

## Лекция 5.

**Щелевые антенны, входные проводимости, множитель решётки, диаграмма направленности линейной эквидистантной решётки****5.1 Входная проводимость магнитного вибратора**

Определим входные проводимости односторонней и двусторонней щелей. Начнём со сравнения электрических полей излучения и входных сопротивлений и проводимостей электрического и магнитного вибраторов (имеющих одинаковые распределения электрических (у электрического вибратора) и магнитных (у магнитного вибратора) токов. Для простоты будем считать вибраторы линейными, ориентированными вдоль оси Z (не обязательно симметричными).

Поле излучения электрического вибратора имеет вид:

$$\mathbf{E}^e = I^e W_0 C F(\vartheta) \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{e}_\vartheta \quad (5-1)$$

В этом выражении  $I^e$  - электрический ток в точке питания вибратора, константа C и диаграмма направленности безразмерные. Входное сопротивление электрического вибратора имеет вид:  $Z^e = R^e + iX^e$ , мощность излучения вибратора можно получить по формуле:  $P^e = 0.5 |I^e|^2 R^e$ . Магнитный ток соответствующего магнитного вибратора в точке питания обозначим  $I^m$ , а его входную проводимость  $Y^m = G^m + iB^m$ . Так как размерность  $I^m$  - вольты, то мощность излучения магнитного вибратора можно определить по формуле:  $P^m = 0.5 |I^m|^2 G^m$ .

Пользуясь симметрией двойственности уравнений Максвелла, получим сначала магнитное поле магнитного вибратора:

$$\mathbf{H}^e = I^m \frac{1}{W_0} C F(\vartheta) \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{e}_\vartheta, \quad (5-2)$$

а затем, с помощью формулы  $\mathbf{E} = -W_0 [\mathbf{H}, \mathbf{e}_r]$  и электрическое поле магнитного вибратора:

$$\mathbf{E}^m = I^m C F(\vartheta) \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{e}_\varphi. \quad (5-3)$$

Используя выражения электрических полей, вычислим величины векторов Пойнтинга в свободном (без потерь) пространстве по формуле:  $S = |\mathbf{E}|^2 / 2W_0$ , а после интегрирования векторов Пойнтинга по поверхности бесконечно большой сферы, получим выражения мощностей излучения:

$$P^e = \left( |I^e|^2 W_0 \right) \text{Int}; \quad P^m = |I^m|^2 \frac{1}{W_0} \text{Int}. \quad (5-4)$$

В этих формулах используется обозначение интеграла:

$$Int = \pi \int_0^\pi |C F(\vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (5-5)$$

С учётом связи мощностей излучения со входными сопротивлениями и проводимостями, получим:

$$P^e = \left( |I^e|^2 W_0 \right) Int = 0.5 |I^e|^2 R^e; \quad P^m = \left( |I^m|^2 / W_0 \right) Int = 0.5 |I^m|^2 G^m; \quad (5-6)$$

Так как интегралы в обоих выражениях одинаковые, получим из этих выражений равенства:

$$Int = 0.5 \frac{R^e}{W_0} = 0.5 G^m W_0; \quad (5-7)$$

Отсюда следует важное соотношение между активной частью входного сопротивления электрического вибратора и активной частью входной проводимости магнитного вибратора с одинаковыми распределениями электрического и магнитного токов:

$$G^m = \frac{R^e}{W_0^2}. \quad (5-8)$$

## 5.2 Входные проводимости щелевых антенн

Перейдём теперь к щелевым антеннам. Одностороннюю щель можно представить, как сумму двух (прямого и отражённого в металлической плоскости) магнитных вибраторов, излучающих удвоенное электрическое поле. Если бы магнитные вибраторы излучали в полное пространство, то излучаемая мощность была бы в 4 раза больше, чем от одинарного магнитного тока. Но односторонняя щель излучает только в половину пространства, в другой половине пространства поле равно нулю. Из-за этого излучаемая мощность лишь в два раза больше, чем полная излучаемая мощность одиночного магнитного вибратора. А так как излучаемая мощность магнитного вибратора пропорциональна активной проводимости, то проводимость односторонней щели связана с активным сопротивлением соответствующего электрического вибратора выражением:

$$G_1 = \frac{2R^e}{W_0^2}. \quad (5-9)$$

Двухстороннюю щель можно представить, как две односторонние щели, включённые параллельно и излучающие каждая в свою половину пространства. При параллельном включении проводимость удваивается, следовательно, полная проводимость двухсторонней щели определяется выражением:

$$G_2 = \frac{4R^e}{W_0^2}. \quad (5-10)$$

Полученные соотношения относятся к полным частотным зависимостям активного сопротивления электрического вибратора и активной проводимости магнитного вибратора, а также односторонней и двухсторонней щелей. Из электротехники известно, что полные сопротивления и проводимости физически реализуемых пассивных устройств являются аналитическими функциями в полуплоскости комплексной частоты  $\zeta = \sigma + i\omega$ , при  $\sigma \geq 0$  (физическая полуплоскость). У таких функций активная и реактивная части, как функции комплексного переменного, однозначно связаны линейным преобразованием Гильберта. Отсюда следует, что выведенные зависимости можно обобщить до аналогичных зависимостей между полными сопротивлениями и проводимостями:

$$Y^m = \frac{Z^e}{W_0^2}; Y_1 = \frac{2Z^e}{W_0^2}; Y_2 = \frac{4Z^e}{W_0^2}; \quad (5-11)$$

Для полных проводимостей и полных сопротивлений справедливо равенство:  $1/Y = Z$ , поэтому полученные соотношения между входными сопротивлениями электрического вибратора, с одной стороны, и входными сопротивлениями магнитного вибратора, односторонней и двусторонней щелей, в которых распределение магнитного тока такое же, как распределение электрического тока в электрическом вибраторе, можно записать в следующем виде:

$$Z^m Z^e = W_0^2; \quad Z_1 Z^e = 0.5 W_0^2; \quad Z_2 Z^e = 0.25 W_0^2; \quad (5-12)$$

### 5.3 Теорема о диаграмме направленности системы одинаковых и одинаково ориентированных излучателей.

Главный член поля излучения произвольной антенны в дальней зоне имеет вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}(\vartheta, \varphi) F(\vartheta, \varphi) \frac{e^{-ikR}}{R}; \quad (5-13)$$

а поляризационный коэффициент  $\mathbf{p}(\vartheta, \varphi)$  по модулю равный 1, представляется в форме:

$$\mathbf{p}(\vartheta, \varphi) = p_\vartheta(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\vartheta + p_\varphi(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi$$

Формула (5-13) описывает поле излучения уединённой антенны, геометрия которой задана в некоторой системе координат, и расстояние  $R$  отсчитывается от начала координат. Если антенну переместить в пространстве, не меняя её ориентации, то, как мы видели в (3-2), в выражении поля излучения добавится фазовый множитель, зависящий от расположения антенны в пространстве

$$e^{ik(\mathbf{r}, \mathbf{e}_R)}$$

В результате поле излучения смещённой на вектор  $\mathbf{r}$  антенны опишется выражением:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}(\vartheta, \varphi) F(\vartheta, \varphi) \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} e^{ik(\mathbf{r}, \mathbf{e}_R)}; \quad (5-14)$$

В системе одинаковых и одинаково ориентированных излучателей все поляризационные и нормированные амплитудные коэффициенты одинаковы, а расстояние  $R_0$  отсчитывается от единого начала координат. Отличаются только векторы смещения  $\mathbf{r}_n$  и амплитуды поля излучения, которые пропорциональны амплитуде тока возбуждения антенны. Если просуммировать такие поля излучения, а из полученной суммы вынести одинаковые множители, то поле излучения системы излучателей можно вычислить по формуле:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}(\vartheta, \varphi) F(\vartheta, \varphi) \left( \sum_{n=1}^N I_n e^{ik(\mathbf{r}_n, \mathbf{e}_R)} \right) \frac{e^{-ikR_0}}{R_0}; \quad (5-15)$$

Поле излучения рассматриваемой антенной решётки характеризуется тем же векторным поляризационным коэффициентом, что и один излучатель, а скалярная амплитудная диаграмма направленности представлена в виде произведения нормированной диаграммы направленности одного элемента и множителя решётки, определяемого совокупностью положений элементов решётки и их токами возбуждения. Множитель решётки

$\sum_{n=1}^N I_n e^{ik(\mathbf{r}_n, \mathbf{e}_R)}$  иногда называют множителем комбинирования. Некоторые примеры таких

антенных решёток изображены на рис. 5.1. В рассмотренных нами раньше примерах диаграмм направленности диполей над металлической плоскостью (3-5) и (3-7) также

фигурируют два множителя. Один соответствует выбранному типу и ориентации диполя, а второй, множитель решётки, зависит от высоты подвеса диполя над отражающей плоскостью, а также типа диполя, влияющего на фазу тока в отражённом диполе. Также устроено и выражение диаграммы направленности симметричного вибратора (3-19), но в этом случае при вычислении множителя решётки суммирование заменено интегрированием.

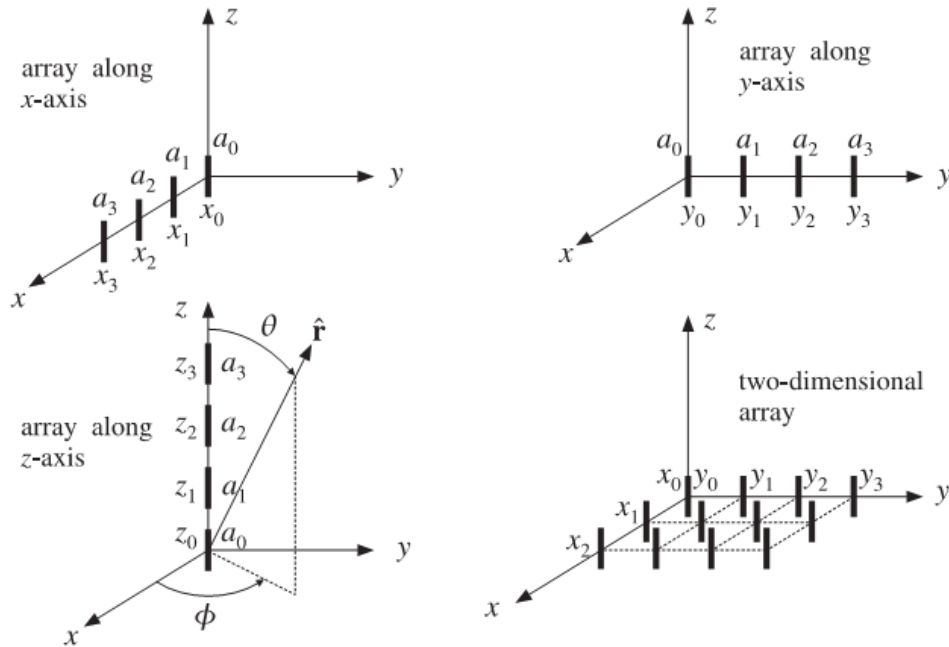


Рис. 7.1. Антенные решётки одинаковых и одинаково ориентированных излучателей

#### 5.4 Диаграмма направленности линейной эквидистантной системы излучателей.

Большое практическое применение имеют дискретные линейные антенные решётки из равноотстоящих элементов. Увеличение числа элементов позволяет создать направленную антенну из слабонаправленных элементов. Для линейных антенных решёток обычно предполагают, что все токи возбуждения соседних элементов одинаковы по амплитуде и разности фаз. Рассмотрим решётку из  $N$  элементов, с ДН одного элемента  $F_{el}(\vartheta, \varphi)$ , расстоянием между соседними элементами  $d$  и отставанием по фазе элемента с большим номером  $\Delta\Phi$ .

Вычислим диаграмму направленности такой решётки.

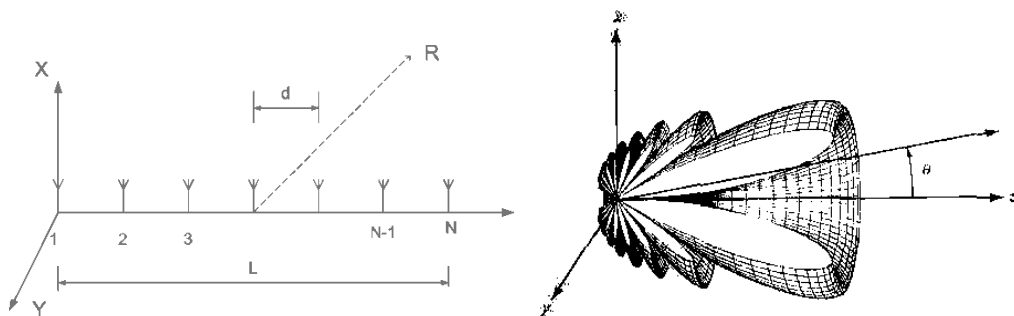


Рис. 5.2. Линейная антенная решётка и диаграмма направленности множителя решётки (поправить рисунок, чтобы была наглядно видна разность фаз)

Проведём подробные вычисления суммы полей элементов решётки, образующей множитель решётки

$$\mathbf{F}(\vartheta, \varphi) = A \mathbf{F}_{el}(\vartheta, \varphi) \sum_{n=1}^N a_n e^{ik(\mathbf{e}_r, \mathbf{r}_n)}; \quad (5-16)$$

Коэффициенты  $a_n$  пропорциональны распределению токов, возбуждающих

соответствующий элемент решётки, причём  $a_{n+1} = a_n e^{-i\Delta\Phi}$ ; будем считать, что  $a_1 = 1$ .

Будем также считать, что элементы решётки с шагом  $d$  расположены по оси  $Z$ , от положительного направления которой отсчитываются направления в точку наблюдения по углу  $\vartheta$ . Начало координат совпадает с положением первого элемента. В этом случае точки расположения элементов из начала координат определяются векторами

$$\mathbf{r}_n = (n-1)d \mathbf{e}_z$$

Слагаемые в этой сумме  $a_n e^{ik(\mathbf{r}_n, \mathbf{e}_R)} = e^{-i(n-1)\Delta\Phi} e^{ikd(n-1)\cos\vartheta} = e^{i(n-1)(kd\cos\vartheta - \Delta\Phi)}$  образуют геометрическую прогрессию. Как известно, сумма геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\vartheta, \varphi) &= \\ &= A(1 + e^{i(kd\cos\vartheta - \Delta\Phi)} + \dots + e^{i(N-1)(kd\cos\vartheta - \Delta\Phi)}) \mathbf{F}_{el}(\vartheta, \varphi) = \\ &= A \frac{e^{iN(kd\cos\vartheta - \Delta\Phi)} - 1}{e^{i(kd\cos\vartheta - \Delta\Phi)} - 1} \mathbf{F}_{el}(\vartheta, \varphi) = \\ &= A e^{i\frac{N-1}{2}(kd\cos\vartheta - \Delta\Phi)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}(kd\cos\vartheta - \Delta\Phi)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(kd\cos\vartheta - \Delta\Phi)\right)} \mathbf{F}_{el}(\vartheta, \varphi); \end{aligned} \quad (5-17)$$

Фазовый множитель – экспонента в выражении диаграммы направленности, исчезает, если сместить начало координат в середину решётки, в фазовый центр множителя комбинирования. Так мы и сделаем. Введём также обозначение для обобщённого угла  $\Psi$ :

$$\Psi = \frac{Nkd}{2} \left( \cos\vartheta - \frac{\Delta\Phi}{kd} \right); \quad (5-18)$$

С учётом обозначения и без учёта постоянных сомножителей, получаем диаграмму направленности, как произведение диаграммы направленности одного элемента и множителя решётки.

$$F(\vartheta, \varphi) = F_{el}(\vartheta, \varphi) \left| \frac{\sin \Psi}{N \sin \frac{\Psi}{N}} \right|; \quad (5-19)$$

Мы ввели множитель  $N$  в знаменатель множителя решётки из условия нормировки: при  $\Psi \rightarrow 0$  множитель решётки стремится к единице, при других значениях  $\Psi$  он меньше единицы.

Разберёмся в структуре обобщённого угла.  $\Delta\Phi$  - это запаздывание фазы тока в соседнем справа элементе, а  $kd$  - 'запаздывание фазы электромагнитной волны, распространяющейся вдоль решётки от одного элемента к соседнему. Их отношение  $\Delta\Phi/kd$  - это относительное запаздывание, или коэффициент запаздывания. Мы вводим обозначение для него

$$\xi = \frac{\Delta\Phi}{kd}$$

С учётом этого обозначения выражение (5-18) примет вид:

$$\Psi = \frac{Nkd}{2} (\cos \vartheta - \xi); \quad (5-18,a)$$

Множитель решётки периодическая функция обобщённого угла  $\Psi$ , симметричная относительно нулевого значения. Величина периода  $N\pi$ . На рис.5.3 показано изменение графика множителя решётки в зависимости от  $N$ . По оси абсцисс отложено значение  $\Psi/N$ , чтобы период функции на графиках имел при всех  $N$  одну и ту же величину. На каждом графике отложено 3 периода.

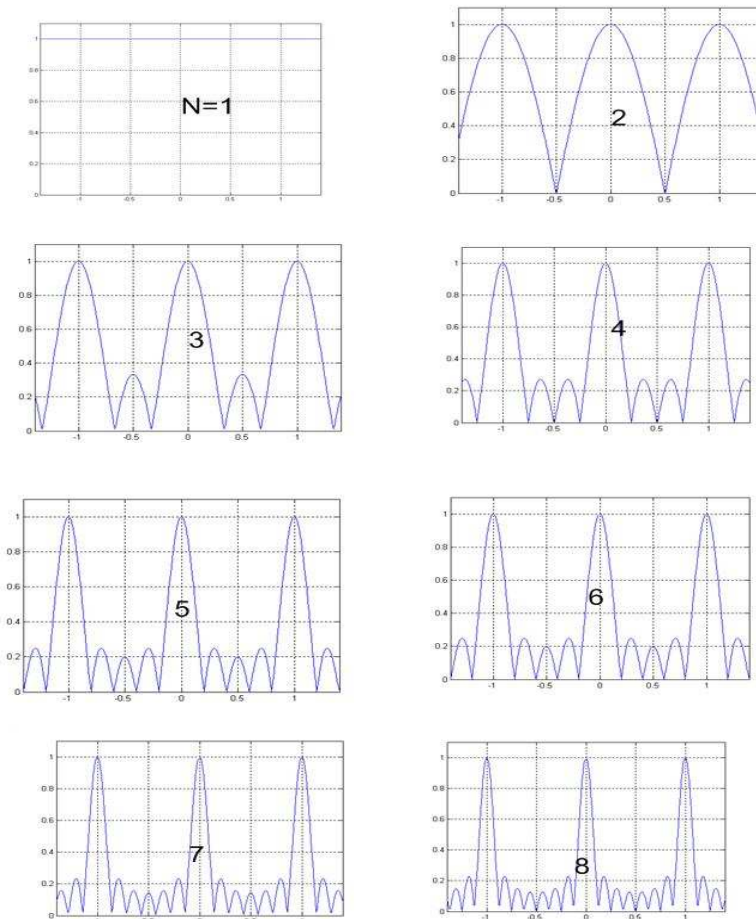


Рис. 5.3. Зависимость множителя решётки от  $\Psi/N$  для разных значений числа элементов решётки  $N$

При  $N=1$  единственный элемент не образует решётки, при  $N=2$  множитель решётки не имеет боковых лепестков, при  $N>2$  множитель решётки имеет  $(N-2)$  боковых лепестка.