

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОСИСТЕМ И КОМПЛЕКСОВ РАДИОУПРАВЛЕНИЯ

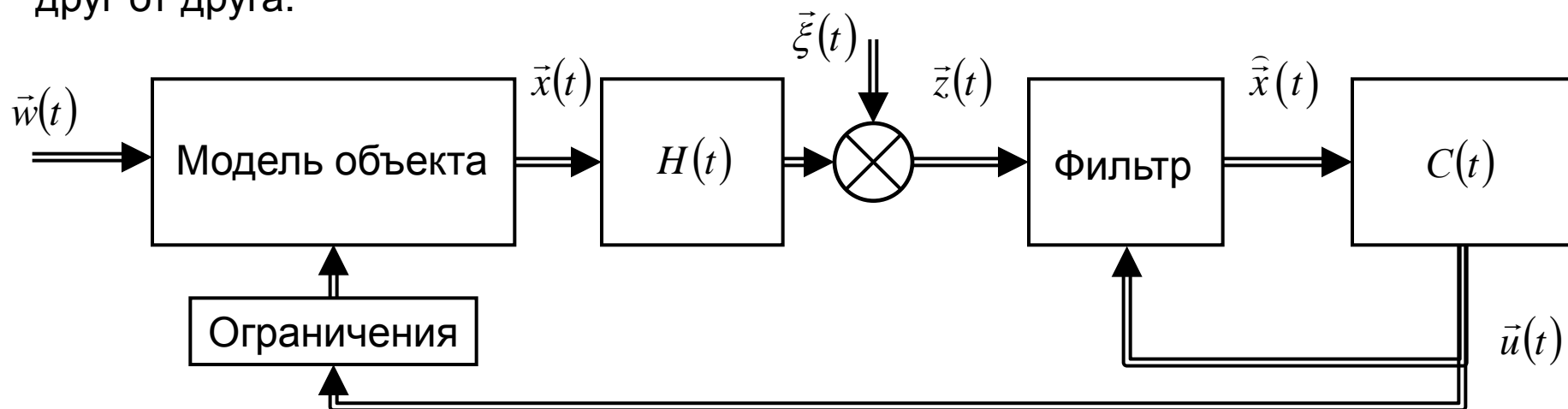
### 15. Синтез оптимальных измерителей РЭСУ

## 15.1. Введение. Теорема разделения.

**Алгоритм оптимального линейного стохастического управления разделяется на две части:**

1. Оптимальный **фильтр** для получения оценок вектора состояния
2. Оптимальный детерминированный **регулятор**

Задачи синтеза **фильтра** и **регулятора** могут ставиться и решаться отдельно друг от друга.



## 15.2. Постановка задачи синтеза оптимального линейного непрерывного фильтра

### 15.2.1 Уравнение состояния объекта, модель объекта, модель сообщения

Предполагается, что интересующий нас процесс представлен компонентом многомерного марковского процесса, задаваемого системой линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(t) \cdot \vec{x}(t) + B(t) \cdot \vec{u}(t) + G(t) \cdot \vec{w}(t)$$

где  $\vec{x}(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  - вектор состояния,  $\vec{u}(t) = [u_1, u_2, \dots, u_l]^T$  - вектор управления

$\vec{w}(t) = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$  - вектор случайных возмущений  $\overline{\vec{w}(t)} = 0$ ,  $\overline{\vec{w}(t) \cdot \vec{w}^T(t - \tau)} = Q(t) \cdot \delta(\tau)$

### 15.2.2 Уравнение наблюдения (уравнение измерений)

$$\vec{z}(t) = H(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{\xi}(t)$$

$\vec{z}(t) = [z_1, z_2, \dots, z_r]^T$  - вектор наблюдений

$\vec{\xi}(t) = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r]^T$  - шум наблюдений

$\overline{\vec{\xi}(t)} = 0$   $\overline{\vec{\xi}(t) \cdot \vec{\xi}^T(t - \tau)} = R(t) \cdot \delta(\tau)$

### 15.2.3 Начальные условия

$$\overline{\vec{x}(0)},$$

$$P(0) = \overline{(\vec{x}(0) - \overline{\vec{x}(0)}) \cdot (\vec{x}(0) - \overline{\vec{x}(0)})^T}$$

### 15.3. Решение задачи оптимальной линейной фильтрации

Решение задачи оптимальной линейной фильтрации заключается в нахождении алгоритма, который используя наблюдения и априорную информацию (уравнение объекта и начальные условия), формирует несмещенную оценку вектора состояния с минимальной среднеквадратической ошибкой каждой составляющей в любой момент времени  $t$ .

#### 15.3.1 Алгоритм непрерывного фильтра Калмана (Калмана-Бюси)

Структура фильтра

$$\frac{d}{dt} \hat{\vec{x}}(t) = F(t) \cdot \hat{\vec{x}}(t) + B(t) \cdot \vec{u}(t) + K(t) \cdot [\vec{z}(t) - H(t) \cdot \hat{\vec{x}}(t)] ,$$

$$\hat{\vec{x}}(0) = \overline{\vec{x}(0)} ,$$

Алгоритм вычисления коэффициентов фильтра

$$K(t) = P(t) \cdot H^T(t) \cdot R^{-1}(t)$$

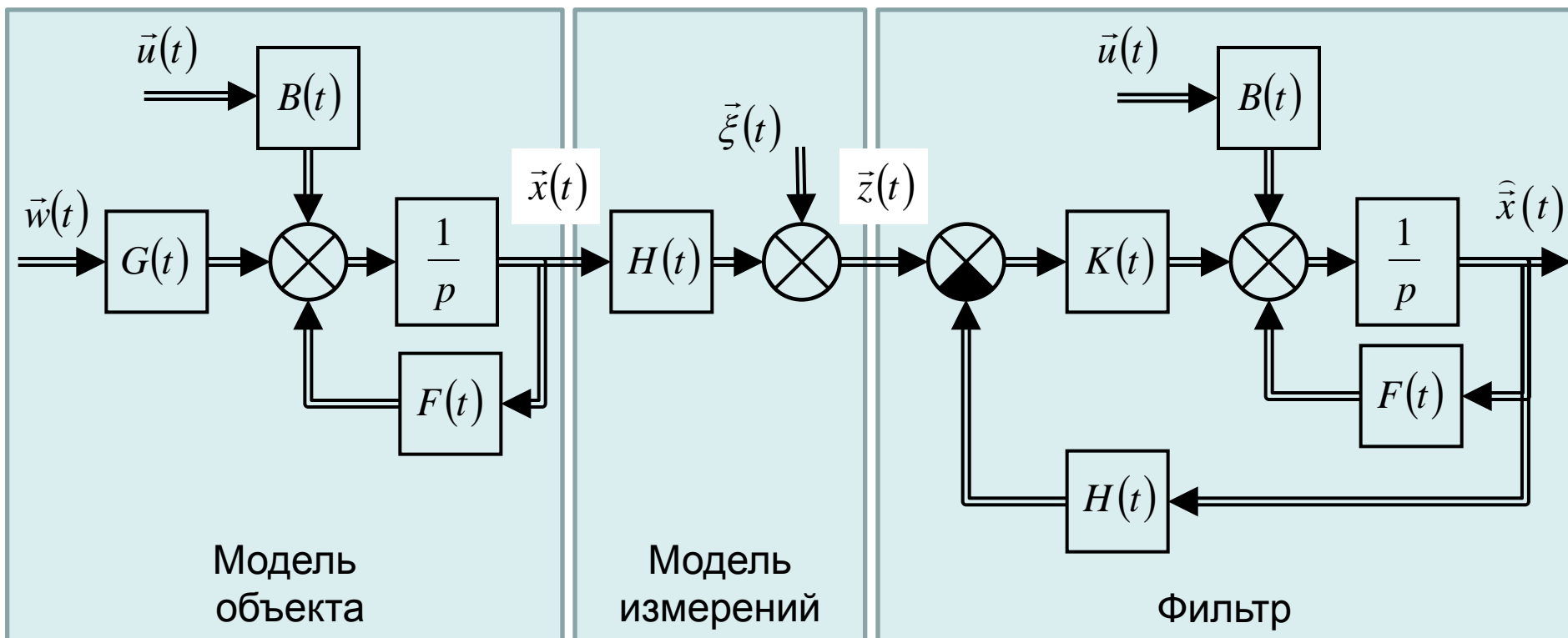
Уравнение Риккати - дисперсионное уравнение

$$\frac{dP(t)}{dt} = F(t) \cdot P(t) + P(t) \cdot F^T(t) + G(t) \cdot Q(t) \cdot G^T(t) - P(t) \cdot H^T(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot H(t) \cdot P(t)$$

#### 15.3.2 Стационарный режим

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0 , \quad F(t) \cdot P(t) + P(t) \cdot F^T(t) + G(t) \cdot Q(t) \cdot G^T(t) - P(t) \cdot H^T(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot H(t) \cdot P(t) = 0$$

## 15.3.3 Структурная схема фильтра



## 15.4. Синтез следящих измерителей одного параметра на основе фильтра Калмана

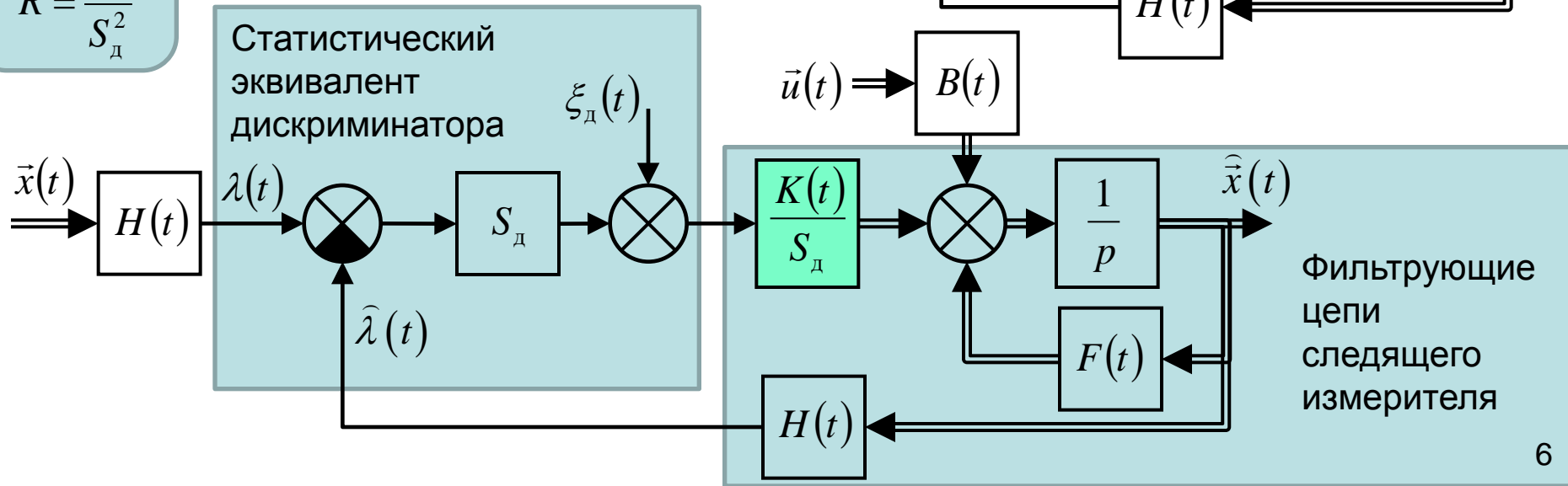
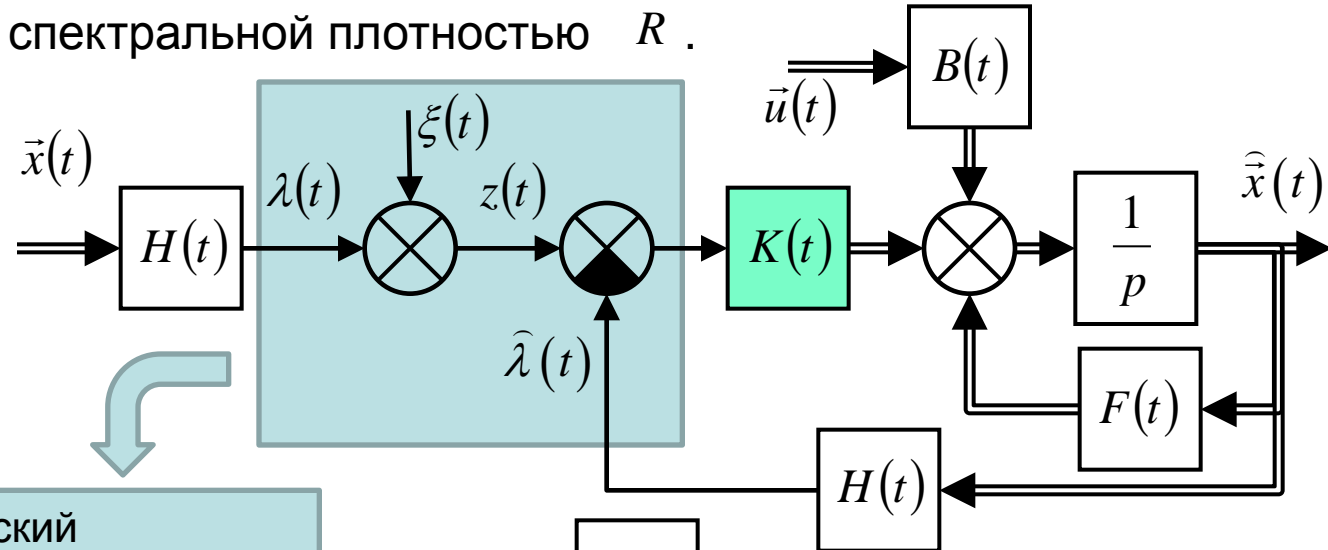
Рассмотрим случай измерения одномерного параметра  $\lambda = H(t) \cdot \vec{x}(t)$

**Модель измерения**  $z(t) = \lambda(t) + \xi(t)$ ,  
где  $\xi(t)$  белый шум со спектральной плотностью  $R$ .

**Структурная схема**  
фильтра и  
модели измерений

$$\xi(t) = \frac{\xi_d(t)}{S_d}$$

$$R = \frac{S_{\xi}}{S_d^2}$$



### 15.5. Комплексование измерителей РТСУ

Перспективный путь повышения точности измерений состоит в объединении различных по принципу действия измерителей в единую измерительную систему. Объединение измерителей и датчиков информации называют **комплексированием информации**, единую объединенную измерительную систему называют **комплексным измерителем (КИ)**.

В единую комплексную систему могут объединяться радиотехнические, оптоэлектронные, инерциальные, электромеханические и др. виды измерителей.

#### 15.5.1 Классификация комплексных измерителей

##### Использование (наличие) априорной информации об объекте

- КИ с полной априорной информацией об объекте,
- КИ с неполной априорной информацией об объекте

##### Чувствительность к модели информационного процесса

- Инвариантные КИ
- Неинвариантные КИ

##### Структура КИ

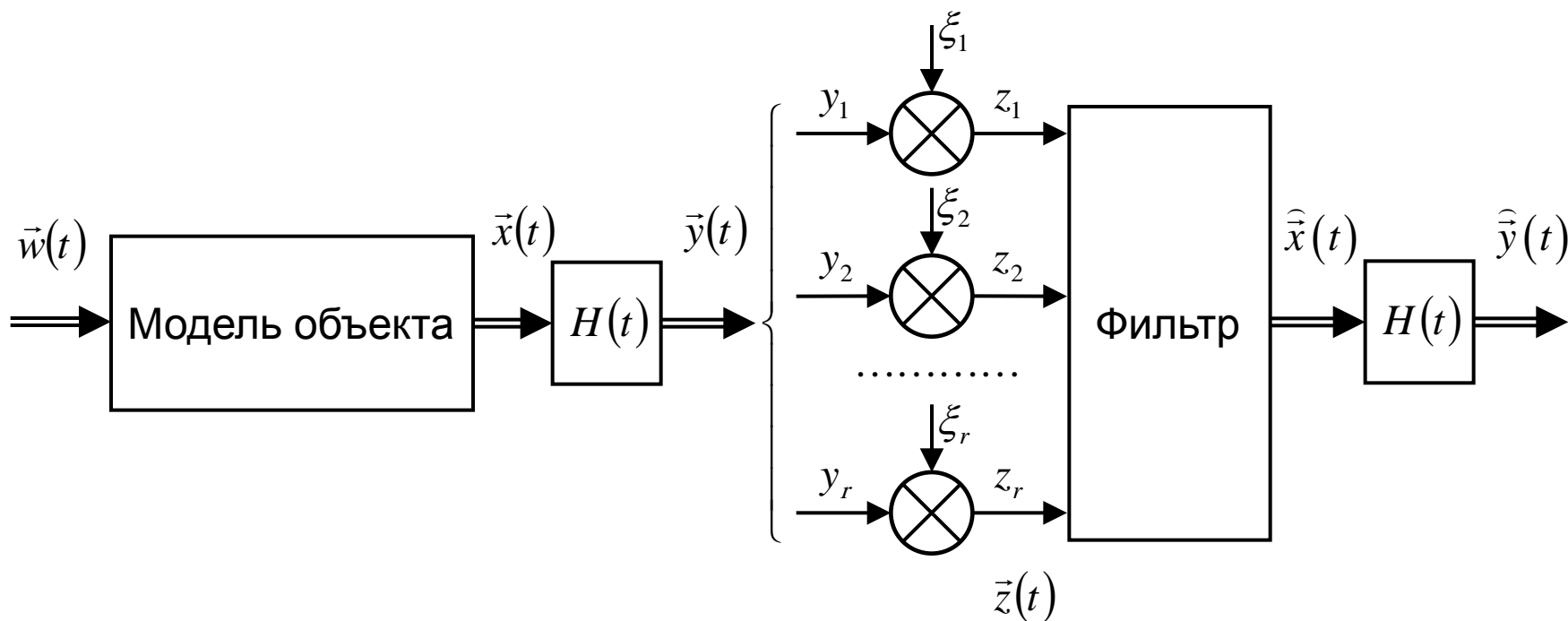
- Схема компенсации
- Схема фильтрации
- Схема коррекции



## 15.6. Синтез неинвариантных КИ с использованием полной априорной информации об объекте

Задача сводится к стандартной постановке задачи синтеза фильтра Калмана при многомерном измерении. Измеряемый процесс  $\vec{y}(t) = [y_1, y_2, \dots, y_r]^T$  совместно с шумом образует модель измерения

$$\vec{z}(t) = H(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{\xi}(t) = \vec{y}(t) + \vec{\xi}(t), \quad \vec{y}(t) = H(t) \cdot \vec{x}(t)$$





**Пример**

Рассмотрим задачу комплексирования измерений параметра и его производной (скорости): дальность-скорость, фаза-частота, скорость-ускорение.

Возьмем для определенности, комплексирование временного и частотного дискриминатора в КИ дальности  $D$  и скорости  $V$  объекта, перемещающегося под воздействием случайного ускорения  $a$ . Вектор состояния  $\vec{x}(t) = [D, V]^T$

**Модель объекта**      **Модель измерений**

$$\begin{cases} \frac{dD}{dt} = V \\ \frac{dV}{dt} = a \end{cases} \quad \begin{cases} z_D = D + \xi_D \\ z_V = V + \xi_V \end{cases} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_D \\ z_V \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} D \\ V \end{pmatrix}$$

где  $a, \xi_D, \xi_V$  - случайные процессы – «белые шумы» нулевым м.о. и спектральными плотностями  $Q, S_D, S_V$

Матрицы, задающие модель объекта и модель измерений

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} S_D & 0 \\ 0 & S_V \end{pmatrix}; \quad Q$$

**Алгоритм фильтра**

$$\begin{cases} \frac{d\hat{D}}{dt} = \hat{V} + K_{11}(z_D - \hat{D}) + K_{12}(z_V - \hat{V}); \\ \frac{d\hat{V}}{dt} = K_{21}(z_D - \hat{D}) + K_{22}(z_V - \hat{V}); \end{cases}$$

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix};$$

$$K_{11} = \frac{P_{11}}{S_D}; \quad K_{12} = \frac{P_{12}}{S_V};$$

$$K_{21} = \frac{P_{21}}{S_D}; \quad K_{22} = \frac{P_{22}}{S_V};$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \frac{dP_{11}}{dt} = 2P_{12} - \frac{P_{11}^2}{S_D} - \frac{P_{12}^2}{S_V} \\ \frac{dP_{12}}{dt} = P_{22} - \frac{P_{11}P_{12}}{S_D} - \frac{P_{12}P_{22}}{S_V} \\ \frac{dP_{22}}{dt} = Q - \frac{P_{12}^2}{S_D} - \frac{P_{22}^2}{S_V} \end{cases}$$

В установившемся режиме

$$P_{11} = \frac{\sqrt{\rho \cdot (2 + \rho \cdot b)}}{1 + \rho \cdot b} \cdot S_D, \quad P_{12} = \frac{\rho}{1 + \rho \cdot b} \cdot S_D, \quad P_{22} = \frac{\rho \cdot b \cdot \sqrt{\rho \cdot (2 + \rho \cdot b)}}{1 + \rho \cdot b} \cdot S_V,$$

$$\rho = \sqrt{Q/S_D}, \quad b = S_D/S_V.$$

## Структурная схема фильтра

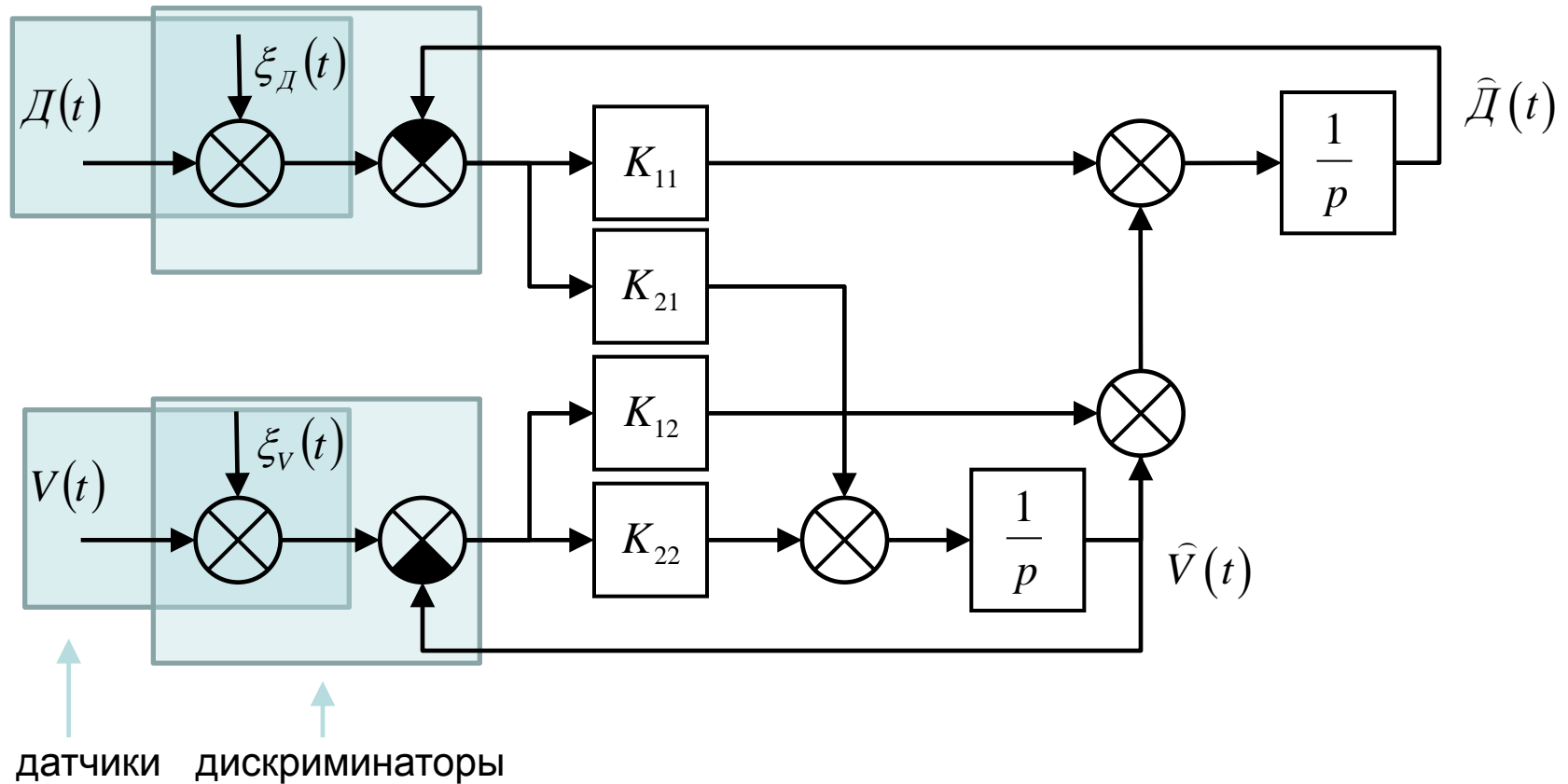
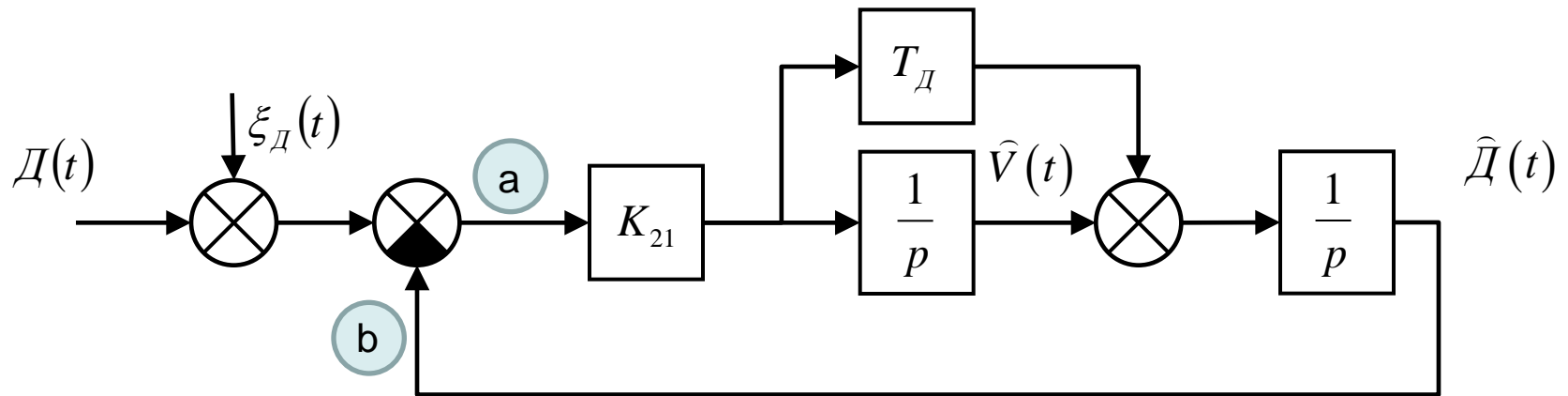


Схема со взаимной коррекцией

Частный случай при  $S_V \rightarrow \infty, \Rightarrow K_{12} \rightarrow 0, K_{22} \rightarrow 0,$

Некомплексированный дальномер



$$T_D = \frac{K_{11}}{K_{21}}, \quad K_{ab}(p) = K_{21} \frac{pT + 1}{p^2},$$

### 15.7. Инвариантные КИ

Комплексные измерители, в которых ошибки одного или нескольких выходов не зависят от характеристик одного или нескольких входных возмущений, называются **инвариантными**.

#### Достоинства инвариантных КИ

- Возможность оценивать параметры объекта при отсутствии полной априорной информации об объекте.
- Меньшая размерность измерительной системы.
- В инвариантных системах отсутствуют динамические ошибки.

#### Недостатки

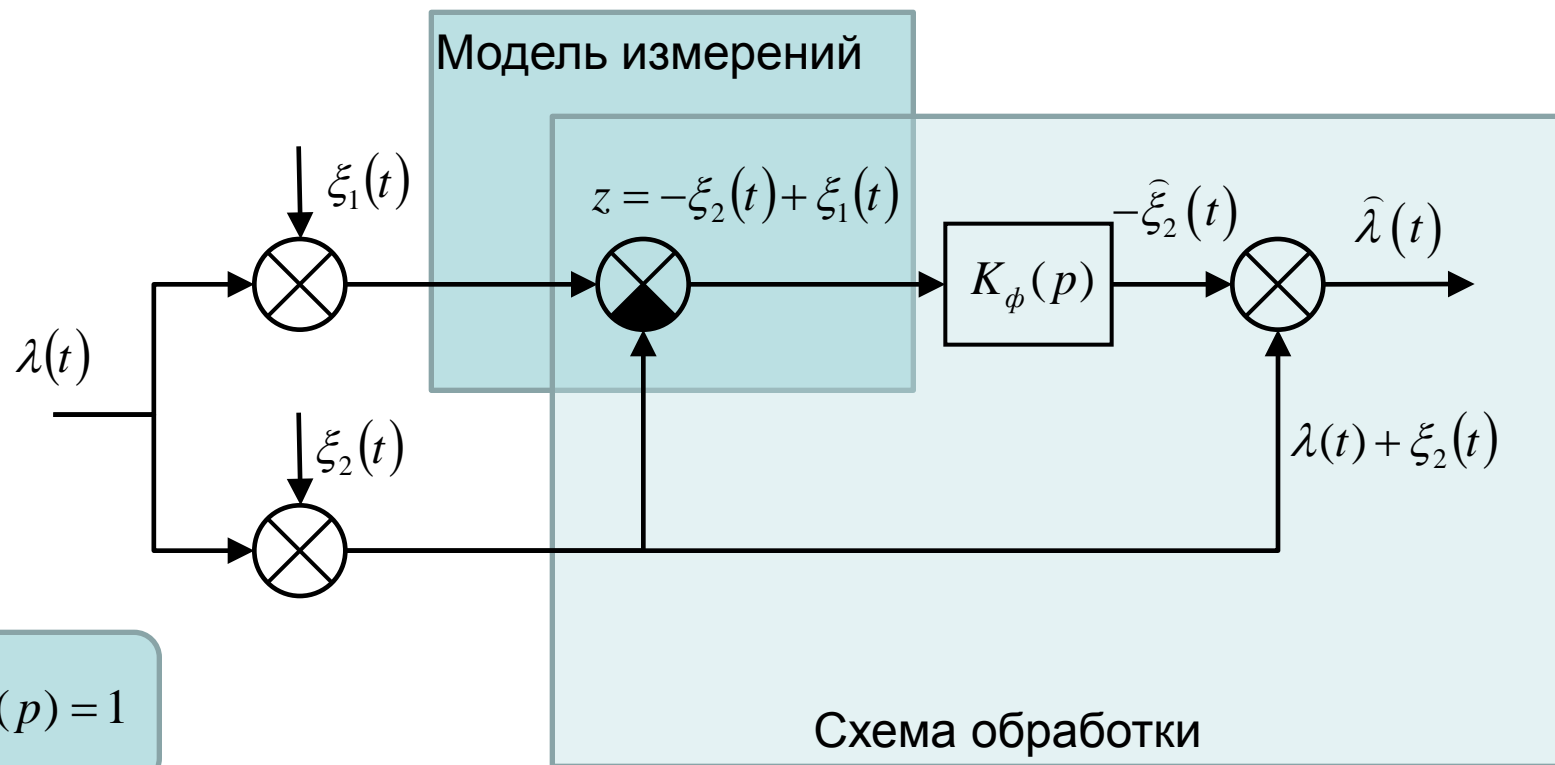
- Не использование априорной информации увеличивает ошибки измерителя.

### 15.7.1. Инвариантный КИ на основе схемы компенсации

Обычно используется при наличии нескольких измерителей одного параметра, причём ошибки измерений имеют существенные различия спектров шумов. Пусть имеем два измерителя полезного сообщения  $\lambda(t)$ , информация о котором отсутствует.

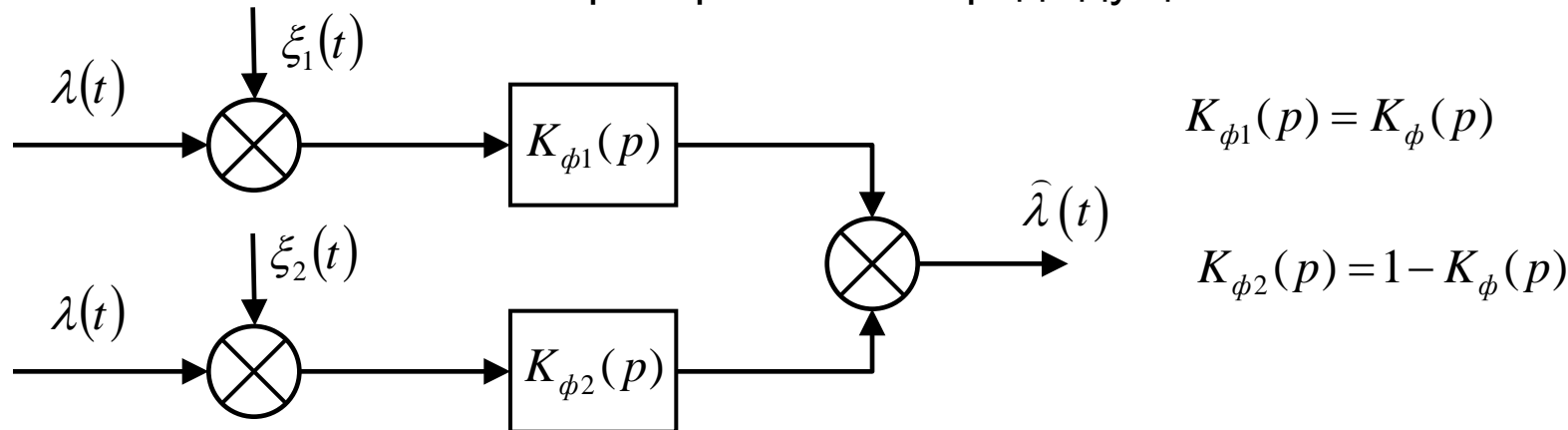
$$z_1 = \lambda + \xi_1(t), \quad \xi_1 - \text{ широкополосный процесс — белый шум,}$$

$$z_2 = \lambda + \xi_2(t), \quad \xi_2 - \text{ узкополосный процесс.}$$

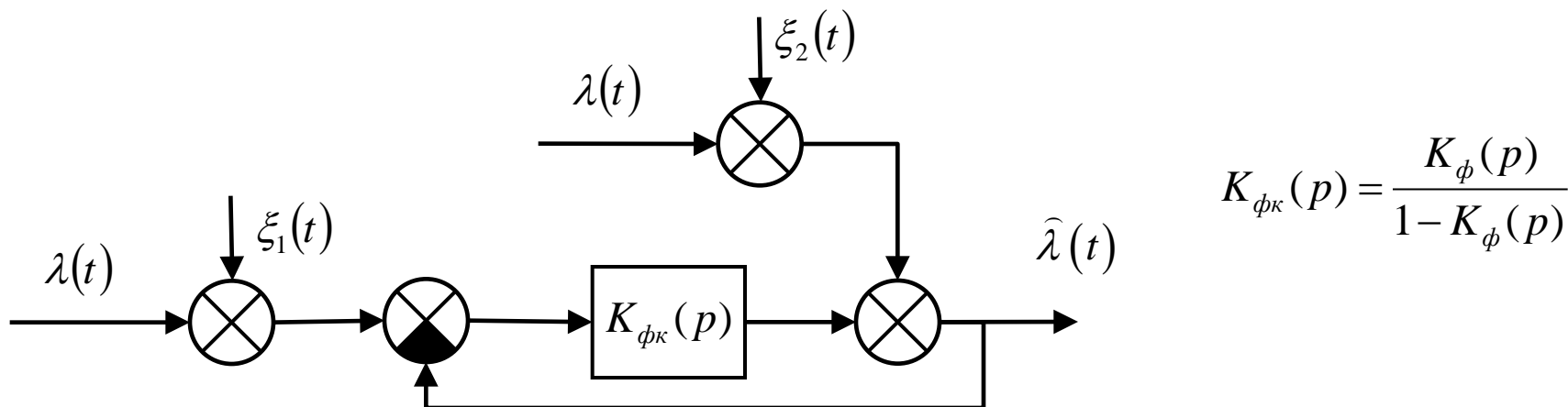


### 15.7.2. Инвариантный КИ на основе схемы фильтрации

Выполним эквивалентное преобразование предыдущей схемы.



### 15.7.3. Инвариантный КИ на основе схемы коррекции (введения информации в следящий контур)





## 15.7.4. Пример

Прием следующую модель узкополосного шума измерений

$$x = -\xi_2$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}w \quad - \text{модель объекта (узкополосного шума)}$$

$$z = x + \xi_1 \quad - \text{модель измерения для синтеза фильтра схемы компенсации}$$

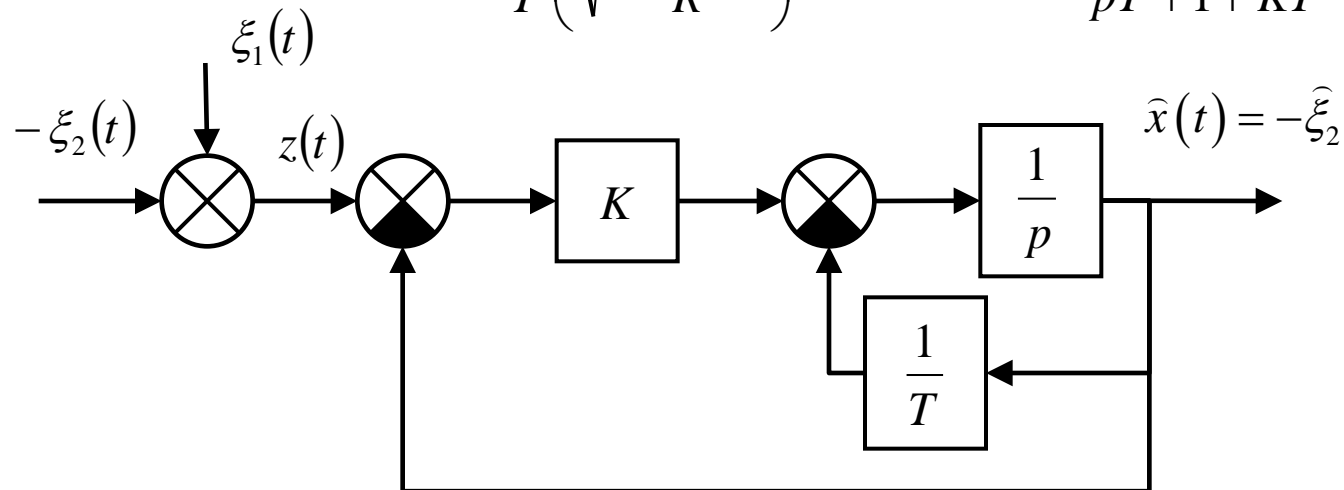
$w, \xi_1$  - белые шумы с нулевым средним и спектральными плотностями  $Q, R$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -\frac{1}{T}\hat{x} + K(z - \hat{x}), \quad K = \frac{P}{R}$$

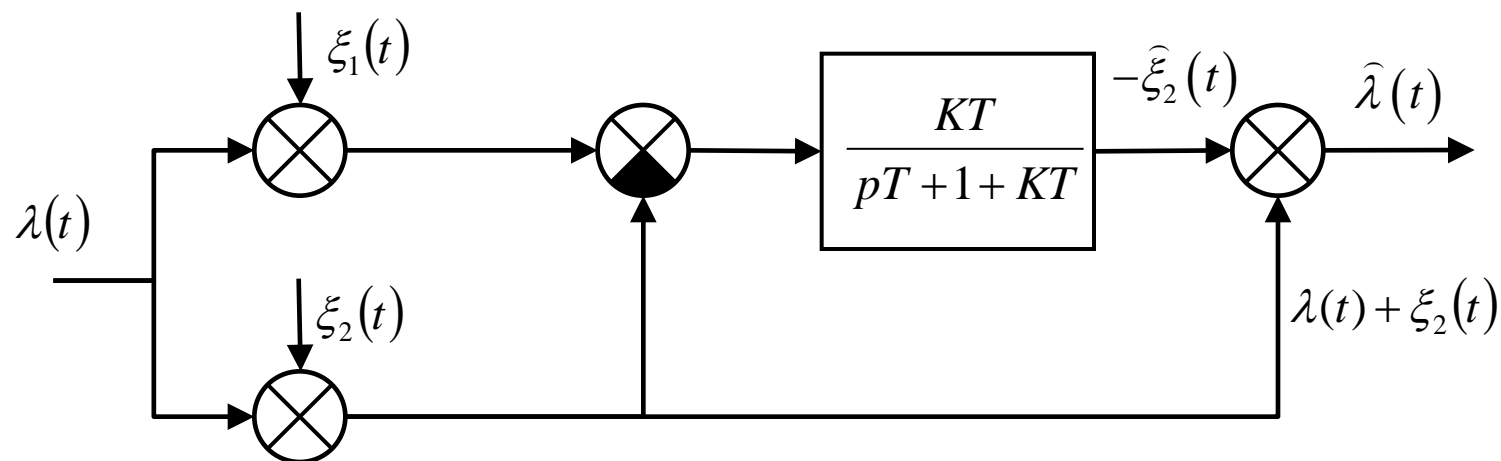
$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2}{T}P - \frac{P^2}{R} + \frac{Q}{T^2},$$

В стационарном режиме

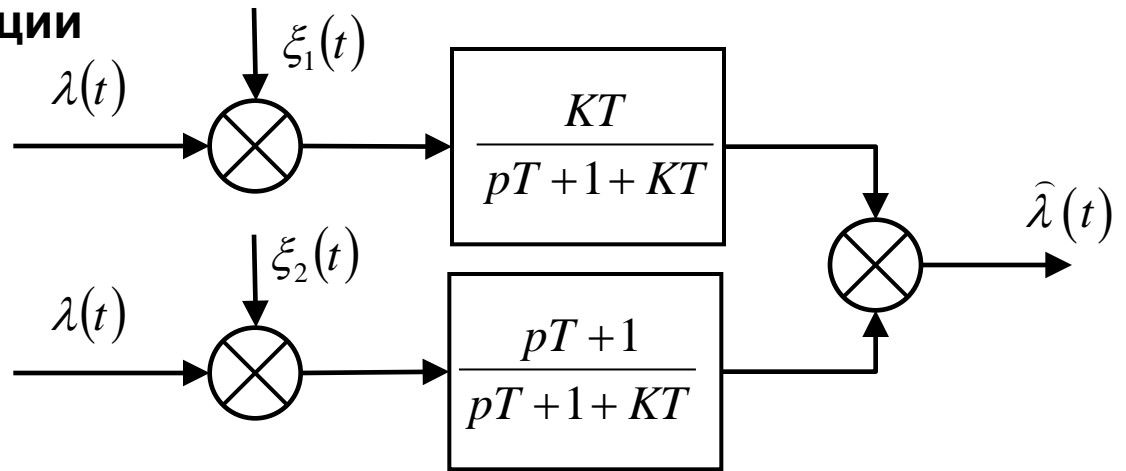
$$K = \frac{1}{T} \left( \sqrt{1 + \frac{Q}{R}} - 1 \right) \quad K_{z\hat{x}}(p) = \frac{KT}{pT + 1 + KT}$$



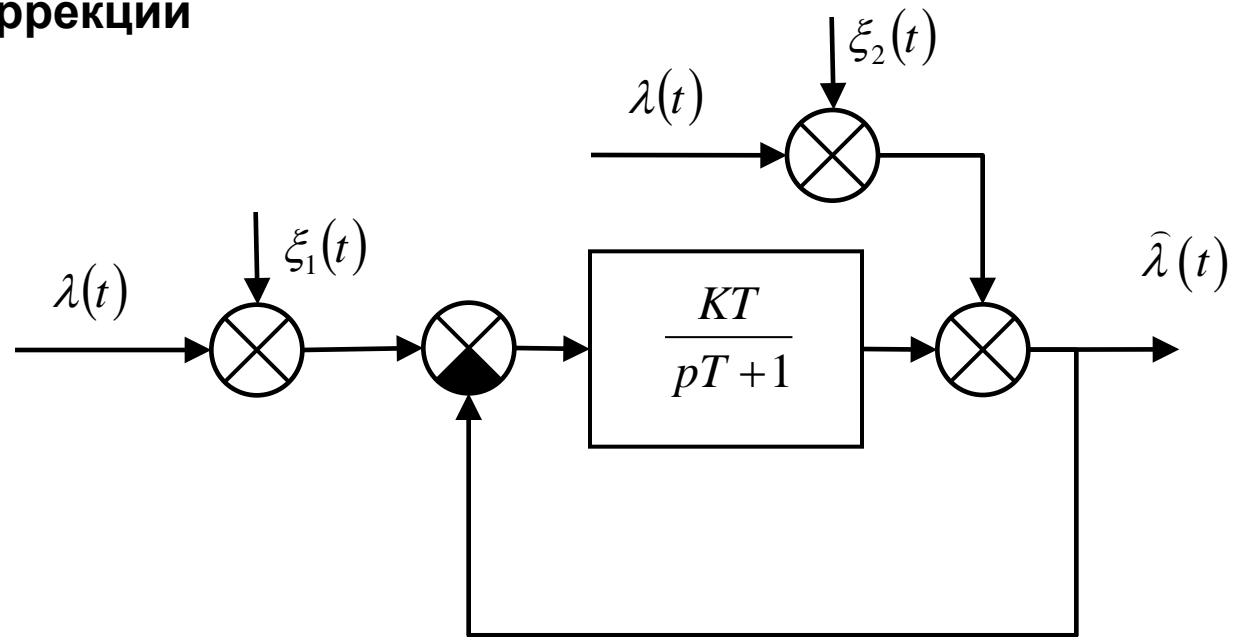
## КИ на основе схемы компенсации



КИ на основе схемы фильтрации

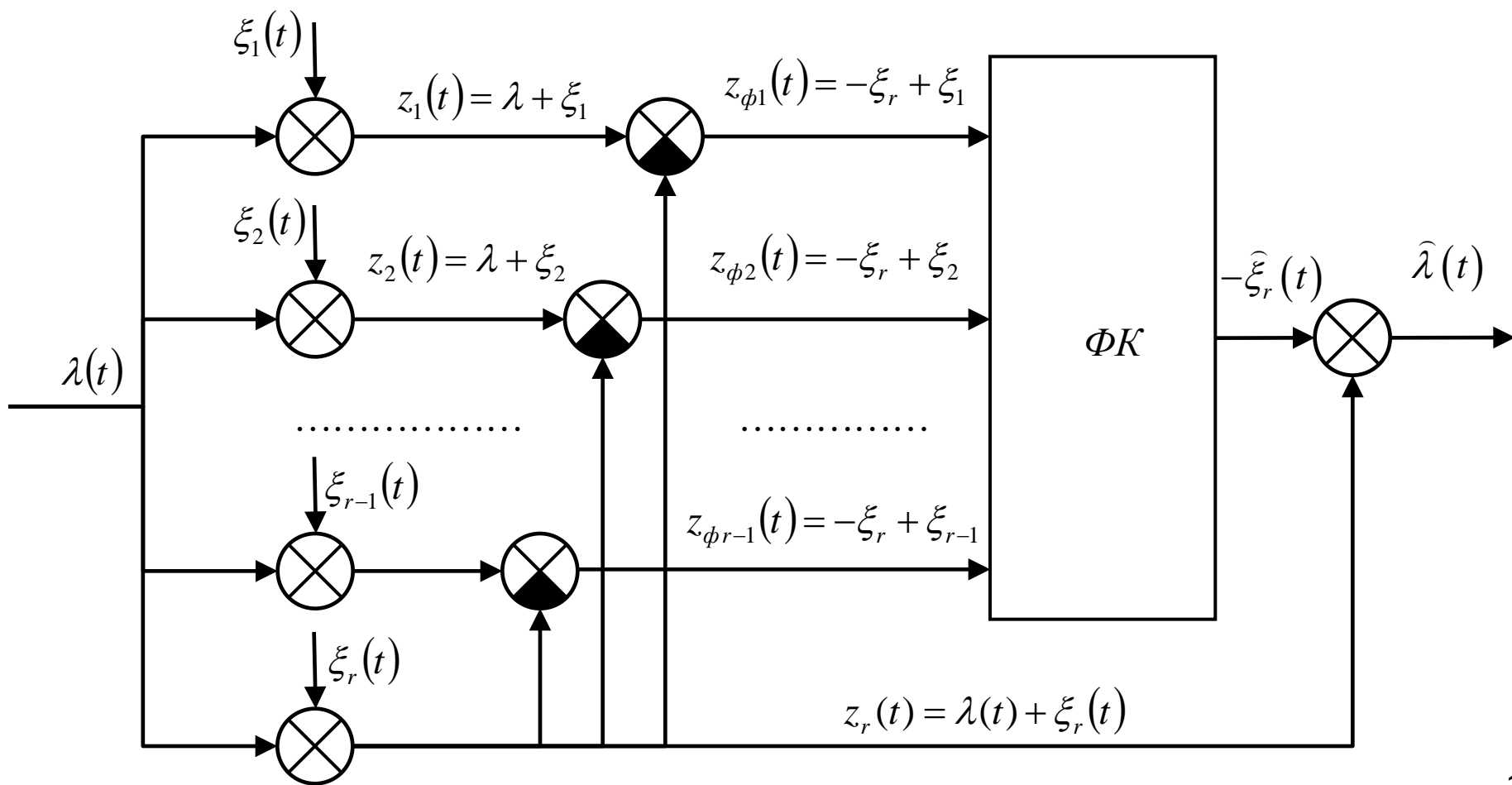


КИ на основе схемы коррекции



### 15.7.5. Инвариантный КИ на основе схемы компенсации при многомерных измерениях ( $r > 2$ )

При наличии  $m$  измерителей одного параметра ( $r > 2$ ) и при условии, что шумы измерений  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1 \div (r-1)$  - белые, а  $\xi_r(t)$  - узкополосный (коррелированный) процесс, КИ можно построить по следующей схеме:



## Постановка задачи синтеза фильтра

Порядок фильтра определяется порядком модели шума  $\xi_r(t)$ , который является оцениваемым информационным процессом

$$y \stackrel{\text{об}}{=} -\xi_r = H_y \vec{x} \quad \vec{x}(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F \cdot \vec{x} + G \cdot \vec{w} \quad - \text{модель объекта (узкополосного шума)}$$

$$\vec{z}_\phi(t) = H \cdot \vec{x} + \vec{\xi}_\phi \quad - \text{модель измерения для синтеза фильтра схемы компенсации}$$

$$\vec{z}_\phi(t) = [z_1, z_2, \dots, z_{r-1}]^T \quad \vec{\xi}_\phi(t) = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}]^T \quad H = \begin{bmatrix} H_y \\ H_y \\ \dots \\ H_y \end{bmatrix}_{r-1, n}$$

## Алгоритм фильтрации

$$\frac{d}{dt} \hat{\vec{x}}(t) = F \cdot \hat{\vec{x}}(t) + K(t) \cdot [\vec{z}_\phi(t) - H \cdot \hat{\vec{x}}(t)] ,$$

$$\hat{\vec{x}}(0) = \overline{\vec{x}(0)} ,$$

$$\hat{\lambda}(t) = z_r(t) + H_y \cdot \hat{\vec{x}}(t)$$

### 15.7.6. Инвариантный КИ на основе схемы коррекции при измерении связанных параметров

Применяются при комплексировании радиотехнических измерителей и автономных датчиков (акселерометры, гироскопические измерители, индукционные и др.). Погрешности таких датчиков обычно связаны с технологическими допусками при производстве, выставке нулей, ошибками юстировки, накоплением ошибок при интегрировании данных. Флюктуационная погрешность таких датчиков мала.

В зависимости от типа функциональной связи между измеряемыми параметрами различают:

- **Позиционную коррекцию** – измеряется один параметр
- **Скоростную коррекцию** – измеряется параметр и его производная
- **Коррекцию по ускорению** – измеряется параметр и его вторая производная

При синтезе КИ заменяют модель информационного процесса или ее часть на модель ошибок автономного датчика. Это позволяет снизить размерность задачи и устранить проблему априорных данных.

**Пример**

Синтез инвариантного доплеровского измерителя скорости со скоростной коррекцией от акселерометра.

Радиотехнический измеритель скорости (доплеровский)

$$z_1 = v + \xi_v \quad \xi_v \text{ - белый шум} \quad \overline{\xi_v(t)} = 0 \quad \overline{\xi_v(t) \cdot \xi_v(t - \tau)} = R_v \cdot \delta(\tau)$$

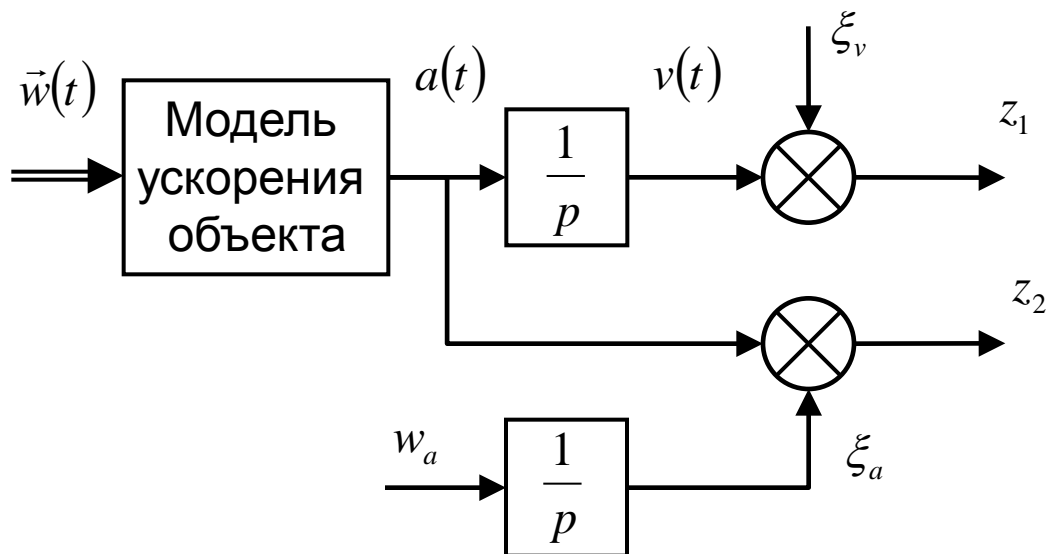
Автономный измеритель продольного ускорения (акселерометр)

$$z_2 = a + \xi_a \quad \xi_a \text{ - случайные ошибки автономного измерителя (ошибки выставки нуля, медленный дрейф показаний)}$$

$$\frac{d}{dt} \xi_a = w_a \quad w_a \text{ - белый шум} \quad \overline{w_a(t)} = 0 \quad \overline{w_a(t) \cdot w_a(t - \tau)} = Q_a \cdot \delta(\tau)$$

$$z = [z_1, z_2]^T$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} v \\ a \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}^T \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} v = a \\ \frac{d}{dt} a = \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$





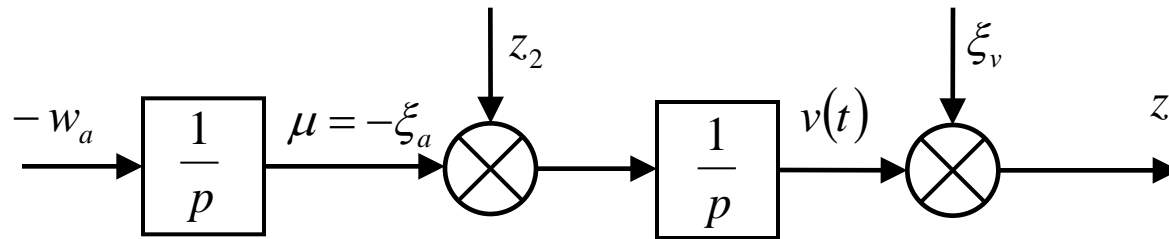
Преобразуем уравнения для получения новой **модели состояния**

$$\vec{x}_{\text{ки}} = \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} v = a = z_2 + \mu \\ \frac{d}{dt} \mu = -w_a \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- из уравнения состояния исключена модель} \\ \text{ускорения, добавлена модель ошибок датчика} \\ \text{ускорения, а измерение } z_2 \text{ рассматривается как} \\ \text{известная функция.} \end{array}$$

$\mu = -\xi_a$

## Модель измерения

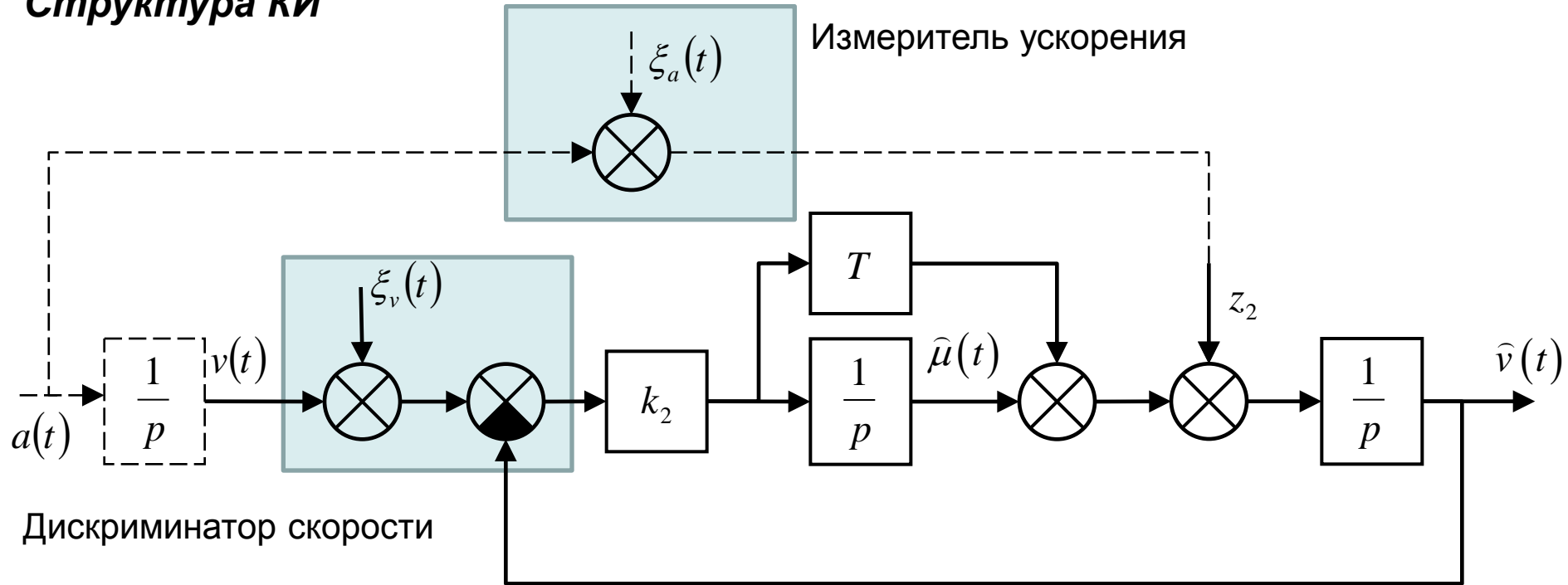
$$z_1 = v + \xi_v \quad \xi_v \text{ - белый шум} \quad \overline{\xi_v(t)} = 0 \quad \overline{\xi_v(t) \cdot \xi_v(t - \tau)} = R_v \cdot \delta(\tau)$$



## Алгоритм фильтра

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{v} = z_2 + \hat{\mu} + k_1(z_1 - \hat{v}) \\ \frac{d}{dt} \hat{\mu} = k_2(z_1 - \hat{v}) \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = \frac{P_{11}}{R_v} \\ k_2 = \frac{P_{12}}{R_v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} P_{11} = 2P_{12} - \frac{P_{11}^2}{R_v} \\ \frac{d}{dt} P_{12} = P_{22} - \frac{P_{11}P_{12}}{R_v} \\ \frac{d}{dt} P_{22} = Q_a - \frac{P_{12}^2}{R_v} \end{cases}$$

# Структура КИ



$$T = \frac{k_1}{k_2}$$

$$K_{v\hat{v}}(p) = 1$$



# Спасибо за внимание!

