ЭУМК

УСТРОЙСТВА СВЧ И АНТЕННЫ

Лекция 9.

Излучение плоских раскрывов (апертурные антенны).

9.1. Идеальная апертурная антенна

Сначала разберёмся, как работает идеальная апертурная антенна, которая является простой расчётной моделью многих типов направленных антенн.
Пусть на отверстие в плоском непрозрачном экране падает плоская волна (рис.9.1).

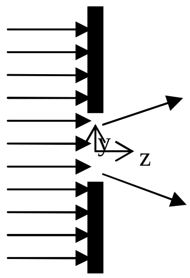

Рис. 9.1. Падение плоской волны на отверстие в экране

Плоская волна – это простейшее решение уравнений Максвелла.

$$rot\boldsymbol{H} = i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}; \quad rot\boldsymbol{E} = -i\omega\mu_0\boldsymbol{H};$$

Рассмотрим частный случай, соответствующий плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси Z (в левой части рисунка). Ищем решение в виде скалярной функции, умноженной на постоянный вектор (единичный вектор вдоль оси X):

$$\boldsymbol{E} = E_0 e^{-ikz}\boldsymbol{e}_x;$$

Чтобы найти вектор ***H*** из второго уравнения Максвелла, нужно вычислить ротор вектора ***E.***
Для этого воспользуемся тождеством из векторного анализа:

$$rot(S\boldsymbol{V}) = [\nabla S, \boldsymbol{V}] + S\, rot\boldsymbol{V};$$

Здесь S – произвольная скалярная функция, $\boldsymbol{V}$ –произвольная векторная функция.
Получим: $rot\boldsymbol{E} = \left[\nabla E_0 e^{-ikz}, \boldsymbol{e}_x\right] = -ikE_0 e^{-ikz}\left[\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_x\right] = -ikE_0 e^{-ikz}\boldsymbol{e}_y;$
После подстановки этого выражения во 2-е уравнение Максвелла, получим:

$$-ikE_0 e^{-ikz}\boldsymbol{e}_y = -ikW_0\boldsymbol{H};$$

или $\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{W_0} E_0 e^{-ikz}\boldsymbol{e}_y;$ получили выражение полного поля в левой части рисунка:

$$\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\} = E_0 e^{-ikz}\left\{\boldsymbol{e}_x, \frac{1}{W_0}\boldsymbol{e}_y\right\};$$

Это поле удовлетворяет второму уравнению Максвелла. Нужно ещё убедиться, что оно является решением и первого уравнения Максвелла. Получаем:

$$rot\boldsymbol{H} = -ikE_0 e^{-ikz}\left[\boldsymbol{e}_z, \frac{1}{W_0}\boldsymbol{e}_y\right] = ik\frac{1}{W_0}E_0 e^{-ikz}\boldsymbol{e}_x$$

Вспоминая, что $k = \dfrac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, а $W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, получаем $rot\boldsymbol{H} = i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E};$

Вычислим плотность потока мощности в плоской волне, определяемую величиной вектора Пойнтинга:

$$\boldsymbol{p}=0.5\left[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}^*\right]=\frac{E_0^{\ 2}}{2W_0}\boldsymbol{e}_z; \qquad (9.1)$$

Излучение поля из отверстия эквивалентно излучению токов, заданных поверхностными плотностями $\boldsymbol{J}^e=\left[\boldsymbol{n},\boldsymbol{H}\right]$, $\boldsymbol{J}^m=-\left[\boldsymbol{n},\boldsymbol{E}\right]$: подставляя выражение полей, получаем:

$$\boldsymbol{J}^e=\left[\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{H}\right]=-\frac{E_0}{W_0}\boldsymbol{e}_x; \quad \boldsymbol{J}^m=-\left[\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{E}\right]=-E_0\boldsymbol{e}_y;$$

Перейдём от поверхностных плотностей к полному току, точнее к моментам полного тока:

$$I^e l^e=\boldsymbol{J}^e dxdy=-\frac{E_0}{W_0}\boldsymbol{e}_x dxdy;$$

$$I^m l^m=\boldsymbol{J}^m dxdy=-E_0\boldsymbol{e}_y dxdy;$$

Моменты токов входят в формулу для поля излучения в дальней зоне электрического и магнитного элементов тока:

$$\boldsymbol{E}=\left\{W_0 I^e l^e\left[\left[\boldsymbol{e}_{I^e},\boldsymbol{e}_R\right],\boldsymbol{e}_R\right]-I^m l^m\left[\boldsymbol{e}_{I^m},\boldsymbol{e}_R\right]\right\}e^{ik(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_R)}\frac{ik}{4\pi}\frac{e^{-ikR_0}}{R_0};$$

Подставляя в неё выражения для моментов тока, с учётом того, что вектор $\boldsymbol{r}$, определяющий координаты точки, в которой расположены излучающие токи, для элементов электрического и магнитного токов один и тот же, получим:

$$d\boldsymbol{E}=\frac{-ike^{-ikR_0}}{4\pi R_0}E_0 e^{ik(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_r)}\left\{\left[\left[\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_R\right],\boldsymbol{e}_R\right]-\left[\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_R\right]\right\}dxdy;$$

Далее проводим вычисление векторных и скалярных произведений, с учётом того, что составляющая электрического тока направлена вдоль оси X, а составляющая магнитного тока – вдоль оси Y.

$$\left[\left[\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_R\right],\boldsymbol{e}_R\right]=-\cos\vartheta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\vartheta+\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi;$$

$$\left[\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_R\right]=\cos\varphi\boldsymbol{e}_\vartheta-\cos\vartheta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi;$$

$$\left[\left[\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_R\right],\boldsymbol{e}_R\right]-\left[\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_R\right]=-\left(1+\cos\vartheta\right)\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\vartheta-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\right);$$

$$\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_r\right)=x\sin\vartheta\cos\varphi+y\sin\vartheta\sin\varphi; \quad x=r\cos\psi;\ y=r\sin\psi;$$

После подстановки полученных выражений в элемент излучённого поля и интегрирования этого элемента по площади отверстия в экране, получим выражение для электрического поля излучения (в дальней зоне):

$$d\boldsymbol{E}=\frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikR_0}}{R_0}\frac{1+\cos\vartheta}{2}\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\vartheta-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\right)E_0 e^{ik\sin\vartheta(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}dxdy;$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikR_0}}{R_0}\frac{1+\cos\vartheta}{2}\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\vartheta-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\right)\iint_S E_0 e^{ik\sin\vartheta(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}dxdy;$$

Излучение плоской волны из отверстия образовало сферическую волну в дальней зоне. Антенну, образованную излучением из отверстия в экране при нормальном падении на него плоской волны, называют идеальной апертурной антенной. Выражение электрического поля, излучённого идеальной апертурной антенной, по форме похоже на диаграмму направленности антенной решётки, с элементарным излучателем типа элемента Гюйгенса и множителем решётки, который можно представить в виде двумерного интеграла Фурье, если сделать замены:

$$\boldsymbol{F}_{el}(\vartheta,\varphi)=\frac{1+\cos\vartheta}{2}\left(\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_{\vartheta}-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_{\varphi}\right);$$
$$\xi=\sin\vartheta\cos\varphi/\lambda;\ \eta=\sin\vartheta\sin\varphi/\lambda; \qquad (9.2)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikR_0}}{R_0}\boldsymbol{F}_{el}(\vartheta,\varphi)\iint_S E_0 e^{2\pi i(x\xi+y\eta)}dxdy; \qquad (9.3)$$

В апертурной антенне (как и в любой решётке, состоящей из одинаковых и одинаково направленных элементов) информация о поляризации излучения содержится только в диаграмме направленности элементарного излучателя: $F_{el}(\vartheta,\varphi)$. Заметим, что мы не конкретизировали форму отверстия.

9.2. КНД идеальной апертурной антенны

Рассчитаем КНД идеальной апертурной антенны в направлении оси Z. КНД определяется, как отношение максимальной плотности потока мощности к средней плотности потока мощности, излучаемой антенной. Максимальное значение модуля интеграла поля излучения (9.3,*a*) получается при ξ=η=0, то есть, при θ=0. В этом случае интеграл в (9.3,а) равен E_0S. Здесь S – это площадь отверстия. Но модуль диаграммы направленности элемента Гюйгенса (9.2), в этом случае, равен единице, поэтому $\left|\boldsymbol{E}\right|_{\max}=E_0S/\lambda R_0$. По величине максимального электрического поля излучения можно вычислить величину максимальной плотности потока излучённой мощности: $\left|\boldsymbol{P}\right|_{\max}=\left|\boldsymbol{E}\right|^2_{\max}\Big/2W_0=E_0^2S^2\big/2W_0\lambda^2R_0^2$.

Для расчёта КНД нужно ещё вычислить среднюю плотность потока излучённой мощности. Среднюю плотность можно вычислить как отношение полной излучённой мощности к площади поверхности сферы радиуса R_0. Полная излучённая мощность для идеальной антенны равна подводимой мощности и вычисляется умножением плотности потока мощности в плоской волне в пределах отверстия на площадь отверстия. Итак, $P_\Sigma=E_0{}^2S/2W_0$, $\left|\boldsymbol{P}\right|_{mid}=P_\Sigma/4\pi R_0^2=E_0^2S/8\pi R_0^2W_0$. КНД идеальной апертурной антенны получим делением максимальной плотности потока излучения на среднюю:

$$D=\frac{\left|\boldsymbol{P}\right|_{\max}}{\left|\boldsymbol{P}\right|_{mid}}=\frac{4\pi S}{\lambda^2}.$$

9.3. Реальная апертурная антенна

Найденная связь КНД с площадью апертуры универсальна, то есть применима не только к идеальной апертурной антенне, но и к реальным антеннам. Нужно только заменить в формуле для КНД **геометрическую** площадь излучающей апертуры на **эффективную** площадь.

Форма диаграммы направленности идеальной апертурной антенны зависит от формы излучающей апертуры. Вычислим сначала диаграмму направленности прямоугольной апертуры (рис.9.2). Для этого достаточно вычислить интеграл в формуле (9.3,*a*) для случая прямоугольной области интегрирования. Пусть размер прямоугольника равен a в направлении оси X и b в направлении оси Y. Интеграл превращается в произведение двух интегралов. Вычисляя двойной интеграл по прямоугольнику, получим:

$$\iint_{\square} e^{ik\sin\vartheta(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}dxdy = S\left(\frac{\sin(0.5ka\sin\vartheta\cos\varphi)}{(0.5ka\sin\vartheta\cos\varphi)}\right)\left(\frac{\sin(0.5kb\sin\vartheta\sin\varphi)}{(0.5kb\sin\vartheta\sin\varphi)}\right); \qquad (9.4)$$

Обратим внимание на дискретный характер боковых лепестков при равномерном облучении прямоугольной апертуры. Ширину диаграммы направленности, определяемой формулой (9.4), можно найти с помощью таблицы 1 из 4-й лекции. Для прямоугольной апертуры с равномерным распределением поля $\Delta\theta_{0.7}$ ~50.7 λ/a , где a – сторона прямоугольника. Уровень первого бокового лепестка ~ минус 13 дБ, согласно той же таблице.

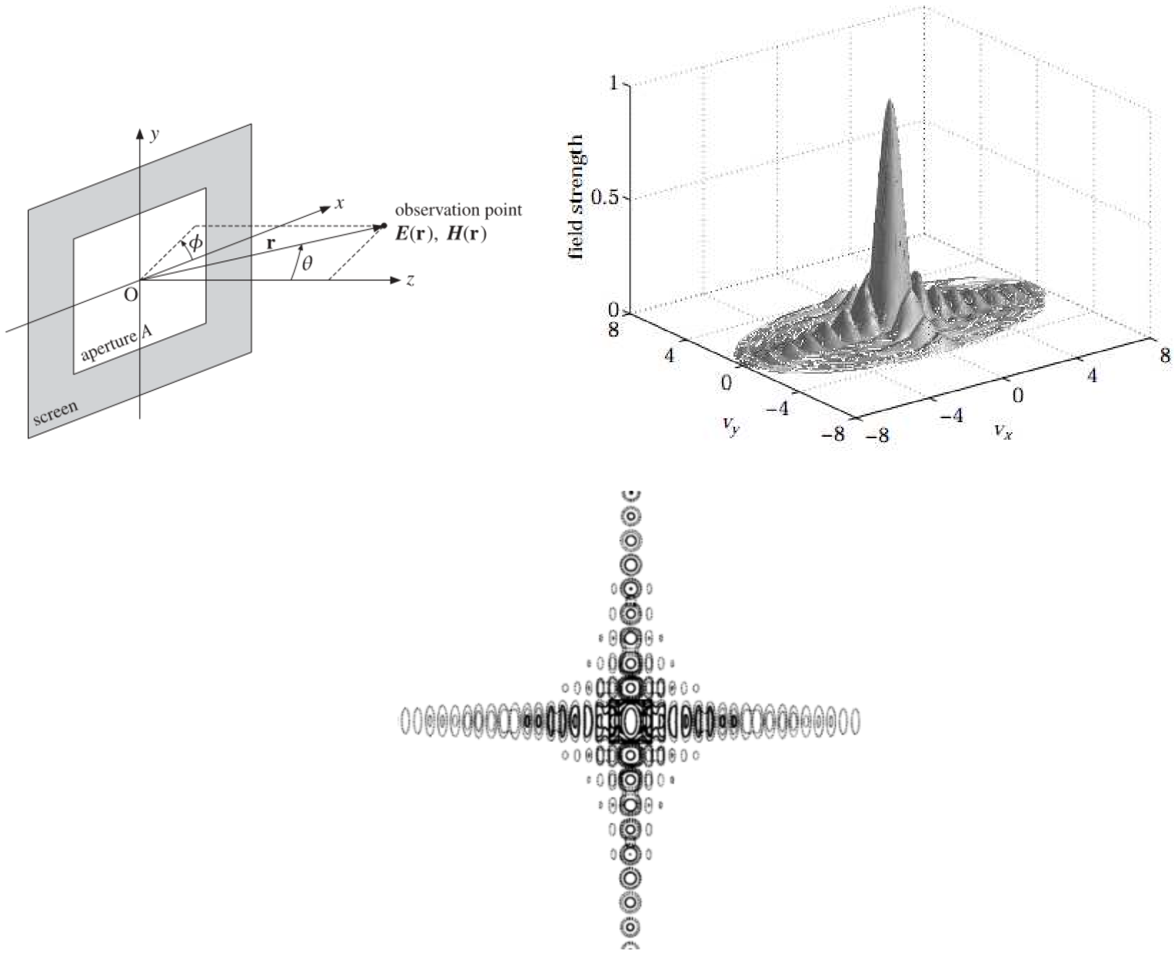

Рис.9.2. Система координат в прямоугольной апертуре и трёхмерное изображение диаграммы направленности. По горизонталям отложено $v_x = ka\sin\vartheta\cos\varphi$ и $v_y = ka\sin\vartheta\sin\varphi$, по вертикальной оси – величина поля E

Аналогично вычисляется диаграмма направленности круглой, равномерно облучённой апертуры (рис.9.3):

$$\iint_{\bigcirc} e^{ik\sin\vartheta(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}dxdy = S\ \ 2J_1(ka\sin\vartheta)/(ka\sin\vartheta); \qquad (9.5)$$

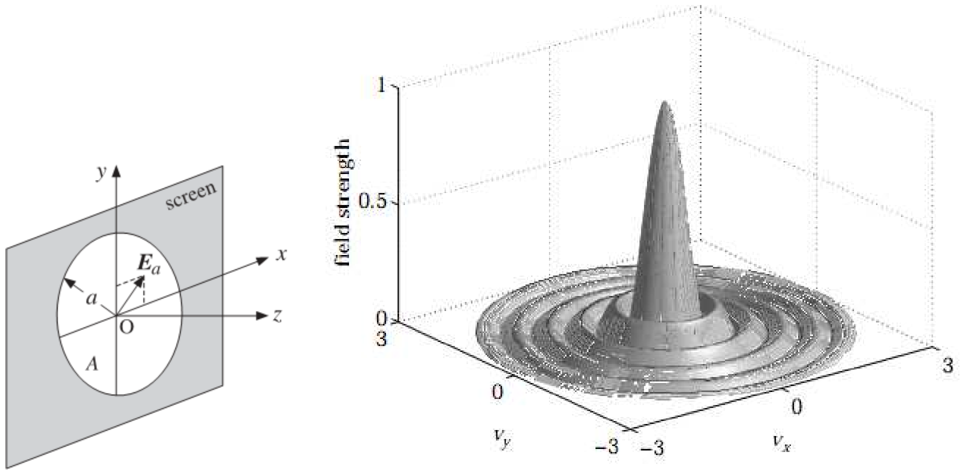

Рис.9.3. Изображение диаграммы направленности равномерно облучённой круглой апертуры

В случае равномерного облучения круглой апертуры вся диаграмма, как и её боковые лепестки, обладают осевой симметрией. Ширину диаграммы направленности круглой, **равномерно** облучённой апертуры можно найти по формуле: $\Delta\theta_{0.7}$ ~59° λ/d.

Класс реальных апертурных антенн очень широк. К нему относятся всевозможные рупорные антенны, излучатели, типа открытого конца волновода, рефлекторные и линзовые антенны. К апертурным антеннам можно отнести и некоторые типы антенных решёток

Изложенная теория идеальной апертурной антенны применима к **реальным** апертурным антеннам. Нужно лишь считать, что распределение поля E_0 в пределах апертуры в реальных антеннах может меняться как по амплитуде, так и по фазе. В реальных антеннах также может быть заменён элемент Гюйгенса на какой-нибудь другой элементарный излучатель. С такими изменениями формула (9.3,*а*) остаётся в силе.

$$\boldsymbol{E} = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{-ikR_0}}{R_0}F_{el}\left(\vartheta,\varphi\right)\iint\limits_S E_0\left(x,y\right)e^{2\pi i\left(x\xi+y\eta\right)}dxdy; \qquad (9.3,б)$$

9.4. КНД и эффективная площадь реальной апертурной антенны

Рассчитаем КНД реальной апертурной антенны по этой, слегка видоизменённой формуле. Будем считать, что максимум модуля интегрального члена достигается в направлении (ξ=η=0). В этом же направлении при θ=0 имеет место максимум модуля диаграммы направленности элементарного излучателя, причём он равен единице. Тогда максимальное значение модуля электрического поля в дальней зоне можно вычислить по формуле:

$$\left|\boldsymbol{E}\right|_{\max} = \left|\iint\limits_S \boldsymbol{E}_0\left(x,y\right)dxdy\right| \Big/ \lambda R_0$$

из которого можно получить максимальное значение величины вектора Пойнтинга в дальней зоне:

$$\left|\boldsymbol{P}\right|_{\max} = \left|\boldsymbol{E}\right|^2_{\max} \Big/ 2W_0 = \left|\iint\limits_S \boldsymbol{E}_0\left(x,y\right)dxdy\right|^2 \Big/ 2W_0\lambda^2R_0^2$$

Аналогичным образом вычисляется среднее значение величины вектора Пойнтинга в дальней зоне по величине полной излучённой мощности (в предположении, что к излучающей апертуре вектор Пойнтинга поля $E_0\left(x,y\right)$ подходит по нормали):

$$P_\Sigma = \iint\limits_S \left|\boldsymbol{E}_0(x,y)\right|^2 dxdy \Big/ 2W_0\,,\ \left|\boldsymbol{P}\right|_{mid} = P_\Sigma \big/ 4\pi R_0^2 = \iint\limits_S \left|\boldsymbol{E}_0(x,y)\right|^2 dxdy \Big/ 8\pi R_0^2 W_0$$

КНД реальной апертурной антенны получим делением максимальной плотности потока излучения на среднюю:

$$D = \frac{\left|\boldsymbol{P}\right|_{\max}}{\left|\boldsymbol{P}\right|_{mid}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left|\iint\limits_S \boldsymbol{E}_0(x,y)\,dxdy\right|^2}{\iint\limits_S \left|\boldsymbol{E}_0(x,y)\right|^2 dxdy}; \tag{9.6,a}$$

Отношение интегралов в этой формуле и представляет эффективную площадь реальной апертурной антенны (проверьте, что отношение интегралов в формуле (5.6,б) имеет размерность площади).

$$S_{eff} = \frac{\left|\iint\limits_S \boldsymbol{E}_0(x,y)\,dxdy\right|^2}{\iint\limits_S \left|\boldsymbol{E}_0(x,y)\right|^2 dxdy} \tag{9.6,$б$}$$

Заметим, что для вычисления эффективной площади и КНД реальной апертурной антенны не требуется вычислять **поле излучения**, достаточно знать распределение **поля в излучающей апертуре** антенны. Важное неравенство между эффективной и геометрической площадями апертуры : $S_{eff} \le S_{geom}$. Это неравенство следует из интегрального неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|\iint\limits_S \boldsymbol{E}_0(x,y)\,dxdy\right|^2 \le \iint\limits_S \left|\boldsymbol{E}_0(x,y)\right|^2 dxdy \quad \iint\limits_S dxdy:$$

Отношение $S_{eff} \big/ S_{geom}$ называется коэффициентом использования площади (КИП) апертуры или апертурной эффективностью антенны.

Применим полученные результаты. Проще всего применить известные нам результаты к апертурным антеннам с прямоугольной апертурой. Если функция распределения поля по апертуре $\boldsymbol{E}_0(x,y)$ может быть представлена произведением функций, каждая из которых зависит только лишь от X или от Y, интеграл также представляется произведением функций, подобно (9.4). Но в этом случае можно учесть неравномерный характер амплитудного облучения в разных плоскостях. Так, если в направлении оси X поле меняется по косинусоидальному закону, а в плоскости Y - по равномерному, применяя результат из (таблица 1, лекция 4), получим:

$$\iint\limits_{\square} E_0(x,y)\,e^{ik\sin\vartheta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}dxdy = \frac{8}{\pi^2} S \left(\frac{\cos(0.5kA\sin\vartheta\cos\varphi)}{1-\left((kA/\pi)\sin\vartheta\cos\varphi\right)^2}\right)\left(\frac{\sin(0.5kB\sin\vartheta\sin\varphi)}{(0.5kB\sin\vartheta\sin\varphi)}\right); \tag{9.7}$$

$$E_0(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x}{A}\right);$$

Такие диаграммы направленности характерны для прямоугольных апертур, облучаемых синфазным полем со структурой амплитудного изменения как в прямоугольном волноводе с волной H_{10}. В плоскости E ширина диаграммы направленности определяется уже приведённой формулой $\Delta\theta_{0.7}$ ~50.7° λ/b. В плоскости H ширину можно найти с помощью таблицы 1: $\Delta\theta_{0.7}$ ~68.2° λ/a.

Диаграмма направленности апертурной антенны с круглой апертурой, возбуждаемой волной типа H_{11}, описывается следующим выражением:

$$\frac{1}{S_{ef}}\iint_S E_0(r,\psi)e^{ikr\sin\vartheta(\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)}rdrd\psi =$$

$$= \left(\frac{2J_1'(ka\sin\vartheta)}{1-(ka\sin\vartheta/1.841)^2}\cos^2\varphi + \frac{2J_1(ka\sin\vartheta)}{(ka\sin\vartheta)}\sin^2\varphi\right) \quad (9.9)$$

$$E_0(r,\psi)=\sqrt{J_1'^2(u)\cos^2\psi+\left(J_1(u)/u\right)^2\sin^2\psi}; \quad u=\nu r/a; \quad \nu\approx 1.841;$$

В этой формуле: $J_1(\bullet), J_1'(\bullet)$ - функция Бесселя первого порядка и производная этой функции, a – радиус круглого волновода, 1.841 – приближённое значение первого нуля производной функции Бесселя первого порядка.