Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Институт Радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова

Лабораторная работа №4

«Решение навигационной задачи по пседодальномерным измерениям»

Студент: Жеребин В.Р.

Группа: ЭР-15-15

Москва

2019

Цель работы

Решение навигационной задачи состоит в определении текущего вектора состояния. Псевдодальномерный метод измерения относится к позиционным методам. Позиционный метод основан на определении местоположения объекта путем засечек, представляющих собой точку пересечения двух или более линий (поверхностей) положения, относительно известных ориентиров

Постановка навигационной задачи

<u>Дано:</u>

1. Вектор измерений дальностей (3 измерения):

$$\hat{\boldsymbol{R}} = |\hat{R}_1 \quad \hat{R}_2 \quad \hat{R}_3|^T = |5.45 \quad 9.99 \quad 2.473|^T$$

2. Координаты 3 опорных точек, записанные в векторном виде:

$$\boldsymbol{x_1} = |x_1 \quad y_1 \quad z_1|^T = |4.7 \quad 5.09 \quad 0.774|^T$$

$$\boldsymbol{x_2} = |x_2 \quad y_2 \quad z_2|^T = |1.579 \quad 0.858 \quad 0.78|^T$$

$$\boldsymbol{x_3} = |x_3 \quad y_3 \quad z_3|^T = |9 \quad 3.476 \quad 1.557|^T$$

<u>Найти:</u> вектор координат объекта $\boldsymbol{x} = |x_0 \quad y_0 \quad z_0|^T$

Решение навигационной задачи

1. Функциональная связь между измеряемой дальностью и координатами объекта

$$R_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} = \|\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x}\|$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x}\| \\ \|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x}\| \\ \|\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x}\| \end{vmatrix}$$

2. Применим метод наименьших квадратов (МНК), который минимизирует квадратичную норму вектора невязок

$$\left\|\hat{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right\| \to min$$

3. Для применения МНК найдем градиентную матрицу – производную функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, связывающей вектор измерений с вектором состояния, по вектору состояния $\boldsymbol{x}$.

$$\frac{\boldsymbol{\partial f(x)}}{\boldsymbol{\partial x}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{-(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x})^T}{\|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x}\|} \\ \dfrac{-(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x})^T}{\|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x}\|} \\ \dfrac{-(\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x})^T}{\|\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x}\|} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \dfrac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} & \dfrac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} & \dfrac{z_1 - z_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} \\ \dfrac{x_2 - x_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2}} & \dfrac{y_2 - y_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2}} & \dfrac{z_2 - z_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2}} \\ \dfrac{x_3 - x_0}{\sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2}} & \dfrac{y_3 - y_0}{\sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2}} & \dfrac{z_3 - z_0}{\sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2}} \end{vmatrix}$$

4. Находим вектор состояния $\boldsymbol{x}$, пользуясь итеративным алгоритмом:

$$\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{x_{k-1}} + \left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\right)^{\boldsymbol{-1}} \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}} \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_{k-1}})\right)$$

$\boldsymbol{x_0} = |0 \quad 0 \quad 0|^T$ – начальное приближение, k – номер итерации;

Критерий останова:

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_{k-1}}\| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon = 10^{-3}$ – требуемая точность

Расчет навигационной задачи

Для расчета используется программа *MATLAB R2017a*, листинг программы представлен в приложении. Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица 1. К расчету вектора координат объекта

№ итерации	$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_{k-1}}\|$	Координаты объекта		
		x	y	z
0	-	0	0	0
1	16,0839	5,518	2,353	-14,924
2	14,6213	-2,085	2,949	-2,449
3	8,4326	5,314	2,388	-6,455
4	6,0121	1,596	1,989	-1,747
5	2,0404	3,383	2,683	-1,047
6	0,8145	3,094	2,436	-0,325
7	0,1635	3,091	2,501	-0,175
8	0,0114	3,09	2,5	-0,163
9	$5{,}7043 \times 10^{-5}$	3,09	2,5	-0,163

Расчет с требуемой точностью произведен за 9 итераций. Координата по z оказалась отрицательной, что исключено и является ошибкой, это связано с неточными изменениями дальностей и геометрическим фактором опорных точек. «Истинные» координаты объекта: $|3{,}038 \quad 2{,}941 \quad 1{,}87|^T$.

Приложение 1

Листинг программы MATLAB

```
close all; clear all; clc;

%R = [5.45; 9.99; 2.473];
R = [3.19; 2.423; 6.232];
X1 = [4.7; 5.09; 0.774];
X2 = [1.579; 0.858; 0.78];
X3 = [9; 3.476; 1.557];
x = [0; 0; 0];

epsilon = 1e-3;
epsi = 10;
k_iter = 0;

while (epsi>=epsilon)
    f1 = sqrt((X1(1)-x(1))^2 + (X1(2)-x(2))^2 + (X1(3)-x(3))^2);
    f2 = sqrt((X2(1)-x(1))^2 + (X2(2)-x(2))^2 + (X2(3)-x(3))^2);
    f3 = sqrt((X3(1)-x(1))^2 + (X3(2)-x(2))^2 + (X3(3)-x(3))^2);
    f = [f1; f2; f3];

    %% первая строка
    H11 = (X1(1)-x(1))/f1;
    H12 = (X1(2)-x(2))/f1;
    H13 = (X1(3)-x(3))/f1;
    %% вторая строка
    H21 = (X2(1)-x(1))/f2;
    H22 = (X2(2)-x(2))/f2;
    H23 = (X2(3)-x(3))/f2;
    %% третья строка
    H31 = (X3(1)-x(1))/f3;
    H32 = (X3(2)-x(2))/f3;
    H33 = (X3(3)-x(3))/f3;

    H = -[H11 H12 H13;
          H21 H22 H23;
          H31 H32 H33];

    x_old = x;
    x = x + inv(H'*H)*H'*(R - f);

    epsi = sqrt((x(1)-x_old(1))^2 + (x(2)-x_old(2))^2 + (x(3)-x_old(3))^2);
    k_iter = k_iter + 1
end
```