x}^{(n)}}{\tau_n} + A\vec{x}^{(n)} = \vec{f}.$$

Скорость сходимости наискорейшего спуска примерно совпадает со скоростью сходимости метода простой итерации с выбором оптимального параметра. Но в методе простой итерации искать собственный числа на компьютере не так просто, а здесь мы не ищем никаких собственных чисел. В этом преимущество этого метода

4 Метод сопряженных градиентов

Определение 4.1 *Векторы $\vec{x}, \vec{y}$ называются сопряженными по отношению к матрице A или A-сопряженными, если* $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}) = 0$