Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Институт радиотехники и электроники

Кафедра радиотехнических систем

Методы оптимального приема сигналов в аппаратуре потребителей СРНС

Контрольная работа №2а

ФИО студента: Жеребин В.Р.

Группа: ЭР-15-15

Вариант №: 3

Дата: 31.10.2019

Подпись: ________________

ФИО преподавателя: Шатилов А.Ю.

Оценка: ____________

Москва, 2019 г.

Постановка задачи

Задана выборка следующих входных сигналов, всего M = 2048 отсчетов:

$y_{1,k} = A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0) + n_{1,k}$,

$y_{2,k} = A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0) + n_{2,k}$,

$y_{3,k} = A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi) + n_{3,k}$,

$y_{4,k} = A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi) + n_{4,k},\ k \in [0{,}2047],\ T = 1/f_s,\ f_s = 47{,}5$ МГц

$n_{(1\ldots4),k}$ – независимые и некоррелированные по времени ДБГШ с СКО $\sigma_n = 10$

Параметры сигналов $A_1, A_2, \omega, \varphi_0, \triangle\varphi$ – неизвестны, но постоянны на интервале наблюдения.

Требуется найти: $\triangle\varphi$, дисперсию ошибки для полученной оценки $D_{\triangle\varphi}$

Указания

1. Для оценки используется метод максимального правдоподобия. Применяется итеративный алгоритм (метод Ньютона) оценивания с помощью дискриминаторов:

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} - \frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial\lambda^2}\right]^{-1}$$

2. Неинформативные параметры считать информативными и тоже оценивать:

$$\lambda = |A_1\ A_2\ \omega\ \varphi_0\ \ \triangle\varphi|^T$$

3. Вектор наблюдений: $y_k = \left|y_{1,k}\ y_{2,k}\ y_{3,k}\ y_{4,k}\right|^T = S_k(\lambda) + n_k$

4. Отношение правдоподобия для векторных наблюдений в дискретном времени:

$$\rho(Y_0^M) = exp\left\{\sum_{k=1}^{M} S_k^T(\lambda) D_n^{-1}\left(y_k - \frac{1}{2}S_k(\lambda)\right)\right\}$$

Аналитическое решение

Распишем отношение правдоподобия для нахождения оценки по методу максимального правдоподобия:

$$\ln(\rho(\lambda)) = \sum_{k=1}^{M} S_k^T(\lambda) D_n^{-1}\left(y_k - \frac{1}{2}S_k(\lambda)\right) = \sum_{k=1}^{M}\left(S_k^T(\lambda)D_n^{-1}y_k - \frac{1}{2}S_k^T(\lambda)D_n^{-1}S_k(\lambda)\right) =$$

$$= D_n^{-1}\sum_{k=1}^{M}\left(S_k^T(\lambda)y_k - \frac{1}{2}S_k^T(\lambda)S_k(\lambda)\right) =$$

$$= D_n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{M} S_k^T(\lambda)y_k - \sum_{k=1}^{M}\frac{1}{2}S_k^T(\lambda)S_k(\lambda)\right) =$$

$$= D_n^{-1}\sum_{k=1}^{M} S_k^T(\lambda)y_k - D_n^{-1}\sum_{k=1}^{M}(A_1^2 + A_2^2) =$$

$$= D_n^{-1}\sum_{k=1}^{M}\left(S_{1,k}y_{1,k} + S_{2,k}y_{2,k} + S_{3,k}y_{3,k} + S_{4,k}y_{4,k}\right) - D_n^{-1}M(A_1^2 + A_2^2)$$

Где $D_n = \sigma_n^2 I$, следовательно

$$\ln(\rho(\lambda)) = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(S_{1,k}y_{1,k} + S_{2,k}y_{2,k} + S_{3,k}y_{3,k} + S_{4,k}y_{4,k}\right) - \frac{M(A_1^2 + A_2^2)}{\sigma_n^2}$$

Количество оцениваемых информационных параметров – пять. Следовательно необходимо получить такое же количество оценок. Для этого найдем производные отношения правдоподобия по каждому из оцениваемых параметров.

$$\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(\cos(\omega kT + \varphi_0)\, y_{1,k} + \sin(\omega kT + \varphi_0)\, y_{2,k}\right) - \frac{MA_1}{\sigma_n^2}$$

$$\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(\cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{3,k} + \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{4,k}\right) - \frac{MA_2}{\sigma_n^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\Big(&-A_1kT\sin(\omega kT + \varphi_0)\, y_{1,k} + A_1kT\cos(\omega kT + \varphi_0)\, y_{2,k} \\ &- A_2kT\sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{3,k} + A_2kT\cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{4,k}\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\Big(&-A_1\sin(\omega kT + \varphi_0)\, y_{1,k} + A_1\cos(\omega kT + \varphi_0)\, y_{2,k} \\ &- A_2\sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{3,k} + A_2\cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{4,k}\Big)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle\varphi} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(-A_2\sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{3,k} + A_2\cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{4,k}\right)$$

В используемом итеративном алгоритме оценивания с помощью дискриминаторов используются вторые производные отношения правдоподобия. Расчетом для вторых производных результатом будет являться матрица, размерностью 5x5.

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \lambda^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial {A_1}^2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial A_1} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial A_1} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle\varphi \partial A_1} \\ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial {A_2}^2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial A_2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial A_2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle\varphi \partial A_2} \\ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \omega} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \omega} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega^2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial \omega} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle\varphi \partial \omega} \\ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial {\varphi_0}^2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle\varphi \partial \varphi_0} \\ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \triangle\varphi} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \triangle\varphi} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \triangle\varphi} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial \triangle\varphi} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle\varphi^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial {A_1}^2} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial {A_2}^2} = -\frac{M}{\sigma_n^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial A_2} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial A_1} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \triangle\varphi} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle\varphi \partial A_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \omega} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial A_1} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(-kT\sin(\omega kT + \varphi_0)\, y_{1,k} + kT\cos(\omega kT + \varphi_0)\, y_{2,k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \varphi_0} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial A_1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{M} \left(-\sin(\omega kT + \varphi_0)\, y_{1,k} + \cos(\omega kT + \varphi_0)\, y_{2,k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \omega} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial A_2}$$
$$= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{M} \left(-kT \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{3,k} + kT \cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{4,k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \varphi_0} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial A_2} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \triangle \varphi} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle \varphi \partial A_2}$$
$$= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{M} \left(-\sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{3,k} + \cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{4,k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega^2} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{M} \left(-A_1 k^2 T^2 \cos(\omega kT + \varphi_0)\, y_{1,k} - A_1 k^2 T^2 \sin(\omega kT + \varphi_0)\, y_{2,k}\right.$$
$$\left. - A_2 k^2 T^2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{3,k} - A_2 k^2 T^2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{4,k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \varphi_0} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial \omega}$$
$$= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{M} \left(-A_1 kT \cos(\omega kT + \varphi_0)\, y_{1,k} - A_1 kT \sin(\omega kT + \varphi_0)\, y_{2,k}\right.$$
$$\left. - A_2 kT \cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{3,k} - A_2 kT \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{4,k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \triangle \varphi} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle \varphi \partial \omega}$$
$$= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{M} \left(-A_2 kT \cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{3,k}\right.$$
$$\left. - A_2 kT \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{4,k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial {\varphi_0}^2} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{M} \left(-A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0)\, y_{1,k} - A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0)\, y_{2,k}\right.$$
$$\left. - A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{3,k} - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{4,k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial \triangle \varphi} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle \varphi \partial \varphi_0} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \triangle \varphi^2}$$
$$= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{M} \left(-A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{3,k} - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle \varphi)\, y_{4,k}\right)$$

Для нахождения дисперсии ошибки (границы Рао-Крамера) необходимо найти матрицу Фишера $J_{ij} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \lambda_i \partial \triangle \lambda_j}\right]$

$$J_{11} = J_{22} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial {A_1}^2}\right] = -M\left[-\frac{M}{\sigma_n^2}\right] = \frac{M}{\sigma_n^2}$$

$$J_{12} = J_{13} = J_{14} = J_{15} = J_{21} = J_{31} = J_{41} = J_{51} = -M[0] = 0$$

$$J_{33} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial\omega^2}\right]$$

$$= -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(-A_1k^2T^2\cos(\omega kT+\varphi_0)\,y_{1,k} - A_1k^2T^2\sin(\omega kT+\varphi_0)\,y_{2,k}\right.\right.$$

$$\left.\left. - A_2k^2T^2\cos(\omega kT+\varphi_0+\triangle\varphi)\,y_{3,k} - A_2k^2T^2\sin(\omega kT+\varphi_0+\triangle\varphi)\,y_{4,k}\right)\right]$$

$$= -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}k^2T^2\left({A_1}^2-{A_2}^2\right)\right] = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}k^2T^2\left({A_1}^2+{A_2}^2\right)$$

$$J_{34} = J_{43} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial\omega\partial\varphi_0}\right]$$

$$= -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(-A_1kT\cos(\omega kT+\varphi_0)\,y_{1,k} - A_1kT\sin(\omega kT+\varphi_0)\,y_{2,k}\right.\right.$$

$$\left.\left. - A_2kT\cos(\omega kT+\varphi_0+\triangle\varphi)\,y_{3,k} - A_2kT\sin(\omega kT+\varphi_0+\triangle\varphi)\,y_{4,k}\right)\right]$$

$$= -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}kT\left({A_1}^2-{A_2}^2\right)\right] = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}kT\left({A_1}^2+{A_2}^2\right)$$

$$J_{35} = J_{53} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial\omega\partial\triangle\varphi}\right]$$

$$= -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(-A_2kT\cos(\omega kT+\varphi_0+\triangle\varphi)\,y_{3,k}\right.\right.$$

$$\left.\left. - A_2kT\sin(\omega kT+\varphi_0+\triangle\varphi)\,y_{4,k}\right)\right] = -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}kT\left(-{A_2}^2\right)\right] = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}kT{A_2}^2$$

$$J_{44} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial{\varphi_0}^2}\right]$$

$$= -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(-A_1\cos(\omega kT+\varphi_0)\,y_{1,k} - A_1\sin(\omega kT+\varphi_0)\,y_{2,k}\right.\right.$$

$$\left.\left. - A_2\cos(\omega kT+\varphi_0+\triangle\varphi)\,y_{3,k} - A_2\sin(\omega kT+\varphi_0+\triangle\varphi)\,y_{4,k}\right)\right]$$

$$= -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left({A_1}^2-{A_2}^2\right)\right] = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left({A_1}^2+{A_2}^2\right) = \frac{M\left({A_1}^2+{A_2}^2\right)}{\sigma_n^2}$$

$$J_{45} = J_{54} = J_{55} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln\big(\rho(\lambda)\big)}{\partial\varphi_0 \partial \triangle \varphi}\right]$$

$$= -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\big(-A_2\cos(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{3,k}\right.$$

$$\left. - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \triangle\varphi)\, y_{4,k}\big)\right] = -M\left[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left(-{A_2}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{M}\left({A_2}^2\right) = \frac{M{A_2}^2}{\sigma_n^2}$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{53} & J_{55} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_n^2}\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{M} k^2T^2\left({A_1}^2 + {A_2}^2\right) & \sum_{k=1}^{M} kT\left({A_1}^2 + {A_2}^2\right) & \sum_{k=1}^{M} kT{A_2}^2 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{M} kT\left({A_1}^2 + {A_2}^2\right) & M\left({A_1}^2 + {A_2}^2\right) & M{A_2}^2 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{M} kT{A_2}^2 & M{A_2}^2 & M{A_2}^2 \end{bmatrix}$$

Дисперсия ошибки в случае векторного λ: $R_\lambda \geq J^{-1}$

Дисперсией ошибки для полученной оценки $D_{\triangle\varphi}$, будет являться элемент 5,5 обратной матрицы Фишера.

Численный расчет

Для расчета используется программа *MATLAB R2017a*, код программы представлен в приложении. Выборка входных сигналов продемонстрирована на Рис.1. По выборкам можно задать начальное приближение:

$A_1 = 6100$

$A_2 = 6800$

$\omega = 2\pi \cdot 250 \times 10^3 = 1{,}571 \times 10^6$

$\varphi_0 = -1{,}25\pi = -3{,}9270$

$\triangle\varphi = -1{,}5\pi = -4{,}7124$

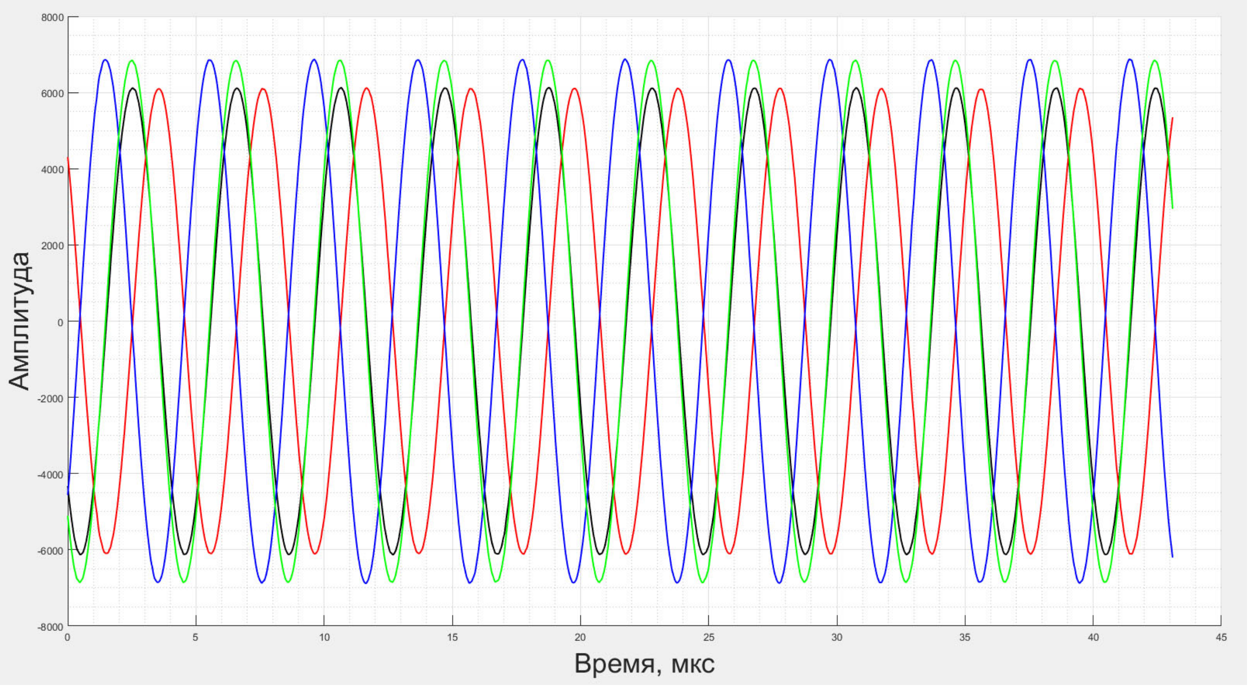

Рис.1. Выборка входных сигналов

В результате расчета программы, при количестве итераций, равном M-1, то есть 2047, были получены следующие значения оценок информативных параметров:

$A_1 = 6022{,}7$

$A_2 = 6753{,}1$

$\omega = 1{,}571 \times 10^6$

$\varphi_0 = -4{,}2098$

$\triangle \varphi = -4{,}6557$

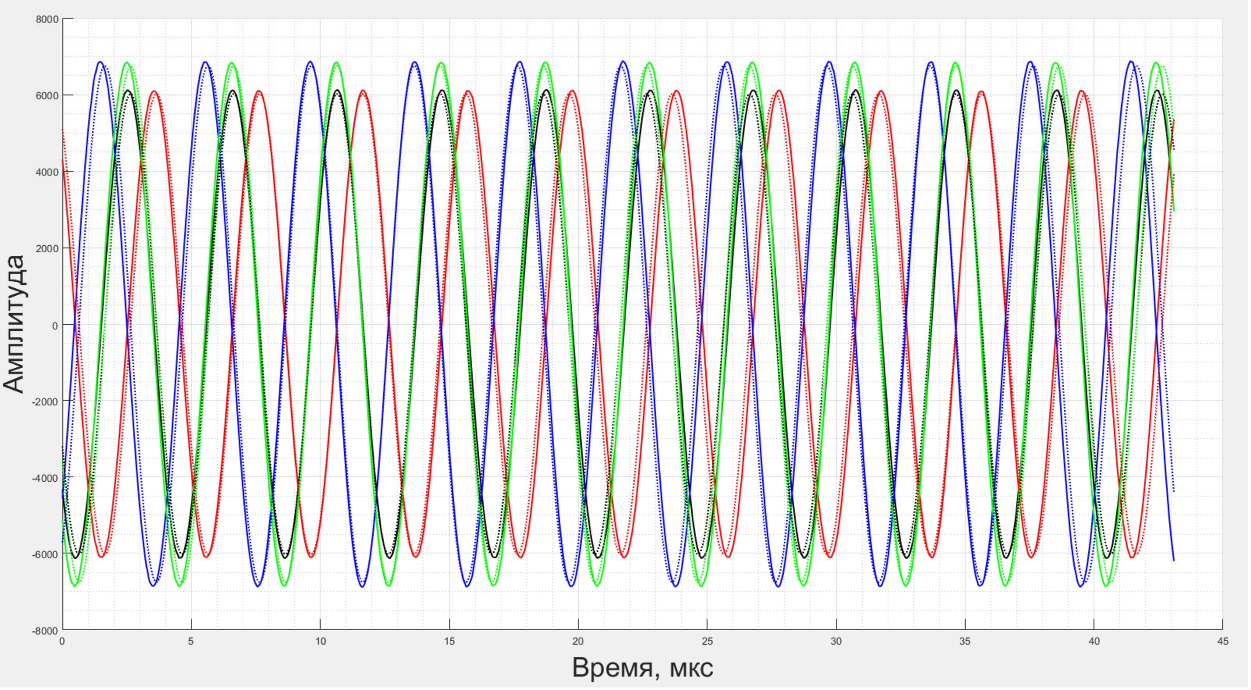

Рис.2. Выборка входных сигналов и сигналы, построенные по оценочным параметрам в интервале от 0 до 45 мкс

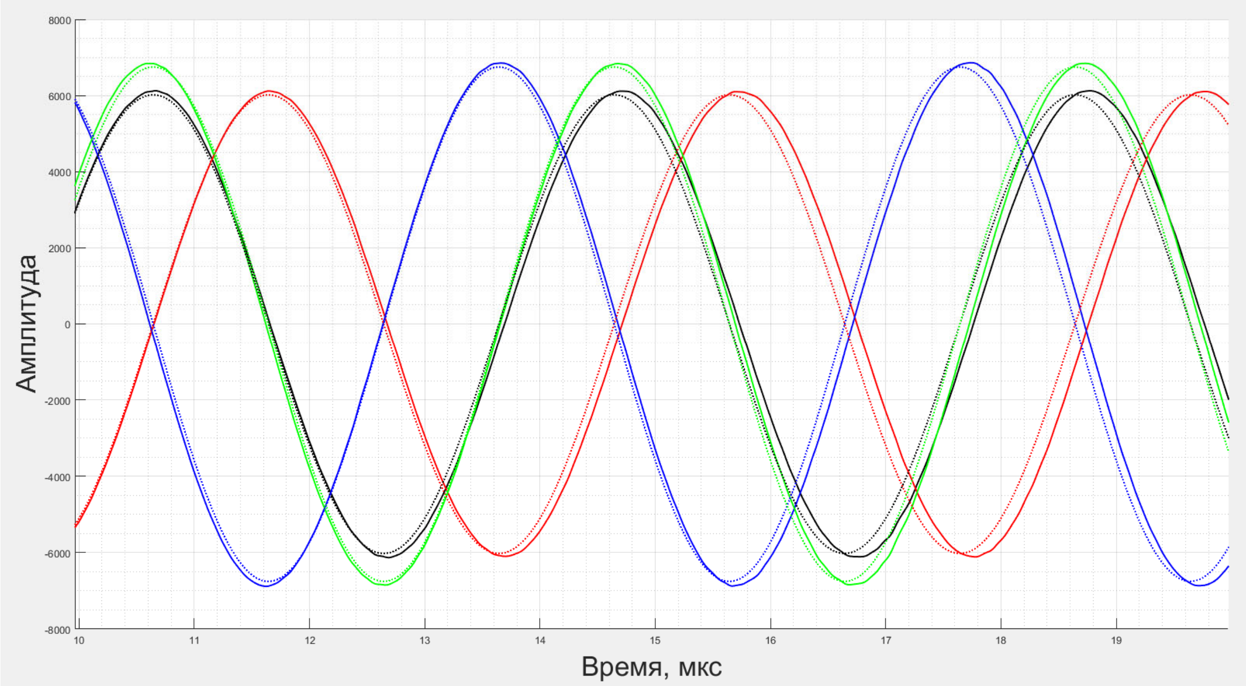

Рис.3. Выборка входных сигналов и сигналы, построенные по оценочным параметрам в интервале от 10 до 20 мкс

Дисперсия ошибки для полученной оценки $D_{\triangle\varphi} = 1.0119 \times 10^{-9}$

Приложение 1

Код программы MATLAB

```
function Main()
    close all; clear all;

    %% Задание параметров
    M = 2048;
    fs = 47.5e6;
    ts = 1 / fs;
    k = (0:M-1).';
    t = ts*(0:M-1).';
    n = 4;
    sigma = 10;

    %% Формирование наблюдения
    file = fopen('Input_Y0toT.txt');
    Y = [];
    while (~feof(file))
        scan = fscanf (file, '%f %f %f %f', [4 M]);
        Y = [Y; scan];
    end
    fclose(file);
    Y = Y';
    for i = 1:M
        Y1(1,i) = Y(i,1);
        Y2(1,i) = Y(i,2);
        Y3(1,i) = Y(i,3);
        Y4(1,i) = Y(i,4);
    end
```

```
%% Начальное приближение
A1 = 6100;
A2 = 6800;
f = 0.25e6;
omega = 2 * pi * f;
phi0 = - (1.25 * pi);
delta_phi = - (1.5 * pi);
lambda = [A1 A2 omega phi0 delta_phi];
lambda_fist = lambda;

%% Отношение правдоподобия
for i = 2:12
%while ((lambda_old - lambda) > (1e-5))
    for k = 1:M
    % Первые производные по параметрам
    d_lambda_1(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (cos(lambda(3) * k * ts +
lambda(4)) * Y1(k) + sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) * Y2(k));
    d_lambda_2(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (cos(lambda(3) * k * ts +
lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) + sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4) +
lambda(5)) * Y4(k));
    d_lambda_3(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(1) * k * ts *
sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) * Y1(k) + lambda(1) * k * ts *
cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) * Y2(k) - lambda(2) * k * ts *
sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) + lambda(2) * k * ts
* cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
    d_lambda_4(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(1) * sin(lambda(3) * k
* ts + lambda(4)) * Y1(k) + lambda(1) * cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) *
Y2(k) - lambda(2) * sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) +
lambda(2) * cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
    d_lambda_5(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(2) * sin(lambda(3) * k
* ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) + lambda(2) * cos(lambda(3) * k * ts +
lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
    % Вторые производные по параметрам
    % Первый столбец матрицы
    dd_lambda_11(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (-1);
    dd_lambda_21(k) = 0;
    dd_lambda_31(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- k * ts * sin(lambda(3) * k *
ts + lambda(4)) * Y1(k) + k * ts * cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) *
Y2(k));
    dd_lambda_41(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- sin(lambda(3) * k * ts +
lambda(4)) * Y1(k) + cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) * Y2(k));
    dd_lambda_51(k) = 0;

    % Второй столбец матрицы
    dd_lambda_12(k) = dd_lambda_21(k);
    dd_lambda_22(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (-1);
    dd_lambda_32(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- k * ts * sin(lambda(3) * k *
ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) + k * ts * cos(lambda(3) * k * ts +
lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
    dd_lambda_42(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- sin(lambda(3) * k * ts +
lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) + cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4) +
lambda(5)) * Y4(k));
    dd_lambda_52(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- sin(lambda(3) * k * ts +
lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) + cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4) +
lambda(5)) * Y4(k));

    % Третий столбец матрицы
    dd_lambda_13(k) = dd_lambda_31(k);
    dd_lambda_23(k) = dd_lambda_32(k);
    dd_lambda_33(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(1) * ((k * ts) ^ 2) *
cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) * Y1(k) - lambda(1) * ((k * ts) ^ 2) *
sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) * Y2(k)- lambda(2) * ((k * ts) ^ 2) *
```

```
cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) - lambda(2) * ((k *
ts) ^ 2) * sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
        dd_lambda_43(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(1) * k * ts *
cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) * Y1(k) - lambda(1) * k * ts *
sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4)) * Y2(k) - lambda(2) * k * ts *
cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) - lambda(2) * k * ts
* sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
        dd_lambda_53(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(2) * k * ts *
cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) - lambda(2) * k * ts
* sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));

        % Четвертый столбец матрицы
        dd_lambda_14(k) = dd_lambda_41(k);
        dd_lambda_24(k) = dd_lambda_42(k);
        dd_lambda_34(k) = dd_lambda_43(k);
        dd_lambda_44(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(1) * cos(lambda(3) *
k * ts + lambda(4)) * Y1(k) - lambda(1) * sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4))
* Y2(k) - lambda(2) * cos(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k)
- lambda(2) * sin(lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
        dd_lambda_54(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(2) * cos(lambda(3) *
k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) - lambda(2) * sin(lambda(3) * k * ts
+ lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
        % Пятый столбец матрицы
        dd_lambda_15(k) = dd_lambda_51(k);
        dd_lambda_25(k) = dd_lambda_52(k);
        dd_lambda_35(k) = dd_lambda_53(k);
        dd_lambda_45(k) = dd_lambda_54(k);
        dd_lambda_55(k) = (1 / (sigma ^ 2)) * (- lambda(2) * cos(lambda(3) *
k * ts + lambda(4) + lambda(5)) * Y3(k) - lambda(2) * sin(lambda(3) * k * ts
+ lambda(4) + lambda(5)) * Y4(k));
        end

    d_lambda = [(sum(d_lambda_1) - (M * lambda(1) / (sigma ^ 2)))
(sum(d_lambda_2) - (M * lambda(2) / (sigma ^ 2))) sum(d_lambda_3)
sum(d_lambda_4) sum(d_lambda_5)];
    dd_lambda = [sum(dd_lambda_11) sum(dd_lambda_12) sum(dd_lambda_13)
sum(dd_lambda_14) sum(dd_lambda_15);...
                 sum(dd_lambda_21) sum(dd_lambda_22) sum(dd_lambda_23)
sum(dd_lambda_24) sum(dd_lambda_25);...
                 sum(dd_lambda_31) sum(dd_lambda_32) sum(dd_lambda_33)
sum(dd_lambda_34) sum(dd_lambda_35);...
                 sum(dd_lambda_41) sum(dd_lambda_42) sum(dd_lambda_43)
sum(dd_lambda_44) sum(dd_lambda_45);...
                 sum(dd_lambda_51) sum(dd_lambda_52) sum(dd_lambda_53)
sum(dd_lambda_54) sum(dd_lambda_55)];

    lambda_old = lambda;
    u_d = d_lambda * inv(dd_lambda);
    lambda = lambda - u_d;
    end

    %% Матрица Рыбака
        J44 = M * ((lambda(1) ^ 2) + (lambda(2) ^ 2));
        J55 = M * ((lambda(1) ^ 2) + (lambda(2) ^ 2));

    for k = 1:M
        J33(k) = ((k * ts) ^ 2) * ((lambda(1) ^ 2) + (lambda(2) ^ 2));
        J43(k) = (k * ts) * ((lambda(1) ^ 2) + (lambda(2) ^ 2));
        J53(k) = (k * ts) * ((lambda(2) ^ 2));
    end

    J = (1 / (sigma ^ 2)) * [M 0 0 0 0;...
                             0 M 0 0 0;...
```

```
                                        0 0 sum(J33) sum(J43) sum(J53);...
                                        0 0 sum(J43) J44 J55;...
                                        0 0 sum(J53) J55 J55];
    %% Граница Крамера-Рао
    D = -inv(J);
    D_delta_phi = D(5,5)

    for k = 1:M
        S1(k) = lambda(1) * cos( lambda(3) * k * ts + lambda(4) );
        S2(k) = lambda(1) * sin( lambda(3) * k * ts + lambda(4) );
        S3(k) = lambda(2) * cos( lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)
);
        S4(k) = lambda(2) * sin( lambda(3) * k * ts + lambda(4) + lambda(5)
);
    end

    t = t * 1e6;
    %% Графики
    figure
    hold on; grid on; grid minor;
    plot(t,Y1,'Color','black','LineWidth',1.5);
    plot(t,Y2,'Color','red','LineWidth',1.5);
    plot(t,Y3,'Color','blue','LineWidth',1.5);
    plot(t,Y4,'Color','green','LineWidth',1.5);
    plot(t,S1,':','Color','black','LineWidth',1.5);
    plot(t,S2,':','Color','red','LineWidth',1.5);
    plot(t,S3,':','Color','blue','LineWidth',1.5);
    plot(t,S4,':','Color','green','LineWidth',1.5);
    %title('title','FontSize',24);
    xlabel('Время, мкс','FontSize',26);
    ylabel('Амплитуда','FontSize',26);
    pause(0.1);
end
```

```
>> Main

D_delta_phi =

  1.0119e-09

>>
```