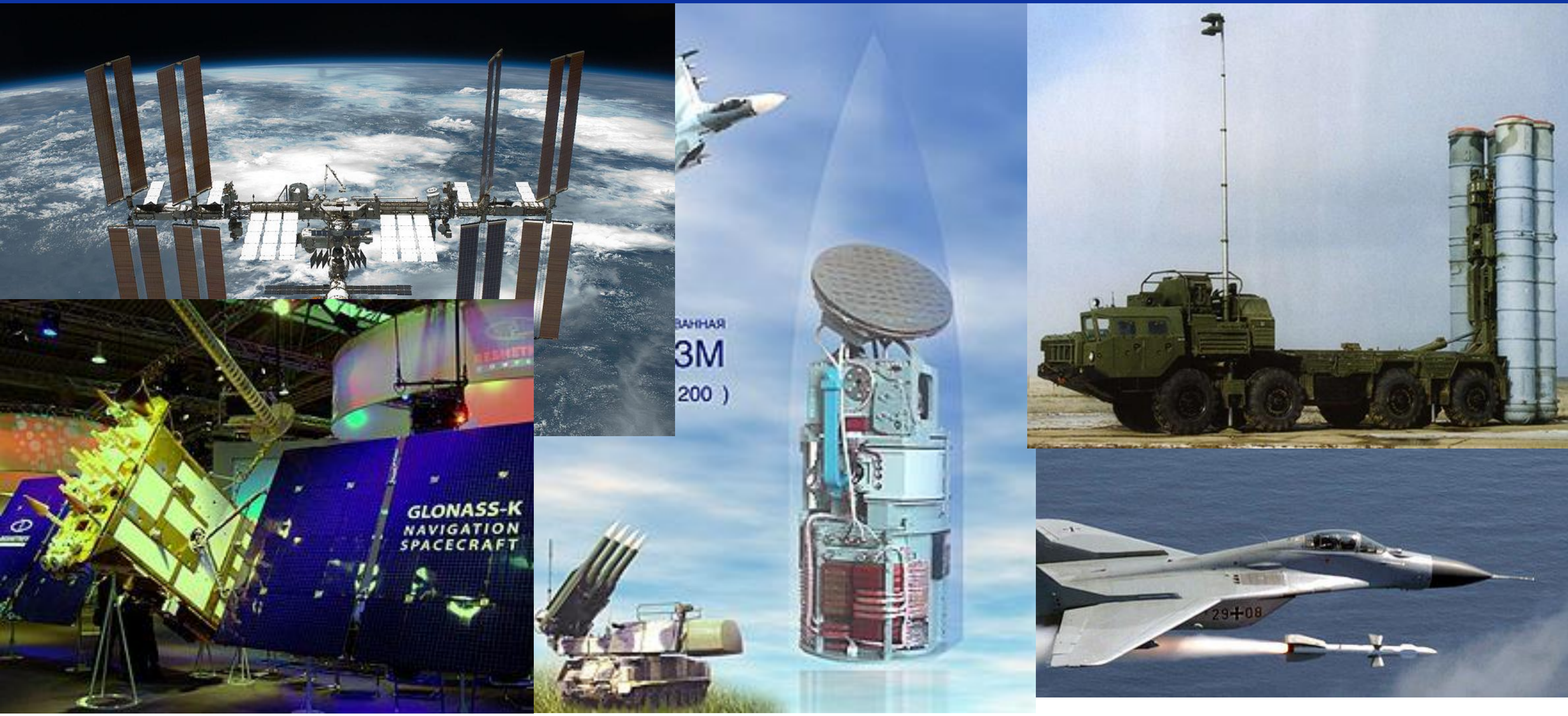
Национальный исследовательский университет МЭИ



ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОСИСТЕМ И КОМПЛЕКСОВ РАДИОУПРАВЛЕНИЯ

Пр4. Анализ нелинейных следящих систем методом статистической линеаризации

1. Критерии статистической эквивалентности

Метод предполагает замену ***нелинейного безынерционного элемента (НЭ)*** в следящей системе на ***линейный эквивалент (ЛЭ)***. Замена не является однозначной и может быть справедлива в ограниченных условиях, которые определяются критериями эквивалентности.

$$x(t) = m_x(t) + x^o(t) \longrightarrow \boxed{\varphi(x)} \longrightarrow v(t) = \varphi(x(t)) = m_v(t) + v^o(t)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = m_x(t) + x^o(t) \longrightarrow \boxed{\text{ЛЭ}} \longrightarrow u(t) = k_0 m_x(t) + k_1 x^o(t)$$

Критерии эквивалентности:

1. Равенство м.о. и дисперсии на выходах НЭ и ЛЭ

$$m_v(t) = k_0 m_x(t);$$

$$\sigma_v^2(t) = k_1^2 \sigma_x^2(t);$$

$$\Rightarrow$$

$$k_0 = \frac{m_v}{m_x} = \frac{1}{m_x}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W(x)\,dx$$

$$k_1 = \frac{\sigma_v}{\sigma_x} = \frac{1}{\sigma_x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) W(x)\,dx - m_v^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

2. Минимум среднего квадрата разности процессов на выходах НЭ и ЛЭ

$$M\{[v(t)-u(t)]^2\}\to \min$$

$$M\{[v(t)-u(t)]^2\}=\overline{v^2}+\overline{u^2}-2\overline{vu}=m_v^2+\sigma_v^2+k_0^2 m^2{}_x+k_1^2\sigma_x^2-2k_0 m_x m_v-2k_1\overline{vx^0}$$

$$\frac{\partial M\{[v(t)-u(t)]^2\}}{\partial k_0}=2k_0 m^2{}_x-2m_x m_v=0 \quad\Rightarrow\quad k_0=\frac{m_v}{m_x}=\frac{1}{m_x}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)W(x)dx$$

$$\frac{\partial M\{[v(t)-u(t)]^2\}}{\partial k_1}=2k_1\sigma_x^2-\overline{2vx^o}=0 \quad\Rightarrow\quad k_1=\frac{\overline{vx^o}}{\sigma_x^2}=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)\varphi(x)W(x)dx$$

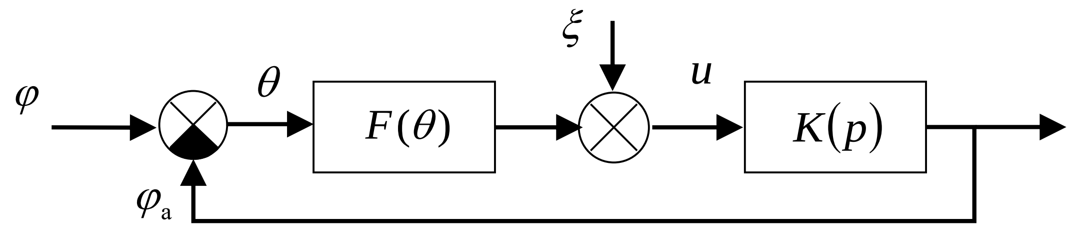
Использование метода статистической линеаризации наиболее просто выполняется для стационарного режима. Коэффициенты статистической линеаризации зависят от вида нелинейной функции и закона распределения входного процесса. Обычно закон распределения полагают нормальным

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

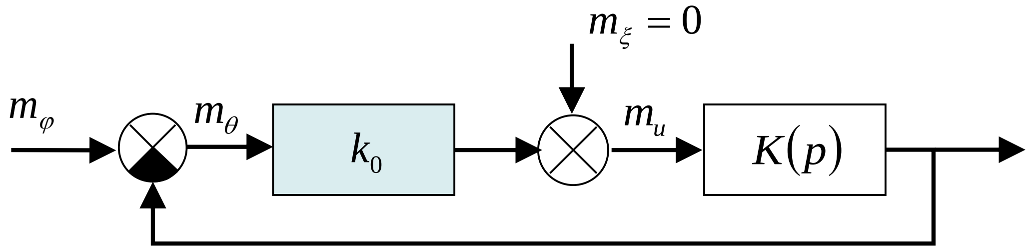
$$k_0=k_0(m_x,\sigma_x),$$
$$k_1=k_1(m_x,\sigma_x),$$

2. Анализ стационарных режимов следящих систем

Поскольку в стационарном режиме m_x, σ_x^2, $\overline{vx^0}$ - постоянны, то исходная нелинейная следящая система разделяется на 2 системы с постоянными параметрами.



1. Анализ математического ожидания ошибки слежения



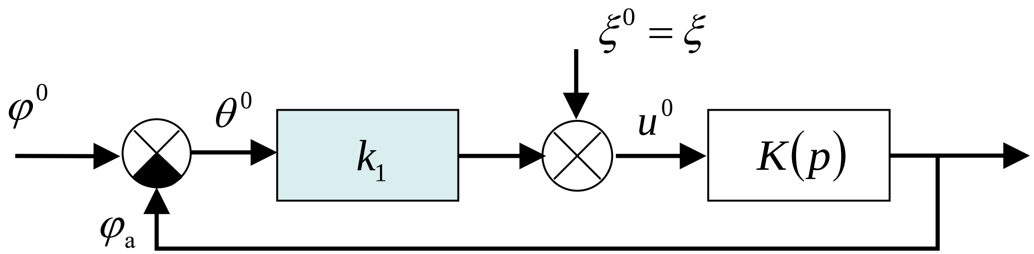
$$m_\theta = K_{\varphi\theta}(p) m_\varphi$$

$$K_{\varphi\theta}(p) = \frac{1}{1 + k_0(m_\theta, \sigma_\theta^2) K(p)}$$

$$m_{\theta\,\text{уст}} = \lim_{s\to 0} s K_{\varphi\theta}(s) \Phi(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\Phi(s)}{1 + k_0(m_\theta, \sigma_\theta^2) K(s)}$$

$$\Phi(s) = L\{m_\varphi(t)\}$$

2. Анализ случайной составляющей ошибки слежения



Полагаем $\varphi^0 = 0; \quad \xi^0 = \xi$

$$K_{\xi\theta}(p) = -\frac{K(p)}{1 + k_1(m_\theta, \sigma_\theta^2)K(p)}$$

$$\sigma_\theta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\,|K_{\xi\theta}(j\omega)|^2\,d\omega = \left.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\frac{|K(j\omega)|^2\,d\omega}{|1 + k_1(m_\theta, \sigma_\theta^2)K(j\omega)|^2}\right|_{S_\xi(\omega) = S_0} = S_0 J_n$$

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\frac{B(-j\omega)}{A(-j\omega)}\,d\omega \qquad |K(j\omega)|^2 = K(j\omega)K(-j\omega)$$

$$A(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0$$

$$B(j\omega) = b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + b_{n-2}(j\omega)^{n-2} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0$$

$$J_1 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1} \qquad J_2 = \frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2} \qquad J_3 = \frac{b_2^2a_0a_1 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3 + b_0^2a_2a_3}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}$$

В итоге получаем систему нелинейных уравнений, которую необходимо решить относительно m_θ, σ_θ^2.

$$m_\theta = f_1(k_0) = f_1(k_0(m_\theta, \sigma_\theta))$$

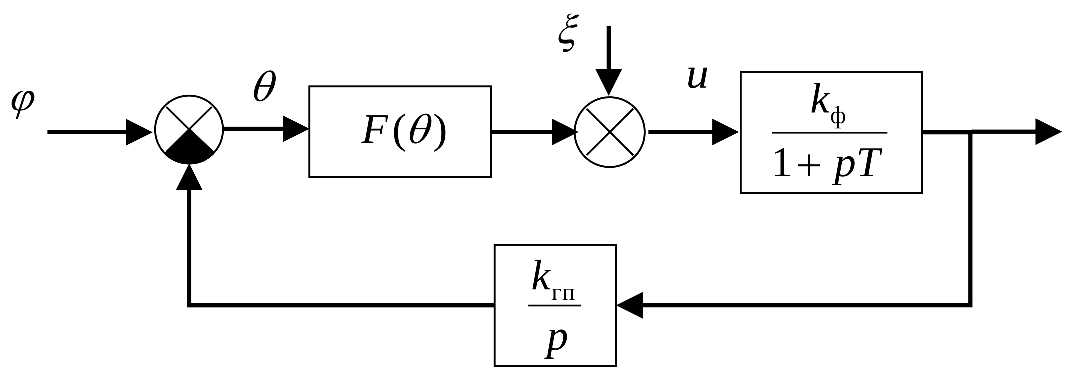
$$\sigma_\theta = f_2(k_1) = f_2(k_1(m_\theta, \sigma_\theta))$$

Решение может быть найдено числовыми или графическими методами.

Пример

Дано:

1. структурная схема следящего угломера и вид ДХ
2. входное воздействие
   $$\varphi(t) = a_1 t;$$
3. шум белый со спектральной плотностью
   $$S_\xi(\omega) = S_0;$$
4. Фильтры цепи обратной связи
   $$K(p) = \frac{k_ф}{1 + pT} \frac{k_{гп}}{p}$$

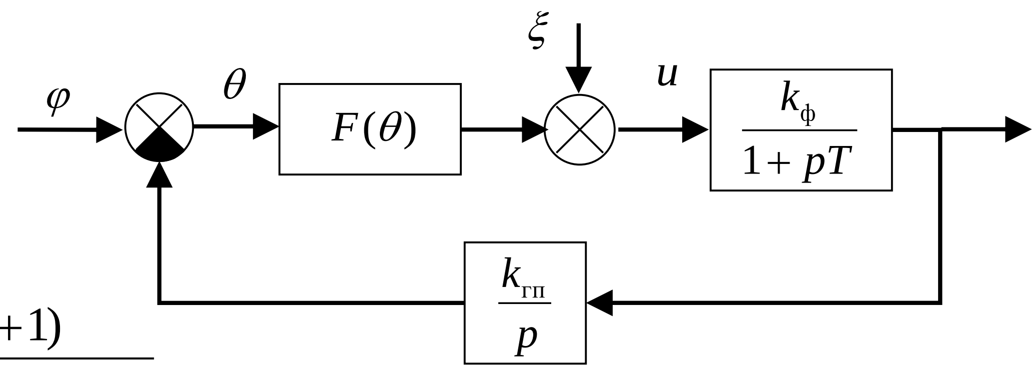


Найти:

Зависимости м.о. и дисперсии ошибки слежения от уровня шума $m_\theta(S_0)$, $\sigma_\theta^2(S_0)$

Решение:

1) $\varphi(t) = a_1 t \quad \Rightarrow \quad \Phi(s) = L\{a_1 \cdot t\} = \dfrac{a_1}{s^2}$



$$K(p) = \frac{k_{\text{ф}}}{1+pT}\frac{k_{\text{гп}}}{p} \quad \Rightarrow$$

$$K_{\varphi\theta}(p) = \frac{1}{1 + k_0 \dfrac{k_{\text{ф}}k_{\text{гп}}}{p(pT+1)}} = \frac{p(pT+1)}{p(pT+1) + k_0 k_{\text{ф}} k_{\text{гп}}}$$

$$m_{\theta уст} = \lim_{s\to 0} s\frac{a_1}{s^2}\frac{s(sT+1)}{s(sT+1) + k_0 k_{\text{ф}} k_{\text{гп}}};$$

$$\boxed{m_\theta = \frac{a_1}{k_0(m_\theta, \sigma_\theta) k_{\text{ф}} k_{\text{гп}}}}$$

2) $K_{\xi\theta}(p) = \dfrac{k_{\text{ф}} k_{\text{гп}}}{p(pT+1) + k_1 k_{\text{ф}} k_{\text{гп}}}$

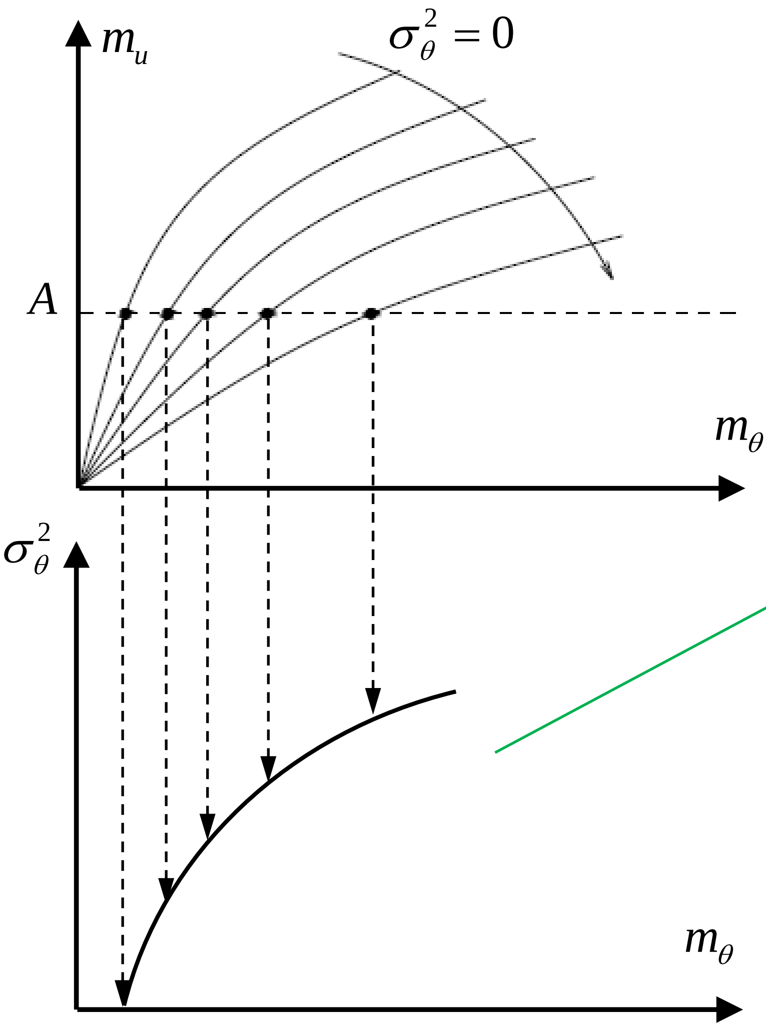
$$\sigma_\theta^2 = \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{\text{ф}}^2 k_{\text{гп}}^2 d\omega}{[(j\omega)^2 T + (j\omega) + k_1 k_{\text{ф}} k_{\text{гп}}][(-j\omega)^2 T + (-j\omega) + k_1 k_{\text{ф}} k_{\text{гп}}]}$$

$$\boxed{\sigma_\theta^2 = \frac{S_0}{2}\frac{k_{\text{ф}} k_{\text{гп}}}{k_1(m_\theta, \sigma_\theta)}}$$

3) Графическое решение системы уравнений

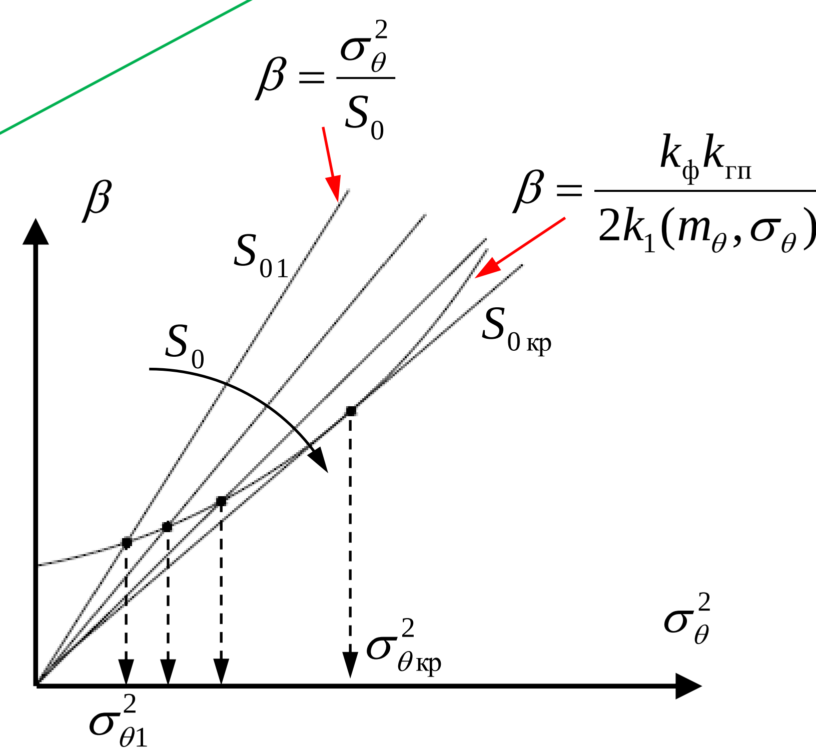
$$\begin{cases} m_\theta = \dfrac{a_1}{k_0(m_\theta,\sigma_\theta)k_{\text{ф}}k_{\text{гп}}} \\ \sigma_\theta^2 = \dfrac{S_0}{2}\dfrac{k_{\text{ф}}k_{\text{гп}}}{k_1(m_\theta,\sigma_\theta)} \end{cases}$$

$$m_u = m_\theta k_0(m_\theta,\sigma_\theta) = \frac{a_1}{k_{\text{ф}}k_{\text{гп}}} \overset{\text{об}}{=} A = const$$

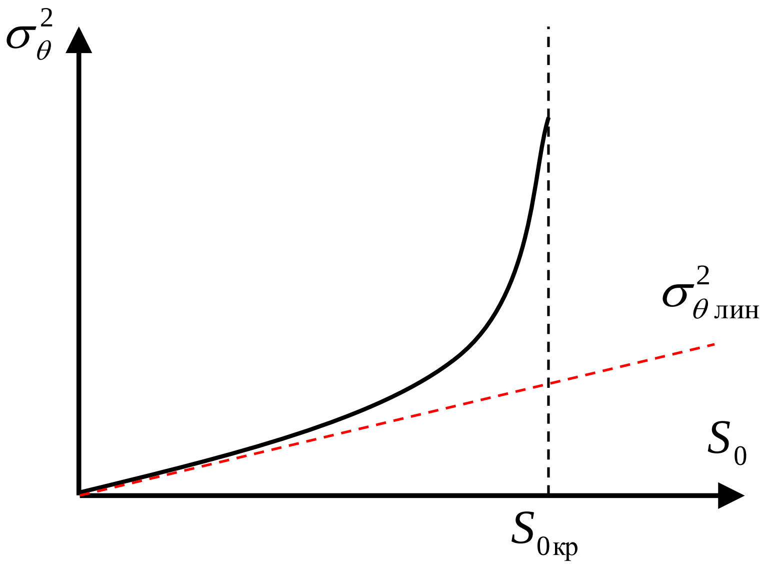


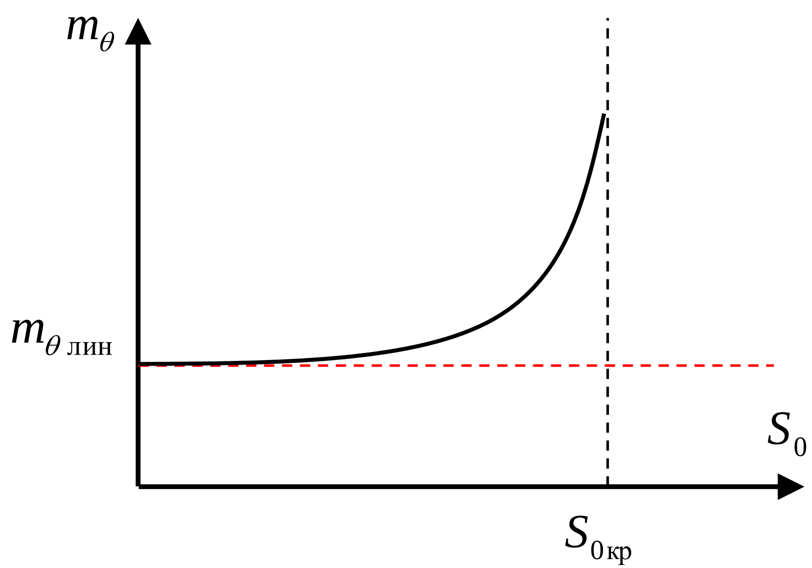
$$\beta = \frac{\sigma_\theta^2}{S_0} = \frac{k_{\text{ф}}k_{\text{гп}}}{2k_1(m_\theta,\sigma_\theta)}$$

$\Rightarrow$



Результат решения



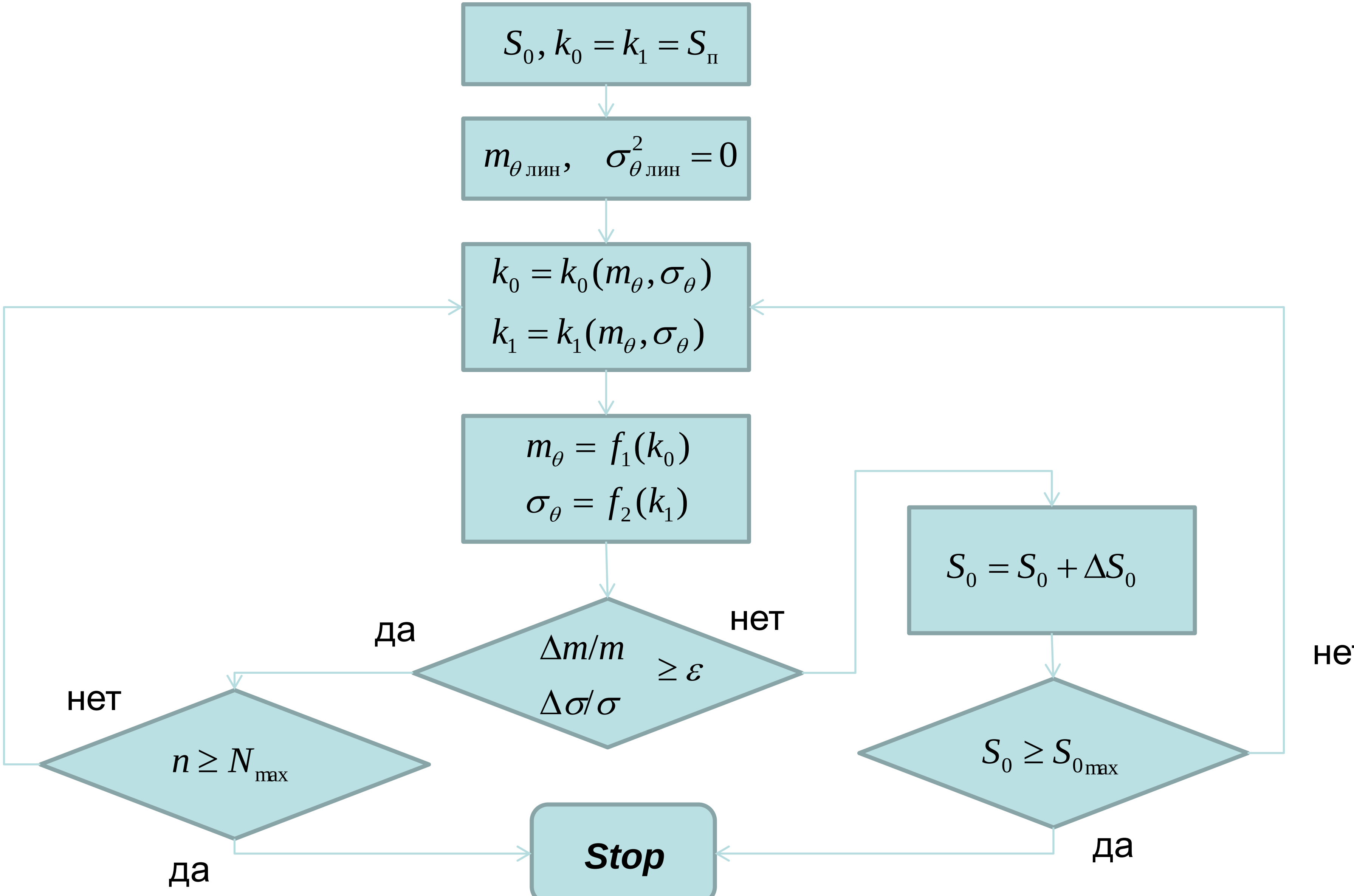


$m_{\theta\,\text{лин}}$

$\sigma^2_{\theta\,\text{лин}} = S_0 2\Delta F_\text{ш} \left| K_{\xi\theta}(0) \right|^2$ получены при линеаризации ДХ $F(\theta) = S_\text{п}\theta$

$$S_\text{п} = \frac{dF(\theta)}{d\theta}$$

4) Численное решение системы уравнений



Спасибо за внимание!