# Оптимальный корреляционный приёмник

Логарифм апостериорной плотности вероятности параметра $\lambda$
в случае приёма полностью известного сигнала
в смеси с нормальным белым шумом:

$$\ln w_{ps}(\lambda) = \ln C + q(\lambda) - \frac{E_{\text{с}}(\lambda)}{G_0} + \ln w_{pr}(\lambda)$$

$w_{ps}(\lambda)$ – апостериорная плотность вероятности параметра;

$w_{pr}(\lambda)$ – априорная плотность вероятности параметра;

$G_0$ – спектральная плотность белого шума;

$q(\lambda) = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T y(t)s_\lambda(t)dt$ – корреляционный интеграл;

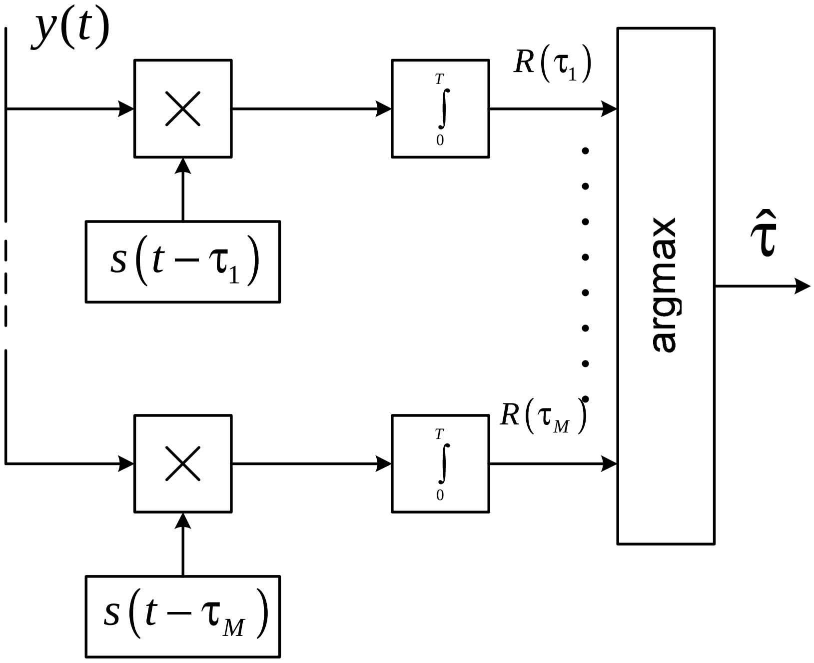
$E_{\text{с}}(\lambda) = \displaystyle\int_0^T s_\lambda^2(t)dt$ – энергия сигнала

Оптимальная оценка параметра по критерию максимума апостериорной вероятности:

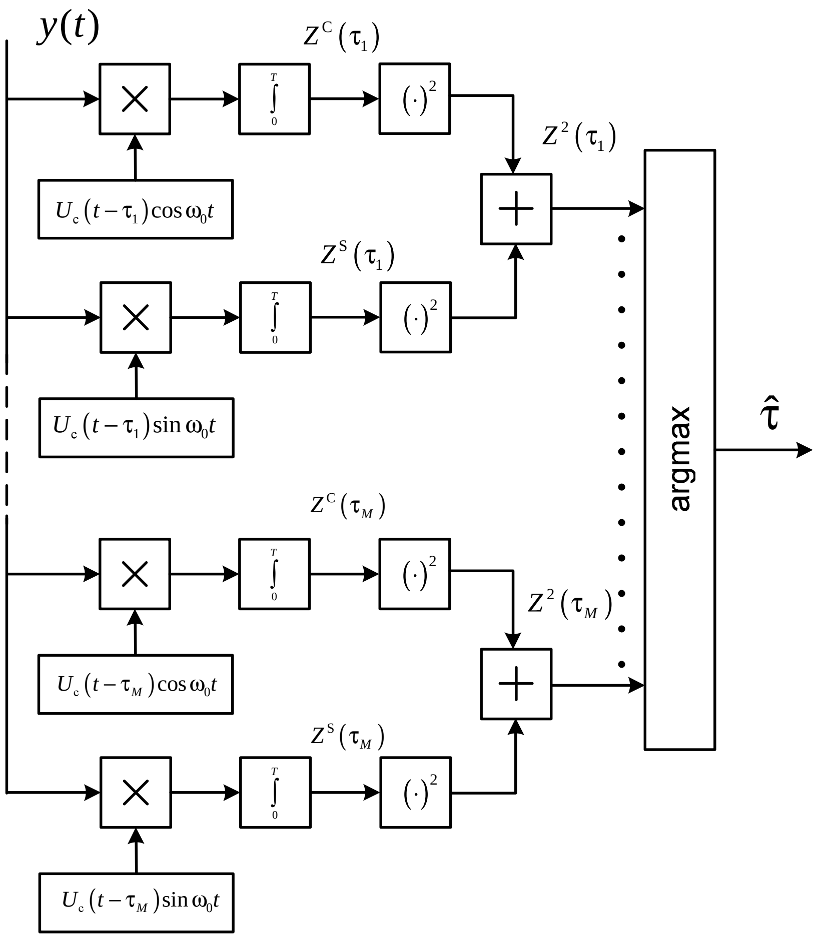
$$\hat{\lambda} = \arg\max\, w_{ps}(\lambda) = \arg\max\, \ln w_{ps}(\lambda)$$

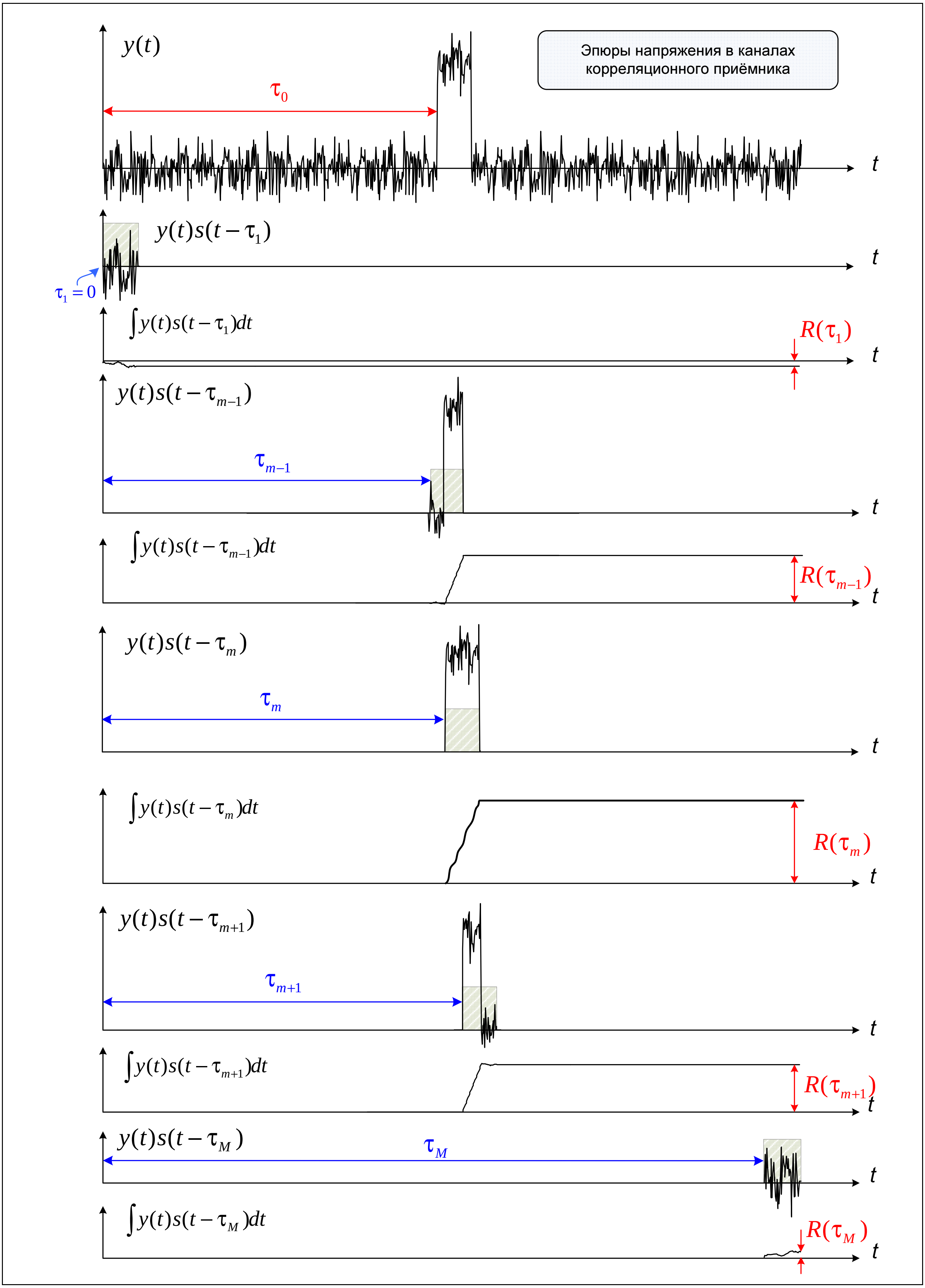
| ***Корреляционный приёмник полностью известного импульсного сигнала*** | ***Корреляционный приёмник импульсного сигнала с неизвестной начальной фазой*** |
|---|---|
| Логарифм апостериорной плотности вероятности задержки импульса (при равномерном априорном распределении): $$\ln w_{ps}(\tau) = \ln C' + q(\tau)$$ $$q(\tau) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s(t-\tau)dt$$ $$\hat{\tau} = \arg\max\, q(\tau)$$ Отношение сигнал-шум на выходе коррелятора: $$\boxed{\rho = \frac{q_{\text{с}\max}}{\sigma_{q_{\text{ш}}}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{с}}}{G_0}}}$$ | Логарифм апостериорной плотности вероятности задержки импульса (при равномерном априорном распределении): $$\ln w_{ps}(\tau) = \ln C' + \ln I_0\left(\frac{2}{G_0}Z(\tau)\right)$$ $$Z(\tau) = \sqrt{Z^{\text{c}\,2}(\tau) + Z^{\text{s}\,2}(\tau)}$$ $$Z^{\text{c}}(\tau) = \int_0^T y(t)U_{\text{с}}(t-\tau)\cos\omega_0 t dt$$ $$Z^{\text{s}}(\tau) = \int_0^T y(t)U_{\text{с}}(t-\tau)\sin\omega_0 t dt$$ $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя (функция Бесселя мнимого аргумента) 0-го порядка |

Корреляционный приёмник для измерения задержки известного импульсного сигнала




Корреляционный приёмник для измерения задержки импульсного сигнала с неизвестной фазой




Эпюры напряжения в каналах корреляционного приёмника
y(t)
τ0
t
y(t)s(t − τ1)
τ1 = 0
∫y(t)s(t − τ1)dt
R(τ1)
y(t)s(t − τm−1)
τm−1
∫y(t)s(t − τm−1)dt
R(τm−1)
y(t)s(t − τm)
τm
∫y(t)s(t − τm)dt
R(τm)
y(t)s(t − τm+1)
τm+1
∫y(t)s(t − τm+1)dt
R(τm+1)
y(t)s(t − τM)
τM
∫y(t)s(t − τM)dt
R(τM)

### *Оптимальный обнаружитель полностью известного сигнала*

Условие обнаружения: $q = \dfrac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s(t)dt > h$

Оптимальное значение порога порогового устройства (ПУ): $h = \ln\dfrac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} + \dfrac{E_с}{G_0}$

Распределение вероятностей напряжения на входе ПУ: $w(q) = \dfrac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q-\overline{q})^2}{2\sigma_q^2}}$,

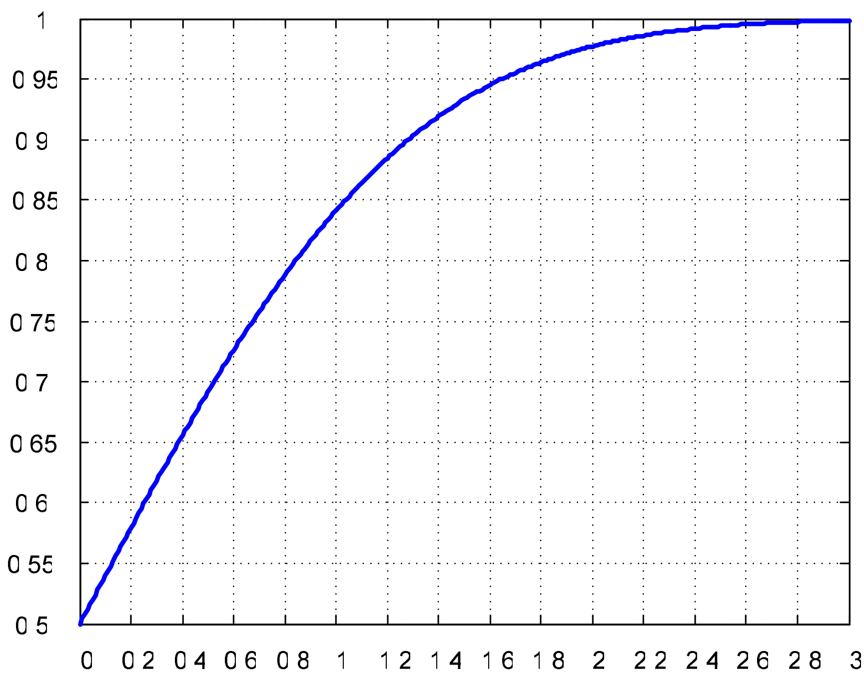
$\overline{q} = q_с = \dfrac{2E_с}{G_0}$ – математическое ожидание, $\sigma_q = \sigma_{q_ш} = \sqrt{\dfrac{2E_с}{G_0}}$ – СКО

Вероятность обнаружения: $p_{обн} = 1 - \Phi\left(\dfrac{h-\overline{q}}{\sigma_q}\right)$

Вероятность ложной тревоги: $p_{ЛТ} = 1 - \Phi\left(\dfrac{h}{\sigma_q}\right)$

Интеграл вероятностей: $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



### *Оптимальный обнаружитель сигнала с неизвестной начальной фазой*

Условие обнаружения: $q = \ln I_0\left(\frac{2}{G_0}Z\right) > h$

Оптимальное значение порога ПУ: $h = \ln\frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} + \frac{E_\text{с}}{G_0}$

$$Z = \sqrt{Z^{\text{c}\,2} + Z^{\text{s}\,2}}$$

$$Z^\text{c} = \int_0^T y(t)U_\text{с}(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi_\text{с}(t)\right)dt$$

$$Z^\text{s} = \int_0^T y(t)U_\text{с}(t)\sin\left(\omega_0 t + \varphi_\text{с}(t)\right)dt$$

### *Оптимальный приёмник для различения двух полностью известных сигналов*

$$\Delta q = q_1 - q_2 \begin{cases} > h & \Rightarrow \text{ сигнал } s_1(t) \\ < h & \Rightarrow \text{сигнал } s_2(t) \end{cases}$$

$$q_1 = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s_1(t)dt, \quad q_2 = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s_2(t)dt$$

Оптимальное значение порога ПУ: $h = \ln\frac{p_{pr2}}{p_{pr1}} + \frac{E_{\text{с}1} - E_{\text{с}2}}{G_0}$

Вероятность ошибки различения двух равновероятных сигналов
с одинаковой энергией:

$$\boxed{p_\text{ош} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_\text{с}}{G_0}\left(1 - r_{12}\right)}\right),}$$

где $r_{12} = \frac{1}{E_\text{с}}\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$ – коэффициент взаимной корреляции

## Оптимальная и квазиоптимальная фильтрация

### *Согласованный фильтр (СФ)*

Частотная характеристика СФ:

$$\dot{K}_{\text{с}}(j\omega) = cS^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Импульсная характеристика СФ:

$$g_{\text{с}}(t) = c\,s(t_0 - t)$$

Отклик СФ на сигнал:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} cs(t_0 - \tau)s(t - \tau)\,d\tau =$$

$$= c\,R_{\text{с}}(t - t_0)$$

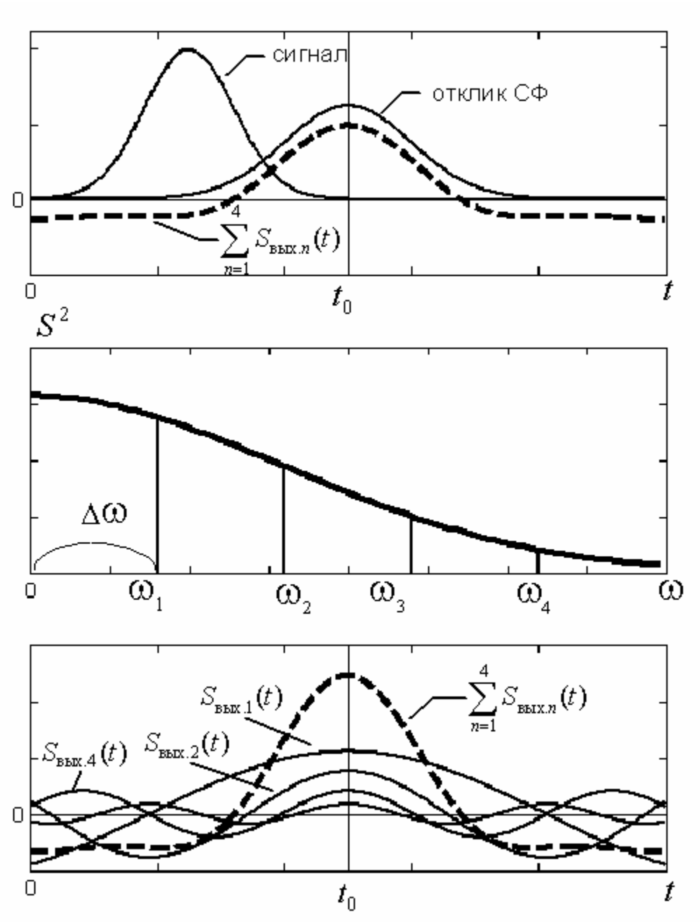
Максимальное отношение сигнал-шум на выходе СФ:

$$\rho_{\text{СФ}} = \frac{s_{\text{вых.max}}}{\sigma_{\text{ш.вых}}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{с}}}{G_0}}$$

Частотная характеристика оптимального фильтра:

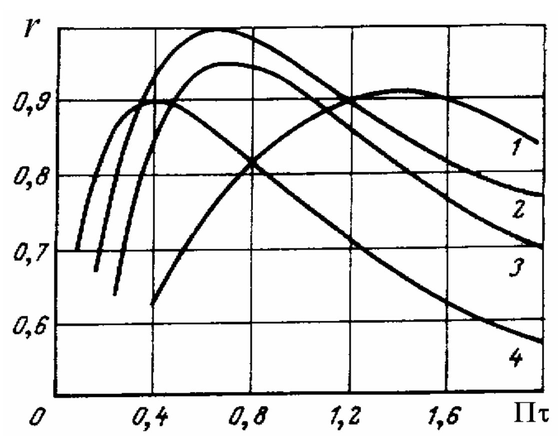
$$\dot{K}_{\text{опт}}(j\omega) = c\frac{S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}}{G_{\text{ш}}(\omega)}$$

Синфазное сложение спектральных составляющих при формировании отклика СФ




$$S_{\text{вых.}\,n}(t) = \frac{c}{\pi}S^2(\omega_n)\cos\left(\omega_n(t - t_0)\right)\Delta\omega$$

### *Проигрыш квазиоптимального фильтра по сравнению с согласованным*




| Номер кривой | Форма импульса | Форма АЧХ |
|---|---|---|
| 1 | Прямоугольная | Прямоугольная |
| 2 | Гауссова | Гауссова |
| 3 | Прямоугольная | Гауссова |
| 4 | Прямоугольная | Одиночный контур |

$$r = \rho/\rho_{\text{СФ}},\ \text{где}\ \rho = \frac{s_{\text{вых.max}}}{\sigma_{\text{ш.вых}}},\quad \rho_{\text{СФ}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{с}}}{G_0}}$$