

Лекция 10

Корреляционный приёмник импульсного сигнала

Рассмотрим структуру и характеристики оптимального приёмника, предназначенного для измерения времени прихода прямоугольного видеоимпульса длительностью $\tau_{\text{и}}$. В этом случае измеряемый параметр $\lambda = \tau$, и зависимость сигнала от параметра выражается следующим образом:

$$s_{\lambda}(t) = s(t - \tau).$$

Примем, что время прихода импульса (задержка относительно момента времени $t = 0$) имеет равномерное априорное распределение вероятностей в интервале $[0, \tau_{\text{max}}]$:

$$w_{pr}(\tau) = \frac{1}{\tau_{\text{max}}}, \quad \tau \in [0, \tau_{\text{max}}].$$

Поскольку максимальная задержка сигнала равна τ_{max} , то длительность принимаемой смеси сигнала и шума считаем равной $T = \tau_{\text{max}} + \tau_{\text{и}}$, поскольку это колебание имеет смысл обрабатывать только на том интервале времени, где может быть полезный сигнал.

Ранее было получено общее выражение для логарифма апостериорной плотности вероятности измеряемого параметра $w_{ps}(\lambda)$ в случае приёма сигнала в смеси с нормальным белым шумом:

$$\ln w_{ps}(\lambda) = \ln C + q(\lambda) - \frac{E_c(\lambda)}{G_0} + \ln w_{pr}(\lambda),$$

где $w_{pr}(\lambda)$ – априорная плотность вероятности параметра;

G_0 – спектральная плотность белого шума;

$q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_{\lambda}(t) dt$ – корреляционный интеграл;

$$E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t) dt - \text{энергия сигнала.}$$

В случае измерения задержки это выражение упрощается благодаря тому, что:

- 1) энергия сигнала не зависит от измеряемого параметра, т.е. задержка является *неэнергетическим параметром*: $E_c(\tau) = \text{const}$;
- 2) априорное распределение вероятностей задержки – равномерное, т.е. плотность вероятности постоянна на интервале возможных значений параметра: $w_{pr}(\tau) = \text{const}$, $\tau \in [0, \tau_{\max}]$.

Следовательно, выражение для логарифма апостериорной плотности вероятности задержки имеет следующий вид:

$$\ln w_{ps}(\tau) = C' + q(\tau) = C' + \frac{2}{G_0} R(\tau),$$

где C' – некоторая константа;

$$R(\tau) = \int_0^T y(t)s(t-\tau)dt.$$

Постоянное слагаемое C' влияет только на положение графика зависимости $\ln w_{ps}(\tau)$ по вертикали, а множитель $\frac{2}{G_0}$ – только на его масштаб. Значение аргумента, соответствующее максимуму апостериорной плотности вероятности, от них не зависит:

$$\hat{\tau} = \operatorname{argmax}_{\tau \in [0, \tau_{\max}]} \ln w_{ps}(\tau) = \operatorname{argmax}_{\tau \in [0, \tau_{\max}]} R(\tau).$$

Поэтому для нахождения оптимальной оценки задержки достаточно только получить значения функции $R(\tau) = \int_0^T y(t)s(t-\tau)dt$.

В многоканальном корреляционном приёмнике значение параметра изменяется дискретно: $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$. Поэтому для нахождения оценки задержки доступны только отдельные значения функции $R(\tau)$: $R(\tau_1), R(\tau_2), \dots, R(\tau_M)$. В соответствии с используемым критерием максимума апостериорной вероятности оптимальный приёмник должен среди этих значений найти максимальное и определить номер того канала, в котором это максимальное значение достигается:

$$\hat{m} = \operatorname{argmax}_{m=\overline{1, M}} R(\tau_m).$$

По номеру этого канала определяется соответствующее значение задержки: $\hat{\tau} = \tau_{\hat{m}}$.

Структурная схема оптимального приёмника, построенного в соответствии с данным алгоритмом, изображена на рис. 1.

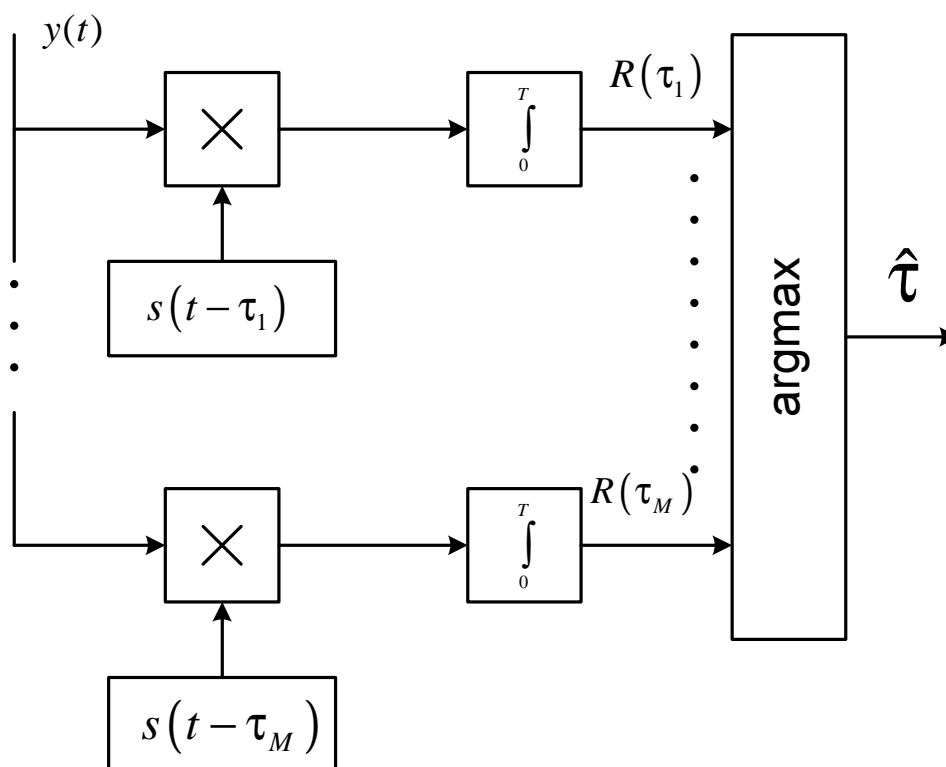


Рис. 1. Корреляционный приёмник для измерения задержки импульсного сигнала

В случае прямоугольного импульса операция умножения на опорное колебание в каждом канале сводится к стробированию принятого колебания стробом, имеющим длительность τ_n и задержку τ_m . Эпюры на-

пряжений в каналах приёмника, поясняющие его работу, показаны на рис. 2.

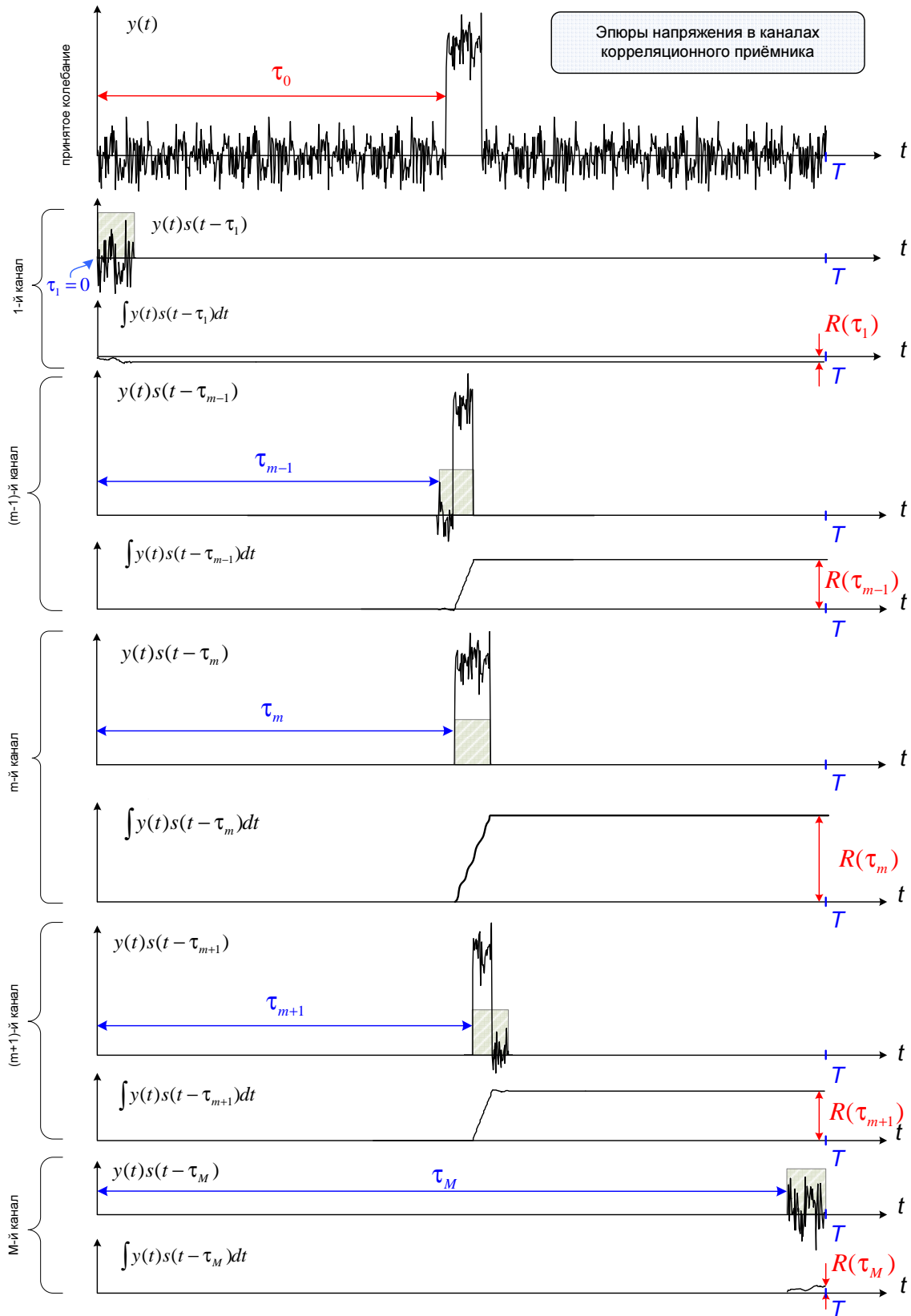


Рис. 2. Эпюры напряжений в каналах корреляционного приёмника.

На верхнем графике показана реализация принятого колебания. Она представляет собой смесь прямоугольного импульса, который имеет задержку τ_0 (это истинное значение задержки сигнала), и белого шума. На рисунке шум изображён условно, поскольку белый шум, как известно, имеет бесконечно большую дисперсию и такой процесс нельзя изобразить графически. Видно, что сигнал значительно искажается шумом.

На следующем рисунке показан процесс, который образуется на выходе перемножителя 1-го канала. В 1-м канале задержка опорного колебания равна 0. В результате умножения принятой реализации на опорное колебание (т.е. в результате стробирования) выделяется та часть принятого колебания, которая содержит только шум. Однако, поскольку заранее это неизвестно, то дальнейшая обработка принятой реализации в этом канале производится точно так же, как и в каналах, содержащих полезный сигнал. После стробирования случайное напряжение подаётся на интегратор. Интегрирование выполняется в течение длительности принятой реализации T , однако изменение напряжения на выходе интегратора будет происходить только на том интервале, который соответствует опорному колебанию (стробирующему импульсу). К моменту окончания стробирующего импульса на выходе интегратора образуется некоторое случайное напряжение, которое далее не меняется. В результате на выходе 1-го канала получается напряжение, которое соответствует $R(\tau_1)$.

Далее пропустим несколько каналов и рассмотрим процессы в канале с номером $m-1$, в котором задержка опорного колебания такая, что в принятой реализации часть сигнала попадает в стробирующий импульс. В результате, после стробирования получается процесс, где сначала действует только шум, а затем – смесь сигнала и шума. При подаче этого процесса на интегратор напряжение на его выходе формируется следующим образом. До начала стробирующего импульса напряжение равно 0. Потом под действием шума оно случайным образом меняется и далее это напряжение возрастает. Регулярная составляющая

этого возрастания связана с сигналом, а случайные отклонения напряжения обусловлены шумом. Далее, после окончания стробирующего импульса, напряжение на выходе интегратора остаётся постоянным и определяет значение $R(\tau_{m-1})$.

Теперь рассмотрим процессы в канале с номером m . В этом канале временное положение опорного сигнала, т.е. стробирующего импульса, совпадает с истинным значением задержки принимаемого сигнала и, следовательно, сигнал полностью попадает в стробирующий импульс. В этом случае на входе интегратора действует только смесь сигнала и шума, поэтому напряжение на выходе интегратора возрастает в течение всей длительности стробирующего импульса и оказывается больше, чем в предыдущем канале. Это напряжение определяет значение $R(\tau_m)$.

В следующем канале приёмника задержка стробирующего импульса больше τ_0 , и в этом случае на входе интегратора сначала действует смесь сигнала и шума, а затем – только шум. В результате напряжение на выходе интегратора сначала возрастает, а затем под действием шума происходят случайные колебания и далее, после окончания стробирующего импульса, это напряжение не меняется. Оно определяет значение $R(\tau_{m+1})$.

Теперь перейдём к последнему каналу, имеющему номер M . В этом канале в результате стробирования выделяется только шум и поэтому напряжение на выходе интегратора случайным образом меняется и концу интервала интегрирования имеет некоторое случайное значение $R(\tau_M)$.

В результате получается в приёмнике формируется следующий набор значений напряжения на выходе интегратора (рис. 3):

$$R(\tau_1), \dots, R(\tau_{m-1}), R(\tau_m), R(\tau_{m+1}), \dots, R(\tau_M).$$

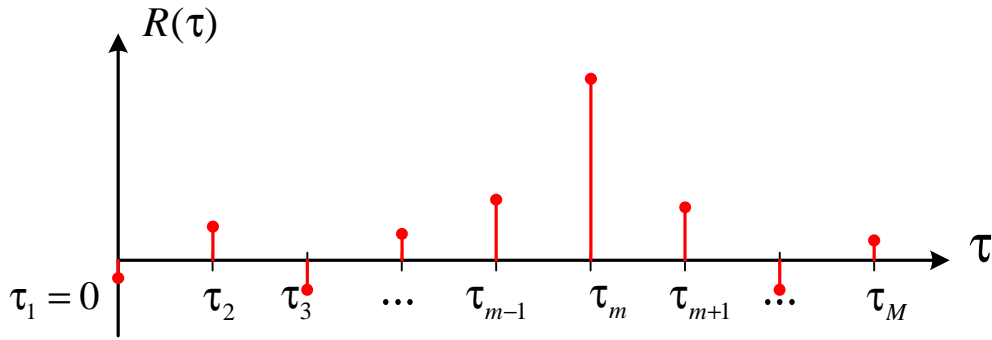


Рис. 3. Напряжения в каналах корреляционного приёмника.

Далее в соответствии с алгоритмом оценивания задержки по критерию максимума апостериорной вероятности (который в данном случае совпадает с критерием максимума функции правдоподобия) с помощью устройства сравнения напряжений находится номер канала \hat{m} , на выходе которого будет максимальное напряжение, и по нему определяется значение задержки $\hat{\tau} = \tau_{\hat{m}}$, соответствующее этому каналу. Это и будет оптимальная оценка задержки сигнала.

Рассмотренный пример показывает, что процедуру оценивания параметра сигнала по критерию максимума апостериорной вероятности можно заменить более простой процедурой оценивания по критерию максимума корреляционного интеграла, если выполняются следующие условия:

- 1) измеряемый параметр является неэнергетическим;
- 2) априорное распределение вероятностей параметра равномерно.

К числу неэнергетических параметров, кроме задержки, относятся следующие:

- начальная фаза сигнала (при условии, что длительность принятого колебания, которая определяет время интегрирования, много больше периода несущей сигнала: $T \gg T_0 = \frac{1}{f_0}$);

- частота сигнала (при условии, что соотношение $T \gg T_0 = \frac{1}{f_0}$ выполняется для минимальной частоты в интервале возможных значений $[f_{0\min}, f_{0\max}]$).

Структурная схема оптимального приёмника для этого случая изображена на рис. 4.

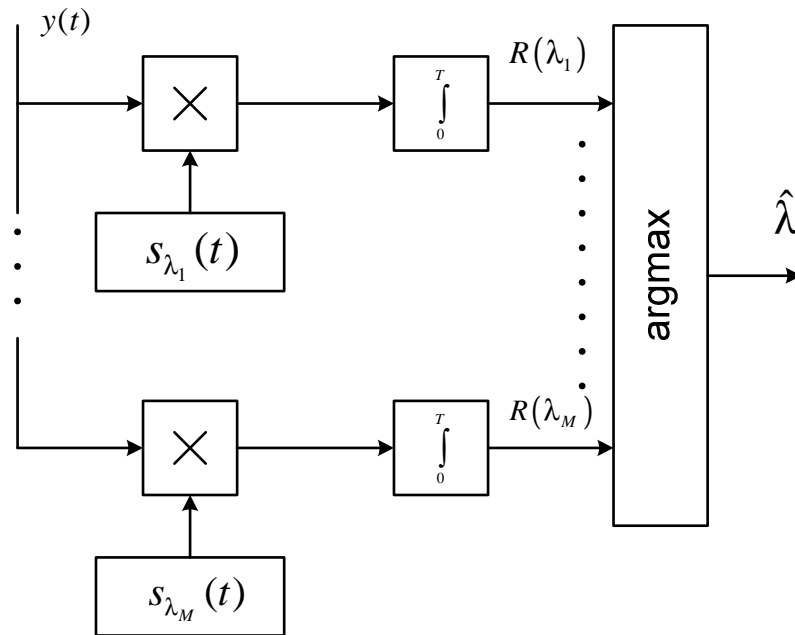


Рис. 4. Корреляционный приёмник для измерения неэнергетического параметра с равномерным априорным распределением вероятностей.

Расчёт максимального отношения сигнал-шум на выходе коррелятора

На примере корреляционного приёмника, измеряющего время задержки импульса, видно, что для получения оценки неэнергетического параметра с равномерным априорным распределением достаточно найти положение максимума корреляционного интеграла

$$q(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s(t - \tau) dt .$$

(Здесь и далее для удобства математических выкладок рассматривается корреляционный интеграл $q(\tau)$, а не функция $R(\tau)$, которая отличается от него только масштабом).

Поскольку принятая смесь сигнала и шума равна

$$y(t) = s(t - \tau_0) + n(t),$$

то корреляционный интеграл можно представить в виде суммы двух составляющих – регулярной сигнальной составляющей $q_c(\tau)$ и случайной шумовой составляющей $q_{ш}(\tau)$:

$$q(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt + \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t) s(t - \tau) dt = q_c(\tau) + q_{ш}(\tau).$$

Составляющую $q_c(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt$ называют *сигнальной функцией*, а составляющую $q_{ш}(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t) s(t - \tau) dt$ – *шумовой функцией*.

Точность измерения задержки сигнала по положению максимума корреляционного интеграла будет тем выше, чем больше максимальный уровень регулярной составляющей по сравнению с уровнем случайной составляющей. Будем характеризовать уровень случайной составляющей величиной СКО шумовой функции и найдём максимальное отношение сигнал-шум на выходе коррелятора:

$$\rho_{\max} = \frac{q_{c \max}}{\sigma_{q_{ш}}}.$$

Вычисление $q_{c \max}$

Максимум сигнальной функции $q_c(\tau)$ достигается при $\tau = \tau_0$. Это следует из того, что интеграл $\int_0^T s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt$ можно рассматривать в

функциональном пространстве как скалярное произведение двух векторов: вектора \vec{s}_{τ_0} , соответствующего сигналу $s(t - \tau_0)$, и вектора \vec{s}_τ , соответствующего сигналу $s(t - \tau)$:

$$\int_0^T s(t - \tau_0)s(t - \tau)dt = (\vec{s}_{\tau_0}, \vec{s}_\tau).$$

Длина (норма) этих векторов одинакова, поскольку энергия их одинакова, а норма вектора в функциональном пространстве определяется как

$$\|\vec{s}_\tau\| = \sqrt{(\vec{s}_\tau, \vec{s}_\tau)} = \sqrt{\int_0^T s^2(t - \tau)dt} = \sqrt{E_c}.$$

Известно, что скалярное произведение двух векторов одинаковой длины максимально в том случае, когда они совпадают:

$$(\vec{s}_{\tau_0}, \vec{s}_\tau) = \max \text{ при } \vec{s}_\tau = \vec{s}_{\tau_0}.$$

В математическом анализе этот результат известен как неравенство Коши-Шварца-Буняковского:

$$\left| \int_0^T f_1(t)f_2(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_0^T f_1^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_0^T f_2^2(t)dt},$$

причём равенство будет при $f_2(t) = cf_1(t)$, где c – произвольная константа.

Таким образом, максимум сигнальной функции достигается при $\tau = \tau_0$ и равен

$$q_{c \max} = q_c(\tau_0) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0)^2 dt = \frac{2E_c}{G_0}.$$

Вычисление $\sigma_{q_{ш}}$

Поскольку математическое ожидание (среднее значение) шума равно 0, то шумовая функция как случайный процесс также имеет нулевое математическое ожидание:

$$\overline{q_{ш}(\tau)} = \frac{2}{G_0} \int_0^T \overline{n(t)s(t-\tau)} dt = 0.$$

Следовательно, дисперсия (квадрат СКО $\sigma_{q_{ш}}$) шумовой функции определяется как

$$\sigma_{q_{ш}}^2 = \overline{q_{ш}^2(\tau)} = \overline{\frac{2}{G_0} \int_0^T n(t_1)s(t_1-\tau) dt_1 \cdot \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t_2)s(t_2-\tau) dt_2}.$$

(Здесь t_1 и t_2 – переменные интегрирования, которые используются вместо t для того, чтобы далее можно было заменить произведение двух интегралов одним двойным интегралом).

Поскольку линейные операции интегрирования и статистического усреднения можно поменять местами, то

$$\sigma_{q_{ш}}^2 = \left(\frac{2}{G_0} \right)^2 \int_0^T \int_0^T \overline{n(t_1)n(t_2)s(t_1-\tau)s(t_2-\tau)} dt_1 dt_2.$$

Выражение $\overline{n(t_1)n(t_2)}$ представляет собой автокорреляционную функцию шума $K_n(x) = K_n(t_2 - t_1)$. (Здесь аргумент АКФ обозначен как x , поскольку обычно используемая переменная τ уже занята).

Найдём АКФ шума, используя теорему Винера-Хинчина, которая связывает АКФ стационарного случайного процесса с его «математическим» энергетическим спектром. Поскольку шум белый и его односторонняя («физическая») спектральная плотность равна G_0 , то уровень одностороннего «математического» спектра в 2 раза меньше:

$$G_{n \text{ м}}(\omega) = \frac{G_0}{2}.$$

По теореме Винера-Хинчина АКФ равна обратному преобразованию Фурье одностороннего «математического» спектра:

$$K_n(x) = \mathcal{F}^{-1}\{G_{n \text{ м}}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0}{2} e^{j\omega x} d\omega = \frac{G_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} d\omega.$$

Известно, что $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} d\omega = \delta(x)$. Следовательно, $K_n(x) = \frac{G_0}{2} \delta(x)$.

Таким образом, мы получили ожидаемый результат: автокорреляционная функция белого шума имеет вид δ -функции. Теперь подставим выражение для АКФ в формулу, определяющую дисперсию шумовой функции:

$$\begin{aligned} \sigma_{q_{\text{ш}}}^2 &= \left(\frac{2}{G_0} \right)^2 \int_0^T \int_0^T \frac{G_0}{2} \delta(t_2 - t_1) s(t_1 - \tau) s(t_2 - \tau) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t_1 - \tau) \left[\int_0^T \delta(t_2 - t_1) s(t_2 - \tau) dt_2 \right] dt_1. \end{aligned}$$

В соответствии с «фильтрующим» свойством δ -функции интеграл, стоящий в квадратных скобках, равен

$$\int_0^T \delta(t_2 - t_1) s(t_2 - \tau) dt_2 = s(t_1 - \tau).$$

$$\text{Следовательно, } \sigma_{q_{\text{ш}}}^2 = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t_1 - \tau)^2 dt_1 = \frac{2E_c}{G_0}.$$

(Видно, что для дисперсии шумовой функции мы получили такое же выражение, как и для максимального значения сигнальной функции. Это оказалось возможным благодаря тому, что в выражение для корреляционного интеграла $q(\tau)$ входит коэффициент $\frac{2}{G_0}$).

Таким образом, СКО шумовой функции равно $\sigma_{q_{ш}} = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}$ и, следовательно, максимальное отношение сигнал-шум на выходе коррелятора определяется выражением

$$\rho_{\max} = \frac{q_{c \max}}{\sigma_{q_{ш}}} = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}.$$

Видно, что это отношение *не зависит от формы сигнала* и определяется лишь его энергией.

Можно показать, что при $\rho_{\max} \gg 1$ СКО оптимальной оценки времени прихода импульсного сигнала, которое характеризует точность измерения в корреляционном приёмнике, равно

$$\sigma_{\hat{\tau}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{ск}} \rho_{\max}},$$

где $\Delta\omega_{\text{ск}}$ – среднеквадратическая ширина спектра сигнала, которая определяется как

$$\Delta\omega_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 S^2(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega}},$$

где $S(\omega)$ – амплитудный спектр сигнала; ω_0 – его центральная частота.

Поскольку $\sigma_{\hat{\tau}}$ обратно пропорционально ширине спектра сигнала, то для повышения точности измерения задержки применяют широкополосные сигналы с внутриимпульсной модуляцией, к которым относятся, в частности, сигналы с линейной частотной модуляцией и с фазовой манипуляцией.