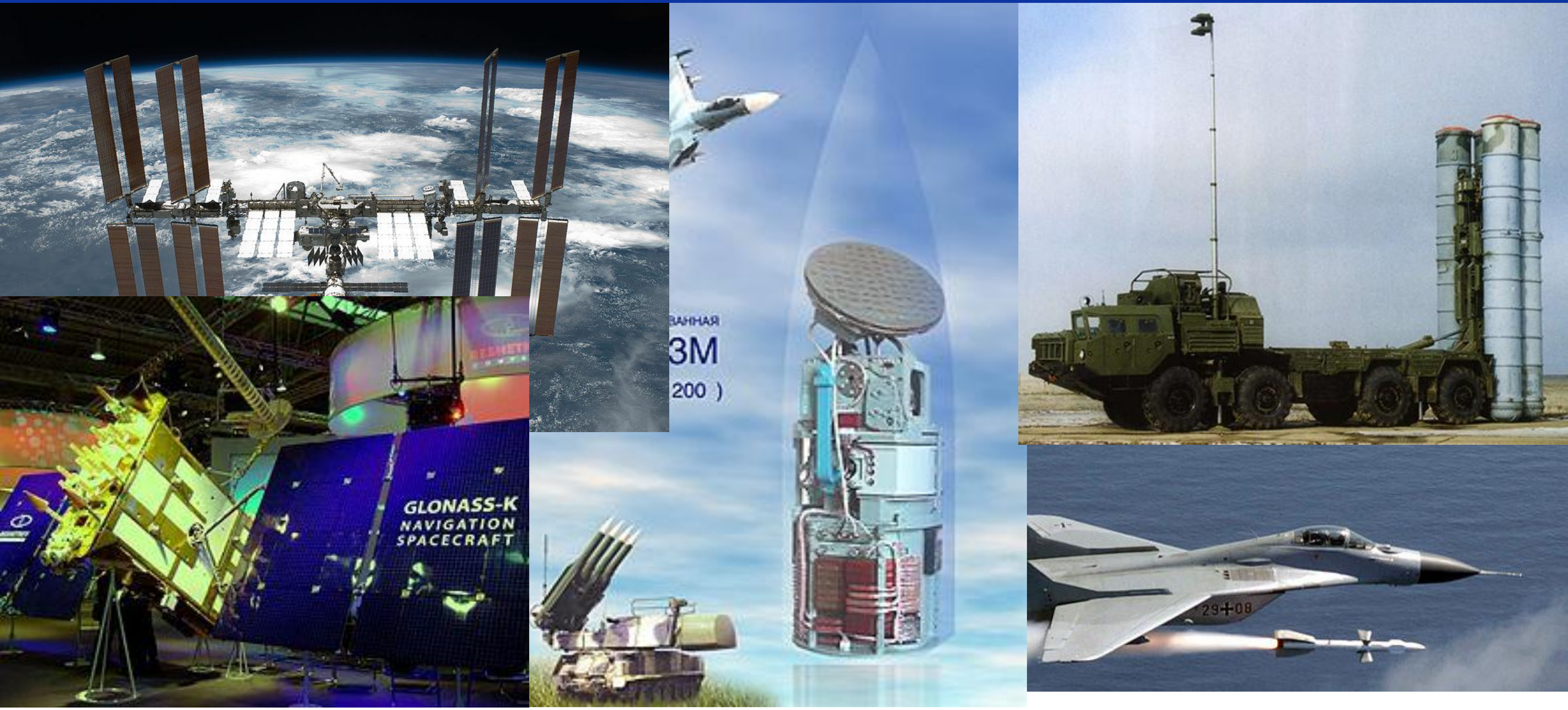
Национальный исследовательский университет МЭИ



ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОСИСТЕМ И КОМПЛЕКСОВ РАДИОУПРАВЛЕНИЯ

14. Синтез оптимального детерминированного управления

14.1. Постановка задачи синтеза оптимального линейного детерминированного терминального управления

1. Детерминированная линейная модель объекта

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(t)\cdot\vec{x}(t) + B(t)\cdot\vec{u}(t)$$

2. Критерии качества

$$J = \frac{1}{2}\left\{\vec{x}^T(t_к)\cdot\mathbf{\Gamma}(t_к)\cdot\vec{x}(t_к) + \int_{t_0}^{t_к}\vec{x}^T(\tau)\cdot\mathbf{L}(\tau)\cdot\vec{x}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_к}\vec{u}^T(\tau)\cdot\mathbf{K}_u^{-1}\cdot\vec{u}(\tau)\,d\tau\right\}$$

3. Ограничения на вектор управления отсутствуют

Необходимо найти вектор управления $\vec{u}(t)$, который переводит объект из состояния $\vec{x}(t_0)$ в состояние $\vec{x}(t_к)$ при минимальном значении функционала критерия качества J.

14.2. Решение задачи синтеза методом классического вариационного исчисления

Для удобства решения задачи вводят вспомогательную функцию, которую называют Гамильтониан

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left\{\vec{x}^{T}(t)\cdot\mathbf{L}(t)\cdot\vec{x}(t)+\vec{u}^{T}(t)\cdot\mathbf{K}_{u}^{-1}\cdot\vec{u}(t)\right\}+\vec{\lambda}^{T}(t)\left[F(t)\cdot\vec{x}(t)+B(t)\cdot\vec{u}(t)\right]$$

где $\vec{\lambda}=\left[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right]^{\mathrm{T}}$ - вектор множителей Лагранжа.

Выразим функционал критерия качества, используя Гамильтониан

$$J=\frac{1}{2}\vec{x}^{T}(t_{\kappa})\cdot\mathbf{\Gamma}(t_{\kappa})\cdot\vec{x}(t_{\kappa})+\int_{t_0}^{t_{\kappa}}\left\{\mathrm{H}-\vec{\lambda}^{T}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}\right\}d\tau$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое, можем записать

$$J=\left\{\frac{1}{2}\vec{x}^{T}(t_{\kappa})\cdot\mathbf{\Gamma}(t_{\kappa})\cdot\vec{x}(t_{\kappa})-\vec{\lambda}^{T}(t_{\kappa})\cdot\vec{x}(t_{\kappa})\right\}+\vec{\lambda}^{T}(t_0)\cdot\vec{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_{\kappa}}\left\{\mathrm{H}+\frac{d}{dt}\vec{\lambda}^{T}\cdot\vec{x}\right\}d\tau$$

Необходимое условие экстремума $\delta J=0$

где δJ - вариация функционала. Вариация функционала — обобщение понятия дифференциала функции одной переменной, главная линейная часть приращения функционала вдоль определенного направления.

Вычисляя вариацию функционала и выбирая множители $\vec{\lambda}$ таким образом, чтобы выполнить условие $\delta J = 0$. Получаем ***уравнения Эйлера – Лагранжа***.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{\lambda}^T = -\dfrac{\partial H}{\partial \vec{x}}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial \vec{u}} = 0 \end{cases} \qquad \vec{\lambda}(t_к) = \mathbf{\Gamma}(t_к)\cdot\vec{x}(t_к) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{\lambda} = -\mathbf{L}(t)\cdot\vec{x}(t) - F^T(t)\cdot\vec{\lambda}(t), \\ \vec{u}(t) = -\mathbf{K}_u B^T \vec{\lambda}(t) \end{cases}$$

Объединяя уравнения Эйлера – Лагранжа и уравнения состояния, получаем ***двухточечную краевую задачу*** (ДТКЗ)

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = F(t)\cdot\vec{x}(t) - B(t)\mathbf{K}_u B^T(t)\cdot\vec{\lambda}(t) \\ \dfrac{d\vec{\lambda}}{dt} = -\mathbf{L}(t)\cdot\vec{x}(t) - F^T(t)\cdot\vec{\lambda}(t) \end{cases} \quad \text{краевые условия} \quad \begin{cases} \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \\ \vec{\lambda}(t_к) = \mathbf{\Gamma}(t_к)\cdot\vec{x}(t_к) \end{cases}$$

Решая ДТКЗ относительно $\vec{\lambda}(t)$ и подставляя результат в уравнение

$$\vec{u}(t) = -\mathbf{K}_u B^T \vec{\lambda}(t)$$

получаем искомый ***алгоритм оптимального детерминированного управления***.

14.3. Решение ДТКЗ методом прогонки

Будем искать решение в виде $\vec{\lambda}(t) = \mathbf{S}(t)\cdot\vec{x}(t)$

Подставляя данное выражение во второе уравнение ДТКЗ, получим

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}(t)\cdot\vec{x}(t) + \mathbf{S}(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = -\mathbf{L}(t)\cdot\vec{x}(t) - F^T(t)\cdot\mathbf{S}(t)\cdot\vec{x}(t)$$

Используя первое уравнение ДТКЗ, приходим к нелинейному дифференциальному уравнению, которое называется ***уравнением Риккати***

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}(t) = -\mathbf{S}(t)\cdot F(t) - F^T(t)\cdot\mathbf{S}(t) - \mathbf{L}(t) + \mathbf{S}(t)B(t)\mathbf{K}_u(t)B^T(t)\mathbf{S}(t)$$

с начальным условием $\mathbf{S}(t_к) = \mathbf{\Gamma}(t_к)$.

Решая уравнение Риккати, получим алгоритм оптимального детерминированного управления в виде

$$\boxed{\vec{u}(t) = -\mathbf{K}_u(t)B^T(t)\mathbf{S}(t)\cdot\vec{x}(t) = C(t)\cdot\vec{x}(t)}$$

14.4. Решение ДТКЗ методом фундаментальных (переходных) матриц

Введем расширенный вектор переменных размерностью $2n$

$$\vec{v}(t) = \begin{Vmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{\lambda}(t) \end{Vmatrix}$$

и запишем ДТКЗ в виде однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{\lambda}(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F(t) & -B(t)\mathbf{K}_u B^T(t) \\ -\mathbf{L}(t) & -F^T(t) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{\lambda}(t) \end{Vmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = A(t)\cdot\vec{v}(t), \qquad \text{где} \quad A(t) = \begin{Vmatrix} F(t) & -B(t)\mathbf{K}_u B^T(t) \\ -\mathbf{L}(t) & -F^T(t) \end{Vmatrix}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\vec{v}(t) = D(t, t_\kappa)\cdot\vec{v}(t_\kappa)$$

$D(t, t_\kappa)$ - ***фундаментальная (переходная) матрица*** $D(t,t) = \mathbf{I}$.

Для ***стационарных*** систем $A(t) = A$, $D(t, t_\kappa) = D(t - t_\kappa)$, $D(0) = \mathbf{I}$.

$$\frac{d}{dt}D(T) = A\cdot D(T), \qquad D(0) = \mathbf{I}, \qquad T = t - t_\kappa$$

$$D(T) = \exp(A\cdot T) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{T^n}{n!}, \qquad D(T) = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - A)^{-1}\right\}$$

Представим фундаментальную матрицу в блочном виде

$$D(t-t_\kappa)=\begin{Vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{Vmatrix}$$

тогда

$$\begin{cases} \vec{x}(t)=D_{11}(t-t_\kappa)\cdot\vec{x}(t_\kappa)+D_{12}(t-t_\kappa)\cdot\vec{\lambda}(t_\kappa)=(D_{11}+D_{12}\mathbf{\Gamma})\cdot\vec{x}(t_\kappa) \\ \vec{\lambda}(t)=D_{21}(t-t_\kappa)\cdot\vec{x}(t_\kappa)+D_{22}(t-t_\kappa)\cdot\vec{\lambda}(t_\kappa)=(D_{21}+D_{22}\mathbf{\Gamma})\cdot\vec{x}(t_\kappa) \end{cases}$$

Следовательно

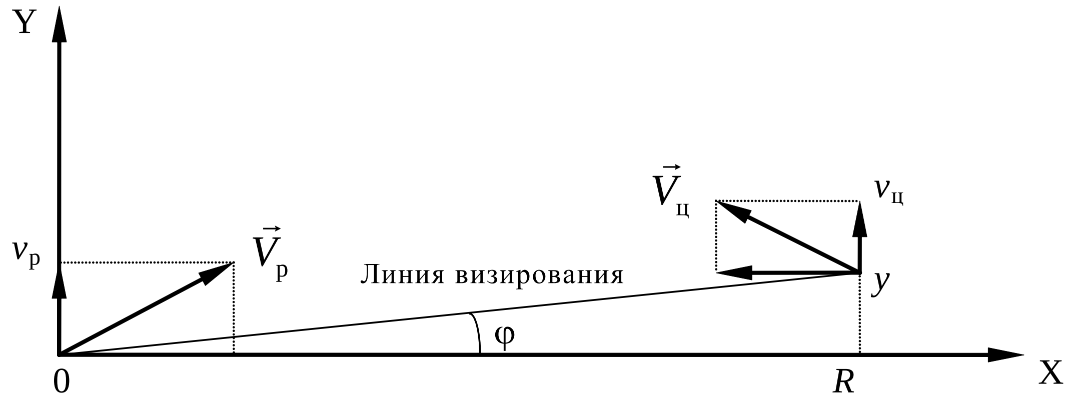
$$\vec{\lambda}(t)=(D_{21}+D_{22}\mathbf{\Gamma})\cdot(D_{11}+D_{12}\mathbf{\Gamma})^{-1}\vec{x}(t)$$

Окончательно получим

$$\boxed{\vec{u}(t)=-\mathbf{K}_u(t)B^T(t)(D_{21}+D_{22}\mathbf{\Gamma})\cdot(D_{11}+D_{12}\mathbf{\Gamma})^{-1}\cdot\vec{x}(t)=C(t)\cdot\vec{x}(t)}$$

14.5. Синтез алгоритма терминального управления в задаче перехвата/сближения

Полагаем, что управление движением УО осуществляется формированием поперечного ускорения. Рассматривая поперечное движение объектов вдоль оси 0Y, включим в вектор состояния координаты относительного положения $y(t)$ и относительную скорость объектов $v(t)=v_ц - v_р$, в проекции на ось 0Y. Цель движется равномерно и прямолинейно.



В этом случае относительное движение объектов описывается в скалярном виде системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -u_р. \end{cases}$$

Будем искать оптимальное управление, минимизирующее функционал

$$J = \frac{1}{2}\left\{ a_1 y^2(t_к) + a_2 v^2(t_к) + \int_{t_0}^{t_к} u_p^2(\tau) d\tau \right\}$$

Постановка задачи синтеза в векторно-матричной форме.

Модель объекта

$$\vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} y(t) \\ v(t) \end{Vmatrix} \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = F \cdot \vec{x}(t) + B \cdot u_p(t) \qquad F = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

Критерий качества

$$J = \frac{1}{2}\left\{ \vec{x}^T(t_к) \cdot \mathbf{\Gamma}(t_к) \cdot \vec{x}(t_к) + \int_{t_0}^{t_к} \mathbf{K}_u^{-1} \cdot u_p^2(\tau)\, d\tau \right\}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{K}_u = 1$$

Введем вектор множителей Лагранжа и запишем ДТКЗ

$$\vec{\lambda}(t) = \begin{Vmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{Vmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{\lambda}(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F(t) & -B(t)\mathbf{K}_u B^T(t) \\ -\mathbf{L}(t) & -F^T(t) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{\lambda}(t) \end{Vmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} y \\ v \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y \\ v \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ v(t_0) &= v_0 \\ \lambda_1(t_к) &= a_1 y(t_к) \\ \lambda_2(t_к) &= a_2 v(t_к) \end{aligned}$$

Для решения ДТКЗ используем метод переходной матрицы.

$$D(T) = \exp(A \cdot T) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{T^n}{n!},$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad A^3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad A^n\Big|_{n \ge 4} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$D(T)=\begin{Vmatrix}1 & T & \dfrac{T^3}{6} & -\dfrac{T^2}{2}\\ 0 & 1 & \dfrac{T^2}{2} & -T\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -T & 1\end{Vmatrix},\quad T=t-t_\kappa$$

$$D_{11}(T)=\begin{Vmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\qquad D_{12}(T)=\begin{Vmatrix}\dfrac{T^3}{6} & -\dfrac{T^2}{2}\\ \dfrac{T^2}{2} & -T\end{Vmatrix},$$

$$D_{21}(T)=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\qquad D_{22}(T)=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ -T & 1\end{Vmatrix},$$

Результат

$$u_p(t)=-B^T D_{22}\mathbf{\Gamma}\cdot(D_{11}+D_{12}\mathbf{\Gamma})^{-1}\cdot\vec{x}(t)=C(t)\cdot\begin{Vmatrix}y(t)\\ v(t)\end{Vmatrix}$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Задача перехвата

$$a_1 \to \infty, \quad a_2 \to 0$$

$$u_p(t) = \frac{3}{(t_к - t)^2}\left[y(t) + v(t)(t_к - t)\right]$$

При малых φ

$$\varphi \approx \frac{y}{v_{сбл}(t_к - t)}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi = \frac{1}{v_{сбл}}\left[\frac{y}{(t_к - t)^2} + \frac{v}{(t_к - t)}\right] = \frac{1}{v_{сбл}(t_к - t)^2}\left[y + v(t_к - t)\right]$$

$$u_p(t) = 3v_{сбл}\frac{d\varphi}{dt}$$

2. Задача 'мягкой' встречи (идеального перехвата)

$$a_1 \to \infty, \quad a_2 \to \infty$$

$$u_p(t) = \frac{6}{(t_к - t)^2}\left[y(t) + \frac{2}{3}v(t)(t_к - t)\right]$$

Спасибо за внимание!