

## УСТРОЙСТВА СВЧ И АНТЕННЫ

### Лекция 3.

**ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ИСТОЧНИКА, СМЕЩЁННОГО ИЗ НАЧАЛА КООРДИНАТ. ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ДИПОЛЕЙ НАД МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ. СИММЕТРИЧНЫЙ ВИБРАТОР В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА. ХАРАКТЕРИСТИКА НАПРАВЛЕННОСТИ.**

#### 3.1. Поле излучения источника, смещённого из начала координат

До сих пор мы вычисляли выражения полей излучения источников, сосредоточенных в одной точке, в качестве которой мы выбирали начало координат. Как изменятся эти выражения, если точечный источник расположен в произвольной точке пространства? На рис. 3.1 источник находится в точке, определяемой вектором  $\mathbf{r}$ , исходящим из начала координат. Вектор  $\mathbf{R}$ , начинающийся в точке источника, и  $\mathbf{R}_0$ , исходящий из начала координат, направлены в одну и ту же точку на бесконечности. Выполнены соотношения:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} + \mathbf{R}; \quad \mathbf{R}_0 = R_0 \mathbf{e}_R; \quad \mathbf{R} = R \mathbf{e}_R; \quad (3-1)$$

Как это скажется на выражении электрического поля излучения?

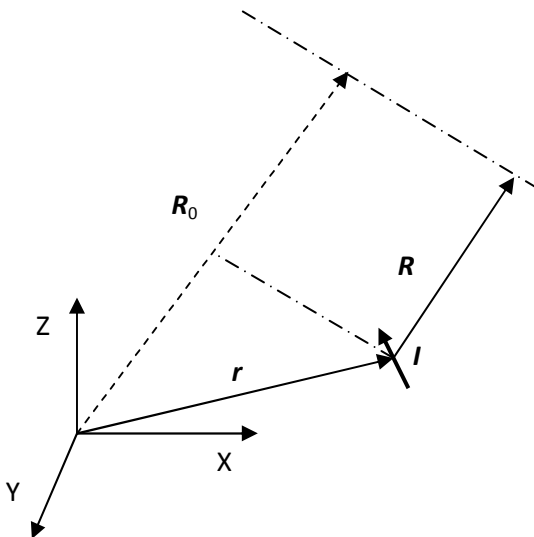


Рис.3.1. Источник в произвольной точке

Следующие вычисления показывают, что в дальней зоне добавится только фазовый множитель, зависящий от расположения источника.

$$\begin{aligned}
R &= (\mathbf{R}, \mathbf{e}_R) = (\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}, \mathbf{e}_R) = (\mathbf{R}_0, \mathbf{e}_R) - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_R) = R_0 - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_R); \\
\frac{e^{-ikR}}{R} &= \frac{e^{-ikR}}{R_0 - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_R)} = \frac{e^{-ik(R_0 - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_R))}}{R_0(1 - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_R)/R_0)} \approx \\
&\approx \frac{e^{-ik(R_0 - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_R))}}{R_0} (1 + (\mathbf{r}, \mathbf{e}_R)/R_0) \approx \frac{e^{-ik(R_0 - (\mathbf{r}, \mathbf{e}_R))}}{R_0} = \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} e^{ik(\mathbf{r}, \mathbf{e}_R)};
\end{aligned} \tag{3-2}$$

Выпишем результирующее выражение для электрического поля источников, сосредоточенных в одной точке, не совпадающей с началом координат:

$$\mathbf{E} = \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \left( W_0 C^e \left[ \left[ \mathbf{e}_I^e, \mathbf{e}_R \right], \mathbf{e}_R \right] - C^m \left[ \mathbf{e}_I^m, \mathbf{e}_R \right] \right) e^{ik(\mathbf{r}, \mathbf{e}_R)}; \quad C^e = i \frac{I^e k l^e}{4\pi}; \quad C^m = i \frac{I^m k l^m}{4\pi}; \tag{3-3}$$

Это выражение может быть использовано для вычисления поля излучения в дальней зоне нескольких источников, расположенных в разных точках, а также различающихся величиной и направлением токов. Для этого достаточно просуммировать векторы электрического поля.

### 3.2 Источники излучения над металлическим экраном

На рис. 3.2 показаны электрические (справа) и магнитные (слева), по-разному ориентированные в пространстве диполи.

Рассмотрим электрический диполь, ориентированный вдоль оси X, с током  $I$ , и расположенный на высоте  $h$  над идеально проводящей плоскостью, совпадающей с плоскостью XOY. Как известно, на поверхности проводящей плоскости выполнено граничное условие  $E_\tau = 0$ . Это условие автоматически выполнено в системе, состоящей из двух диполей, заданного и его зеркального изображения в плоскости металлического листа, причём, направление тока в зеркально отражённом диполе противоположно току в заданном диполе.

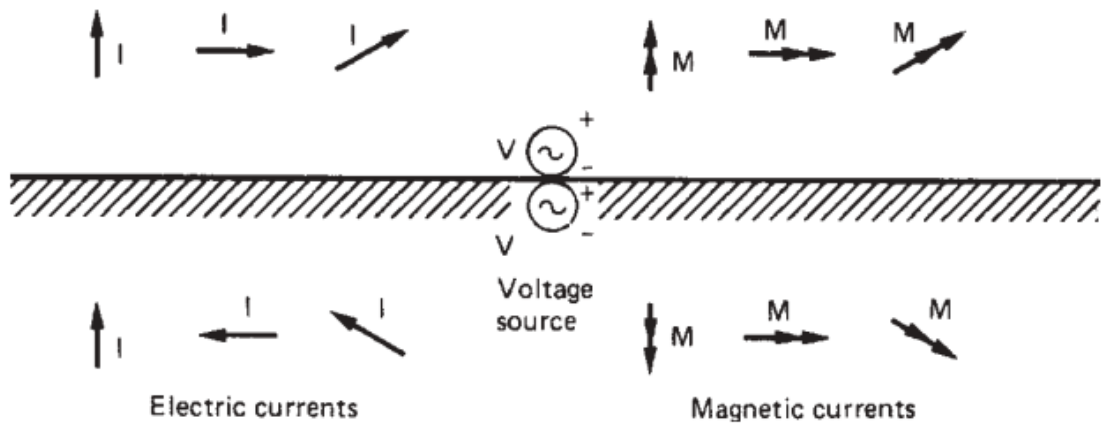


Рис. 3.2. Электрические и магнитные диполи и их отражения в металлической плоскости

Таким образом, чтобы рассчитать диаграмму направленности диполя над металлической плоскостью, достаточно рассчитать её для системы из двух таких диполей, и ограничиться направлениями в верхней полусфере.

Представим поле излучения в виде суммы двух слагаемых вида (3-3), положив в них  $I^m = 0, \mathbf{r}_1 = h\mathbf{e}_z, \mathbf{r}_2 = -h\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{I1} = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{I2} = -\mathbf{e}_x$ ;

Получим следующий результат.

(3-4)

Осталось вычислить скалярное и двойное векторное произведения.

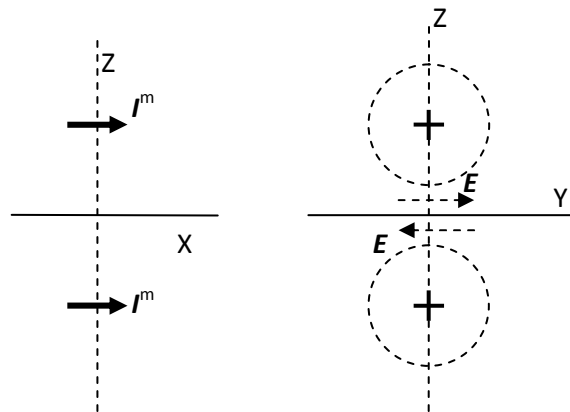
$$(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R) = \cos \vartheta, \quad \left[ [\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_R], \mathbf{e}_R \right] = -\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_\vartheta + \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad (3-5)$$

Окончательное выражение:

$$\mathbf{E} = -2iC^e \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \sin(kh \cos \vartheta) (-\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_\vartheta + \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi); \quad (3-6)$$

**Упражнение 3.1.** Изобразите диаграмму направленности горизонтального диполя над металлической плоскостью при  $h = \lambda/4, \lambda/2, \lambda$ . в плоскостях Е- (XOZ) и Н- (YOZ). Что произойдёт при  $h \Rightarrow 0$ ?

**Упражнение 3.2** Изобразите диаграмму направленности вертикального диполя над плоскостью при тех же значениях высоты подвеса.



Получим диаграммы направленности магнитных диполей над экраном.

Рис.3.3. Горизонтальный магнитный диполь над плоскостью

Этот пример аналогичен предыдущему, но ток магнитного диполя, являющегося изображением исходного магнитного диполя, совпадает по направлению с током исходного диполя. Это наглядно показано в правой части рис.3.3 в сечении плоскостью YOZ. Электрическое

поле циркулирует вокруг магнитного диполя, при этом касательные составляющие на поверхности металлической плоскости компенсируют друг друга при одинаковом направлении токов в диполях. Для вычисления электрического поля в формуле (3-3) нужно положить:

$$I^e = 0, \mathbf{r}_1 = h\mathbf{e}_z, \mathbf{r}_2 = -h\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{I1} = \mathbf{e}_{I2} = \mathbf{e}_x;$$

В остальном, вычисления аналогичны вычислениям в предыдущем примере. Поле излучения магнитного диполя над металлической плоскостью:

$$\mathbf{E} = 2C^m \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \cos(kh \cos \vartheta) (\sin \varphi \mathbf{e}_\vartheta + \cos \vartheta \cos \varphi); \quad (3-7)$$

**Упражнение 3.3** Изобразите диаграмму направленности магнитного диполя над металлической плоскостью в Е- и Н- плоскостях при  $h = \lambda/4, \lambda/2, \lambda$ . Что произойдет при  $h \Rightarrow 0$ ? Сравните предельное выражение с выражением поля одиночного магнитного диполя, ориентированного вдоль оси Х.

### 3.3 Излучение вибратора конечной длины. Симметричный вибратор.

На рис. 3.4 показан симметричный вибратор длины  $l$ , ориентированный вдоль оси Z.

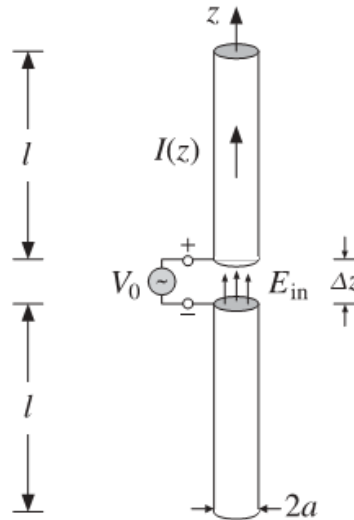


Рис. 3.4. Симметричный вибратор

Чтобы вычислить поле излучения и другие характеристики симметричного вибратора, нужно знать распределение тока вдоль вибратора. По распределению тока можно найти векторный потенциал в окружающем пространстве.

$$A_z^e = \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dz', \quad R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}, \quad (3-8)$$

Решаем задачу в цилиндрических координатах, связанных с вибратором радиуса  $a$ . Электрическое поле выражается через векторный потенциал по формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{A}^e + \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{grad div}\mathbf{A}^e; \quad \mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}^e; \\ E_z &= \frac{1}{i\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2 A_z^e}{\partial z^2} + k^2 A_z^e \right); \quad E_\rho = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial^2 A_z^e}{\partial \rho \partial z}; \end{aligned} \quad (3-9)$$

Дифференциальное уравнение для векторного потенциала вертикального вибратора получается из условия, что на поверхности вибратора касательные составляющие вектора  $\mathbf{E}$  равны нулю, а в зазоре равны величине стороннего поля.

$$E_{z/r=a} = \frac{1}{i\omega\epsilon} \left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) A_z^e(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } |z| > \Delta z/2 \\ E^c, & \text{при } |z| \leq \Delta z/2 \end{cases} \quad (3-10)$$

Напряжённость поля в зазоре можно выразить через напряжение  $V_0$ :  $E^c = V_0/\Delta z$ , в результате получается следующее уравнение для  $A_z^e(z)$ :

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) A_z^e(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } |z| > \Delta z/2 \\ i \frac{k}{W_0} \frac{V_0}{\Delta z}, & \text{при } |z| \leq \Delta z/2 \end{cases}$$

Общее решение уравнения для величины зазора, стремящейся к нулю, имеет вид:

$$A_z^e = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + \frac{iV_0}{2W_0} \sin k|z|, \quad (3-11)$$

Если подставить в это решение выражение векторного потенциала, как интеграла от распределения тока по вибратору, получим:

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dz' = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \frac{iV_0}{2W_0} \sin k|z|. \quad (3-12)$$

Это интегральное уравнение первого рода относительно неизвестного распределения тока. Такие уравнения легко решаются численно на современных компьютерах после приближённой замены интеграла на интегральную сумму и получения в результате системы линейных уравнений относительно дискретных значений тока.

Для получения аналитического приближённого решения преобразуем интеграл, выделив главную часть ядра интегрального уравнения в предположении, что вибратор очень тонкий:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dz' &= \int_{-l}^l (I_z(z') - I_z(z)) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dz' + I_z(z) \int_{-l}^l \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dz'; \\ \int_{-l}^l \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dz' &= 2 \left( \ln \left( \frac{l}{a} \right) - 1 \right) + \dots \end{aligned} \quad (3-13)$$

Выпишем полученное упрощённое выражение интеграла

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dz' = \frac{\Omega}{4\pi} I_z(z) + F(I_z, z); \quad \Omega = 2 \left( \ln \left( \frac{l}{a} \right) - 1 \right); \quad (3-14)$$

В этом интеграле параметр  $\Omega$  принимает большие значения, если радиус вибратора много меньше его длины.. В (3-14) введено также обозначение слагаемого, которым можно пренебречь по сравнению с главным.

С учётом упрощения интегральное уравнение принимает вид, в котором главный член – оператор умножения на большой параметр, а интегралы сосредоточены в асимптотически малом члене, который в нулевом приближении при решении мы отбрасываем:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{4\pi} I_z(z) &= C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \frac{iV_0}{2W_0} \sin k|z| - F(I_z, z), \\ I_z(\pm l) &= 0. \end{aligned} \quad (3-15)$$

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условия равенства тока нулю на концах вибратора.

## 2.5. Распределение тока в симметричном вибраторе

Выпишем главный член решения интегрального уравнения (3-14)  $I_z(z)$ , выразив его через ток в точке питания  $I_z(0)$  и «ток в пучности»  $I_{\max}$

$$\begin{aligned} I_z(z) &\approx \frac{2\pi i V_0}{W_0 \Omega} (\operatorname{tg} kl \cos kz - \sin k|z|) = \frac{2\pi i V_0}{W_0 \Omega} \frac{\sin k(l - |z|)}{\cos kl}; \\ I_z(0) &= i \frac{2\pi}{W_0 \Omega} V_0 \operatorname{tg} kl = i \frac{V_0}{W_e} \operatorname{tg} kl; \\ W_e &= \frac{W_0 \Omega}{2\pi} \approx \frac{120\pi * 2 (\ln(l/a) - 1)}{2\pi} = 120 \left( \ln \frac{l}{a} - 1 \right); \\ I_z(z) &= I_z(0) \frac{\sin k(l - |z|)}{\sin kl}; \quad I_n = \frac{I_z(0)}{\sin kl}; \quad I_z(z) = I_n \sin k(l - |z|); \end{aligned} \quad (3-16)$$

Выражение тока в точке питания  $I_z(0) = i \frac{V_0}{W_e} \operatorname{tg} kl$ ; имеет такую же форму, как выражение для тока на входе отрезка длинной линии с эквивалентным волновым сопротивлением  $W_e = \frac{W_0 \Omega}{2\pi} \approx 120 \left( \ln \frac{l}{a} - 1 \right)$ ;

Эта аналогия положена в основу инженерных рассуждений относительно характеристик симметричного вибратора.

## 2.6 Распределение заряда в симметричном вибраторе

Определение распределения заряда основано на решении уравнения сохранения электрического заряда:

$$\frac{dI}{dz} + i\omega Q = 0 \quad (3-17)$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{i\omega} \frac{dI(z)}{dz} = \frac{I_n}{i\omega} \frac{d \sin k(l-|z|)}{dz} = \frac{I_n}{i\omega} \frac{d \sin k(l-|z|)}{dk(l-|z|)} \frac{dk(l-|z|)}{dz} = \\ &= -\frac{kI_n}{i\omega} \cos k(l-|z|) \eta(z); \quad \eta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases}; \quad \eta(z) = \frac{d|z|}{dz}; \end{aligned} \quad (3-18)$$

## 2.7. Диаграмма направленности симметричного вибратора

Определение диаграммы направленности базируется на интегрировании выражения поля электрического диполя с меняющимся вдоль вибратора током:

$$\begin{aligned} E_{\vartheta} &= \frac{iI_n^e}{4\pi} W_0 \sin \vartheta \int_{-l}^l \sin k(l-|z|) \frac{e^{-ikR}}{R} k dz \approx \\ &\frac{iI_n^e}{4\pi} W_0 \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \sin \vartheta \int_{-l}^l \sin k(l-|z|) e^{ikz \cos \vartheta} k dz; \end{aligned} \quad (3-19)$$

Использовано приближённое выражение  $R$  в дальней зоне.

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_0^2 - 2R_0 z \cos \vartheta + z^2} = R_0 \sqrt{1 - 2 \frac{z \cos \vartheta}{R_0} + \frac{z^2}{R_0^2}} \approx \\ &R_0 \left( 1 - \frac{z \cos \vartheta}{R_0} \right) = R_0 - z \cos \vartheta \end{aligned} \quad (3-20)$$

Вычисление интеграла в (2-28) приводит к выражению поля излучения вертикального симметричного вибратора. Проведём цепочку вычислений интеграла.

$$\begin{aligned} \text{Int} &\square \sin \vartheta \int_{-l}^l \sin k(l-|z|) e^{ikx \cos \vartheta} k dz = \\ &= \sin \vartheta \int_{-l}^l \sin k(l-|z|) (\cos kx \cos \vartheta + i \sin kx \cos \vartheta) k dz = \\ &= 2 \sin \vartheta \int_0^l \sin(k(l-z)) \cos(kx \cos \vartheta) k dz; \end{aligned} \quad (3-21)$$

Произведение синуса и косинуса заменяем с помощью известной тригонометрической формулы

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} &= \sin \alpha + \sin \beta; \\ \alpha &= kl - kz(1 - \cos \vartheta), \beta = kl - kz(1 + \cos \vartheta) \end{aligned} \quad (3-22)$$

Продолжаем вычисление интеграла:

$$\begin{aligned} Int &= \sin \vartheta \left( \frac{-1}{1 - \cos \vartheta} \int_{kl}^{kl \cos \vartheta} \sin \alpha d\alpha + \frac{-1}{1 - \cos \vartheta} \int_{kl}^{-kl \cos \vartheta} \sin \beta d\beta \right) \\ &= 2 \sin \vartheta \frac{\cos(kl \cos \vartheta) - \cos kl}{1 - (\cos \vartheta)^2}; \end{aligned} \quad (3-23)$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} = \frac{iI_n W_0}{4\pi} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \frac{2(\cos(kl \cos \vartheta) - \cos(kl))}{\sin \vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta}; \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{W_0} [-\mathbf{E}, \mathbf{e}_R] = \frac{-E_{\vartheta}}{W_0} [\mathbf{e}_{\vartheta}, \mathbf{e}_R] = \frac{E_{\vartheta}}{W_0} \mathbf{e}_{\varphi}; \quad H_{\varphi} = \frac{E_{\vartheta}}{W_0}; \end{aligned} \quad (3-24)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться выражением поля излучения вибратора малой длины. Получим это выражение из (3-24), устремляя

$kl \rightarrow 0$ , предварительно преобразовав выражение разности косинусов:

$$\begin{aligned} E_{\vartheta} &= \frac{iI_n W_0}{4\pi} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \frac{2(\cos(kl \cos \vartheta) - \cos(kl))}{\sin \vartheta} = \\ &= \frac{iI_n W_0}{4\pi} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \frac{4 \sin\left(\frac{kl(1 - \cos \vartheta)}{2}\right) \sin\left(\frac{kl(1 + \cos \vartheta)}{2}\right)}{\sin \vartheta} \xrightarrow{kl \rightarrow 0} \\ &= \frac{iI_n W_0}{4\pi} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \frac{(kl)^2 (1 - \cos^2 \vartheta)}{\sin \vartheta} = \frac{iI_n W_0}{4\pi} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} (kl)^2 \sin \vartheta \end{aligned}$$

Вспоминая, также, что ток в пучности распределения тока в вибраторе выражается через ток в точке питания, согласно (3-16) по формуле  $I_n = I(0)/\sin(kl)$ , при малых значениях  $kl$  окончательно получим:

$$E_{\vartheta} \xrightarrow{kl \rightarrow 0} \frac{iI(0)W_0 kl}{4\pi} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \sin \vartheta \quad (3-25)$$

Полученное выражение похоже на выражение поля диполя Герца, однако, следует учесть, что в симметричном вибраторе  $l$  обозначает длину одного плеча, тогда как в диполе Герца всю длину. Кроме этого, ток в малом вибраторе меняется вдоль плеча (по треугольному закону) от 0 на концах до  $I(0)$  в точке питания. Поэтому малый симметричный вибратор можно считать диполем Герца длины  $2l$  с эквивалентным током  $I(0)/2$ .