Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт Информационных технологий, математики и механики
Кафедра: программной инженерии

Отчет по учебной практике:
Тема:
«Оценка параметров распределения потоков сложной структуры»

Выполнил: студент группы 381603-3
Кумин
Алексей Александрович
Подпись

Научный руководитель:
Ассистент
Евгений Владимирович
Кудрявцев
Подпись

Нижний Новгород
2020 г

Содержание

1 Постановка задачи

В классической теории массового обслуживания рассматриваются только такие входные потоки, в которых случайные расстояния между заявками независимы и одинаково распределены. На практике нередко приходится сталкиваться с ситуацией, когда интервалы между заявками зависимы и имеют разное распределение. На это могут повлиять, например, погодные условия, катастрофы, политические события и т.д. Это не позволят сделать выводы о вероятностной структуре входного потока.

В данной работе требуется построить алгоритм определения временной и пространственной характеристики потока требований, на примере выборки террористических актов [1], с помощью нелокального описания входных потоков неоднородных требований [2].

2 Описание и необходимая обработка данных

База данных террористических актов по всему миру [1] представляет собой таблицу из 181691 событий, имеющих 135 характеристик. Для данной работы требуется только 5 признаков – год, месяц, день, код страны, название страны (Рис. 1).

	iyear	imonth	iday	country	country_txt
0	1970	7	2	58	Dominican Republic
1	1970	0	0	130	Mexico
2	1970	1	0	160	Philippines
3	1970	1	0	78	Greece
4	1970	1	0	101	Japan

Рис. 1

Можно исследовать террористические акты по всем странам одновременно, а можно для каждый странны отдельно. В дальнейшем сравниваются данные для России и СССР с США (Рис. 2).

iyear	imonth	iday	country	country_txt
1978	1	8	359	Soviet Union
1989	4	20	359	Soviet Union
1989	4	20	359	Soviet Union
1989	7	26	359	Soviet Union
1989	7	26	359	Soviet Union
iyear	**imonth**	**iday**	**country**	**country_txt**
1970	1	1	217	United States
1970	1	1	217	United States
1970	1	2	217	United States
1970	1	2	217	United States
1970	1	3	217	United States

Рис.2

Примем первый акт как начальный, для каждого последующего события добавим количество дней со дня начала первого акта (Рис. 3) и получим выборку для потока требований определяемую добавленным столбцом.

	iyear	imonth	iday	country	country_txt	days from start
0	1970	1	1	217	United States	0
1	1970	1	1	217	United States	0
2	1970	1	2	217	United States	1
3	1970	1	2	217	United States	1
4	1970	1	3	217	United States	2

Рис. 3

3 Теоретические сведения

3.1 Алгоритм нелокального описания потоков сложной структуры

Входные потоки, как правило, описываются в виде случайной последовательности $\{\tau_i'; i \geq 1\}$ моментов поступления i-ого требования или с помощью случайного процесса $\{\eta(t); t \geq 0\}$. Однако, случайные интервалы $\{\tau_{i+1}' - \tau_i'; i \geq 1\}$ между последовательными заявками часто оказываются зависимыми и имеющими различные функции распределения, что не позволяет найти конечномерные распределения процесса.

3.1.1 Нелокальный способ 1[2]

Для формализации потока применим нелокальный способ 1[2]. Преобразуем исходный поток отельных заявок в поток групп $\{(\tau_i, \eta_i); i \geq 0\}$, где η_i – число требований, поступивших на независимых интервалах $[\tau_i, \tau_{i+1}); i \geq 0$ согласно некоторому заданному принципу.

Зададим параметр близости $h = const > 0$, тогда величины τ_i, η_i будут определяться как

$$\tau_i = \tau'_{k_i}, \eta_i = k_{i+1} - k_i, k_0 = 0, k_{i+1} = \inf\{k: k > k_i, \tau'_k - \tau'_{k+1} \geq h\}$$

Реализация данного метода представлена в разделе 7.

3.1.2 Нелокальный способ 3[2]

Поток делится на группы поэтапно, на этапе с номером m $(m = 0,1,2, \dots)$ получается векторная случайная последовательность $\{(\tau_i^m, \eta_i^m); i \geq 0\}$. Параметры метода: натуральное число d и постоянные величины $0 < h_0 < h_1 < h_2$. Рекуррентные формулы для определения моментов τ_i^m имеют вид:

$$k_{0,0} = 1, k_{0,i+1} = \inf\{k: k > k_{0,i}, \tau'_k - \tau'_{k+1} \geq h_0\}$$

$$s_m = \min\begin{Bmatrix}\inf\{k: k \geq 0, \eta_k^m \leq d, \eta_{k+1}^m = d+1, \tau_{k+1}^m - \tau_k^m < h_1\}, \\ \inf\{k: k \geq 0, \eta_k^m \leq d, \eta_{k+1}^m \leq d, \tau_{k+1}^m - \tau_k^m < h_2\}\end{Bmatrix}$$

$$\tau_i^{m+1} = \begin{cases}\tau_k^m, i \leq s_m \\ \tau_{i+1}^m > s_m\end{cases}$$

Несложно заметить, что для формирования нулевого уровня используется первый способ разбиения, далее на каждом этапе редуцируется по одной пачке до тех пор, пока множества не окажутся пустыми. Данный способ предоставляет исследователю более детальное управление разбиением за счет большего числа параметров.

3.2 Проверка гипотез о независимости с помощью критерия Валлиса-Мура

Применяя указанный выше метод, можно разбить исходный поток на группы так, что случайные последовательности $\{\tau_{i+1} - \tau_i; i \geq 0\}$ и $\{\eta_i; i \geq 0\}$ будут составлены из независимых и одинаково распределенных случайных величин. Для этого применим фазово-частотный критерий Валлиса-Мура [2]. Далее описан алгоритм в общем случае, будем говорить о повторной выборке $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ объёма n и наблюдаемых значениях $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Критерий состоит в определении статистики $\gamma(n, X_1, X_2, \dots, X_n)$, считающей случайное число фаз. Для всех ненулевых значений $x_{i+1} - x_i, 1 \leq i \leq n-1$ выпишем последовательно полученные знаки. Фаза – перемена знака при последовательном обходе массива выписанных знаков. Посчитав общее число перемен знаков, получим $\gamma(n, X_1, X_2, \dots, X_n)$ и построим статистику

$$Z(n, X_1, X_2, \dots, X_n) = \left(\gamma(n, X_1, X_2, \dots, X_n) - \frac{2n-7}{3}\right)\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{16n-29}}$$

Если выдвинутая гипотеза о независимости и одинаковом распределении случайных величин X_i верна, то последовательность $\{Z(n, X_1, X_2, \dots, X_n); n \geq 30\}$ сходится к стандартному нормальному закону. Пороговое значение C_α определяется при заданном уровне значимости α из равенства $\Phi(-C_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ где $\Phi(x) -$ функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Гипотеза отвергается если $|Z(n, X_1, X_2, \dots, X_n)| > C_\alpha$,

3.3 Случайные величины, оценка их параметров и проверка гипотез о распределении с помощью критерия «хи-квадрат»

3.3.1 Смещенное Пуассоновское распределение

В общем случае, ξ – дискретная случайная величина имеет смещенное распределение Пуассона, если

$$P(\{\xi = k\}) = \begin{cases} 0, k < \sigma \\ \frac{\lambda^{k-\sigma}}{(k-\sigma)!} e^{-\lambda}, \sigma \in N \end{cases}$$

Для нашего случая потребуем, чтобы $\sigma = 1$, тогда

$$M_\xi = 1 + \lambda$$

Соответственно, параметр λ можно оценить с помощью метода моментов:

$$\lambda = M_\xi - 1$$

3.3.2 Геометрическое распределение

ξ – дискретная случайная величина имеет геометрическое распределение, если:

$$P(\{\xi = k\}) = \begin{cases} 0, k < 1 \\ (1-p)^{k-1} p \end{cases}$$

$$M_\xi = \frac{1}{p}$$

Оценка методом моментов для параметра:

$$p = \frac{1}{M_\xi}$$

3.3.3 Смещенное показательное распределение

ξ – непрерывная случайная величина имеет смещенное показательное распределение, если:

$$P(\{\xi < t\}) = \begin{cases} 0, t \le h \\ 1 - e^{-\frac{h-t}{\sigma}} \end{cases} => f(t) = \begin{cases} 0, t \le h \\ \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{h-t}{\sigma}} \end{cases}$$

$$M_\xi = h + \sigma, M_{\xi^2} = h^2 + 2h\sigma + 2\sigma^2, D_\xi = M_{\xi^2} - M_\xi^2 = \sigma^2$$

Оценка методом моментов для параметров:

$$h = M_\xi - \sigma, \sigma = \sqrt{D_\xi}$$

3.3.4 Смесь распределений двух случайных величин

ξ – дискретная случайная величина имеет смешанное распределение двух случайных величин, если:

$$P(\{\xi = k\}) = pP_1(\{\xi = k\}) + (1-p)P_2(\{\xi = k\})$$

$$M_\xi = \sum_{m=0}^{m} mP(\{\xi = m\}) = p\sum_{m=0}^{m} mP_1(\{\xi = m\}) + (1-p)\sum_{m=0}^{m} mP_2(\{\xi = m\})$$
$$= pM_{\xi_1} + (1-p)M_{\xi_2}$$

Из-за сложности нахождения параметров распределения с помощью критерия максимального правдоподобия и неточной оценки методом моментов (приходится вычислять моменты 3 степени и отклонения в выборке могут давать большую погрешность между истинными и вычисляемыми моментами) будем оценивать параметры следующим образом.

Необходимо, во-первых, отсортировать и откинуть несколько последних значений отсортированной выборки, которые могут являться отклонениями. Во-вторых, нужно разделить выборку на две части. Вычислим параметры первого распределения P_1 с помощью первой выборки, а второго соответственно с помощью второй методом моментов (M_{ξ_1}, M_{ξ_2}). Решая уравнение $pM_{\xi_1} + (1-p)M_{\xi_2} = M_\xi$ получим оценку для параметра p смеси распределений. Количество отбрасываемых значений и параметр разбиения выборки задается пользователем.

3.3.5 Проверка гипотез о распределении с помощью критерия «хи-квадрат»

Для дискретных случайных величин критерий будет выглядеть следующим образом: требуется разбить выборку на r частей так, чтобы вероятности, что значение случайной величины принадлежит части $i, 1 \le i \le r - p_i$, были примерно равны между собой и примерно равны величине $\frac{1}{r}$. Далее сформируем из выборки массив $m_i -$ количество элементов выборки, попавшее в часть i. Необходимо посчитать значение статистики

$$\chi^2\big(n, F(x)\big) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

Значение статистики при $n \to \infty$ имеет распределение χ^2 с $r - 1 - v$ степенями свободы, где $v -$ количество оцениваемых параметров. Следовательно, если получить значение статистики, не превосходящее некоторого порогового значения величины χ^2 с $r - 1 - v$ степенями свободы, то исследуемые статистические данные можно считать совместимыми с гипотезой о распределении.

В случае непрерывной случайной величины необходимо разбить выборку на промежутки так, чтобы вероятности попадания p_i в них были примерно равны между собой, посчитать количество элементов выборки m_i попавших в каждый промежуток, а далее следовать алгоритму, описанному для дискретного случая.

4 Эксперименты и результаты

4.1 Алгоритм нелокального описания

Сначала была произведена работа над разбиением исходного потока на поток групп $\{(\tau_i, \eta_i); i \geq 0\}$ при помощи нелокального метода для России и США, и с помощью критерия Валлиса-Мура проверена гипотеза о независимости.

Нелокальный метод разбиения показал хорошие результаты: для России с параметром $h = 10$, и уровне значимости для критерия Валлиса-Мура $\alpha = 0.05$ были сформированы выборки и проверены гипотезы о независимости и одинаковом распределении (Рис. 4).

```
time intervals =
[4120   97   30   22   18   92   45   34   19   16   28   14   33   17
   64  110   25   21   12   39   25   24   25   12   23   61   31   54
   11   20   37   13   73   21   70   19   14  451   40   25   22   40
   47   19   60   20   13   67   13   55   28   35   35   24   34   39
   24   36   48   79   17   12   24   29   34   59   18   35   44   25
   46   45   12   35   20   64   43   40   31   35   44   45   18   12
   40   31   44   11   39   26   55   19   31   50   21   28   80   49
   15   36   20   40   14   35   35   26   35  160   27   57   38   29
   13   57   14   97   45   90   13   16   76   30   45   25   77   60
   21   30   15   49   75   12   17   38   14   75   13   12   68   20
   41   43   46   25   40   13   33   35   16   54   31  125   75   26
   23   46   46   19   23   34   56   15   38   80   60   12   46   29
   15   28   34   35   77   14   26   29   14  198   33   53  237   30
   93   82  493  154   23   18   20  137   76   62   14   51   18   36
   45  268   34   19   60   23   35   19   16   12   80   82   19  114
   31   13   20   29   20   19   15   28   48   14   24   61   12   64
   47   84   24   19   47   35   21   12   29   56   43   20   17   14
   32]
requests =
[  1   2   2   1   1   1   3   1   6   2   1   2   4   2  10   5   1   2
   3   2   4   2   7   1   5   4   1   1   2   1   3   1   2   2   1   1
   1   7   2   1   5   7  11   2   3   3   1  11   1   5   2   2   2   2
   1   4   4   6   7  18   2   1   5   4   4  19   2   1   8   4  10   7
   1   8   2  26   9   1   2  12   2   1   2   1   2   1   6   2   5   2
   1   1   2  10   4   4  21   5   2   1   3   5   1   4   3   6  22  89
   9  21  14   8   1   7   1  61  16  36   1   1  17  11  14   1  11  20
   2  11   1  14  15   2   1   1   3   7   1   1   6   2   6   9  13   1
   3   1   4   1   2  12   4  32   9   2   4   1  15   1   2  11  17   1
   1   2   7   1   1   4   3   2   9   1  23   2   7   2   3  95  17  44
  99   7  46  37 346  54   7   3   1  58  50  25   3  14   7   5  12 119
   1   1   9   5   6   5   2   1   5   4   3   1   2   2   1   2   3   1
   1   4   1   1   4  14   3   7   9  13   4   1   1   8   2   1   3   1
   7   3   1   1   1   3]

      Wallis-Mur criterion
      Time initial for Russia is dependet 5.7  >  1.96
      Time diffs for Russia is undependet 1.08  <=  1.96
      Requests for Russia is undependet 1.33  <=  1.96
```

Рис. 4

Для США с параметром $h = 15$ результаты показаны на Рис. 5

```
time intervals =
[800  59  83  17  28  88 176  43  40  52  38  64  27 149  67  28  36 278
  83 187  73  24  48  38  33 351 140 142 128  84 112  21 162  24  30  31
  17  46  37  23  50  20 114  27  75  43  79  55  28  33  32  37  96 195
  35  34  74  68  30  52  42  34 101  84  56  19  37  46  24  26  30  30
  18  66  30  21  94  63  42  56  24  35  26  48  99  24  55  39  63  31
  72  18  38  77  45  23  43  59  50  61  35  26  90  25  61  57  38  24
  45  59  23  80  17  19  19  62  67  63  87  54  34  72  34  24  35  47
  62  56  84 439  19  21  43  49  62  48 260  18  56  44  21  21 154  28
  21  48  40  73  51 129  27  59  99  33  57  28  31  39  36  73  18 109
  77  97  44  53  88  67  16  56  20  20  16  17  49  44  38  85  38  36
  16  52  58 119  21  57  40  31  31  38  41  66  36  19  42  62  21  68
  21  54  28  82  59  19  55  18 160  18  42  35  52  60 139  30  28  45
 119  28  45 188  38  60 118 108  62  49  19  41 103 122  84  34  52  73
  50  54  72  36  32  20  36  48  28  51  47  60 156  16  30  51  91  49
  29  16  32  56  61  48  21  18  49  35  66  70  29 137  25  41  80  31
  22  20  31  44  35  82  45  28  51  26  32 102  48  22  34 167  55 137
  77  38  87]
requests =
[731   5  14   1   5  11  35   3   2   6   8  12   8  37  12   6   9 111
  35  74  31   2  10   2   9 122  33  33  27  17  19   1  42   3   6   5
   1   8  12   4  10   1  16   4  16   8  20   9   3   4  10   3  35  32
   4   2   8  12   2   7   3   4  18  12  15   1   4  10   1   3   1   2
   2   4   5   1  17   8   5   6   2   1   1   7  23   1   4   4   9   3
   7   1   3   5   2   1   3   2   6   4   3   1  14   3   8   7   1   1
   8   4   1  14   1   1   1   6   1   9  10   4   1   3   1   2   3   5
   4   3   7   9   2   4   4   2   4   7  60   2   5   8   1   2  16   3
   1   2   7   7   8  25   5   2   3   2   4   2   1   5   1   9   1  11
   1  14  11   6  15  11   1   6   1   2   1   1   1   2   1  14   2   4
   1   5   3  21   1   1   1  20   2   2   3   2   1   1   1  12   1   4
   1   9   2   2   2   1   1   1   2   1   4   4   6   1   2   3   1   1
   1   2   1   1   3   2   1   2   6   4   1   1   4   2   1   5   1   2
   1   1   4   3   1   1   1   1   2   1   4   1   2   1   1   1   8   1
   3   1   1   4   1   1   1   1   1   7   3   4   2   1   2   5   7   1
   2   1   4   7   1   6   1   5   9   2   2  15   3   1   2  48   7  27
  17   4  13   4]
```

```
Wallis-Mur criterion
Time initial for USA is dependet 10.11  >  1.96
Time diffs for USA is undependet 0.79  <=  1.96
Requests for USA is undependet 1.3  <=  1.96
```

Рис. 5

Заметим, что для шага $h = 10$ в случае выборки США, критерий Валлиса-Мура отвергает гипотезу о независимых распределениях (Рис. 6)

```
Wallis-Mur criterion
Time initial for USA is dependet 10.11  >  1.96
Time diffs for USA is dependet 3.31  >  1.96
Requests for USA is dependet 5.25  >  1.96
```

Рис.6

4.2 Поиск распределений и оценка параметров

4.2.1 Гипотезы для количества заявок в пачке требований

Первый эксперимент заключался в предположении, что распределение количества требований в пачке подчиняется смеси пуассоновских распределений. Для оценки параметров необходимо разделить выборку на две части как было описано ранее. Для данных России с параметром разделения 10, количеством отбрасываемых значений из выборки равным 2 и параметром разбиения для критерия «хи-квадрат» имеем результаты, представленные на Рис. 7

```
parameters p, a1, a2 =  [ 0.743  2.133 26.698]
Chi2 degree:  11
Chi2 statistic:          1.83
Chi2 treshold val right: 19.68
```

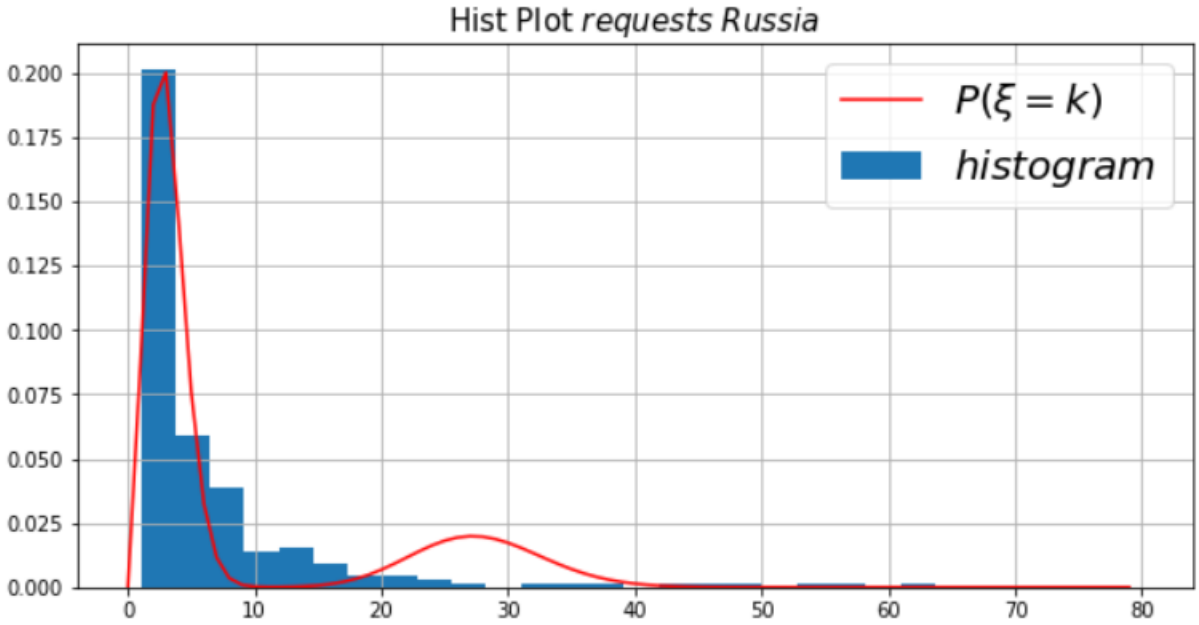


Рис. 7

Из графиков видно, что данное распределение не очень хорошо описывает исследуемую случайную величину, поэтому выдвинем другую гипотезу. Пусть она подчиняется смеси геометрического и Пуассоновского распределений, с параметром разбиения 30. Тогда получим следующие результаты (Рис. 8)

```
parameters p, a1, a2 =  [ 0.89   0.205 45.444]
Chi2 degree:  11
Chi2 statistic:          0.59
Chi2 treshold val right: 19.68
```

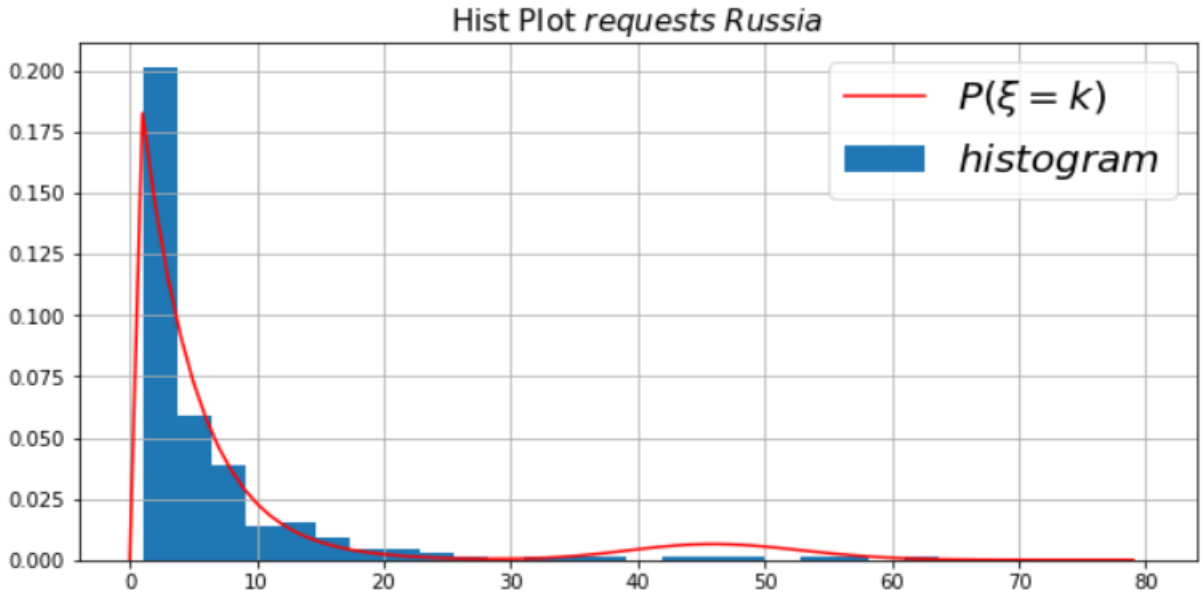


Рис. 8

Видно, что данное распределение наиболее точно описывает исследуемую случайную величину.

Рассмотрим теперь случай выборки для США. Выдвинем гипотезу о смеси геометрического и Пуассоновских распределений с параметром разделения 30 без удаления элементов для данной выборки. Результаты представлены на Рис. 9.

```
parameters p, a1, a2 =  [  0.959   0.248 135.286]
Chi2 degree:  11
Chi2 statistic:          1.27
Chi2 treshold val right: 19.68
```

Рис. 9

Можно заметить, что для России и США случайные величины количества заявок в пачке требований очень похожи друг на друга и геометрическое распределение преобладает в смеси.

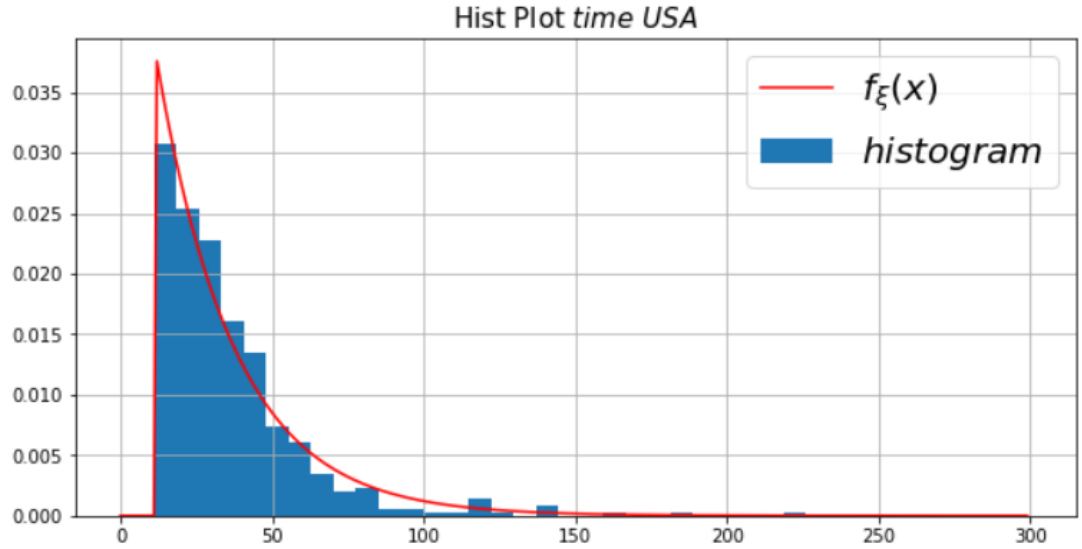
4.2.2 Гипотеза для интервалов между пачками требований

Будем предполагать, что интервалы времени между пачками требований подчиняются смещенному показательному распределению, описанному ранее, и оценим параметр h минимальным значением из выборки и, для более точной оценки другого параметра с помощью математического ожидания, удалим из отсортированной выборки несколько последний значений. Тогда после удаления 2х элементов для выборки России имеем следующий результат:

```
parameters h, sigma =  [11, 25.600613184084786]
Chi2 degree:  9
Chi2 statistic:          0.09
Chi2 treshold val right: 16.92
```

Для выборки США при аналогичных условиях имеем следующий результат:

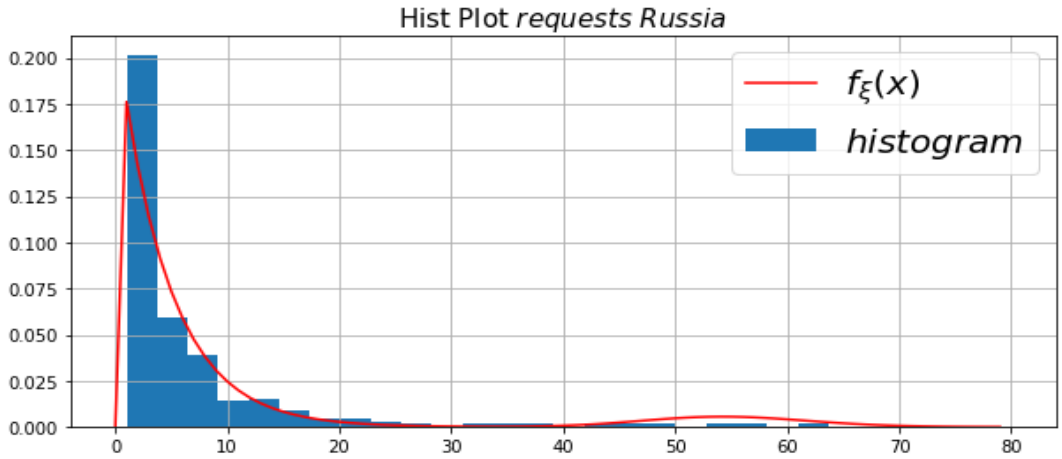
```
parameters h, sigma =  [11, 25.600613184084786]
Chi2 degree:  9
Chi2 statistic:          0.07
Chi2 treshold val right: 16.92
```

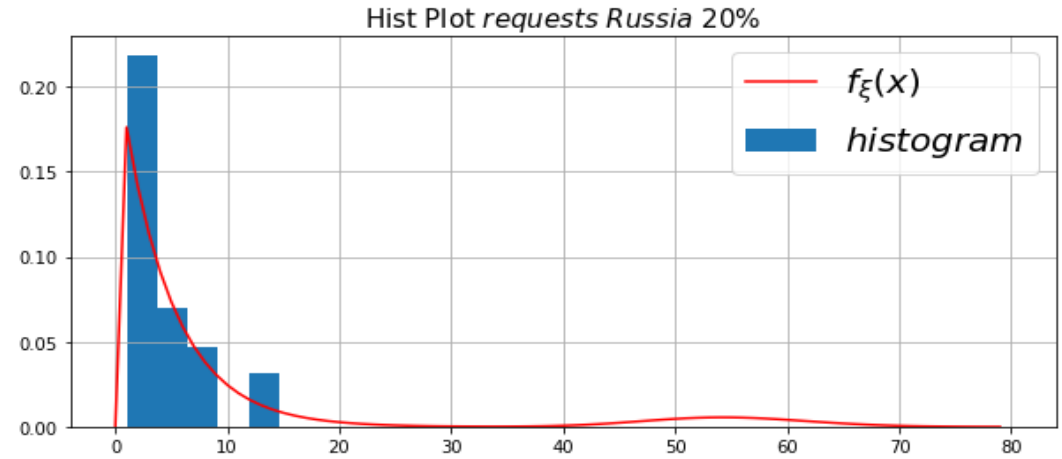


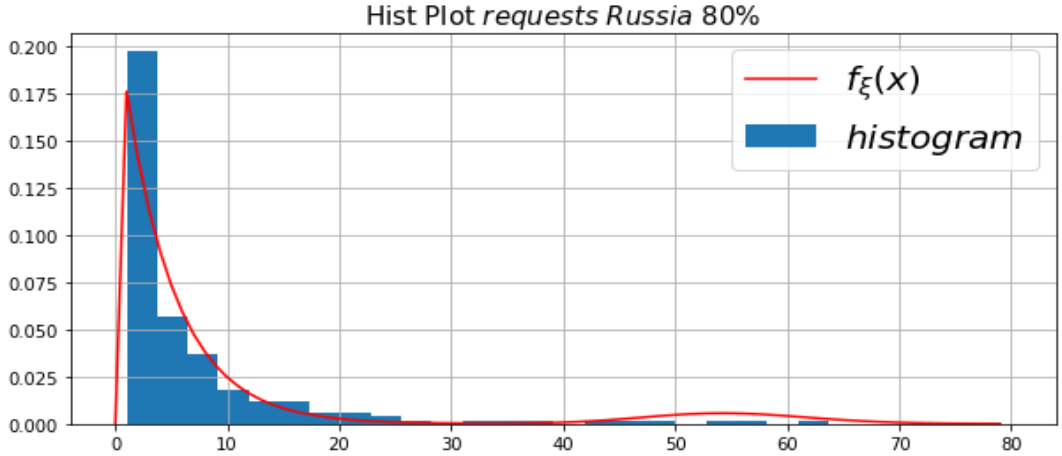
4.2.3 Разбиение выборки на две части и валидация параметров распределения

Проведем эксперимент: разделим выборку на две части – 80% и 20%, подберем параметры на большей выборке и примем их в качестве параметров для меньшей части выборки. Для данных России был получен следующий результат:

```
parameters p, a1, a2 =  [ 0.897  0.196 53.727]
Chi2 degree:  11
Chi2 statistic:          0.25
Chi2 treshold val right: 19.68
```







Параметры подходят для меньшей выборки, что говорит о том случайные величины в выборке независимы и одинаково распределены.

5 Заключение

С помощью алгоритма нелокального описания сложного случайного процесса, удалось исследовать и выдвинуть гипотезы о распределении для потока случайных событий, а именно, террористических актов, происходящих по всему миру. Установлено, что поток террористических актов имеет сложную структуру и не может быть описан конечномерными распределениями. Зависимости между происшествиями объясняются воздействием политических событий, природных катастроф, научно-техническим прогрессом и др.

Нелокальное описание случайного потока террористических событий, представляющее собой последовательность групп актов, идущих друг за другом через измеряемые промежутки времени, позволило описать процесс с помощью вероятностных распределений. Для России и США установлено, что количество актов в группе подчиняется в большей степени геометрическому распределению, а промежутки времени между группами – смещенному показательному распределению.

6 Ссылки

1) https://www.kaggle.com/START-UMD/gtd
2) Кудрявцев Е.В., Федоткин М.А «Изучение характеристик транспортного потока большой плотности», 2013
3) Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. «Введение в теорию массового обслуживания» М.: Наука, 1966. — 432 с.
4) Федоткин М.А. «Модели в теории вероятностей» ФИЗМАТЛИТ 2012. – 608 с.

7 Реализация наиболее важных методов

Программная среда для исследований была реализована на языке Python с помощью общеизвестных библиотек numpy, mathplotlib, pandas, scipy, datetime.

7.1 Добавление колонки дней в таблицу

```
def compute_and_add_days(df, name):
    df = df.reset_index(drop = True)
    n_cols = df.shape[1]
    n_rows = df.shape[0]
    ret = df;
    uncorrects = [[] , 0];
    row_days = []
    row0 = df.loc[0];
    start = date(row0[0], row0[1], row0[2])

    for i in range(0, n_rows):
        row = ret.loc[i]
        if ((row[2] < 1) or (row[2] > 31)): #or (row[1] < 1) or (row[1] > 12)):
            ret = ret.drop(i, axis = 0)
            continue

        curr = date(row[0], row[1], row[2])
        row_days.append((curr - start).days)

    ret[name] = row_days
    ret = ret.reset_index(drop = True)
    ret = ret.sort_values(by=[name])
    ret = ret.reset_index(drop=True)
    return ret
```

7.2 Разбиение данных на две выборки по времени и по количеству заявок в промежутках времени

```
def first_method_reduce(df, step):
    n_cols = df.shape[1]
    n_rows = df.shape[0]

    ret = []
    i = 0
    while (i < (n_rows - 1)):
        row = [df.loc[i][n_cols - 1], i]
        while ((df.loc[i + 1][n_cols - 1] - df.loc[i][n_cols - 1] <= step) and (i
< (n_rows - 2))):
            i += 1
        i += 1
        ret.append([row[0], i - row[1]])
    ret[-1][1] += 1
    ret = np.array(ret)
    return (ret)

def third_method_reduce(df, step_params):
    step_0 = step_params[0]
    step_1 = step_params[1]
    step_2 = step_params[2]
    d_step = step_params[3]

    df = first_method_reduce(df, step_0)
    ret = []
    i = 0
    s = 0
    k = 0
    while (s != -1):
        s = -1
        n_rows = len(df)
```

```
            s_tmp1 = 1000000
            s_tmp2 = 1000000
            i = 0
            while (i < n_rows-2):
                time_req_1 = df[i]
                time_req_2 = df[i + 1]
                if (time_req_1[1] <= d_step and time_req_2[1] == d_step+1 and
time_req_2[0] - time_req_1[0] < step_1):
                    s_tmp1 = i
                    break
                i += 1

            i = 0
            while (i < n_rows-2):
                time_req_1 = df[i]
                time_req_2 = df[i + 1]
                if (time_req_1[1] <= d_step and time_req_2[1] <= d_step and
time_req_2[0] - time_req_1[0] < step_2):
                    s_tmp2 = i
                    break
                i += 1
            s = min(s_tmp1, s_tmp2)
            if (s > 0 and s < 1000000):
                i = 0
                tmp_df = []
                while (i <= s):
                    tmp_df.append(df[i])
                    i+=1
                if (i == s + 1):
                    tmp_df[s][0] = df[i][0]
                    tmp_df[s][1] += df[i][1]
                while (i < n_rows-1):
                    tmp_df.append(df[i + 1])
                    i+=1
                df = np.array(tmp_df)
            else:
                break
        return (df)

    def make_reduce(sample, method, step, country):
        reduce = method(sample, step)
        print("Reduce data for", country, "with days from start, shape: " ,
len(reduce))
        time_smp = np.diff(reduce[:,0])
        requests_smp = reduce[:, 1]
        print("time intervals = ")
        print(time_smp)
        print("requests = ")
        print(requests_smp)
        return time_smp, requests_smp
```

7.3 Разбиение данных на две выборки по времени и по количеству заявок в промежутках времени

```
    def num_sign_changes(arr):
        i = 0
        sign = arr[0]
        count = 0
        while i < len(arr) - 1:
            if arr[i] != 0:
                if sign == 0:
                    sign = arr[i]
                elif sign != arr[i]:
                    count += 1
                    sign = arr[i]
            i +=1
        return count
```

```
def Wallis_Murr_number(sample):
    sample_diff = np.diff(sample)
    gamma = num_sign_changes(np.sign(sample_diff)) - 2
    n = len(sample)
    return np.abs((gamma - (2*n - 7)/3)*np.sqrt(90/ (16*n - 29)))

def Wallis_Murr_crit(sample, alfa, str):
    Z1 = Wallis_Murr_number(sample)
    f = norm(0, 1)
    treshold_val = f.ppf(alfa/2)
    if (Z1 <= -treshold_val):
        print(str, "is undependet", round(Z1, 2), " <= ", -round(treshold_val,2))
    else:
        print(str, "is dependet", round(Z1, 2), " > ", -round(treshold_val, 2))
```

7.4 Оценка параметров распределения для выборки событий

```
def GMM_Poisson(sample):
    a1 = np.average(sample)
    return a1 - 1

def GMM_geom(sample):
    a1 = np.average(sample)
    return 1/a1

def GMM_mix_distrib(sample, a2, a3):
    a1 = np.average(sample)
    equations = lambda x: (x*a2 + (1 - x)*a3 - a1)
    return fsolve(equations, 0.9)

def process_sample(sample, delimiter, missed_vals):
    sample1 = (np.sort(sample))[0:len(sample) - missed_vals]
    ret1 = sample1[sample1 <= delimiter]
    ret2 = sample1[sample1 > delimiter]
    return ret1, ret2
```

7.5 Критерий «хи-квадрат» для выборки событий

```
def func_sum(inter, func):
    sum = 0
    for i in np.arange(inter[0], inter[1] + 1):
        sum += func(i)
    return sum

def divide_time(time, r, func):
    tmp = np.bincount(time)
    interv = len(time)//r
    intervp = 1/r
    m = np.zeros(r)
    p = np.zeros(r)
    j = 0
    for i in range(0, r):
        if (j < len(tmp)):
            m[i] += tmp[j]
            p[i] += func(j)
            j += 1
        while (p[i] < intervp) and (j < len(tmp)):
            intervp = (1-sum(p))/(r - i)
            m[i] += tmp[j]
            p[i] += func(j)
            j += 1
    p[len(p) - 1] = 1 - sum(p[0:len(p) - 1])
    return m, p

def Chi_squre_number(m, p):
    ret = 0
    r = len(m)
    n = np.sum(m)
```

```
    for i in range(0, r):
        ret += (m[i] - n*p[i])**2 / n*p[i]
    return ret

def Chi_2_crit(sample, r, P, alfa, num_param):
    m, p = divide_time(sample, r, P)
    chi_stat = Chi_squre_number(m, p)
    chi_2 = chi2(r - 1 - num_param)
    print("Chi2 degree: ", r - 1 - num_param)
    chi_2_tres1 = chi_2.ppf(1 - alfa)
    print("Chi2 statistic:         ", round(chi_stat, 2))
    print("Chi2 treshold val right:", round(chi_2_tres1, 2))
```

7.6 Оценка параметров для промежутков времени между группами

```
def GMM_shift_exp(sample, missed_vals):
    tmp = np.sort(time_arr1)[0:len(time_arr1)-missed_vals]
    a1 = np.average(tmp)
    a2 = np.std(tmp)
    return [ a1 - a2, a2]
```

7.7 Критерий «хи-квадрат» промежутков времени между группами

```
def divide_time1(time, r, func):
    tmp1 = np.bincount(time)
    interv = len(time)//r
    intervp = 1/r
    m = np.zeros(r)
    p = np.zeros(r + 1)
    bounds = np.zeros(r + 1)
    j = 0
    h = 0.25
    interval_sum = 0
    for i in range(1, r + 1):
        while (p[i] < intervp) and (func(interval_sum) < func(max(time))):
            interval_sum +=h
            p[i] = func(interval_sum) - func(bounds[i - 1])
        bounds[i] = interval_sum
        tmp = time[time < bounds[i]]
        m[i - 1] = len(tmp[tmp >= bounds[i - 1]])
    p[r] = 1 -sum(p[:r])
    p = p[1:]
    return m, p

def Chi_2_crit1(sample, r, P, alfa, num_param):
    m, p = divide_time1(sample, r, P)

    chi_stat = Chi_squre_number(m, p)
    chi_2 = chi2(r - 1 - num_param)
    print("Chi2 degree: ", r - 1 - num_param)
    chi_2_tres1 = chi_2.ppf(1 - alfa)
    print("Chi2 statistic:         ", round(chi_stat, 2))
    print("Chi2 treshold val right:", round(chi_2_tres1, 2))
```

7.8 Отрисовка гистограмм и функций распределения

```
def plot_hist(sample, r_bound, P, ax, title, n=0):
    x = np.arange(0, r_bound)
    Fx = []

    for i in x:
        Fx.append(P(i))
    if (n == 0):
        n = round(np.math.sqrt(len(sample)))
```

```
bins = np.linspace(sample.min(), r_bound, n)
ax.hist(sample, bins, density=1)
ax.plot(x, Fx, color="red")
ax.legend([r'$f_\xi(x)$', r'$histogram$'], fontsize=20)
ax.set_title("Hist Plot " + title , fontsize = 15)
ax.grid()
```