

М. Н. КРАММ

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

*РЕКОМЕНДОВАНО*

*Учебно-методическим объединением  
вузов Российской Федерации по образованию  
в области радиотехники, электроники,  
биомедицинской техники и автоматизации  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся  
по направлению 210300 «Радиотехника»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2011

ББК 22.313я73

К 78

**Крамм М. Н.**

**К 78** Сборник задач по основам электродинамики: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 256 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1122-1**

Сборник содержит задачи по основам макроскопической электродинамики, теории плоских электромагнитных волн в различных средах, методам анализа волноводных и колебательных систем, устройств излучения электромагнитных волн. Приведены условия задач, справочный материал и ответы. Более сложные задачи снабжены указаниями. Имеется раздел с задачами для исследований с помощью персонального компьютера.

Для студентов технических университетов и вузов с радиотехническими направлениями подготовки. Может быть полезен студентам других направлений подготовки, изучающим основы теории электромагнитного поля и волновых процессов.

ББК 22.313я73

**Рецензенты:**

кандидат технических наук, доцент кафедры  
теоретических основ радиотехники СПбГЭТУ  
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина) **В. А. СТЕПАНОВ**,  
доцент кафедры технической электродинамики  
и антенн МТУСИ, **В. Г. КОЧЕРЖЕВСКИЙ**

**Обложка**

**Л. А. АРНДТ**

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2011  
© М. Н. Крамм, 2011  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2011

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач является учебным пособием по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн» для студентов технических университетов и вузов с радиотехническими направлениями подготовки. Данный курс относится к числу базовых дисциплин профессионального профиля. На его основе строится ряд последующих дисциплин, связанных с радиотехникой сверхвысоких частот, антенной техникой и др.

Сборник содержит задачи по основам макроскопической электродинамики, теории плоских электромагнитных волн в различных средах, методам анализа волноводных и колебательных систем, устройств излучения электромагнитных волн. Задачи сборника сгруппированы по темам, которые соответствуют основным разделам курса и традиционно рассматриваются на упражнениях. В связи с достаточно большим числом задач сборник позволяет предлагать студентам индивидуальные наборы задач, что удобно как при проведении упражнений, так и при самостоятельном изучении разделов курса.

В начале каждой главы приводится справочный материал, облегчающий работу с задачником. В последующих разделах задачи размещаются с возрастанием уровня сложности. К таким задачам даны указания, приведенные в отдельной главе. О наличии указаний свидетельствует символ «У», расположенный в скобках вслед за номером задачи. Большинство задач снабжено ответами, приведенными в конце сборника.

В отдельной главе помещены более объемные задачи исследовательского характера, при выполнении которых предполагается использование персонального компьютера. В качестве математического пакета может быть использован популярный пакет Mathcad. В Приложении приведены некоторые приемы работы в этом пакете, которые будут полезны при выполнении заданий.

Значения электродинамических параметров некоторых материалов, рассматриваемых в условиях задач, представлены в таблицах Приложения. При работе с задачником целесообразно иметь под рукой учебник по основам электродинамики (см. список рекомендуемой литературы).

Хочется искренне поблагодарить коллег, преподавателей и сотрудников кафедры основ радиотехники МЭИ, неоднократно обсуждавших с автором материалы практикума. Автор выражает сердечную признательность доцентам кафедры Г. В. Жихаревой и Е. А. Филатовой за советы и неизменную поддержку.

# ГЛАВА ПЕРВАЯ

## ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

### СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

**Г**radient, дивергенция, ротор и оператор Лапласа в декартовой системе координат:

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{1}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{1}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{1}_z;$$

$$\text{div } \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\text{rot } \bar{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \bar{1}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \bar{1}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \bar{1}_z;$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Гradient, дивергенция, ротор и оператор Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \bar{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bar{1}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{1}_z;$$

$$\text{div } \bar{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{A} = & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \bar{1}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \bar{1}_\varphi + \\ & + \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \right) \bar{1}_z; \end{aligned}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Градиент, дивергенция, ротор и оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\begin{aligned}\text{grad}U &= \frac{\partial U}{\partial r} \bar{\mathbf{1}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \bar{\mathbf{1}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bar{\mathbf{1}}_\varphi; \\ \text{div} \bar{\mathbf{A}} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 A_r] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\theta \sin \theta] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\ \text{rot} \bar{\mathbf{A}} &= \left( \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \right) \bar{\mathbf{1}}_r + \\ &+ \left( \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \right) \bar{\mathbf{1}}_\theta + \left( \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \right) \bar{\mathbf{1}}_\varphi; \\ \nabla^2 U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

Некоторые полезные тождества векторного анализа:

$$\begin{aligned}\text{div rot} \bar{\mathbf{A}} &= 0; \\ \text{rot grad} U &= 0; \\ \text{rot rot} \bar{\mathbf{A}} &= \text{grad div} \bar{\mathbf{A}} - \nabla^2 \bar{\mathbf{A}}; \\ \text{div grad} U &= \nabla^2 U; \\ \text{grad} (UV) &= U \text{grad} V + V \text{grad} U; \\ \text{div} (U \bar{\mathbf{A}}) &= U \text{div} \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}} \text{grad} U; \\ \text{rot} (U \bar{\mathbf{A}}) &= U \text{rot} \bar{\mathbf{A}} - [\bar{\mathbf{A}} \text{grad} U]; \\ \text{div} [\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}}] &= \bar{\mathbf{B}} \text{rot} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}} \text{rot} \bar{\mathbf{B}}.\end{aligned}$$

### 1.1.

#### ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ И СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

**1.1.1.** В декартовой системе координат задано векторное поле  $\bar{\mathbf{A}}$ . Постройте качественно картину силовых линий данного поля. Рассмотрите прямоугольный контур  $L$ , расположенный в плоскости  $z = 0$  и образованный отрезками прямых, соединяющих точки с координатами  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, b)$  и  $(0, b)$ .

Определите:

а) циркуляцию поля  $\bar{\mathbf{A}}$  по контуру  $L$  с направлением обхода по часовой стрелке, если смотреть с конца орта  $\bar{\mathbf{1}}_z$ ;

б) поток поля  $\bar{A}$  через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$  и имеющую единичный вектор нормали  $\bar{1}_n = \bar{1}_z$ .

Решите задачу для следующих вариантов:

1.  $\bar{A} = 2\bar{1}_x + 2\bar{1}_z$ ;  $a = b = 4$ .

2.  $\bar{A} = 5y^2\bar{1}_x$ ;  $a = 1$ ;  $b = 2$ .

3.  $\bar{A} = (x-2)^2\bar{1}_z$ ;  $a = 2$ ;  $b = 3$ .

4.  $\bar{A} = 5\exp(-|y|)\bar{1}_x$ ;  $a = 0,5$ ;  $b = 1$ .

5.  $\bar{A} = 10\sin(x)\bar{1}_y$ ;  $a = \frac{\pi}{2}$ ;  $b = \pi$ .

**1.1.2.** В цилиндрической системе координат задано векторное поле  $\bar{A}$ . Постройте качественно картину силовых линий данного поля. Рассмотрите контур  $L$ , расположенный в плоскости  $z = 0$  и образованный полуокружностями с радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ), лежащими в полуплоскости  $y > 0$ , и двумя отрезками прямых, соединяющими полуокружности в точках оси  $x$  с координатами  $x_1 = -b$ ,  $x_2 = -a$  и  $x_3 = a$ ,  $x_4 = b$ .

Определите:

а) циркуляцию поля  $\bar{A}$  по контуру  $L$  с направлением обхода по часовой стрелке, если смотреть с конца орта  $\bar{1}_z$ ;

б) поток поля  $\bar{A}$  через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$  и имеющую единичный вектор нормали  $\bar{1}_n = \bar{1}_z$ .

Решите задачу для следующих вариантов:

1.  $\bar{A} = \left[ \frac{2}{r^2} \right] \bar{1}_\varphi$ ;  $a = 1$ ;  $b = 2$ .

2.  $\bar{A} = \left[ \frac{10}{r^2} \right] \bar{1}_z$ ;  $a = 2$ ;  $b = 3$ .

3.  $\bar{A} = \left[ \frac{\cos\varphi}{r} \right] \bar{1}_r$ ;  $a = 1$ ;  $b = 3$ .

4.  $\bar{A} = \left[ \frac{2\sin\varphi}{r^2} \right] \bar{1}_z$ ;  $a = 2$ ;  $b = 8$ .

5.  $\bar{A} = 20\exp(-r)\bar{1}_\varphi$ ;  $a = 1$ ;  $b = 2$ .

**1.1.3.** В сферической системе координат задано векторное поле  $\bar{A}$ . Постройте качественно картину силовых линий данного поля. Рассмотрите контур  $L$ , расположенный

в плоскости  $\varphi = 0$  ( $y = 0$ ) и образованный дугами окружностей с радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ), лежащими в квадранте  $x > 0$ ,  $z > 0$ , и двумя отрезками прямых, соединяющими точки оси  $x$  с координатами  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$  и точки оси  $z$  с координатами  $z_1 = a$ ,  $z_2 = b$ .

Определите:

а) циркуляцию поля  $\vec{A}$  по контуру  $L$  с направлением обхода по часовой стрелке, если смотреть с конца орта  $\vec{1}_\varphi$ ;

б) поток поля  $\vec{A}$  через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$  и имеющую единичный вектор нормали  $\vec{1}_n = \vec{1}_\varphi$ .

Решите задачу для следующих вариантов:

$$1. \vec{A} = \left[ \frac{5}{r^2} \right] \vec{1}_\varphi; \quad a = 1; \quad b = 3,5.$$

$$2. \vec{A} = \left[ \frac{\sin \theta}{r} \right] \vec{1}_r; \quad a = 0,5; \quad b = 1,25.$$

$$3. \vec{A} = \left[ \frac{2 \sin(\theta)}{r^2} \right] \vec{1}_\theta; \quad a = 2; \quad b = 8.$$

$$4. \vec{A} = \left[ \frac{5 \cos \theta}{r^2} \right] \vec{1}_r; \quad a = 1; \quad b = 2,5.$$

$$5. \vec{A} = \left[ \frac{10 \sin \theta}{r^3} \right] \vec{1}_\varphi; \quad a = 2,5; \quad b = 4.$$

**1.1.4.** Постройте качественно картину силовых линий заданного векторного поля  $\vec{A} = f(r) \vec{1}_\varphi$ .

Определите, является ли это векторное поле:

а) соленоидальным;

б) потенциальным.

Рассмотрите следующие варианты:

$$1. \vec{A} = 5 \vec{1}_x + 5 \vec{1}_y \quad (\text{декартова система координат}).$$

$$2. \vec{A} = 2x^2 \vec{1}_y \quad (\text{декартова система координат}).$$

$$3. \vec{A} = \left( \frac{1}{r^2} \right) \vec{1}_\varphi \quad (\text{цилиндрическая система координат}).$$

$$4. \vec{A} = r \vec{1}_r \quad (\text{сферическая система координат}).$$

**1.1.5.** Векторное поле  $\vec{A}$  в цилиндрической системе координат имеет вид  $\vec{A} = f(r) \vec{1}_\varphi$ . Определите функцию  $f(r)$ , для которой ротор поля  $\vec{A}$  равен нулю (при  $r \neq 0$ ).



**1.1.6.** Векторное поле  $\bar{A}$  в сферической системе координат имеет вид  $\bar{A} = f(r)\bar{1}_r$ . Определите функцию  $f(r)$ , для которой дивергенция поля  $\bar{A}$  равна нулю (при  $r \neq 0$ ).

**1.1.7.** Определите  $\text{grad}\varphi$  и  $\Delta^2\varphi$  для заданного скалярного поля  $\varphi$ . Рассмотрите следующие варианты:

1.  $\varphi = x^2 \sin(2y)$  (декартова система координат).
2.  $\varphi = \ln r \sin \varphi$  (цилиндрическая система координат).
2.  $\varphi = \exp(-jkr)/r$ , где  $k$  — константа;  $j$  — мнимая единица (сферическая система координат).

**1.1.8.** Определите дивергенцию и ротор векторного поля  $\bar{A}$ , заданного в декартовой системе координат. Рассмотрите следующие варианты:

1.  $\bar{A} = 2xy^2\bar{1}_x + z^2\bar{1}_y$ ;
2.  $\bar{A} = 5\sin(2x)\bar{1}_y$ .

**1.1.9.** Определите дивергенцию и ротор векторного поля  $\bar{A}$ , заданного в цилиндрической системе координат. Рассмотрите следующие варианты:

1.  $\bar{A} = \left[ \frac{10}{r} \right] \sin(z)\bar{1}_z$ ;
2.  $\bar{A} = \left[ \frac{2}{r^2} \right] \sin(\varphi)\bar{1}_\varphi$ .

**1.1.10.** Определите дивергенцию и ротор векторного поля  $\bar{A}$ , заданного в сферической системе координат. Рассмотрите следующие варианты:

1.  $\bar{A} = \left[ \frac{5}{r^3} \right] \bar{1}_r$ ;
2.  $\bar{A} = [\sin\theta \exp(-jkr)/r] \bar{1}_\varphi$ ,

где  $k$  — константа;  $j$  — мнимая единица.

**1.1.11.** В декартовой системе координат векторные поля  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  описываются выражениями:

$$\bar{A} = \sin x \bar{1}_y + \cos x \bar{1}_z; \quad \bar{B} = \sin x \bar{1}_z.$$

Определите  $\text{div}[\bar{A} \cdot \bar{B}]$ .

**1.1.12.** В декартовой системе координат скалярное поле  $\varphi$  и векторное поле  $\bar{A}$  заданы выражениями:  $\varphi = 2x^2$ ;  $\bar{A} = y^2\bar{1}_x + 5xy\bar{1}_y$ . Определите  $\text{rot}[A \cdot \text{grad}\varphi]$ .

**1.1.13.** В цилиндрической системе координат скалярное поле  $U$  и векторное поле  $\bar{A}$  описываются выражениями  $U = 2\cos\varphi$ ;  $\bar{A} = \exp(-3r)\bar{1}_z$ . Найдите  $\operatorname{div}[A \cdot \operatorname{grad}(U)]$ .

**1.1.14.** В сферической системе координат векторное поле  $\bar{A}$  задано выражением:

$$\bar{A} = \frac{\sin\theta \cdot \bar{1}_r}{r}.$$

Определите  $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A}$ .

**1.1.15.** В сферической системе координат векторное поле  $\bar{A}$  задано выражением:

$$\bar{A} = \frac{\sin\theta \cdot \exp(-jkr) \cdot \bar{1}_\theta}{r},$$

где  $k$  — константа;  $j$  — мнимая единица. Найдите  $\operatorname{rot}\bar{A}$ .

ГЛАВА ВТОРАЯ

## ЭЛЕКТРОСТАТИКА И МАГНИТОСТАТИКА

### СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

**Закон Гаусса в интегральной и дифференциальной формах:**

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho dV;$$
$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho,$$

где  $\rho$  — объемная плотность электрического заряда;  $\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E}$  — вектор электрического смещения;  $\bar{E}$  — вектор напряженности электрического поля;  $\varepsilon_a$  и  $\varepsilon$  — абсолютная и относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \Phi/\text{м}$  — электрическая постоянная вакуума;  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ .

**Напряженность электростатического поля:**

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi_a,$$

где  $\varphi_a$  — скалярный электрический потенциал, который удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_a = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Нормальные составляющие вектора  $\bar{D}$  на границе раздела материальных сред удовлетворяют граничному условию

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{пов}},$$

где  $\sigma_{\text{пов}}$  — плотность поверхностного заряда на границе раздела (поверхностный заряд может отсутствовать); вектор нормали направлен в сторону первой среды.

Электрический потенциал  $\varphi_{\text{э}}$  сохраняет постоянное значение на поверхности идеальных проводников; на границе раздела двух сред

$$\varphi_{\text{э}1} = \varphi_{\text{э}2};$$

$$\varepsilon_{\text{а}2} \cdot \frac{\partial \varphi_{\text{э}2}}{\partial n} - \varepsilon_{\text{а}1} \cdot \frac{\partial \varphi_{\text{э}1}}{\partial n} = \sigma_{\text{пов}},$$

где  $\partial/\partial n$  — производная по направлению нормали к границе раздела, вектор нормали направлен в сторону первой среды. Емкость системы двух проводников:

$$C = \frac{q}{U},$$

где  $U = |\varphi_{\text{э}1} - \varphi_{\text{э}2}|$  — абсолютное значение разности потенциалов между проводниками. Энергия электрического поля в объеме  $V$ :

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV;$$

для системы двух проводников:

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2C} q^2.$$

Закон полного тока в интегральной и дифференциальной формах:

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{J} d\bar{S}; \quad \text{rot } \bar{H} = \bar{J},$$

где  $\bar{J}$  — вектор плотности тока;  $\bar{H}$  — вектор напряженности магнитного поля;  $L$  — замкнутый контур, ограничивающий поверхность  $S$ . Вектор магнитной индукции:

$$\bar{B} = \mu_{\text{а}} \bar{H} = \mu \mu_0 \bar{H},$$

где  $\mu_{\text{а}}$  и  $\mu$  — абсолютная и относительная магнитная проницаемость среды соответственно;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная вакуума.

Касательные составляющие вектора  $\bar{H}$  на границе раздела материальных сред удовлетворяют граничному условию

$$[\bar{1}_n \cdot (\bar{H}_1 - \bar{H}_2)] = \bar{J}_{\text{пов}},$$

где принято, что вектор нормали  $\vec{1}_n$  направлен в сторону первой среды;  $\vec{J}_{\text{пов}}$  — вектор плотности поверхностного тока (если числовые значения электродинамических параметров обеих сред конечны, то  $\vec{J}_{\text{пов}} = 0$ ).

Магнитный поток, пронизывающий поверхность  $S$ ,

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Если по проводящему контуру (например, проволочному витку) протекает ток  $I$ , который создает поток  $\Phi$  через поверхность, опирающуюся на контур, то индуктивность витка

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Индуктивность катушки с  $N$  витками:

$$L = \frac{\Psi}{I},$$

где  $\Psi = N\Phi$  — потокосцепление. Энергия магнитного поля:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV = \frac{1}{2} LI^2.$$

## 2.1.

### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

**2.1.1.** В точке с декартовыми координатами  $(-1\text{ м}, 0, 0)$  находится заряд  $q_1 = 10\text{ нКл}$ , а в точке с координатами  $(1\text{ м}, 0, 0)$  — заряд  $q_2 = 20\text{ нКл}$ . Определите напряженность электрического поля в точках  $A$  и  $B$  с координатами  $(0, 0, 0)$  и  $(2\text{ м}, 0, 0)$ . Заряды расположены в вакууме.

**2.1.2.** В точках с декартовыми координатами  $(-1\text{ м}, 0, 0)$  и  $(1\text{ м}, 0, 0)$  находятся заряды  $q_1 = q_2 = 15\text{ нКл}$ . Определите напряженность электрического поля в точках  $A$  и  $B$  с координатами  $(0, 1\text{ м}, 0)$  и  $(1\text{ м}, 1\text{ м}, 0)$ . Заряды расположены в вакууме.

**2.1.3.** Плоскость  $z = 0$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $0,01\text{ нКл/м}^2$ . Определите поля  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  во всем пространстве, считая, что заряды находятся в вакууме.

**2.1.4.** Плоскости  $z = 0$  и  $z = 0,5\text{ м}$  равномерно заряжены с одинаковой поверхностной плотностью  $0,05\text{ нКл/м}^2$ .

Абсолютная диэлектрическая проницаемость среды равна  $\epsilon_0$ . Определите векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  во всем пространстве.

**2.1.5.** Плоскость  $z = 0$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $0,2 \text{ нКл/м}^2$ , а плоскость  $z = 1 \text{ м}$  — с плотностью  $-0,2 \text{ нКл/м}^2$ . Абсолютная диэлектрическая проницаемость среды равна  $\epsilon_0$ . Определите векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  во всем пространстве.

**2.1.6.** Разность потенциалов между пластинами плоского воздушного конденсатора равна  $1 \text{ В}$ . Определите плотность поверхностного заряда на обкладках, считая, что эффектами искажения поля около края пластин можно пренебречь. Расстояние между обкладками  $5 \text{ мм}$ .

**2.1.7.** Между пластинами плоского конденсатора находится двухслойный диэлектрик. Толщина слоев  $d_1 = 2 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 5 \text{ мм}$ ; относительная диэлектрическая проницаемость слоев  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 3$ . Площадь пластин  $25 \text{ см}^2$ , расстояние между ними  $d = d_1 + d_2$ . На верхней пластине равномерно распределен заряд  $q_A = 10^{-9} \text{ Кл}$ , на нижней пластине — заряд  $q_B = -q_A$ . Определите напряженность электрического поля в конденсаторе и разность потенциалов между пластинами. Считайте, что эффектами искажения поля около края пластин можно пренебречь.

**2.1.8.** Используя данные предыдущей задачи, определите энергию электрического поля, накопленную в конденсаторе.

**2.1.9.** Между пластинами плоского конденсатора находится двухслойный диэлектрик. Толщина слоев  $d_1$  и  $d_2$ , относительная диэлектрическая проницаемость слоев  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Площадь пластин  $S$ , расстояние между пластинами  $d = d_1 + d_2$ . Получите выражение для емкости данного конденсатора, считая, что эффектами искажения поля около края пластин можно пренебречь. Вычислите емкость конденсатора, используя данные задачи 2.1.7.

**2.1.10.** Бесконечно протяженный плоский слой толщиной  $d$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho_0$ . Абсолютные диэлектрические проницаемости среды, находящейся внутри и вне слоя, одинаковы и равны  $\epsilon_0$ . Определите напряженность электрического поля во всем пространстве. Считайте, что слой расположен в области  $-d/2 < z < d/2$ .

**2.1.11.** Бесконечно длинная прямолинейная нить равномерно заряжена с линейной плотностью  $10^{-10}$  Кл/м. Абсолютная диэлектрическая проницаемость среды равна  $\epsilon_0$ . Определите напряженность электрического поля на расстоянии 2 м от нити.

**2.1.12.** Бесконечно длинный цилиндр радиусом 1 см равномерно заряжен с поверхностной плотностью  $10^{-9}$  Кл/м<sup>2</sup>. Пространство, окружающее цилиндр, заполнено воздухом. Определите напряженность электрического поля на расстоянии 20 см от оси цилиндра.

**2.1.13.** Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра имеют радиусы  $a = 2$  см и  $b = 4$  см (рис. 2.1). Внутренний цилиндр равномерно заряжен с поверхностной плотностью  $0,1$  мкКл/м<sup>2</sup>, наружный цилиндр заряжен с плотностью  $-0,1$  мкКл/м<sup>2</sup>. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом, потенциал наружного цилиндра равен нулю. Определите распределение потенциала и напряженности электрического поля в пространстве между цилиндрами.

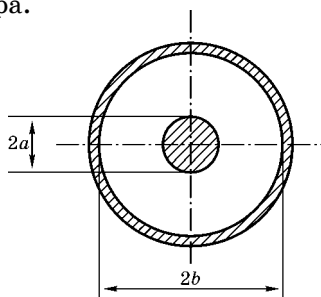


Рис. 2.1  
Коаксиальная  
линия передачи

**2.1.14.** Коаксиальная линия передачи образована двумя бесконечно длинными металлическими цилиндрами с радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ , рис. 2.1). Между цилиндрами находится среда с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Получите выражение для погонной емкости данной линии передачи.

**2.1.15.** Коаксиальная линия передачи образована двумя бесконечно длинными металлическими цилиндрами с радиусами  $a$  и  $b$  (рис. 2.1). Между цилиндрами находится двухслойный диэлектрик. Первый цилиндрический слой ограничен радиусами  $a$  и  $c$  ( $a < c < b$ ) и имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1$ . Второй слой ограничен радиусами  $c$  и  $b$  и характеризуется проницаемостью  $\epsilon_2$ . Получите выражение для погонной емкости данной линии передачи.

**2.1.16.** Внутри бесконечно длинной цилиндрической области радиусом  $r_0$  равномерно распределен электрический заряд с объемной плотностью  $\rho_0$ . Абсолютные диэлектрические проницаемости внутренней и внешней областей равны  $\epsilon_{a1}$  и  $\epsilon_{a2}$  соответственно. Определите напряженность электрического поля во всем пространстве.

**2.1.17.** Бесконечно длинный цилиндрический слой ограничен двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ). Внутри данного слоя равномерно распределен электрический заряд с объемной плотностью  $\rho_0$ . Абсолютные диэлектрические проницаемости среды, находящейся внутри и вне слоя, одинаковы и равны  $\epsilon_0$ . Определите напряженность электрического поля во всем пространстве.

**2.1.18.** На поверхности металлического шара радиусом 10 см равномерно распределен электрический заряд. Шар окружен воздухом. Определите поверхностную плотность заряда, если на расстоянии 20 см от центра шара напряженность электрического поля составляет 50 В/м.

**2.1.19.** Две концентрические сферические поверхности имеют радиусы  $a = 1$  см и  $b = 2$  см. На внутренней поверхности равномерно распределен заряд  $q_a = 0,5$  нКл, на внешней поверхности — заряд  $q_b = -0,5$  нКл. Пространство между сферами заполнено воздухом, потенциал внешней сферы равен нулю. Определите распределение потенциала и напряженности электрического поля в пространстве между сферами.

**2.1.20.** Используя данные предыдущей задачи, определите энергию электрического поля, накопленную в пространстве между сферами.

**2.1.21.** Сферический конденсатор образован двумя концентрическими металлическими сферами с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Между сферами находится диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Получите выражение для емкости данного конденсатора.

**2.1.22.** Сферический конденсатор образован двумя концентрическими металлическими сферами с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Между сферами находится двуслойный диэлектрик. Первый сферический слой ограничен радиусами  $a$



и  $c$  ( $c > a$ ) и имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1$ , второй слой ограничен радиусами  $c$  и  $b$  ( $b > c$ ) и имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_2$ . Получите выражение для емкости данного конденсатора.

**2.1.23.** Внутри сферической области радиусом  $a$  равномерно распределен электрический заряд с объемной плотностью  $\rho_0$ . Абсолютные диэлектрические проницаемости области и окружающей среды одинаковы и равны  $\epsilon_0$ . Определите напряженность электрического поля во всем пространстве.

**2.1.24.** Внутри сферической области радиусом  $a$  распределен электрический заряд, объемная плотность которого изменяется по закону  $\rho = \rho_0 \cdot r/a$ . Абсолютные диэлектрические проницаемости области и окружающей среды одинаковы и равны  $\epsilon_0$ . Определите напряженность электрического поля во всем пространстве.

**2.1.25.** Шаровой слой, расположенный между двумя концентрическими сферами с радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ), равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho_0$ . Абсолютные проницаемости слоя и окружающей среды одинаковы и равны  $\epsilon_0$ . Определите напряженность электрического поля во всем пространстве.

## 2.2. СТАЦИОНАРНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

**2.2.1.** В плоскости  $x = 0$  протекает постоянный ток с равномерно распределенной поверхностной плотностью  $\bar{J}_{\text{пов}} = J_0 \bar{1}_z$ . Определите напряженность магнитного поля во всем пространстве.

**2.2.2.** В плоскости  $x = 0$  и плоскости  $x = d$  протекают постоянные токи с одинаковыми поверхностными плотностями  $\bar{J}_{\text{пов}} = J_0 \bar{1}_y$ . Определите напряженность магнитного поля во всем пространстве.

**2.2.3.** В плоскости  $x = 0$  протекает постоянный ток с поверхностной плотностью  $\bar{J}_{\text{пов1}} = J_0 \bar{1}_y$ . В плоскости  $x = d$  протекает постоянный ток с плотностью  $\bar{J}_{\text{пов2}} = -J_0 \bar{1}_y$ . Определите напряженность магнитного поля во всем пространстве.

**2.2.4.** В бесконечном проводящем слое толщиной  $d$  протекает постоянный ток с равномерно распределенной плотностью  $\vec{J} = J_0 \vec{1}_z$  (используется декартова система координат, в которой ось  $x$  направлена по направлению нормали к поверхности слоя). Определите напряженность магнитного поля во всем пространстве. Считайте, что слой расположен в области  $-d/2 < x < d/2$ .

**2.2.5.** По бесконечному цилиндрическому проводнику с радиусом 2 мм протекает постоянный ток. Напряженность магнитного поля на поверхности проводника составляет 10 А/м. Определите плотность тока в проводнике.

**2.2.6.** По бесконечному цилиндрическому проводнику с радиусом  $a$  протекает постоянный ток с плотностью  $J_0$ , которая равномерно распределена в пределах поперечного сечения проводника. Определите напряженность магнитного поля внутри и вне проводника.

**2.2.7.** По бесконечному цилиндрическому проводнику с радиусом  $a$  протекает постоянный ток, плотность которого изменяется по закону  $J = J_0 r / a$ . Определите напряженность магнитного поля внутри и вне проводника.

**2.2.8.** По бесконечному цилиндрическому проводнику с радиусом  $a$  протекает постоянный ток, плотность которого изменяется по закону  $J = J_0 r^2 / a^2$ . Определите напряженность магнитного поля внутри и вне проводника.

**2.2.9.** Бесконечный цилиндрический слой ограничен двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). По данному слою протекает постоянный ток с плотностью  $J_0$ . Определите напряженность магнитного поля во всем пространстве.

**2.2.10.** По бесконечной цилиндрической поверхности радиусом 5 мм протекает в осевом направлении постоянный ток с поверхностной плотностью 2,5 А/м. Определите напряженность магнитного поля в пространстве, окружающем цилиндр.

**2.2.11.** Коаксиальная линия передачи образована двумя соосными металлическими цилиндрами с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ , см. рис. 2.1). Среда, заполняющая пространство между цилиндрами, имеет относительную магнитную

проницаемость  $\mu$ . Выведите формулу для расчета погонной индуктивности линии передачи.

**2.2.12.** На кольцевом сердечнике из ферромагнитного материала с  $\mu = 100$  размещено 50 витков провода. Сердечник представляет собой цилиндрический слой высотой  $h = 6$  мм, ограниченный цилиндрическими поверхностями с радиусами  $a = 6$  мм и  $b = 12$  мм. По обмотке протекает ток 0,1 А. Определите минимальное и максимальное значение индукции в сердечнике.

**2.2.13.** Используя условия предыдущей задачи, определите энергию магнитного поля, накопленную в кольцевом сердечнике.

**2.2.14.** На кольцевом сердечнике из ферромагнитного материала с  $\mu \gg 1$  размещено  $N$  витков провода. Сердечник представляет собой цилиндрический слой высотой  $h$ , ограниченный цилиндрическими поверхностями с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Выведите формулу для расчета индуктивности данной катушки. При выводе учитывайте, что магнитная проницаемость сердечника велика и потоком магнитного поля вне сердечника можно пренебречь.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

**У**равнения Максвелла в интегральной форме:

$$1. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{J}_{\text{ст}} \right) d\vec{S};$$

$$2. \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S};$$

$$3. \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV;$$

$$4. \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0;$$

$$5. \vec{D} = \epsilon_a \vec{E};$$

$$6. \vec{B} = \mu_a \vec{H}.$$

Здесь в уравнениях 1 и 2 замкнутый контур  $L$  ограничивает поверхность  $S$ ; с конца векторного элемента поверхности  $d\vec{S}$  движение вдоль контура наблюдается в направлении против часовой стрелки. В уравнениях 3 и 4 замкнутая поверхность  $S$  ограничивает объем  $V$ ; векторный элемент поверхности  $d\vec{S}$  ориентирован в направлении внешней нормали к  $S$ . В уравнении 1  $\vec{J}_{\text{ст}}$  — векторная плотность сторонних токов. Плотность тока смещения

$$\vec{J}_{\text{ст}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

плотность тока проводимости

$$\vec{J}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}.$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$1. \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \sigma \bar{E} + \bar{J}_{\text{ст}};$$

$$2. \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t};$$

$$3. \operatorname{div} \bar{D} = \rho;$$

$$4. \operatorname{div} \bar{B} = 0;$$

$$5. \bar{D} = \varepsilon_a \bar{E};$$

$$6. \bar{B} = \mu_a \bar{H}.$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме для комплексных амплитуд полей (случай гармонических колебаний):

$$1. \operatorname{rot} \dot{\bar{H}} = j\omega \dot{\bar{D}} + \sigma \dot{\bar{E}} + \dot{\bar{J}}_{\text{ст}};$$

$$2. \operatorname{rot} \dot{\bar{E}} = -j\omega \dot{\bar{B}};$$

$$3. \operatorname{div} \dot{\bar{D}} = \dot{\rho};$$

$$4. \operatorname{div} \dot{\bar{B}} = 0;$$

$$5. \dot{\bar{D}} = \varepsilon_a \dot{\bar{E}};$$

$$6. \dot{\bar{B}} = \mu_a \dot{\bar{H}}.$$

Связь между мгновенными значениями вектора, гармонически изменяющегося во времени, и его комплексной амплитудой записывается в виде

$$\bar{E}(t) = \operatorname{Re}\{\dot{\bar{E}} \cdot e^{j\omega t}\}.$$

Закон сохранения заряда в интегральной и дифференциальной формах:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S \bar{J}_s d\bar{S}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{J}_s = 0,$$

где  $\bar{J}_s$  — векторная плотность электрического тока.

Если среда анизотропная и характеризуется тензором абсолютной магнитной проницаемости  $\bar{\varepsilon}_a$ , то материальное уравнение 5 записывается в виде

$$D_x = \varepsilon_{a11} E_x + \varepsilon_{a12} E_y + \varepsilon_{a13} E_z;$$

$$D_y = \varepsilon_{a21} E_x + \varepsilon_{a22} E_y + \varepsilon_{a23} E_z;$$

$$D_z = \varepsilon_{a31} E_x + \varepsilon_{a32} E_y + \varepsilon_{a33} E_z.$$

Аналогично записывается уравнение 6 в случае, когда анизотропная среда характеризуется тензором абсолютной магнитной проницаемости  $\bar{\mu}_a$ .

Вектор Пойнтинга:

$$\bar{\Pi} = [\bar{E}(t) \cdot \bar{H}(t)].$$

Среднее значение вектора Пойнтинга (активный вектор Пойнтинга) для гармонических колебаний:

$$\bar{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \dot{\bar{E}} \cdot \bar{H}^* \right].$$

Теорема Пойнтинга для мгновенных мощностей в интегральной форме:

$$\oint_S \bar{\Pi} d\bar{S} + \frac{\partial W}{\partial t} + P_{\text{пот}} + P_{\text{ст}} = 0,$$

где

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\bar{D} \cdot \bar{E} + \bar{B} \cdot \bar{H}}{2} dV$$

— энергия электромагнитного поля в объеме  $V$ , ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ ;  $w$  — плотность энергии электромагнитного поля;

$$P_{\text{пот}} = \int_V p_{\text{пот}} dV = \int_V \sigma |\bar{E}|^2 dV$$

— мощность тепловых потерь в объеме  $V$ ;  $p_{\text{пот}}$  — плотность мощности тепловых потерь;

$$P_{\text{ст}} = \int_V p_{\text{ст}} dV = \int_V \bar{J}_{\text{ст}} \cdot \bar{E} dV$$

— мощность сторонних источников в объеме  $V$ ;  $p_{\text{ст}}$  — плотность мощности сторонних источников.

Теорема Пойнтинга для мгновенных мощностей в дифференциальной форме:

$$\text{div } \bar{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + p_{\text{пот}} + p_{\text{ст}} = 0.$$

Теорема Пойнтинга для гармонических колебаний выражает баланс как активных (средних за период колебаний), так и реактивных мощностей:

$$\oint_S \bar{\Pi}_{\text{cp}} d\bar{S} + P_{\text{пот. cp}} + P_{\text{ст. cp}} = 0;$$

$$\frac{1}{2} \oint_S \text{Im} \left[ \dot{\bar{E}} \cdot \dot{\bar{H}}^* \right] d\bar{S} + \int_V \frac{1}{2} \omega (-\varepsilon_a |\dot{\bar{E}}|^2 + \mu_a |\dot{\bar{H}}|^2) dV +$$

$$+ \int_V \text{Im} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{J}}_{\text{ст}}^* \dot{\bar{E}} \right) dV = 0, \Pi$$

где

$$P_{\text{пот. cp}} = \int_V p_{\text{пот. cp}} dV = \int_V \frac{1}{2} \sigma |\dot{\bar{E}}|^2 dV$$

— средняя мощность тепловых потерь в объеме  $V$ ;  $p_{\text{пот. cp}}$  — плотность мощности тепловых потерь;

$$P_{\text{ст. cp}} = \int_V p_{\text{ст. cp}} dV = \int_V \text{Re} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{J}}_{\text{ст}}^* \dot{\bar{E}} \right) dV$$

— средняя мощность сторонних источников в объеме  $V$ ;  $p_{\text{ст. cp}}$  — средняя плотность мощности сторонних источников.

Средняя за период гармонических колебаний энергия электромагнитного поля:

$$W_{\text{cp}} = \int_V w_{\text{cp}} dV = \int_V \frac{1}{4} (\varepsilon_a |\dot{\bar{E}}|^2 + \mu_a |\dot{\bar{H}}|^2) dV,$$

где  $w_{\text{cp}}$  — средняя плотность энергии электромагнитного поля (данная формула справедлива в случае, когда колебания  $\bar{D}(t)$  и  $\bar{B}(t)$  синфазны с колебаниями  $\bar{E}(t)$  и  $\bar{H}(t)$  соответственно, т. е. отсутствует гистерезис процессов поляризации и намагничивания).

Теорема Пойнтинга для средних мощностей в дифференциальной форме (случай гармонических колебаний):

$$\text{div} \bar{\Pi}_{\text{cp}} + p_{\text{пот. cp}} + p_{\text{ст. cp}} = 0.$$

Нормальные составляющие векторов  $\bar{D}$  и  $\bar{B}$  на границе раздела материальных сред удовлетворяют граничным условиям

$$B_{1n} = B_{2n}; \quad D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{пов}},$$

где  $\sigma_{\text{пов}}$  — плотность поверхностного заряда на границе раздела (поверхностный заряд может отсутствовать); вектор нормали направлен в сторону первой среды.

Касательные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела материальных сред удовлетворяют граничным условиям:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad [\vec{1}_n \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] = \vec{J}_{\text{пов}},$$

где  $\vec{1}_n$  — единичный вектор нормали, направленный в сторону первой среды;  $\vec{J}_{\text{пов}}$  — вектор плотности поверхностного тока ( $\vec{J}_{\text{пов}} = 0$ , если отсутствует сторонний поверхностный ток или если числовые значения электродинамических параметров обеих сред конечны).

Если одной из сред является идеальный проводник ( $\sigma = \infty$ ), то на его поверхности

$$D_n = \sigma_{\text{пов}}; \quad B_n = 0; \quad E_\tau = 0; \quad [\vec{1}_n \vec{H}] = \vec{J}_{\text{пов}},$$

где вектор нормали  $\vec{1}_n$  направлен в сторону от идеального проводника.

### 3.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

**3.1.1.** В некоторой точке пространства комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля:

$$\vec{E} = 0,2 \exp\left(-\frac{j\pi}{4}\right) \vec{1}_x + 0,2 \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \vec{1}_y, \quad \text{В/м.}$$

Определите мгновенные значения вектора  $\vec{E}$  в моменты времени  $t_1 = 0,125$  мкс и  $t_2 = 0,375$  мкс, если частота колебаний равна 1 МГц.

**3.1.2.** Запишите выражение для вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}(t)$ , имеющего линейную поляризацию в плоскости  $XOZ$ . Колебания вектора  $\vec{H}$  происходят с амплитудой 10 мА/м вдоль прямой, наклоненной под углом  $30^\circ$  к оси  $z$  и углом  $60^\circ$  к оси  $x$ . При  $t = 0$  проекция  $H_z = 5$  мА/м. Частота колебаний 2 ГГц.

**3.1.3.** Запишите выражения для электрического вектора  $\vec{E}(t)$  и для его комплексной амплитуды  $\vec{E}$ . Вектор  $\vec{E}$  имеет круговую поляризацию в плоскости  $YOZ$ , и вра-



щается в направлении часовой стрелки, если смотреть с конца единичного вектора  $\bar{1}_x$ . Амплитуда колебаний проекции  $E_y$  равна 5 мВ/м, частота колебаний 100 МГц. В момент времени  $t = 0$  вектор  $\vec{E}$  повернут под углом  $45^\circ$  к осям  $y$  и  $z$ .

**3.1.4.** В диэлектрике с относительной проницаемостью 2,5 и удельной проводимостью 0,15 См/м существует электрическое поле

$$\vec{E}(t) = 0,5 \cos(2\pi \cdot 10^9 t) \bar{1}_x + 0,5 \sin(2\pi \cdot 10^9 t) \bar{1}_y, \text{ В/м.}$$

Определите комплексные амплитуды векторов плотности тока смещения и тока проводимости.

**3.1.5.** В диэлектрике с относительной проницаемостью 3,8 и удельной проводимостью 0,023 См/м комплексная амплитуда

$$\vec{E} = 10 e^{-j(\pi/4)} \bar{1}_x, \text{ мВ/м.}$$

Определите комплексные амплитуды векторов плотности тока проводимости, тока смещения и полного тока. Частота колебаний 150 МГц.

**3.1.6.** В диэлектрике с относительной проницаемостью 2,5 и удельной проводимостью  $1,1 \cdot 10^{-3}$  См/м вектор плотности тока проводимости:

$$\vec{J}_{\text{пр}} = 2,2 \cdot 10^{-4} \sin(\pi \cdot 10^7 t) \bar{1}_x, \text{ А/м}^2.$$

Определите комплексную амплитуду вектора плотности тока смещения, а также угол электрических потерь.

**3.1.7.** В среде с относительной диэлектрической проницаемостью 4 колебания плотности полного тока опережают по фазе колебания плотности тока проводимости на  $73,3^\circ$ . Определите удельную проводимость среды, если частота равна 15 МГц.

**3.1.8.** Рамочная антенна, представляющая собой проволочную петлю площадью  $S = 0,1 \text{ м}^2$ , находится в переменном электромагнитном поле. Комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля не изменяется в пределах петли и равна  $10^{-6} \bar{1}_x$ , А/м. Частота колебаний — 100 МГц, окружающая среда — воздух. При какой ориентации антенны амплитуда ЭДС, наведенной в петле,

будет максимальной. Определите амплитуду ЭДС для этой ориентации.

**3.1.9. (У)** Рамочная антенна, представляющая собой проволочную петлю диаметром 20 см, находится в переменном электромагнитном поле. Петля изготовлена из медной проволоки диаметром 0,1 мм. Вектор напряженности магнитного поля ориентирован под углом  $30^\circ$  к плоскости петли. Амплитуда колебаний вектора  $\vec{H}$  равна 1 мА/м и не меняется в пределах антенны. Частота колебаний — 100 кГц, окружающая среда — воздух. Определите амплитуду тока, наведенного в антенне. Считайте, что влиянием собственного магнитного поля антенны можно пренебречь.

**3.1.10.** К плоскому конденсатору с площадью пластин  $S_{\text{п}}$  приложено напряжение  $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ . Между пластинами находится слой диэлектрика толщиной  $d$ , имеющего относительную проницаемость  $\varepsilon$ . Получите выражение для тока смещения, протекающего через конденсатор двумя способами: а) проинтегрировав плотность тока смещения; б) воспользовавшись известной формулой для емкости плоского конденсатора  $C = \varepsilon \varepsilon_0 S/d$ .

**3.1.11.** Через плоский воздушный конденсатор с площадью пластин  $10 \text{ см}^2$  протекает ток  $i(t) = 0,3 \cos(4\pi \cdot 10^5 t)$ , мА. Определите амплитуду колебаний вектора  $\vec{E}$  в конденсаторе. Считайте, что искажениями поля вблизи края пластин можно пренебречь.

**3.1.12.** К плоскому воздушному конденсатору с расстоянием между пластинами 1,5 мм приложено напряжение  $u(t) = 0,1 \cos(3\pi \cdot 10^6 t)$ , В. Пластины имеют форму дисков радиусом 10 мм. Определите амплитуду и ориентацию вектора  $\vec{H}$  между пластинами на расстоянии 5 мм от оси конденсатора. Считайте, что искажениями поля вблизи края пластин можно пренебречь.

**3.1.13.** К плоскому конденсатору приложено напряжение с амплитудой 0,5 В и частотой 300 кГц. Между обкладками конденсатора находится слой диэлектрика, имеющий толщину 3 мм, относительную проницаемость 2,5 и удельную проводимость  $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ См/м}$ . Определите амплитуду колебаний плотности тока смещения и плотности

тока проводимости в конденсаторе. Найдите разность фаз колебаний напряжения и плотности полного тока в конденсаторе.

**3.1.14. К** плоскому конденсатору приложено гармоническое напряжение с частотой 10 МГц. Между пластинами находится диэлектрик с относительной проницаемостью 3,3 и неизвестной удельной проводимостью. Определите удельную проводимость, если амплитуда тока смещения в  $10^4$  раз больше амплитуды тока проводимости.

**3.1.15. К** плоскому воздушному конденсатору с площадью пластин  $4 \text{ см}^2$  и расстоянием между пластинами 1 мм приложено напряжение  $u(t) = 0,2 \cos(2\pi \cdot 10^7 t)$ , В. Определите комплексную амплитуду тока смещения, протекающего через конденсатор. Найдите комплексные амплитуды поляризационного тока и тока проводимости, которые добавятся к току смещения в вакууме в случае, если пространство между пластинами конденсатора заполнить диэлектриком с относительной проницаемостью 2,56 и удельной проводимостью  $2 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$ .

**3.1.16. (У)** В момент времени  $t = 0$  в однородной проводящей среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельной проводимостью  $\sigma$  создано пространственное распределение объемной плотности заряда  $\rho = \rho_0(x, y, z)$ . За счет протекания токов проводимости  $\rho$  будет уменьшаться со временем при  $t > 0$ . Определите закон уменьшения плотности объемного заряда. Найдите постоянную времени этого процесса для двух вариантов удельной проводимости среды: а)  $10^7 \text{ См/м}$ ; б)  $10^{-3} \text{ См/м}$ . Считайте что  $\epsilon = 1$ .

**3.1.17. (У)** Пользуясь вторым уравнением Максвелла в дифференциальной форме, выведите четвертое уравнение Максвелла (рассмотрите случай гармонических колебаний).

**3.1.18. (У)** Пользуясь первым уравнением Максвелла в дифференциальной форме и уравнением непрерывности, выведите третье уравнение Максвелла (рассмотрите случай гармонических колебаний).

**3.1.19. (У)** Пользуясь третьим уравнением Максвелла в дифференциальной форме, получите соотношение для

$\operatorname{div} \bar{E}$  в среде, диэлектрическая проницаемость которой есть функция пространственных координат.

**3.1.20. (У)** Пользуясь четвертым уравнением Максвелла в дифференциальной форме, получите соотношение для  $\operatorname{div} \bar{H}$  в среде, магнитная проницаемость которой есть функция пространственных координат.

**3.1.21.** Запишите первое и третье уравнения Максвелла в дифференциальной форме для составляющих векторов поля в цилиндрической системе координат (рассмотрите случай гармонических колебаний).

**3.1.22.** Запишите второе и четвертое уравнения Максвелла в дифференциальной форме для составляющих векторов поля в сферической системе координат (рассмотрите случай гармонических колебаний).

**3.1.23.** Электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $z$ , причем составляющие поля не зависят от поперечных координат  $x, y$ . Пользуясь уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд, докажите, что у такой волны отсутствуют продольные составляющие  $E_z, H_z$ .

**3.1.24.** Гармоническая электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $y$  в намагниченном феррите, который на частоте волны характеризуется абсолютной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_a$  и тензором абсолютной магнитной проницаемости в декартовой системе координат:

$$\ddot{\mu}_a = \begin{pmatrix} \mu_{ax} & -jb & 0 \\ jb & \mu_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{az} \end{pmatrix}.$$

Запишите первое и второе уравнения Максвелла для составляющих векторов поля в дифференциальной форме, полагая, что сторонние токи отсутствуют, и составляющие поля не зависят от координат  $x$  и  $z$  (случай плоской волны). Выразите комплексную амплитуду  $\dot{H}_y$  через  $\dot{H}_x$ .

**3.1.25.** Некоторый анизотропный диэлектрик характеризуется в декартовой системе координат тензором относительной диэлектрической проницаемости:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2,8 & 0 & 0 \\ 0 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 2,3 \end{pmatrix}.$$

Найдите угол в пространстве между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  для двух случаев: а)  $\vec{E} = 5 \vec{1}_x$ , В/м; б)  $\vec{E} = 5 \vec{1}_x + 5 \vec{1}_z$ , В/м.

**3.1.26.** Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля в воздухе:

$$\dot{\vec{E}} = 10e^{-j2\pi x} \vec{1}_y, \text{ мВ/м}$$

(данный случай соответствует плоской волне, распространяющейся вдоль оси  $x$ ). Сторонние токи отсутствуют. Определите комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля. Частота колебаний 300 МГц (частота может быть найдена с использованием первого уравнения Максвелла).

**3.1.27. (У)** Комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля в воздухе:

$$\dot{\vec{H}} = 2e^{-j4\pi y} \vec{1}_z, \text{ мА/м}$$

(случай плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $y$ ). Сторонние токи отсутствуют. Определите комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля и частоту колебаний.

**3.1.28.** Комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля в воздухе:

$$\dot{\vec{H}} = 10 \cos(20\pi \cdot x) \vec{1}_z, \text{ мА/м}$$

(случай стоячей волны). Частота колебаний 3 ГГц, сторонние токи отсутствуют. Определите комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля. Найдите разность фаз колебаний  $\vec{E}(t)$  и  $\vec{H}(t)$ .

**3.1.29.** Комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля в воздухе:

$$\dot{\vec{H}} = (A \sin \theta \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{r}) \vec{1}_\varphi,$$

где  $A$  и  $\varphi$  — вещественные константы (используется сферическая система координат). Сторонние токи отсутствуют,

частота колебаний равна  $\omega_0$ . Определите комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля.

**3.1.30.** Вектор напряженности электрического поля в воздухе  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \vec{1}_x$ , где  $E_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\beta_0$  — константы (случай плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ ). Для момента времени  $t = 0$  изобразите: а) картину силовых линий вектора  $\vec{E}$ ; б) картину силовых линий вектора  $\text{rot } \vec{E}$ . Пользуясь вторым уравнением Максвелла, объясните связь между картинками силовых линий  $\text{rot } \vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

**3.1.31.** Пользуясь уравнениями Максвелла, определите, возможно ли существование в однородной изотропной среде переменного электромагнитного поля, в котором векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  параллельны одной и той же декартовой оси. Сторонние токи отсутствуют.

**3.1.32. (У)** Электромагнитный процесс в однородной изотропной среде без потерь имеет отличные от нуля составляющие  $\dot{E}_x$  и  $\dot{H}_y$ , которые зависят только от координаты  $z$ . Среда характеризуется абсолютными проницаемостями  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ . Частота колебаний  $\omega$ , сторонние токи отсутствуют. Пользуясь уравнениями Максвелла, получите дифференциальные уравнения второго порядка для  $\dot{E}_x$  и  $\dot{H}_y$ . Определите общий вид решения данных обыкновенных дифференциальных уравнений и получите характеристическое уравнение — условие существования ненулевого поля.

**3.1.33. (У)** К плоскому воздушному конденсатору приложено гармоническое напряжение с частотой  $\omega_0$ . Пластины конденсатора имеют форму дисков с радиусом  $r_0$ . На низких частотах амплитуду  $E_0$  колебаний вектора  $\vec{E}$  в пространстве между обкладками можно приближенно считать постоянной. Найдите поправку  $E_1(r)$  к амплитуде  $E_0$ , обусловленную изменяющимся во времени магнитным полем в конденсаторе. Определите, для каких частот  $E_{1\max} < 0,1 E_0$ . При решении задачи считайте, что искажениями поля вблизи края пластин можно пренебречь. Полагайте, что магнитное поле в конденсаторе в основном определяется однородным электрическим полем  $E_0 \cos(\omega_0 t)$ .

**3.1.34. (У)** В цилиндрическом проводнике радиуса  $r_0$  протекает гармонический ток с частотой  $\omega_0$ . Проводник выполнен из металла с параметрами  $\mu = 1$  и  $\sigma = \sigma_0$ . На низ-

ких частотах комплексную амплитуду  $\dot{J}_0$  колебаний плотности тока проводимости в сечении проводника можно приближенно считать постоянной. Найдите поправку  $\dot{J}_1(r)$  к амплитуде  $\dot{J}_0$ , обусловленную изменяющимся во времени магнитным полем в проводнике. Определите, для каких частот  $J_{1\max} < 0,01 J_0$ . Считайте, что магнитное поле в проводнике в основном определяется током с амплитудой  $\dot{J}_0$ .

**3.1.35. (У)** Пользуясь уравнениями Максвелла, докажите, что сферически симметричное распределение тока с плотностью  $\bar{J} = J(r)\bar{1}_r$  не возбуждает магнитного поля.

**3.1.36. (У)** В плоскости  $z = 0$  равномерно распределен ток с поверхностной плотностью  $\bar{J}_{\text{пов}} = J_0 \cos(\omega_0 t)\bar{1}_y$ . Окружающая среда — воздух. Определите поля  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  во всем пространстве. При решении учитывайте, что поле в плоскости  $z = z_0$  в момент времени  $t$  определяется током в момент времени  $t - \frac{|z_0|}{c}$ , где  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ .

**3.1.37. (У)** В плоскости  $z = 0$  в момент времени  $t = 0$  включается равномерно распределенный постоянный ток с поверхностной плотностью  $\bar{J}_{\text{пов}} = J_0 \bar{1}_y$ . Окружающая среда — воздух. С помощью уравнений Максвелла в интегральной форме определите поля  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  во всем пространстве. При решении учитывайте, что процесс установления постоянных уровней полей  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  в пространстве представляет собой импульсную волну. Плоский фронт этой волны распространяется со скоростью  $\bar{v} = v\bar{1}_z$  при  $z > 0$  и  $\bar{v} = -v\bar{1}_z$  при  $z < 0$ . Покажите, что  $v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ .

## 3.2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

**3.2.1.** В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля:

$$\dot{\bar{E}} = 0,5e^{-j\pi/6}\bar{1}_x, \text{ В/м; } \dot{\bar{H}} = 0,8e^{-j\pi/3}\bar{1}_y + 1,2e^{-j\pi/4}\bar{1}_z, \text{ мА/м.}$$

Определите среднее значение вектора Пойнтинга.

**3.2.2.** В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля:

$$\dot{\vec{E}} = 15e^{j10^\circ} \bar{1}_\theta + 5e^{-j80^\circ} \bar{1}_r, \text{ В/м}; \quad \dot{\vec{H}} = 4 \cdot 10^{-3} e^{j10^\circ} \bar{1}_\phi, \text{ А/м}$$

(используется сферическая система координат). Определите среднее значение вектора Пойнтинга.

**3.2.3.** В некоторой точке пространства векторы электромагнитного поля описываются выражениями

$$\dot{\vec{E}} = 0,2 \cos(2\pi \cdot 10^9 t) \bar{1}_y, \text{ В/м};$$

$$\dot{\vec{H}} = 6,5 \cdot 10^{-3} \cos(2\pi \cdot 10^9 t - 30^\circ) \bar{1}_z, \text{ А/м}.$$

Определите зависимость вектора Пойнтинга от времени. Найдите среднее значение и амплитуду колебательной составляющей вектора Пойнтинга.

**3.2.4.** В некоторой точке пространства комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля  $\vec{E} = 8e^{j\pi/6} \bar{1}_z$ , В/м. Определите комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, если вектор Пойнтинга ориентирован под углом  $30^\circ$  к оси  $x$  и углом  $60^\circ$  к оси  $y$  (в плоскости  $ХОУ$ ) и имеет среднее значение  $130 \text{ мВт/м}^2$ . Считайте, что колебания электрического и магнитного полей происходят синфазно.

**3.2.5.** В заданной точке пространства средняя плотность потока мощности равна  $0,1 \text{ Вт/м}^2$ . Вектор напряженности электрического поля ориентирован параллельно оси  $x$  и характеризуется амплитудой колебаний  $3 \text{ В/м}$  (колебания гармонические). Вектор напряженности магнитного поля ориентирован параллельно оси  $y$ . Определите амплитуду колебаний вектора  $\vec{H}$ , если колебания вектора  $\vec{H}$  отстают по фазе на  $15^\circ$  от колебаний вектора  $\vec{E}$ .

**3.2.6.** В плоскости  $x = 0$  волновой процесс характеризуется плотностью потока мощности:

$$\bar{P}(t) = [4 + 5 \cos(2\pi \cdot 10^8 t)] \bar{1}_x, \text{ мВт/м}^2.$$

Определите частоту колебаний поля и разность фаз между колебаниями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Найдите энергию, переносимую волной за период колебаний поля через площадку размерами  $1 \times 1 \text{ м}$ , расположенную в плоскости  $x = 0$ .



**3.2.7.** В некотором объеме материальной среды с параметрами  $\varepsilon = 1$ ;  $\mu = 1,5$  создано магнитное поле, характеризующееся комплексной амплитудой

$$\vec{H} = 5e^{-j\pi/6} \vec{1}_x + 3,5e^{j\pi/4} \vec{1}_y, \text{ А/м.}$$

Определите среднее значение плотности энергии магнитного поля.

**3.2.8.** В материальной среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 80$ ,  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $10^{-3}$  См/м вектор напряженности электрического поля:

$$\vec{E}(t) = 15\cos(10^8 t) \vec{1}_x + 9\cos(10^8 t + \pi/4) \vec{1}_z, \text{ В/м.}$$

Определите среднее значение плотности энергии электрического поля и среднее значение плотности мощности тепловых потерь.

**3.2.9.** Определите среднее значение энергии электрического поля, накопленной в конденсаторе, к которому подведено гармоническое напряжение с амплитудой 5 В. Расстояние между пластинами 2 мм, площадь пластин  $8 \text{ см}^2$ , относительная проницаемость диэлектрика 2,6. Считайте, что эффектами искажения поля вблизи края пластин можно пренебречь.

**3.2.10.** Определите среднее значение мощности тепловых потерь в плоском конденсаторе, к которому подведено напряжение  $u = 1,5\cos(10^7 t)$ , В. Расстояние между пластинами 2 мм, площадь пластин  $10 \text{ см}^2$ . Между пластинами находится диэлектрик с  $\varepsilon = 1,5$  и удельной проводимостью  $2 \cdot 10^{-7}$  См/м. Найдите добротность конденсатора по формуле  $Q = 2\pi W_{\text{зап}}/W_{\text{пт}}$ , где  $W_{\text{зап}}$  — средняя энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе,  $W_{\text{пт}}$  — энергия, теряемая за период колебаний поля. Считайте, что эффектами искажения поля вблизи края пластин можно пренебречь.

**3.2.11.** Напряжение между пластинами плоского воздушного конденсатора убывает по закону  $u(t) = U_0 \exp(-\alpha t)$ . Пластины имеют форму дисков диаметром  $D$  и образуют воздушный зазор толщиной  $h$ . Получите выражение для мгновенного значения вектора Пойнтинга в зазоре на расстоянии  $r$  от центра пластин. Найдите формулу для

мгновенного значения отдаваемой конденсатором мощности. Считайте, что потерями в воздухе и искажением поля вблизи края пластин можно пренебречь.

**3.2.12.** К плоскому воздушному конденсатору с расстоянием между пластинами  $h$  приложено напряжение  $u = U_0 \cos(\omega_0 t)$ . Пластины имеют форму дисков диаметром  $D$ . Определив среднее значение вектора Пойнтинга в пространстве между пластинами, докажите, что средняя мощность, вносимая в конденсатор, равна нулю. Считайте, что потерями в воздухе и искажением поля вблизи края пластин можно пренебречь.

**3.2.13.** В среде с потерями заданы комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля плоской волны:

$$\vec{E} = 0,5e^{-0,01x}e^{-j0,03x}\vec{1}_y, \text{ В/м};$$

$$\vec{H} = 0,01e^{-0,01x}e^{-j(0,03x+\pi/10)}\vec{1}_z, \text{ А/м}.$$

Определите среднее значение вектора Пойнтинга. Найдите среднюю мощность, переносимую волной через квадратную площадку размерами  $1 \times 1$  м, расположенную в плоскости  $x = 100$  м.

**3.2.14.** Пучок излучения оптического квантового генератора (лазера) направлен по оси  $x$ . Комплексные амплитуды векторов поля в пучке

$$\vec{E} = 7e^{-0,02x}e^{-j0,4x}\vec{1}_y, \text{ В/м};$$

$$\vec{H} = 0,008e^{-0,02x}e^{-j(0,4x+2,87^\circ)}\vec{1}_z, \text{ А/м}.$$

Площадь поперечного сечения пучка  $4 \text{ мм}^2$ . Определите среднюю мощность тепловых потерь в объеме пучка, ограниченном сечениями  $x_1 = 10$  м и  $x_2 = 100$  м.

**3.2.15.** Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля в диэлектрике:

$$\vec{E} = 0,25e^{-0,15z}e^{-j1,5z}\vec{1}_x, \text{ В/м}.$$

Диэлектрик характеризуется удельной проводимостью  $\sigma_d = 0,05 \text{ См/м}$ . Определите среднюю мощность тепловых потерь в кубическом объеме с размерами  $1 \times 1 \times 1$  м. Одна из вершин куба находится в центре координат, а противоположная ей вершина имеет координаты  $x = y = z = 1$  м. Найдите средний поток вектора Пойнтинга через поверхность куба.

### 3.2.16. Векторы электромагнитного поля в вакууме

$$\vec{H} = H_m(r) \cos(\omega t - \beta r) \vec{1}_\varphi; \quad \vec{E} = 120\pi H_m(r) \cos(\omega t - \beta r) \vec{1}_0,$$

где  $H_m(r)$  — амплитуда колебаний вектора  $\vec{H}$  (используется сферическая система координат),  $\beta = \omega/c$  — коэффициент фазы. Средняя мощность, переносимая через сферу любого радиуса,  $P_0 = \text{const}$ . Определите функцию  $H_m(r)$ .

**3.2.17.** Сферическая волна характеризуется комплексными амплитудами векторов поля:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (40/r) e^{-0,015r} e^{-j0,43r} \vec{1}_0, \text{ В/м;} \\ \vec{H} &= (0,3/r) e^{-0,015r} e^{-j(0,43r+2^\circ)} \vec{1}_\varphi, \text{ А/м.} \end{aligned}$$

Определите среднюю мощность, переносимую волной через сферу радиуса 100 м.

**3.2.18.** Сферическая волна характеризуется комплексными амплитудами векторов поля:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (200/r) e^{-0,09r} e^{-j5,1r} \vec{1}_0, \text{ В/м;} \\ \vec{H} &= (1,3/r) e^{-0,09r} e^{-j(5,1r+1^\circ)} \vec{1}_\varphi, \text{ А/м.} \end{aligned}$$

Определите среднюю мощность тепловых потерь в объеме, ограниченном сферами с радиусами 10 и 20 м. Сторонние токи в рассматриваемом объеме отсутствуют.

**3.2.19.** Комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  в сферической волне:

$$\vec{E} = (20/r) e^{-0,01r} e^{-j(1,15r+\pi/8)} \vec{1}_0, \text{ В/м.}$$

Удельная проводимость среды 0,005 См/м. Определите среднюю мощность тепловых потерь в объеме, ограниченном сферами с радиусами 20 и 30 м. Сторонние токи в рассматриваемом объеме отсутствуют.

**3.2.20.** В тонком проводящем плоском листе толщиной  $d$  протекает постоянный ток с плотностью  $J_0$ . Удельная проводимость материала  $\sigma$ . Покажите, что поток вектора Пойнтинга, проходящий внутрь участка листа размерами  $1 \times 1$  м, равен мощности тепловых потерь в объеме проводника, ограниченном этой поверхностью.

**3.2.21.** В круглом цилиндрическом проводнике диаметром  $d$  существует гармонический ток  $i = I_0 \cos(\omega_0 t)$ .

Провод выполнен из металла с удельной проводимостью  $\sigma_0$ . Плотность тока равномерно распределена по поперечному сечению провода. Найдите среднее значение вектора Пойнтинга на поверхности провода. Рассмотрев отрезок провода единичной длины, покажите, что поток вектора Пойнтинга, направленный внутрь провода, равен мощности тепловых потерь.

**3.2.22.** Как известно, уравнение баланса мгновенных мощностей (теорема Пойнтинга для мгновенных мощностей) содержит член  $\partial W / \partial t$ , где  $W = \int (w_э + w_м) dV$  — энергия электромагнитного поля в объеме  $V$ ;  $w_э = \varepsilon_a E^2 / 2$  и  $w_м = \mu_a H^2 / 2$  — плотности энергии электрического и магнитного полей соответственно. Покажите, что в случае гармонических полей член  $\partial W / \partial t$  не влияет на баланс средних мощностей (мощностей, усредненных за период колебаний).

**3.2.23.** В некотором объеме  $V$  вектор напряженности электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_E)$ , вектор плотности стороннего электрического тока  $\vec{J}_{\text{ст}} = \vec{J}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_I)$ . Получите выражение для мощности сторонних источников, выделяемой в объеме  $V$ . Найдите среднее значение и амплитуду колеблющейся части этой мощности. Считайте, что начальные фазы  $\varphi_E$  и  $\varphi_I$  постоянны в пределах объема  $V$ .

**3.2.24.** В некотором объеме вектор напряженности электрического поля:

$$\vec{E} = 1,5 \cos(10^9 t) \vec{1}_x + 1,5 \sin(10^9 t) \vec{1}_y;$$

вектор плотности стороннего электрического тока:

$$\vec{J}_э = 2,5 \cos(10^9 t + 3\pi/4) \vec{1}_x, \text{ мА/м}^2.$$

Определите, в каком направлении передается мощность: от стороннего источника к полю или наоборот. Найдите среднюю за период объемную плотность данной мощности.

**3.2.25. (У)** В некотором объеме  $V$  задано распределение комплексных амплитуд векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Токи проводимости отсутствуют. В связи с тем, что вектор поляризации и вектор намагниченности среды колеблются с запаздыванием по фазе относительно векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , среда на частоте  $\omega_0$  характеризуется комплексными относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями

$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ ;  $\tilde{\mu} = \mu' - j\mu''$ , где  $\varepsilon'' > 0$  и  $\mu'' > 0$ . Получите выражение для средней за период колебаний поля мощности потерь в объеме  $V$ .

**3.2.26. (У)** Напряженность магнитного поля в феррите:  $H = 0,25 \cos(4\pi \cdot 10^7 t)$ , А/м. Вещественная часть комплексной относительной магнитной проницаемости  $\mu = 5$ . Средняя мощность потерь в объеме  $10 \text{ см}^3$  составляет 25 мкВт. Найдите мнимую часть относительной магнитной проницаемости среды. Определите знак и абсолютное значение фазового сдвига между колебаниями векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . Считайте, что токами проводимости можно пренебречь.

### 3.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**3.3.1.** Плоскость  $XOY$  декартовой системы координат разделяет среды с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1 = 2$ ,  $\varepsilon_2 = 4$ . Вектор электрического смещения в 1-й среде  $\vec{D}_1 = 5\vec{1}_x + 5\vec{1}_z$ , нКл/м<sup>2</sup>. Определите величину вектора  $\vec{D}$  во 2-й среде, а также угол, образуемый этим вектором с направлением нормали к поверхности среды. Поверхностный электрический заряд отсутствует.

**3.3.2.** Плоская поверхность разделяет две среды с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1 = 2$  и  $\varepsilon_2 = 6$ . Вектор напряженности электрического поля в 1-й среде имеет величину 2 В/м и образует угол  $30^\circ$  с направлением нормали к поверхности раздела. Определите величину и направление вектора  $\vec{E}$  во второй среде. Поверхностный электрический заряд отсутствует.

**3.3.3.** Плоская поверхность разделяет воздух и диэлектрик с  $\varepsilon = 2$ . Вектор напряженности электрического поля в воздухе ориентирован под углом  $45^\circ$  к поверхности раздела. Определите тангенциальную составляющую вектора  $\vec{E}$  во 2-й среде, если в этой среде нормальная составляющая равна 0,8 В/м. Поверхностный электрический заряд отсутствует.

**3.3.4.** Плоская поверхность разделяет воздух и диэлектрик. Вектор напряженности электрического поля

в воздухе образует угол  $35^\circ$  с направлением нормали к поверхности раздела. Для вектора  $\vec{E}$  в диэлектрике этот угол равен  $50^\circ$ . Определите относительную проницаемость диэлектрика. Поверхностный электрический заряд отсутствует.

**3.3.5.** Плоская поверхность разделяет две среды с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 2$ . В 1-й среде вектор электрического смещения имеет величину  $5 \cdot 10^{-10}$  Кл/м<sup>2</sup> и ориентирован под углом  $45^\circ$  к поверхности раздела. Во 2-й среде величина вектора  $\vec{D}$  равна  $2,5 \cdot 10^{-10}$  Кл/м<sup>2</sup>. Определите плотность поверхностного заряда.

**3.3.6.** Плоскость  $ХОУ$  декартовой системы координат разделяет две среды с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1 = 1,5$  и  $\varepsilon_2 = 4$ . Вектор напряженности электрического поля в 1-й среде ( $z > 0$ ):  $\vec{E}_1 = 5\vec{1}_x + 5\vec{1}_z$ , В/м, во 2-й среде ( $z < 0$ ):  $\vec{E}_2 = 5\vec{1}_x + 10\vec{1}_z$ , В/м. Определите плотность поверхностного заряда.

**3.3.7.** Плоская поверхность разделяет две среды с относительными магнитными проницаемостями  $\mu_1 = 2$  и  $\mu_2 = 10$ . Вектор магнитной индукции в 1-й среде имеет величину  $2 \cdot 10^{-8}$  Тл и образует угол  $55^\circ$  с направлением нормали к поверхности раздела. Определите величину и направление вектора  $\vec{B}$  во 2-й среде. Поверхностный электрический ток отсутствует.

**3.3.8.** Плоскость  $ХОУ$  декартовой системы координат совмещена с поверхностью раздела двух сред, имеющих относительные магнитные проницаемости  $\mu_1 = 5$  и  $\mu_2 = 2$ . Вектор напряженности магнитного поля в 1-й среде:  $\vec{H}_1 = 0,3\vec{1}_y + 0,2\vec{1}_z$ , А/м. Определите величину вектора  $\vec{H}$  во 2-й среде и угол, который образует этот вектор с направлением нормали к поверхности раздела. Поверхностный электрический ток отсутствует.

**3.3.9.** Плоская поверхность разделяет воздух и среду с параметрами  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $\mu_2 = 15$ . В этой среде вектор напряженности магнитного поля образует угол  $20^\circ$  с направлением нормали к поверхности раздела. Определите нормальную составляющую вектора  $\vec{H}$  в воздухе, если тангенциальная составляющая в воздухе равна 15 мА/м. Поверхностный электрический ток отсутствует.

**3.3.10.** Полая металлическая труба (волновод) имеет поперечное сечение прямоугольной формы размерами  $a \times b$ . Внутренняя поверхность волновода образована пересечением плоскостей  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  и  $y = b$ . Определите, какие проекции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (в декартовой системе координат) равны нулю: а) в плоскости  $x = a$ ; б) в плоскости  $y = 0$ . Считайте, что металл является идеальным проводником.

**3.3.11.** Внутренняя поверхность полого металлического волновода представляет собой цилиндр радиуса  $r_0$ . Определите, какие проекции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (в цилиндрической системе координат) равны нулю на данной поверхности. Считайте, что металл является идеальным проводником.

**3.3.12.** Определите, какие проекции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (в сферической системе координат) равны нулю на поверхности идеально проводящего шара радиуса  $r_0$ .

**3.3.13.** Плоскость  $XOY$  декартовой системы координат является границей раздела воздуха и идеального проводника. По поверхности проводника протекает равномерно распределенный ток, ориентированный вдоль оси  $y$ . При этом через отрезок оси  $x$  длиной 12 см проходит ток 25 мА. Определите тангенциальную к поверхности составляющую вектора напряженности магнитного поля.

**3.3.14.** По поверхности идеально проводящего цилиндра радиуса  $r_0 = 5$  см протекает ток с плотностью  $\vec{J}_{\text{пов}} = 0,15 \vec{1}_z$ , А/м. Определите величину полного тока, а также тангенциальные составляющие полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на поверхности цилиндра.

**3.3.15.** По поверхности идеально проводящего шара радиуса  $r_0 = 3$  см задана комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного тока:  $\vec{J}_{\text{пов}} = 50 \sin \theta \vec{1}_\theta$ , мА/м. Найдите тангенциальные составляющие полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на поверхности шара. Определите амплитуду тока, пересекающего «экватор» шара (окружность  $r = 3$  см;  $\theta = \pi/2$ ).

**3.3.16.** Коаксиальная линия передачи представляет собой два концентрических проводящих цилиндра с радиусами  $a = 2$  см и  $b = 5$  см. На поверхности внутреннего цилиндра задан вектор напряженности магнитного поля:  $\vec{H}(a) = 0,5 \vec{1}_\varphi$ , А/м. По проводникам в противоположных

направлениях протекает ток одинаковой величины. Определите вектор плотности тока на поверхности внутреннего цилиндра, вектор плотности тока и тангенциальную составляющую вектора  $\vec{H}$  на поверхности внешнего цилиндра. Считайте, что проводники выполнены из идеального металла.

**3.3.17.** Полая металлическая труба (волновод) имеет поперечное сечение прямоугольной формы размерами  $a \times b$ . Внутренняя поверхность волновода образована пересечением плоскостей  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  и  $y = b$ . На данной поверхности задана комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного тока:

$$\vec{j}_{\text{пов}} = \begin{cases} J_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-jhz) \vec{1}_z, & \text{при } y = 0, y = b; \\ J_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp(-jhz) \vec{1}_z, & \text{при } x = 0, x = a. \end{cases}$$

Считая металл идеальным, определите тангенциальные составляющие полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на внутренней поверхности волновода.

**3.3.18. (У)** В плоскости  $z = 0$  задана комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного тока  $\vec{j}_{\text{пов}} = \vec{j}_{\text{пов}}(x) \vec{1}_x$ . Частота колебаний  $\omega$ . Получите выражение для комплексной амплитуды плотности поверхностного заряда.

**3.3.19. (У)** Полупространство  $z > 0$  заполнено воздухом, в полупространстве  $z < 0$  находится идеально проводящая среда. В плоскости  $z = 0$  распределен ток с поверхностной плотностью  $\vec{j}_0 = \vec{j}_0 \exp(-j\beta_0 x) \vec{1}_x$ , частота колебаний  $\omega$ . Получите выражения для комплексных амплитуд векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в плоскости  $z = 0$ .

**3.3.20. (У)** Участок идеально проводящей поверхности площадью  $S$  ограничен замкнутым контуром  $L$ . На контуре  $L$  задана комплексная амплитуда тангенциальной к поверхности составляющей  $\vec{H}_\tau$ , а в пределах поверхности  $S$  — нормальной составляющей  $\vec{E}_n$ . Над идеально проводящей поверхностью находится воздух. Частота колебаний  $\omega$ . Получите выражение, связывающее циркуляцию составляющей  $\vec{H}_\tau$  по контуру  $L$  с: а) распределением составляющей  $\vec{E}_n$ ; б) распределением плотности поверхностного заряда  $\sigma_{\text{пов}}$ .



# ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

## ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

**Поле** плоской электромагнитной волны, распространяющейся в сторону увеличения координаты  $z$ , описывается выражениями:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}} &= (\dot{E}_{x0} \bar{1}_x + \dot{E}_{y0} \bar{1}_y) \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z); \\ \dot{\vec{H}} &= (\dot{H}_{x0} \bar{1}_x + \dot{H}_{y0} \bar{1}_y) \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z),\end{aligned}$$

где

$$\frac{\dot{E}_{x0}}{\dot{H}_{y0}} = -\frac{\dot{E}_{y0}}{\dot{H}_{x0}} = Z_c$$

— характеристическое сопротивление среды;

$\beta = \operatorname{Re}(\omega \sqrt{\mu_a \tilde{\epsilon}_a})$  — коэффициент фазы;

$\alpha = -\operatorname{Im}(\omega \sqrt{\mu_a \tilde{\epsilon}_a})$  — коэффициент ослабления.

Комплексная диэлектрическая проницаемость среды:

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta),$$

где  $\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0$ ;  $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}$ ;  $\delta$  — угол диэлектрических потерь.

В приведенных выше формулах для  $\alpha$  и  $\beta$  берется значение  $\sqrt{\tilde{\epsilon}_a}$ , расположенное в IV квадранте комплексной плоскости:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_a |\tilde{\epsilon}_a|} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right); \quad \alpha = \omega \sqrt{\mu_a |\tilde{\epsilon}_a|} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right); \quad \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Характеристическое сопротивление среды:

$$Z_c = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(j \frac{\delta}{2}\right),$$

где  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}$  — характеристическое сопротивление вакуума.

Коэффициент фазы и коэффициент ослабления можно также определять по следующим формулам:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Фазовая скорость:

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_{\Phi}}{f}.$$

Групповая скорость:

$$v_{\text{гр}} = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1}.$$

Погонное затухание волны, в децибелах:

$$\Delta = 20 \lg \left[ \frac{E(0)}{E(1 \text{ м})} \right] = 10 \lg \left[ \frac{\Pi_{\text{ср}}(0)}{\Pi_{\text{ср}}(1 \text{ м})} \right] = 20 \lg(e) \cdot \alpha \approx 8,686 \cdot \alpha.$$

Если  $\operatorname{tg} \delta = 0$  (среда без потерь), то

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon}; \quad \alpha = 0; \quad v_{\Phi} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}; \quad \lambda = \frac{c}{f \sqrt{\mu\varepsilon}}; \quad Z_c = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

В среде с малыми потерями  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ , и

$$\beta \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon}; \quad \alpha \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} \approx \frac{\sigma}{2} Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}};$$

$$v_{\Phi} \approx \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}; \quad \lambda \approx \frac{c}{f \sqrt{\mu\varepsilon}}; \quad Z_c \approx Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Если  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$  (хорошо проводящая среда), то

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}}; \quad v_\Phi \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}};$$

$$\lambda \approx 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}}; \quad Z_c \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} (1 + j).$$

В бесстолкновительной плазме

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega^2},$$

где

$$\omega_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$$

— плазменная (ленгмюровская) частота;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд электрона;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса электрона;  $N_e$  — концентрация электронов, выраженная в  $\text{м}^{-3}$ . С учетом подстановок  $\omega_{\text{пл}} = 56,42 \sqrt{N_e}$  или  $f_{\text{пл}} = 8,979 \sqrt{N_e}$ . Если  $\omega > \omega_{\text{пл}}$

(докритическая плазма), то  $\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}$ ;  $\alpha = 0$ . Групповая скорость в докритической плазме  $v_{\text{гр}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega^2}}$ . Если  $\omega < \omega_{\text{пл}}$

(закритическая плазма), то  $\beta = 0$ ;  $\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega^2} - 1}$ .

При учете влияния столкновений в плазме комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\tilde{\varepsilon} = 1 - \frac{\frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega^2}}{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2}} - j \frac{\frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega^2}}{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2}} \frac{\nu}{\omega},$$

где  $\nu$  — частота соударений электронов с нейтральными молекулами. При этом для определения  $\alpha$  и  $\beta$  следует брать значение  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ , расположенное в IV квадранте комплексной плоскости.

Индукция постоянного магнитного поля в сверхпроводнике изменяется по закону

$$\bar{B}(z) = \bar{B}(0) \cdot \exp\left(-\frac{z}{\lambda_L}\right),$$

где  $z$  — координата, отсчитываемая по нормали вглубь сверхпроводника;

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 N_s q_s^2}}$$

— параметр, называемый *лондоновской длиной*;  $N_s$ ,  $q_s$ ,  $m_s$  — концентрация, заряд и масса сверхпроводящих носителей соответственно. Поскольку носителями сверхпроводящего тока являются *куперовские* пары электронов, то  $N_s = N_e \delta_s / 2$ ;  $q_s = 2e$ ;  $m_s = 2m_e$ , здесь  $N_e$  — концентрация свободных электронов в металле,  $\delta_s$  — доля свободных электронов, объединившихся в куперовские пары. Подстановки показывают, что

$$\lambda_L = \frac{c}{(\omega_{\text{пл}} \sqrt{\delta_s})},$$

где  $\omega_{\text{пл}}$  — плазменная частота.

В случае переменного электромагнитного поля свойства металла идентичны свойствам плазмы, в которой часть электронов не испытывает соударений. При этом

$$\tilde{\varepsilon} = 1 - \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega^2} \left( \delta_s + \frac{\delta_n}{1 - j \frac{\nu}{\omega}} \right),$$

где  $\nu$  — частота соударений *нормальных* электронов;  $\delta_n = 1 - \delta_s$  — доля нормальных электронов. Если температура  $T$  больше критической температуры  $T_c$ , то  $\delta_n = 1$  и  $\delta_s = 0$ .

В случае  $T < T_c$  доля нормальных электронов

$$\delta_n = (T/T_c)^4.$$

При решении задач может оказаться полезным воспользоваться комплексной удельной проводимостью

$$\tilde{\sigma} = \sigma_n - j\sigma_s.$$

Связь между  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\varepsilon}$  определяется соотношением

$$\tilde{\varepsilon} = 1 - j \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0 \omega}.$$

Сверхпроводящая часть комплексной удельной проводимости:

$$\sigma_s = \frac{\omega_{\text{пл}}^2 \epsilon_0}{\omega} \delta_s = \frac{1}{\omega \mu_0 \lambda_L^2}.$$

Нормальная часть комплексной удельной проводимости при  $\nu \gg \omega$

$$\sigma_n \approx \frac{\omega_{\text{пл}}^2 \epsilon_0}{\nu} \delta_n.$$

## 4.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ВОЛН

**4.1.1.** Плоская электромагнитная волна с частотой 10 ГГц распространяется в среде без потерь с относительными проницаемостями  $\epsilon = 10$ ;  $\mu = 2$ . Определите коэффициент фазы, фазовую скорость, длину волны и характеристическое сопротивление среды.

**4.1.2.** Плоская электромагнитная волна распространяется в диэлектрике без потерь. Расстояние между соседними синфазными фронтами равно 20 м, скорость перемещения фронтов составляет  $1,5 \cdot 10^8$  м/с. Определите относительную диэлектрическую проницаемость среды, частоту колебаний, фазовую постоянную и длину волны.

**4.1.3.** Определите частоты, для которых сухая почва, влажная почва и морская вода могут считаться металлоподобными. Считайте, что для металлоподобной среды плотность тока проводимости превышает плотность тока смещения по крайней мере в 10 раз. Относительная магнитная проницаемость названных сред:  $\mu = 1$ .

**Примечание:** а) для сухой почвы относительная диэлектрическая проницаемость:  $\epsilon = 5$ , удельная проводимость:  $\sigma = 10^{-3}$  См/м;

б) для влажной почвы  $\epsilon = 30$ ,  $\sigma = 0,08$  См/м;

в) для морской воды  $\epsilon = 75$ ,  $\sigma = 4$  См/м.

**4.1.4.** Плоская электромагнитная волна с частотой 10 МГц распространяется в среде с относительными проницаемостями  $\epsilon = 3,5$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $10^{-3}$  См/м. Определите фазовую скорость и характеристическое сопротивление среды.

**4.1.5.** Плоская электромагнитная волна с частотой 0,3 ГГц распространяется в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 4$ ;  $\mu = 3$  и удельной проводимостью 0,02 См/м. Определите длину волны и коэффициент ослабления.

**4.1.6.** Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 4$ ;  $\mu = 1,5$  и удельной проводимостью 0,005 См/м. Коэффициент ослабления в 5 раз меньше коэффициента фазы. Определите частоту колебаний и коэффициент ослабления.

**4.1.7.** Измерения, проведенные на некоторой частоте, показали, что длина волны в диэлектрике с потерями в 1,8 раза меньше длины волны в вакууме. Относительные проницаемости среды  $\varepsilon = 3$ ;  $\mu = 1$ . Определите тангенс угла электрических потерь и комплексное характеристическое сопротивление диэлектрика.

**4.1.8.** Определите, во сколько раз уменьшается амплитуда плоской волны на расстоянии, равном длине волны в среде. Рассмотрите распространение в среде с тангенсом угла потерь, равным: а) 0,1; б) 1,0; в) 10,0.

**4.1.9.** Плоская электромагнитная волна с частотой 300 МГц распространяется в диэлектрике без потерь с  $\mu = 1$ . Измерения показали, что разность фаз колебаний вектора  $\vec{E}$  в точках, разнесенных на 10 см в направлении распространения, составляет  $60^\circ$ . Определите фазовую скорость, относительную диэлектрическую проницаемость и характеристическое сопротивление диэлектрика.

**4.1.10. (У)** Плоская электромагнитная волна распространяется в диэлектрике без потерь с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 3$ ;  $\mu = 1$ . В начале координат

$$\vec{E}(t) = 0,4 \cos(2 \cdot 10^9 t) \vec{1}_x + 0,4 \sin(2 \cdot 10^9 t) \vec{1}_y, \text{ В/м.}$$

Определите вид поляризации волны. Найдите комплексную амплитуду вектора  $\vec{E}$  на расстоянии 0,5 м от начала координат в направлении распространения.

**4.1.11. (У)** Плоская электромагнитная волна с правой круговой поляризацией распространяется вдоль оси  $z$  в диэлектрике без потерь с параметрами  $\varepsilon = 2,08$ ;  $\mu = 1$ . Час-

тота колебаний 3 ГГц. Определите вектор  $\vec{E}(t)$  в плоскости  $z = 2,5$  см, если при  $z = 0$  и  $t = 0$   $\vec{E} = 10\vec{1}_y$ , В/м.

**4.1.12.** Плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси, которая лежит в плоскости  $ХОУ$  и образует угол  $30^\circ$  с осью  $x$  и угол  $60^\circ$  с осью  $y$ . Частота колебаний 10 ГГц, среда — воздух. В начале координат  $\vec{E} = 0,8\vec{1}_z$ , В/м. Запишите комплексную амплитуду  $\vec{E}$  как функцию координат  $x$  и  $y$ .

**4.1.13.** Плоская электромагнитная волна распространяется в воздухе. Волновой вектор  $\vec{k} = k_x\vec{1}_x + k_z\vec{1}_z$ , где  $k_x$  и  $k_z$  — положительные вещественные числа;  $k_x = 1,074$  1/м. В начале координат  $\vec{H} = 0,08 \cdot \vec{1}_y$ , А/м. Частота колебаний 150 МГц. Найдите составляющую  $k_z$ . Запишите комплексную амплитуду  $\vec{E}$  как функцию координат  $x$  и  $z$ .

**4.1.14.** Плоская электромагнитная волна с частотой 400 МГц распространяется в среде с  $\mu = 1$ . Измерения показали, что на расстоянии 6 см амплитуда волны уменьшается в 1,2 раза, а начальная фаза колебаний уменьшается на  $60^\circ$ . Определите относительную диэлектрическую проницаемость и удельную проводимость среды.

**4.1.15.** Плоская электромагнитная волна распространяется в сторону увеличения координаты  $x$ . В плоскостях  $x_1 = 5$  м и  $x_2 = 10$  м отношение амплитуд  $E_m(x_2)/E_m(x_1) = 0,95$ , а разность фаз колебаний электрического вектора  $\varphi_E(x_2) - \varphi_E(x_1) = -\pi/3$ . Определите коэффициент фазы, длину волны, коэффициент ослабления и угол потерь.

**4.1.16.** Плоская электромагнитная волна распространяется в сторону увеличения координаты  $z$ . В плоскостях  $z_1 = 20$  м и  $z_2 = 50$  м отношение амплитуд  $E_m(z_2)/E_m(z_1) = 0,98$ , а разность фаз колебаний электрического вектора  $\varphi_E(z_2) - \varphi_E(z_1) = -80^\circ$ . Определите отношение амплитуд и разность фаз колебаний вектора  $\vec{E}$  в плоскостях  $z_1 = 20$  м и  $z_3 = 110$  м.

**4.1.17.** Плоская электромагнитная волна с частотой 1 ГГц распространяется в сторону увеличения координаты  $z$  в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 5$ ;  $\mu = 2$  и удельной проводимостью 0,4 См/м. В плоскости  $z_1 = 1$  см амплитуда колебаний вектора  $\vec{H}$  равна 20 мА/м, начальная фаза колебаний  $\vec{H}$  составляет  $30^\circ$ . Определите

амплитуду и начальную фазу колебаний вектора  $\vec{H}$  в плоскости  $z_2 = 3$  см.

**4.1.18.** Плоская волна распространяется в сторону увеличения координаты  $x$  в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 15$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $0,02$  См/м. В плоскости  $x = 0$

$$\vec{E}(t) = 7 \cos(5 \cdot 10^8 t + \pi/6) \vec{1}_y, \text{ мВ/м.}$$

Определите вектор  $\vec{E}(t)$  в плоскости  $x_1 = 0,5$  м.

**4.1.19.** Плоская электромагнитная волна распространяется в направлении положительных значений координаты  $z$  в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 2,5$ ;  $\mu = 1$  и тангенсом угла потерь, равным  $0,03$ . В плоскости  $z = 0$

$$\vec{H}(t, 0) = 5 \cos(6\pi \cdot 10^7 t) \vec{1}_x + 5 \sin(6\pi \cdot 10^7 t) \vec{1}_y, \text{ мА/м.}$$

Определите вектор  $\vec{H}(t)$  в плоскости  $z = 1$  м.

**4.1.20.** Плоская электромагнитная волна с частотой  $300$  МГц распространяется в диэлектрике без потерь с параметрами  $\varepsilon = 3,8$ ;  $\mu = 1$ . В плоскости  $y = 0$  комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля  $\vec{E} = 2 \vec{1}_x + j2 \vec{1}_z$ , мВ/м. Волна распространяется в сторону увеличения координаты  $y$ . Определите комплексную амплитуду вектора  $\vec{H}$  данной волны как функцию координаты  $y$ .

**4.1.21. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой  $30$  МГц распространяется в вакууме в сторону увеличения координаты  $z$ . Поляризация волны — эллиптическая с правым направлением вращения. Отношение большой полуоси эллипса к малой полуоси равно  $2$ . Большая полуось эллипса поляризации вектора  $\vec{E}$  параллельна оси  $y$ . При  $t = 0$  и  $z = 0$   $\vec{E} = 5 \vec{1}_x + 5 \vec{1}_y$ , В/м. Определите комплексные амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  как функции координаты  $z$ .

**4.1.22.** Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией распространяется в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 10$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $1,5 \cdot 10^{-4}$  См/м. Разность фаз колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  составляет  $10^\circ$ . Определите частоту колебаний и длину волны в среде.

**4.1.23.** Длина волны в диэлектрике с потерями в  $1,5$  раза меньше по сравнению с длиной волны в вакууме. Поляриза-



ция волны — линейная. Разность фаз колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  составляет  $15^\circ$ , относительная магнитная проницаемость  $\mu = 1$ . Определите относительную диэлектрическую проницаемость и характеристическое сопротивление среды.

**4.1.24.** Плоская электромагнитная волна с частотой  $5,5$  МГц распространяется в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 5$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $10^{-3}$  См/м. Волна распространяется в направлении увеличения координаты  $x$ . В плоскости  $x = 0$  амплитуда колебаний вектора  $\vec{E}$  равна  $0,15$  В/м. Определите амплитуду колебаний вектора  $\vec{E}$  в плоскости  $x = \lambda$ . Найдите разность фаз колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

**4.1.25.** Плоская электромагнитная волна с частотой  $150$  МГц распространяется в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 2,5$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $0,01$  См/м. В плоскости  $y = 0$  комплексная амплитуда  $\vec{H} = 25e^{j\pi/6}\vec{1}_x$ , мА/м. Волна распространяется в направлении увеличения координаты  $y$ . Определите комплексную амплитуду вектора  $\vec{E}$  как функцию координаты  $y$ .

**4.1.26.** Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 4$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $0,003$  См/м. В плоскости  $x = 0$

$$\vec{E}(t) = 2\sin(2 \cdot 10^8 t - \pi/6)\vec{1}_z, \text{ мВ/м.}$$

Волна распространяется в направлении увеличения координаты  $x$ . Определите вектор  $\vec{H}(t, x)$ .

**4.1.27. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой  $3$  ГГц распространяется в направлении увеличения координаты  $z$  в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 3$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $0,3$  См/м. Поляризация волны — левая круговая, причем в плоскости  $z = 0$  при  $t = 0$  вектор  $\vec{H} = 10\vec{1}_y$ , мА/м. Определите комплексные амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в плоскости  $z = 0$ .

**4.1.28.** В некоторой точке пространства известны векторы поля плоской волны:

$$\vec{E}(t) = 0,8\cos(2\pi \cdot 10^8 t + 10^\circ)\vec{1}_z, \text{ В/м;}$$

$$\vec{H}(t) = 5\cos(2\pi \cdot 10^8 t)\vec{1}_x, \text{ мА/м.}$$

Определите относительную диэлектрическую проницаемость и удельную проводимость среды (считайте, что относительная магнитная проницаемость  $\mu = 1$ ).

**4.1.29.** Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме, причем вектор  $\vec{H}$  ориентирован параллельно оси  $x$ . В начале координат  $\vec{E} = 2\vec{1}_y + 4\vec{1}_z$ , В/м. Определите комплексную амплитуду  $\vec{H}$  в начале координат. Найдите среднее значение вектора Пойнтинга.

**4.1.30.** Плоская электромагнитная волна с частотой 600 МГц распространяется в вакууме. Среднее значение вектора Пойнтинга  $\vec{P}_{cp} = 10\vec{1}_z + 5\vec{1}_x$ , мВт/м<sup>2</sup>. Вектор  $\vec{E}$  ориентирован параллельно оси  $y$ , причем в начале координат начальная фаза колебаний вектора  $\vec{E}$  равна нулю. Определите комплексные амплитуды  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  во всем пространстве.

**4.1.31.** В диэлектрике без потерь с параметрами  $\varepsilon = 5$ ;  $\mu = 1$  распространяется плоская волна. При этом через площадку 10 см<sup>2</sup>, ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны, переносится средняя мощность 50 мВт. Определите амплитуду колебаний вектора  $\vec{E}$  и вектора  $\vec{H}$ . Поляризация волны — линейная.

**4.1.32. (У)** Плоская электромагнитная волна с правой круговой поляризацией распространяется в направлении увеличения координаты  $x$  в диэлектрике без потерь с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 9$ . Среднее значение вектора Пойнтинга равно 0,2 мВт/м<sup>2</sup>, частота поля составляет 3 ГГц. Определите комплексные амплитуды  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  как функции координаты  $x$ , если при  $x = 0$ ,  $t = 0$  вектор  $\vec{H}$  ориентирован параллельно оси  $y$ .

**4.1.33. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой 300 МГц распространяется в направлении увеличения координаты  $y$  в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 4$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью 0,03 См/м. В плоскости  $y = 0$  комплексная амплитуда  $\vec{H} = 0,02e^{-j30^\circ}\vec{1}_x$ , А/м. Определите среднее значение вектора Пойнтинга в плоскости  $y_1 = 20$  см.

**4.1.34.** Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с относительными проницаемостями  $\varepsilon = 5$ ;  $\mu = 1$  и удельной проводимостью 0,025 См/м. Среднее значение вектора Пойнтинга в плоскости  $z = 0$   $\vec{P}_{cp} = 150\vec{1}_z$ , мВт/м<sup>2</sup>.

Определите  $\bar{P}_{\text{ср}}$  в плоскости  $z = 0,1$  м на частотах 10 ГГц и 100 МГц.

**4.1.35.** Плоская волна с частотой 50 МГц распространяется в среде с параметрами  $\varepsilon = 6$ ;  $\mu = 1$ ;  $\sigma = 0,025$  См/м. Средняя плотность потока мощности в некоторой точке пространства равна  $10$  Вт/м<sup>2</sup>. Определите амплитуду напряженности электрического поля в данной точке.

**4.1.36.** Плоская волна с частотой 1 ГГц распространяется в среде с параметрами  $\varepsilon = 20$ ;  $\mu = 1$ ;  $\sigma = 0,7$  См/м. Комплексная амплитуда вектора  $\vec{H}$  в плоскости  $z = 0$   $\vec{H} = 20\vec{1}_x - j10\vec{1}_y$ , мА/м. Определите среднюю плотность потока мощности в данной плоскости.

**4.1.37.** Плоская волна распространяется в среде с параметрами  $\varepsilon = 30$ ;  $\mu = 1$ ;  $\sigma = 0,15$  См/м. В плоскости  $z = 0$   $\vec{E}(t) = 1,5\cos(2\pi \cdot 10^8 t)\vec{1}_y$ , В/м. Определите среднее значение и амплитуду колебательной составляющей вектора Пойнтинга в данной плоскости.

**4.1.38.** На частоте 1 ГГц мышечная ткань человека характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 50,5$  и удельной проводимостью  $\sigma = 1,35$  См/м. На этой же частоте жировая ткань имеет параметры  $\varepsilon = 6,0$  и  $\sigma = 0,091$  См/м. Для этих тканей определите расстояние, на котором среднее значение плотности потока мощности, переносимой плоской волной, убывает в 10 раз (ослабление 10 дБ).

**4.1.39.** На частоте 100 МГц мышечная ткань человека характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 73$  и удельной проводимостью  $\sigma = 0,87$  См/м. На частоте 10 ГГц мышечная ткань имеет параметры  $\varepsilon = 24$  и  $\sigma = 4,27$  См/м. Для этих частот определите расстояние, на котором среднее значение плотности потока мощности, переносимой плоской волной в мышечной ткани, убывает в 10 раз (ослабление 10 дБ).

**4.1.40. (У)** На поверхности Земли средняя плотность потока солнечного излучения  $135$  мВт/см<sup>2</sup>. Определите среднеквадратичное значение напряженности электрического поля бегущих волн солнечного света.

**4.1.41. (У)** На поверхности Земли среднеквадратичное значение напряженности магнитного поля бегущих волн

солнечного света равно  $1,892 \text{ А/м}$ . Расстояние от Земли до Солнца —  $1,496 \cdot 10^8 \text{ км}$ . Радиус Земли —  $6370 \text{ км}$ . Определите среднюю мощность солнечного излучения, падающего на поверхность Земли. Найдите полную мощность солнечного излучения, считая Солнце изотропным источником электромагнитных волн.

**4.1.42. (У)** Плоская волна с частотой  $\omega_0$  распространяется в среде без потерь с параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ . Комплексная амплитуда напряженности электрического поля:  $\bar{E} = E_0 \exp[j(\varphi_0 - \beta_0 z)] \bar{1}_y$ , где  $E_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\beta_0$  — вещественные величины. Определите мгновенную и среднюю плотности энергии электромагнитного поля данной волны.

**4.1.43. (У)** Плоская волна с частотой  $\omega_0$  распространяется в среде без потерь с параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ . Комплексная амплитуда напряженности электрического поля:  $\bar{E} = E_0 \cdot \exp[j(\varphi_0 - \beta_0 z)] \bar{1}_y$ , где  $E_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\beta_0$  — вещественные параметры. Определите скорость переноса энергии волной. Убедитесь, что эта скорость равна фазовой скорости волны.

**4.1.44.** Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с параметрами  $\epsilon = 7$ ;  $\mu = 2$ . Определите отношение средней плотности энергии электрического поля к средней плотности энергии магнитного поля в двух случаях: а) потери в среде отсутствуют; б) тангенс угла потерь равен 10.

**4.1.45. (У)** Плоская электромагнитная волна распространяется в направлении увеличения координаты  $z$  в однородной изотропной среде с потерями. Частота колебаний поля  $\omega_0$ . Сторонние источники отсутствуют. Покажите, что в прямоугольном объеме данной среды выполняется баланс средних (за период колебаний) мощностей. В качестве примера рассмотрите прямоугольный объем размерами  $a \times b \times l$ , вершины которого имеют координаты  $(0, 0, 0)$ ,  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$ ,  $(0, 0, l)$ ,  $(a, b, l)$  и т. д.

**4.1.46. (У)** Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной изотропной среде с потерями. При этом вектор напряженности электрического поля  $\bar{E} = E_0 \exp(-\alpha z) \cos(\omega_0 t - \beta z) \bar{1}_y$ . Сторонние источники отсутствуют. На примере данной волны убедитесь в выполнении

нии закона сохранения энергии для мгновенных мощностей в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}(\bar{\Pi}) + \frac{\partial w}{\partial t} + p_{\text{пот}} = 0,$$

где  $\bar{\Pi}$  — вектор Пойнтинга,  $w$  — плотность энергии электромагнитного поля,  $p_{\text{пот}}$  — плотность мощности потерь.

**4.1.47. (У)** В плоскости  $z = 0$  равномерно распределен ток с поверхностной плотностью  $\bar{J}_{\text{пов}} = J_0 \cos(\omega_0 t) \bar{1}_y$ . Данный ток возбуждает плоские гармонические волны, которые распространяются в противоположные стороны от плоскости  $z = 0$ . Средняя плотность потока мощности в этих волнах составляет  $100 \text{ мВт/м}^2$ . Определите амплитуду плотности поверхностного тока  $J_0$ . Окружающая среда — воздух.

**4.1.48. (У)** Покажите, что плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении увеличения координаты  $z$  в однородной изотропной среде, не может иметь составляющие поля параллельные оси  $z$ .

**4.1.49. (У)** Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной среде без потерь. Пользуясь уравнениями Максвелла, покажите, что для любого момента времени векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны.

**4.1.50. (У)** Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля неоднородной плоской волны:  $\vec{E} = E_0 \exp(-\alpha_x x - j\beta_z z) \bar{1}_y$ . Волна распространяется в полупространстве  $x > 0$ , заполненном диэлектриком без потерь с параметрами  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Частота колебаний  $\omega_0$ . Получите выражение, связывающее вещественные коэффициенты  $\alpha_x$  и  $\beta_z$ .

**4.1.51. (У)** В полупространстве  $x > 0$ , заполненном воздухом, задана комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля неоднородной плоской волны:  $\vec{E} = E_0 \exp(-\alpha_x x - j\beta_z z) \bar{1}_y$ . Волна распространяется в направлении увеличения координаты  $z$  с фазовой скоростью  $1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Частота колебаний  $3 \text{ ГГц}$ . Определите вещественные коэффициенты  $\alpha_x$  и  $\beta_z$ .

**4.1.52. (У)** В полупространстве  $x > 0$ , заполненном воздухом, задана комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля неоднородной плоской волны:

$$\dot{\vec{E}} = E_0 \exp(-\alpha_x x - j\beta_z z) \bar{1}_y,$$

где  $\alpha_x$  и  $\beta_z$  — вещественные коэффициенты. Получите выражение для среднего значения вектора Пойнтинга данной волны.

**4.1.53. (У)** Плоская электромагнитная волна распространяется в сторону увеличения координаты  $z$ . Вектор напряженности электрического поля описывается выражением

$$\vec{E} = E_m \cos(\omega_0 t - \beta z + \varphi_x) \bar{1}_x + E_m \cos(\omega_0 t - \beta z + \varphi_y) \bar{1}_y;$$

т. е. составляющие  $E_x(t)$  и  $E_y(t)$  имеют одинаковые амплитуды и различные начальные фазы колебаний. Определите положение главных осей эллипса поляризации. Запишите составляющие вектора  $\vec{E}$  в системе координат, в которой орты, перпендикулярные направлению распространения, параллельны главным осям эллипса поляризации.

**4.1.54. (У)** Две плоские электромагнитные волны поляризованы по кругу в противоположные стороны и распространяются в сторону увеличения координаты  $z$ . Среда распространения — вакуум. Волны имеют одинаковые амплитуды  $E_m$ . Начальная фаза правополяризованной волны равна  $\varphi_n$ , левополяризованная волна характеризуется начальной фазой  $\varphi_d$ . Частота колебаний  $\omega_0$ . Найдите напряженность электрического поля суммарной волны. Определите поляризацию суммарной волны.

**4.1.55. (У)** Две плоские электромагнитные волны поляризованы по кругу в противоположные стороны и распространяются в сторону увеличения координаты  $z$ . Среда распространения — вакуум. Волны имеют одинаковую частоту  $\omega_0$  и начальную фазу колебаний  $\varphi_0$ . Амплитуда правополяризованной волны равна  $E_n$ , амплитуда левополяризованной волны равна  $E_d$ . Найдите напряженность электрического поля суммарной волны  $\vec{E}_\Sigma(t)$ . Определите ее поляризацию.

**4.1.56. (У)** Две плоские электромагнитные волны с линейной поляризацией распространяются в вакууме в сторону увеличения координаты  $z$ . При этом вектор напряженности электрического поля 1-й волны:

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_{m1} \cos[\omega_0(t - z/c) + \varphi_1];$$

для 2-й волны:

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_{m2} \cos[\omega_0(t - z/c) + \varphi_2].$$

Вектор  $\bar{E}_{m1}$  параллелен оси  $x$ , вектор  $\bar{E}_{m2}$  повернут относительно  $\bar{E}_{m1}$  против часовой стрелки на угол  $\theta$ , если смотреть с конца орта  $\bar{1}_z$  (навстречу распространяющейся волне). Найдите положение главных осей эллипса поляризации волны, если  $E_{m1} = E_{m2} = E_m$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$ . Определите составляющие вектора  $\bar{E}$ , спроектированные на главные оси эллипса поляризации.

**4.1.57. (У)** Две плоские электромагнитные волны с линейной поляризацией распространяются в вакууме в сторону увеличения координаты  $z$ . Векторы напряженности электрического поля этих волн имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{E}_1(t) &= E_{m1} \cos(\omega_1 t - \beta_1 z) \bar{1}_x; \\ \bar{E}_2(t) &= E_{m2} \cos(\omega_2 t - \beta_2 z) \bar{1}_y.\end{aligned}$$

Амплитуда колебаний:  $E_{m1} = E_{m2} = E_m$ , а частоты отличаются на малую величину  $|\omega_2 - \omega_1| \ll (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Найдите положение главных осей эллипса поляризации суммарной волны. Определите составляющие вектора  $\bar{E}$ , спроектированные на главные оси эллипса поляризации. Проанализируйте поляризацию суммарной волны.

**4.1.58. (У)** Две плоские электромагнитные волны распространяются в воздухе в сторону увеличения координаты  $z$ . Волны имеют круговую поляризацию с правым и левым направлением вращения векторов поля. Амплитуды колебаний электрического поля этих волн одинаковы и равны  $E_m$ . Правополяризованная волна имеет частоту  $\omega_1$  и начальную фазу  $\varphi_1$ , левополяризованная волна характеризуется частотой  $\omega_2$  и начальной фазой  $\varphi_2$ . Частоты отличаются на малую величину  $|\omega_2 - \omega_1| \ll (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Получите выражение для вектора напряженности электрического поля суммарной волны в виде

$$\bar{E}(t) = \bar{E}_0(t) \cos[\omega_0(t - z/c) + \varphi_0],$$

где  $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ,  $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ . Определите поляризацию волны.

## 4.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

**4.2.1.** Определите фазовую скорость и длину волны в меди на частоте 150 МГц.

**4.2.2.** Найдите коэффициент ослабления плоской электромагнитной волны в латуни на частоте 1 ГГц. Определите характеристическое сопротивление латуни для данного случая.

**4.2.3.** Определите толщину скин-слоя для меди на частотах 50 Гц и 50 МГц.

**4.2.4.** Определите, во сколько раз меньше фазовая скорость и длина волны в меди по сравнению с аналогичными характеристиками в вакууме. Частота колебаний 3 ГГц.

**4.2.5.** Определите толщину медного экрана, который на частоте 60 МГц обеспечивает затухание 60 дБ. Как изменится ответ для частоты 60 Гц?

**4.2.6.** Амплитуда колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в меди уменьшается в 10 раз на расстоянии 5 мкм. Определите частоту колебаний и длину волны в меди.

**4.2.7.** Плоская электромагнитная волна затухает в медном экране. При этом амплитуда колебаний вектора  $\vec{H}$  составляет 0,5 А/м на поверхности экрана и 0,15 А/м на глубине  $h = 10^{-6}$  м. Определите частоту поля. Найдите амплитуду колебаний вектора  $\vec{E}$  на поверхности экрана и на глубине  $h$ .

**4.2.8.** Амплитуда колебаний вектора  $\vec{H}$  в плоской волне для некоторой точки пространства составляет 1,2 А/м. Определите амплитуду колебаний вектора  $\vec{E}$  в данной точке, если: а) волна распространяется в вакууме; б) волна распространяется в латуни. Частота колебаний 50 МГц.

**4.2.9.** Плотность потока мощности, переносимой плоской волной в металле, на расстоянии 0,01 мм уменьшилась в  $10^3$  раза. Определите длину волны в металле и толщину скин-слоя.

**4.2.10.** Молекулы воды обладают собственными дипольными моментами в отсутствие внешнего электрического поля. Колебания внешнего электрического поля приводят к колебаниям суммарного дипольного момента



воды. Этот процесс, называемый ориентационной поляризацией, описывается в диапазоне СВЧ комплексной относительной диэлектрической проницаемостью воды:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_b}{1 + j\omega\tau}.$$

Пресная вода при температуре  $t = 25^\circ\text{C}$  имеет параметры  $\varepsilon_b = 5,5$ ;  $\varepsilon_a = 78,5$ ;  $\tau = 8,33 \cdot 10^{-12}$  с. Определите затухание поля плоской волны в пресной воде на расстоянии 1 см. Найдите длину волны в пресной воде. Частота колебаний 20 ГГц.

**4.2.11.** Плоская электромагнитная волна с частотой 30 МГц распространяется в бесстолкновительной плазме с электронной концентрацией  $2 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ . Определите фазовую скорость, групповую скорость и длину волны.

**4.2.12.** Плоская электромагнитная волна распространяется в плазме, характеризующейся электронной концентрацией  $5,5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$  и частотой соударений  $9 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Частота колебаний поля 5 ГГц. Определите коэффициент ослабления и длину волны в плазме.

**4.2.13.** Плоская электромагнитная волна распространяется в бесстолкновительной плазме с электронной концентрацией  $5,5 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ . Частота колебаний поля 20 МГц. Определите, при какой длине пути распространения затухание волны составит 20 дБ.

**4.2.14.** При спуске космических аппаратов в плотных слоях атмосферы вокруг оболочки аппарата возникает плазменный слой, который может оказывать экранирующее действие на работу бортовых радиосредств. Пусть в некоторой фазе полета плазменный слой имеет средние параметры  $N_e = 2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$ , частоту соударений  $10^{10} \text{ с}^{-1}$  и характеризуется толщиной 3 см. Оцените затухание радиосигналов в плазменном слое на частоте 10 ГГц. Считайте, что плазменный слой в области расположения приемной антенны можно приближенно считать плоским и однородным. Отражением от границ слоя пренебрегайте.

**4.2.15.** Для многих веществ в области видимого света относительная диэлектрическая проницаемость описывается формулой

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где  $N$  — концентрация атомов вещества;  $e$ ,  $m_e$  — заряд и масса электрона;  $\omega_0$  — собственная частота атомных дипольных осцилляторов в классической модели Дж. Томсона ( $\omega_0 > \omega$ , так как собственные частоты обычно расположены в ультрафиолетовой области спектра). Получите формулу для групповой скорости в данном случае. Убедитесь, что групповая скорость меньше скорости света в вакууме.

**4.2.16. (У)** Среда с частотной дисперсией характеризуется зависимостью фазовой скорости от длины волны в среде:  $v_\phi = v_\phi(\lambda)$ . Получите формулу Рэлея для групповой скорости:  $v_{\text{гр}} = v_\phi - \lambda(dv_\phi/d\lambda)$ .

**4.2.17. (У)** Частотная зависимость фазовой постоянной для некоторой среды в окрестности частоты  $\omega_0$  имеет вид  $\beta(\omega) = b_0 + b_1(\omega - \omega_0)$ . В данной среде в сторону увеличения координаты  $z$  распространяется радиоимпульс, который в плоскости  $z = 0$  характеризуется напряженностью электрического поля  $E(t) = E_0(t)\cos(\omega_0 t)$ , где  $E_0(t)$  — низкочастотное колебание (оглабающая поля  $E(t)$ ) со спектральной плотностью  $S_0(\omega)$ . Определите: а) распределение напряженности электрического поля  $E(t, z)$ ; б) пространственную спектральную плотность распределения оглабающей поля  $E(z)$  при  $t = t_0$ .

**4.2.18. (У)** Частотная зависимость фазовой постоянной для некоторой среды в окрестности частоты  $\omega_0$  имеет вид  $\beta(\omega) = b_0 + b_1(\omega - \omega_0) + b_2(\omega - \omega_0)^2$ . В данной среде распространяется радиоимпульс с несущей частотой  $\omega_0$ , который в плоскости  $z = 0$  имеет прямоугольную оглабающую длительностью  $\tau_{\text{и}}$ . Длина радиотрассы  $L$ . Получите выражение для параметра  $\Delta t/\tau_{\text{и}}$ , который является оценкой степени расплывания импульса; здесь  $\Delta t$  — разность времен прохождения трассы крайними узкополосными группами в спектре радиоимпульса.

**Примечание.** Считайте приближенно, что для прямоугольного импульса спектральные составляющие сосредоточены в пределах главного лепестка его спектра.

**4.2.19.** Определите время прохождения радиоимпульса по трассе длиной 200 км в бесстолкновительной плазме

(ионосфере) с электронной концентрацией  $N_e = 6 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$ . Несущая частота  $f_0 = 14 \text{ МГц}$ . Полагайте, что ширина спектра радиоимпульса  $\Pi$  достаточно мала, и в пределах частотного интервала  $(f_0 - \Pi/2, f_0 + \Pi/2)$  производную  $d\beta/d\omega$  можно считать постоянной.

**4.2.20. (У)** В радиоастрономии большое внимание уделяется исследованию пульсаров — быстро вращающихся нейтронных звезд, которые излучают электромагнитные колебания (максимальная интенсивность излучения происходит в направлении магнитной оси звезды, образующей некоторый угол с осью вращения). В процессе вращения пульсара его излучение может периодически направляться на Землю. Измерение расстояния до пульсаров основывается на известных дисперсионных свойствах межзвездной среды, характеризующейся средней электронной концентрацией  $0,03 \text{ см}^{-3}$ . Пусть время прихода импульсов регистрируется с помощью двух приемников радиотелескопа, настроенных на частоты  $f_1 = 200 \text{ МГц}$  и  $f_2 = 250 \text{ МГц}$ . Из-за дисперсии среды на выходе 2-го приемника импульсы наблюдаются на  $0,95 \text{ с}$  раньше, чем на выходе 1-го приемника (период следования импульсов превышает этот сдвиг). Определите расстояние до пульсара.

**4.2.21. (У)** Расстояние от пульсара (космический источник радиоизлучения) до Земли составляет  $1260$  световых лет. Импульсы, излучаемые пульсаром, принимаются радиотелескопом, который настроен на частоту  $100 \text{ МГц}$ . Определите вклад межзвездной среды во временную задержку между излучением и регистрацией данных импульсов. Плотность электронов в межзвездной среде составляет в среднем  $0,03 \text{ см}^{-3}$ .

**4.2.22. (У)** В центре Крабовидной туманности находится пульсар  $\text{NP0532}$  с крайне малым периодом вращения:  $T = 0,033 \text{ с}$ . Спектр излучения пульсара содержит практически все радиочастоты (от КВ до оптического диапазона), поэтому импульсы излучения неизбежно искажаются из-за частотной дисперсии в межзвездной среде. Оцените полосу пропускания приемника радиотелескопа, необходимую для регистрации импульсов пульсара. Считайте допустимым временное разрешение приемника (разность времен

запаздывания узкополосных групп в регистрируемом спектре), равное  $0,1 T$ . Расстояние до пульсара — 2000 парсек. Средняя концентрация электронов в межзвездной среде  $0,03 \text{ см}^{-3}$ . Приемник настроен на частоту 500 МГц.

**4.2.23. (У)** При передаче информации на искусственные спутники Земли следует учитывать возможность дисперсионных искажений радиосигналов в ионосфере. При этом для оценки степени искажений АМ-сигналов можно использовать отношение  $\Delta t/T_{\min}$ , где  $\Delta t$  — разность времени запаздывания крайних узкополосных групп в спектре сигнала;  $T_{\min}$  — период самой высокочастотной компоненты в законе модуляции амплитуды несущего колебания. Определите, для какой несущей частоты АМ-сигнала его искажения не будут выходить за уровень  $\Delta t/T_{\min} = 0,1$ . Ширина спектра передаваемого сигнала 1 МГц. Радиоволны проходят через ионосферу вертикально. Приблизительно считайте, что на прохождение сигналов УКВ и более высокочастотных диапазонов основное влияние оказывает участок ионосферы в диапазоне высот 230–400 км со средней концентрацией в дневное время  $3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ .

**4.2.24. (У)** При передаче информации на искусственные спутники следует учитывать возможность дисперсионных искажений радиосигналов в ионосфере. При этом для оценки степени искажений радиоимпульсов с прямоугольной огибающей можно использовать отношение  $\Delta t/\tau_n$ , где  $\Delta t$  — разность времени запаздывания крайних узкополосных групп в пределах главного лепестка спектра радиоимпульса;  $\tau_n$  — длительность радиоимпульса. Определите, для какой несущей частоты радиоимпульса его искажения не будут выходить за уровень  $\Delta t/\tau_n = 0,1$ . Радиоволны проходят через ионосферу вертикально. Длительность импульсов 3 мкс. Приблизительно считайте, что на прохождение сигналов УКВ и более высокочастотных диапазонов основное влияние оказывает участок ионосферы в диапазоне частот 230–400 км со средней концентрацией в дневное время  $3 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$ .

**4.2.25. (У)** В однородной бесстолкновительной плазме с электронной концентрацией  $N_e$  распространяется ЛЧМ радиоимпульс, который в начале трассы имеет прямо-

угольную огибающую, длительность  $\tau_{\text{и}}$  и закон изменения мгновенной частоты  $\omega(t) = \omega_0 + at$ . При этом база ЛЧМ импульса  $B = \Delta\omega\tau_{\text{и}}$ , где  $\Delta\omega = a\tau_{\text{и}}$  — девиация частоты за время  $\tau_{\text{и}}$ . Как известно, в ионизированной среде может происходить сжатие (компрессия) ЛЧМ радиоимпульсов с большой базой  $B \gg 1$ . Это связано с изменением времени запаздывания узкополосных групп в пределах спектра импульса, который при  $B \gg 1$  приближенно занимает частотный интервал  $(\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega)$ . Получите выражение для длины трассы, при которой эффект сжатия будет максимальным. Определите знак коэффициента  $a$ , при котором возможен данный эффект.

**4.2.26.** Определите глубину проникновения постоянно-го магнитного поля в металл, находящийся в сверхпроводящем состоянии и характеризующийся концентрацией свободных электронов  $N_e = 2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Считайте, по определению, что на расстоянии, равном глубине проникновения, величина магнитной индукции уменьшается в 100 раз.

**4.2.27. (У)** Определите глубину проникновения переменного магнитного поля с частотой 10 ГГц в металл, находящийся в сверхпроводящем состоянии и характеризующийся концентрацией свободных электронов  $N_e = 2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Считайте, по определению, что на расстоянии, равном глубине проникновения, величина магнитной индукции уменьшается в 100 раз.

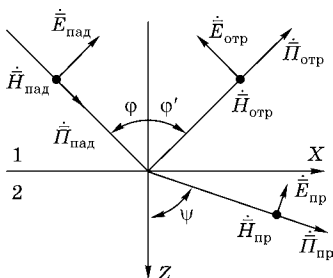
**4.2.28. (У)** Определите глубину проникновения переменного магнитного поля с частотой 1 кГц в металл, характеризующийся концентрацией свободных электронов  $N_e = 10^{28} \text{ м}^{-3}$  и частотой соударений  $n = 0,5 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ . Рассмотрите два случая: а) сверхпроводящие электроны отсутствуют, т. е. температура выше критической температуры  $T_c$ ; б) все свободные электроны образуют сверхпроводящие куперовские пары, т. е. температура ниже  $T_c$ . Считайте, по определению, что на расстоянии, равном глубине проникновения, величина магнитной индукции уменьшается в  $e$  раз (это расстояние часто называют толщиной скин-слоя).

# ГЛАВА ПЯТАЯ

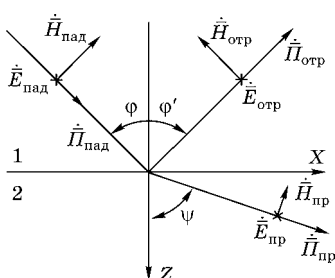
## ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

При падении плоской волны на границу раздела двух сред (плоскость  $XOY$  на рис. 5.1 и 5.2) выделяют плоскость падения, содержащую векторы Пойнтинга в падающей, отраженной и преломленной волнах (плоскость  $XOZ$ ). Если векторы  $\vec{E}$  в этих волнах параллельны плоскости падения, то поляризацию волн называют параллельной (рис. 5.1), а если векторы  $\vec{E}$  перпендикулярны плоскости падения, то говорят о перпендикулярной поляризации (рис. 5.2). Для описания процессов отражения и преломления вводят угол падения  $\varphi$ , угол отражения  $\varphi'$  ( $\varphi' = \varphi$ ), угол преломления  $\psi$  и коэффициенты отражения и преломления по электрическому полю  $R_{\parallel}$ ,  $R_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$ , причем индексы  $\parallel$  и  $\perp$  обозначают соответствующий тип поляризации.



**Рис. 5.1**  
Случай параллельной  
поляризации



**Рис. 5.2**  
Случай перпендикулярной  
поляризации

При падении плоской волны на границу раздела двух сред без потерь

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}}; \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \varphi};$$

$$R_{\parallel} = \frac{Z_{c1} \cos \varphi - Z_{c2} \cos \psi}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \psi}; \quad T_{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \psi};$$

$$R_{\perp} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi - Z_{c1} \cos \psi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \psi}; \quad T_{\perp} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \psi};$$

$$Z_{c1} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}; \quad Z_{c2} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}.$$

Электромагнитное поле, возникающее в результате падения параллельно поляризованной волны на плоскую границу раздела двух сред, в первой среде ( $z < 0$ ) определяется выражениями

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}_{\text{пад}} + \dot{\vec{E}}_{\text{отр}} = \bar{1}_x E_m \cos \varphi (e^{-j\beta_1 z \cos \varphi} - R_{\parallel} e^{j\beta_1 z \cos \varphi}) e^{-j\beta_1 x \sin \varphi} - \\ - \bar{1}_z E_m \sin \varphi (e^{-j\beta_1 z \cos \varphi} + R_{\parallel} e^{j\beta_1 z \cos \varphi}) e^{-j\beta_1 x \sin \varphi}; \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{H}}_1 = \dot{\vec{H}}_{\text{пад}} + \dot{\vec{H}}_{\text{отр}} = \bar{1}_y \frac{E_m}{Z_{c1}} (e^{-j\beta_1 z \cos \varphi} + R_{\parallel} e^{j\beta_1 z \cos \varphi}) e^{-j\beta_1 x \sin \varphi},$$

а во второй среде ( $z > 0$ ):

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} = (\bar{1}_x \cos \psi - \bar{1}_z \sin \psi) E_m T_{\parallel} e^{-j\beta_2 (x \sin \psi + z \cos \psi)};$$

$$\dot{\vec{H}}_2 = \dot{\vec{H}}_{\text{пр}} = \bar{1}_y \frac{E_m}{Z_{c2}} T_{\parallel} e^{-j\beta_2 (x \sin \psi + z \cos \psi)}.$$

Здесь  $E_m$  — амплитуда напряженности электрического поля падающей параллельно поляризованной волны.

**Примечание.** Векторы  $\vec{E}_{\text{пад}}$  и  $\vec{E}_{\text{отр}}$  при параллельной поляризации лежат в плоскости падения и расположены так, что при  $\varphi = 0$  (нормальное падение) они направлены в противоположные стороны.

Электромагнитное поле, возникающее в результате падения перпендикулярно поляризованной волны на плоскую границу раздела двух сред, в первой среде ( $z < 0$ ) определяется выражениями

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_1 &= \dot{\vec{E}}_{\text{пад}} + \dot{\vec{E}}_{\text{отр}} = -\bar{1}_y E_m (e^{-j\beta_1 z \cos \varphi} + R_{\perp} e^{j\beta_1 z \cos \varphi}) e^{-j\beta_1 x \sin \varphi}; \\ \dot{\vec{H}}_1 &= \dot{\vec{H}}_{\text{пад}} + \dot{\vec{H}}_{\text{отр}} = \\ &= \bar{1}_x \frac{E_m}{Z_{c1}} \cos \varphi (e^{-j\beta_1 z \cos \varphi} - R_{\perp} e^{j\beta_1 z \cos \varphi}) e^{-j\beta_1 x \sin \varphi} - \\ &- \bar{1}_z \frac{E_m}{Z_{c1}} \sin \varphi (e^{-j\beta_1 z \cos \varphi} + R_{\perp} e^{j\beta_1 z \cos \varphi}) e^{-j\beta_1 x \sin \varphi},\end{aligned}$$

а во второй среде ( $z > 0$ ):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_2 &= \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} = -\bar{1}_y E_m T_{\perp} e^{-j\beta_2 (x \sin \psi + z \cos \psi)}; \\ \dot{\vec{H}}_2 &= \dot{\vec{H}}_{\text{пр}} = (\bar{1}_x \cos \psi - \bar{1}_z \sin \psi) \frac{E_m}{Z_{c2}} T_{\perp} e^{-j\beta_2 (x \sin \psi + z \cos \psi)}.\end{aligned}$$

Здесь  $E_m$  — амплитуда напряженности электрического поля падающей перпендикулярно поляризованной волны.

Угол Брюстера для параллельно поляризованной волны:

$$\sin \varphi_{\text{Б}}^{\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 (\mu_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \mu_2)}{\mu_1 (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)}}.$$

Если волна имеет перпендикулярную поляризацию, то

$$\sin \varphi_{\text{Б}}^{\perp} = \sqrt{\frac{\mu_2 (\varepsilon_1 \mu_2 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 (\mu_2^2 - \mu_1^2)}}.$$

В случае, когда  $\mu_1 = \mu_2$ , полное преломление наблюдается при параллельной поляризации, и

$$\sin \varphi_{\text{Б}}^{\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}}.$$

Угол полного внутреннего отражения:



$$\varphi_{\text{по}} = \arcsin \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}}.$$

Если  $\varphi \geq \varphi_{\text{по}}$ , то

$$R_{\parallel} = \exp \left\{ 2j \cdot \arctg \left[ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left( \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\};$$

$$R_{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \arctg \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left( \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\};$$

$$T_{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \varphi - j \sqrt{\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}} \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}};$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\mu_2}{\mu_1} \cos \varphi - j \sqrt{\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}} \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

При  $\varphi \geq \varphi_{\text{по}}$  можно пользоваться приведенными выше выражениями для составляющих поля в 1-й и 2-й среде. Однако в этом случае следует учитывать, что угол преломления становится комплексным, и

$$\cos \psi = -j \sqrt{\sin^2 \psi - 1},$$

где  $\sin \psi$  определяется из закона Снеллиуса.

Если плоская волна падает на границу раздела сред **с потерями**, то также можно пользоваться приведенными выше формулами для коэффициентов отражения и преломления и для составляющих поля в 1-й и 2-й среде. Однако при этом следует учитывать, что относительная комплексная диэлектрическая проницаемость среды с диэлектрическими потерями:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1 - j \operatorname{tg} \delta) = \varepsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} e^{-j \delta};$$

характеристическое сопротивление

$$Z_c = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{-\frac{1}{4}} e^{j\frac{\delta}{2}}.$$

$\sin \psi$  определяется из закона Снеллиуса, куда входит  $\tilde{\epsilon}$ ;  $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi}$ ; коэффициент фазы  $\beta$  в формулах для составляющих поля заменяется на постоянную распространения  $\beta - j\alpha$  в среде с потерями (см. гл. 4).

Если плоская волна падает на границу раздела двух сред, из которых первая — среда без потерь ( $\mu_1, \epsilon_1$ ), а вторая — среда с потерями ( $\mu_2, \tilde{\epsilon}_2$ ), то

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \tilde{\epsilon}_2}} \sin \varphi; \\ (\beta_2 - j\alpha_2) \cos \psi &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_2 \tilde{\epsilon}_2} \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \\ &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_2 \tilde{\epsilon}_2 - \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \varphi} = \beta_z - j\alpha_z. \end{aligned}$$

При этом поверхности равной фазы  $\beta_1 x \sin \varphi + \beta_z z = \text{const}$  не совпадают с поверхностями равной амплитуды  $\alpha_z z = \text{const}$ . Действительный угол преломления (угол между поверхностями равных фаз и поверхностями равных амплитуд) определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{пл}} = \frac{\beta_1 \sin \varphi}{\beta_z} = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \varphi}{\operatorname{Re}(\sqrt{\mu_2 \tilde{\epsilon}_2 - \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \varphi})}.$$

Если плоская волна падает из среды без потерь на границу раздела с хорошо проводящей средой ( $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ ), то преломленная волна проникает внутрь 2-й среды практически по направлению нормали к границе раздела при любом угле падения. При этом отношение касательных составляющих электрического и магнитного векторов на границе раздела

$$\frac{\dot{E}_{\text{тм}}}{\dot{H}_{\text{тм}}} = Z_{\text{см}},$$

где

$$Z_{\text{см}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{\text{ам}}}{2\sigma}} (1 + j) = \frac{1}{\sigma d} (1 + j)$$

— характеристическое сопротивление металлоподобной среды;

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_{\text{ам}} \sigma}}$$

— толщина скин-слоя в хорошо проводящей среде.

При падении плоской волны на поверхность идеального металла

$$\dot{H}_{\text{тм}} = 2\dot{H}_{\text{пад}},$$

где  $\dot{H}_{\text{пад}}$  — касательная составляющая вектора  $\dot{\vec{H}}$  падающей волны в данной точке поверхности металла. При падении на поверхность реального металла

$$\dot{H}_{\text{тм}} \approx 2\dot{H}_{\text{пад}},$$

с относительной погрешностью порядка  $\sqrt{\omega \varepsilon_0 / 2\sigma}$ .

При наклонном падении плоской волны с параллельной поляризацией на поверхность идеального металла поле в первой среде описывается выражениями ( $z \leq 0$ , рис. 5.1)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_1 &= -2E_m [\bar{1}_x j \cos \varphi \sin(\beta_1 z \cos \varphi) + \\ &\quad + \bar{1}_z \sin \varphi \cos(\beta_1 z \cos \varphi)] e^{-\beta_1 x \sin \varphi}; \\ \dot{\vec{H}}_1 &= \bar{1}_y \frac{2E_m}{Z_{c1}} \cos(\beta_1 z \cos \varphi) e^{-\beta_1 x \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Если на поверхность идеального металла падает плоская волна с перпендикулярной поляризацией, то при  $z \leq 0$  (рис. 5.2)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_1 &= \bar{1}_y j 2E_m \sin(\beta_1 z \cos \varphi) e^{-\beta_1 x \sin \varphi}; \\ \dot{\vec{H}}_1 &= \frac{2E_m}{Z_{c1}} [\bar{1}_x \cos \varphi \cos(\beta_1 z \cos \varphi) + \\ &\quad + \bar{1}_z j \sin \varphi \sin(\beta_1 z \cos \varphi)] e^{-\beta_1 x \sin \varphi}. \end{aligned}$$

## 5.1. ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД

**5.1.1.** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из вакуума на диэлектрическое полупространство без потерь с параметрами  $\varepsilon = 3,2$ ;  $\mu = 1$ . Амплитуда электрического вектора падающей волны составляет 5 В/м. Определите амплитуду электрического вектора в отраженной и преломленной волнах.

**5.1.2. (У)** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из вакуума на диэлектрическое полупространство без потерь с параметрами  $\varepsilon = 2,56$ ;  $\mu = 1$ . Амплитуда магнитного вектора падающей волны составляет 10 А/м. Определите амплитуду магнитного вектора в отраженной и преломленной волнах.

**5.1.3.** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из вакуума на диэлектрическое полупространство без потерь с параметрами  $\varepsilon = 9,6$ ;  $\mu = 1$ . Плотность потока мощности падающей волны составляет 15 Вт/м<sup>2</sup>. Определите плотность потока мощности в отраженной и преломленной волнах.

**5.1.4.** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из вакуума на диэлектрическое полупространство без потерь с параметром  $\mu = 1$ . Определите относительную диэлектрическую проницаемость, при которой плотность потока мощности падающей волны поделится поровну между отраженной и преломленной волнами.

**5.1.5.** Плоская электромагнитная волна падает по направлению нормали на границу раздела между средой с параметрами  $\varepsilon_1 = 2$ ;  $\mu_1 = 1$  и средой с параметрами  $\varepsilon_2 = 3,8$ ;  $\mu_2 = 1,5$ . Потери отсутствуют. Плотность потока мощности падающей волны в первой среде равна 25 Вт/м<sup>2</sup>. Определите амплитуду напряженности магнитного поля в преломленной волне.

**5.1.6.** Плоская электромагнитная волна падает по направлению нормали на границу раздела между диэлектриком без потерь с  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ,  $\mu = 1$  и воздухом. Коэффициент преломления по электрическому полю  $T_E = 1,4$ . Оп-

ределите относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_1$ , коэффициент преломления по магнитному полю  $T_H$ , коэффициент преломления по вектору Пойнтинга  $T_\Pi$ , коэффициент отражения по электрическому и магнитному полям  $R_E = R_H$  и коэффициент отражения по плотности потока мощности  $R_\Pi$ .

**5.1.7.** Пусть, как обычно,  $R$  и  $T$  — коэффициенты отражения и преломления по электрическому полю. Рассмотрите квадраты этих коэффициентов  $T^2$  и  $R^2$  для случая нормального падения плоской электромагнитной волны из воздуха на диэлектрическое полупространство без потерь с параметрами  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Получите выражение, связывающее  $T^2$  с  $R^2$ .

**5.1.8.** Плоская электромагнитная волна падает на границу раздела между диэлектриками без потерь с параметрами  $\varepsilon_1 = 4$ ,  $\varepsilon_2 = 16$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Угол между вектором Пойнтинга преломленной волны во втором диэлектрике и границей раздела равен  $80^\circ$ . Определите угол падения.

**5.1.9. (У)** Объясните, почему при перпендикулярной поляризации  $1 + R = T$ , а при параллельной поляризации  $(1 - R)\cos\varphi = T\cos\psi$ , где  $\varphi$  — угол падения, а  $\psi$  — угол преломления. Обратите внимание, что коэффициенты отражения и преломления  $R$  и  $T$  определены для вектора напряженности электрического поля.

**5.1.10. (У)** Плоская электромагнитная волна падает на границу раздела между диэлектриками без потерь с  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Покажите, что явление полного преломления может наблюдаться только при параллельной поляризации падающей волны.

**5.1.11.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом  $60^\circ$  на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\varepsilon = 3,8$ ;  $\mu = 1$ . Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны  $10$  В/м. Определите амплитуду напряженности электрического поля отраженной и преломленной волн.

**5.1.12.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $30^\circ$  из диэлектрика с параметрами  $\varepsilon = 2,08$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела

с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны  $0,8 \text{ В/м}$ . Определите амплитуду напряженности электрического поля отраженной и преломленной волн.

**5.1.13.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом  $40^\circ$  на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\epsilon = 9,6$ ;  $\mu = 1$ . Амплитуда напряженности магнитного поля падающей волны  $10 \text{ А/м}$ . Определите амплитуду напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн.

**5.1.14.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает из воздуха под углом  $70^\circ$  на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\epsilon = 3,2$ ;  $\mu = 1$ . Плотность потока мощности падающей волны  $1 \text{ Вт/м}^2$ . Определите плотность потока мощности отраженной и преломленной волн.

**5.1.15.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает под углом  $15^\circ$  из среды с параметрами  $\epsilon = 2,08$ ;  $\mu = 1,1$  на границу раздела с воздухом. Потери в среде отсутствуют. Плотность потока мощности падающей волны  $5 \text{ Вт/м}^2$ . Определите плотность потока мощности отраженной и преломленной волн.

**5.1.16.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает из диэлектрика с параметрами  $\epsilon = 2,56$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Определите, при каких углах падения амплитуда напряженности электрического поля отраженной волны равна: а) нулю; б) амплитуде напряженности электрического поля падающей волны.

**5.1.17.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает на границу раздела двух диэлектриков без потерь с  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . При падении из первого диэлектрика во второй явление полного преломления наблюдается для угла падения  $40^\circ$ . Определите, при каком угле падения будет наблюдаться явление полного преломления в случае падения из второго диэлектрика в первый.

**5.1.18. (У)** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает на границу раздела двух диэлектриков без потерь с  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Покажите, что явление полного преломления будет наблюдаться в ситуации, когда угол между векторами Пойнтинга отраженной и преломленной волн равен  $90^\circ$ .

**5.1.19. (У)** Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из воздуха под углом  $45^\circ$  на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\varepsilon = 3,8$ ;  $\mu = 1$ . Определите коэффициент эллиптичности для: а) отраженной волны; б) преломленной волны.

**5.1.20. (У)** Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает под углом  $20^\circ$  из диэлектрика с параметрами  $\varepsilon = 2,56$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Определите коэффициент эллиптичности для: а) отраженной волны; б) преломленной волны.

**5.1.21.** Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из воздуха на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\varepsilon = 3,8$ ;  $\mu = 1$ . Определите угол падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной.

**5.1.22. (У)** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает из воздуха под углом Брюстера на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ;  $\mu = 1$ . Плотность потока мощности падающей волны равна  $\Pi_{\text{пад}}$ . Получите выражение для плотности потока мощности преломленной волны двумя способами: а) пользуясь формулой для коэффициента преломления; б) основываясь на законе сохранения энергии.

**5.1.23. (У)** Решите предыдущую задачу для случая, когда волна падает из диэлектрика в воздух.

**5.1.24. (У)** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ;  $\mu = 1$ . Изобразите качественно (на одном рисунке) зависимость коэффициента отражения от угла падения для двух случаев: а)  $\varepsilon = \varepsilon_{d1}$ ; б)  $\varepsilon = \varepsilon_{d2} > \varepsilon_{d1}$ .

**5.1.25. (У)** Решите предыдущую задачу для случая, когда волна падает из диэлектрика в воздух.

**5.1.26. (У)** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает из воздуха на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ;  $\mu = 1$ . Изобразите качественно (на одном рисунке) зависимость коэффициента отражения от угла падения для двух случаев: а)  $\varepsilon = \varepsilon_{d1}$ ; б)  $\varepsilon = \varepsilon_{d2} > \varepsilon_{d1}$ .

**5.1.27. (У)** Решите предыдущую задачу для случая, когда волна падает из диэлектрика в воздух.

**5.1.28.** Аквалангист, плывущий по дну водоема, смотрит вертикально вверх. Какую картину он будет наблюдать? На каком расстоянии от камня, лежащего на дне, он должен находиться, чтобы увидеть его, если глубина водоема 3 м, показатель преломления воды 1,33? Расстоянием между глазом и дном можно пренебречь.

**5.1.29. (У)** Вблизи нагретой поверхности температура воздуха больше, чем на большом удалении от нее, поэтому показатель преломления воздуха вблизи поверхности уменьшается. При определенной градиенте температуры может возникнуть явление полного внутреннего отражения плоской электромагнитной волны, падающей на поверхность. Это проявляется в возникновении миража над нагретой поверхностью.

Заменяя истинную зависимость от температуры скачком, определите перепад температуры, который позволяет наблюдать мираж под углом  $1^\circ$  к поверхности, приняв зависимость показателя преломления от температуры в виде  $n(T) = 1 + 0,003(1 - T/300)$ .

**5.1.30.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $60^\circ$  из диэлектрика с параметрами  $\varepsilon = 3,8$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Определите коэффициенты отражения и преломления по электрическому полю.

**5.1.31.** Решите предыдущую задачу для случая перпендикулярной поляризации падающей электромагнитной волны.

**5.1.32. (У)** Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией падает из диэлектрика с параметрами



$\varepsilon = 9$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Вектор напряженности электрического поля падающей волны ориентирован под углом  $45^\circ$  относительно плоскости падения (угол отсчитывайте от плоскости падения по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления вектора Пойнтинга). Определите, при каком угле падения, превышающем угол полного внутреннего отражения, отраженная волна будет иметь круговую поляризацию.

**5.1.33. (У)** Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из диэлектрика с параметрами  $\varepsilon = 6$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Определите, при каком угле падения, превышающем угол полного внутреннего отражения, отраженная волна будет иметь линейную поляризацию.

**5.1.34.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $70^\circ$  из диэлектрика с параметрами  $\varepsilon = 3,2$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Определите фазовую скорость, с которой неоднородная плоская волна в воздухе распространяется вдоль границы раздела

**5.1.35.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из диэлектрика с параметрами  $\varepsilon = 2,08$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют, частота колебаний 30 ГГц. Определите, при каком угле падения амплитуда неоднородной плоской волны в воздухе убывает при удалении от границы раздела с коэффициентом ослабления 20 дБ/см.

**5.1.36.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает под углом  $80^\circ$  из диэлектрика с параметрами  $\varepsilon = 2,56$ ;  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны 1 В/м. Частота колебаний 15 ГГц. Определите амплитуду напряженности электрического поля преломленной волны на расстоянии 0,5 см от границы раздела.

**5.1.37.** Плоская электромагнитная волна падает по направлению нормали на границу раздела между воздухом

и биологической тканью со свойствами кожи. Определите коэффициенты отражения и преломления по электрическому полю на двух частотах: а)  $f = 100$  МГц; б)  $f = 3$  ГГц. На частоте 100 МГц кожа характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 75$  и удельной проводимостью  $\sigma = 0,75$  См/м. Для частоты 3 ГГц  $\epsilon = 42$ ,  $\sigma = 2,4$  См/м.

**5.1.38.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом  $40^\circ$  на границу раздела с морской водой, которая на частоте волны 10 ГГц имеет параметры  $\epsilon = 40$ ,  $\mu = 1$  и удельную проводимость 10 См/м. Определите коэффициенты отражения и преломления по электрическому полю.

**5.1.39.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом  $30^\circ$  на границу раздела с морской водой, которая на частоте волны 1 ГГц имеет параметры  $\epsilon = 80$ ,  $\mu = 1$  и удельную проводимость 4 См/м. Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны 10 В/м. Определите амплитуду напряженности электрического поля преломленной волны на расстоянии 3 см от границы раздела.

**5.1.40.** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний 1 МГц падает из воздуха под углом  $65^\circ$  на границу раздела с морской водой, которая на данной частоте имеет параметры  $\epsilon = 80$ ,  $\mu = 1$  и удельную проводимость 4 См/м. Определите действительный угол преломления. Найдите ошибку, которая появляется при расчете угла преломления, если пренебрегать удельной проводимостью воды.

**5.1.41.** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний 30 ГГц падает из воздуха под углом  $80^\circ$  на границу раздела с медью. Определите действительный угол преломления.

**5.1.42.** В газовых лазерах на пути между отражающими зеркалами свет проходит через стеклянные окна. При нормальном падении через стеклянную пластинку проходит около 92% интенсивности падающего света, что недопустимо в лазере, где свет многократно отражается от зеркал. Поэтому в лазерах используют наклонное падение света на окна («окна Брюстера»). Найдите угол паде-

ния света на переднюю поверхность окна. Докажите, что при этом на задней поверхности также выполняется условие полного преломления. Определите поляризацию волн, генерируемых лазером, а также потери мощности излучения за счет отражений в окнах. Показатель преломления стекла равен 1,5.

**5.1.43. (У)** Плоская электромагнитная волна нормально падает из верхнего полупространства (1-я среда) на диэлектрическую пластину толщиной  $d$  (2-я среда), под которой находится нижнее полупространство (3-я среда). Относительные диэлектрические проницаемости 1-й среды, пластины и 3-й среды равны  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  соответственно; относительные магнитные проницаемости сред равны единице, потери отсутствуют. Получите выражения для коэффициента отражения от пластины  $R = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$  и коэффициента прохождения через пластину  $T = \dot{E}_{\text{пр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$ . Здесь  $\dot{E}_{\text{пад}}$  и  $\dot{E}_{\text{отр}}$  — комплексные амплитуды падающей и отраженной волн в 1-й среде на верхней поверхности пластины;  $\dot{E}_{\text{пр}}$  — комплексная амплитуда прошедшей волны в 3-й среде на нижней поверхности пластины.

**5.1.44. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний  $f_0$  нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ,  $\mu = 1$ . Пластина расположена горизонтально и находится в вакууме. Получите выражения для коэффициента отражения от пластины  $R = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$ , коэффициента прохождения через пластину  $T = \dot{E}_{\text{пр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$ . Здесь  $\dot{E}_{\text{пад}}$  и  $\dot{E}_{\text{отр}}$  — комплексные амплитуды падающей и отраженной волн на верхней поверхности пластины;  $\dot{E}_{\text{пр}}$  — комплексная амплитуда прошедшей волны на нижней поверхности пластины. Определите толщину пластины  $d_0$ , при которой отражения не происходит.

**5.1.45. (У)** Фторопластовая пластина толщиной 2 мм расположена в вакууме. Плоская электромагнитная волна с частотой 37,5 ГГц нормально падает на пластину. Определите, какая часть плотности потока мощности падающей волны отражается от пластины и какая часть проходит через пластину. Параметры фторопласта  $\varepsilon = 2,08$ ,  $\mu = 1$ . Считайте, что потерями можно пренебречь.

**5.1.46. (У)** Известно, что при прохождении света через границу раздела между воздухом и стеклом потери интенсивности составляют около 4%. Для уменьшения этих потерь в оптических приборах, имеющих много границ раздела стекло–воздух, поверхность линз покрывают не-отражающим слоем толщиной  $\lambda/4$ , где  $\lambda$  — длина волны света в слое. Определите показатель преломления и толщину неотражающего слоя для света с длиной волны в вакууме 0,55 мкм (соответствует зеленому цвету). Показатель преломления стекла 1,5.

**5.1.47. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний  $f_0$  нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме. Определите толщину пластины  $d_1$ , при которой плотности потока мощности падающей и прошедшей пластину волн одинаковы:  $\Pi_{\text{пр}} = \Pi_{\text{пад}}$ .

**5.1.48. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний  $f_0$  нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме. Толщина пластины  $d_0$  выбрана из условия равенства нулю коэффициента отражения (см. задачу 5.1.44). Получите выражение для полосы частот  $2\Delta f$  в окрестности частоты  $f_0$ , в пределах которой  $\Pi_{\text{отр}} < \delta \Pi_{\text{пад}}$ , где  $\Pi_{\text{отр}}$ ,  $\Pi_{\text{пад}}$  — значения плотности потока мощности в отраженной и падающей волнах соответственно;  $\delta$  — заданный относительный уровень отражения по мощности.

**5.1.49. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний  $f_0$  нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме. Толщина пластины  $d_1$  выбрана из условия получения максимального коэффициента прохождения по мощности  $K_{\text{пр}} = \Pi_{\text{пр}}/\Pi_{\text{пад}} = 1$  (см. задачу 5.1.47). Получите выражение для полосы частот  $2\Delta f$  в окрестности частоты  $f_0$ , в пределах которой  $\Pi_{\text{пр}} > 0,5 \Pi_{\text{пад}}$ . При выводе учтите, что заданный уровень прохождения на границах полосы  $2\Delta f$  может быть достигнут при  $\varepsilon_d > \varepsilon_{\min}$ . Найдите значение  $\varepsilon_{\min}$ .

**5.1.50. (У)** Плоская электромагнитная волна нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с парамет-

рами  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме. Толщина пластины  $d$  выбрана из условия, чтобы на частоте  $f_0$  коэффициент прохождения по плотности мощности  $K_{\text{пр}} = P_{\text{пр}}/P_{\text{пад}}$  был максимальным ( $P_{\text{пр}} = P_{\text{пад}}$ , см. задачу 5.1.47). Получите выражение для частотной зависимости коэффициента прохождения в окрестности частоты  $f_0$ . Покажите, что при  $\sqrt{\varepsilon_d} \gg 1$  данная зависимость становится аналогичной частотной характеристике одиночного колебательного контура. Получите для данного случая выражение для полосы пропускания пластины по уровню  $K_{\text{пр}} = 0,5$ .

**5.1.51. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний  $f_0$  нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме и характеризуется толщиной  $d \ll \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon_d}$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме. Для данного случая «тонкой» пластины выведите приближенные выражения для коэффициента отражения от пластины  $R = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$  и коэффициента прохождения  $T = \dot{E}_{\text{пр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$ . Здесь  $\dot{E}_{\text{пад}}$ ,  $\dot{E}_{\text{отр}}$  и  $\dot{E}_{\text{пр}}$  — комплексные амплитуды падающей, отраженной от пластины и прошедшей пластины волн соответственно.

**5.1.52. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний  $f_0$  нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\varepsilon = \varepsilon_d$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме и характеризуется толщиной  $d$ . Относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_d$  близка к единице, что позволяет учитывать только однократное отражение от передней и задней поверхностей пластины (строгие формулы предыдущих задач этого раздела учитывают эффекты многократного отражения волн в пластине). Для данного случая «малоотражающей» пластины выведите приближенные выражения для коэффициента отражения от пластины  $R = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$  и коэффициента прохождения  $T = \dot{E}_{\text{пр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$ . Здесь  $\dot{E}_{\text{пад}}$ ,  $\dot{E}_{\text{отр}}$  и  $\dot{E}_{\text{пр}}$  — комплексные амплитуды падающей, отраженной от пластины и прошедшей пластину волн соответственно.

**5.1.53. (У)** Стекло́нная линза покрыта неотражающим слоем толщиной  $d = \lambda_0 / (4n_{\text{сл}})$ , где  $\lambda_0$  — длина волны

света в вакууме, для которой отражение отсутствует;  $n_{\text{сл}} = \sqrt{n_{\text{ст}}}$  — показатель преломления покрытия;  $n_{\text{ст}}$  — показатель преломления стекла. Получите выражение для коэффициента отражения по интенсивности (плотности мощности) для света с длиной волны в вакууме  $\lambda \neq \lambda_0$ . При выводе пренебрегайте эффектами многократного отражения волн от границ неотражающего слоя. Рассчитайте коэффициент отражения по плотности мощности для синего света ( $\lambda = 0,45$  мкм) и для красного света ( $\lambda = 0,65$  мкм). Считайте, что для стекла  $n_{\text{ст}} = 1,5$  и не меняется в диапазоне видимого света;  $\lambda_0 = 0,55$  мкм (зеленый свет).

**5.1.54. (У)** Полупространство  $z < 0$  (среда 1) заполнено веществом с комплексным показателем преломления  $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}}$ , а полупространство  $z > 0$  (среда 2) — диэлектриком. Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией падает по направлению нормали из среды 1 на границу раздела, совмещенную с плоскостью  $z = 0$ . При этом напряженность электрического поля в 1-й среде представляет собой сумму падающей и отраженной волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \left[ \exp\left(-j\frac{\omega}{c}\tilde{n}z\right) + \dot{R} \exp\left(j\frac{\omega}{c}\tilde{n}z\right) \right],$$

где  $\omega$  — частота колебаний;  $\dot{R}$  — комплексный коэффициент отражения;  $\vec{E}_0$  — комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  в падающей волне при  $z = 0$ . Получите выражение для среднего значения вектора Пойнтинга в 1-й среде ( $z < 0$ ).

## 5.2. ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА С РЕАЛЬНЫМ МЕТАЛЛОМ

**5.2.1.** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из вакуума на границу раздела с металлом, у которого  $\mu = 1$  и удельная проводимость составляет  $1,5 \cdot 10^7$  См/м. Частота колебаний равна 500 МГц. Определите, какая часть плотности мощности падающей волны расходуется на нагрев металла.

**5.2.2. (У)** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из воздуха на границу раздела с металлом, характеризующимся удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Частота колебаний  $\omega$ . Получите приближенное выражение для коэффициента отражения.

**5.2.3. (У)** Плоская электромагнитная волна с амплитудой магнитного вектора  $H_{m \text{ пад}}$  падает по нормали из воздуха на границу раздела с металлом, характеризующимся удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Частота колебаний  $\omega$ . Получите выражение для амплитуды магнитного вектора на поверхности металла  $H_{m \text{ тм}}$ . Найдите отношение  $H_{m \text{ тм}}/(2H_{m \text{ пад}})$  для частоты 3 ГГц и удельной проводимости  $5,7 \cdot 10^7$  См/м (медь).

**5.2.4.** Плоская электромагнитная волна с амплитудой электрического вектора  $E_{m \text{ пад}}$  падает по нормали из воздуха на границу раздела с металлом, характеризующимся удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Частота колебаний  $\omega$ . Получите выражение для амплитуды электрического вектора на поверхности металла  $E_{m \text{ тм}}$  двумя способами: а) пользуясь граничными условиями Леонтовича; б) пользуясь приближенным выражением для коэффициента отражения при нормальном падении на реальный металл (задача 5.2.2.). Найдите отношение  $E_{m \text{ тм}}/E_{m \text{ пад}}$  для частоты 1,5 ГГц и удельной проводимости  $3 \cdot 10^7$  См/м.

**5.2.5.** Плоская электромагнитная волна с амплитудой электрического вектора  $E_{m \text{ пад}}$  и амплитудой магнитного вектора  $H_{m \text{ пад}}$  падает по нормали из воздуха на границу раздела с металлом, характеризующимся удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Частота колебаний  $\omega$ . Получите выражения для коэффициентов прохождения полей  $E$  и  $H$  в металл на глубину  $l$ , которые определяются так:  $T_E(l) = E_m(l)/E_{m \text{ пад}}$ ,  $T_H(l) = H_m(l)/H_{m \text{ пад}}$  (здесь  $E_m(l)$  и  $H_m(l)$  — амплитуды электрического и магнитного векторов на расстоянии  $l$  от границы раздела).

**5.2.6.** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из воздуха на границу раздела с металлом, характеризующимся удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Частота колебаний  $\omega$ . Определите ослабление  $\Delta$  плотности потока мощности в металле на глубине  $d$  в децибелах, где  $\Delta = 10 \cdot \lg(\Pi_{\text{ср пр}}/\Pi_{\text{ср пад}})$ ;  $\Pi_{\text{ср пад}}$  — плотность потока мощности в падающей волне;  $\Pi_{\text{ср пр}}$  — плотность потока мощности в преломленной волне на глубине  $d$ . Запишите выражение для  $\Delta$  в виде суммы двух слагаемых, одно из которых описывает потери мощности при отражении от поверхности металла, а другое — поглощение мощности в металле.

**5.2.7.** Решите предыдущую задачу для случая нормального падения электромагнитной волны с частотой 1 ГГц на границу раздела с медью. Определите ослабление плотности потока мощности на глубине 0,1 мм.

**5.2.8.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает из воздуха под углом  $30^\circ$  на границу раздела с металлом, у которого  $\mu = 1$  и удельная проводимость составляет  $2 \cdot 10^7$  См/м. Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны 10 В/м, частота колебаний 3 ГГц. Определите амплитуду касательных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей на поверхности металла.

**5.2.9.** Решите предыдущую задачу, считая, что падающая волна имеет перпендикулярную поляризацию.

**5.2.10.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом  $60^\circ$  на границу раздела с металлом, у которого  $\mu = 1$  и удельная проводимость составляет  $3 \cdot 10^7$  См/м. Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны 20 В/м, частота колебаний 10 ГГц. Определите плотность потока мощности прошедшей волны на границе раздела.

**5.2.11.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает из воздуха под углом  $45^\circ$  на границу раздела с металлом, у которого  $\mu = 1$  и удельная проводимость составляет  $5 \cdot 10^7$  См/м. Плотность потока мощности падающей волны 10 Вт/м<sup>2</sup>, частота колебаний 300 МГц.



Определите удельную мощность тепловых потерь, приходящуюся на  $1 \text{ м}^2$  поверхности металла.

**5.2.12.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает из воздуха под углом  $50^\circ$  на поверхность латуни. Найдите частоту, на которой мощность тепловых потерь, приходящаяся на  $1 \text{ м}^2$  поверхности латуни, составляет  $10^{-n}$  от мощности волны, падающей на  $1 \text{ м}^2$  этой поверхности. Решите эту задачу для двух случаев: а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ .

**5.2.13.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом  $40^\circ$  на границу раздела с металлом, у которого  $\mu = 1$  и удельная проводимость составляет  $4 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ . Амплитуда касательной составляющей электрического вектора на поверхности металла равна  $2 \cdot 10^{-3} \text{ В/м}$ , частота колебаний  $f = 10 \text{ ГГц}$ . Определите амплитуду электрического и магнитного векторов в падающей волне.

**5.2.14. (У)** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом  $\varphi$  на границу раздела с металлом, у которого  $\mu = 1$  и удельная проводимость равна  $\sigma_m$ . Пользуясь граничными условиями Леонтовича, получите приближенные выражения для коэффициентов отражения и преломления по электрическому полю. Частота колебаний  $\omega$ .

**5.2.15. (У)** Решите предыдущую задачу, считая, что падающая волна имеет параллельную поляризацию.

**5.2.16. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой колебаний  $\omega$  падает из воздуха на границу раздела с металлом, у которого  $\mu = 1$  и удельная проводимость равна  $\sigma_m$ . Амплитуда касательной составляющей магнитного вектора на поверхности металла  $H_{\text{тм}}$ . Получите выражение для мощности потерь, приходящейся на  $1 \text{ м}^2$  поверхности металла двумя способами: а) определив плотность потока мощности волны, проникнувшей в металл; б) воспользовавшись объемной плотностью мощности тепловых потерь внутри металла.

**5.2.17. (У)** Как известно, объемные токи проводимости с плотностью  $\vec{J}_{\text{пр}} = \sigma_m \vec{E}$  протекают в достаточно тонком слое у поверхности реального проводника с удельной

проводимостью  $\sigma_m$  и абсолютной магнитной проницаемостью  $\mu_{ам}$ . При этом для определения касательной к поверхности проводника составляющей магнитного вектора  $H_{tm}$  можно по аналогии с идеальным проводником ввести эквивалентный квазиповерхностный ток с плотностью

$$\dot{J}_{пов} = \int_0^{Nd} \dot{J}_{пр} dz, \text{ где } N \gg 1, d = \sqrt{2/(\omega \mu_{ам} \sigma_m)} \text{ — толщина скин-слоя.}$$

Покажите, что  $\dot{H}_{tm} = \dot{J}_{пов}$ . Получите выражение, связывающее  $\dot{J}_{пов}$  с комплексной амплитудой касательной составляющей электрического поля на поверхности металла  $\dot{E}_{tm}$ .

**5.2.18. (У)** Через поперечное сечение цилиндрического проводника диаметром  $D$  протекает полный ток с комплексной амплитудой  $\dot{I}_m$ . По определению, погонным внутренним импедансом провода называется отношение касательной составляющей электрического вектора на поверхности провода к полному току:  $Z_{пог} = \dot{E}_{tm} / \dot{I}_m$ . Получите выражения для погонного активного сопротивления  $R_{пог}$  и погонной внутренней индуктивности провода  $L_{пог}$ . Частота колебаний  $\omega$  и удельная проводимость провода  $\sigma$  таковы, что толщина скин-слоя  $d \ll D$  (сильный скин-эффект).

**5.2.19. (У)** Определите погонное активное сопротивление и погонную внутреннюю индуктивность медного провода диаметром 2 мм на частоте 400 МГц.

**5.2.20. (У)** Определите отношение средней плотности энергии электрического поля к средней плотности энергий магнитного поля для электромагнитной волны, проникшей внутрь реального проводника с удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Частота колебаний  $\omega$ . Вычислите это отношение для меди на частоте 10 ГГц.

**5.2.21. (У)** На поверхности проводящего тела известно распределение касательной составляющей напряженности магнитного поля  $H_{tm}$ . Удельная проводимость проводника  $\sigma_m$ , абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_{ам}$ , частота колебаний  $\omega$ . Получите выражение для средней за период колебаний энергии магнитного поля внутри проводящего

тела. Считайте, что толщина скин-слоя во много раз меньше характерных размеров тела (сильный скин-эффект).

**5.2.22. (У)** Плоская электромагнитная волна с амплитудой электрического вектора  $E_{\text{пад}}$  падает по нормали на плоский металлический лист, характеризующийся толщиной  $D$ , удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Лист находится в вакууме. Частота колебаний  $\omega$ . Получите выражения для распределения амплитуды электрического вектора внутри листа  $E_m(z)$ , где  $z$  — координата, изменяющаяся в направлении нормали к поверхности листа.

**5.2.23. (У)** В резонаторе лазера на рубине используется зеркало, выполненное из металла, характеризующегося концентрацией свободных электронов  $N_e = 10^{28} \text{ м}^{-3}$  и частотой соударений  $\nu = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Определите коэффициент отражения по среднему значению вектора Пойнтинга при падении из воздуха на поверхность зеркала. Найдите мощность, которая будет теряться в зеркале при мощности в падающем пучке  $10^6 \text{ Вт}$  (используется импульсный режим генерации). Длина волны излучения в воздухе  $\lambda = 0,6943 \text{ мкм}$ .

**5.2.24. (У)** Одно из зеркал в резонаторе лазера на рубине представляет собой пластину толщиной  $d$ , выполненную из металла, характеризующегося концентрацией свободных электронов  $N_e = 10^{28} \text{ м}^{-3}$  и частотой соударений  $\nu = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Для передачи оптического излучения лазера из резонатора рассматриваемое зеркало должно частично пропускать излучение. Определите толщину пластины  $d$ , при которой зеркало пропускает 5% мощности. Длина волны излучения в воздухе  $\lambda = 0,6943 \text{ мкм}$ . Считайте, что переотраженными волнами внутри пластины можно пренебречь.

**5.2.25. (У)** Плоская электромагнитная волна со средним значением вектора Пойнтинга  $10 \text{ кВт/м}^2$  падает по направлению нормали из воздуха на поверхность металла. Частота колебаний  $10 \text{ ГГц}$ . Определите удельную мощность тепловых потерь  $P_{\text{уд}}$ , представляющую собой среднее значение вектора Пойнтинга прошедшей волны на поверхности металла. Рассмотрите два случая: а) в металле

отсутствуют сверхпроводящие электроны, удельная проводимость  $\sigma_n = 5,7 \cdot 10^7$  См/м; б) металл охлажден и находится в сверхпроводящем состоянии, причем лондоновская длина  $\lambda_L = 70$  нм и нормальная часть удельной проводимости  $\sigma_n = 2,3 \cdot 10^7$  См/м.

**5.2.26. (У)** Плоская электромагнитная волна падает по направлению нормали на металлическую пластинку толщиной  $d = 1,5$  мкм. Частота колебаний 50 ГГц. Слой металла окружен воздухом. Определите затухание волны при прохождении через пластинку в двух случаях: а) в металле отсутствуют сверхпроводящие электроны, удельная проводимость  $\sigma_n = 1,4 \cdot 10^7$  См/м; б) металл находится в сверхпроводящем состоянии ( $\sigma_n = 0$ ) и характеризуется лондоновской длиной  $\lambda_L = 40$  нм. Считайте, что переотраженными волнами внутри пластины можно пренебречь.

**5.2.27. (У)** Плоская электромагнитная волна со средним значением вектора Пойнтинга  $\Pi_{\text{ср пад}}$  падает по направлению нормали на металлическую пластинку толщиной  $d$ . Металл находится в сверхпроводящем состоянии (нормальная часть удельной проводимости равна нулю) и характеризуется плазменной частотой  $\omega_{\text{пл}}$ . Пластина окружена вакуумом, частота колебаний  $\omega \ll \omega_{\text{пл}}$ . Получите выражения для коэффициентов прохождения и отражения плотности потока мощности:  $T_{\Pi} = \Pi_{\text{ср пр}} / \Pi_{\text{ср пад}}$ ,  $R_{\Pi} = \Pi_{\text{ср отр}} / \Pi_{\text{ср пад}}$ , где  $\Pi_{\text{ср пр}}$  и  $\Pi_{\text{ср отр}}$  — средние значения векторов Пойнтинга для волны, прошедшей пластину и волны, отраженной от пластины, соответственно.

**5.2.28. (У)** Плоская электромагнитная волна падает по направлению нормали на металлическую пластинку толщиной  $d = 0,1$  мкм. Металл находится в сверхпроводящем состоянии (нормальная часть удельной проводимости равна нулю) и характеризуется лондоновской длиной  $\lambda_L = 120$  нм. Пластина окружена вакуумом, длина волны в вакууме  $\lambda_0 = 100$  мкм. Определите, какая часть средней плотности потока мощности падающей волны проходит через пластинку. Найдите  $E_{m \text{ пр}}$  — амплитуду напряженности электрического поля в прошедшей через слой волне, если в падающей волне  $E_{m \text{ пад}} = 10^3$  В/м.

**5.2.29.** Используя решения задач 5.1.54 и 5.2.27, покажите, что средняя плотность потока мощности в сверхпроводящей пластине без потерь (нормальные электроны отсутствуют) неизменна и равна средней плотности потока мощности для волны, прошедшей пластину.

### 5.3. ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩУЮ ПЛОСКОСТЬ

**5.3.1. (У)** Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией падает по нормали из воздуха на идеально проводящую плоскость. Амплитуда вектора напряженности магнитного поля падающей волны равна  $0,1 \text{ А/м}$ , частота колебаний  $3 \text{ ГГц}$ . Получите выражения, описывающие изменение амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в полупространстве над границей раздела.

**5.3.2. (У)** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из воздуха на идеально проводящую плоскость. Вектор напряженности электрического поля падающей волны на границе раздела:  $\vec{E}_{0\text{пад}} = 10 \cos(2\pi \cdot 10^{10} t) \vec{1}_y, \text{ В/м}$ . Получите выражения, описывающие мгновенные значения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в полупространстве над проводящей плоскостью.

**5.3.3.** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из воздуха на идеально проводящую плоскость. Вектор напряженности электрического поля падающей волны на границе раздела:  $\vec{E}_{0\text{пад}} = 0,5 \cos(2\pi \cdot 10^9 t) \vec{1}_y, \text{ В/м}$ . Получите выражение, описывающее мгновенные значения вектора плотности поверхностного тока на проводящей плоскости.

**5.3.4. (У)** Излучение рубинового лазера с импульсной мощностью  $3 \text{ кВт}$  сформировано в виде линейно поляризованного пучка с размерами поперечного сечения  $1 \times 1 \text{ см}^2$ . Этот пучок падает по нормали из воздуха на идеально проводящую пластину и отражается от нее. Определите амплитуду тока, текущего по поверхности пластины и излучающего отраженный свет.

**5.3.5.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $15^\circ$  из вакуума на

идеально проводящую плоскость. Частота колебаний 300 МГц. Определите фазовую скорость, с которой полное поле распространяется вдоль поверхности металла. Найдите минимальную высоту над границей раздела, на которой амплитуда тангенциальной составляющей вектора  $\vec{H}$  равна нулю.

**5.3.6.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает под углом  $40^\circ$  из вакуума на идеально проводящую плоскость. Частота колебаний 3 ГГц. Определите продольную длину волны и поперечную длину волны, которые характеризуют полное поле, распространяющееся вдоль границы раздела.

**Примечание.** Продольной длиной волны называется пространственный период поля вдоль оси распространения; поперечной длиной волны называется пространственный период стоячей волны в направлении, поперечном к оси распространения.

**5.3.7.** Решите предыдущую задачу, считая, что над идеально проводящей плоскостью находится диэлектрическое полупространство без потерь с  $\varepsilon = 2,56$ ,  $\mu = 1$ .

**5.3.8.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $30^\circ$  из вакуума на поверхность идеального металла. Частота колебаний 20 ГГц. Определите продольную длину волны полного поля, распространяющегося вдоль поверхности металла (см. примечание к задаче 5.3.6). Найдите, на какой минимальной высоте над границей раздела амплитуда касательной составляющей вектора  $\vec{E}$  будет максимальна.

**5.3.9.** Плоская электромагнитная волна с частотой 0,5 ГГц наклонно падает из диэлектрического полупространства без потерь с  $\varepsilon = 9$ ,  $\mu = 1$  на поверхность идеального металла, при этом возникает волновой процесс, распространяющийся вдоль поверхности металла с фазовой скоростью  $3 \cdot 10^8$  м/с. Определите угол падения на металл исходной плоской волны.

**5.3.10.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией наклонно падает из вакуума на идеально проводящую плоскость. При этом над границей раздела возникает волновой процесс, распространяю-

щийся вдоль поверхности металла (продольная длина волны равна 0,1 м) и образующий стоячую волну в направлении нормали к поверхности металла (поперечная длина волны — 0,3 м). Определите частоту колебаний поля и угол падения исходной плоской волны на проводящую плоскость.

**5.3.11.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией наклонно падает из вакуума на поверхность идеального металла. Изобразите качественно зависимость амплитуды касательной составляющей магнитного вектора полного поля от координаты, изменяющейся в направлении нормали к границе раздела. На этом же рисунке покажите пунктирной линией данную зависимость для ситуации, когда угол падения исходной плоской волны увеличился в 2 раза.

**5.3.12.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией наклонно падает из воздуха на поверхность идеального металла. Изобразите качественно зависимость амплитуды касательной составляющей электрического вектора полного поля от координаты, изменяющейся в направлении нормали к границе раздела. На этом же рисунке покажите пунктирной линией данную зависимость для ситуации, когда над поверхностью металла находится диэлектрическое полупространство без потерь с  $\varepsilon = 4$ ,  $\mu = 1$ .

**5.3.13.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает под углом  $35^\circ$  из вакуума на идеально проводящую плоскость. Амплитуда вектора напряженности магнитного поля падающей волны 50 мА/м. Частота колебаний 10 ГГц. Определите среднее за период колебаний значение вектора Пойнтинга  $\bar{P}_{cp}$  и реактивную составляющую вектора Пойнтинга  $\bar{P}_p$  в полупространстве над границей раздела.

**Примечание.** Учтите, что  $\bar{P}_p = \frac{1}{2} \text{Im} \left[ \dot{\vec{E}} \cdot \vec{H}^* \right]$ .

**5.3.14.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $60^\circ$  из вакуума на идеально проводящую плоскость. Амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны 20 В/м.

Частота колебаний 3 ГГц. Определите среднее за период колебаний значение вектора Пойнтинга  $\bar{P}_{cp}$  и реактивную составляющую вектора Пойнтинга  $\bar{P}_p$  в полупространстве над границей раздела (см. примечание к предыдущей задаче.)

**5.3.15.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией наклонно падает под углом  $30^\circ$  из вакуума на идеально проводящую плоскость, описываемую уравнением  $z = 0$ . Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны в точке  $x = y = z = 0$  равна 5 В/м. Частота колебаний 300 МГц. Определите комплексную амплитуду вектора плотности поверхностного тока на проводящей плоскости.

**5.3.16.** Решите предыдущую задачу, считая, что падающая волна имеет перпендикулярную поляризацию.

**5.3.17. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой 0,9 ГГц наклонно падает из вакуума на идеально проводящую плоскость, описываемую уравнением  $z = 0$ . Комплексная амплитуда плотности поверхностного тока, протекающего по проводящей плоскости:

$$\bar{J}_{пов} = 0,2 \exp(-j5\pi x) \bar{1}_y, \text{ А/м.}$$

Определите угол падения, поляризацию и амплитуду электрического вектора падающей волны.

**5.3.18.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает под углом  $55^\circ$  из вакуума на идеально проводящую плоскость. Частота колебаний 2 ГГц. Определите, на каком минимальном расстоянии от границы раздела вектор напряженности магнитного поля будет иметь круговую поляризацию.

**5.3.19. (У)** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $20^\circ$  из вакуума на идеально проводящую плоскость. Частота колебаний 0,2 ГГц. Определите ориентацию и коэффициент эллиптичности для эллипса поляризации вектора напряженности полного электрического поля на высоте 20 см над границей раздела.



**5.3.20.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $70^\circ$  из вакуума на поверхность идеального металла. При этом над границей раздела возникает волновой процесс, представляющий собой суперпозицию падающей и отраженной волн. Определите, на каком расстоянии от проводящей плоскости можно поставить вторую проводящую плоскость, если исходить из условия, что вторая плоскость не возбуждает волновой процесс, т. е. чтобы граничные условия на второй плоскости выполнялись автоматически — в рамках структуры поля исследуемого волнового процесса. Частота колебаний 15 ГГц. Как изменится ответ в случае, когда падающая волна имеет перпендикулярную поляризацию?

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

# ВОЛНОВОДЫ

### СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

**П**олый металлический волновод представляет собой трубу с хорошо проводящими стенками. В зависимости от формы поперечного сечения различают прямоугольный и круглый металлический волновод (рис. 6.1 и 6.2).

В полом металлическом волноводе могут существовать волны типа  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$  (волны Е- и Н-типа). Для волны Е-типа  $\dot{E}_z \neq 0$ ,  $\dot{H}_z = 0$  (ось  $z$  совмещена с продольной осью волновода). В случае волны Н-типа  $\dot{H}_z \neq 0$ ,  $\dot{E}_z = 0$ . Волна конкретного типа в волноводе может распространяться, если  $\frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} < \lambda_{кр}$  или  $f > f_{кр}$ , где  $\lambda_0 = c/f$  — длина волны генератора;  $\epsilon$  и  $\mu$  — относительные диэлектрическая и магнитные проницаемости среды, заполняющей волновод;  $\lambda_{кр}$  — критическая длина волны, которая определяется типом волны и размерами поперечного сечения волновода;

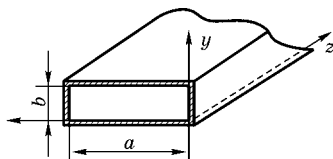


Рис. 6.1  
Прямоугольный  
металлический волновод

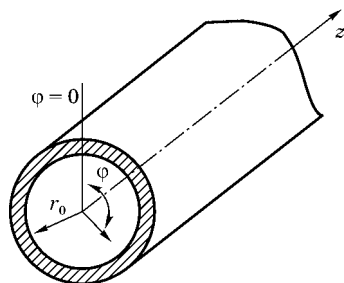


Рис. 6.2  
Круглый металлический волновод

$$f_{\text{кр}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}\lambda_{\text{кр}}}$$

— критическая частота для волны данного типа. Для волн Е- и Н-типа в прямоугольном волноводе

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}},$$

где  $a$  — ширина волновода;  $b$  — высота волновода (по умолчанию принимается, что  $a > b$ , см. рис. 6.1);  $\lambda_{\text{кр}}$  бывает удобно записать в виде

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2a}{\sqrt{m^2 + \left(n\frac{a}{b}\right)^2}} = \frac{2b}{\sqrt{n^2 + \left(m\frac{b}{a}\right)^2}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что  $\lambda_{\text{кр}} < 2b$ , если  $m \geq 1$  и  $n \geq 1$ .

Для волн типа Е в круглом волноводе

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi r_0}{v_{mn}},$$

где  $r_0$  — радиус волновода;  $v_{mn}$  —  $n$ -й корень функции Бесселя  $J_m(x)$ . Для волн типа Н в круглом волноводе радиуса  $r_0$

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi r_0}{\mu_{mn}},$$

где  $\mu_{mn}$  —  $n$ -й корень производной  $dJ_m(x)/dx$ . Значения  $v_{mn}$  и  $\mu_{mn}$  приведены в табл. 6.1 и 6.2.

Волной основного типа называют волну с наибольшей критической длиной волны в данном волноводе. В прямоугольном волноводе волной основного типа является волна  $H_{10}$  (так как  $a > b$ ), в круглом волноводе основным типом является  $H_{11}$ .

Фазовая скорость волны в волноводе:

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}}.$$

Т а б л и ц а 6.1

Корни  $\nu_{mn}$  функций Бесселя  $J_m(x)$ 

$n$	$m$		
	0	1	2
1	2,405	3,832	5,136
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,17	11,62

Т а б л и ц а 6.2

Корни  $\mu_{mn}$  производных функций Бесселя  $dJ_m(x)/dx$ 

$n$	$m$		
	0	1	2
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705
3	10,17	8,536	9,965

Длина волны в волноводе:

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{v_{\text{ф}}}{f} = \frac{\frac{c}{f}}{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}}.$$

Составляющие поля бегущей волны в волноводе изменяются вдоль оси распространения  $z$  по закону

$$\exp(-jh z) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda_{\text{в}}} z\right),$$

где

$$h = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}$$

— продольное волновое число.

Если  $f < f_{\text{кр}}$ , то продольное волновое число становится мнимым:  $h = -j\alpha_z$ . При этом данный тип волны затухает, и составляющие поля убывают вдоль оси  $z$  по закону  $\exp(-\alpha_z z)$ , где

$$\alpha_z = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2 - 1}.$$

Составляющие поля волны типа  $E_{mn}$  в прямоугольном волноводе:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= -j \frac{h}{g^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_y &= -j \frac{h}{g^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_z &= C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_x &= j \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_y &= -j \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_z &= 0.\end{aligned}$$

Составляющие поля волны типа  $H_{mn}$  в прямоугольном волноводе:

$$\begin{aligned}\dot{H}_x &= j \frac{h}{g^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_y &= j \frac{h}{g^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_z &= C_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_x &= j \frac{\omega \mu_a}{g^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_y &= -j \frac{\omega \mu_a}{g^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_z &= 0.\end{aligned}$$

Составляющие поля волны типа  $E_{mn}$  в круглом волноводе:

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= -j \frac{hr_o}{v_{mn}} C_1 J'_m \left( \frac{v_{mn}}{r_o} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_\varphi &= j \frac{hr_o^2}{rv_{mn}^2} C_1 m J_m \left( \frac{v_{mn}}{r_o} r \right) \sin(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_z &= C_1 J_m \left( \frac{v_{mn}}{r_o} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{H}_r &= -j \frac{\omega \varepsilon_a r_o^2}{r v_{mn}^2} C_1 m J_m \left( \frac{v_{mn}}{r_o} r \right) \sin(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_\varphi &= -j \frac{\omega \varepsilon_a r_o}{v_{mn}} C_1 J'_m \left( \frac{v_{mn}}{r_o} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_z &= 0.\end{aligned}$$

Составляющие поля волны типа  $H_{mn}$  в круглом волноводе:

$$\begin{aligned}\dot{H}_r &= -j \frac{h r_o}{\mu_{mn}} C_2 J'_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_o} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_\varphi &= j \frac{h r_o^2}{r \mu_{mn}^2} C_2 J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_o} r \right) \sin(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_z &= C_2 J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_o} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_r &= j \frac{\omega \mu_a r_o^2}{r \mu_{mn}^2} C_2 m J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_o} r \right) \sin(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_\varphi &= j \frac{\omega \mu_a r_o}{\mu_{mn}} C_2 J'_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_o} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_z &= 0.\end{aligned}$$

Здесь  $g = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}$  — поперечное волновое число;  $h = \frac{2\pi}{\lambda_{в}}$  — продольное волновое число;  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей волновод.

При определении составляющих поля удобно пользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\frac{\omega \varepsilon_a}{g} &= \frac{f}{f_{кр} Z_0} \sqrt{\varepsilon}; \quad \frac{\omega \mu_a}{g} = \frac{f Z_o}{f_{кр}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}; \quad \frac{h}{g} = \frac{\lambda_{кр}}{\lambda_{в}}; \\ \frac{h}{\omega \varepsilon_a} &= Z_{сЕ} = Z_o \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \sqrt{1 - \left( \frac{f_{кр}}{f} \right)^2}}; \quad \frac{\omega \mu_a}{h} = Z_{сН} = Z_o \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{кр}}{f} \right)^2}},\end{aligned}$$

где  $Z_0 = 120\pi \approx 377$  Ом — характеристическое сопротивление вакуума;  $Z_{сЕ}$  и  $Z_{сН}$  — характеристические сопротивления для волн типа Е и типа Н соответственно.

Комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного тока на стенках волновода

$$\dot{\vec{J}}_{\text{пов}} = [\bar{\vec{1}}_n \dot{\vec{H}}],$$

где  $\bar{\vec{1}}_n$  — вектор единичной нормали, направленный из металла внутрь волновода;  $\dot{\vec{H}}$  — комплексная амплитуда магнитного поля у стенки волновода.

Некоторые значения функций Бесселя в характерных точках:

$$J_0(\mu_{01}) = J_0(3,832) = -0,4027;$$

$$J_1(\mu_{11}) = J_1(1,841) = 0,5819;$$

$$J_1(\nu_{01}) = J_1(2,405) = 0,5191.$$

Рекуррентные соотношения для функций Бесселя:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x); \quad J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x);$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x); \quad J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x).$$

Интегралы с функциями Бесселя:

$$\begin{aligned} \int x^{n+1} J_n(x) dx &= x^{n+1} J_{n+1}(x); \quad \int J_1(x) dx = -J_0(x); \\ \int x^{-n+1} J_n(x) dx &= -x^{-n+1} J_{n-1}(x); \quad \int x J_0(x) dx = x J_1(x); \\ \int x [J_n(\alpha x)]^2 dx &= \frac{x^2}{2} [J_n^2(\alpha x) - J_{n-1}(\alpha x) J_{n+1}(\alpha x)]. \end{aligned}$$

Мощность, переносимая волной в волноводе:

$$P = \int_S \Pi_{\text{ср}z} dS = \frac{1}{2} \int_S \text{Re} \{ \bar{\vec{1}}_z [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}]^* \} dS,$$

где интегрирование осуществляется по поперечному сечению волновода. При определении переносимой мощности в прямоугольном волноводе удобно пользоваться соотношением

$$\int_0^a \sin^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) dx = \int_0^a \cos^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) dx = \frac{a}{2}.$$

Погонная мощность потерь в стенках волновода

$$P_{\text{пот пог мет}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{\text{ам}}}{8 \sigma_{\text{м}}}} \int_L |\dot{H}_{\text{тм}}|^2 dl,$$

где  $\mu_{\text{ам}}$  и  $\sigma_{\text{м}}$  — абсолютная магнитная проницаемость и удельная проводимость металла, из которого сделаны стенки;  $|\dot{H}_{\text{тм}}|$  — модуль комплексной амплитуды тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности металла;  $L$  — контур поперечного сечения волновода.

Погонная мощность потерь в среде, заполняющей волновод

$$P_{\text{пот пог ср}} = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{2} \int_S |\dot{E}|^2 dS,$$

где  $\sigma_{\text{ср}} = \omega \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{tg} \delta$  — удельная проводимость заполняющей среды;  $\varepsilon$  и  $\operatorname{tg} \delta$  — относительная диэлектрическая проницаемость и тангенс угла потерь среды;  $S$  — поверхность поперечного сечения волновода.

С учетом потерь в волноводе комплексные амплитуды составляющих поля изменяются вдоль оси распространения  $z$  по закону

$$\exp(-jhz) = \exp(-jh'z) \exp(-h''z),$$

где  $h = h' - jh''$ ,  $h' = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{в}}}$  — коэффициент фазы;  $h''$  — коэффициент затухания.

Коэффициент затухания

$$h'' = \frac{P_{\text{пот пог}}}{2P} = h''_{\text{м}} + h''_{\text{ср}} \quad [1/\text{м}],$$

здесь  $P_{\text{пот пог}} = P_{\text{пот пог мет}} + P_{\text{пот пог ср}}$  — мощность потерь в отрезке волновода единичной длины.

Погонное затухание

$$\Delta_{\text{пог}} = [20 \lg(e)] \cdot h'' \approx 8,686 \cdot h'' \quad [\text{дБ/м}].$$

Коэффициент затухания за счет потерь в стенках прямоугольного металлического волновода:

а) волна магнитного типа  $H_{mn}$



$$h''_m = 2\sqrt{\frac{\mu_{ам}\Omega}{2\sigma_m}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} b \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2\right] \frac{b \left(\frac{b}{a} m^2 + n^2\right)}{\frac{b^2 m^2}{a^2} + n^2} \right\};$$

$$m \geq 1; \quad n \geq 1;$$

б) волна магнитного типа  $H_{m0}$

$$h''_m = \sqrt{\frac{\mu_{ам}\Omega}{2\sigma_m}} \frac{\left\{1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2\right\}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} b \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}};$$

в) волна магнитного типа  $H_{0n}$

$$h''_m = \sqrt{\frac{\mu_{ам}\Omega}{2\sigma_m}} \frac{\left\{1 + \frac{2a}{b} \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2\right\}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} a \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}};$$

г) волна электрического типа  $E_{mn}$

$$h''_m = 2\sqrt{\frac{\mu_{ам}\Omega}{2\sigma_m}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} b \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}} \left[ \frac{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2}{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2} \right]; \quad m \geq 1; \quad n \geq 1.$$

Коэффициент затухания за счет потерь в стенках круглого металлического волновода:

а) волна магнитного типа  $H_{mn}$

$$h''_m = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{ам}\Omega}{2\sigma_m}}}{r_o \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} \left[ \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} \right];$$

б) волна магнитного типа  $H_{0n}$

$$h''_M = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{ам}\omega}{2\sigma_M}} \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}{r_o \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}};$$

в) волна электрического типа  $E_{mn}$

$$h''_M = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{ам}\omega}{2\sigma_M}}}{r_o \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}.$$

Продольное волновое число в волноводе с идеально проводящими стенками, заполненном средой с потерями:

$$h_{cp} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon (1 - j \operatorname{tg} \delta) - g^2}.$$

Коэффициент затухания за счет потерь в среде, заполняющей волновод:

$$h''_{cp} = |\operatorname{Im}(h_{cp})|.$$

Если  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ , то

$$h''_{cp} = \frac{\omega}{2c} \sqrt{\epsilon} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}.$$

Фазовая скорость волны при учете потерь в среде, заполняющей волновод:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{|\operatorname{Re}(h_{cp})|}.$$

Групповая скорость для волны конкретного типа в волноводе:

$$v_{гр} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2},$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей волновод.

Связь между групповой и фазовой скоростью:

$$v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = \frac{c^2}{\mu \varepsilon}.$$

Степень искажений («степень расплывания») радиосигнала в волноводе оценивается величиной  $\Delta t / \tau_{\text{и}}$ , где

$$\Delta t = \frac{L}{v_{\text{гр}}(f_{\text{min}})} - \frac{L}{v_{\text{гр}}(f_{\text{max}})}$$

— разность времен прохождения по волноводу крайних узкополосных групп, содержащихся в спектре радиосигнала;  $L$  — длина волноводного тракта;  $\tau_{\text{и}}$  — длительность радиосигнала.

## 6.1. УСЛОВИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ, ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ И ДЛИНА ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ

**6.1.1.** Определите, какие типы волн могут распространяться в прямоугольном волноводе сечением  $165 \times 83$  мм на частоте 1,36 ГГц. Волновод заполнен: а) воздухом; б) диэлектриком с  $\varepsilon = 2,5$ .

**6.1.2.** Определите, какие типы волн могут распространяться в заполненном воздухом прямоугольном волноводе сечением  $35 \times 16$  мм на частоте 11 ГГц. Какая частота колебаний соответствует середине частотного диапазона одноволнового режима (см. примечание)?

**Примечание.** Середина диапазона в логарифмическом масштабе по оси частот определяется как среднее геометрическое значение от крайних частот диапазона.

**6.1.3.** Каким неравенствам должны удовлетворять размеры поперечного сечения прямоугольного волновода, если требуется, чтобы в волноводе могла распространяться только волна основного типа? Частота колебаний равна 2 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Считайте, что поперечные размеры волновода удовлетворяют условию  $a > b$ .

**6.1.4.** Определите диапазон частот, в котором в прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34$  мм может распространяться только волна основного типа. Волновод заполнен воздухом.

**6.1.5.** В прямоугольном волноводе сечением  $16 \times 8$  мм распространяется волна основного типа. Частота колебаний равна 11 ГГц. Определите относительную диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей волновод, если частота колебаний превышает критическую в 1,5 раза.

**6.1.6.** Известно, что на некоторой фиксированной частоте в прямоугольном волноводе волна основного типа распространяется, а волна типа  $H_{20}$  распространяться не может. Определите, при каком отношении ширины волновода к его высоте волна типа  $H_{11}$  не будет распространяться.

**6.1.7.** Прямоугольный волновод заполнен воздухом и имеет сечение: а)  $48 \times 34$  мм; б)  $48 \times 6$  мм. Определите высшие типы волн, ближайшие к основному типу в данных случаях.

**6.1.8.** В прямоугольном волноводе сечением  $10,7 \times 5,3$  мм распространяется волна типа  $H_{11}$ . Частота колебаний равна 41 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Определите критическую частоту, фазовую скорость и длину волны в волноводе.

**6.1.9.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Фазовая скорость волны равна  $4 \cdot 10^8$  м/с, частота колебаний 10 ГГц. Определите длину волны в волноводе и ширину волновода.

**6.1.10.** В прямоугольном волноводе сечением  $35 \times 16$  мм распространяется волна основного типа с фазовой скоростью  $2,8 \cdot 10^8$  м/с. Частота колебаний равна 6,7 ГГц. Определите длину волны в волноводе и относительную диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего волновод.

**6.1.11.** В прямоугольном волноводе сечением  $48 \times 22$  мм распространяется волна основного типа. Длина волны в волноводе 9,4 см. Относительная диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего волновод, равна 2,25.

Определите частоту передаваемых колебаний и фазовую скорость в волноводе.

**6.1.12.** В квадратном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна типа  $E_{11}$ . Частота колебаний 5 ГГц, длина волны в волноводе 9,43 см. Определите фазовую скорость и размер стенки.

**6.1.13.** В прямоугольном волноводе сечением  $16 \times 8$  мм распространяется волна основного типа. Длина волны в волноводе равна 2,5 см, частота колебаний 9 ГГц. Определите фазовую скорость и относительную диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего волновод ( $\mu = 1$ ).

**6.1.14.** Прямоугольный волновод заполнен воздухом. На частоте колебаний 10 ГГц длина волны типа  $H_{10}$  равна 3,96 см. На частоте 19 ГГц длина волны типа  $H_{01}$  равна 2,57 см. Определите размеры поперечного сечения волновода.

**6.1.15.** В прямоугольном волноводе сечением  $35 \times 16$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Волновод заполнен воздухом. На расстоянии  $z = 12$  мм вдоль оси волновода сдвиг фаз колебаний по отношению к точке  $z = 0$  составляет  $-120^\circ$ . Определите частоту передаваемых колебаний.

**6.1.16.** Прямоугольный волновод сечением  $12 \times 8$  мм заполнен воздухом. Частота колебаний 10 ГГц. Стенки волновода выполнены из идеально проводящего материала. Определите, на отрезке какой длины ослабление волны основного типа составит 60 дБ.

**6.1.17.** В прямоугольном волноводе сечением  $15 \times 7$  мм распространяется волна основного типа. Частота колебаний 15 ГГц. В точке  $z = 0$ ,  $x = 2$  мм комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  равна  $10e^{j\pi/2}$  мВ/м. Волновод заполнен воздухом. Определите  $\vec{E}$  в точке  $z = 10$  мм,  $x = 4$  мм.

**6.1.18.** В прямоугольном волноводе  $E_y = E_0 \sin(g_x x) \times \exp(-jhz)$ , где множитель  $\exp(-jhz)$  описывает бегущую волну по координате  $z$ , множитель  $\sin(g_x x)$  — стоячую волну по координате  $x$ . Частота колебаний  $\omega_0$ , волновод заполнен воздухом и имеет ширину  $a$ . Воспользовавшись граничными условиями и уравнением Гельмгольца для  $E_y$ , определите  $g_x$  и  $h$  (число вариаций поля по  $x$  минимальное).

**6.1.19. (У)** Прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками и поперечным сечением  $35 \times 16$  мм заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,56$  и  $\operatorname{tg} \delta = 3 \cdot 10^{-4}$ . Определите фазовую скорость и длину волны в волноводе, если: а) рабочая частота  $f_0 = 1,2f_{\text{кр}}$ ; б)  $f_0 = 0,8f_{\text{кр}}$ . Тип волны  $H_{10}$ .

**6.1.20.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна с частотой 10 ГГц. Изобразите зависимость: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе от ширины волновода. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне типа  $H_{10}$ ; 2) волне типа  $H_{01}$  (отношение ширины волновода к его высоте равно 2).

**6.1.21.** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм распространяется волна основного типа. Изобразите зависимость: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе от частоты колебаний. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волновода: 1) воздухом; 2) диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 4$ .

**6.1.22.** В прямоугольном волноводе распространяется волна основного типа. Частота колебаний 15 ГГц. Изобразите зависимость: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе от ширины волновода. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волновода: 1) воздухом; 2) диэлектриком с  $\varepsilon = 9$ .

**6.1.23.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите зависимость от частоты колебаний: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) сечению волновода  $10 \times 6$  мм; 2) сечению волновода  $30 \times 15$  мм.

**6.1.24.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна типа  $H_{01}$ . Изобразите зависимость от высоты волновода: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) частоте 15 ГГц; 2) частоте 30 ГГц.

**6.1.25.** Прямоугольный волновод сечением  $60 \times 30$  мм заполнен воздухом. Изобразите зависимость от частоты

колебаний: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне основного типа; 2) волне типа  $E_{11}$ .

**6.1.26. (У)** Прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками и поперечным сечением  $a \times b$  заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon$  и удельной проводимостью  $\sigma_d$ . Изобразите (качественно, на одном графике) зависимости фазовой скорости от частоты для случаев: а)  $\sigma_d = 0$ ; б)  $\sigma_d / (\omega_{кр} \varepsilon_0 \varepsilon) = 0,2$ .

**6.1.27.** Определите, какие типы волн могут распространяться в круглом волноводе диаметром 50 мм на частоте 4,4 ГГц. Волновод заполнен: а) воздухом; б) диэлектриком с  $\varepsilon = 3$ .

**6.1.28.** Каким неравенствам должен удовлетворять радиус круглого волновода, если требуется, чтобы в волноводе могла распространяться только волна основного типа? Частота колебаний 10 ГГц, волновод заполнен воздухом.

**6.1.29.** Определите диапазон частот, в котором в круглом волноводе диаметром 30 мм может распространяться только основной тип волны. Волновод заполнен: а) воздухом; б) диэлектриком с  $\varepsilon = 2,56$ .

**6.1.30.** В круглом волноводе диаметром 16 мм распространяется волна основного типа. Частота колебаний равна 13 ГГц. Определите критическую частоту, фазовую скорость и длину волны в волноводе, который заполнен: а) воздухом; б) диэлектриком с  $\varepsilon = 2,56$ .

**6.1.31.** В круглом волноводе, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 2,08$ , распространяется волна типа  $E_{01}$ . Фазовая скорость волны равна  $3 \cdot 10^8$  м/с, частота колебаний 10 ГГц. Определите длину волны в волноводе и диаметр волновода.

**6.1.32.** В круглом волноводе диаметром 56 мм распространяется волна типа  $H_{01}$  с фазовой скоростью  $4 \cdot 10^8$  м/с. Волновод заполнен воздухом. Определите частоту передаваемых колебаний и длину волны в волноводе.

**6.1.33.** В круглом волноводе, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 2,08$ , распространяется волна типа  $E_{11}$ . Частота колебаний равна 8 ГГц,

длина волны в волноводе составляет 4,2 см. Определите фазовую скорость и радиус волновода.

**6.1.34.** В круглом волноводе диаметром 24 мм распространяется волна основного типа. Длина волны в волноводе равна 4,8 см, частота колебаний 6 ГГц. Определите фазовую скорость и относительную диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего волновод.

**6.1.35.** В круглом волноводе диаметром 90 мм распространяется волна основного типа. Относительная диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего волновод, равна 2,25. Длина волны в волноводе составляет 19 см. Определите частоту передаваемых колебаний и фазовую скорость.

**6.1.36.** В круглом волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна типа  $E_{01}$ . Частота колебаний равна 10 ГГц. На расстоянии 7,8 мм (вдоль оси волновода) фаза колебаний меняется на  $\pi/4$ . Определите диаметр волновода.

**6.1.37.** Круглый волновод диаметром 30 мм заполнен воздухом. Частота колебаний равна 3,75 ГГц. Стенки волновода выполнены из идеально проводящего материала. Определите длину отрезка волновода, на которой затухание волны основного типа составит 40 дБ.

**6.1.38.** В круглом волноводе диаметром 20 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Частота колебаний равна 17 ГГц. В точке  $z = 0, r = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  равна  $25e^{j\pi/4}$  мВ/м. Волновод заполнен воздухом. Определите  $\vec{E}$  в точке  $z = 10$  мм,  $r = 0$ .

**6.1.39.** В круглом волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна с частотой 3 ГГц. Изобразите зависимость от радиуса волновода: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне типа  $H_{11}$ ; 2) волне типа  $H_{01}$ .

**6.1.40.** В круглом волноводе радиусом 20 мм распространяется волна основного типа. Изобразите зависимость от частоты колебаний: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волново-



да: 1) воздухом; 2) диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 9$ .

**6.1.41.** В круглом волноводе распространяется волна основного типа. Частота колебаний 8 ГГц. Изобразите зависимость от радиуса волновода: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волновода: 1) воздухом; 2) диэлектриком с  $\varepsilon = 4$ .

**6.1.42.** В круглом волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите зависимость от частоты колебаний: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) диаметру волновода 30 мм; 2) диаметру волновода 60 мм.

**6.1.43.** В круглом волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна типа  $H_{11}$ . Изобразите зависимость от радиуса волновода: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) частоте 3 ГГц; 2) частоте 6 ГГц.

**6.1.44.** Круглый волновод диаметром 50 мм заполнен воздухом. Изобразите зависимость от частоты колебаний: а) фазовой скорости; б) длины волны в волноводе. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне основного типа; 2) волне типа  $E_{01}$ .

## 6.2. СТРУКТУРА ПОЛЯ И ТОКОВ В ВОЛНОВОДЕ

**6.2.1.** В прямоугольном волноводе сечением  $48 \times 22$  мм распространяется волна основного типа. Максимальная амплитуда составляющей  $H_x$  равна максимальной амплитуде составляющей  $H_z$ . Волновод заполнен воздухом. Определите частоту передаваемых колебаний.

**6.2.2.** В прямоугольном волноводе сечением  $35 \times 16$  мм распространяется волна типа  $H_{11}$ . Волновод заполнен воздухом. Максимальная амплитуда составляющей  $E_x$  равна 50 В/м. Частота колебаний 15 ГГц. Определите максимальную амплитуду составляющей  $H_z$ .

**6.2.3.** Максимальная амплитуда составляющей  $H_x$  волны основного типа в прямоугольном волноводе составляет 0,1 А/м. Частота колебаний равна 9,4 ГГц. Волновод заполнен воздухом и имеет сечение  $23 \times 10$  мм. Определите поперечное характеристическое сопротивление и максимальную амплитуду составляющей  $E_y$ .

**6.2.4.** В прямоугольном волноводе сечением  $16 \times 8$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Волновод заполнен воздухом. Максимальная амплитуда составляющей  $H_y$  равна 50 мА/м. Частота колебаний составляет 30 ГГц. Определите максимальную амплитуду составляющей  $E_z$ .

**6.2.5.** В прямоугольном волноводе сечением  $7,1 \times 3,6$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Максимальная амплитуда составляющей  $E_y$  равна максимальной амплитуде составляющей  $E_z$ . Волновод заполнен воздухом. Определите частоту передаваемых колебаний.

**6.2.6.** Максимальная амплитуда составляющей  $E_x$  волны типа  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе составляет 0,15 В/м. Частота колебаний равна 7 ГГц. Волновод заполнен воздухом и имеет сечение  $72 \times 34$  мм. Определите поперечное характеристическое сопротивление и максимальную амплитуду составляющей  $H_y$ .

**6.2.7.** В прямоугольном волноводе сечением  $48 \times 22$  мм распространяется волна основного типа. Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний равна 4,5 ГГц. Определите значение координаты  $x$ , при котором вектор  $\vec{H}$  имеет круговую поляризацию.

**6.2.8.** В прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний равна 7,5 ГГц. Определите, при каких значениях координаты  $y$  вектор  $\vec{E}$  в сечении  $x = a/2$  имеет круговую поляризацию.

**6.2.9.** Максимальная амплитуда составляющей  $H_z$  волны типа  $H_{11}$  в прямоугольном волноводе составляет 0,05 А/м. Частота колебаний равна 23 ГГц. Волновод заполнен воздухом и имеет сечение  $23 \times 10$  мм. Определите амплитуду вектора  $\vec{E}$  в точке  $x = 20$  мм,  $y = 3$  мм.

**6.2.10.** Максимальная амплитуда составляющей  $E_z$  волны типа  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе составляет

1,75 В/м. Частота колебаний равна 4,4 ГГц. Волновод заполнен воздухом и имеет сечение 110×55 мм. Определите амплитуду вектора  $\vec{H}$  в точке  $x = 30$  мм,  $y = 35$  мм.

**6.2.11.** В прямоугольном волноводе сечением 72×34 мм распространяется волна основного типа. Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний равна 3 ГГц. При  $x = 18$  мм,  $z = z_1$  комплексная амплитуда  $\vec{E} = 1,5 \bar{1}_y$ , В/м. Определите комплексную амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока при  $x = 36$  мм,  $z = z_1$ ,  $y = 0$ .

**6.2.12.** В прямоугольном волноводе сечением 23×10 мм распространяется волна основного типа. Максимальная амплитуда составляющей  $H_x$  равна 0,1 А/м, частота поля составляет 10 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Определите амплитуду вектора плотности поверхностного тока на правой боковой стенке (при  $x = 0$ ).

**6.2.13.** В прямоугольном волноводе сечением 50×25 мм распространяется волна основного типа. Максимальная амплитуда составляющей  $H_z$  равна 15 мА/м, частота поля — 4,3 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Определить максимальную амплитуду вектора плотности тока смещения.

**6.2.14.** В прямоугольном волноводе сечением 35×16 мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний 15 ГГц. Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора плотности тока смещения равна 0,5 А/м<sup>2</sup>. Определите максимальную амплитуду составляющей  $E_y$ .

**6.2.15.** В прямоугольном волноводе сечением 16×8 мм распространяется волна основного типа. Волновод заполнен воздухом. Амплитуда вертикальной составляющей вектора плотности поверхностного тока на боковой стенке равна максимальной амплитуде продольной составляющей вектора плотности поверхностного тока на нижней стенке. Определите частоту передаваемых колебаний.

**6.2.16.** В прямоугольном волноводе сечением 10,7×5,3 мм распространяется волна основного типа. Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний 25 ГГц. В некотором сечении  $z = z_1$  комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного тока на правой боковой стенке равна  $0,3 \bar{1}_y$ , А/м.

Определите комплексную амплитуду вектора плотности поверхностного тока на верхней стенке в этом же сечении.

**6.2.17.** В прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Волновод заполнен воздухом. Максимальная амплитуда составляющей  $E_z$  равна  $1,2$  В/м. Частота колебаний  $7$  ГГц. Определите амплитуду тока проводимости, пересекающего контур поперечного сечения.

**6.2.18.** В прямоугольном волноводе сечением  $10,7 \times 5,3$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Волновод заполнен воздухом. Максимальная амплитуда составляющей  $H_x$  равна  $1,5$  А/м. Частота колебаний  $45$  ГГц. Определите амплитуду тока смещения, пересекающего плоскость поперечного сечения волновода.

**6.2.19. (У)** Поле волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе можно представить как суперпозицию двух бегущих волн, распространяющихся под некоторым углом к боковым стенкам  $x = 0$  и  $x = a$  (концепция парциальных волн, предложенная французским физиком Бриллюэном). Волновод заполнен воздухом. Определите составляющие поля этих волн. Найдите  $\varphi$  — угол падения парциальных волн на боковые стенки и качественно изобразите зависимость  $\varphi$  от частоты. Получите выражение для фазовой скорости парциальных волн в направлении оси  $z$ . Убедитесь, что эта скорость определяется известным выражением для фазовой скорости волны  $H_{10}$  в волноводе.

**6.2.20.** Плоская волна с перпендикулярной поляризацией падает под углом  $\varphi_{\text{пад}}$  на идеально проводящую плоскость ( $x = 0$ ). Покажите, что полное поле в области  $0 < x < \lambda_0/2\cos(\varphi_{\text{пад}})$  идентично полю волны в прямоугольном волноводе шириной  $a = \lambda_0/2\cos(\varphi_{\text{пад}})$ . Получите выражения, связывающие критическую длину волны и ширину волновода с углом  $\varphi_{\text{пад}}$ .

**6.2.21. (У)** Прямоугольный волновод сечением  $35 \times 16$  мм закорочен на конце металлическим фланцем. На расстоянии  $z_0 = \lambda_v/4 = 11,1$  мм от фланца в центре широкой стенки волновода расположен вертикальный металлический штырь, в котором электромагнитное поле индуцирует

СВЧ-ток. Этот ток с помощью детекторной секции преобразуется в напряжение  $u_d = k_d E_m$ , где  $k_d$  — коэффициент детектирования;  $E_m$  — амплитуда составляющей вектора  $\vec{E}$  в точке размещения штыря, параллельной штырю. Определите относительное изменение уровня  $u_d$ , если относительное изменение (нестабильность) частоты генератора составляет 0,01 (относительно частоты  $f_0 = 8$  ГГц). Волновод заполнен воздухом, используется волна основного типа.

**6.2.22. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм распространяется волна основного типа. Волновод заполнен воздухом, частота колебаний 10 ГГц. При  $z = x = 0$   $\vec{H}_z = 0,5$  А/м. Определите комплексную амплитуду плотности поверхностного электрического заряда на верхней и нижней стенках.

**6.2.23. (У)** Прямоугольный волновод сечением  $a \times b$  в сечении  $z = 0$  «закорочен» идеально проводящей плоскостью. Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний  $f_0$ , тип волны  $H_{10}$ . Выведите выражения для вектора плотности тока смещения и вектора поверхностной плотности электрического тока на нижней ( $y = 0$ ) и правой ( $x = 0$ ) боковой стенке. Рассмотрите область  $z < 0$ .

**6.2.24.** Покажите, что поперечные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в прямоугольном волноводе ортогональны друг другу. В волноводе распространяется: а) волна типа Е; б) волна типа Н.

**6.2.25.** В прямоугольном волноводе распространяется волна типа  $E_{11}$ . Сечение внутренней поверхности стенок волновода плоскостью  $z = z_1$  образует прямоугольник размерами  $a \times b$ . Докажите, что амплитуда поверхностного электрического тока, пересекающего контур этого прямоугольника, равна амплитуде тока смещения, пересекающего поверхность, ограниченную данным контуром (сохранение полного тока).

**6.2.26.** В круглом волноводе диаметром 15 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Максимальная амплитуда составляющей  $E_z$  равна 0,2 В/м. Частота колебаний 22 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Определите максимальную амплитуду составляющей  $E_r$ .

**6.2.27.** В круглом волноводе диаметром 60 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Максимальная амплитуда составляющей  $H_\varphi$  равна 60 мА/м. Частота колебаний 5,5 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Определите поперечное характеристическое сопротивление и максимальную амплитуду составляющей  $E_r$ .

**6.2.28.** В круглом волноводе диаметром 20 мм распространяется волна типа  $H_{01}$ . Максимальная амплитуда составляющей  $E_\varphi$  равна 15 В/м. Частота колебаний 26 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Определите максимальную амплитуду составляющей  $H_z$ .

**6.2.29.** В круглом волноводе диаметром 20 мм распространяется волна типа  $H_{01}$ . Определите, при каком значении радиальной координаты: а) максимальна составляющая  $E_\varphi$ ; б) максимальна составляющая  $H_r$ ; в) составляющая  $H_z$  равна нулю.

**6.2.30.** В круглом волноводе диаметром 32 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Определите, при каком значении радиальной координаты: а) максимальна составляющая  $E_z$ ; б) максимальна составляющая  $E_r$ ; в) максимальна составляющая  $H_\varphi$ .

**6.2.31.** В круглом волноводе диаметром 50 мм распространяется волна типа  $E_{02}$ . Определите, при каком значении радиальной координаты: а) максимальна составляющая  $H_\varphi$ ; б) составляющая  $E_z$  равна нулю.

**6.2.32.** Изобразите (качественно) график зависимости составляющей  $E_z$  волны  $E_{01}$  от радиальной координаты в круглом волноводе. Радиальная координата изменяется от 0 до  $r_0$ , где  $r_0$  — радиус волновода. На этом же графике пунктиром покажите аналогичную зависимость для волны  $E_{02}$  (радиус волновода тот же самый).

**6.2.33.** Изобразите (качественно) график зависимости составляющей  $E_r$  волны  $E_{01}$  от радиальной координаты в круглом волноводе. Радиальная координата изменяется от 0 до  $r_0$ , где  $r_0$  — радиус волновода. На этом же графике пунктиром покажите аналогичную зависимость для волны  $E_{02}$  (радиус волновода тот же самый).

**6.2.34.** Изобразите (качественно) график зависимости составляющей  $H_z$  волны  $H_{01}$  от радиальной координаты в

круглом волноводе. Радиальная координата изменяется от 0 до  $r_0$ , где  $r_0$  — радиус волновода. На этом же графике пунктиром покажите аналогичную зависимость для волны  $H_{02}$  (радиус волновода тот же самый).

**6.2.35.** Изобразите (качественно) график зависимости составляющей  $E_\phi$  волны  $H_{01}$  от радиальной координаты в круглом волноводе. Радиальная координата изменяется от 0 до  $r_0$ , где  $r_0$  — радиус волновода. На этом же графике пунктиром покажите аналогичную зависимость для волны  $H_{02}$  (радиус волновода тот же самый).

**6.2.36.** Изобразите (качественно) график зависимости составляющих  $H_z$ ,  $H_r$  и  $E_\phi$  волны  $H_{11}$  от радиальной координаты в круглом волноводе. Радиальная координата изменяется от 0 до  $r_0$ , где  $r_0$  — радиус волновода.

**6.2.37.** В круглом волноводе диаметром 35 мм распространяется волна типа  $H_{01}$ . Волновод заполнен воздухом. При  $r = 0$ ,  $z = z_1$  комплексная амплитуда продольной составляющей вектора  $\bar{H}$  равна 0,21 А/м. Определите комплексную амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока при  $z = z_1$ .

**6.2.38.** В круглом волноводе диаметром 50 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Максимальная амплитуда составляющей  $E_r$  равна 5 В/м, частота поля 8 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Определите амплитуду вектора плотности поверхностного тока.

**6.2.39.** В круглом волноводе диаметром 16 мм распространяется волна типа  $H_{11}$ . Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний равна 20 ГГц.

Комплексная амплитуда составляющей  $H_z$  при  $r = r_0$ ,  $z = 0$  равна 87,29 мА/м. Определите комплексную амплитуду вектора плотности поверхностного тока.

**6.2.40.** В круглом волноводе диаметром 55 мм распространяется волна типа  $H_{01}$ . Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний равна 10 ГГц. Максимальная амплитуда плотности тока смещения 0,81 А/м<sup>2</sup>. Определите амплитуду плотности поверхностного тока.

**6.2.41.** В круглом волноводе диаметром 32 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Волновод заполнен воздухом. Максимальная амплитуда составляющей  $E_z$  равна 40 В/м.

Частота колебаний 10 ГГц. Определите амплитуду тока проводимости, пересекающего контур поперечного сечения.

**6.2.42.** В круглом волноводе диаметром 14 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Волновод заполнен воздухом. Максимальная амплитуда составляющей  $E_r$  равна 7,5 В/м. Частота колебаний 30 ГГц. Определите амплитуду тока смещения, пересекающего плоскость поперечного сечения волновода.

**6.2.43.** В круглом волноводе распространяется волна типа  $E_{01}$ . Сечение внутренней поверхности стенки волновода плоскостью  $z = z_1$  образует окружность радиуса  $a$ . Докажите, что амплитуда поверхностного электрического тока, пересекающего контур этой окружности, равна амплитуде тока смещения, пересекающего поверхность, ограниченную данным контуром (сохранение полного тока).

### 6.3. ПЕРЕНОСИМАЯ МОЩНОСТЬ, ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ

**6.3.1.** В прямоугольном волноводе сечением 110×55 мм распространяется волна основного типа. Максимальная амплитуда составляющей  $H_x$  равна 0,2 А/м. Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний 2 ГГц. Определите максимальную и среднюю по сечению плотность переносимой мощности.

**6.3.2.** Максимальная амплитуда составляющей  $H_z$  волны основного типа в прямоугольном волноводе равна 150 мА/м. Волновод заполнен воздухом и имеет поперечное сечение 35×16 мм. Частота колебаний 6,1 ГГц. Определите максимальную амплитуду составляющей  $E_y$  и переносимую мощность.

**6.3.3. (У)** Мощность, переносимая волной основного типа в прямоугольном волноводе, равна 1 кВт. Волновод заполнен воздухом. Частота колебаний 4,5 ГГц. Поперечное сечение волновода плавно уменьшается от 48×22 мм при  $z = z_1$  до 48×5,7 мм при  $z = z_2$ . Определите максимальную



амплитуду составляющей  $E_y$  в точках  $z_1$  и  $z_2$ . Потери в стенках пренебрежимо малы.

**6.3.4.** Мощность, переносимая волной основного типа в прямоугольном волноводе, равна 10 кВт. Волновод заполнен воздухом и имеет сечение  $50 \times 25$  мм. Частота колебаний 5 ГГц. Определите максимальную амплитуду поля  $\bar{E}$  и максимальную амплитуду поверхностной плотности тока на стенках.

**6.3.5.** Мощность, переносимая волной типа  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе, равна 30 мВт. Волновод заполнен воздухом и имеет сечение  $72 \times 34$  мм. Частота колебаний 7 ГГц. Определите максимальную амплитуду составляющих  $E_x$  и  $E_z$ .

**6.3.6.** Прямоугольный волновод заполнен воздухом и имеет поперечное сечение  $48 \times 22$  мм. Частота колебаний 10,7 ГГц. Определите, какой величиной ограничена мощность, переносимая волной типа  $H_{11}$  в связи с явлением электрического пробоя воздуха. Учтите, что электрический пробой сухого воздуха при нормальном атмосферном давлении наступает при напряженности электрического поля 30 кВ/см.

**6.3.7. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм распространяется волна основного типа. Максимальная амплитуда составляющей  $H_x$  равна 5 А/м, частота поля составляет 10 ГГц. Волновод заполнен воздухом, стенки выполнены из меди. Определите погонную мощность потерь в стенках волновода.

**6.3.8. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $48 \times 22$  мм распространяется волна основного типа. Максимальная амплитуда составляющей  $H_x$  равна 10 А/м, частота поля составляет 3,5 ГГц. Волновод заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,5$ ;  $\operatorname{tg}(\delta) = 3 \cdot 10^{-4}$ . Определите погонную мощность потерь в диэлектрике.

**6.3.9. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $a \times b$  распространяется волна типа  $E_{mn}$ . Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\bar{E}$  равна  $E_{z0}$ . Стенки волновода изготовлены из металла с удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Волновод заполнен диэлектриком без потерь

с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Выведите выражение для погонной мощности потерь в стенках на частоте  $\omega$ .

**6.3.10. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $a \times b$  распространяется волна типа  $E_{mn}$ . Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\vec{E}$  равна  $E_{z0}$ . Волновод заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon$  и тангенсом угла потерь  $\operatorname{tg}(\delta)$ . Выведите выражение для погонной мощности потерь в диэлектрике на частоте  $\omega$ .

**6.3.11. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $a \times b$  распространяется волна типа  $H_{mn}$  ( $m \neq 0, n \neq 0$ ). Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\vec{H}$  равна  $H_{z0}$ . Стенки волновода изготовлены из металла с удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Волновод заполнен диэлектриком без потерь с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Выведите выражение для погонной мощности потерь в стенках на частоте  $\omega$ .

**6.3.12. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $a \times b$  распространяется волна типа  $H_{mn}$  ( $m \neq 0, n \neq 0$ ). Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\vec{H}$  равна  $H_{z0}$ . Волновод заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon$  и тангенсом угла потерь  $\operatorname{tg}(\delta)$ . Выведите выражение для погонной мощности потерь в диэлектрике на частоте  $\omega$ .

**6.3.13.** Определите коэффициент затухания и погонное затухание волны основного типа в прямоугольном волноводе сечением  $110 \times 55$  мм. Волновод заполнен воздухом, стенки выполнены из меди. Частота колебаний 2 ГГц.

**6.3.14.** Определите коэффициент затухания и погонное затухание волны типа  $H_{11}$  в прямоугольном волноводе сечением  $7,1 \times 3,6$  мм. Волновод заполнен воздухом, стенки посеребрены. Частота колебаний 67 ГГц.

**6.3.15.** Определите коэффициент затухания и погонное затухание волны типа  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм. Волновод заполнен воздухом, стенки выполнены из латуни. Частота колебаний 25 ГГц.

**6.3.16.** Определите коэффициент затухания волны основного типа в прямоугольном волноводе сечением  $48 \times 22$  мм.

Волновод заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,08$  и  $\operatorname{tg}(\delta) = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Частота колебаний 3,25 ГГц. Полагайте, что потерями в стенках можно пренебречь.

**6.3.17.** Определите коэффициент затухания волны типа  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе сечением  $35 \times 16$  мм. Волновод заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,25$  и  $\operatorname{tg}(\delta) = 3,5 \cdot 10^{-4}$ . Частота колебаний 10 ГГц. Полагайте, что потерями в стенках можно пренебречь.

**6.3.18.** Прямоугольный волновод сечением  $16 \times 8$  мм заполнен воздухом, стенки выполнены из меди. Определите частоту, на которой коэффициент затухания волны основного типа минимален. Найдите коэффициент затухания на данной частоте и на частоте, соответствующей середине частотного диапазона одноволнового режима.

**6.3.19.** В прямоугольном волноводе шириной  $a$  распространяется волна основного типа. Частота колебаний  $f = 0,75$  с/а. Волновод заполнен воздухом. Определите, во сколько раз отличается коэффициент затухания для высоты волновода  $b_1 = a$  от коэффициента затухания для высоты  $b_2 = a/2$ . Объясните, почему предпочитают использовать волноводы с высотой  $b$  порядка  $a/2$ .

**6.3.20.** Известно, что в прямоугольном волноводе сечением  $110 \times 55$  мм коэффициент затухания волны основного типа на частоте 2,06 ГГц равен 0,01 дБ/м. Определите коэффициент затухания волны основного типа в волноводе сечением  $16 \times 8$  мм.

**Примечание.** Получите результат, сравнив размеры поперечного сечения и учтя, что в данных волноводах отношение  $f/f_{\text{кр}} = 1,5$ ; стенки выполнены из одинакового материала; заполнением является воздух.

**6.3.21.** В прямоугольном волноводе коэффициент затухания за счет потерь в стенках равен 0,01 дБ/м, а общий коэффициент затухания — 0,011 дБ/м. Определите погонную мощность потерь в диэлектрике, заполняющем волновод, если передаваемая мощность составляет 10 кВт.

**6.3.22. (У)** В прямоугольном волноводе распространяется волна основного типа. В сечении  $z = 0$  амплитуда составляющей  $E_y$  равна 0,8 В/м, а в сечении  $z = 7$  м — 0,7 В/м.

Определите затухание (в дБ) и коэффициент полезного действия отрезка волновода длиной 12 м.

**6.3.23.** В сечении  $z = 0$  полого металлического волновода переносится мощность 100 кВт. Коэффициент затухания равен 0,003 1/м. Определите: а) погонную мощность потерь на отрезке  $z \in (0, 1 \text{ м})$ ; б) погонную мощность потерь на отрезке  $z \in (50 \text{ м}; 51 \text{ м})$ ; в) мощность потерь на отрезке  $z \in (0, 50 \text{ м})$ ; г) мощность, переносимую в сечении  $z = 50 \text{ м}$ .

**6.3.24.** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10 \text{ мм}$  распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от частоты колебаний. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волновода: 1) воздухом; 2) диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon = 4$ .

**6.3.25.** Прямоугольный волновод сечением  $40 \times 20 \text{ мм}$  заполнен воздухом. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от частоты. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне типа  $H_{10}$ ; 2) волне типа  $H_{20}$ .

**6.3.26.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от частоты колебаний. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) сечению  $60 \times 30 \text{ мм}$ ; 2) сечению  $30 \times 15 \text{ мм}$ .

**6.3.27.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна с частотой 10 ГГц. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от ширины волновода. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне типа  $H_{10}$ ; 2) волне типа  $H_{20}$  (отношение ширины волновода к его высоте равно 2).

**6.3.28.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от ширины волновода. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) частоте 3 ГГц;

2) частоте 6 ГГц (отношение ширины волновода к его высоте равно 2).

**6.3.29.** В прямоугольном волноводе распространяется волна основного типа. Частота колебаний 10 ГГц. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от ширины волновода. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волновода: 1) воздухом; 2) диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 4$  (отношение ширины волновода к его высоте равно 2).

**6.3.30.** Максимальная амплитуда составляющей  $E_z$  волны типа  $H_{01}$  в круглом волноводе равна 100 В/м. Волновод заполнен воздухом и имеет диаметр 36 мм. Частота колебаний 9 ГГц. Определите переносимую волной мощность.

**6.3.31.** Мощность, переносимая волной типа  $H_{01}$  в круглом волноводе, равна 50 Вт. Волновод заполнен воздухом и имеет диаметр 50 мм. Частота колебаний 10 ГГц. Определите амплитуду поля  $\bar{H}$  на оси волновода и максимальную амплитуду поля  $\bar{E}$ .

**6.3.32.** Мощность, переносимая волной типа  $E_{01}$  в круглом волноводе, равна 1 кВт. Волновод заполнен воздухом и имеет диаметр 35 мм. Частота колебаний 10 ГГц. Определите амплитуду плотности поверхностного тока.

**6.3.33.** Круглый волновод заполнен воздухом и имеет диаметр 40 мм. Частота колебаний 13 ГГц. Определите, какой величиной ограничена мощность, переносимая волной типа  $H_{01}$  в связи с явлением электрического пробоя воздуха.

**6.3.34.** Круглый волновод заполнен воздухом и имеет диаметр 15 мм. Частота колебаний 22 ГГц. Определите, какой величиной ограничена мощность, переносимая волной типа  $E_{01}$ , в связи с явлением электрического пробоя воздуха.

**6.3.35. (У)** В круглом волноводе диаметром 25 мм распространяется волна типа  $H_{01}$ . Максимальная амплитуда составляющей  $H_r$  равна 35 А/м, частота поля 21 ГГц. Волновод заполнен воздухом, стенки выполнены из меди. Определите погонную мощность потерь в стенках волновода.

**6.3.36. (У)** В круглом волноводе диаметром 70 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Максимальная амплитуда составляющей  $E_z$  равна 21 В/м, частота поля 3 ГГц. Волновод заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,5$ ;  $\operatorname{tg}(\delta) = 3 \cdot 10^{-4}$ . Определите погонную мощность потерь в диэлектрике.

**6.3.37. (У)** В круглом волноводе радиусом  $a$  распространяется волна типа  $E_{01}$ . Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\vec{E}$  равна  $E_{z0}$ . Стенки волновода изготовлены из металла с удельной проводимостью  $\sigma_m$ . Выведите выражение для погонной мощности потерь в стенках на частоте  $\omega$ .

**6.3.38. (У)** В круглом волноводе радиусом  $a$  распространяется волна типа  $H_{01}$ . Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\vec{H}$  равна  $H_{z0}$ . Волновод заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon$  и тангенсом угла потерь  $\operatorname{tg}(\delta)$ . Выведите выражение для погонной мощности потерь в диэлектрике на частоте  $\omega$ .

**6.3.39.** Определите коэффициент затухания волны основного типа в круглом волноводе диаметром 55 мм. Волновод заполнен воздухом, стенки изготовлены из меди. Частота колебаний 4,6 ГГц.

**6.3.40.** Определите коэффициент затухания волны типа  $E_{01}$  в круглом волноводе диаметром 10 мм. Волновод заполнен воздухом, стенки посеребрены. Частота колебаний 33 ГГц.

**6.3.41.** Определите коэффициент затухания волны основного типа в круглом волноводе диаметром 46 мм. Волновод заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,08$  и  $\operatorname{tg}(\delta) = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Частота колебаний 4 ГГц. Полагайте, что потерями в стенках можно пренебречь.

**6.3.42.** Определите коэффициент затухания волны типа  $H_{01}$  в круглом волноводе диаметром 30 мм. Волновод заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,25$  и  $\operatorname{tg}(\delta) = 3,5 \cdot 10^{-4}$ . Частота колебаний 12,5 ГГц. Полагайте, что потерями в стенках можно пренебречь.

**6.3.43.** Круглый волновод диаметром 16 мм заполнен воздухом, стенки выполнены из меди. Определите частоту, на которой коэффициент затухания волны основного типа минимален. Найдите коэффициент затухания на дан-

ной частоте и на частоте, соответствующей середине частотного диапазона одноволнового режима.

**6.3.44.** Известно, что в круглом волноводе диаметром 50 мм коэффициент затухания волны основного типа на частоте 5 ГГц равен 0,04 дБ/м. Определите коэффициент затухания волны основного типа в волноводе диаметром 5 мм.

**Примечание.** Получите результат, сравнив размеры поперечного сечения и учтя, что в данном примере отношение  $f/f_{кр} = 1,4$  в обоих волноводах, стенки выполнены из одинакового материала, заполнением является воздух.

**6.3.45.** В круглом волноводе диаметром 20 мм распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от частоты колебаний. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волновода: 1) воздухом; 2) диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon = 4$ .

**6.3.46.** В круглом волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от радиуса волновода. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) частоте 3 ГГц; 2) частоте 6 ГГц.

**6.3.47.** Круглый волновод диаметром 60 мм заполнен воздухом. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от частоты. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне типа  $H_{11}$ ; 2) волне типа  $E_{01}$ .

**6.3.48.** В круглом волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость коэффициента затухания от частоты колебаний. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) радиусу волновода 15 мм; 2) радиусу волновода 30 мм.

**6.3.49.** В заполненном воздухом круглом волноводе распространяется волна типа  $H_{01}$ . Предположив, что амплитуда поперечной составляющей  $H_r$  от частоты не зависит, изобразите (качественно) частотные зависимости переносимой мощности, погонной мощности потерь в стенках

волновода и коэффициента затухания. Объясните монотонное уменьшение коэффициента затухания с ростом частоты (особенность симметричных волн типа  $H_{on}$  в круглом волноводе).

#### 6.4. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ В ВОЛНОВОДАХ

**6.4.1.** В прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34$  мм распространяется волна основного типа. Частота колебаний равна 3 ГГц. Определите групповую скорость для двух случаев: а) волновод заполнен воздухом; б) волновод заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,08$ .

**6.4.2.** В прямоугольном волноводе распространяется волна основного типа. На частоте 11 ГГц длина волны в волноводе равна 3,8 см. Определите групповую скорость.

**6.4.3.** Групповая скорость волны основного типа в прямоугольном волноводе равна  $2,75 \cdot 10^8$  м/с. Групповая скорость волны типа  $H_{01}$  равна  $1,8 \cdot 10^8$  м/с. Частота колебаний — 7,5 ГГц. Волновод заполнен воздухом. Определите размеры поперечного сечения волновода.

**6.4.4.** По прямоугольному волноводу сечением  $16 \times 8$  мм передаются радиоимпульсы с несущей частотой 13,4 ГГц. Волновод заполнен воздухом и работает на основном типе волны. Определите время прохождения радиоимпульсов по отрезку волновода длиной 50 м.

**6.4.5.** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм и длиной 100 м распространяется волна основного типа. Время прохождения по волноводу радиоимпульсов с несущей частотой 5 ГГц равно 1,013 мкс. Определите относительную диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей волновод.

**6.4.6. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $48 \times 22$  мм и длиной 90 м распространяется волна основного типа. Волновод заполнен воздухом. При увеличении несущей частоты на 100 МГц время прохождения по волноводу радиоимпульсов уменьшилось на 0,1 мкс. Определите исходное значение несущей частоты.

**6.4.7.** В заполненном воздухом прямоугольном волноводе используется волна основного типа. Частота колеба-



ний 11 ГГц. При заполнении волновода диэлектриком с  $\varepsilon = 2,08$  время прохождения радиоимпульсов по волноводу не изменилось. Определите  $a$  — размер широкой стенки волновода.

**6.4.8. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм и длиной 100 м распространяется волна основного типа. При увеличении несущей частоты от 6,43 до 6,53 ГГц время прохождения радиоимпульсов по волноводу уменьшилось на 1 мкс. Определите относительную диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей волновод.

**6.4.9.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна с частотой 15 ГГц. Изобразите (качественно) зависимость времени прохождения радиоимпульсов по волноводу от его ширины. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне типа  $H_{10}$ ; 2) волне типа  $H_{20}$  (отношение ширины волновода к его высоте равно 2).

**6.4.10.** В прямоугольном волноводе сечением  $16 \times 8$  мм распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость времени прохождения радиоимпульсов по волноводу от частоты колебаний. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волновода: 1) воздухом; 2) диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 4$ .

**6.4.11.** В прямоугольном волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость времени прохождения радиоимпульсов по волноводу от его ширины. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) частоте 10 ГГц; 2) частоте 20 ГГц (отношение ширины волновода к его высоте равно 2).

**6.4.12.** Прямоугольный волновод сечением  $20 \times 10$  мм заполнен воздухом. Изобразите (качественно) зависимость времени прохождения радиоимпульсов по волноводу от частоты. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне типа  $H_{10}$ ; 2) волне типа  $H_{20}$ .

**6.4.13.** В прямоугольном волноводе распространяется волна основного типа. Частота колебаний 3 ГГц. Изобразите

(качественно) зависимость времени прохождения радиоимпульсов по волноводу от его ширины. На графиках в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие заполнению волновода: 1) воздухом; 2) диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 4$  (отношение ширины волновода к его высоте равно 2).

**6.4.14.** В прямоугольном волновом, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость времени прохождения радиоимпульсов по волноводу от частоты колебаний. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) сечению  $80 \times 40$  мм; 2) сечению  $40 \times 20$  мм.

**6.4.15. (У)** По прямоугольному волноводу сечением  $a \times b$  и длиной  $L$  передаются прямоугольные радиоимпульсы длительностью  $\tau_n$  с несущей частотой  $f_0$  ( $f_0 \tau_n \gg 1$ ). Волновод заполнен воздухом и работает на волне основного типа. Получите выражение для параметра  $\Delta t / \tau_n$ , который является оценкой степени расплывания импульса; здесь  $\Delta t$  — разность времен прохождения по волноводу крайних узкополосных групп в пределах главного лепестка спектра радиоимпульса.

**6.4.16. (У)** По прямоугольному волноводу сечением  $35 \times 16$  мм и длиной 50 м передаются прямоугольные радиоимпульсы с несущей частотой 6,46 ГГц. Волновод заполнен воздухом и работает на волне основного типа. Определите, при какой длительности импульсов степень расплывания импульсов не будет превышать уровня 0,1.

**Примечание.** Термин «степень расплывания» введен в условии задачи 6.4.15.

**6.4.17. (У)** По прямоугольному волноводу сечением  $72 \times 34$  мм передаются прямоугольные радиоимпульсы длительностью 10 нс с несущей частотой 3,12 ГГц. Волновод заполнен воздухом и работает на волне основного типа. Определите, при какой длине волноводного тракта степень расплывания импульсов не будет превышать уровня 0,1.

**Примечание.** Термин «степень расплывания» введен в условии задачи 6.4.15.

**6.4.18. (У)** По прямоугольному волноводу сечением  $23 \times 10$  мм передается гауссов радиоимпульс, для которого

напряженность электрического поля в центре широкой стенки в сечении  $z = 0$  описывается выражением

$$E_y(t) = 0,8 \exp(-3,1 \cdot 10^{14} t^2) \cos(2\pi \cdot 10^{10} t), \text{ В/м.}$$

Волновод заполнен воздухом и работает на основном типе волны. Определите напряженность электрического поля в центре широкой стенки в сечении  $z = 50$  м. Считайте, что потери в волноводе отсутствуют.

**6.4.19.** По прямоугольному волноводу сечением  $35 \times 16$  мм передается экспоненциальный радиоимпульс, для которого напряженность электрического поля в центре широкой стенки в сечении  $z = 0$  описывается выражением

$$E(t) = 10 \exp(-2,3 \cdot 10^6 |t|) \cos(4 \cdot 10^{10} t), \text{ В/м.}$$

Волновод заполнен воздухом и работает на основном типе волны. Определите пространственное распределение  $E_y(z)$  в центре широкой стенки для момента времени  $t_0 = 0,2$  мкс. Считайте, что потери в волноводе отсутствуют.

**6.4.20.** Прямоугольный волновод сечением  $16 \times 8$  мм заполнен воздухом. В сторону положительных значений координаты  $z$  распространяются волны типа  $H_{10}$  и  $E_{11}$ , причем в точке  $x = 8$  мм,  $y = z = 0$

$$E_y(H_{10}) = E_y(E_{11}) = 0,2 \exp(-2,5 \cdot 10^{13} t^2) \cos(1,5 \cdot 10^{11} t), \text{ В/м.}$$

Определите полное поле  $E_y(t)$  в сечении  $z = 60$  м. Считайте, что потерями в волноводе можно пренебречь.

**6.4.21.** В круглом волноводе диаметром 52 мм распространяется волна основного типа. Частота колебаний равна 4,8 ГГц. Определите групповую скорость для двух случаев: а) волновод заполнен воздухом; б) волновод заполнен диэлектриком с  $\varepsilon = 2,08$ .

**6.4.22.** Групповая скорость волны основного типа в круглом волноводе равна  $2,25 \cdot 10^8$  м/с. Волновод заполнен воздухом, частота колебаний 10 ГГц. Определите диаметр волновода.

**6.4.23.** По круглому металлическому волноводу диаметром 40 мм передаются радиоимпульсы с прямоугольной огибающей, характеризующиеся длительностью 20 мкс и несущей частотой 6,5 ГГц. Волновод заполнен воздухом и

работает на волне основного типа. Определите время прохождения импульсов по отрезку волновода длиной 10 м.

**6.4.24.** В круглом волноводе диаметром 31 мм и длиной 50 м распространяется волна основного типа. На несущей частоте 10 ГГц время прохождения радиоимпульсов по волноводу составляет 0,25 мкс. Определите относительную диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей волновод.

**6.4.25.** В круглом волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна с частотой 10 ГГц. Изобразите (качественно) зависимость времени прохождения радиоимпульсов по волноводу от его диаметра. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) волне типа  $H_{11}$ ; 2) волне типа  $E_{01}$ .

**6.4.26.** В круглом волноводе, заполненном воздухом, распространяется волна основного типа. Изобразите (качественно) зависимость времени прохождения радиоимпульсов по волноводу от частоты колебаний. На графике в одинаковом масштабе покажите кривые, соответствующие: 1) диаметру волновода 60 мм; 2) диаметру 30 мм.

**6.4.27. (У)** По круглому волноводу диаметром 25 мм и длиной 10 м передаются прямоугольные радиоимпульсы с несущей частотой 7,5 ГГц. Волновод заполнен воздухом и работает на волне основного типа. Определите, при какой длительности импульсов степень расплывания импульсов не будет превышать уровня 0,05.

**Примечание.** Термин «степень расплывания» введен в условия задачи 6.4.15.

**6.4.28. (У)** По круглому волноводу диаметром 34 мм передаются прямоугольные радиоимпульсы длительно-стью 35 нс с несущей частотой 6,5 ГГц. Волновод заполнен воздухом и работает на волне основного типа. Определите, при какой длине волноводного тракта степень расплывания импульсов не будет превышать уровня 0,05.

**Примечание.** Термин «степень расплывания» введен в условия задачи 6.4.15.

**6.4.29.** В полом металлическом волноводе скорость переноса энергии:  $v_s = P_{cp}/W_{cp}$ , где  $P_{cp}$  — средняя мощность,

переносимая волной через поперечное сечение волновода;  $W_{\text{ср}}$  — средняя энергия электромагнитного поля, накопленная в метровом отрезке волновода. На примере волны типа Е в прямоугольном волноводе докажите, что скорость переноса энергии равна групповой скорости.

**6.4.30.** В круглом волноводе радиусом  $r_0$  распространяется волна основного типа. Волновод заполнен воздухом. Получите выражение для фазочастотной характеристики отрезка волновода длиной  $L$ . Основываясь на данном выражении и привлекая сведения из курса теории радиосцепей, выведите формулу для времени прохождения по волноводу узкополосного импульса с несущей частотой  $f_0$ . Убедитесь, что идентичный результат получается при использовании известных соотношений для групповой скорости в волноводе.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

# ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

### СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

**Объемный резонатор** представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой могут существовать электромагнитные колебания. Обычно объемные резонаторы получают на базе прямоугольного или круглого металлического волновода, располагая на концах отрезка волновода плоские металлические торцевые поверхности (рис. 7.1 и 7.2).

Если в волноводе может распространяться волна типа  $H_{mn}$  (или  $E_{mn}$ ), то в резонаторе могут существовать колебания типа  $H_{mnp}$  (или  $E_{mnp}$ ), причем условие существования колебаний имеет вид

$$l = \frac{p\lambda_v}{2},$$

где  $l$  — длина резонатора;  $\lambda_v$  — длина волны в исходном волноводе;  $p$  — положительное целое число (для колебаний Е-типа индекс  $p$  может быть равен нулю, для колебаний Н-типа  $p \neq 0$ ). Резонанс для колебаний типа  $E_{mn0}$  ( $p = 0$ )

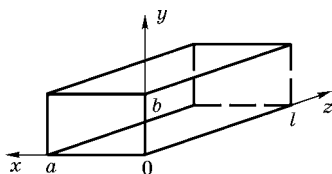


Рис. 7.1

Прямоугольный  
объемный резонатор

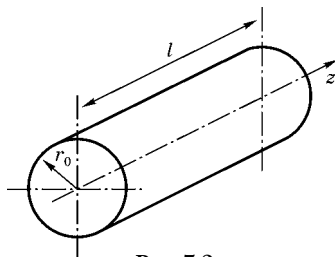


Рис. 7.2

Круглый объемный резонатор

существует на критической частоте для волны типа  $E_{mn}$  в исходном волноводе:  $f_{\text{рез}} = f_{\text{кр}(mn)}$ .

Резонансная частота колебаний типа  $H_{mnp}$  или  $E_{mnp}$  в прямоугольном резонаторе определяется в общем случае выражением

$$f_{\text{рез}} = \frac{c}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2},$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме;  $\mu$  и  $\varepsilon$  — относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, заполняющей резонатор;  $a$ ,  $b$  и  $l$  — ширина, высота и длина резонатора соответственно.

Резонансная частота колебания типа  $E_{mnp}$  в круглом резонаторе

$$f_{\text{рез}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

где  $\nu_{mn}$  —  $n$ -й корень функции Бесселя  $m$ -го порядка (значения этих корней приведены в справочном материале к шестой главе);  $r_0$  — радиус резонатора;  $l$  — длина резонатора.

Резонансная частота колебания типа  $H_{mnp}$  в круглом резонаторе

$$f_{\text{рез}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

где  $\mu_{mn}$  —  $n$ -ый корень производной функции Бесселя  $m$ -го порядка (значения этих корней приведены в справочном материале к шестой главе).

Колебаниями основного типа в прямоугольном и круглом резонаторах называют колебания, имеющие наименьшую резонансную частоту.

Комплексные амплитуды проекций векторов поля для колебания типа  $E_{mnp}$  в прямоугольном резонаторе:

$$\dot{E}_x = -C_9 \frac{p\pi}{lg^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{E}_y = -C_9 \frac{p\pi}{lg^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{E}_z = C_9 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\begin{aligned}\dot{H}_x &= jC_3 \frac{\omega_{\text{рез}} \varepsilon_a}{g^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ \dot{H}_y &= -jC_3 \frac{\omega_{\text{рез}} \varepsilon_a}{g^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ \dot{H}_z &= 0.\end{aligned}$$

Здесь

$$g = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2}.$$

Комплексные амплитуды проекций векторов поля для колебания типа  $H_{mnp}$  в прямоугольном резонаторе:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= C_m \frac{\omega_{\text{рез}} \mu_a}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ \dot{E}_y &= -C_m \frac{\omega_{\text{рез}} \mu_a}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ \dot{E}_z &= 0; \\ \dot{H}_x &= jC_m \frac{p\pi}{lg^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ \dot{H}_y &= jC_m \frac{p\pi}{lg^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ \dot{H}_z &= -jC_m \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right).\end{aligned}$$

Здесь коэффициент  $g$  определяется так же, как и для колебания типа  $E_{mnp}$ .

Комплексные амплитуды составляющих векторов поля для колебания типа  $E_{mnp}$  в круглом резонаторе:

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= -\frac{p\pi r_0}{lv_{mn}} A_3 J'_m \left( \frac{v_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{p\pi r_0^2}{lv_{mn}^2} \frac{m}{r} A_3 J_m \left( \frac{v_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \\ \dot{E}_z &= A_3 J_m \left( \frac{v_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right);\end{aligned}$$



$$\dot{H}_r = -j \frac{\omega_{\text{рез}} \varepsilon_a r_0^2}{v_{mn}^2} \frac{m}{r} A_a J_m \left( \frac{v_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right);$$

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{\omega_{\text{рез}} \varepsilon_a r_0}{v_{mn}} A_a J'_m \left( \frac{v_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right);$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

Комплексные амплитуды проекций векторов поля для колебаний типа  $H_{mnp}$  в круглом резонаторе:

$$\dot{E}_r = \frac{\omega_{\text{рез}} \mu_a r_0^2}{\mu_{mn}^2} \frac{m}{r} A_m J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right);$$

$$\dot{E}_\varphi = \frac{\omega_{\text{рез}} \mu_a r_0}{\mu_{mn}} A_m J'_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right);$$

$$\dot{E}_z = 0;$$

$$\dot{H}_r = -j \frac{p\pi r_0}{l \mu_{mn}} A_m J'_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right);$$

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{p\pi r_0^2}{l \mu_{mn}^2} \frac{m}{r} A_m J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right);$$

$$\dot{H}_z = -j A_m J_m \left( \frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right).$$

Необходимый справочный материал по функциям Бесселя, включающий, в частности, значения корней функций Бесселя  $v_{mn}$  и корней производных функций Бесселя  $\mu_{mn}$ , приведен в главе 6.

Комплексная амплитуда вектора плотности тока смещения:  $\vec{J}_{\text{см}} = j\omega\varepsilon_a \vec{E}$ .

Комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного электрического тока на стенке резонатора:  $\vec{J}_{\text{пов}} = [\vec{1}_n \vec{H}]$ , где  $\vec{H}$  — вектор магнитного поля на стенке;  $\vec{1}_n$  — вектор единичной нормали к поверхности металла, направленный внутрь резонатора.

Плотность поверхностного электрического заряда на стенке резонатора:

$$\dot{\sigma}_{\text{пов}} = \varepsilon_a \dot{E}_n,$$

где  $\dot{E}_n = \vec{1}_n \vec{E}$  — комплексная амплитуда нормальной составляющей электрического вектора на стенке.

Энергия, запасенная в резонаторе:

$$W_{\text{зап}} = \frac{\varepsilon_a}{2} \int_V |\dot{\vec{E}}|^2 dV = \frac{\mu_a}{2} \int_V |\dot{\vec{H}}|^2 dV,$$

где интегрирование ведется по объему резонатора.

Мгновенные значения энергии электрического и магнитного поля в резонаторе:

$$W_{\text{э}}(t) = \frac{\varepsilon_a}{2} \int_V \vec{E}^2(t) dV; \quad W_{\text{м}}(t) = \frac{\mu_a}{2} \int_V \vec{H}^2(t) dV,$$

где  $\vec{E}^2(t)$  и  $\vec{H}^2(t)$  определяются путем суммирования квадратов мгновенных значений проекций векторов поля.

Средняя мощность потерь в стенках резонатора:

$$P_{\text{ср пот мет}} = \sqrt{\frac{\omega_{\text{рез}} \mu_0}{8 \sigma_{\text{м}}}} \int_S |\dot{H}_{\tau}|^2 dS,$$

где  $\sigma_{\text{м}}$  — удельная проводимость металла стенки (считается, что относительная магнитная проницаемость металла равна единице);  $|\dot{H}_{\tau}|$  — амплитуда (модуль комплексной амплитуды) касательной составляющей магнитного вектора на поверхности металла; интегрирование ведется по замкнутой поверхности стенок резонатора.

Средняя мощность потерь в диэлектрике, заполняющем резонатор:

$$P_{\text{ср пот диэл}} = \frac{\sigma_{\text{д}}}{2} \int_V |\dot{\vec{E}}|^2 dV,$$

где  $\sigma_{\text{д}} = \omega_{\text{рез}} \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{tg}(\delta)$  — удельная проводимость диэлектрика;  $\varepsilon$  и  $\operatorname{tg}(\delta)$  — относительная диэлектрическая проницаемость и тангенс угла потерь диэлектрика; интегрирование ведется по объему резонатора.

Собственная добротность резонатора:

$$Q = \frac{\omega_{\text{рез}} W_{\text{зап}}}{P_{\text{ср пот}}},$$

где  $P_{\text{ср пот}} = P_{\text{ср пот мет}} + P_{\text{ср пот диэл}}$ . Собственная добротность может быть записана в виде

$$Q = \left[ \left( \frac{1}{Q_{\text{мет}}} \right) + \left( \frac{1}{Q_{\text{диэл}}} \right) \right]^{-1}.$$

Здесь

$$Q_{\text{мет}} = \frac{\omega_{\text{рез}} W_{\text{зап}}}{P_{\text{ср пот мет}}}$$

— добротность резонатора за счет потерь в металлических стенках;

$$Q_{\text{диэл}} = \frac{\omega_{\text{рез}} W_{\text{зап}}}{P_{\text{ср пот диэл}}}.$$

Подставив в данные соотношения формулы для запасенной энергии и мощности потерь, можно получить следующие выражения:

$$Q_{\text{мет}} = \sqrt{2\omega_{\text{рез}}\mu_0\sigma_{\text{м}}} \frac{\int_V |\dot{\vec{H}}|^2 dV}{\int_S |\dot{\vec{H}}_{\tau}|^2 dS},$$

где относительная магнитная проницаемость металла и среды, заполняющей резонатор, считается равной единице;

$$Q_{\text{диэл}} = \frac{1}{\text{tg}(\delta)}.$$

Добротность  $Q_{\text{мет}}$ , обусловленная потерями в металлических стенках резонатора, может быть в явном виде выражена через размеры резонатора. Введем обозначения:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\omega_{\text{рез}}\mu_0\sigma_{\text{м}}}{2}}; \quad K_{0m} = \begin{cases} 1, & m=0; \\ 0, & m \neq 0; \end{cases}$$

$$K_{0n} = \begin{cases} 1, & n=0; \\ 0, & n \neq 0; \end{cases} \quad K_{0p} = \begin{cases} 1, & p=0; \\ 0, & p \neq 0; \end{cases}$$

$$g'^2 \equiv \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2; \quad \beta'^2 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2.$$

Тогда для колебания типа  $H_{mnp}$  в прямоугольном резонаторе

$$Q_{\text{мет}} = \frac{\alpha_2}{2} ablg'^2\beta'^2 \left/ \left( ab \left(\frac{p}{l}\right)^2 \left[ g'^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 \frac{l}{(1+K_{0n})b} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \frac{l}{(1+K_{0m})a} \right] + l \left[ \frac{a}{1+K_{0n}} + \frac{b}{1+K_{0m}} \right] g'^4 \right) \right.$$

Для колебания типа  $E_{mnp}$  в прямоугольном резонаторе

$$Q_{\text{мет}} = \frac{\frac{\alpha_2}{2} l(1 + K_{0p})}{1 + l(1 + K_{0p}) \left\{ \frac{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 b + \left( \frac{n}{b} \right)^2 a \right]}{\left[ m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right]} \right\}}.$$

Добротность  $Q_{\text{мет}}$  в случае колебания  $H_{mnp}$  в круглом резонаторе:

$$Q_{\text{мет}} = \alpha_2 \frac{r_0 \left[ \left( \frac{\mu_{mn}}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{p\pi}{l} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{m}{\mu_{mn}} \right)^2 \right]}{\left( \frac{\mu_{mn}}{r_0} \right)^2 + \frac{2p^2\pi^2 r_0}{l^3} + \frac{m^2 p^2 \pi^2}{\mu_{mn}^2 l^2} \left( 1 - \frac{2r_0}{l} \right)}.$$

Для колебания типа  $E_{mnp}$  в круглом резонаторе

$$Q_{\text{мет}} = \alpha_2 \frac{\frac{l}{2}(1 + K_{0p})}{1 + (1 + K_{0p}) \frac{l}{2r_0}}.$$

Нагруженная добротность резонатора:

$$Q_{\text{нагр}} = \omega_{\text{рез}} \frac{W_{\text{зап}}}{P_{\text{ср пот}} + P_{\text{ср нагр}}} = \frac{Q}{1 + P_{\text{ср нагр}} / P_{\text{ср пот}}},$$

где  $P_{\text{ср нагр}}$  — средняя мощность, поглощаемая во внешних устройствах, с которыми связан резонатор.

Объемный резонатор по своим частотно-избирательным свойствам в окрестности резонансной частоты  $f_{\text{рез}}$  аналогичен одиночному колебательному контуру. При этом полоса пропускания по уровню  $0,707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Pi_{0,707} = \frac{f_{\text{рез}}}{Q_{\text{нагр}}}.$$

## 7.1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ОБЪЕМНЫЙ РЕЗОНАТОР

**7.1.1.** В прямоугольном волноводе распространяется волна типа  $H_{10}$  с фазовой скоростью  $4 \cdot 10^8$  м/с. Частота поля равна 10 ГГц. На базе данного волновода необходимо построить резонатор, работающий на колебании типа  $H_{101}$ . Определите длину резонатора.

**7.1.2.** В прямоугольном волноводе сечением  $40 \times 20$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Волновод заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 2,08$ , длина волны в волноводе равна 80 мм. На базе данного волновода необходимо построить резонатор, работающий на колебании типа  $E_{111}$ . Определите длину резонатора и резонансную частоту.

**7.1.3.** В прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34$  мм распространяется волна основного типа с длиной волны  $\lambda_v = 14$  см. Волновод заполнен воздухом. На базе данного волновода построить резонатор минимальной длины. Определите резонансную частоту, тип колебания и длину резонатора.

**7.1.4.** В прямоугольном волноводе распространяется волна типа  $H_{10}$  с длиной волны 3 см. Частота колебаний 15 ГГц. Волновод заполнен воздухом. На базе данного волновода необходимо построить резонатор минимальной длины. Определите размеры резонатора.

**7.1.5.** Определите, какой тип колебаний является основным в прямоугольном резонаторе с размерами  $a = 4$  см,  $b = 2$  см,  $l = 3$  см. Найдите резонансные частоты для основного типа и ближайшего к основному типа колебаний.

**7.1.6.** В прямоугольном резонаторе с размерами  $a = 30$  мм,  $l = 40$  мм возбуждается колебание типа  $E_{110}$ . Определите размер  $b$ , если резонансная частота 11,18 ГГц.

**7.1.7.** В прямоугольном резонаторе с размерами  $a = 40$  мм,  $b = 20$  мм,  $l = 60$  мм возбуждается колебание типа  $E_{111}$ . Определите проницаемость диэлектрика, заполняющего резонатор, если резонансная частота равна 5 ГГц.

**7.1.8.** Определите, во сколько раз резонансная частота колебания типа  $H_{101}$  в кубическом резонаторе отличается от резонансной частоты колебания типа  $E_{111}$ .

**7.1.9.** Прямоугольный резонатор заполнен воздухом. При каком отношении между высотой и шириной резонатора резонансная частота колебания  $E_{210}$  будет в 1,5 раза больше резонансной частоты колебания  $E_{110}$ ?

**7.1.10.** Определите длину прямоугольного резонатора, заполненного воздухом и работающего на типе колебаний  $H_{101}$ . Резонансная частота  $f_{\text{рез}} = 3$  ГГц, размеры поперечного сечения:  $a = 8$  см,  $b = 4$  см. Как нужно изменить длину резонатора при переходе к колебанию типа  $H_{102}$ ?

**7.1.11.** Прямоугольный резонатор заполнен воздухом и характеризуется поперечным сечением размерами  $40 \times 20$  мм. В каких пределах необходимо изменять длину резонатора (с помощью поршня) для перестройки резонансной частоты в пределах 5–8 ГГц. Используется колебание типа  $H_{101}$ .

**7.1.12.** Колебание типа  $H_{102}$  в прямоугольном объемном резонаторе, заполненном воздухом, характеризуется резонансной частотой 6 ГГц. Поперечное сечение имеет размеры  $72 \times 34$  мм. Как нужно изменить длину резонатора, если требуется уменьшить резонансную частоту на 10%?

**7.1.13.** Прямоугольный резонатор имеет размеры поперечного сечения  $20 \times 10$  мм. Длина резонатора изменяется путем перемещения поршня. При какой длине  $l$  возможно одновременное существование в резонаторе колебания типа  $H_{101}$  и ближайшего высшего типа колебаний?

**7.1.14.** Объемный резонатор построен на базе прямоугольного волновода, заполненного воздухом и имеющего сечение  $23 \times 10$  мм. Изобразите качественно зависимость резонансной частоты от длины резонатора для двух случаев: а) возбуждается колебание типа  $H_{101}$ ; б) возбуждается колебание типа  $H_{202}$ .

**7.1.15.** В прямоугольном резонаторе с размерами  $a = 20$  мм,  $l = 40$  мм возбуждается колебание  $E_{110}$ . Изобразите зависимость резонансной частоты от размера  $b$  для двух случаев: а) резонатор заполнен воздухом; б) резонатор заполнен диэлектриком с  $\epsilon = 4$ .

**7.1.16.** В прямоугольном резонаторе с размерами  $a = 20$  мм,  $b = 10$  мм,  $l = 40$  мм возбуждено колебание типа  $E_{110}$ . Комплексная амплитуда плотности тока смещения при  $x = a/2$ ,  $y = b/2$  равна  $1$  А/м<sup>2</sup>. Резонатор заполнен воздухом. Запишите временную зависимость плотности тока смещения при  $x = a/4$ ,  $y = b/4$ . Определите, как направлен вектор плотности тока смещения.

**7.1.17.** В прямоугольном объемном резонаторе с размерами  $a = 30$  мм,  $b = 20$  мм,  $l = 50$  мм возбуждено колебание типа  $E_{110}$ . Резонатор заполнен воздухом. Максимальная амплитуда напряженности электрического поля равна  $1$  В/м. Определите максимальную амплитуду напряженности магнитного поля в резонаторе.

**7.1.18.** В прямоугольном объемном резонаторе с размерами  $a = 23$  мм,  $b = 10$  мм,  $l = 40$  мм возбуждено колебание типа  $H_{101}$ . Резонатор заполнен воздухом. Максимальная амплитуда напряженности магнитного поля равна  $0,5$  А/м. Определите максимальную амплитуду плотности тока смещения в резонаторе.

**7.1.19.** В прямоугольном объемном резонаторе с размерами  $a = 70$  мм,  $b = 35$  мм,  $l = 80$  мм возбуждено колебание типа  $H_{102}$ . Резонатор заполнен воздухом. В точках с координатами  $x = a/2$ ,  $z = l/4$  комплексная амплитуда напряженности электрического поля  $\dot{E}_y = 15$  В/м. Определите вектор плотности поверхностного тока на стенках резонатора как функцию времени.

**7.1.20.** В прямоугольном объемном резонаторе возбуждено колебание типа  $E_{110}$ . Резонатор заполнен воздухом. В точках с координатами  $x = a/2$ ,  $y = b/2$  комплексная амплитуда напряженности электрического поля  $\dot{E}_z = E_0$ , где  $E_0$  — вещественная величина. Изобразите картины поля в резонаторе для последовательных моментов времени  $t = 0$ ,  $t = 1/(4f_{\text{рез}})$ ,  $t = 1/(2f_{\text{рез}})$ ,  $t = 3/(4f_{\text{рез}})$ .

**7.1.21.** Изобразите картину поля колебания типа  $H_{021}$  в прямоугольном объемном резонаторе. Рассмотрите варианты возбуждения данного колебания с помощью: а) штыря с током; б) рамки с током; в) щели, прорезанной в стенке резонатора. Определите место расположения и ориентацию этих излучателей, исходя из условия

максимальной мощности, передаваемой полю от сторонних источников.

**7.1.22.** Изобразите картину поля колебания типа  $E_{211}$  в прямоугольном объемном резонаторе. Рассмотрите варианты возбуждения данного колебания с помощью: а) штыря с током; б) рамки с током; в) щели, прорезанной в стенке резонатора. Определите место расположения и ориентацию этих излучателей, исходя из условия максимальной мощности, передаваемой полю от сторонних источников.

**7.1.23.** Изобразите картину токов на стенках прямоугольного объемного резонатора, работающего на типе колебаний  $H_{202}$ . Покажите токи смещения. Укажите расположение излучающих и неизлучающих щелей в стенках резонатора.

**7.1.24.** Изобразите картину токов на стенках прямоугольного объемного резонатора, работающего на типе колебаний  $E_{210}$ . Покажите токи смещения. Укажите расположение излучающих и неизлучающих щелей в стенках резонатора.

**7.1.25.** Изобразите картину токов на стенках прямоугольного объемного резонатора, работающего на колебании типа  $H_{112}$ . Покажите токи смещения. Укажите расположение излучающих и неизлучающих щелей в стенках резонатора.

**7.1.26.** В прямоугольном объемном резонаторе с размерами  $a = 60$  мм,  $b = 30$  мм,  $l = 70$  мм возбуждено колебание типа  $H_{101}$ . Резонатор заполнен воздухом. Максимальная амплитуда напряженности электрического поля равна 200 В/м. Определите амплитуду тока смещения, пересекающего продольное сечение резонатора (плоскость  $y = b/2$ ). Найдите амплитуду поверхностного электрического заряда на нижней стенке резонатора ( $y = 0$ ).

**7.1.27.** Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\vec{E}$  в прямоугольном объемном резонаторе равна  $10^5$  В/м. Резонатор заполнен воздухом и имеет размеры  $a = 10$  см,  $b = 5$  см,  $l = 12$  см. Тип колебаний —  $E_{111}$ . Определите энергию, запасенную в резонаторе.



**7.1.28.** Прямоугольный объемный резонатор с размерами  $a = 5$  см,  $b = 3$  см,  $l = 8$  см работает на типе колебаний  $H_{101}$ . В точках с координатами  $x = 0$ ,  $z = l/2$  комплексная амплитуда продольной составляющей вектора напряженности магнитного поля  $\dot{H}_z = 1,5$  А/м. Резонатор заполнен воздухом. Определите энергию, запасенную в резонаторе. Найдите энергию электрического поля и энергию магнитного поля как функции времени.

**7.1.29.** В прямоугольном объемном резонаторе с размерами  $a = 10$  см,  $b = 8$  см,  $l = 5$  см возбуждено колебание типа  $E_{110}$ . Резонатор заполнен воздухом. Материал стенок — медь. Максимальная амплитуда напряженности электрического поля равна 1 кВ/м. Определите среднюю мощность потерь в стенках резонатора.

**7.1.30.** В прямоугольном объемном резонаторе с размерами  $a = 8$  см,  $b = 4$  см,  $l = 10$  см возбуждено колебание типа  $H_{111}$ . Резонатор заполнен диэлектриком с параметрами  $\epsilon = 2,08$ ,  $\operatorname{tg}(\delta) = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора напряженности магнитного поля равна 5 А/м. Определите среднюю мощность потерь в диэлектрике.

**7.1.31.** Прямоугольный объемный резонатор с размерами  $a = 36$  мм,  $b = 18$  мм,  $l = 45$  мм работает на типе колебаний  $H_{101}$ . Резонатор заполнен воздухом, материал стенок — медь. Определите резонансную частоту и собственную добротность резонатора.

**7.1.32.** Прямоугольный объемный резонатор с размерами  $a = 40$  мм,  $b = 20$  мм,  $l = 60$  мм работает на типе колебаний  $E_{111}$ . Резонатор заполнен диэлектриком с параметрами  $\epsilon = 2,08$ ,  $\operatorname{tg}(\delta) = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Материал стенок — медь. Определите добротность резонатора, обусловленную потерями в металле, добротность, связанную с потерями в диэлектрике, и полную собственную добротность резонатора.

**7.1.33.** Кубический объемный резонатор, заполненный воздухом, работает на типе колебаний  $E_{110}$ . Стенки резонатора выполнены из металла с удельной проводимостью  $\sigma_m$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Получите формулу для собственной добротности

резонатора. Рассчитайте добротность, если: а)  $a = 5$  мм; б)  $a = 20$  см. При расчете считайте, что материал стенок — медь.

**7.1.34.** Кубический объемный резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $H_{101}$ . Материал стенок — медь. Определите, при какой длине ребра полоса пропускания резонатора по уровню 0,707 составит 1 МГц? Считайте, что поглощением мощности во внешних устройствах можно пренебречь.

**7.1.35. (У)** Прямоугольный объемный резонатор заполнен воздухом и характеризуется на некотором типе колебаний собственной добротностью, равной 6500. Найдите, какую добротность будет иметь данный резонатор, если его заполнить диэлектриком с параметрами  $\varepsilon = 2,56$ ,  $\operatorname{tg}(\delta) = 2 \cdot 10^{-4}$ . В обоих случаях используется один и тот же тип колебаний.

**7.1.36.** Прямоугольный объемный резонатор с размерами  $a = 5$  см,  $b = 3$  см,  $l = 2$  см работает на типе колебаний  $E_{110}$ . Резонатор заполнен воздухом, добротность  $Q = 12,5 \cdot 10^3$ . Определите среднюю мощность потерь, если в резонаторе запасена энергия  $2 \cdot 10^{-10}$  Дж.

**7.1.37. (У)** Прямоугольный объемный резонатор с размерами  $a = 8$  см,  $b = 5$  см,  $l = 10$  см работает на типе колебаний  $H_{111}$ . Резонатор заполнен воздухом, материал стенок — медь. Нагруженная добротность резонатора 5000. Вычислите мощность, поглощаемую во внешних устройствах, если в резонаторе запасена энергия  $1,5 \cdot 10^{-9}$  Дж.

**7.1.38.** Прямоугольный объемный резонатор с размерами  $a = 12$  см,  $b = 6$  см,  $l = 15$  см работает на колебании типа  $H_{101}$ . Резонатор заполнен воздухом, материал стенок — медь. В момент времени  $t = 0$  возбуждающий источник отключается. Определите, за какое время амплитуда колебаний уменьшится в 10 раз?

**7.1.39. (У)** Прямоугольный объемный резонатор с размерами  $a = 30$  мм,  $b = 20$  мм,  $l = 15$  мм работает на типе колебаний  $E_{110}$ . Резонатор заполнен воздухом. Найдите эквивалентную емкость и индуктивность резонатора.

## 7.2. КРУГЛЫЙ ОБЪЕМНЫЙ РЕЗОНАТОР

**7.2.1.** Вычислите резонансную частоту колебания типа  $H_{111}$  в круглом объемном резонаторе. Резонатор заполнен воздухом, имеет диаметр 4 см и длину 5 см.

**7.2.2.** Круглый объемный резонатор заполнен воздухом, имеет диаметр 6 см и длину 3 см. Определите, какой тип колебаний является основным, а какой тип — ближайшим к основной моде в данном резонаторе. Найдите резонансные частоты для этих типов.

**7.2.3.** Определите, при каком соотношении между размерами круглого объемного резонатора, основной модой этого резонатора будет колебание типа  $H_{111}$ ? При каком соотношении между размерами основной моды будет колебание типа  $E_{010}$ ?

**7.2.4.** Как показали измерения, резонансная частота при возбуждении колебания типа  $H_{111}$  в круглом объемном резонаторе равна 8,5 ГГц, а при возбуждении колебания типа  $E_{010}$  резонанс наблюдается на частоте 10 ГГц. Определите размеры резонатора.

**7.2.5.** При возбуждении колебания типа  $E_{010}$  в круглом объемном резонаторе резонанс наблюдается на частоте 3 ГГц, а при возбуждении моды  $E_{011}$  — на частоте 4,1 ГГц. Найдите размеры резонатора.

**7.2.6.** Круглый объемный резонатор возбуждается при помощи петли, расположенной в центре одной из торцевых поверхностей. Резонатор заполнен воздухом и имеет диаметр 20 мм. Определите, при какой минимальной длине  $l$  в резонаторе будут возбуждаться колебания с частотой 10 ГГц?

**7.2.7.** Круглый объемный резонатор имеет диаметр 40 мм и длину 60 мм. В центре боковой поверхности расположен возбуждающий штырь, ориентированный в радиальном направлении. На какой минимальной частоте в резонаторе можно возбудить колебания? Какова резонансная частота ближайшей моды, которую можно возбудить? Резонатор заполнен воздухом.

**7.2.8.** Круглый объемный резонатор имеет диаметр 30 мм и длину 40 мм. Резонансная частота основного типа

колебаний равна 4,348 ГГц. Вычислите относительную диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей резонатор.

**7.2.9. (У)** В заполненном воздухом круглом объемном резонаторе основная мода возбуждается на частоте 3 ГГц. При заполнении объемного резонатора плазмой резонансная частота основной моды увеличилась на 0,21 ГГц. Определите электронную концентрацию плазмы. Считайте, что влиянием соударений можно пренебречь.

**7.2.10.** Круглый объемный резонатор заполнен воздухом и имеет диаметр 25 мм. В каких пределах необходимо изменять длину резонатора (с помощью поршня) для перестройки резонансной частоты в пределах 8–10 ГГц. Тип колебания  $H_{111}$ .

**7.2.11.** Изобразите картину поля колебания типа  $H_{112}$  в круглом объемном резонаторе. Рассмотрите варианты возбуждения данного колебания с помощью: а) штыря с током; б) рамки с током; в) щели, прорезанной в стенке резонатора. Определите место расположения и ориентацию этих излучателей, исходя из условия максимальной мощности, передаваемой полю от сторонних источников.

**7.3.12.** Изобразите картину поля колебания типа  $E_{021}$  в круглом объемном резонаторе. Рассмотрите варианты возбуждения данного колебания с помощью: а) штыря с током; б) рамки с током; в) щели, прорезанной в стенке резонатора. Определите место расположения и ориентацию этих излучателей, исходя из условия максимальной мощности, передаваемой полю от сторонних источников.

**7.2.13.** Изобразите картину токов на стенках круглого объемного резонатора, работающего на типе колебаний  $H_{021}$ . Покажите токи смещения. Укажите расположение излучающих и неизлучающих щелей в стенках резонатора.

**7.2.14.** Изобразите картину токов на стенках круглого объемного резонатора, работающего на типе колебаний  $E_{012}$ . Покажите токи смещения. Укажите расположение излучающих и неизлучающих щелей в стенках резонатора.

**7.2.15.** Круглый объемный резонатор имеет диаметр 40 мм и длину 20 мм. Максимальная амплитуда напряженности электрического поля равна 10 кВ/м. Резонатор за-

полнен воздухом и работает на типе колебаний  $E_{010}$ . Определите максимальную амплитуду напряженности магнитного поля.

**7.2.16. (У)** Круглый объемный резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $H_{111}$ . Диаметр резонатора 8 см, длина 10 см. Максимальная амплитуда напряженности электрического поля 100 кВ/м. Найдите максимальную амплитуду продольной и поперечной составляющих вектора плотности поверхностного электрического тока на стенках. Определите координаты точек поверхности стенок, в которых амплитуда этих составляющих максимальна.

**7.2.17.** Круглый объемный резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $E_{010}$ . Диаметр резонатора 4 см, длина 2 см. На оси резонатора комплексная амплитуда  $\dot{E}_z = 10$  В/м. Найдите зависимости от времени: а) электрического и магнитного векторов; б) векторов плотности тока смещения и поверхностного электрического тока на стенках.

**7.2.18.** Круглый объемный резонатор имеет диаметр 50 мм и длину 70 мм. Резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $H_{011}$ . Определите энергию, запасенную в резонаторе, если максимальная амплитуда продольной составляющей магнитного вектора  $H_z$  равна 0,5 А/м.

**7.2.19.** Круглый объемный резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $E_{011}$ . Диаметр резонатора 60 мм, длина 80 мм. В точке  $r = z = 0$  комплексная амплитуда  $\dot{E}_z = 100$  В/м. Найдите зависимость энергии электрического поля и энергии магнитного поля от времени. Определите энергию, запасенную в резонаторе.

**7.2.20.** Круглый объемный резонатор имеет диаметр 10 см и длину 8 см. Максимальная амплитуда напряженности электрического поля  $10^5$  В/м. Резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $E_{010}$ . Материал стенок — медь. Определите среднюю мощность потерь в металле.

**7.2.21.** Круглый объемный резонатор имеет диаметр 8 см и длину 6 см. Резонатор заполнен диэлектриком

с параметрами  $\varepsilon = 2,08$ ,  $\operatorname{tg}(\delta) = 2,5 \cdot 10^{-4}$  и работает на типе колебаний  $E_{011}$ . Вычислите среднюю мощность потерь в диэлектрике, если максимальная амплитуда напряженности электрического поля  $10^3$  В/м.

**7.2.22.** Определите собственную добротность круглого объемного резонатора, работающего на типе колебаний  $H_{111}$ . Диаметр резонатора 5 см, длина 7 см. Резонатор заполнен воздухом, а его стенки выполнены из латуни.

**7.2.23.** Круглый объемный резонатор имеет диаметр 4 см и длину 5 см. Резонатор заполнен диэлектриком с параметрами  $\varepsilon = 2,56$ ,  $\operatorname{tg}(\delta) = 2 \cdot 10^{-4}$  и работает на типе колебаний  $E_{011}$ . Материал стенок — медь. Вычислите добротность  $Q_m$ , обусловленную потерями в металле, добротность  $Q_d$  за счет потерь в диэлектрике и полную собственную добротность резонатора  $Q$ .

**7.2.24.** Круглый объемный резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $E_{010}$ . Стенки выполнены из материала с удельной проводимостью  $\sigma_m$ . Диаметр резонатора  $D$ , длина  $l$ . Выведите формулу для собственной добротности резонатора.

**7.2.25. (У)** Проанализируйте и изобразите на одном рисунке зависимость собственной добротности круглого объемного резонатора от его длины для двух случаев: а) возбуждается колебание  $E_{010}$ ; б) возбуждается колебание типа  $E_{011}$ . Резонатор заполнен воздухом.

**7.2.26. (У)** В момент времени  $t = 0$  в круглом объемном резонаторе отключается возбуждающий источник. Резонатор заполнен воздухом, имеет диаметр 40 мм, длину 60 мм и работает на типе колебаний  $H_{111}$ . Материал стенок — латунь. Определите, какая часть запасенной в начальный момент энергии потеряется в течение 350 периодов собственных колебаний. Считайте, что потерями энергии во внешних устройствах можно пренебречь.

**7.2.27.** Круглый объемный резонатор работает на типе колебаний  $E_{010}$ . При резонансной частоте 3 ГГц полоса пропускания по уровню 0,707 равна 0,15 МГц. Резонатор заполнен воздухом, а его стенки выполнены из меди. Найдите диаметр и длину резонатора. Считайте, что потерями энергии во внешних цепях можно пренебречь.

**7.2.28. (У)** Круглый объемный резонатор используется в СВЧ-тракте, по которому передаются прямоугольные радиоимпульсы с длительностью  $\tau_{\text{и}}$ . Резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $H_{111}$ . Диаметр резонатора 6 см, длина 8 см. Стенки выполнены из меди. Определите, при какой величине  $\tau_{\text{и}}$  длительность переднего или заднего фронтов прошедших тракт радиоимпульсов (связанная с переходными процессами в резонаторе) не будет превышать 10% от  $\tau_{\text{и}}$ . Оценивайте длительность фронтов как время, за которое амплитуда свободных колебаний в резонаторе уменьшается в 10 раз. Считайте, что потерями мощности во внешних цепях можно пренебречь.

**7.2.29. (У)** Круглый объемный резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $E_{010}$ . Диаметр резонатора 5 см, длина 4 см. Материал стенок — медь. В резонаторе запасена энергия  $0,5 \cdot 10^{-6}$  Дж. Определите, при какой величине мощности, передаваемой во внешние устройства, полоса пропускания по уровню 0,707 не будет превышать 1 МГц.

**7.2.30. (У)** Круглый объемный резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $E_{010}$ . Резонатор имеет диаметр 12 см и длину 10 см. Максимальная амплитуда напряженности электрического поля равна половине напряженности пробоя для сухого атмосферного воздуха при нормальном давлении ( $E_{\text{проб}} = 30$  кВ/см). Стенки резонатора посеребрены. Найдите, какая средняя мощность может передаваться во внешние устройства, если нагруженная добротность не должна быть ниже 1000.

**7.2.31. (У)** Круглый объемный резонатор имеет диаметр 30 мм и длину 25 мм. Резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний  $E_{010}$ . Определите эквивалентную емкость и эквивалентную индуктивность резонатора.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

**ИЗЛУЧЕНИЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

**СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ**

**Н**еоднородная система уравнений Максвелла может быть записана следующим образом:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} - j\omega\epsilon_a \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{J}}_{\text{ст}};$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} + j\omega\mu_a \dot{\vec{H}} = 0;$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = 0;$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{D}} = 0,$$

где  $\dot{\vec{J}}_{\text{ст}}$  — плотность стороннего электрического тока, которая в задачах о возбуждении электромагнитных волн является заданной функцией пространственных координат; для простоты предполагается, что потери в среде отсутствуют и что объемная плотность электрического заряда  $\rho$  равна нулю.

Векторы электромагнитного поля можно выразить через векторный электрический потенциал  $\dot{\vec{A}}_a$ :

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}_a;$$

$$\dot{\vec{E}} = -\frac{1}{j\omega\mu_a\epsilon_a} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}}_a + \beta^2 \dot{\vec{A}}_a),$$

где

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_a\epsilon_a} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Электрический векторный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца



$$\nabla^2 \dot{\vec{A}}_a + \beta^2 \dot{\vec{A}}_a = -\mu_a \dot{\vec{J}}_{\text{ст}}.$$

Решение данного уравнения для  $\dot{\vec{A}}_a$  в неограниченном пространстве с неизменными параметрами  $\mu_a$ ,  $\varepsilon_a$  записывается в виде

$$\dot{\vec{A}}_a(x, y, z) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}_{\text{ст}}(x', y', z') \exp(-j\beta r)}{r} dx' dy' dz',$$

где  $x, y, z$  — координаты точки наблюдения;  $x', y', z'$  — координаты текущей точки в объеме  $V$ , занимаемом сторонними токами;

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

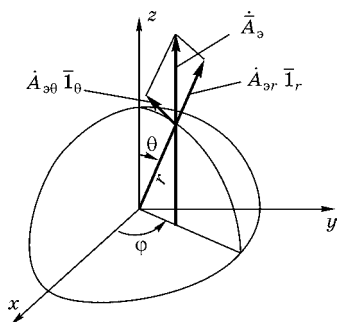
— расстояние между точкой наблюдения и текущей точкой в объеме  $V$  (при определении  $\dot{\vec{A}}_a$  может использоваться любая удобная система координат). Если специально не оговорено, то при решении задач о возбуждении неограниченного пространства полагают  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ .

В случаях, когда максимальный линейный размер объема  $V$ , занимаемого сторонними токами, значительно меньше длины волны  $\lambda$ , излучающую систему называют элементарным излучателем.

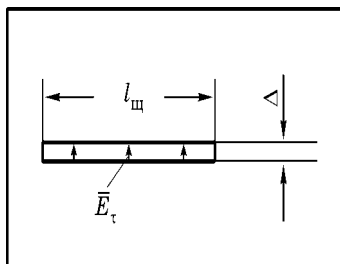
Составляющие векторного потенциала элементарного электрического излучателя (элементарного электрического вибратора, диполя Герца) в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{ar} &= \frac{\mu_a}{4\pi} \dot{I}_a l \cos\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r}; \\ \dot{A}_{a\theta} &= -\frac{\mu_a}{4\pi} \dot{I}_a l \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r}, \end{aligned}$$

где  $l$  — длина отрезка проводника, по которому протекает переменный электрический ток с комплексной амплитудой  $\dot{I}_a$ . Данные формулы записаны для случая, когда излучатель находится в точке начала координат, а сторонний ток направлен вдоль оси  $z$  (угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $z$ , см. рис. 8.1).



**Рис. 8.1**  
Векторный потенциал  
элементарного  
электрического излучателя



**Рис. 8.2**  
Элементарный щелевой  
излучатель ( $l_{щ} \ll \lambda$ )

Составляющие электромагнитного поля элементарного электрического излучателя:

$$\begin{aligned}\dot{H}_{\varphi} &= \frac{\dot{I}_0 l}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) \sin\theta \exp(-j\beta r); \\ \dot{E}_0 &= \frac{\dot{I}_0 l}{j4\pi\omega\epsilon_a r^3} (1 + j\beta r - \beta^2 r^2) \sin\theta \exp(-j\beta r); \\ \dot{E}_r &= \frac{\dot{I}_0 l}{j2\pi\omega\epsilon_a r^3} (1 + j\beta r) \cos\theta \exp(-j\beta r).\end{aligned}$$

В дальней зоне элементарного электрического излучателя ( $\beta r \gg 1$  или  $2\pi r/\lambda \gg 1$ )

$$\begin{aligned}\dot{H}_{\varphi} &= j \frac{\dot{I}_0 l}{2\lambda} \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r}; \\ \dot{E}_0 &= j \frac{\dot{I}_0 l}{2\lambda} Z_c \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r} = \dot{H}_{\varphi} Z_c.\end{aligned}$$

Элементарный магнитный излучатель с комплексной амплитудой стороннего магнитного тока  $\dot{I}_m$  вводится при анализе элементарных излучателей, для которых структура электрического поля идентична структуре магнитного поля в элементарном электрическом вибраторе, и наоборот. Если элементарный магнитный излучатель находится в точке начала координат и ток  $\dot{I}_m$  ориентирован вдоль оси  $z$ , то в дальней зоне

$$\begin{aligned}\dot{E}_\varphi &= -j \frac{\dot{I}_m l}{2\lambda} \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r}; \\ \dot{H}_\theta &= j \frac{\dot{I}_m l}{2\lambda Z_c} \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r} = -\frac{\dot{E}_\varphi}{Z_c}.\end{aligned}$$

Элементарный щелевой излучатель образован бесконечной металлической плоскостью, в которой прорезана щель длиной  $l_{\text{щ}} \ll \lambda$  и шириной  $\Delta \ll l_{\text{щ}}$  (рис. 8.2). При этом сторонние источники создают в щели равномерное по ее длине распределение тангенциальной составляющей электрического поля  $E_\tau$ .

Данный излучатель эквивалентен магнитному вибратору с током  $\dot{I}_m = 2\dot{U}_{\text{щ}}$ , где  $\dot{U}_{\text{щ}}$  — комплексная амплитуда напряжения в щели. Если металлическая плоскость совмещена с плоскостью  $XOZ$ , а щель (и эквивалентный магнитный ток) ориентированы вдоль оси  $z$ , то в дальней зоне щелевого излучателя

$$\begin{aligned}\dot{E}_\varphi &= -j \frac{\dot{U}_{\text{щ}} l_{\text{щ}}}{\lambda} \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r}; \\ \dot{H}_\theta &= j \frac{\dot{U}_{\text{щ}} l_{\text{щ}}}{\lambda Z_c} \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r} = -\frac{\dot{E}_\varphi}{Z_c}.\end{aligned}$$

Элементарный рамочный излучатель представляет собой проволочную петлю радиусом  $r_0 \ll \lambda$ , по которой протекает переменный электрический ток с комплексной амплитудой  $\dot{I}_p$ . Данный излучатель эквивалентен магнитному вибратору с током  $\dot{I}_m$ , ориентированным перпендикулярно плоскости рамки, причем

$$\dot{I}_m l = j\omega\mu_a \dot{I}_p S_p,$$

где  $S_p = \pi r_0^2$  — площадь петли. Если плоскость рамки совмещена с плоскостью  $XOY$  (в этой плоскости от оси  $x$  отсчитывается азимутальный угол  $\varphi$ ), то в дальней зоне элементарного рамочного излучателя

$$\begin{aligned}\dot{H}_\theta &= -\frac{\pi S_p}{\lambda^2} \dot{I}_p \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r}; \\ \dot{E}_\varphi &= \frac{\pi S_p}{\lambda^2} \dot{I}_p Z_c \sin\theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r} = -\dot{H}_\theta Z_c.\end{aligned}$$

Нормированная диаграмма направленности излучателя по полю:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{E(\theta, \varphi)}{E_{\max}},$$

где  $E(\theta, \varphi)$  — амплитуда напряженности электрического поля в дальней зоне при данных углах наблюдения  $\theta, \varphi$ ;  $E_{\max}$  — максимальное значение амплитуды электрического поля ( $E(\theta, \varphi)$  и  $E_{\max}$  рассматриваются на фиксированном расстоянии от излучателя  $r = \text{const}$ ).

Мощность излучения  $P_{\Sigma}$  (средняя за период колебаний поля) определяется интегрированием среднего значения вектора Пойнтинга по замкнутой поверхности  $S$ , окружающей излучатель:

$$P_{\Sigma} = \oint_S \bar{\Pi}_{\text{cp}} d\bar{S}$$

(в качестве поверхности  $S$  удобно взять сферу радиуса  $r$  в дальней зоне излучателя).

Анализ  $P_{\Sigma}$  для различных элементарных излучателей приводит к следующим выражениям:

а) для элементарного электрического вибратора

$$P_{\Sigma} = \frac{I_{m\partial}^2 R_{\partial\Sigma}}{2},$$

где

$$R_{\partial\Sigma} = \frac{2\pi}{3} Z_c \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2,$$

для вакуума

$$R_{\partial\Sigma} = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2;$$

б) для элементарного щелевого вибратора

$$P_{\Sigma} = \frac{U_{m\text{щ}}^2}{2R_{\text{щ}\Sigma}},$$

где

$$R_{\text{щ}\Sigma} = \frac{3Z_c}{8\pi} \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2,$$

для вакуума

$$R_{\text{щ}\Sigma} = 45 \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2;$$

в) для элементарного рамочного излучателя

$$P_{\Sigma} = \frac{I_{mp}^2 R_{p\Sigma}}{2},$$

где

$$R_{p\Sigma} = \frac{8}{3} \frac{\pi^3 Z_c S_p^2}{\lambda^4},$$

для вакуума

$$R_{p\Sigma} = 320 \frac{\pi^4 S_p^2}{\lambda^4}.$$

## 8.1.

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ

**8.1.1.** Определите амплитуду составляющих поля в экваториальной плоскости элементарного излучателя на расстоянии 1 км. Частота колебаний 60 МГц. Рассмотрите следующие варианты излучателей: а) электрический вибратор с амплитудой тока 0,5 А и длиной 30 см; б) электрическая рамка с амплитудой тока 0,5 А и диаметром 30 см; в) щель в металлическом экране с амплитудой напряжения в щели 5 В и длиной 30 см.

**8.1.2.** Сравните амплитуду напряженности электрического поля в направлении максимального излучения для элементарных электрического и рамочного излучателей при одинаковой амплитуде тока. Длина электрического излучателя и диаметр рамки одинаковы и составляют  $0,1\lambda_0$ .

**8.1.3.** В точке с координатами  $r = 1$  км,  $\theta = 60^\circ$  амплитуда напряженности магнитного поля элементарного электрического вибратора равна 69 мкА/м. Длина вибратора 10 см, частота поля 240 МГц. Определите полную излучаемую мощность и амплитуду тока в вибраторе.

**8.1.4.** Поле, излучаемое элементарным вибратором, исследуется с помощью приемного элементарного вибратора (считайте, что приемный вибратор не влияет на структуру исследуемого поля). Определите оптимальную ориентацию приемного вибратора в следующих ситуациях: а) исследуется поле электрического вибратора с током, направленным по оси  $z$ ; б) исследуется поле электрической

рамки, расположенной в плоскости  $XOY$ ; в) исследуется поле щелевого излучателя, ориентированного по оси  $y$  (экран — в плоскости  $XOY$ ). В каждой из данных ситуаций рассмотрите варианты приема на электрический вибратор и на электрическую рамку. Взаимную ориентацию вибраторов покажите на рисунках с «привязкой» к осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Укажите, какие составляющие поля исследуются в этих случаях.

**8.1.5.** Определите плотность мощности поля в экваториальной плоскости элементарного излучателя на расстоянии 10 км. Частота колебаний 3,75 МГц. Найдите полную излучаемую мощность. Рассмотрите два излучателя: а) электрический вибратор с амплитудой тока 4 А и длиной 5 м; б) электрическая рамка с амплитудой тока 4 А и диаметром 5 м.

**8.1.6.** Элементарный вибратор излучает полную мощность 100 Вт. Определите, на каком предельном расстоянии от вибратора можно осуществлять радиоприем при чувствительности приемника 0,5 мВ/м.

**8.1.7.** В плоском металлическом экране прорезана щель длиной 20 мм и шириной 2 мм. Определите, какой величиной ограничивается мощность излучения щели в связи с явлением электрического пробоя воздуха. Частота колебаний 1,5 ГГц, напряженность поля при электрическом пробое сухого воздуха 30 кВ/см.

**8.1.8.** Определите, какая мощность должна излучаться элементарным излучателем (электрическим или магнитным), чтобы на расстоянии 100 км от излучателя можно было принимать электромагнитные колебания с плотностью мощности 1 мкВт/м<sup>2</sup>.

**8.1.9.** Определите амплитуду напряжения в элементарном щелевом излучателе, при которой плотность мощности в направлении максимального излучения на расстоянии 1 км равна 0,02 мкВт/м<sup>2</sup>. Длина щели 20 см, частота поля 100 МГц. Найдите амплитуду тока в элементарном электрическом вибраторе той же длины, который эквивалентен щелевому излучателю по плотности мощности.

**8.1.10.** Элементарный излучатель расположен в начале координат. Частота излучаемых колебаний 500 МГц.

Определите амплитуду декартовых составляющих векторов поля в точке с координатами  $x_0 = z_0 = 5$  м,  $y_0 = 0$ . Рассмотрите следующие варианты излучателей: а) электрический вибратор с амплитудой тока 1,5 А и длиной 5 см, направленный вдоль оси  $y$ ; б) электрическая рамка с амплитудой тока 1,5 А и диаметром 5 см, расположенная в плоскости  $YOZ$ ; в) щель длиной 5 см, прорезанная в металлическом экране (плоскость  $XOY$ ) и ориентированная вдоль оси  $y$ ; амплитуда напряжения в щели 5 В.

**8.1.11.** Элементарный излучатель расположен в начале координат. Частота излучаемых колебаний 3 ГГц. В точке с координатами  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = z_0 = 1$  м плотность мощности излучения равна 2 мВт/м<sup>2</sup>. Определите амплитуду тока для следующих вариантов излучателей: а) электрический вибратор длиной 1 см, ориентированный вдоль оси  $z$ ; б) электрический вибратор длиной 1 см, направленный вдоль оси  $x$ ; в) электрическая рамка диаметром 1 см, расположенная в плоскости  $XOY$ ; г) электрическая рамка диаметром 1 см, расположенная в плоскости  $YOZ$ .

**8.1.12.** Амплитуда вектора  $\vec{H}$  в экваториальной плоскости на расстоянии 7 м от элементарного электрического излучателя равна 10 мА/м. Частота излучаемых колебаний 150 МГц. Излучатель длиной 10 см расположен в сухой почве с относительной диэлектрической проницаемостью 4 и удельной проводимостью  $10^{-3}$  См/м. Определите амплитуду тока в элементарном излучателе. Найдите амплитуду вектора  $\vec{E}$  на расстоянии 14 м от излучателя под углом  $20^\circ$  относительно его оси.

**8.1.13. (У)** В элементарном электрическом излучателе ток с комплексной амплитудой  $\vec{I}_3$  и частотой  $\omega_0$  равномерно распределен по проводнику длиной  $l \ll \lambda_0$ . Данный излучатель можно рассматривать как диполь с электрическим моментом  $\vec{p}_3$ . Получите соотношение, связывающее  $\vec{I}_3$  и  $\vec{p}_3$ .

**8.1.14.** В теории и практике антенных устройств широко используется коэффициент направленного действия антенны  $D = P_{\text{ср}}/P_{\text{ср равн}}$ , где  $P_{\text{ср}}$  — средняя плотность мощности в данном направлении;  $P_{\text{ср равн}}$  — средняя плотность мощности при условии, что та же мощность излучается равномерно по всем направлениям. Определите коэффициент

направленного действия для элементарного электрического (магнитного) излучателя в направлении максимального излучения.

**8.1.15.** В дальней зоне элементарного электрического излучателя измеряется амплитуда вектора напряженности электрического поля. Определите, по какой траектории следует перемещаться в меридианальной плоскости, чтобы результат измерений оставался неизменным. Для определенности в качестве меридианальной плоскости рассматривайте плоскость  $XOZ$ . Считайте, что излучатель ориентирован по оси  $z$ .

**8.1.16. (У)** В начале декартовой системы координат расположен элементарный электрический излучатель с током, направленным по оси  $z$ . На интервале  $-L/2 < y < L/2$  (при  $x = 10$  м;  $z = 0$ ) измеряется фаза колебаний поля. Определите, на какой длине интервала  $L$  распределение фазы будет практически равномерным (максимальное изменение фазы не превышает  $10^\circ$ ). Определите закон распределения фазы на указанном интервале. Частота колебаний 3 ГГц.

**8.1.17.** В экваториальной плоскости элементарного электрического излучателя (плоскость  $XOY$ ) измерялась амплитуда напряженности электрического поля. Измерение поля проведено в точках  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = -0,5$  м;  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = 0,5$  м;  $x_3 = -0,5$  м,  $y_3 = 0$ ;  $x_4 = 0,5$  м,  $y_4 = 0$ . Получены следующие значения амплитуды:  $E_1 = 0,36$  В/м;  $E_2 = 0,36$  В/м;  $E_3 = 0,9$  В/м;  $E_4 = 0,3$  В/м. Определите координаты точки, в которой расположен излучатель. Найдите полную излучаемую мощность.

**8.1.18. (У)** Два элементарных электрических вибратора одинаковой длины расположены в точках  $(\lambda/4, 0, 0)$  и  $(-\lambda/4, 0, 0)$  декартовой системы координат. Токи в вибраторах направлены вдоль оси  $z$ , причем  $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{j\Delta\alpha}$ . Определите диаграмму направленности данной антенны в плоскости  $XOY$  для двух случаев: а)  $\Delta\alpha = 0$ ; б)  $\Delta\alpha = \pi$ . Изобразите качественно диаграмму направленности в полярной системе координат.

**8.1.19. (У)** Два элементарных электрических вибратора одинаковой длины расположены в точках  $(\lambda/8, 0, 0)$  и  $(-\lambda/8, 0, 0)$  декартовой системы координат. Токи в вибрато-



торах направлены вдоль оси  $z$ , причем  $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{j\Delta\alpha}$ . Определите диаграмму направленности данной антенны в плоскости  $ХОУ$  для двух случаев: а)  $\Delta\alpha = \pi/2$ ; б)  $\Delta\alpha = -\pi/2$  (используйте сферическую систему координат, в которой азимутальный угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$ ). Изобразите качественно диаграмму направленности.

**8.1.20. (У)** Турникетный излучатель образован двумя элементарными электрическими вибраторами, расположенными в некоторой точке пространства под углом  $90^\circ$  один относительно другого и возбуждаемыми со сдвигом фаз токов на  $90^\circ$ . Пусть в первом вибраторе, ориентированном вдоль оси  $x$ , протекает ток  $\dot{I}_x$ , а во втором вибраторе, направленном по оси  $y$ , — ток  $\dot{I}_y = -j\dot{I}_x$ . Длина вибраторов одинакова и равна  $l$ . Выполните следующие задания:

а) определите составляющие поля в дальней зоне для плоскости  $ХОУ$ ;

б) найдите компоненты вектора  $\vec{E}$  в дальней зоне для плоскости  $ХОZ$ , определите поляризацию поля в направлении максимального излучения;

в) найдите составляющие электрического поля в дальней зоне для произвольной точки пространства.

Во всех случаях определите диаграмму направленности по мощности. При решении используйте сферическую систему координат, в которой угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $z$ , а угол  $\varphi$  отсчитывается в плоскости  $ХОУ$  от оси  $x$ .

**8.1.21. (У)** Один из вариантов кардиоидной («однонаправленной») антенны представляет собой комбинацию диполя Герца и рамки малых электрических размеров. Диполь длиной  $l$  расположен в центре рамки площадью  $S_p$  и ориентирован по ее диаметру. Известны комплексные амплитуды токов в диполе и рамке:  $\dot{I}_\Delta = \dot{I}_{m\Delta} \exp(j\varphi_\Delta)$ ,  $\dot{I}_p = \dot{I}_{mp} \exp(j\varphi_p)$ . Получите выражение для вектора  $\vec{E}$  в плоскости, совмещенной с плоскостью рамки (рассмотрите дальнюю зону антенны). Определите направление, в котором излучение минимально. Найдите соотношение амплитуд и фаз токов в диполе и рамке, при которых в данном направлении излучение отсутствует. Определите диаграмму направленности (при найденном соотношении токов).

**8.1.22. (У)** Элементарный излучатель находится на некоторой высоте над идеально проводящей плоскостью. Определите направление тока в зеркальном изображении данного излучателя. Рассмотрите следующие излучатели: а) горизонтальный (относительно металлической плоскости) электрический вибратор; б) вертикальный электрический вибратор; в) горизонтальный магнитный вибратор; г) вертикальный магнитный вибратор; д) горизонтальная электрическая рамка; е) вертикальная электрическая рамка.

**8.1.23. (У)** Элементарный излучатель расположен на поверхности идеально проводящей плоскости (либо высота излучателя над плоскостью значительно меньше длины волны излучаемых колебаний). Предположив, что ось  $z$  ориентирована перпендикулярно проводящей поверхности, изобразите диаграммы направленности в плоскости  $XOZ$  для следующих излучателей: а) вертикальный электрический вибратор; б) электрическая рамка, расположенная в плоскости  $XOZ$ ; в) электрическая рамка, расположенная в плоскости  $YOZ$ .

**8.1.24. (У)** Элементарный электрический вибратор длиной 5 мм расположен на поверхности идеально проводящей плоскости (либо высота излучателя над плоскостью значительно меньше длины волны излучаемых колебаний). Ток в излучателе направлен перпендикулярно проводящей плоскости. Частота излучаемых колебаний 3 ГГц. Определите сопротивление излучения.

**8.1.25. (У)** Определите максимальный коэффициент направленного действия для элементарного электрического вибратора, расположенного на поверхности идеально проводящей плоскости. Ток в вибраторе направлен перпендикулярно проводящей плоскости.

**8.1.26. (У)** Элементарный излучатель расположен в точке  $(0, 0, h)$  над идеально проводящей плоскостью, с которой совмещена плоскость  $XOY$  декартовой системы координат. Частота колебаний 5 ГГц. Определите амплитуду напряженности электрического поля в точке  $(0, 0, 10 \text{ м})$ , если в этой точке при отсутствии проводящей плоскости амплитуда электрического поля равна 10 мВ/м. Рассмотрите следующие ситуации: 1) электрический вибратор с

током, направленным вдоль оси  $x$ , высота  $h$  равна: а) 0,75 см; б) 1,5 см; в) 3 см; 2) электрическая рамка, ориентированная в плоскости  $XOZ$ , высота  $h$  равна: а) 0,75 см; б) 1,5 см; в) 3 см.

**8.1.27. (У)** Элементарный излучатель длиной 5 мм расположен на высоте 2 см над идеально проводящей плоскостью, которая совпадает с плоскостью  $XOY$  в декартовой системе координат. Амплитуда тока в излучателе 0,1 А, частота колебаний  $f_0$ . Определите амплитуду колебаний вектора  $\vec{E}$  на расстоянии 4 м от начала координат в точке, расположенной под углом  $45^\circ$  к оси  $z$  в плоскости  $ZOY$  (начало координат совместите с точкой проекции вибратора на плоскость  $XOY$ ). Рассмотрите следующие ситуации: 1)  $f_0 = 3,75$  ГГц, ток направлен вдоль оси: а)  $x$ ; б)  $y$ ; в)  $z$ ; 2)  $f_0 = 7,5$  ГГц, ток направлен вдоль оси: а)  $x$ ; б)  $y$ ; в)  $z$ .

**8.1.28. (У)** Элементарный электрический вибратор расположен на высоте  $h$  над идеально проводящей плоскостью, которая совпадает с плоскостью  $ZOY$  в декартовой системе координат. Определите диаграмму направленности вибратора в плоскости  $XOY$ . Изобразите диаграмму направленности в полярных координатах. Рассмотрите следующие ситуации: а)  $h = \lambda_0/4$ , ток направлен вдоль оси  $z$ ; б)  $h = \lambda_0/4$ , ток направлен вдоль оси  $y$ ; в)  $h = \lambda_0/4$ , ток направлен вдоль оси  $x$ ; г)  $h = \lambda_0/2$ , ток направлен вдоль оси  $z$ ; д)  $h = \lambda_0/2$ , ток направлен вдоль оси  $y$ ; е)  $h = \lambda_0/2$ , ток направлен вдоль оси  $x$ .

**8.1.29. (У)** В вакууме расположена круглая электрическая рамка (кольцевой проводник) радиусом  $r_0$  с равномерно распределенным током  $\vec{I}_p$ . Рамка является элементарной: радиус  $r_0$  значительно меньше длины волны излучаемых колебаний  $\lambda_0$ . Определите электрический векторный потенциал и компоненты поля в дальней зоне рамки ( $\beta_0 r \gg 1$ ).

**8.1.30. (У)** В солнечный день с помощью поляроида можно обнаружить, что солнечный свет, рассеиваемый различными участками небосклона, имеет различную поляризацию. Пусть  $\vec{AB}$  — вектор, соединяющий Солнце (точку  $A$ ) и исследуемую область неба (окрестность точки  $B$ ); наблюдатель находится в точке  $C$ ;  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{BA}$  и  $\vec{BC}$ . Пусть  $\vec{1}_n$  — единичный вектор,

перпендикулярный плоскости  $ABC$ . Определите, как отношение  $\Pi_{\text{ср2}} / \Pi_{\text{ср1}}$  зависит от угла  $\varphi$ , где  $\Pi_{\text{ср1}}$  — плотность мощности компоненты рассеянного света, линейно поляризованной в направлении  $\vec{I}_n$ ,  $\Pi_{\text{ср2}}$  соответствует компоненте, линейно поляризованной в направлении  $[\vec{I}_n \vec{BA}]$ .

## 8.2. ВОЗБУЖДЕНИЕ СВОБОДНОГО ПРОСТРАНСТВА НЕКОТОРЫМИ ИЗЛУЧАТЕЛЯМИ

**8.2.1. (У)** Покажите, что интегральное представление

$$\bar{A}_a(t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{\exp(-j\beta|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \bar{J}_{\text{ст}}(\vec{r}') dx' dy' dz'$$

является частным решением неоднородного уравнения Гельмгольца для электрического векторного потенциала в неограниченной однородной среде с параметрами  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  (считайте для простоты, что потери в среде отсутствуют).

**8.2.2. (У)** Как известно, неоднородное волновое уравнение для электрического векторного потенциала, возбуждаемого сторонними токами с произвольным законом изменения во времени, имеет вид

$$\nabla^2 \bar{A}_a - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \bar{A}_a}{\partial t^2} = -\mu_a \bar{J}_{\text{ст}}$$

(считаем для простоты, что потери в среде отсутствуют).

Убедитесь, что интегральное представление

$$\bar{A}_a(t, r) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{\bar{J}_{\text{ст}}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz'$$

является решением данного волнового уравнения в неограниченной однородной среде, где  $c = 1/\sqrt{\mu_a \epsilon_a}$ .

**8.2.3. (У)** Покажите, что поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , представленные через электрический векторный потенциал  $\vec{A}_a$ , удовлетворяют четырем уравнением Максвелла.

**8.2.4. (У)** Прямолинейный электрический излучатель длиной 15 см расположен в вакууме. Частота колебаний

тока, протекающего в излучателе, равна 15 ГГц. Определите границу дальней зоны данной антенны. Считайте, что в дальней зоне фазовая ошибка  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_{\Pi}$  не должна превышать  $22,5^\circ$ . Здесь  $\varphi = 2\pi r/\lambda_0$  — фазовый набег вдоль луча, соединяющего точку наблюдения с текущей точкой на излучателе;  $\varphi_{\Pi}$  — фазовый набег в предположении о параллельности лучей, соединяющих точку наблюдения с различными точками на излучателе.

**8.2.5. (У)** В плоскости  $z = 0$  в пределах области  $S_0$  задано распределение поверхностного стороннего электрического тока  $\vec{J}_{\text{пов.э}}(x, y)$ . Вне области  $S_0$  ток равен нулю. В полупространстве  $z > 0$  находится вакуум. Дальняя зона для поля, возбуждаемого данным током, определяется условием  $r \gg D^2/\lambda_0$ , где  $\lambda_0 = c/f_0$ ;  $D$  — максимальный линейный размер области  $S_0$ ;  $r$  — расстояние от начала координат (находящегося внутри  $S_0$ ) до точки наблюдения. Докажите, что электрический векторный потенциал в дальней зоне имеет вид неоднородной сферической волны:

$$\vec{A}_э = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{F}(\theta, \varphi) \frac{e^{-jkr}}{r},$$

где функция направленности  $\vec{F}(\theta, \varphi)$  определяется как двумерное преобразование Фурье от распределения тока  $\vec{J}_{\text{пов.э}}(x, y)$ :

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = \iint \vec{J}_{\text{пов.э}}(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy,$$

где  $k_x = k \sin(\theta) \cos(\varphi)$ ;  $k_y = k \sin(\theta) \sin(\varphi)$ ;  $k = 2\pi/\lambda_0$ .

**8.2.6. (У)** Как известно (см. задачу 8.2.5), электрический векторный потенциал в дальней зоне излучающей системы имеет вид неоднородной сферической волны:

$$\vec{A}_э = \frac{\mu_a}{4\pi} \vec{F}(\theta, \varphi) \frac{e^{-j\beta r}}{r},$$

где  $\beta = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} = 2\pi/\lambda$ . Получите выражения для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в дальней зоне.

**8.2.7. (У)** Прямолинейный электрический излучатель длиной  $L$  расположен в вакууме. Ось излучателя совмещена с осью  $z$ . Комплексная амплитуда электрического тока, протекающего в излучателе, описывается функцией

$\dot{I}_z(z)$  на интервале  $z \in (-L/2, L/2)$ . Частота излучаемых колебаний равна  $\omega_0$ . Получите выражения для составляющих поля в дальней зоне излучателя, связывающие составляющие поля с током  $\dot{I}_z(z)$ .

**8.2.8. (У)** В полуволновом электрическом вибраторе амплитуда тока распределена по закону стоячей волны:  $\dot{I}_z = I_0 \cos(\pi z/l)$ ,  $z \in (-l/2, l/2)$ , где  $l$  — длина вибратора. Частота излучаемых колебаний равна  $f_0 = c/(2l)$ . Вибратор расположен в вакууме. Определите составляющие поля в дальней зоне. Найдите диаграмму направленности в меридианальной плоскости ( $\varphi = \text{const}$ ).

**8.2.9. (У)** Рассмотрите вариант апертурной антенны, в котором прямоугольное отверстие размерами  $a \times b$  прорезано в плоском металлическом экране. Экран совмещен с плоскостью  $z = 0$ , а центр отверстия — с началом координат. В полупространстве  $z > 0$  находится вакуум. При анализе такой антенны часто приближенно полагают, что токи на поверхности экрана (и кромках отверстия) равны нулю, а поле в плоскости раскрыва имеет структуру плоской волны:

$$\vec{E}_{z=0} = E_0 \vec{1}_x, \quad \vec{H}_{z=0} = \left( \frac{E_0}{Z_c} \right) \vec{1}_y \quad \text{при } |x| < \frac{a}{2}, \quad |y| < \frac{b}{2}$$

(строгий анализ показывает оправданность такого приближения для дальней зоны антенны). Определите составляющие поля  $\vec{E}$  в дальней зоне апертурной антенны.

**8.2.10. (У)** В одном из вариантов апертурной антенны прямоугольное отверстие размерами  $a \times b$  прорезано в плоском металлическом экране. Экран совмещен с плоскостью  $z = 0$ , а центр отверстия — с началом координат. В полупространстве  $z > 0$  находится вакуум. Поле в плоскости раскрыва имеет структуру плоской волны ( $H_{y0} = E_{x0}/Z_c$ ). Получите выражение для диаграммы направленности антенны в плоскости  $XOZ$  ( $\varphi = 0$ ). Изобразите (качественно) диаграмму направленности для двух случаев: а)  $a/\lambda_0 = 0,1$ ; б)  $a/\lambda_0 = 10$ .

**8.2.11.** В теории антенных устройств и в оптике используют понятие элемента Гюйгенса — элемента фронта (поверхности) распространяющейся плоской электромагнитной волны с линейной поляризацией. При этом

линейные размеры элемента Гюйгенса значительно меньше длины волны:  $\Delta x \ll \lambda_0$ ,  $\Delta y \ll \lambda_0$  (для определенности фронт волны совмещен с плоскостью  $z = \text{const}$ ). Определите поле  $\vec{E}$  элемента Гюйгенса в дальней зоне, используя результат решения задачи 8.2.9 об излучении прямоугольного отверстия в металлическом экране (объясните, почему этот результат можно использовать для элемента Гюйгенса в свободном пространстве). Изобразите диаграмму направленности элемента Гюйгенса в плоскости  $XOZ$  ( $\varphi = 0$ ) и в плоскости  $YOZ$  ( $\varphi = \pi/2$ ). Считайте, что в исходной плоской волне  $\vec{E} = E_0 \vec{1}_x$  при  $z = 0$ . Среда — воздух.

**8.2.12. (У)** Как известно, элемент Гюйгенса — это элемент фронта распространяющейся плоской электромагнитной волны с линейной поляризацией. При этом линейные размеры элемента Гюйгенса значительно меньше длины волны:  $\Delta x \ll \lambda_0$ ,  $\Delta y \ll \lambda_0$  (для определенности фронт волны совмещен с плоскостью  $z = \text{const}$ ). Определите поле  $\vec{E}$  элемента Гюйгенса в дальней зоне, представив его как систему двух ортогонально ориентированных диполей Герца — электрического и магнитного. Изобразите диаграмму направленности элемента Гюйгенса. Анализ проведите для плоскости  $XOZ$ . Рассмотрите сферическую систему координат, в которой угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$  в плоскости  $XOY$ , угол  $\theta$  берется от оси  $z$  до направления на точку наблюдения. В исходной плоской волне при  $z = 0$   $\vec{E} = E_0 \vec{1}_x$ . Среда — воздух.

**8.2.13. (У)** В плоском металлическом экране, совмещенном с плоскостью  $y = 0$ , прорезано прямоугольное отверстие. В пределах отверстия сформировано равномерное распределение электрического поля:  $\vec{E}_{y=0} = E_0 \vec{1}_x$  при  $|z| < l/2$ . Ширина отверстия  $\Delta x$  значительно меньше его длины  $l$  и длины волны  $\lambda_0$ . В полупространстве  $z > 0$  находится вакуум. Данную апертурную антенну следует рассматривать как щелевой излучатель конечной длины. Пренебрегая токами на поверхности экрана и краевых отверстия, определите поле в дальней зоне ( $r \gg l^2/\lambda_0$ , где  $r$  — расстояние от начала координат до точки наблюдения). Рассмотрите сферическую систему координат, в которой угол  $\theta$

берется от оси  $z$  до направления на точку наблюдения, угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$  в плоскости  $XOY$ .

**8.2.14. (У)** Элементарный щелевой излучатель представляет собой щель длиной  $l \ll \lambda_0$ , прорезанную в металлическом экране. Ширина щели  $d \ll l$ . В пределах щели вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен ее краям и имеет комплексную амплитуду  $\dot{E}_0 = \text{const}$ . Окружающая среда — воздух. Определите векторный магнитный потенциал и поле щелевого излучателя в дальней зоне. Установите соответствие между  $\dot{E}_0$  и комплексной амплитудой магнитного тока  $\dot{I}_m$  в эквивалентном элементарном магнитном вибраторе. Считайте, что экран совмещен с плоскостью  $XOZ$ , щель ориентирована в направлении координаты  $z$ . Используйте сферическую систему координат, в которой угол  $\theta$  берется от оси  $z$  до направления на точку наблюдения, угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$  в плоскости  $XOY$ .

**8.2.15. (У)** В плоскости  $XOY$  ( $z = 0$ ) распределен поверхностный электрический ток с плотностью  $\vec{J}_{\text{пов } z} = \dot{J}_0 \vec{1}_x$ , комплексная амплитуда  $\dot{J}_0$  неизменна во всех точках плоскости. Частота колебаний  $\omega$ . Окружающая безграничная среда характеризуется электродинамическими параметрами  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$ , потери отсутствуют. Определите составляющие поля, излучаемого данным током.

**8.2.16. (У)** В плоскости  $XOY$  ( $z = 0$ ) распределен поверхностный электрический ток с плотностью

$$\vec{J}_{\text{пов } z} = \dot{J}_0 \exp(-jk_x x) \vec{1}_y,$$

где  $\dot{J}_0$  — комплексная амплитуда плотности тока при  $x = 0$ ,  $k_x$  — постоянный вещественный коэффициент, определяющий изменение фазы тока в направлении оси  $x$ . Частота колебаний  $\omega$ . Известно, что  $k_x < \omega/c$ . Окружающая безграничная среда характеризуется электродинамическими параметрами  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$ , потери отсутствуют. Определите составляющие поля, излучаемого данным током.



ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

## ЗАДАЧИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПК

### 9.1. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

**9.1.1.** Однородная плазма характеризуется электронной концентрацией  $1,5 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$  и частотой соударений  $\nu$ . Получите формулы и рассчитайте частотные зависимости коэффициента фазы, фазовой и групповой скорости, длины волны и погонного затухания  $\Delta$  (в дБ/см) для двух случаев: а)  $\nu = 10^9 \text{ с}^{-1}$ ; б)  $\nu = 10^{11} \text{ с}^{-1}$ . Для каждого случая выполните следующее задание. Найдите частоту  $f_1$ , для которой  $\Delta = 1 \text{ дБ/см}$ . Для частоты  $f_1$  рассчитайте и постройте графики распределения проекции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (при  $t = 0$ ) по координате распространения волны  $x$ , если при  $x = 0$  среднее значение плотности потока мощности составляет  $250 \text{ Вт/м}^2$  ( $x$  изменяется от 0 до  $2\lambda$ ). Объясните влияние частоты соударений на исследуемые зависимости. Считайте, что плоская волна имеет линейную поляризацию.

**9.1.2. (У)** Получите формулы и рассчитайте частотные зависимости коэффициента затухания при вертикальном прохождении радиоволн через ионосферу: а) днем; б) ночью. Зависимость электронной концентрации от высоты над уровнем Земли аппроксимируйте гауссовой функцией

$$N_e = N_m \exp \left[ - \left( \frac{h - h_m}{D} \right)^2 \right],$$

где  $N_m$  — максимальное значение электронной концентрации;  $h_m$  — высота, на которой наблюдается максимум;  $D$  — ширина профиля электронной концентрации по уровню  $e^{-2}$ . Считайте приближенно, что частота соударений постоянна и равна  $10^6 \text{ с}^{-1}$  днем и  $10^5 \text{ с}^{-1}$  ночью. Считайте, что

$N_e(h)$  — медленная функция высоты ( $D$  много больше, чем  $\lambda$ ) и погонное затухание можно интегрировать по высоте. Найдите частоты, для которых затухание будет меньше 20 дБ. Объясните полученные результаты. Что происходит с переносом энергии, если частота колебаний заметно меньше плазменной частоты и больше частоты соударений?

**9.1.3. (У)** Получите формулы и рассчитайте частотные зависимости  $t_{\text{п}}(f_0)$  для времени вертикального прохождения радиоимпульсов с несущей частотой  $f_0$  через ионосферу: а) днем; б) ночью. Зависимость электронной концентрации от высоты над уровнем Земли аппроксимируйте гауссовой функцией

$$N_e = N_m \exp \left[ - \left( \frac{h - h_m}{D} \right)^2 \right],$$

где  $N_m$  — максимальное значение электронной концентрации;  $h_m$  — высота, на которой наблюдается максимум;  $D$  — ширина профиля электронной концентрации по уровню  $e^{-2}$ . Считайте приближенно ионосферную плазму бесстолкновительной. Считайте, что  $N_e(h)$  — медленная функция высоты ( $D$  много больше, чем  $\lambda$ ) и время прохождения можно находить интегрированием по высоте (накапливаем вклад каждого участка  $dh$  во время прохождения). Рассчитайте распределения длины волны, фазовой и групповой скорости по высоте для частоты  $f_0 = 1,5f_{\text{пл макс}}$  и частоты  $f_0 = 1,1f_{\text{пл макс}}$ . Объясните полученные результаты.

**9.1.4. (У)** Сухая почва характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 4$  и удельной проводимостью  $\sigma = 1,5 \cdot 10^{-3}$  См/м. Найдите частоту  $f_0$ , для которой  $\text{tg} \delta = 0,2$ . Плоская волна с частотой  $f_0$  распространяется в сторону увеличения координаты  $x$ , причем для  $x = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  равна  $j\vec{1}_z$  В/м. Определите комплексную амплитуду вектора  $\vec{H}$  при  $x = 0$ . Численно решите систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд проекций  $E_z$ ,  $H_y$  с известными начальными условиями на интервале  $x$  от 0 до  $2\lambda$ . Постройте графики зависимости проекций векторов поля от  $x$  для момента времени  $t = 0$ . Постройте эти же графики,

пользуясь известным решением для плоской волны в однородной среде. Сравните полученные результаты и сделайте выводы о применении использованных подходов на практике.

**9.1.5. (У)** Пресная вода характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 80$  и удельной проводимостью  $\sigma = 0,015$  См/м. Найдите частоту  $f_0$ , для которой  $\operatorname{tg} \delta = 0,25$ . Плоская волна с частотой  $f_0$  распространяется в сторону увеличения координаты  $y$ , причем для  $y = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\vec{H}$  равна  $j15\bar{1}_x$  мА/м. Определите комплексную амплитуду вектора  $\vec{E}$  при  $y = 0$ . Численно решите систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд проекций  $E_z, H_x$  с известными начальными условиями на интервале  $y$  от 0 до  $2\lambda$ . Постройте графики зависимости проекций векторов поля от  $y$  для момента времени  $t = 0$ . Постройте эти же графики, пользуясь известным решением для плоской волны в однородной среде. Сравните полученные результаты и сделайте выводы о применении использованных подходов на практике.

**9.1.6. (У)** Плоская электромагнитная волна распространяется в сторону увеличения координаты  $y$  в однородной среде с параметрами  $\varepsilon = 10, \mu = 1, \sigma = 0,025$  См/м. При  $y = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\vec{H}$  равна  $50\exp(-j30^\circ)\bar{1}_z$  мА/м. Численно решите уравнение Гельмгольца для напряженности магнитного поля на интервале  $y$  от 0 до  $2\lambda$  на частоте 250 МГц. Пользуясь полученным решением, рассчитайте и постройте зависимости амплитуды, мгновенного значения проекции  $H_z$  (при  $t = 0$ ) и плотности потока мощности от  $y$  на данном интервале. Постройте также график зависимости мгновенного значения проекции  $H_z$  (при  $t = 0$ ) от  $y$ , пользуясь известным решением для плоской волны в однородной среде. Сравните полученные графики для мгновенного значения проекции  $H_z$  и сделайте выводы о применении использованных подходов на практике.

**9.1.7. (У)** Плоская электромагнитная волна распространяется в сторону увеличения координаты  $x$  в пресной воде с параметрами  $\varepsilon = 80, \mu = 1, \sigma = 0,015$  См/м. При  $x = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  равна  $5\exp(j\pi/4)\bar{1}_z$  В/м.

Численно решите уравнение Гельмгольца для напряженности электрического поля на интервале  $x$  от 0 до  $2\lambda$  на частоте 12 МГц. Пользуясь полученным решением, рассчитайте и постройте зависимости амплитуды, мгновенного значения проекции  $E_z$  (при  $t = 0$ ) и плотности потока мощности от  $x$  на данном интервале. Постройте также график зависимости мгновенного значения проекции  $E_z$  (при  $t = 0$ ) от  $x$ , пользуясь известным решением для плоской волны в однородной среде. Сравните полученные графики для мгновенного значения проекции  $E_z$  и сделайте выводы о применении использованных подходов на практике.

**9.1.8.** Молекулы воды обладают собственными дипольными моментами, колебания которых во внешнем электрическом поле описываются в диапазоне СВЧ с помощью относительной комплексной диэлектрической проницаемости:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_b + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_b}{1 + j\omega\tau},$$

причем для пресной воды при температуре  $25^\circ\text{C}$  имеем  $\varepsilon_b = 5,5$ ,  $\varepsilon_a = 78,5$ ,  $\tau = 8,33 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-1}$ . Рассчитайте частотные зависимости фазовой скорости, модуля и аргумента характеристического сопротивления среды, длины волны и погонного затухания  $\Delta$  (в дБ/см) в диапазоне 0,1–100 ГГц. Найдите максимальное и минимальное затухание в данном диапазоне и частоты, на которых эти затухания наблюдаются. Объясните полученные результаты. Как изменяется по частоте фазовый сдвиг между колебаниями вектора плотности поляризационного тока и вектора  $\vec{E}$ ?

**9.1.9.** Получите формулы и рассчитайте частотные зависимости погонного затухания и глубины проникновения поля в металл, характеризующийся концентрацией свободных электронов  $N_e = 10^{28} \text{ м}^{-3}$  и частотой соударений  $\nu = 0,4 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ . Рассмотрите два случая: а) сверхпроводящие электроны отсутствуют, т. е. температура выше критической температуры; б) часть свободных электронов образуют сверхпроводящие пары, т. е. температура ниже критической температуры:  $T = 0,5T_c$ . Расчет проведите в диапазоне 1 МГц – 100 ГГц. Найдите среднее значение

плотности потока мощности, направленной внутрь металла, если на поверхности металла амплитуда вектора  $\vec{H}$  равна 100 мА/м (рассмотрите случаи а) и б) для частоты 10 ГГц). Объясните полученные результаты. Как влияет температура на мощность потерь в металле?

**9.1.10.** Металл характеризуется концентрацией свободных электронов  $N_e = 10^{28} \text{ м}^{-3}$  и частотой соударений  $\nu = 0,4 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ . Комплексная амплитуда вектора  $\vec{H}$  при  $y = 0$  составляет  $j25\bar{1}_z$  мА/м. Рассчитайте комплексную диэлектрическую проницаемость, комплексную удельную проводимость, коэффициент фазы, коэффициент ослабления, погонное затухание, длину волны, характеристическое сопротивление среды. Определите комплексные амплитуды векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  и среднее значение плотности потока мощности как функции координаты  $y$ . Постройте зависимости мгновенного значения проекций  $E_x$ ,  $H_z$  (при  $t = 0$ ) от координаты  $y$  в интервале от 0 до  $\lambda$ . Расчеты проведите для двух значений частоты колебаний:  $f = 6,37 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$  и  $f = 6,37 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$ . Объясните представленные результаты. Получите выражения для комплексной диэлектрической проницаемости и комплексной удельной проводимости для частных случаев:  $\nu$  много больше  $\omega$  и  $\nu$  много меньше  $\omega$ . Чем отличаются механизмы ослабления поля в металле для этих случаев?

**9.1.11. (У)** Для свинца критическая температура  $T_c = 7,2 \text{ К}$ ; действительная (нормальная) часть удельной проводимости при  $T > T_c$  равна  $1,3 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ ; сверхпроводящее состояние (считайте, что нормальные электроны отсутствуют) характеризуется лондоновской длиной 60 нм. Рассчитайте температурную зависимость действительной части характеристического сопротивления металла и температурную зависимость плотности потока мощности, направленной внутрь металла, если при температуре 10 К на частоте 20 ГГц внутрь металла переносится плотность мощности  $1 \text{ Вт/м}^2$ . Расчет зависимостей проведите на частотах 20 ГГц и 20 МГц. Объясните полученные результаты.

**9.1.12.** В слое морской воды толщиной 1 м плавно увеличивается соленость так, что удельная проводимость  $\sigma$  изменяется по линейному закону от 0,01 См/м на поверхности

воды до 5 См/м на глубине 1 м. Используя относительную диэлектрическую проницаемость воды  $\varepsilon = 80$ , рассчитайте частотную зависимость погонного затухания (дБ/м) у поверхности и на глубине 1 м, а также частотную зависимость полного затухания метрового слоя воды. Считайте, что параметры воды изменяются по глубине плавно, и погонное затухание приближенно можно интегрировать по глубине. Рассчитайте распределение амплитуды электрического поля и плотности потока мощности по глубине на частоте 100 МГц (в логарифмическом масштабе по уровню), если у поверхности амплитуда электрического поля равна 1000 В/м. Объясните влияние частоты на погонное и на полное затухание.

**9.1.13.** В диэлектрике с параметрами  $\varepsilon = 5$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  распространяются две плоские волны с одинаковой частотой 400 МГц. Обе волны распространяются в плоскости  $ХОУ$ : 1-я волна — под углом  $30^\circ$  к оси  $x$ , 2-я волна — под углом  $60^\circ$  к оси  $x$ . Известны комплексные амплитуды вектора  $\vec{E}$  в определенных точках на оси  $x$ :

$$\vec{E}_1(0, 0) = \vec{E}_2(0, 0) = 5 \cdot \vec{1}_z, \text{ В/м.}$$

Рассчитайте вектор Пойнтинга в данной плоскости. Получите уравнения, рассчитайте и постройте в плоскости  $ХОУ$ : а) картину линий постоянной фазы; б) картину векторного поля для вектора Пойнтинга; в) картину векторного поля для вектора  $\vec{H}$ . Объясните полученные результаты.

**9.1.14.** В диэлектрике с параметрами  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  распространяются две плоские волны с одинаковой частотой 2 ГГц. Обе волны распространяются в плоскости  $УОZ$ : 1-я волна — под углом  $40^\circ$  к оси  $y$ , 2-я волна — под углом  $140^\circ$  к оси  $y$ . Известны комплексные амплитуды вектора  $\vec{H}$  в определенных точках на оси  $y$ :

$$\vec{H}_1(0, 0) = \vec{H}_2(3\lambda, 0) = 25 \cdot \vec{1}_x, \text{ мА/м,}$$

где 1-я координата соответствует оси  $y$ , а 2-я координата — оси  $z$ . Рассчитайте вектор Пойнтинга в плоскости  $УОZ$ . Получите уравнения, рассчитайте и постройте в данной плоскости: а) картину линий постоянной фазы; б) картину векторного поля для вектора Пойнтинга;

в) картину векторного поля для вектора  $\vec{E}$ . Объясните полученные результаты.

**9.1.15.** Плоская волна распространяется в сторону увеличения координаты  $z$  в диэлектрике с параметрами  $\varepsilon = 7$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0,017$  См/м. Вектор напряженности магнитного поля описывается выражением

$$\vec{H} = H_m \cos(\omega_0 t - \beta z + \varphi_1) \vec{1}_x + H_m \cos(\omega_0 t - \beta z + \varphi_2) \vec{1}_y,$$

где  $H_m = 0,25$  А/м,  $f_0 = 200$  МГц. Постройте эллипс поляризации вектора  $\vec{H}$  в плоскости  $z = \lambda$  для различных значений  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ : а)  $\Delta\varphi = 20^\circ$ ; б)  $\Delta\varphi = 45^\circ$ ; в)  $\Delta\varphi = 70^\circ$ . Рассчитайте и постройте: а) зависимость коэффициента эллиптичности от  $\Delta\varphi$  (величина  $\Delta\varphi$  должна откладываться в градусах); б) зависимость плотности потока мощности от координаты  $z$ . Объясните полученные результаты.

**9.1.16.** Две плоские электромагнитные волны с линейной поляризацией распространяются в сторону увеличения координаты  $x$  в диэлектрике с параметрами  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0,0025$  См/м. Амплитуда колебаний вектора  $\vec{E}$  при  $x = 0$  в обеих волнах равна 2 В/м, разность фаз составляет  $90^\circ$ , частота колебаний 80 МГц. Вектор  $\vec{E}$  в 1-й волне параллелен оси  $y$ , во 2-й волне — повернут по часовой стрелке на угол  $\theta$ , если смотреть с конца орта  $\vec{1}_x$ . Постройте эллипс поляризации вектора  $\vec{E}$  в плоскости  $x = \lambda$  для различных значений  $\theta$ : а)  $\theta = 20^\circ$ ; б)  $\theta = 45^\circ$ ; в)  $\theta = 70^\circ$ . Рассчитайте и постройте: а) зависимость коэффициента эллиптичности от  $\theta$  (величина  $\theta$  должна откладываться в градусах); б) зависимость плотности потока мощности от координаты  $x$ . Объясните полученные результаты.

**9.1.17.** Феррит, намагниченный вдоль оси  $z$ , характеризуется тензором относительной магнитной проницаемости

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} 1,914 & j0,686 & 0 \\ -j0,686 & 1,914 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В плоскости  $z = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\vec{H}$  равна  $15\vec{1}_x + j5\vec{1}_y$ , мА/м; частота колебаний равна 2,1 ГГц, относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 10$ .

Проанализируйте эллипс поляризации вектора  $\vec{H}$  при разных значениях  $z$ . Найдите, при каких значениях  $z$  (ближайших к 0) эллипс поляризации повернется на угол: а)  $45^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $180^\circ$ . Определите направление вращения эллипса поляризации. Рассчитайте плотность потока мощности при  $z = 0$ . Рассчитайте зависимости от координаты  $z$  на интервале от 0 до  $2\lambda$  для: а) амплитуды компонент  $H_x$  и  $H_y$ ; б) мгновенных значений компонент  $H_x$  и  $H_y$  (при  $t = 0$ ). Объясните полученные результаты.

**9.1.18. (У)** Феррит, намагниченный вдоль оси  $z$ , характеризуется тензором относительной магнитной проницаемости

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} 1,914 & j0,686 & 0 \\ -j0,686 & 1,914 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В плоскости  $z = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\vec{H}$  равна  $j25 \vec{1}_x$ , мА/м; частота колебаний равна 2,1 ГГц, относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 10$ . Определите комплексную амплитуду вектора  $\vec{E}$  при  $z = 0$ . Численно решите систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд проекций  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  с известными начальными условиями на интервале  $z$  от 0 до  $2\lambda$ . Постройте графики зависимости амплитуд проекций векторов поля от  $z$ . Постройте эти же графики, пользуясь известным решением для продольного распространения плоской волны в намагниченном феррите. Сравните полученные результаты и сделайте выводы о применении использованных подходов на практике. Качественно изобразите графики зависимости мгновенных значений проекций  $H_x$ ,  $H_y$  от  $z$  для момента времени  $t = 0$ .

**9.1.19.** Феррит, намагниченный вдоль оси  $z$ , характеризуется тензором относительной магнитной проницаемости

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} 1,914 & j0,686 & 0 \\ -j0,686 & 1,914 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



В плоскости  $x = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\bar{H}$  равна  $-j1,79\bar{1}_x + 5\bar{1}_y + 5\bar{1}_z$ , мА/м; частота колебаний равна 2,1 ГГц, относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 10$ . Проанализируйте и постройте эллипс поляризации вектора  $\bar{E}$  при разных значениях  $x$ . Найдите, при каких значениях  $x$  (ближайших к 0) поляризация вектора  $\bar{E}$  будет: а) круговой с левым вращением; б) линейной; в) круговой с правым вращением. Рассчитайте плотность потока мощности при  $x = 0$ . Рассчитайте зависимости мгновенных значений компонент  $E_z$  и  $E_y$  (для момента времени  $t = 0$ ) от координаты  $x$  на интервале от 0 до  $2\lambda$ . Объясните полученные результаты.

**9.1.20.** Кристалл корунда ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 13,2 & 0 & 0 \\ 0 & 13,2 & 0 \\ 0 & 0 & 11,4 \end{bmatrix}.$$

В плоскости  $x = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\bar{E}$  равна  $5\bar{1}_y + 5\bar{1}_z$ , В/м; частота колебаний равна 10 ГГц. Запишите уравнения Максвелла для комплексных амплитуд проекций применительно к данной задаче (используйте обозначения  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ). Получите выражение для комплексной амплитуды вектора  $\bar{E}$ . Проанализируйте и постройте эллипс поляризации вектора  $\bar{E}$  при разных значениях  $x$ . Найдите, при каких значениях  $x$  (ближайших к 0) поляризация будет: а) круговой с левым вращением; б) линейной; в) круговой с правым вращением. Рассчитайте плотность потока мощности при  $x = 0$ . Рассчитайте зависимости мгновенных значений компонент  $E_z$  и  $E_y$  (при  $t = 0$ ) от координаты  $x$  на интервале от 0 до  $2\lambda$ . Объясните полученные результаты. Получите выражение для комплексной амплитуды вектора  $\bar{D}$ . Рассчитайте угол между векторами  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$ .

**9.1.21.** Кристалл корунда ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 13,2 & 0 & 0 \\ 0 & 13,2 & 0 \\ 0 & 0 & 11,4 \end{bmatrix}.$$

В плоскости  $y = 0$  комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  равна  $5 \cdot \vec{1}_x + j5,38 \cdot \vec{1}_z$ , В/м; частота колебаний равна 10 ГГц. Определите комплексную амплитуду вектора  $\vec{H}$  при  $y = 0$ . Получите выражение для комплексной амплитуды вектора  $\vec{H}$ . Проанализируйте и постройте эллипс поляризации вектора  $\vec{H}$  при разных значениях  $y$ . Найдите, при каких значениях  $y$  (ближайших к 0) поляризация будет: а) круговой с левым вращением; б) линейной; в) круговой с правым вращением. Рассчитайте плотность потока мощности при  $y = 0$ . Рассчитайте зависимости мгновенных значений компонент  $H_x$  и  $H_z$  (при  $t = 0$ ) от координаты  $y$  на интервале от 0 до  $2\lambda$ . Объясните полученные результаты. Получите выражение для комплексной амплитуды вектора  $\vec{D}$ . Рассчитайте угол между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ .

**9.1.22. (У)** Амплитудно-модулированный сигнал распространяется в бесстолкновительной плазме (ионосфера) с электронной концентрацией  $N_e = 5 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$  на трассе длиной 100 км. В начале трассы (при  $z = 0$ )

$$E_x(t) = 200[1 + \cos(2\pi Ft)]\cos(2\pi f_0 t), \text{ мВ/м.}$$

Определите, для какой частоты модуляции  $F$  искажения сигнала в конце трассы становятся уже заметными при несущей частоте 14 МГц. Найдите, при какой несущей частоте искажения сигнала в конце трассы становятся уже заметными для частоты модуляции 1,2 МГц. Постройте огибающую прошедшего сигнала для найденных характерных частот. Сделайте выводы о влиянии выбора несущей частоты и частоты модуляции на степень искажений АМ-сигнала в ионосфере.

**9.1.23. (У)** Прямоугольные радиоимпульсы с несущей частотой  $f_0$  и длительностью  $\tau$  распространяются в бесстолкновительной плазме (ионосфера) с электронной концентрацией  $N_e = 7 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$  на трассе длиной 150 км. Определите, при какой длительности  $\tau$  искажения сигнала в конце трассы становятся уже заметными при несущей частоте 18 МГц. Найдите, при какой несущей частоте искажения сигнала в конце трассы становятся уже заметными для длительности радиоимпульсов 0,5 мкс. Для этих случаев рассчитайте зависимости параметра  $\Delta t/\tau$  от меняющегося параметра,

где  $\Delta t$  — разность времени прохождения трассы крайними узкополосными группами в спектре радиосигнала. Считайте, что энергия в спектре прямоугольного радиоимпульса в основном заключена в пределах главного лепестка спектральной плотности, ограниченного частотами  $f_0 - 1/\tau$  и  $f_0 + 1/\tau$ . Сделайте выводы о влиянии выбора несущей частоты и длительности радиоимпульсов на степень их искажений при прохождении через ионосферу.

## 9.2. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

**9.2.1.** Плоская электромагнитная волна падает из диэлектрика с параметрами  $\epsilon = 2,08$ ,  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Рассчитайте и постройте зависимости коэффициентов отражения и преломления по векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  от угла падения для случаев параллельной и перпендикулярной поляризации падающей волны. Определите, при каком угле падения разность фаз коэффициентов отражения составляет  $90^\circ$  (если для данного значения  $\epsilon$  угол падения не определяется, то поменяйте величину  $\epsilon$ ). Найдите, при каком угле падения  $\phi_1$  плотность потока мощности в отраженной волне составляет 80% от плотности потока мощности в падающей волне (для обеих поляризаций). Для угла  $\phi_1$  определите отношение плотности потока мощности в преломленной волне к плотности потока мощности в падающей волне. Объясните полученные результаты с точки зрения выполнимости закона сохранения энергии.

**9.2.2.** Плоская электромагнитная волна падает из диэлектрика с параметрами  $\epsilon = 3,8$ ,  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Рассчитайте зависимости коэффициентов отражения и преломления по вектору Пойнтинга от угла падения для случаев параллельной и перпендикулярной поляризации падающей волны. Найдите, начиная с какого угла падения  $\phi_1$  плотность потока мощности в преломленной волне превышает плотность потока мощности в падающей волне. Объясните это явление. Для угла падения  $\phi_1$  определите

амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в преломленной волне, если  $P_{\text{пад}} = 2 \text{ Вт/м}^2$ .

**9.2.3. (У)** Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из воздуха на границу раздела с диэлектриком без потерь, имеющим параметры  $\epsilon = 2,56$ ,  $\mu = 1$ . Рассчитайте и постройте зависимости коэффициентов эллиптичности в отраженной и преломленной волнах от угла падения. Найдите, при каком угле падения коэффициент эллиптичности: а) минимален; б) равен 0,5 (если это может быть). Объясните наблюдаемое минимальное значение коэффициента эллиптичности. Для найденных углов падения найдите коэффициент отражения по вектору Пойнтинга.

**9.2.4.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает под углом  $60^\circ$  из диэлектрика с параметрами  $\epsilon = 3,8$ ,  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Плотность потока мощности в падающей волне равна  $100 \text{ мВт/м}^2$ . Частота колебаний  $10 \text{ ГГц}$ . Рассчитайте и постройте зависимости амплитуды вектора  $\vec{E}$  и средней плотности потока мощности в преломленной волне от координаты, изменяющейся в направлении нормали к границе раздела сред. Рассчитайте и постройте эти зависимости также для случаев, когда: а) угол падения равен  $80^\circ$ ; б) частота колебаний составляет  $20 \text{ ГГц}$ . Объясните полученные результаты.

**9.2.5.** Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией падает из диэлектрика с параметрами  $\epsilon = 10$ ,  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Вектор  $\vec{E}$  в падающей волне ориентирован под углом  $45^\circ$  относительно плоскости падения. Рассчитайте и постройте эллипс поляризации в отраженной волне для различных углов падения, превышающих угол полного внутреннего отражения. Определите, при каком угле падения  $\varphi_1$ , превышающем угол полного внутреннего отражения, отраженная волна будет иметь круговую поляризацию. Для угла  $\varphi_1$  найдите разность фаз коэффициентов отражения для параллельной и перпендикулярной поляризаций, коэффициент отражения по вектору Пойнтинга. Объясните полученные результаты.

**9.2.6.** Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из диэлектрика с параметрами  $\varepsilon = 7$ ,  $\mu = 1$  на границу раздела с воздухом. Потери в диэлектрике отсутствуют. Постройте эллипс поляризации в отраженной волне для различных углов падения, превышающих угол полного внутреннего отражения. Определите, при каком угле падения  $\varphi_1$ , превышающем угол полного внутреннего отражения, отраженная волна будет иметь линейную поляризацию. Для угла  $\varphi_1$  найдите разность фаз коэффициентов отражения для параллельной и перпендикулярной поляризаций, коэффициент отражения по вектору Пойнтинга. Объясните полученные результаты.

**9.2.7.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает из воздуха на границу раздела с морской водой, имеющей параметры  $\varepsilon = 80$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 4 \text{ См/м}$ . Рассчитайте частотные зависимости действительного угла преломления, коэффициентов отражения и преломления для двух значений угла падения: а)  $25^\circ$ ; б)  $75^\circ$ . Диапазон частот 10 МГц – 100 ГГц. Найдите также угол преломления, коэффициенты отражения и преломления, пренебрегая проводимостью среды. Объясните полученные результаты.

**9.2.8.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией и частотой 50 МГц падает под углом  $65^\circ$  из воздуха на границу раздела с водой, имеющей параметры  $\varepsilon = 80$ ,  $\mu = 1$ . При изменении солености воды (река впадает в океан) будет изменяться удельная проводимость воды. Рассчитайте зависимости действительного угла преломления, коэффициентов отражения и преломления от величины удельной проводимости в диапазоне  $10^{-3} - 4 \text{ См/м}$  (ось удельной проводимости оформите в логарифмическом масштабе). Повторите исследования: а) поменяв частоту (10 ГГц); б) поменяв угол падения (нормальное падение). Объясните полученные результаты.

**9.2.9.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией и частотой 100 МГц падает из воздуха на границу раздела с водой, имеющей параметры  $\varepsilon = 80$ ,  $\mu = 1$ . Рассчитайте зависимости действительного угла преломления, коэффициентов отражения и преломления от угла падения для двух значений удельной проводимости:

а)  $10^{-2}$  См/м; б) 4 См/м. Объясните полученные результаты. Проанализируйте, как влияет частота (возьмите значение 50 ГГц) и поляризация на исследуемые зависимости.

**9.2.10.** Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией нормально падает из воздуха на границу раздела с морской водой, имеющей параметры  $\epsilon = 80$ ,  $\mu = 1$ ;  $\sigma = 4$  См/м. Плотность потока мощности в падающей волне равна  $1,5$  Вт/м<sup>2</sup>. Рассчитайте график зависимости амплитуды вектора  $\vec{H}$  от координаты  $z$ , изменяющейся в направлении нормали к поверхности раздела сред (распределение амплитуды должно быть найдено как для области  $z < 0$ , так и для области  $z > 0$ ). Определите, на каком расстоянии от границы раздела в морской воде ослабление волны составляет 40 дБ. Расчет проведите для частоты 0,5 МГц и для частоты 1,5 МГц. Объясните полученные результаты.

**9.2.11.** Плоская электромагнитная волна падает из воздуха на границу раздела с биотканью со свойствами кожи. Рассчитайте зависимость коэффициента отражения по вектору Пойнтинга от угла падения для случаев параллельной и перпендикулярной поляризаций. Расчет проведите для частот 100 МГц и 3 ГГц. На частоте 100 МГц кожа имеет параметры  $\epsilon = 75$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0,75$  См/м. Для частоты 3 ГГц  $\epsilon = 42$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 2,4$  См/м. Объясните полученные результаты.

**9.2.12.** Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией нормально падает из воздуха на границу раздела с биотканью со свойствами кожи. Плотность потока мощности в падающей волне равна  $250$  мВт/м<sup>2</sup>. Рассчитайте график зависимости амплитуды вектора  $\vec{E}$  от координаты  $z$ , изменяющейся в направлении нормали к поверхности раздела сред (распределение амплитуды должно быть найдено как для области  $z < 0$ , так и для области  $z > 0$ ). Расчет проведите для частот 100 и 300 МГц. Для данных частот кожа имеет параметры  $\epsilon = 75$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0,75$  См/м. Объясните полученные результаты.

**9.2.13.** Плоская электромагнитная волна падает из воздуха на границу раздела с медью под углом  $80^\circ$ . Плотность потока мощности в падающей волне равна  $150$  мВт/м<sup>2</sup>.

Рассчитайте частотную зависимость действительного угла преломления. Найдите частотную зависимость средней мощности тепловых потерь на участке поверхности меди площадью  $1 \text{ м}^2$  для случаев параллельной и перпендикулярной поляризаций падающей волны. Объясните полученные результаты.

**9.2.14. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой  $10 \text{ ГГц}$  нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\epsilon = 3,8$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме. Рассчитайте зависимости коэффициентов отражения и прохождения (через пластину) по вектору Пойнтинга от толщины пластины. Определите минимальную толщину пластины, при которой: а) отражение отсутствует; б) плотности потока мощности падающей и прошедшей пластину волн совпадают. Как изменится искомая толщина пластины, если перейти к частоте  $20 \text{ ГГц}$ ? Объясните полученные результаты.

**9.2.15. (У)** Плоская электромагнитная волна нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\epsilon = 2,56$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме и имеет толщину  $5 \text{ см}$ . Проанализируйте частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения. Найдите  $f_0$  — минимальную частоту, при которой коэффициент отражения равен нулю. Рассчитайте частотную зависимость коэффициента отражения по вектору Пойнтинга в окрестности частоты  $f_0$ . Поменяйте диэлектрическую проницаемость пластины ( $\epsilon = 3,8$ ) и повторите исследования. Объясните полученные результаты.

**9.2.16. (У)** Плоская электромагнитная волна нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\epsilon = 2,08$ ,  $\mu = 1$  (фторопласт). Пластина находится в вакууме и имеет толщину  $10 \text{ мм}$ . Проанализируйте частотные зависимости коэффициентов прохождения  $T_{\Pi}$  и отражения  $R_{\Pi}$  по вектору Пойнтинга. Найдите  $f_0$  — минимальную частоту, при которой коэффициент  $T_{\Pi}$  равен единице (максимум). Рассчитайте более подробно частотную зависимость коэффициента прохождения по вектору Пойнтинга в окрестности частоты  $f_0$ . Найдите полосу частот, в пределах которой  $\Pi_{\text{пр}} > 0,9\Pi_{\text{пад}}$ . Объясните полученные результаты.

**9.2.17. (У)** Плоская электромагнитная волна нормально падает на диэлектрическую пластину без потерь с параметрами  $\varepsilon = 3,8$ ,  $\mu = 1$ . Пластина находится в вакууме и имеет толщину 30 мм. Плотность потока мощности в падающей волне равна  $3,5 \text{ Вт/м}^2$ . Рассчитайте график зависимости амплитуды вектора  $\vec{E}$  от координаты  $z$ , изменяющейся в направлении нормали к поверхности пластины (распределение амплитуды должно быть найдено как для областей вне пластины, так и для области внутри пластины). Расчет проведите для частот 20 и 30 ГГц. Объясните полученные результаты.

**9.2.18. (У)** Плоская электромагнитная волна нормально падает на слой бесстолкновительной плазмы, характеризующейся электронной концентрацией  $N_e = 2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$ . Плазменный слой расположен в вакууме и имеет толщину 3 см. Рассчитайте и постройте частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения по вектору Пойнтинга. Измените электронную концентрацию ( $N_e = 2 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$ ) и повторите исследование. Объясните полученные результаты.

**9.2.19. (У)** Плоская электромагнитная волна с частотой 100 МГц нормально падает из воздуха на поверхность кожи. Слой кожи имеет толщину 5 мм и характеризуется параметрами  $\varepsilon = 80$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0,4 \text{ См/м}$ . За слоем кожи располагается мышечная ткань с параметрами  $\varepsilon = 73$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1,5 \text{ См/м}$  (считаем слой мышечной ткани полубесконечным, т. е. пренебрегаем отражением от задней границы этого слоя). Плотность потока мощности в падающей волне  $50 \text{ мВт/м}^2$ . Рассчитайте график зависимости амплитуды вектора  $\vec{E}$  от координаты  $z$ , изменяющейся в направлении нормали к поверхности кожи. Объясните полученные результаты.

**9.2.20.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $30^\circ$  из воздуха на поверхность идеального металла. Комплексная амплитуда вектора  $\vec{H}$  в падающей волне в начале координат равна  $25 \text{ мА/м}$ . Частота колебаний 5 ГГц. Получите выражения для комплексных амплитуд векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  над поверхностью металла. Найдите среднее значение вектора Пойн-



тинга суммарной волны как функцию координаты  $z$ . Постройте (численно) картину векторного поля для вектора  $\vec{E}$  при  $t = 0$  (получите картину в области размерами  $4\lambda \times 4\lambda$  в плоскости  $XOZ$ ). Измените угол падения ( $60^\circ$ ) и постройте снова картину поля. Объясните полученные результаты и сделайте выводы.

**9.2.21.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией и частотой 500 МГц падает под углом  $40^\circ$  из воздуха на поверхность идеального металла. Комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  в падающей волне в начале координат равна 50 мВ/м. Получите выражения для комплексных амплитуд векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  над поверхностью металла. Найдите среднее значение вектора Пойнтинга суммарной волны как функцию координаты  $z$ . Постройте (численно) картину векторного поля для вектора  $\vec{H}$  при  $t = 0$  (получите картину в области размерами  $4\lambda \times 4\lambda$  в плоскости  $XOZ$ ). Измените угол падения ( $65^\circ$ ) и постройте снова картину поля. Объясните полученные результаты и сделайте выводы.

**9.2.22.** Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией падает под углом  $35^\circ$  из воздуха на поверхность меди. Плотность потока мощности в падающей волне равна  $150 \text{ мВт/м}^2$ , частота колебаний 700 МГц. Найдите амплитуду тангенциальных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на поверхности меди, а также действительный угол преломления. Определите, на какую величину коэффициент отражения по вектору  $\vec{H}$  отличается от 1. Рассчитайте частотную зависимость средней удельной мощности тепловых потерь для углов падения  $30^\circ$  и  $70^\circ$ . Объясните полученные результаты и сделайте выводы.

**9.2.23.** Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией и частотой 120 МГц падает под углом  $50^\circ$  из воздуха на поверхность латуни. Плотность потока мощности в падающей волне равна  $370 \text{ мВт/м}^2$ . Найдите амплитуду тангенциальных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на поверхности латуни, а также действительный угол преломления. Определите, на какую величину коэффициент отражения по вектору  $\vec{E}$  отличается от  $-1$ .

Рассчитайте зависимость средней удельной мощности тепловых потерь от угла падения для частот 120 МГц и 3 ГГц. Объясните полученные результаты и сделайте выводы.

**9.2.24.** Плоская электромагнитная волна нормально падает из воздуха на поверхность металла, характеризующегося концентрацией свободных электронов  $10^{28} \text{ м}^{-3}$  и частотой соударений  $2 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Плотность потока мощности в падающей волне составляет  $10 \text{ Вт/м}^2$ . Рассчитайте частотные зависимости коэффициентов отражения и преломления, а также средней удельной мощности тепловых потерь в металле. Расчет проведите в диапазоне от 3 ГГц (начало сантиметрового диапазона) до плазменной частоты металла (оптический диапазон). Для низкочастотного случая найдите проводимость металла. Объясните полученные результаты и сделайте выводы, до какой частоты можно пользоваться в расчетах обычной проводимостью металла.

### 9.3. ВОЛНОВОДЫ

**9.3.1.** В прямоугольном волноводе сечением  $35 \times 16 \text{ мм}$  распространяется волна типа  $H_{11}$ . Стенки волновода выполнены из латуни. Найдите  $f_{\text{ср}}$  — середину частотного диапазона от  $f_{\text{кр}}$  данного типа до  $f_{\text{кр}}$  ближайшего типа (Е или Н). Рассчитайте и постройте частотные зависимости длины волны в волноводе и погонного затухания (в дБ/м). Найдите частоту  $f_0$ , на которой погонное затухание минимально. Определите погонное затухание для частоты  $f_{\text{ср}}$ . Для частот  $f_{\text{ср}}$  и  $f_0$  определите фазовую и групповую скорость, погонную мощность потерь в стенках волновода, максимальную амплитуду плотности поверхностного тока и максимальную амплитуду плотности тока смещения, максимальную амплитуду векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Считайте, что в обоих случаях средняя переносимая по волноводу мощность равна 15 кВт. Объясните полученные частотные зависимости.

**9.3.2.** В круглом волноводе диаметром 45 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Стенки волновода выполнены

из латуни. Найдите  $f_{\text{ср}}$  — середину частотного диапазона от  $f_{\text{кр}}$  данного типа до  $f_{\text{кр}}$  ближайшего типа (Е или Н). Рассчитайте частотную зависимость погонного затухания (в дБ/м), фазовой и групповой скорости. Найдите частоту  $f_0$ , на которой погонное затухание минимально. Определите погонное затухание для частоты  $f_{\text{ср}}$ . Для частот  $f_{\text{ср}}$  и  $f_0$  определите длину волны в волноводе, погонную мощность потерь в стенках волновода, максимальную амплитуду плотности поверхностного тока и максимальную амплитуду плотности тока смещения, максимальную амплитуду векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Считайте, что в обоих случаях средняя переносимая по волноводу мощность равна 5 кВт. Объясните полученные частотные зависимости.

**9.3.3. Прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками и поперечным сечением  $23 \times 10$  мм** заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью 2,08 и удельной проводимостью  $\sigma_d$ . Получите формулы, рассчитайте и постройте графики зависимости действительной части (коэффициент фазы) и мнимой части (коэффициент ослабления) продольного волнового числа, фазовой скорости и длины волны от частоты колебаний для двух случаев: а)  $\sigma_d = 0$ ; б)  $\sigma_d / (\omega_{\text{кр}} \epsilon_0 \epsilon) = 0,15$ . Тип волны —  $H_{10}$ . Рассчитайте максимальную амплитуду плотности поверхностного тока на частоте  $1,5\omega_{\text{кр}}$ , если средняя мощность, переносимая по волноводу, равна 200 мВт и  $\sigma_d = 0$ . Объясните влияние потерь в диэлектрике на исследуемые частотные зависимости.

**9.3.4. Круглый волновод с идеально проводящими стенками и диаметром 50 мм** заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью 2,56 и удельной проводимостью  $\sigma_d$ . Получите формулы, рассчитайте и постройте графики зависимости действительной части (коэффициент фазы) и мнимой части (коэффициент ослабления) продольного волнового числа, фазовой скорости и длины волны от частоты колебаний для двух случаев: а)  $\sigma_d = 0$ ; б)  $\sigma_d / (\omega_{\text{кр}} \epsilon_0 \epsilon) = 0,15$ . Тип волны —  $H_{01}$ . Рассчитайте максимальную амплитуду вектора  $\vec{E}$  на частоте  $1,75\omega_{\text{кр}}$ , если средняя мощность, переносимая по волноводу, равна 2 кВт

и  $\sigma_d = 0$ . Объясните влияние потерь в диэлектрике на исследуемые частотные зависимости.

**9.3.5. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм распространяется волна типа  $H_{10}$ . Средняя переносимая по волноводу мощность равна 1,5 кВт. Частота колебаний  $f = 1,5f_{кр}$ . Найдите максимальную амплитуду составляющих  $H_z$  и  $H_x$ , максимальную амплитуду плотности поверхностного тока и максимальную амплитуду плотности тока смещения. Определите комплексную амплитуду вектора плотности поверхностного тока на нижней и правой боковой стенках — как функцию координат (с подстановкой исходных числовых данных). Рассчитайте и постройте эллипс поляризации вектора  $\vec{H}$  при различных значениях поперечной координаты  $x$ . Найдите, при каком значении координаты  $x$  вектор  $\vec{H}$  будет иметь круговую поляризацию. Определите направление вращения вектора  $\vec{H}$ , если смотреть навстречу вектору  $\vec{I}_y$ . Постройте график зависимости коэффициента эллиптичности от координаты  $x$ . Проанализируйте полученные результаты.

**9.3.6. (У)** В круглом волноводе диаметром 75 мм распространяется волна типа  $H_{01}$ . Средняя переносимая по волноводу мощность равна 0,25 кВт. Частота колебаний  $f = 1,75f_{кр}$ . Найдите максимальную амплитуду составляющих  $H_z$  и  $H_r$ , максимальную амплитуду плотности поверхностного тока. Определите комплексную амплитуду вектора плотности тока смещения как функцию координат применительно к данным задания. Рассчитайте и постройте графики зависимости амплитуд проекций вектора  $\vec{H}$  от радиуса. Рассчитайте и постройте эллипс поляризации вектора  $\vec{H}$  при различных значениях радиальной координаты  $r$ . Найдите, при каком значении координаты  $r$  вектор  $\vec{H}$  будет иметь круговую поляризацию. Постройте график зависимости коэффициента эллиптичности от координаты  $r$ . Проанализируйте полученные результаты.

**9.3.7.** Прямоугольный волновод имеет поперечное сечение  $35 \times 16$  мм. Средняя переносимая по волноводу мощность равна 0,7 кВт. Получите формулу и рассчитайте двумерную функцию распределения среднего значения

вектора Пойнтинга в плоскости поперечного сечения  $\Pi_{cp}(x, y)$ . Рассмотрите волны типа  $H_{10}$ ,  $E_{11}$ . Для каждого типа волны используйте частоту колебаний  $f = 1,5f_{кр}$ . Для каждого случая функцию  $\Pi_{cp}(x, y)$  изобразите с помощью графика поверхности и карты линий уровня. Найдите длину волны, фазовую скорость, максимальную амплитуду плотности поверхностного тока и максимальную амплитуду плотности тока смещения. Проанализируйте полученные результаты.

**9.3.8.** Круглый волновод имеет диаметр 35 мм. Средняя переносимая по волноводу мощность равна 40 кВт. Получите формулу и рассчитайте двумерную функцию распределения среднего значения вектора Пойнтинга в плоскости поперечного сечения  $\Pi_{cp}(r, \varphi)$ . Рассмотрите волны типа  $H_{01}$ ,  $E_{01}$ . Для каждого типа волны используйте частоту колебаний  $f = 1,5f_{кр}$ . Для каждого случая функцию  $\Pi_{cp}(r, \varphi)$  изобразите с помощью графика поверхности и полутоновой картины. Найдите длину волны, фазовую скорость, максимальную амплитуду плотности поверхностного тока и максимальную амплитуду плотности тока смещения. Проанализируйте полученные результаты.

**9.3.9. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм распространяется волна типа  $H_{11}$ . Частота колебаний  $f = 1,5f_{кр}$ . В точке с координатами  $x = a/2$ ,  $y = z = 0$  комплексная амплитуда составляющей  $E_y$  равна 5 В/м. В сечении  $z_0 = 50$  мм установлена поперечная стенка, выполненная из идеального проводника. Получите расчетные формулы для комплексных амплитуд и мгновенных значений векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}_{пов}$ ,  $\vec{J}_{см}$  (при  $z < z_0$ ). Рассчитайте и постройте картины векторных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{J}_{см}$  в плоскости  $XOY$  при различных значениях  $z$  ( $z_0 - \lambda_v/4$ ;  $z_0 - \lambda_v/2$ ). Рассчитайте и постройте картины векторных полей  $\vec{H}$  и  $\vec{J}_{пов}$  на верхней боковой стенке (в диапазоне  $z \in (z_0; z_0 - 1,25\lambda_v)$ ). Объясните, чем отличаются исследуемые векторные поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}_{пов}$ ,  $\vec{J}_{см}$  от аналогичных векторных полей в волноводе без поперечной стенки. Как изменятся картины при увеличении частоты?

**9.3.10. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Частота колебаний  $f = 1,5f_{кр}$ . В точке с координатами  $y = b/2$ ,

$x = z = 0$  комплексная амплитуда составляющей  $E_x$  равна 0,75 В/м. В сечении  $z_0 = 150$  мм установлена поперечная стенка, выполненная из идеального проводника. Получите расчетные формулы для комплексных амплитуд и мгновенных значений векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}_{\text{пов}}$ ,  $\vec{J}_{\text{см}}$  (при  $z < z_0$ ). Рассчитайте и постройте картины векторных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{J}_{\text{см}}$  в плоскости  $XOY$  при различных значениях  $z$  ( $z_0 - \lambda_{\text{в}}/4$ ;  $z_0 - \lambda_{\text{в}}/2$ ). Рассчитайте и постройте картины векторных полей  $\vec{H}$  и  $\vec{J}_{\text{пов}}$  на правой боковой стенке (в диапазоне  $z \in (z_0; z_0 - 1,25\lambda_{\text{в}})$ ). Объясните, чем отличаются исследуемые векторные поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}_{\text{пов}}$ ,  $\vec{J}_{\text{см}}$  от аналогичных векторных полей в волноводе без поперечной стенки. Как изменятся картины при увеличении частоты?

**9.3.11.** Круглый волновод имеет диаметр 70 мм. Максимальная амплитуда поперечной составляющей вектора  $\vec{H}$  равна 50 мА/м. Рассмотрите волны типа  $H_{01}$  и  $H_{02}$ . Для каждого типа волны используйте частоту колебаний  $f = 1,3f_{\text{кр}}$ . Выведите формулы и рассчитайте среднюю мощность, переносимую по волноводу. Рассчитайте и постройте картины векторных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (в поперечной плоскости), а также картину поля  $\vec{H}$  в продольной плоскости. Рассчитайте и постройте графики зависимости амплитуды всех отличных от нуля проекций векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  от радиальной координаты. Качественно изобразите картины поверхностных токов. Укажите оптимальные расположение и ориентацию штыря, петли и щели для возбуждения волн данных типов. Как изменятся результаты при увеличении частоты?

**9.3.12.** Круглый волновод имеет диаметр 120 мм. Максимальная амплитуда поперечной составляющей вектора  $\vec{E}$  равна 0,2 В/м. Рассмотрите волны типа  $E_{01}$  и  $E_{02}$ . Для каждого типа волны используйте частоту колебаний  $f = 1,4f_{\text{кр}}$ . Выведите формулы и рассчитайте среднюю мощность, переносимую по волноводу. Рассчитайте и постройте картины векторных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (в поперечной плоскости), а также картину поля  $\vec{E}$  в продольной плоскости. Рассчитайте и постройте графики зависимости амплитуды всех отличных от нуля проекций векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  от радиальной координаты. Качественно изобразите

картины поверхностных токов. Укажите оптимальные расположение и ориентацию штыря, петли и щели для возбуждения волн данных типов. Как изменятся результаты при увеличении частоты?

**9.3.13.** В круглом волноводе диаметром 50 мм распространяется волна типа  $H_{11}$ . Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\vec{H}$  равна 35 мА/м. Частота колебаний  $f = 1,45f_{\text{кр}}$ . Стенки волновода выполнены из латуни. Рассчитайте длину волны и погонное затухание. Получите формулу и рассчитайте среднюю мощность, переносимую по волноводу. Найдите максимальную амплитуду плотности поверхностного тока. Рассчитайте и постройте картины векторных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (в поперечной плоскости), а также картину поля  $\vec{H}$  в продольной плоскости (выберите характерный угол). Качественно изобразите картину поверхностных токов. Проанализируйте влияние частоты и диаметра волновода в данном задании.

**9.3.14.** В круглом волноводе диаметром 50 мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Максимальная амплитуда продольной составляющей вектора  $\vec{E}$  равна 15 В/м. Частота колебаний  $f = 1,3f_{\text{кр}}$ . Стенки волновода выполнены из латуни. Рассчитайте длину волны и погонное затухание. Получите формулы (с учетом числовых данных) для векторов плотности тока смещения и плотности поверхностного электрического тока. Рассчитайте и в полярных координатах постройте угловую зависимость амплитуды вектора плотности поверхностного электрического тока. Рассчитайте и постройте картины векторных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (в поперечной плоскости), а также картину поля  $\vec{E}$  в продольной плоскости (выберите характерный угол). Качественно изобразите картину поверхностных токов. Проанализируйте влияние частоты и диаметра волновода в данном задании.

**9.3.15.** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Частота колебаний  $f = 1,4f_{\text{кр}}$ . Средняя передаваемая по волноводу мощность равна 1,2 кВт. Стенки волновода выполнены из меди. Рассчитайте фазовую скорость и коэффициент затухания. Получите формулы и рассчитайте амплитуду полного тока

смещения, пересекающего плоскость поперечного сечения, а также амплитуду полного тока проводимости, пересекающего контур поперечного сечения. Рассчитайте и постройте полутоновую картину распределения  $\Pi_{\text{ср}}$  в плоскости поперечного сечения. Как изменятся результаты, если: а) увеличить частоту; б) перейти к волне типа  $E_{21}$ ?

**9.3.16.** В круглом волноводе диаметром 35 мм распространяется волна типа  $E_{01}$ . Частота колебаний  $f = 1,45 f_{\text{кр}}$ . Средняя передаваемая по волноводу мощность равна 45 Вт. Стенки волновода выполнены из латуни. Рассчитайте фазовую скорость и коэффициент затухания. Получите формулы и рассчитайте амплитуду полного тока смещения, пересекающего плоскость поперечного сечения, а также амплитуду полного тока проводимости, пересекающего контур поперечного сечения. Рассчитайте и постройте полутоновую картину распределения  $\Pi_{\text{ср}}$  в плоскости поперечного сечения. Как изменятся результаты, если: а) увеличить частоту; б) перейти к волне типа  $H_{01}$ ?

**9.3.17.** В прямоугольном волноводе сечением  $110 \times 55$  мм распространяются одновременно волны типов  $H_{10}$ ,  $H_{20}$  и  $H_{11}$ . В сечении  $z = 0$  амплитудный коэффициент  $C_2$  этих волн одинаков и равен 150 мА/м. Частота колебаний в 1,25 раза больше максимальной критической частоты для этих волн. Рассчитайте частотную зависимость амплитуды и фазы составляющей  $E_y$  при  $x = a/4$ ,  $y = 0$  для различных поперечных сечений  $z$ . Сделайте вывод о частотных характеристиках волноводного тракта в многоволновом режиме при различной длине тракта. Рассчитайте переносимую мощность и коэффициент затухания (погонное затухание) для волны типа  $H_{11}$ . Стенки волновода выполнены из латуни.

**9.3.18.** В круглом волноводе диаметром 110 мм распространяются одновременно волны типов  $E_{01}$ ,  $E_{02}$  и  $E_{03}$ . В сечении  $z = 0$  амплитудный коэффициент  $C_1$  этих волн одинаков и равен 1,5 В/м. Частота колебаний в 1,3 раза больше максимальной критической частоты для этих волн. Рассчитайте частотную зависимость амплитуды и фазы составляющей  $E_r$  (взятой у поверхности металла)



для различных поперечных сечений  $z$ . Сделайте вывод о частотных характеристиках волноводного тракта в многоволновом режиме при различной длине тракта. Рассчитайте переносимую мощность и коэффициент затухания (погонное затухание) для волны типа  $E_{02}$ . Стенки волновода выполнены из меди.

**9.3.19.** В прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм распространяется волна типа  $E_{11}$ . Средняя передаваемая по волноводу мощность равна 3 кВт. Получите формулу и рассчитайте частотную зависимость максимальной амплитуды составляющей  $E_y$  и частотную зависимость погонной мощности потерь в стенках волновода (латунь). Объясните характер полученных графиков. Найдите, какой величиной ограничивается передаваемая по волноводу мощность за счет явления электрического пробоя воздуха (30 кВ/см) при частоте колебаний  $f = 1,5f_{кр}$ . Постройте качественно картину поля и картину токов для данного типа волны.

**9.3.20.** В круглом волноводе диаметром 43 мм распространяется волна типа  $H_{01}$ . Средняя передаваемая по волноводу мощность равна 10 кВт. Получите формулу и рассчитайте частотную зависимость максимальной амплитуды составляющей  $E_\varphi$  и частотную зависимость погонной мощности потерь в стенках волновода (медь). Объясните характер полученных графиков. Найдите, какой величиной ограничивается передаваемая по волноводу мощность за счет явления электрического пробоя воздуха (30 кВ/см) при частоте колебаний  $f = 1,3f_{кр}$ . Постройте качественно картину поля и картину токов для данного типа волны.

**9.3.21.** В прямоугольном волноводе сечением  $35 \times 16$  мм распространяется волна основного типа. В окрестности сечения  $z = 0$  размер широкой стенки плавно уменьшается по гауссовскому закону:  $a = a_0\{1 - K \exp[-(z/D)^2]\}$ , где  $a_0 = 35$  мм,  $D = 100$  мм,  $K = 0,75$ . Частота колебаний в 1,05 раза больше критической частоты для минимального размера широкой стенки. Средняя передаваемая по волноводу мощность равна 40 кВт. Получите формулу и рассчитайте зависимость  $E_{my}(z)$  и  $H_{mx}(z)$  для

точек, расположенных в центре широкой стенки. Считайте, что размер широкой стенки изменяется плавно и отражением волн можно пренебречь. Определите, при какой величине переносимой мощности в сечении  $z = 0$  произойдет электрический пробой воздуха (30 кВ/см). Как изменятся результаты, если увеличить частоту колебаний? Объясните влияние размера широкой стенки на амплитуду векторов поля. В каких практических задачах это может использоваться?

**9.3.22. (У)** Прямоугольный волновод сечением  $35 \times 16$  мм закорочен на конце металлическим фланцем. В волноводе существует волна типа  $H_{10}$ . На расстоянии  $z_0 = \lambda_v/4$  от фланца ( $\lambda_v$  — длина волны в волноводе на несущей частоте) в центре широкой стенки волновода расположен вертикальный металлический штырь, в котором электромагнитное поле индуцирует СВЧ-ток. Этот ток с помощью детекторной секции преобразуется в напряжение  $u_d = k_d E_m^2$ , где  $k_d = 0,1 \text{ м}^2/\text{В}$  — коэффициент детектирования;  $E_m$  — амплитуда вектора  $\vec{E}$  в точке расположения штыря. Получите формулу и рассчитайте зависимость напряжения  $u_d$  от времени, если частота колебаний изменяется во времени по закону  $f(t) = f_0[1 + M \cos(2\pi Ft)]$ , где  $f_0 = 7 \text{ ГГц}$  — несущая частота;  $M = 0,2$  — коэффициент модуляции;  $F = 1 \text{ кГц}$  — частота модуляции. В падающей волне на несущей частоте (при  $M = 0$ ) переносится мощность 0,8 Вт. Проанализируйте факторы, которые влияют на пульсации напряжения детектора.

**9.3.23. (У)** Круглый волновод диаметром 70 мм закорочен на конце металлическим фланцем. В волноводе существует волна типа  $E_{01}$ . На расстоянии  $z_0 = \lambda_v/4$  от фланца ( $\lambda_v$  — длина волны в волноводе на несущей частоте) в стенке волновода расположен ориентированный по радиусу металлический штырь, в котором электромагнитное поле индуцирует СВЧ-ток. Этот ток с помощью детекторной секции преобразуется в напряжение  $u_d = k_d E_m^2$ , где  $k_d = 0,12 \text{ м}^2/\text{В}$  — коэффициент детектирования;  $E_m$  — амплитуда вектора  $\vec{E}$  в точке расположения штыря. Получите формулу и рассчитайте зависимость напряжения  $u_d$  от времени, если частота колебаний изменяется во време-

ни по закону  $f(t) = f_0[1 + M\cos(2\pi Ft)]$ , где  $f_0 = 1,5f_{\text{кр}}$  — несущая частота;  $M = 0,3$  — коэффициент модуляции;  $F = 1$  кГц — частота модуляции. В падающей волне на несущей частоте (при  $M = 0$ ) переносится мощность 250 мВт. Проанализируйте факторы, которые влияют на пульсации напряжения детектора.

**9.3.24. (У)** По прямоугольному волноводу сечением  $35 \times 16$  мм передаются прямоугольные радиоимпульсы с несущей частотой 6,4 ГГц и длительностью 25 нс. Найдите фазовую и групповую скорость на границах главного лепестка спектра радиоимпульса. Получите формулы и рассчитайте зависимость степени расплывания радиоимпульсов от длины волноводного тракта. Волновод заполнен воздухом и работает на волне основного типа. Определите, при какой длине волноводного тракта  $L_0$  степень расплывания импульсов не будет превышать 0,2. Повторите исследования для длительности импульсов 10 нс; для несущей частоты 5 ГГц. Рассчитайте частотную зависимость времени групповой задержки при длине тракта  $L_0$ . Объясните влияние длины тракта, длительности импульсов и несущей частоты на величину искажений. Найдите затухание (в дБ) для длины тракта  $L_0$ , если стенки волновода выполнены из латуни.

**9.3.25. (У)** По круглому волноводу диаметром 25 мм передаются прямоугольные радиоимпульсы с несущей частотой  $1,2f_{\text{кр}}$  и длительностью 15 нс. Волновод работает на волне типа  $H_{11}$ . Найдите фазовую и групповую скорость на границах главного лепестка спектра радиоимпульса. Получите формулы и рассчитайте зависимость степени расплывания радиоимпульсов от длины волноводного тракта. Волновод заполнен воздухом и работает на волне основного типа. Определите, при какой длине волноводного тракта  $L_0$  степень расплывания импульсов не будет превышать 0,25. Повторите исследования для длительности импульсов 5 нс; для несущей частоты  $1,05f_{\text{кр}}$ . Рассчитайте частотную зависимость времени групповой задержки при длине тракта  $L_0$ . Объясните влияние длины тракта, длительности импульсов

и несущей частоты на величину искажений. Найдите затухание (в дБ) для длины тракта  $L_0$ , если стенки волновода выполнены из меди.

**9.3.26. (У)** В прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34$  мм и длиной  $L$  передаются прямоугольные радиоимпульсы с амплитудой  $A$ , длительностью  $\tau_n$  и несущей частотой  $f_0 = 2,5$  ГГц. Волновод заполнен воздухом и работает на волне основного типа. Рассчитайте и постройте нормированную огибающую  $E_{ог}(t)/A$  радиоимпульсов в конце тракта при различной длине  $L$  и длительности  $\tau_n$  (наносекунды, микросекунды). Считайте, что потерями можно пренебречь. Определите, при каких параметрах  $L$  и  $\tau_n$  искажения огибающей становятся заметными. Как изменятся результаты, если увеличить несущую частоту?

# УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

**3.1.9.** Для определения амплитуды тока воспользуйтесь дифференциальной формой закона Ома, устанавливающей связь между плотностью тока проводимости и напряженностью электрического поля. В данной задаче можно считать, что ток равномерно распределен в пределах поперечного сечения провода.

**3.1.16.** Воспользуйтесь уравнением непрерывности и третьим уравнением Максвелла.

**3.1.17–3.1.20.** Воспользуйтесь векторными тождествами.

**3.1.27.** Воспользуйтесь первым и вторым уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля.

**3.1.32.** Используя первое и второе уравнения Максвелла в декартовой системе координат, получите систему двух дифференциальных уравнений первого порядка для  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$ . Учтите, что характеристическое уравнение представляет собой условие существования ненулевого решения системы линейных алгебраических уравнений (равенство нулю определителя), которые получаются из системы дифференциальных уравнений, если искать решение в виде функции  $\exp(\gamma z)$ .

**3.1.33.** Сначала с помощью первого уравнения Максвелла найдите комплексную амплитуду вектора  $\vec{H}$ , приближенно полагая электрическое поле в конденсаторе однородным с комплексной амплитудой  $E_0$ . Затем, используя найденное решение для  $\vec{H}$  во втором уравнении Максвелла, определите поправку  $\vec{E}_1$ . Можете использовать уравнения Максвелла как в дифференциальной, так и в интегральной

формах, учитывая, что поле обладает цилиндрической симметрией.

**3.1.34.** Сначала с помощью первого уравнения Максвелла определите комплексную амплитуду вектора  $\vec{H}$ , приближенно полагая комплексную амплитуду плотности тока проводимости в поперечном сечении проводника постоянной и равной  $\vec{J}_0$ . Затем, подставив найденное решение для  $\vec{H}$  во второе уравнение Максвелла, определите поправку  $\vec{J}_1 = \sigma_0 / \vec{E}_1$ , где  $\vec{E}_1$  — поправка к напряженности электрического поля  $\vec{E}_0 = \vec{J}_0 / \sigma_0$ . Учтите, что поле обладает цилиндрической симметрией.

**3.1.35.** Воспользовавшись уравнением непрерывности и третьим уравнением Максвелла, покажите, что в данном случае распределения зарядов и напряженности электрического поля также обладают сферической симметрией. Выразив плотность электрического тока и напряженность электрического поля через распределение зарядов, рассмотрите плотность полного тока.

**3.1.36.** Для определения вектора  $\vec{H}$  у поверхности  $z = 0$  воспользуйтесь законом полного тока применительно к прямоугольному контуру малой ширины  $2\Delta z$ , лежащему в плоскости  $XOZ$  и охватывающему линии поверхностного тока. Учтите, что при  $\Delta z \rightarrow 0$  вкладом тока смещения в циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по контуру можно пренебречь. Поле  $\vec{H}$  при произвольных значениях  $z$  записывается на основе решения, полученного у поверхности  $z = 0$ , с учетом фактора временного запаздывания. Для определения поля  $\vec{E}$  воспользуйтесь первым уравнением Максвелла.

**3.1.37.** Для определения поля  $\vec{H}$  в области  $|z| < ct$  воспользуйтесь первым уравнением Максвелла в интегральной форме применительно к прямоугольному контуру шириной  $2\Delta z < 2c\Delta t$ , лежащему в плоскости  $XOZ$  и охватывающему линии поверхностного тока. Поле  $\vec{E}$  можно найти, воспользовавшись первым уравнением Максвелла и расположив прямоугольный контур в плоскости  $XOZ$  при  $z > 0$  так, чтобы контур охватывал фронт волны (плоскость  $z = vt$ ). Чтобы показать, что  $v = c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ , рассмотрите второе уравнение Максвелла и расположите прямо-

угольный контур в плоскости  $YOZ$  при  $z > 0$ . Этот контур также должен охватывать фронт волны.

**3.2.25.** В теореме Пойнтинга для мгновенных мощностей в качестве одного из слагаемых фигурирует производная по времени от энергии электромагнитного поля

$$\int \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bar{H} \right) dV.$$

В связи с инерционностью высокочастотных процессов поляризации и намагничивания среды колебания векторов  $\bar{D}(t)$  и  $\bar{B}(t)$  запаздывают по фазе от колебаний векторов  $\bar{E}(t)$  и  $\bar{H}(t)$ . Это запаздывание может быть учтено введением комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей среды  $\bar{\bar{D}} = \epsilon_0(\epsilon' - j\epsilon'')\bar{\bar{E}}$ ;  $\bar{\bar{B}} = \mu_0(\mu' - j\mu'')\bar{\bar{H}}$ . Используя эти соотношения, рассмотрите средние за период колебаний составляющие в выражениях  $(\partial \bar{D} / \partial t) \bar{E}$  и  $(\partial \bar{B} / \partial t) \bar{H}$ .

**3.2.26.** См. задачу 3.2.25.

**3.3.18.** Воспользуйтесь законом сохранения заряда в интегральной форме.

**3.3.19.** Для определения  $\dot{\bar{E}}$  в плоскости  $z = 0$  воспользуйтесь результатом решения предыдущей задачи.

**3.3.20.** Воспользуйтесь первым и третьим уравнениями Максвелла в интегральной форме.

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

**4.1.10–4.1.11.** Если смотреть с конца вектора Пойнтинга (навстречу распространяющейся волне), то для правополяризованной волны вектор напряженности электрического или магнитного поля вращается в направлении стрелки часов. В случае левополяризованной волны векторы поля вращаются в противоположном направлении.

**4.1.21.** См. указания к задаче 4.1.10.

**4.1.27.** См. указания к задаче 4.1.10.

**4.1.32.** См. указания к задаче 4.1.10.

**4.1.33.** Среднее значение вектора Пойнтинга в заданной плоскости удобно определять через среднее значение вектора Пойнтинга в начальной плоскости, учитывая

экспоненциальный закон убывания амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  при распространении волны в среде с потерями.

**4.1.40.** Учтите, что в точке наблюдения вектор  $\vec{E}(t)$  (как и вектор  $\vec{H}(t)$ ) имеет две взаимно перпендикулярные составляющие, каждая из которых перпендикулярна направлению на Солнце. Связь между соответствующими компонентами векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  осуществляется через характеристическое сопротивление вакуума. Колебания  $\vec{E}(t)$  и  $\vec{H}(t)$  имеют случайную природу; под среднеквадратичным значением напряженности электрического поля следует понимать величину

$$E_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{1}{T_{\text{н}}} \int_0^{T_{\text{н}}} E^2(t) dt},$$

где  $T_{\text{н}}$  — время наблюдения. Аналогично определяется среднеквадратичное значение напряженности магнитного поля и среднее значение плотности потока мощности.

**4.1.41.** См. указания к задаче 4.1.40. Для определения средней мощности солнечного излучения, падающего на поверхность Земли, солнечные лучи приближенно считайте параллельными. Изотропный источник излучает волны равномерно по всем направлениям.

**4.1.42.** Сначала определите мгновенную плотность энергии электромагнитного поля  $w(t)$ , учитывая связь между электрическим и магнитным полем в распространяющейся плоской волне.

**4.1.43.** Скорость переноса энергии волной  $v_g$  определяется отношением плотности потока энергии  $\vec{\Pi}(t) = [\vec{E}(t)\vec{H}(t)]$  к плотности энергии электромагнитного поля  $w(t)$ .

**4.1.45.** При определении потока вектора Пойнтинга через поверхность, ограничивающую прямоугольный объем, учтите, что вектор единичной нормали к поверхности направлен изнутри наружу. При проверке тождества  $2\alpha/\sigma = |Z_c|/\cos(\delta/2)$  коэффициент затухания удобнее представить в виде  $\alpha = \omega\sqrt{\mu_a\epsilon_a}^4\sqrt{1 + \text{tg}^2\delta}\sin(\delta/2)$ .

**4.1.46.** Баланс мгновенных мощностей проверяйте для средних значений (неизменных по времени) и для слагаемых, колеблющихся с удвоенной частотой  $2\omega_0$ . Коэффици-



коэффициент затухания  $\alpha$  удобнее выразить через  $\sin(\delta/2)$  (см. указание к задаче 4.1.45).

**4.1.47.** Установите связь между плотностью поверхностного тока и амплитудой вектора  $\vec{H}$  в плоских волнах, распространяющихся в противоположные стороны от плоскости  $z = 0$ . Для этого воспользуйтесь законом полного тока в интегральной форме. Рассмотрите контур прямоугольной формы, лежащий в плоскости  $XOZ$ .

**4.1.48.** Воспользуйтесь уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля в декартовой системе координат.

**4.1.49.** Воспользуйтесь уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля в декартовой системе координат. Используйте запись комплексных амплитуд векторов поля в виде бегущей плоской волны:  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-j\beta z)$ ;  $\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(-j\beta z)$ . Подставьте эти выражения в уравнения Максвелла и рассмотрите условия существования ненулевого решения получающейся системы алгебраических сравнений. Убедитесь, что скалярное произведение  $\vec{E}_0 \vec{H}_0 = 0$ .

**4.1.50.** Воспользуйтесь уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля в декартовой системе координат. Убедитесь, что в данном случае  $H_y = 0$ , а составляющие  $\dot{H}_x$  и  $\dot{H}_z$  изменяются в пространстве по тому же закону, что и  $\dot{E}_y$ . Рассмотрите условие существования ненулевого решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из уравнений Максвелла при подстановке решения для составляющих  $\dot{E}_y$ ,  $\dot{H}_x$  и  $\dot{H}_z$  в виде неоднородной плоской волны.

**4.1.51.** Воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

**4.1.52.** Предварительно с помощью уравнений Максвелла (для комплексных амплитуд векторов поля в декартовой системе координат) установите связи между  $\dot{E}_y$  и составляющими  $\dot{H}_x$ ,  $\dot{H}_z$ .

**4.1.53.** Представьте вектор  $\dot{\vec{E}}$  в виде

$$\dot{\vec{E}} = (\bar{A}_1 + j\bar{A}_2) \exp(-j\varphi_0) \exp[-j(\beta z - \varphi_x)],$$

где  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  — вещественные векторы. Выразите  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  через векторы  $E_m \bar{1}_x$  и  $E_m \bar{1}_y$ , используя тригонометрические

функции углов  $\varphi_0$  и  $\varphi_0 + \delta$ , где  $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ . Определите угол  $\varphi_0$ , исходя из условия ортогональности векторов  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$ . Запишите составляющие вектора  $\bar{E}(t)$  в повернутой системе координат  $\bar{1}_{x'}$ ,  $\bar{1}_{y'}$ ,  $\bar{1}_z$ , для которой орт  $\bar{1}_{x'}$  параллелен вектору  $\bar{A}_1$ , а орт  $\bar{1}_{y'}$  — вектору  $\bar{A}_2$ .

**4.1.54–4.1.55.** См. указания к задаче 4.1.10.

**4.1.56.** Представьте комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля суммарной волны в виде

$$\dot{\bar{E}} = (\bar{A}_1 + j\bar{A}_2) \exp(-j\varphi_0) \exp\left[-j\left(\frac{\omega}{c}z - \varphi_1\right)\right],$$

где  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  — вещественные векторы. Определите  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  через векторы  $\bar{E}_{m1}$  и  $\bar{E}_{m2}$ , выраженные через их проекции на оси  $x$  и  $y$ . Найдите угол  $\varphi_0$ , исходя из условия ортогональности векторов  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$ . Запишите проекции вектора суммарного поля  $\bar{E}(t)$  на направления главных осей эллипса поляризации, задаваемые векторами  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$ .

**4.1.57.** Представьте колебания  $\bar{E}_1(t)$  и  $\bar{E}_2(t)$  в виде

$$\begin{aligned}\bar{E}_1(t) &= E_m \cos(\omega_0 t - \beta_0 z - \theta) \bar{1}_x; \\ \bar{E}_2(t) &= E_m \cos(\omega_0 t - \beta_0 z + \theta) \bar{1}_y,\end{aligned}$$

где  $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ;  $\beta_0 = (\beta_1 + \beta_2)/2$ ;  $\theta = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}t - \frac{(\beta_2 - \beta_1)}{2}z$ .

Используйте комплексные амплитуды колебаний для центральной частоты  $\omega_0$ :

$$\dot{\bar{E}}_1 = E_m \exp[-j(\beta_0 z + \theta)] \bar{1}_x; \quad \dot{\bar{E}}_2 = E_m \exp[-j(\beta_0 z - \theta)] \bar{1}_y.$$

Запишите вектор электрического поля суммарной волны в виде

$$\dot{\bar{E}} = (\bar{A}_1 + j\bar{A}_2) \exp(-j\varphi_0),$$

где  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  — вещественные векторы. Убедитесь, что при  $\varphi_0 = 0$  векторы  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  ортогональны и повернуты относительно осей  $x$ ,  $y$  на угол  $\pi/4$  против часовой стрелки, если смотреть с конца орта  $\bar{1}_z$ . Определите проекции вектора  $\bar{E}$  на направления главных осей эллипса поляризации (направления векторов  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$ ). Основываясь на полученных выражениях, проанализируйте поляризацию волны.

**4.1.58.** Используйте комплексные амплитуды колебаний для центральной частоты  $\omega_0$ , например

$$E_m \cos \left[ \omega_1 \left( t - \frac{z}{c} \right) + \varphi_1 \right] = \operatorname{Re} \left\{ \dot{E}_1 \exp \left( j \left[ \omega_0 \left( t - \frac{z}{c} \right) + \varphi_0 \right] \right) \right\},$$

где

$$\dot{E}_1 = E_m \exp \left[ j(\omega_1 - \omega_0) \left( t - \frac{z}{c} \right) + (\varphi_1 - \varphi_0) \right]$$

— комплексная амплитуда, медленно изменяющаяся с частотой  $\omega_1 - \omega_0$ .

**4.2.16.** Рассмотрите скорость перемещения огибающей двух монохроматических волн с длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ . Учтите, что фазовые скорости данных монохроматических волн будут равны  $v_\phi$  и  $v_\phi + \Delta v_\phi$  в соответствии с зависимостью  $v_\phi(\lambda)$ .

**4.2.17.** Пространственное распределение огибающей  $E_{\text{ог}}(z, t)$  поля узкополосного радиосигнала может быть получено с использованием понятия групповой скорости. По определению, пространственная спектральная плотность огибающей при  $t = t_0$ :

$$S_E(k) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\text{ог}}(z, t_0) \exp(-jkz) dz,$$

где  $k$  — пространственная частота.

**4.2.18.** Как доказывается в курсе теоретической радиотехники, спектральная плотность прямоугольного радиоимпульса описывается функцией  $\sin(\xi)/\xi$ , где  $\xi = (\omega - \omega_0)\tau_H/2$ ;  $\omega_0$  — несущая частота радиоимпульса.

**4.2.20.** Приемники радиотелескопа выделяют узкополосные импульсные колебания, связанные с узкополосными группами волн в спектре принимаемого излучения. Для определения разности времен прихода импульсов пользуйтесь понятием групповой скорости. Учитывая малость плазменной частоты по сравнению с частотами настройки приемников, воспользуйтесь приближенным соотношением  $1/\sqrt{1+\alpha} \approx 1-\alpha/2$  при  $|\alpha| \ll 1$ , где  $\alpha$  — вещественное

число. Используйте парсек — единицу расстояния в астрономии, равную  $3,08 \cdot 10^{16}$  м.

**4.2.21.** Найдите разницу во временных задержках, определяемых с учетом и без учета электронной концентрации в межзвездной среде. Учтите, что  $1/\sqrt{1+\alpha} \approx 1-\alpha/2$ , если  $\alpha$  — вещественное число и  $|\alpha| \ll 1$ . Учтите, что один световой год — единица расстояния в астрономии, равная  $9,46 \cdot 10^{15}$  м.

**4.2.22.** В связи с малостью плазменной частоты по сравнению с частотой настройки приемника используйте приближенное соотношение  $1/\sqrt{1+\alpha} \approx 1-\alpha/2$  при  $|\alpha| \ll 1$ , где  $\alpha$  — вещественное число. Для узкополосного приемника  $f_1^{-2} - f_2^{-2} \approx 2\Delta f / f_0^3$ , где  $f_{1,2} = f_0 \pm \Delta f/2$  — границы частотного интервала, принимаемого радиотелескопом;  $\Delta f$  — полоса пропускания. Учтите, что один парсек равен  $3,08 \cdot 10^{16}$  м.

**4.2.23.** При выводе выражения для  $\Delta t$  запишите частоты крайних узкополосных групп в спектре сигнала в виде  $f_{1,2} = f_0 \pm \Delta f/2$ , где  $f_0$  — несущая частота;  $\Delta f$  — ширина спектра сигнала. Представьте групповую скорость в виде степенного ряда в окрестности частоты  $f_0$  и учтите первые два члена ряда, имея в виду, что  $\Delta f \ll f_0$ .

**4.2.24.** См. указания к предыдущей задаче.

**4.2.25.** ЛЧМ-радиоимпульс с большой базой может быть приближенно представлен в виде набора узкополосных групп, которые последовательно проходят по радиотрассе. При максимально выраженном эффекте сжатия время прихода различных узкополосных групп должно быть одинаковым. Запишите частоту для момента времени  $t_i \in (0, \tau_n)$  в начале трассы в виде  $\omega_i = \omega_0 + \Delta\omega_i$ , где  $\Delta\omega_i = at_i$ . Представьте групповую скорость  $v_{гр}(\omega_i)$  в виде степенного ряда в окрестности частоты  $f_0$  и учтите первые два члена ряда, имея в виду, что  $\Delta\omega_i \ll \omega_0$ .

**4.2.27.** Воспользуйтесь плазменной моделью металла (см. выражение для комплексной диэлектрической проницаемости металла, приведенное в справочном материале к данной главе). Рассмотрите ситуацию, когда нормальные электроны отсутствуют ( $\delta_n = 0$ ). Учтите, что в среде с относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$  коэффициент затухания плоской волны  $\alpha = |\text{Im}((\omega/c)\sqrt{\epsilon})|$ .

**4.2.28.** См. указания к задаче 4.2.27. Учтите, что при отсутствии сверхпроводящих электронов удобно воспользоваться известным выражением для толщины скин-слоя в металле:  $h = \sqrt{2/(\mu_0 \omega \sigma)}$ , где в качестве удельной проводимости следует использовать нормальную составляющую удельной проводимости  $\sigma_n$  (см. справочный материал).

## ГЛАВА ПЯТАЯ

**5.1.2.** Учтите, что в учебных пособиях выводится выражение для коэффициента преломления по электрическому полю. Комплексные амплитуды электрического и магнитного векторов в падающей, отраженной и преломленной волнах связаны через характеристическое сопротивление соответствующей среды.

**5.1.9.** Обратите внимание на запись граничных условий на поверхности раздела сред при выводе выражений для  $R$  и  $T$ .

**5.1.10.** Воспользуйтесь выражениями для коэффициентов отражения при параллельной и перпендикулярной поляризации падающей волны.

**5.1.18.** Воспользуйтесь выражением для угла Брюстера и законом Снелля.

**5.1.19.** Пусть вектор  $\vec{E}$  в падающей, отраженной или преломленной волнах имеет составляющие  $\vec{E}_\perp(t)$  и  $\vec{E}_\parallel(t)$ , ориентированные перпендикулярно и параллельно плоскости падения. Рассмотрите комплексные амплитуды гармонических колебаний  $E_\perp(t)$  и  $E_\parallel(t)$ :  $\dot{E}_\perp = E_{m\perp} \exp(j\varphi_\perp)$ ;  $\dot{E}_\parallel = E_{m\parallel} \exp(j\varphi_\parallel)$ . Если  $|\varphi_\perp - \varphi_\parallel| = 90^\circ$ , то поляризация волны (падающей, отраженной или преломленной) будет эллиптической с коэффициентом эллиптичности  $K_{эл} = E_{m\perp}/E_{m\parallel}$ . Если при этом  $K_{эл} = 1$ , то поляризацию называют круговой.

**5.1.20.** См. указания к задаче 5.1.19.

**5.1.22.** Для способа б) рассмотрите мощность падающей волны, переносимую через участок фронта волны единичной площади.

**5.1.23.** См. указания к задаче 5.1.22.

**5.1.24–5.1.27.** Обратите внимание, что поведение зависимости  $R(\varphi)$  определяется характерными точками:  $\varphi = 0$ ;

$\varphi_B$ ;  $\varphi_{по}$ ;  $90^\circ$  (учтите, что явления полного преломления и полного отражения наблюдаются не всегда). Определите, как изменятся  $\varphi_B$ ,  $\varphi_{по}$  и  $R|_{\varphi=0}$  при увеличении диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_d$ .

**5.1.29.** Воспользуйтесь приближенным соотношением

$$\frac{1+a}{1+b} \approx 1+a-b \quad \text{при} \quad |a| \ll 1 \quad \text{и} \quad |b| \ll 1.$$

**5.1.32.** Составьте уравнение относительно требуемой разности фаз коэффициентов отражения составляющих поля с параллельной и перпендикулярной поляризацией. Решите это уравнение численно (например, с помощью калькулятора) относительно неизвестного  $\chi = \sqrt{\varepsilon \sin^2 \varphi - 1} / \cos \varphi$ . Определив корень этого уравнения  $\chi_0$ , найдите искомый угол  $\varphi$ .

**5.1.33.** См. указания к задаче 5.1.32.

**5.1.43.** Запишите электрическое поле в 1-й и во 2-й средах в виде суммы двух волн, распространяющихся в направлении падающей на пластину волны и в противоположном направлении. Представьте поле в 3-й среде в виде волны, уходящей в направлении нормали от поверхности пластины. Выразите магнитное поле в 1-й, 2-й и 3-й средах через электрическое поле, учитывая связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в распространяющейся волне через характеристическое сопротивление среды (либо воспользовавшись вторым уравнением Максвелла для комплексных амплитуд в декартовой системе координат). Запишите граничные условия для тангенциальных составляющих векторов поля на верхней и нижней поверхности пластины. Решите полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\dot{E}_{отр}$  и  $\dot{E}_{пр}$ .

Решить данную задачу можно другим способом — воспользовавшись теорией длинных линий. Данный подход основан на том, что волновые процессы в плоскостойкой среде аналогичны волновым процессам в последовательно соединенных отрезках длинных линий. В нашей задаче диэлектрической пластине соответствует отрезок длинной линии протяженностью  $a$  и волновым сопротивлением  $Z_{в2} = Z_0 / \sqrt{\varepsilon_2}$ , где  $Z_0$  — характеристическое сопротивление вакуума. Данный отрезок подсоединен к

полубесконечным линиям передачи с волновыми сопротивлениями  $Z_{в1} = Z_0 / \sqrt{\epsilon_1}$  и  $Z_{в3} = Z_0 / \sqrt{\epsilon_3}$ . Для решения задачи найдите коэффициент отражения от отрезка линии протяженностью  $d$ , нагруженного на сопротивление  $Z_{в3}$ .

При выводе используйте обозначения, приведенные в ответе к данной задаче. Здесь  $R_{ij}$  и  $T_{ij}$  — коэффициенты отражения и преломления при нормальном падении волны из  $i$ -й среды на границу раздела с  $j$ -й средой.

**5.1.44.** См. указания к задаче 5.1.43.

**5.1.45.** Воспользуйтесь решением задачи 5.1.44.

**5.1.46.** Воспользуйтесь решением задачи 5.1.43. Определите сначала показатель преломления неотражающего слоя  $n_2$ , исходя из условия  $R = 0$  и учитывая известную электрическую толщину слоя ( $d = \lambda/4$ ).

**5.1.47.** Воспользуйтесь решением задачи 5.1.44.

**5.1.48.** Воспользуйтесь решением задачи 5.1.44. Представьте частоту колебания в виде  $f = f_0 + \Delta f$  и учтите, что центральная частота  $f_0$  удовлетворяет условию отсутствия отражения (задача 5.1.44). Это позволяет в показателе волнового множителя  $A$  выразить  $\sqrt{\epsilon_d} d / c$  через  $f_0$ .

Воспользуйтесь тождеством  $|1 - \dot{v}|^2 = 1 - 2|\dot{v}|\cos\varphi + |\dot{v}|^2$ , где  $\dot{v} = |\dot{v}|\exp(j\varphi)$  — произвольное комплексное число.

Обратите внимание, что уровень отражения по плотности мощности  $\delta$  достигается при  $\epsilon_d \geq \epsilon_{d\min}$ . Чтобы вывести выражение для  $\epsilon_{d\min}$ , предварительно получите формулу для  $|R_{12}|_{\min}$ .

**5.1.49.** См. указания к задаче 5.1.48. Учтите, что полное прохождение ( $K_{пр} = 1$ ) наблюдается на той же частоте  $f_0$ , что и отсутствие отражения ( $R = 0$ ).

**5.1.50.** Воспользуйтесь решением задачи 5.1.44 и 5.1.47. См. указания к задаче 5.1.48.

**5.1.51.** Воспользуйтесь решением задачи 5.1.44. Учтите, что  $e^x \approx 1 + x$ , если  $|x| \ll 1$ .

**5.1.52.** Если  $\epsilon_d$  близка к единице, то для определения коэффициента отражения достаточно учесть волну, отраженную от передней поверхности пластины, и волну, прошедшую через переднюю поверхность, отразившуюся от задней поверхности пластины и прошедшую через переднюю

поверхность в обратном направлении. При этом прохождение и отражение волн на передней и задней поверхностях пластины приближенно рассчитываются по формулам для случая падения волны на границу раздела двух полубесконечных сред. Аналогично определите коэффициент прохождения.

Покажите, что  $T_{12}T_{21} = 1 - R_{12}^2$ . Здесь  $R_{ij}$  и  $T_{ij}$  — коэффициенты отражения и преломления при нормальном падении волны из  $i$ -й среды на границу раздела с  $j$ -й средой (см. также обозначения в ответах к задачам 5.1.43 и 5.1.44).

**5.1.53.** См. указания к задаче 5.1.52. Учтите, что в нашей задаче  $R_{23} = R_{12}$  и  $T_{12}T_{21} = 1 - R_{12}^2$  (проверьте эти соотношения самостоятельно). Воспользуйтесь тождеством  $|1 - \dot{v}|^2 = 1 - 2|\dot{v}|\cos\varphi + |\dot{v}|^2$ , где  $\dot{v} = |\dot{v}|\exp(j\varphi)$  — произвольное комплексное число. При записи  $\exp(-j2\pi n_{\text{сл}}d/\lambda)$  выразите толщину слоя через длину волны зеленого света  $\lambda_0$ .

**5.1.54.** Обратите внимание на то обстоятельство, что вектор Пойнтинга  $\bar{\Pi}_{\text{ср}}$  определяется векторным произведением векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ , каждый из которых следует представить в виде суммы падающей и отраженной волн. Если вы проанализируете среднее значение проекции  $\Pi_{\text{ср}z}$ , то сможете установить, что в среде, характеризующейся ненулевой мнимой частью показателя преломления (например, диэлектрик с потерями или закритическая плазма), величина  $\Pi_{\text{ср}z}$  полного поля не равна алгебраической сумме  $\Pi_{\text{ср}z}$ , взятых в падающей и отраженной волнах по отдельности.

**5.2.2.** Учтите, что  $1/(1+x) \approx 1-x$ , если  $|x| \ll 1$ .

**5.2.3.** Воспользуйтесь приближенным выражением для коэффициента отражения при нормальном падении на реальный металл (задача 5.2.2).

**5.2.14.** Учтите, что поле в металле представляет собой плоскую волну, которая на границе раздела имеет практически только касательные проекции векторов поля  $\dot{H}_{\text{тм}}$  и  $\dot{E}_{\text{тм}} = Z_{\text{см}}\dot{H}_{\text{тм}}$ . При этом коэффициент преломления по электрическому полю  $T = \dot{E}_{\text{тм}}/\dot{E}_{\text{пад}}$ . Решите систему уравнений относительно  $T$  и  $R = \dot{E}_{\text{отр}}/\dot{E}_{\text{пад}}$ , которая получается при записи граничных условий для касательных составляющих векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  на поверхности металла (с уче-



том структуры поля в металле). Учтите малость отношения  $|Z_{\text{см}}|/Z_0$  и воспользуйтесь приближенным соотношением  $(1-x)/(1+x) \approx 1-2x$ , если  $|x| \ll 1$ .

**5.2.15.** См. указания к задаче 5.2.14.

**5.2.16.** Проинтегрируйте среднюю объемную плотность мощности тепловых потерь по координате, изменяющейся в направлении нормали к поверхности металла.

**5.2.17.** Воспользуйтесь законом полного тока в интегральной форме для комплексных амплитуд векторов поля. Рассмотрите прямоугольный контур, одна из сторон которого параллельна вектору  $\vec{H}$  и проходит по поверхности металла; противоположная ей сторона находится в глубине металла, где полем и токами можно пренебречь. Учтите, что в реальном металле следует учитывать только токи проводимости.

**5.2.18.** Выразите комплексную амплитуду полного тока в проводе  $\dot{I}_m$  через  $\dot{E}_{\text{тм}}$ . Для этого, основываясь на локализации объемных токов проводимости в тонком слое у поверхности провода, можно действовать двумя способами: а) проинтегрировать плотность тока проводимости по поперечному сечению проводника, учитывая экспоненциальный закон убывания поля в радиальном направлении при удалении вглубь металла; б) проинтегрировать плотность квазиповерхностного тока (см. задачу 5.2.17) по периметру поперечного сечения провода. Обратите внимание, что в данной задаче касательная составляющая электрического поля по периметру поперечного сечения провода считается неизменной. Учтите, что толщина скин-слоя  $d = 1/\alpha$ , где  $\alpha$  — коэффициент затухания волны в среде.

**5.2.19.** См. задачу 5.2.18.

**5.2.20.** Считайте, что поляризационными токами в реальном металле можно пренебречь.

**5.2.21.** Для определения средней энергии магнитного поля можно интегрирование  $|\dot{H}|^2$  по объему тела свести к интегрированию  $|\dot{H}_{\text{тм}}|^2$  по поверхности проводника. При этом представьте элемент объема в виде  $dV = dS \cdot dn$ , где  $n$  — координата, изменяющаяся в направлении нормали к поверхности тела. Учтите, что при сильном скин-эффекте, в рамках применимости граничных условий

Леонтовича, амплитуда векторов поля экспоненциально убывает по координате  $n$  с коэффициентом затухания  $\alpha = \sqrt{\omega \mu_a \sigma_m} / 2$ .

Второй способ решения данной задачи связан с использованием теоремы Пойнтинга для комплексных мощностей. При этом энергией электрического поля в проводнике можно пренебречь (по сравнению с энергией магнитного поля — см. задачу 5.2.20).

**5.2.22.** Пусть на проводящий слой падает волна из полупространства  $z < 0$ . Запишите напряженности электрического и магнитного полей в области  $z < 0$  и в области  $0 < z < D$  в виде суммы плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Поле в области  $z > D$  представьте в виде прошедшей волны, распространяющейся в сторону увеличения координаты  $z$ . Выразите амплитуды магнитного поля через амплитуды электрического поля соответствующих волн, используя характеристическое сопротивление сред и учитывая направление распространения волн. Запишите граничные условия для касательных составляющих векторов поля на обеих поверхностях листа. Решив полученную систему алгебраических уравнений, определите амплитуду электрического поля для обеих волн в металле при  $z = 0$ . Этот результат позволяет найти распределение напряженности электрического поля внутри листа. Учтите, что для волн в металле  $\alpha \approx \beta$ . Обратите внимание, что, в отличие от данной задачи, на практике, как правило,  $\alpha D \gg 1$  и отраженной волной внутри металла можно пренебречь.

**5.2.23.** Используйте плазменную модель металла (см. справочный материал к 4-й главе, выражение для комплексной диэлектрической проницаемости металла при  $\delta_s = 0$  и  $\delta_n = 1$ ). Считайте, что  $\mu_a = \mu_0$ .

**5.2.24.** См. указания к задаче 5.2.23. Учтите, что в ситуациях, когда амплитуда волны существенно уменьшается на расстоянии, равном толщине пластины, переотраженными волнами внутри пластины можно пренебречь. При этом  $\dot{E}_{\text{пр}} \approx T_1 T_2 \exp(-j(\omega/c)\sqrt{\epsilon}d) \dot{E}_{\text{пад}}$ , где  $\dot{E}_{\text{пад}}$  и  $\dot{E}_{\text{пр}}$  — комплексные амплитуды электрического векто-

ра в падающей волне на поверхности пластины и в прошедшей волне на противоположной поверхности пластины соответственно;  $T_1$  — коэффициент преломления плоской волны при нормальном падении из воздуха (среда 1) на границу раздела с полупространством, заполненным веществом с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon}$  (среда 2);  $T_2$  — коэффициент преломления плоской волны при нормальном падении из среды 2 на границу раздела со средой 1.

**5.2.25.** Чтобы определить  $P_{\text{уд}}$ , предварительно найдите  $\text{Re}(Z_c)$ . Для сверхпроводника  $Z_c$  удобно выразить через нормальную и сверхпроводящую составляющие комплексной удельной проводимости (см. справочный материал к 4-й главе):  $\text{Re}(Z_c) = \text{Re}(\sqrt{j\mu_0\omega/(\sigma_n - j\sigma_s)})$ .

**5.2.26.** Для определения амплитуды электрического вектора для волны, прошедшей пластину, воспользуйтесь указаниями к задаче 5.2.24. Определяйте коэффициент затухания в децибелах:  $\Delta = 20\lg(E_{m\text{ пад}}/E_{m\text{ пр}})$ . Учтите, что при отсутствии сверхпроводящих электронов  $\sqrt{\tilde{\epsilon}} = \sqrt{\sigma_n/(2\epsilon_0\omega)}(1 - j)$ . Для случая, когда металл находится в сверхпроводящем состоянии, используйте плазменную модель металла (см. выражение для комплексной диэлектрической проницаемости металла в справочном материале к 4-й главе). Считайте, что  $\mu_a = \mu_0$ .

**5.2.27.** Введите декартову систему координат, одна из осей которой направлена по нормали к поверхности пластины. Представьте векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перед пластиной и внутри пластин в виде падающей и отраженной волн, а поле за пластиной — в виде прошедшей волны. Запишите граничные условия для касательных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на передней и задней поверхностях пластины. Решите полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд электрического вектора для волны, прошедшей пластину, и для волны, отраженной от пластины. Используйте плазменную модель металла (см. справочный материал к 4-й главе). Считайте, что  $\mu_a = \mu_0$ . Учтите, что для сверхпроводника, в котором отсутствуют нормальные электроны

( $\delta_n = 0$ ), показатель преломления является чисто мнимым:  $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}} = \sqrt{1 - (\omega_{\text{пл}}/\omega)^2} = jn_I$ , где  $n_I = -\sqrt{(\omega_{\text{пл}}/\omega)^2 - 1}$ , так как для частот, на которых наблюдается явление сверхпроводимости ( $f \leq 100$  ГГц), выполняется соотношение  $\omega \ll \omega_{\text{пл}}$ .

**5.2.28.** Воспользуйтесь решением задачи 5.2.27.

**5.3.1.** Запишите электромагнитное поле над проводящей плоскостью в виде суммы падающей и отраженной волн. Комплексные амплитуды вектора  $\vec{H}$  в этих волнах выразите через комплексные амплитуды вектора  $\vec{E}$ . При этом учитывайте направление распространения волн. Связь между  $\vec{E}_{\text{пад}}$  и  $\vec{E}_{\text{отр}}$  на идеально проводящей плоскости определяется из граничных условий электродинамики.

**5.3.2.** См. указание к задаче 5.3.1.

**5.3.4.** Амплитуда тока определяется протяженностью освещенного участка пластины в направлении вектора  $\vec{H}$  падающей волны (вспомните определение вектора плотности поверхностного тока).

**5.3.17.** Сначала, проанализировав комплексную амплитуду плотности поверхностного тока, определите положение плоскости падения и поляризацию падающей волны.

**5.3.19.** Определите коэффициент эллиптичности как отношение большой оси к малой оси эллипса поляризации.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

**6.1.19.** В волноводе с идеально проводящими стенками, заполненном диэлектриком без потерь, продольное волновое число

$$h = \sqrt{\beta^2 - g^2} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\epsilon(f^2 - f_{\text{кр}}^2)}.$$

Если волновод заполнен диэлектриком с потерями, то в этой формуле коэффициент фазы  $\beta$  нужно заменить на комплексное волновое число

$$\beta - j\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(1 - jt\text{g}\delta)}.$$

При этом

$$h = h' - jh'' = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - (f_{\text{кр}}/f)^2} - j \operatorname{tg} \delta.$$

Здесь следует брать значение квадратного корня, расположенное в IV квадранте комплексной плоскости. Действительная часть продольного волнового числа определяет длину волны и фазовую скорость в волноводе;  $h''$  — коэффициент затухания. Таким образом, при наличии потерь в заполняющей среде бегущая волна в волноводе существует как при  $f > f_{\text{кр}}$ , так и при  $f < f_{\text{кр}}$  (в последнем случае затухание волны будет весьма большим).

**6.1.26.** См. указание к задаче 6.1.19.

**6.2.19.** Запишите выражения для составляющих поля плоской электромагнитной волны, падающей под углом  $\varphi$  на идеально проводящую плоскость  $x = 0$  (волна 1), и для волны, падающей под углом  $\varphi$  на идеально проводящую плоскость  $x = a$  (волна 2). Данные волны имеют перпендикулярную поляризацию относительно плоскости падения  $XOZ$ . При этом волна 1 распространяется в сторону увеличения координаты  $z$  и уменьшения координаты  $x$ , а волна 2 — в сторону увеличения координат  $x$  и  $z$ . Определите полное поле обеих волн в области  $0 \leq x \leq a$ , учитывая необходимость выполнения граничного условия для тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}$  в плоскостях  $x = 0$  и  $x = a$ . Сопоставьте полученные выражения с формулами для составляющих поля волны  $H_{10}$ .

**6.2.21.** Получите функцию  $E_m(z)$  — зависимость амплитуды вектора  $\vec{E}$  от координаты  $z$  в стоячей волне, полагая, что идеально проводящая поверхность фланца совмещена с плоскостью  $z = 0$ . Запишите продольное волновое число в виде  $h = h_0 + \Delta h$ , где  $h_0$  — продольное число на частоте  $f_0$ ;  $\Delta h$  — отклонение  $h$  при изменении частоты на  $\Delta f$  относительно  $f_0$ . Разложите зависимость  $E_m(hz_0)$  в степенной ряд в окрестности точки  $hz_0 = h_0z_0 = \pi/2$ . Для определения относительного изменения уровня  $u_d$  учитывайте первые три члена данного степенного ряда.

**6.2.22.** Используйте граничное условие для нормальных составляющих вектора  $\vec{D}$  на поверхности идеального проводника.

**6.2.23.** Предварительно получите выражение для составляющих поля стоячей волны в области  $z < 0$ . Для этого запишите поле в виде суммы падающей и отраженной волн, распространяющихся в сторону увеличения и уменьшения координаты  $z$  соответственно. Используйте граничные условия при  $z = 0$ .

**6.3.3.** При плавном (малом на расстоянии порядка длины волны) изменении поперечного сечения волновода отражением волны можно пренебречь. В этом случае волны высших типов практически не возбуждаются.

**6.3.7–6.3.12.** Погонной мощностью потерь  $P_{\text{пот пог}}$  называют мощность потерь в отрезке волновода, имеющем единичную длину. При определении  $P_{\text{пот пог}}$  полагают, что амплитуда составляющих поля волны не меняется вдоль оси волновода. Зная  $P_{\text{пот пог}}$ , можно найти мощность потерь в отрезке волновода длиной  $\Delta z$ :  $P_{\text{пот}} = P_{\text{пот пог}} \Delta z$ , если  $2h'' \Delta z = (P_{\text{пот пог}} \Delta z / P) \ll 1$ , где  $h''$  — коэффициент затухания;  $P$  — переносимая по волноводу мощность.

**6.3.22.** Определите коэффициент полезного действия как отношение переносимой мощности на выходе отрезка волновода к мощности на входе этого отрезка.

**6.3.35–6.3.38.** См. указание к задачам 6.3.7–6.3.12.

**6.4.6.** Разложите зависимость времени прохождения (радиосигнала по волноводу) от частоты в степенной ряд в окрестности несущей частоты  $f_0$ . Запишите приращение времени прохождения с учетом первых двух членов данного ряда.

**6.4.8.** Если несущая частота узкополосного радиосигнала близка к критической частоте для данной волны в волноводе, то время прохождения радиосигнала по волноводу  $\tau_{\text{п}}$  сильно зависит от диэлектрической проницаемости заполняющей среды  $\varepsilon$ . Это позволяет определить  $\varepsilon$  по изменению  $\tau_{\text{п}}$  при изменении несущей частоты.

**6.4.15.** Практическая ширина спектра прямоугольного радиоимпульса может быть приближенно определена как ширина центрального лепестка спектральной диаграммы. При этом частоты крайних узкополосных групп в спектре сигнала определяются границами центрального

лепестка:  $f_{1,2} = f_0 \pm 1/\tau_{\text{и}}$ . Представьте время прохождения на частотах  $f_1$  и  $f_2$  в виде степенного ряда в окрестности частоты  $f_0$  и учтите первые два члена ряда, имея в виду, что  $f_0\tau_{\text{и}} \gg 1$ .

**6.4.16–6.4.17.** См. задачу 6.4.15.

**6.4.18.** При определении фазового сдвига на несущей частоте отбрасывайте целое число периодов  $2\pi$ .

**6.4.27–6.4.28.** См. задачу 6.4.15.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

**7.1.35.** Учтите, что при заполнении резонатора диэлектриком добротность изменится не только за счет потерь в диэлектрике, но и в результате изменения мощности потерь в стенках резонатора.

**7.1.37.** При определении добротности нагруженного резонатора средняя мощность потерь  $P_{\text{ср пот}} = P_{\text{ср пот м}} + P_{\text{ср н}}$ , где  $P_{\text{ср пот м}}$  — средняя мощность тепловых потерь в стенках металла;  $P_{\text{ср н}}$  — средняя мощность, отдаваемая резонатором в нагрузку (в общем случае нужно также учитывать мощность потерь в диэлектрике, заполняющем резонатор).

**7.1.39.** Максимальная энергия электрического поля в резонаторе  $W_{\text{макс э}} = (\epsilon_a/2) \int |\vec{E}|^2 dV$ . С другой стороны, в эквивалентном колебательном контуре с емкостью  $C_{\text{эkv}}$  и индуктивностью  $L_{\text{эkv}}$   $W_{\text{макс э}} = Q_m^2/(2C_{\text{эkv}})$ , где  $Q_m$  — амплитуда колебаний заряда. Для определения  $Q_m$  в резонаторе воспользуйтесь граничным условием на поверхности идеального металла:  $\epsilon_a \dot{E}_{n_{\perp}} = \dot{\sigma}_{\text{пов}}$ ; здесь  $\dot{E}_n$  — нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$ ;  $\dot{\sigma}_{\text{пов}}$  — плотность поверхностного заряда. Эквивалентная индуктивность  $L_{\text{эkv}}$  может быть определена при известной величине  $C_{\text{эkv}}$  из условия резонанса на частоте  $f_{\text{рез}}$  для заданного типа колебания в резонаторе.

**7.2.9.** Воспользуйтесь выражением для относительной диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы. (См. справочный материал к главе 4.)

**7.2.16.** При записи выражения для максимальной амплитуды электрического поля учтите, что  $J_1(x) \approx x/2$ ,

если  $|x| \ll 1$ . Учтите, что на боковой поверхности стенок (при  $r = r_0$ ),  $J_1(gr_0) = J_1(\mu_{11}) = 0,5819$ .

**7.2.25.** Рассмотрите два предельных случая: 1)  $l \ll r_0$ ; 2)  $l \gg r_0$ . Учтите, что в 1-м случае резонансная частота колебания  $E_{011}$  существенно больше резонансной частоты колебания  $E_{010}$ ; во 2-м случае резонансные частоты практически совпадают. Обратите внимание, что при  $l \rightarrow \infty$  длина резонатора перестает влиять на добротность. Объясните эту особенность. Покажите, что

$$\frac{Q_{011}}{Q_{010}} = \sqrt[4]{1 + \left( \frac{r_0 \pi}{lv_{01}} \right)^2} \frac{1 + l/r_0}{2 + l/r_0}.$$

Рассмотрите характерную точку  $l_x = 0,5056r_0$ . Убедитесь, что  $Q_{011} > Q_{010}$  при  $l < l_x$  и  $Q_{011} < Q_{010}$  в случае, когда  $l > l_x$ .

**7.2.26.** Для поддержания незатухающих колебаний к резонатору от генератора СВЧ должна подводиться мощность, равная мощности потерь. Если генератор выключить, то запасенная в резонаторе энергия убывает во времени по закону  $\exp(-2\alpha t)$ , где  $\alpha = \omega_{\text{рез}}/(2Q)$ . При этом, в соответствии с законом сохранения энергии, сумма запасенной и потерянной энергии для любого момента времени является постоянной величиной, равной энергии, накопленной в резонаторе при  $t = 0$ .

**7.2.28.** В объемном резонаторе, так же, как и в колебательном контуре, амплитуда свободных колебаний уменьшается во времени по закону  $\exp(-\alpha t)$ , где  $\alpha = \omega_{\text{рез}}/(2Q)$ ,  $Q$  — добротность.

**7.2.29.** См. указание к задаче 7.1.37. Учтите, что общая средняя мощность потерь определяется нагруженной добротностью резонатора, а средняя мощность потерь в металле — собственной добротностью резонатора, учитывающей тепловые потери в стенках. Нагруженная добротность на практике определяется через резонансную частоту и полосу пропускания устройства.

**7.2.30.** См. указания к задаче 7.2.29.

**7.2.31.** См. указания к задаче 7.1.39.



## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

**8.1.13.** Электрический момент зарядов  $q$  и  $-q$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга, определяется как  $ql$ . В случае зарядов, изменяющихся во времени по гармоническому закону,  $\dot{p}_s = \dot{q}l$ , где  $\dot{q}$  — комплексная амплитуда колебаний заряда. Для решения данной задачи удобно воспользоваться законом непрерывности полного тока:

$$\oint_S (\dot{\vec{J}}_s + \dot{\vec{J}}_{\text{см}}) d\vec{S} = 0$$

для любой замкнутой поверхности ( $\dot{\vec{J}}_s$  и  $\dot{\vec{J}}_{\text{см}}$  — векторы плотности электрического тока и тока смещения). Рассмотрите замкнутую поверхность, окружающую торцевую поверхность проводника. Учтите, что плотность поверхностного заряда на границе идеального проводника равна нормальной составляющей вектора электрического смещения  $\vec{D}$ .

**8.1.16.** При определении расстояния от излучателя до точки наблюдения воспользуйтесь приближенным соотношением  $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \alpha/2$  при  $|\alpha| \ll 1$ .

**8.1.18–8.1.19.** Рассматривайте нормированную диаграмму направленности  $F$ , т. е. зависимость от угла наблюдения для амплитуды напряженности поля в дальней зоне, отнесенной к максимальной амплитуде напряженности поля. При этом расстояние от центра излучающей системы до точки наблюдения остается неизменным:  $r = \text{const}$ .

Учтите, что радиус-векторы, соединяющие вибраторы с точкой наблюдения в дальней зоне, можно считать параллельными.

**8.1.20.** Нормированная диаграмма направленности антенны по мощности  $F_{\Pi}$  представляет собой зависимость от угла наблюдения для плотности мощности в дальней зоне, отнесенной к максимальной плотности мощности.

При определении составляющих вектора  $\vec{E}$  в дальней зоне для произвольной точки пространства можно действовать следующим образом. Удобно воспользоваться тем обстоятельством, что излучатель с током  $\dot{I}$  эквивалентен двум излучателям с токами  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , удовлетворяющим

равенству  $\dot{\vec{I}} = \dot{\vec{I}}_1 + \dot{\vec{I}}_2$ , где учитываются направления токов в пространстве. В плоскости  $XOY$  введите оси  $x', y'$ , повернутые относительно осей  $x, y$  на угол  $\varphi$ . Спроектируйте токи  $\dot{I}_x \vec{1}_x$  и  $\dot{I}_y \vec{1}_y$  на оси  $x', y'$  и найдите составляющие электрического поля  $\vec{E}_\theta, \vec{E}_\varphi$  от проекций  $\dot{I}_{x'}$  и  $\dot{I}_{y'}$ .

**8.1.21.** Считайте для определенности, что плоскость рамки совмещена с плоскостью  $XOZ$ , а ток в электрическом излучателе ориентирован вдоль оси  $x$ . Введите сферическую систему координат, в которой угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $z$ .

См. также указание к задаче 8.1.18.

**8.1.22–8.1.23.** В соответствии с методом зеркального изображения, поле в верхнем пространстве не изменится, если удалить проводящую плоскость и в зеркальной точке (симметричной относительно точки расположения вибратора) поместить идентичный излучатель с током, равным по амплитуде току в исходном излучателе. При этом направление тока должно быть таким, чтобы в плоскости симметрии выполнялись граничные условия для составляющих поля на поверхности идеального проводника.

**8.1.24.** См. задачу 8.1.22. Учтите, что для электрического излучателя по определению  $R_\Sigma = 2P_\Sigma / I_\Sigma^2$ . Излучаемая мощность  $P_\Sigma$  в нашем случае отличается от  $P_\Sigma$  для одиночного вибратора в свободном пространстве по следующим причинам: а) изменяется амплитуда поля в дальней зоне за счет зеркального излучателя; б) мощность излучается только в верхнее полупространство.

**8.1.25.** См. задачу 8.1.14 и указание к задаче 8.1.24.

**8.1.26.** Воспользуйтесь методом зеркального изображения (см. указание к задаче 8.1.22).

**8.1.27–8.1.28.** Воспользуйтесь методом зеркального изображения (см. указание к задаче 8.1.22). Учтите, что радиус-векторы, соединяющие основной и зеркальный излучатели с точкой наблюдения в дальней зоне, можно считать параллельными.

**8.1.29.** Используйте сферическую систему координат, в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) расположите рамку, центр которой совместите с точкой начала координат. Воспользуйтесь известным решением неоднородного урав-

нения Гельмгольца для электрического векторного потенциала  $\bar{A}_0$  в вакууме.

Убедитесь, что векторный электрический потенциал имеет только проекцию  $A_{\varphi 0}$ . Для этого в качестве примера рассмотрите потенциал в плоскости  $\varphi = 0$ , обусловленный двумя элементами тока  $\dot{I}_p r_0 d\varphi'$ , направленными по касательной к рамке и расположенными симметрично относительно плоскости  $\varphi = 0$  ( $\varphi'$  — угловая координата элемента тока на рамке).

Считайте, что лучи, соединяющие элементы тока на рамке с точкой наблюдения в дальней зоне, параллельны радиус-вектору точки наблюдения  $\bar{r}$  (т. е. лучу, соединяющему центр рамки с этой точкой). При этом расстояние от элемента тока до точки наблюдения  $R \approx r - \bar{R}'(\bar{r}/r)$ , где  $\bar{R}'(\bar{r}/r)$  — проекция радиус-вектора элемента тока  $\bar{R}' = \bar{I}_x r_0 \cos(\varphi') + \bar{I}_y r_0 \sin(\varphi')$  на направление  $\bar{r}$ .

Учтите, что  $\exp(j\beta \bar{R}'(\bar{r}/r)) \approx 1 + j\beta \bar{R}'(\bar{r}/r)$ , так как  $\beta r_0 = 2\pi(r_0/\lambda_0) \ll 1$ .

**8.1.30.** Под действием солнечного излучения молекулы воздуха приобретают переменный во времени дипольный момент. Поскольку электромагнитные солнечные волны являются поперечными, то колебания дипольных моментов происходят в плоскости, перпендикулярной направлению на Солнце (вектор  $\bar{BA}$ ). Эти колебания можно представить как суперпозицию движений в двух взаимно перпендикулярных направлениях, например в направлениях векторов  $\bar{I}_n$  и  $[\bar{I}_n \bar{BA}]$ . Колеблющиеся в данных направлениях дипольные моменты рассматривайте как элементарные излучатели, создающие рассеянные волны в точке наблюдения.

**8.2.1.** Подставьте формулу для  $\bar{A}_0$  в уравнение Гельмгольца для векторного потенциала и учтите, что в уравнении Гельмгольца дифференцирование осуществляется по пространственным координатам точки наблюдения. Воспользуйтесь тем обстоятельством, что функция Грина неограниченного однородного пространства —

$$G = -\exp \frac{-j\beta |\bar{r} - \bar{r}'|}{4\pi |\bar{r} - \bar{r}'|}$$

— является решением скалярного уравнения Гельмгольца для точечного источника:  $\nabla^2 G + \beta^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ .

**8.2.2.** Подставьте формулу для  $A_z$  в неоднородное волновое уравнение и учтите, что в волновом уравнении дифференцирование осуществляется по пространственным координатам точки наблюдения. Рассмотрите функцию Грина неограниченного однородного пространства для стационарного точечного источника:  $G = -1/(4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|)$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения;  $\vec{r}'$  — радиус-вектор точечного источника. Докажите (используя, например, декартовы координаты), что

$$\nabla^2(G\bar{J}_{\text{ст}}(\xi)) = (\nabla^2 G)\bar{J}_{\text{ст}}(\xi) + (G/c^2)(\partial\bar{J}_{\text{ст}}^2(\xi)/\partial t^2),$$

где  $\xi = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ . Учтите, что функция Грина  $G$  удовлетворяет уравнению Пуассона для стационарного точечного источника:  $\nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ .

**8.2.3.** Воспользуйтесь подходящим для данной ситуации тождеством векторного анализа и законом сохранения заряда в дифференциальной форме. Рассматривайте случай гармонических колебаний.

**8.2.4.** Рассмотрите для простоты случай, когда центр излучателя совмещен с началом координат, и ток направлен вдоль оси  $z$ . Пусть радиус-вектор, соединяющий центр излучателя с точкой наблюдения, имеет длину  $R$  и ориентирован под углом  $\theta$  относительно оси  $z$ . Тогда расстояние  $r$  от точки наблюдения до текущей точки на излучателе с координатой  $z'$  ( $x' = y' = 0$ ) является функцией  $z'$  для данных  $R$  и  $\theta$ . Разложите эту функцию в степенной ряд в окрестности точки  $z' = 0$  и учтите три первых члена этого ряда. Убедитесь, что фазовый набег  $\varphi_{\text{п}}$  определяется первыми двумя членами этого ряда.

**8.2.5.** Воспользуйтесь решением неоднородного уравнения Гельмгольца для электрического векторного потенциала. Учтите, что лучи, соединяющие точки области  $S_0$  с точкой наблюдения в дальней зоне, можно считать параллельными (см. предыдущую задачу). При этом расстояние от точки наблюдения до текущей точки области  $S_0$  можно представить в виде  $R = r - \bar{R}'(\bar{r}/r)$ , где  $\bar{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения;  $\bar{R}'$  — радиус-вектор теку-

щей точки области  $S_0$ ;  $\bar{R}'(\bar{r}/r)$  — проекция  $\bar{R}'$  на направление единичного вектора  $\bar{1}_r = \bar{r}/r$ .

Для того, чтобы найти скалярное произведение  $\bar{R}'\bar{1}_r$ , выразите векторы  $\bar{R}'$  и  $\bar{1}_r$  через их проекции в декартовой системе координат. Учтите, что при интегрировании по области, занимаемой сторонними токами, амплитудный множитель  $1/R$  в дальней зоне можно считать постоянным:  $1/R \approx 1/r$ .

**8.2.6.** Воспользуйтесь выражением, связывающим вектор  $\dot{H}$  с электрическим векторным потенциалом. Учтите, что составляющими поля, которые убывают с расстоянием быстрее, чем  $1/r$ , в дальней зоне можно пренебречь. Вектор  $\dot{E}$  определите через вектор  $\dot{H}$  с помощью первого уравнения Максвелла.

**8.2.7.** Определите проекции векторного электрического потенциала в сферической системе координат для дальней зоны излучателя (см. указания к задаче 8.2.5). Воспользуйтесь решением задачи 8.2.6.

**8.2.8.** См. задачу 8.2.7.

**8.2.9.** Касательные составляющие векторов поля на поверхности раскрыва можно рассматривать как эквивалентные электрический и магнитный сторонние токи с поверхностными плотностями

$$\dot{J}_{\text{пов } \mathfrak{A}} = [\bar{1}_n \dot{H}|_{z=0}]; \quad \dot{J}_{\text{пов } \mathfrak{M}} = [\dot{E}|_{z=0} \bar{1}_n],$$

где  $\bar{1}_n$  — единичный вектор внешней нормали к плоскости раскрыва, который направлен в сторону полупространства, содержащего точку наблюдения (в нашем случае  $\bar{1}_n = \bar{1}_z$ ). Поверхностный ток  $\dot{J}_{\text{пов } \mathfrak{A}}$  возбуждает в полупространстве  $z > 0$  электрический векторный потенциал  $\dot{A}_{\mathfrak{A}}$  (см. задачу 8.2.5), а ток  $\dot{J}_{\text{пов } \mathfrak{M}}$  является источником магнитного векторного потенциала, который определяется аналогично (в решении задачи 8.2.5 нужно заменить  $\dot{J}_{\text{пов } \mathfrak{A}}$  на  $\dot{J}_{\text{пов } \mathfrak{M}}$ ). Определите в дальней зоне декартовы проекции потенциалов  $\dot{A}_{\mathfrak{A}}$  и  $\dot{A}_{\mathfrak{M}}$  и перейдите к их сферическим проекциям.

Учтите, что составляющие поля в дальней зоне связаны с потенциалами  $\dot{A}_{\mathfrak{A}}$  и  $\dot{A}_{\mathfrak{M}}$  следующими соотношениями (см. задачу 8.2.6):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}} &= -j\omega \left[ \left( \dot{A}_{\text{э}\theta} + \frac{\dot{A}_{\text{м}\varphi}}{Z_c} \right) \vec{1}_\theta + \left( \dot{A}_{\text{э}\varphi} - \frac{\dot{A}_{\text{м}\theta}}{Z_c} \right) \vec{1}_\varphi \right]; \\ \dot{\vec{H}} &= \frac{-\dot{E}_\varphi \vec{1}_\theta + \dot{E}_\theta \vec{1}_\varphi}{Z_c}.\end{aligned}$$

**8.2.10.** Воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

**8.2.12.** Найдите плотности эквивалентных поверхностных токов  $\dot{\vec{J}}_{\text{пов з}}$  и  $\dot{\vec{J}}_{\text{пов м}}$  в соответствии с указаниями к задаче 8.2.9. Учтите, что амплитуда тока в каждом из эквивалентных диполей  $\dot{I} = \dot{J}_{\text{пов}} \Delta d$ , где  $\Delta d$  — размер элемента Гюйгенса ( $\Delta x$  или  $\Delta y$ ) в направлении, перпендикулярном вектору  $\vec{J}_{\text{пов}}$ .

**8.2.13–8.2.14.** Сначала определите в дальней зоне магнитный векторный потенциал, возбуждаемый эквивалентным поверхностным магнитным током (см. указание к задаче 8.2.9).

**8.2.15–8.2.16.** Воспользуйтесь известным решением задачи о падении плоской электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость. Возникающий при этом поверхностный электрический ток, во-первых, является источником отраженной волны, и, во-вторых, возбуждает в пространстве за проводящей плоскостью волну, которая «гасит» падающую волну (суммарное поле за идеально проводящей плоскостью равно нулю).

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

**9.1.2–9.1.3.** Параметры зависимости электронной концентрации от высоты оцените, пользуясь графиками в книге С. И. Баскакова на стр. 288.

**9.1.4–9.1.7.** Учтите, при численном решении дифференциальных уравнений в MathCad каждое уравнение для комплексных амплитуд должно быть представлено как два уравнения — соответственно для действительных и мнимых частей **всех членов** исходного уравнения.

**9.1.11.** При расчете используйте амплитуду колебаний вектора  $\vec{H}$  на поверхности металла.

**9.1.18.** См. указание к задаче 9.1.4.

**9.1.22.** При анализе представьте однотоновый АМ-сигнал как сумму несущего и двух боковых колебаний (см. книгу С. И. Баскакова по РЦС, тема 4.1 «Сигналы с амплитудной модуляцией»). Учтите, что огибающую АМ-сигнала можно определить как длину суммы векторов, отображающих эти колебания на комплексной плоскости, в которой ось отсчета углов вращается вокруг начала координат с угловой скоростью  $2\pi f_0$ .

**9.1.23.** С помощью БПФ **огибающую** исходного радиоимпульса представьте как набор гармонических составляющих (функция FFT в MathCad). Определите гармонические составляющие **огибающей** прошедшего трассу радиоимпульса, добавив фазовые сдвиги этих составляющих **относительно несущего колебания** при прохождении через ионизированную среду. С помощью обратного БПФ (функция IFFT в MathCad) рассчитайте и постройте **огибающую** прошедшего трассу радиоимпульса. Учтите, интервал наблюдения должен быть примерно на порядок больше длительности импульса, а в пределах импульса должно располагаться достаточно большое число отсчетов огибающей (порядка 10 или более).

**9.2.3.** Рассматривайте коэффициент эллиптичности как отношение амплитуды параллельно поляризованной компоненты вектора  $\vec{E}$  к амплитуде перпендикулярно поляризованной компоненты.

**9.2.14–9.2.17.** При решении используйте ответ к задаче 5.1.43.

**9.2.18.** При решении используйте ответ к задаче 5.1.43. Обратите внимание, что в области  $f < f_{\text{пл}}$  относительная диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна, нужно использовать верный знак при извлечении квадратного корня из  $\epsilon$  и учитывать комплексность парциальных коэффициентов отражения.

**9.2.19.** При решении используйте ответ к задаче 5.1.43 из задачника. Учтите, что для среды с потерями следует использовать комплексную относительную диэлектрическую проницаемость:  $\tilde{\epsilon} = \epsilon(1 - j\text{tg}\delta) = \epsilon\sqrt{1 + \text{tg}^2\delta} \exp(-j\delta)$  и  $\sqrt{\tilde{\epsilon}} = \sqrt{\epsilon}\sqrt[4]{1 + \text{tg}^2\delta} \exp(-j\delta/2)$ .

**9.3.5–9.3.6.** Рассматривайте коэффициент эллиптичности как отношение продольной (вдоль оси волновода) к поперечной полуоси эллипса поляризации вектора поля.

**9.3.9–9.3.10.** Учтите, что при записи отраженной волны должны использоваться другой амплитудный коэффициент и противоположный знак перед продольным волновым числом  $h$ . Для определения амплитудного коэффициента в отраженной волне следует применить граничные условия для тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}$  (суммарного поля падающей и отраженной волн) на поверхности поперечной стенки.

**9.3.22–9.3.23.** Поле в волноводе представляет суперпозицию падающей и отраженной волн. Учтите, что при записи отраженной волны должны использоваться другой амплитудный коэффициент и противоположный знак перед продольным волновым числом  $h$ . Для определения амплитудного коэффициента в отраженной волне следует применить граничные условия для тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}$  (суммарного поля падающей и отраженной волн) на поверхности фланца.

**9.3.24–9.3.25.** Параметр «степень распыливания» определен в условии задачи 6.4.15.

**9.3.26.** С помощью БПФ **огibaющую** исходного радиоимпульса представьте как набор гармонических составляющих (функция FFT в MathCad). Определите гармонические составляющие **огibaющей** прошедшего тракт радиоимпульса, добавив фазовые сдвиги этих составляющих **относительно несущего колебания** при прохождении по волноводу. С помощью обратного БПФ (функция IFFT в MathCad) рассчитайте и постройте **огibaющую** прошедшего тракт радиоимпульса. Учтите, что интервал наблюдения должен быть примерно на порядок больше длительности импульса, а в пределах импульса должно располагаться достаточно большое число отсчетов **огibaющей** (порядка 10–20).



# ОТВЕТЫ

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

1.1.1. 1. а) 0; б) 32. 2. а) 20; б) 0. 3. а) 0; б) 8. 4. а)  $-1,5803$ ; б) 0. 5. а)  $-10\pi$ ; б) 0.

1.1.2. 1. а)  $\pi$ ; б) 0. 2. а) 0; б) 12,74. 3. а)  $-2,197$ ; б) 0. 4. а) 0; б) 5,545. 5. а) 6,108; б) 0.

1.1.3. 1. а) 0; б) 9,839. 2. а) 0,9163; б) 0. 3. а) 0,5; б) 0. 4. а)  $-3$ ; б) 0. 5. а) 0; б) 1,5.

1.1.4. 1. Поле  $\vec{A}$  является и соленоидальным и потенциальным.

2. Поле  $\vec{A}$  соленоидально и не является потенциальным.

3. Поле  $\vec{A}$  соленоидально и не является потенциальным.

4. Поле  $\vec{A}$  потенциально и не является соленоидальным.

1.1.5.  $f(r) = C/r$ , где  $C$  — константа.

1.1.6.  $f(r) = C/r^2$ , где  $C$  — константа.

1.1.7. 1.  $\text{grad} U = 2x \sin(2y) \vec{1}_x + 2x^2 \cos(2y) \vec{1}_y$ ;

$$\nabla^2 \varphi = 2(1 - 2x^2) \sin(2y).$$

$$2. \text{grad} U = \frac{1}{r} \sin(\varphi) \vec{1}_r + \frac{\ln(r)}{r} \cos(\varphi) \vec{1}_\varphi; \quad \nabla^2 U = -\frac{\ln(r)}{r^3} \sin(\varphi).$$

$$3. \text{grad} U = -\frac{(1 + jkr) \exp(-jkr)}{r^2} \vec{1}_r; \quad \nabla^2 U = -k^2 \frac{\exp(-jkr)}{r}.$$

1.1.8. 1.  $\text{div} \vec{A} = 2y^2$ ;  $\text{rot} \vec{A} = -2z \vec{1}_x - 4xy \vec{1}_z$ .

2.  $\text{div} \vec{A} = 0$ ;  $\text{rot} \vec{A} = 10 \cos(2x) \vec{1}_z$ .

1.1.9. 1.  $\text{div} \vec{A} = (10/r) \cos(z)$ ;  $\text{rot} \vec{A} = (10/r^2) \sin(z) \vec{1}_\varphi$ .

2.  $\text{div} \vec{A} = (2/r^3) \cos(\varphi)$ ;  $\text{rot} \vec{A} = -(2/r^3) \sin(\varphi) \vec{1}_z$ .

1.1.10. 1.  $\text{div} \vec{A} = -5/r^4$ ;  $\text{rot} \vec{A} = 0$ .

2.  $\text{div} \vec{A} = 0$ ;  $\text{rot} \vec{A} = [(2 \cos(\theta)/r) \vec{1}_r + jk \sin(\theta) \vec{1}_\theta] \exp(-jkr)/r$ .

1.1.11.  $\text{div}[\vec{A}\vec{B}] = 2 \sin(x) \cos(x)$ .

1.1.12.  $\text{rot}[\vec{A} \text{grad}(\varphi)] = -20x^2 \vec{1}_x + 40xy \vec{1}_y$ .

1.1.13.  $\text{div}[\vec{A} \text{grad}(U)] = -6 \sin(\varphi) \exp(-3r)/r$ .

1.1.14.  $\text{grad}(\text{div} \vec{A}) = -(2 \sin(\theta)/r^3) \vec{1}_r + (\cos(\theta)/r^3) \vec{1}_\theta$ .

1.1.15.  $\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = [(-jk \cos(\theta)/r) \vec{1}_r + k^2 \sin(\theta) \vec{1}_\theta] \exp(-jkr)/r$ .

## ГЛАВА ВТОРАЯ

$$2.1.1. \bar{E}_A = -90 \bar{1}_x \text{ В/м}; \quad \bar{E}_B = 190 \bar{1}_x \text{ В/м}.$$

$$2.1.2. \bar{E}_A = 95,46 \bar{1}_y \text{ В/м}; \quad \bar{E}_B = 24,15 \bar{1}_x + 147,07 \bar{1}_y \text{ В/м}.$$

$$2.1.3. \bar{E} = 0,5655 \text{sign}(z) \bar{1}_z \text{ В/м}; \quad \bar{D} = 0,005 \text{sign}(z) \bar{1}_z \text{ нКл/м}^2.$$

2.1.4

$$\bar{E} = \begin{cases} 0, & |z| \leq 0,5 \text{ м}; \\ 5,655 \text{sign}(z) \bar{1}_z \text{ В/м}, & |z| > 0,5 \text{ м}; \end{cases}$$

$$\bar{D} = \begin{cases} 0, & |z| \leq 0,5 \text{ м}; \\ 0,05 \text{sign}(z) \bar{1}_z \text{ нКл/м}^2, & |z| > 0,5 \text{ м}. \end{cases}$$

2.1.5

$$\bar{E} = \begin{cases} 0, & z < 0, \quad z > 1 \text{ м}; \\ 22,62 \bar{1}_z \text{ В/м}, & 0 \leq z \leq 1 \text{ м}; \end{cases}$$

$$\bar{D} = \begin{cases} 0, & z < 0, \quad z > 1 \text{ м}; \\ 0,2 \bar{1}_z \text{ нКл/м}^2, & 0 \leq z \leq 1 \text{ м}. \end{cases}$$

$$2.1.6. \sigma_{\text{пов}} = 1,768 \text{ нКл/м}^2.$$

$$2.1.7. E_1 = 22,62 \text{ кВ/м}; \quad E_2 = 15,08 \text{ кВ/м}; \quad U = 120,6 \text{ В}.$$

$$2.1.8. W_3 = 60,32 \text{ нДж}.$$

$$2.1.9. C = \varepsilon_0 S \sqrt{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}; \quad C = 8,289 \text{ пФ}.$$

$$2.1.10. \bar{E} = \begin{cases} (\rho_0 z / \varepsilon_0) \bar{1}_z, & |z| \leq d/2; \\ \rho_0 d / (2\varepsilon_0) \text{sign}(z) \bar{1}_z, & |z| > d/2. \end{cases}$$

$$2.1.11. \bar{E} = 0,9 \bar{1}_r \text{ В/м}.$$

$$2.1.12. \bar{E} = 5,655 \bar{1}_r \text{ В/м}.$$

$$2.1.13. E_r = 226,2/r \text{ В/м}; \quad \varphi = 226,2 \ln(4/r) \text{ В}; \quad 2 \leq r \leq 4 \text{ см}.$$

$$2.1.14. C_{\text{пор}} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0/\ln(b/a).$$

$$2.1.15. C_{\text{пор}} = 2\pi\varepsilon_0[\ln(c/a)/\varepsilon_1 + \ln(b/c)/\varepsilon_2]^{-1}.$$

$$2.1.16. E_z = E_\varphi = 0; \quad E_r = \begin{cases} \rho_0 r / (2\varepsilon_{a1}), & 0 \leq r \leq r_0; \\ \rho_0 r_0^2 / (2\varepsilon_{a2} r), & r > r_0. \end{cases}$$

$$2.1.17. E_z = E_\varphi = 0; \quad E_r = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < a; \\ \rho_0 (r^2 - a^2) / (2\varepsilon_0 r), & a \leq r < b; \\ \rho_0 (b^2 - a^2) / (2\varepsilon_0 r), & b \leq r. \end{cases}$$

$$2.1.18. \sigma = 1,768 \text{ нКл/м}^2.$$

$$2.1.19. E_r = 4,50/r^2 \text{ В/м}; \quad \varphi = (4,5/r) - 225 \text{ В}.$$

$$2.1.20. W_3 = 56,25 \text{ нДж}.$$

$$2.1.21. C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0/(1/a - 1/b).$$

$$2.1.22. C = 4\pi\varepsilon_0/[(c-a)/(\varepsilon_1 ac) + (b-c)/(\varepsilon_2 bc)].$$

$$2.1.23. \bar{E} = E_r \bar{1}_r; \quad E_r = \begin{cases} \rho_0 r / (3\varepsilon_0), & 0 \leq r \leq a; \\ \rho_0 a^3 / (3\varepsilon_0 r^2), & r > a. \end{cases}$$

$$2.1.24. \bar{E} = E_r \bar{1}_r; \quad E_r = \begin{cases} \rho_0 r^2 / (4\varepsilon_0 a), & 0 \leq r \leq a; \\ \rho_0 a^3 / (4\varepsilon_0 r^2), & r > a. \end{cases}$$

$$2.1.25. E_\theta = E_\varphi = 0; \quad E_r = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq a; \\ \rho_0 (r^3 - a^3) / (3\varepsilon_0 r^2), & a < r \leq b; \\ \rho_0 (b^3 - a^3) / (3\varepsilon_0 r^2), & r > b. \end{cases}$$

$$2.2.1. \bar{H} = (J_0 / 2) \text{sign}(x) \bar{1}_y.$$

$$2.2.2. \bar{H} = \begin{cases} 0, & x < d; \\ -J_0 \text{sign}(x) \bar{1}_z, & x \leq 0, \quad x \geq d. \end{cases}$$

$$2.2.3. \bar{H} = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad x > d; \\ -J_0 \bar{1}_z, & 0 \leq x \leq d. \end{cases}$$

$$2.2.4. \bar{H} = \begin{cases} J_0 x \bar{1}_y, & |x| \leq d/2; \\ (J_0 d/2) \text{sign}(x) \bar{1}_y, & |x| > d/2. \end{cases}$$

$$2.2.5. J_0 = 0,01 \text{ A/mm}^2.$$

$$2.2.6. \bar{H} = \begin{cases} J_0 r / 2 \bar{1}_\varphi, & 0 \leq r \leq a; \\ J_0 a^2 / (2r) \bar{1}_\varphi, & r > a. \end{cases}$$

$$2.2.7. \bar{H} = \begin{cases} J_0 r^2 / (3a) \bar{1}_\varphi, & 0 \leq r \leq a; \\ J_0 a^2 / (3r) \bar{1}_\varphi, & r > a. \end{cases}$$

$$2.2.8. \bar{H} = \begin{cases} J_0 r^3 / (4a^2) \bar{1}_\varphi, & 0 \leq r \leq a; \\ J_0 a^2 / (4r) \bar{1}_\varphi, & r > a. \end{cases}$$

$$2.2.9. \quad \bar{H} = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq a; \\ J_0 (r^2 - a^2) / (2r) \bar{1}_\varphi, & a < r \leq b; \\ J_0 (b^2 - a^2) / (2r) \bar{1}_\varphi, & r > b. \end{cases}$$

$$2.2.10. H_{\phi} = 12,5/r \text{ мА/м}; H_z = H_r = 0.$$

$$2.2.11. L_{\text{пор}} = \mu\mu_0 \ln(b/a)/(2\pi).$$

$$2.2.12. B_{\min} = 8,333 \text{ мТл}; B_{\max} = 16,67 \text{ мТл}.$$

$$2.2.13. W_{\text{м}} = 1,04 \text{ мкДж}.$$

$$2.2.14. L = \mu\mu_0 N^2 h \ln(b/a)/(2\pi).$$

### ГЛАВА ТРЕТЬЯ

$$3.1.1. \vec{E}(t_1) = 0,2 \vec{1}_x \text{ В/м}; \vec{E}(t_2) = -0,2 \vec{1}_y \text{ В/м}.$$

$$3.1.2. \dot{\vec{H}} = 5,0 \cos(4\pi 10^9 t + 0,9553) \vec{1}_x + \\ + 8,66 \cos(4\pi 10^9 t + 0,9553) \vec{1}_z \text{ мА/м}.$$

$$3.1.3. \vec{E}(t) = 5 \cos(2\pi 10^8 t - \pi/4) \vec{1}_y - 5 \sin(2\pi 10^8 t - \pi/4) \vec{1}_z \text{ мВ/м}; \\ \dot{\vec{E}} = 5(\vec{1}_y + j \vec{1}_z) \exp(-j\pi/4) \text{ мВ/м}.$$

$$3.1.4. \dot{\vec{J}}_{\text{см}} = 0,0694(j \vec{1}_x + \vec{1}_y) \text{ А/м}^2; \dot{\vec{J}}_{\text{пр}} = 0,075(\vec{1}_x - j \vec{1}_y) \text{ А/м}^2.$$

$$3.1.5. \dot{\vec{J}}_{\text{пр}} = 0,23 \exp(-j\pi/4) \vec{1}_x \text{ мА/м}^2; \\ \dot{\vec{J}}_{\text{см}} = 0,3167 \exp(j\pi/4) \vec{1}_x \text{ мА/м}^2; \\ \dot{\vec{J}}_{\Sigma} = 0,3914 \exp(j0,1572) \vec{1}_x \text{ мА/м}^2.$$

$$3.1.6. \dot{\vec{J}}_{\text{см}} = 1,389 \cdot 10^{-4} \vec{1}_x \text{ А/м}^2; \delta = 57^\circ 44'.$$

$$3.1.7. \sigma = 10^{-3} \text{ См/м}.$$

3.1.8. Петля должна быть расположена в плоскости, перпендикулярной вектору напряженности магнитного поля. При этом амплитуда ЭДС равна 78,96 мкВ.

$$3.1.9. I_{\text{м}} = 8,837 \text{ мкА}.$$

$$3.1.10. i_{\text{см}} = -\omega_0 \varepsilon_0 \varepsilon U_0 (S_n/d) \sin(\omega_0 t).$$

$$3.1.11. E_{\text{м}} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

3.1.12.  $H_{\text{м}} = 13,89 \text{ мкА/м}$ . Вектор  $\vec{H}$  колеблется в направлении касательной к окружности, центр которой совмещен с осью конденсатора. Окружность расположена в плоскости, параллельной пластинам конденсатора.

3.1.13.  $J_{\text{м см}} = 6,944 \text{ мА/м}^2$ ;  $J_{\text{м пр}} = 0,4167 \text{ мА/м}^2$ ; колебания полного тока опережают колебания напряжения на  $86^\circ 34'$ .

$$3.1.14. \sigma = 1,833 \cdot 10^{-7} \text{ См/м}.$$

$$3.1.15. \dot{I}_{\text{см вак}} = j44,44 \text{ мкА}; \dot{I}_{\text{пол}} = j69,33 \text{ мкА}; \dot{I}_{\text{пр}} = 16 \text{ мкА}.$$

3.1.16.  $\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z) \exp(-t/\tau)$ , где  $\tau = \varepsilon \varepsilon_0 / \sigma$ . При  $\sigma = 10^7 \text{ См/м}$   $\tau \approx 0,9 \cdot 10^{-18} \text{ с}$ . Если  $\sigma = 10^{-3} \text{ См/м}$ , то  $\tau \approx 0,9 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ .

$$3.1.19. \text{div } \vec{E} = [\rho - \vec{E} \text{grad}(\varepsilon_a)] / \varepsilon_a.$$

$$3.1.20. \text{div } \vec{H} = -\vec{H} \text{grad}(\mu_a) / \mu_a.$$

$$3.1.24. \dot{H}_y = (-jb / \mu_{\text{ax}}) \dot{H}_x.$$

$$3.1.25. \text{а) } \angle(\vec{E} \vec{D}) = 0; \text{ б) } \angle(\vec{E} \vec{D}) = 5^\circ 36'.$$

$$3.1.26. \vec{H} = 0,02653 \exp(-j2\pi x) \vec{1}_z \text{ мА/м}^2.$$

$$3.1.27. \dot{\bar{E}} = -0,7540 \exp(-j4\pi y) \bar{1}_x \text{ В/м; } f = 600 \text{ МГц.}$$

3.1.28.  $\bar{E} = -j3,77 \sin(20\pi x) \bar{1}_y \text{ В/м.}$  Колебания  $\bar{E}(t)$  отстают по фазе от колебаний  $\bar{H}(t)$  на  $90^\circ$  в точках оси  $x$ , для которых  $\cos(20\pi x)$  и  $\sin(20\pi x)$  имеют одинаковые знаки; если знаки противоположные, то колебания  $\bar{E}(t)$  опережают колебания  $\bar{H}(t)$  на  $90^\circ$ .

$$3.1.29. \dot{\bar{E}} = \bar{1}_r 2A \cos(\theta) \exp(-j\beta r) / (j\omega \epsilon_0 r^2) + \\ + \bar{1}_\theta \beta A \sin(\theta) \exp(-j\beta r) / (\omega \epsilon_0 r).$$

3.1.31. В данной ситуации поле существовать не может.

$$3.1.32. \dot{\bar{E}}_x = C_1 \exp(\gamma_1 z) + C_2 \exp(\gamma_2 z);$$

$$\dot{\bar{H}}_y = \frac{j\gamma_1}{\omega \mu_a} C_1 \exp(\gamma_1 z) + \frac{j\gamma_2}{\omega \mu_a} C_2 \exp(\gamma_2 z).$$

Характеристическое уравнение:  $\gamma^2 + \omega^2 \mu_a \epsilon_a = 0$ . Решение характеристического уравнения:  $\gamma_{1,2} = \pm j\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$ .

$$3.1.33. E_1(r) = -[\omega_0 r / (2c)]^2 E_0; E_{1\max} = E_1(r_0) < 0,1 E_0, \text{ если } \omega_0 < 2c / (r_0 \sqrt{10}).$$

$$3.1.34. \dot{J}_1(r) = j\omega \mu_0 \sigma_0 r^2 \dot{J}_0 / 4; J_{1\max} = J_1(r_0) < 0,01 J_0, \text{ если } \omega_0 < 1 / (25 \mu_0 \sigma_0 r_0^2).$$

$$3.1.36. \bar{H} = \pm \frac{J_0}{2} \cos \left[ \omega_0 \left( t \mp \frac{z}{c} \right) \right] \bar{1}_x;$$

$$\bar{E} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{J_0}{2} \cos \left[ \omega_0 \left( t \mp \frac{z}{c} \right) \right] \bar{1}_y,$$

где верхний знак соответствует полупространству  $z > 0$ , а нижний знак — полупространству  $z < 0$ .

$$3.1.37. \bar{E} = \begin{cases} -\bar{1}_y \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{J_0}{2}, & |z| < ct; \\ 0, & |z| > ct; \end{cases}$$

$$\bar{H} = \begin{cases} \bar{1}_x J_0 / 2, & 0 < z < ct; \\ -\bar{1}_x J_0 / 2, & -ct < z < 0; \\ 0, & |z| > ct. \end{cases}$$

$$3.2.1. \bar{\Pi}_{cp} = -0,2898 \bar{1}_y + 0,1732 \bar{1}_z \text{ мВт/м}^2.$$

$$3.2.2. \bar{\Pi}_{cp} = 30 \bar{1}_r \text{ мВт/м}^2.$$

$$3.2.3. \bar{\Pi}(t) = [0,5629 + 0,650 \cos(4\pi 10^9 t - 30^\circ)] \bar{1}_x \text{ мВт/м}^2;$$

$$\bar{\Pi}_{cp} = 0,5629 \text{ мВт/м}^2; \Pi_{m \text{ кол}} = 0,650 \text{ мВт/м}^2.$$

$$3.2.4. \bar{H} = (16,25 \bar{1}_x - 28,15 \bar{1}_y) \exp(j\pi/6) \text{ МА/м.}$$

$$3.2.5. H_m = 0,0690 \text{ А/м.}$$

$$3.2.6. f = 50 \text{ МГц; } \Delta\varphi = 36^\circ 52'; W = 8 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$

$$3.2.7. w_{\text{м ср}} = 1,755 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}^3.$$

$$3.2.8. w_{\text{э ср}} = 5,411 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/м}^3; p_{\text{пот ср}} = 0,153 \text{ Вт/м}^3.$$

$$3.2.9. W_{\text{ср}} = 5,747 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$

$$3.2.10. P_{\text{пот ср}} = 1,125 \cdot 10^{-7} \text{ Вт; } Q = 663,1.$$

$$3.2.11. \bar{\Pi}(t) = [\varepsilon_0 \alpha r / (2h^2)] U_0^2 \exp(-2\alpha t) \bar{1}_r;$$

$$P_{\text{отд}}(t) = [\varepsilon_0 \alpha \pi D^2 / (4h)] U_0^2 \exp(-2\alpha t).$$

$$3.2.13. \bar{\Pi}_{\text{ср}} = 2,378 \exp(-0,02x) \bar{1}_x \text{ мВт/м}^2; P_{\text{ср}} = 0,3218 \text{ мВт.}$$

$$3.2.14. P_{\text{пот ср}} = 7,293 \cdot 10^{-8} \text{ Вт.}$$

$$3.2.15. P_{\text{пот ср}} = 1,350 \text{ мВт; } \oint \bar{\Pi} d\bar{S} = -1,350 \text{ мВт.}$$

$$3.2.16. H_m(r) = \sqrt{P_0 / 240} / \pi r.$$

$$3.2.17. P_{\text{пер ср}} = 3,752 \text{ Вт.}$$

$$3.2.18. P_{\text{пот ср}} = 225,4 \text{ Вт.}$$

$$3.2.19. P_{\text{пот ср}} = 76,35 \text{ Вт.}$$

$$3.2.21. \bar{\Pi}_{\text{ср}} = -2I_0^2 / (\pi^2 d^3 \sigma_0) \bar{1}_r.$$

$$3.2.23. P_{\text{отд}}(t) = P_{\text{отд ср}} \mp P_{\text{отд м}} \cos(2\omega t + \varphi_E + \varphi_x), \text{ где}$$

$$P_{\text{отд ср}} = -[\cos(\varphi_E - \varphi_x) / 2] \int \bar{E}_0 \bar{J}_0 dV; \quad P_{\text{отд м}} = \pm(1/2) \int \bar{E}_0 \bar{J}_0 dV.$$

Здесь верхний знак соответствует случаю, когда  $\int \bar{E}_0 \bar{J}_0 dV > 0$ .

3.2.24. Мощность передается от стороннего тока к полю; объемная плотность передаваемой мощности  $p_{\text{ст ср}} = 1,326 \text{ мВт/м}^3$ .

$$3.2.25. P_{\text{пот ср}} = (\omega/2) \int_V (\varepsilon_0 \varepsilon'' |\dot{\bar{E}}|^2 + \mu_0 \mu'' |\dot{\bar{H}}|^2) dV.$$

3.2.26.  $\mu'' = 0,5066$ ; колебания вектора  $\bar{B}$  отстают по фазе от колебаний вектора  $\bar{H}$  на угол  $5^\circ 47'$ .

$$3.3.1. D_2 = 11,18 \text{ нКл/м}^2; \theta_2 = 63^\circ 26'.$$

$$3.3.2. E_2 = 1,155 \text{ В/м; } \theta_2 = 60^\circ.$$

$$3.3.3. E_{2\tau} = 1,6 \text{ В/м.}$$

$$3.3.4. \varepsilon_2 = 1,702.$$

$$3.3.5. \sigma_{\text{пов}} = -1,474 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.3.6. \sigma_{\text{пов}} = -2,874 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2.$$

$$3.3.7. B_2 = 8,271 \cdot 10^{-8} \text{ Тл; } \theta_2 = 82^\circ 1'.$$

$$3.3.8. H_2 = 0,5831 \text{ А/м; } \theta_2 = 30^\circ 57'.$$

$$3.3.9. H_{1n} = 618,2 \text{ мА/м.}$$

3.3.10. В плоскости  $x = a$  составляющие  $E_y = E_z = H_x = 0$ ; в плоскости  $y = 0$  составляющие  $E_x = E_z = H_y = 0$ .

$$3.3.11. E_\varphi = E_z = H_r = 0.$$

$$3.3.12. E_\theta = E_\varphi = H_r = 0.$$

$$3.3.13. H_\tau = 0,2083 \text{ А/м.}$$

$$3.3.14. I = 47,12 \text{ мА; } H_\varphi(r_0) = 0,15 \text{ А/м; } H_z(r_0) = E_z(r_0) = E_\varphi(r_0) = 0.$$

3.3.15.  $\dot{H}_\varphi(r_0) = -50 \sin(\theta) \text{ мА/м; } H_\theta(r_0) = E_\theta(r_0) = E_\varphi(r_0) = 0;$   
 $I_m = 9,425 \text{ мА.}$

3.3.16.  $\bar{J}_{\text{пов}}(a) = 0,5 \bar{1}_z \text{ А/м; } \bar{J}_{\text{пов}}(b) = -0,2 \bar{1}_z \text{ А/м;}$

$\bar{H}(b) = 0,2 \bar{1}_\varphi \text{ А/м.}$

3.3.17. При  $y = 0$  и  $y = b$ ,  $\dot{E}_x = \dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$ ,

$\dot{H}_x = \mp J_0 \sin(\pi x/a) \exp(-jhz),$

верхний знак соответствует  $y = 0$ , а нижний —  $y = b$ . При  $x = 0$  и  $x = a$   $\dot{E}_y = \dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$ ,  $\dot{H}_y = \pm J_0(b/a) \sin(\pi y/b) \exp(-jhz)$ , верхний знак соответствует  $x = 0$ , а нижний —  $x = a$ .

3.3.18.  $\dot{\sigma}_{\text{пов}} = (j/\omega) d\bar{J}_{\text{пов}}/dx.$

3.3.19. При  $z = 0$

$\bar{H} = -J_0 \exp(-j\beta_0 x) \bar{1}_y; \dot{\bar{E}} = [J_0 \beta_0 / (\omega \varepsilon_0)] \exp(-j\beta_0 x) \bar{1}_z.$

3.3.20.  $\oint_L \dot{\bar{H}}_\tau d\bar{l} = j\omega \varepsilon_0 \int_S \dot{\bar{E}}_n dS = j\omega \int_S \dot{\sigma}_{\text{пов}} dS.$

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

4.1.1.  $\beta = 936,6 \text{ 1/м; } v_\Phi = 6,708 \cdot 10^7 \text{ м/с;}$

$\lambda = 6,708 \text{ мм; } Z_c = 168,6 \text{ Ом.}$

4.1.2.  $\varepsilon = 4; f = 7,5 \text{ МГц; } \beta = 0,314 \text{ 1/м; } \lambda = 20 \text{ м.}$

4.1.3. Для сухой почвы  $f < 0,36 \text{ МГц}$ ; для влажной почвы  $f < 4,8 \text{ МГц}$ ; для морской воды  $f < 96 \text{ МГц}$ .

4.1.4.  $v_\Phi = 1,556 \cdot 10^8 \text{ м/с; } Z_c = 190,0 \exp(j13^\circ 36') \text{ Ом.}$

4.1.5.  $\lambda = 0,286 \text{ мм; } \alpha = 3,229 \text{ 1/м.}$

4.1.6.  $f = 54 \text{ МГц; } \alpha = 0,565 \text{ 1/м.}$

4.1.7.  $\text{tg}(\delta) = 0,5879; Z_c = 202,1 \exp(j15^\circ 14') \text{ Ом.}$

4.1.8. Отношение  $E_m(0)/E_m(\lambda)$  равно: а) 1,368; б) 13,50; в) 294,8.

4.1.9.  $v_\Phi = 1,8 \cdot 10^8 \text{ м/с; } \varepsilon = 2,778; Z_c = 226,2 \text{ Ом.}$

4.1.10. Волна имеет круговую поляризацию с левым направлением вращения;  $\bar{E} = (0,4 \bar{1}_x - j0,4 \bar{1}_y) \exp(j29^\circ 12') \text{ В/м.}$

4.1.11.  $\bar{E}(t) = 10[\sin(6\pi \cdot 10^9 t - 129^\circ 48') \bar{1}_x +$   
 $+ \cos(6\pi \cdot 10^9 t - 129^\circ 48') \bar{1}_y] \text{ В/м.}$

4.1.12.  $\dot{\bar{E}} = 0,8 \exp[-j(181,4x + 104,7y)] \bar{1}_z \text{ В/м.}$

4.1.13.  $k_z = 2,952 \text{ 1/м;}$

$\bar{E} = (28,34 \bar{1}_x - 10,32 \bar{1}_z) \exp[-j(1,074x + 2,952z)] \text{ В/м.}$

4.1.14.  $\varepsilon = 4,209; \sigma = 3,359 \cdot 10^{-2} \text{ См/м.}$

4.1.15.  $\beta = 0,2094 \text{ 1/м; } \lambda = 30 \text{ м; } \alpha = 0,01026 \text{ 1/м; } \delta = 5^\circ 37'.$

4.1.16.  $E_m(z_3)/E_m(z_1) = 0,941; \varphi_E(z_3) - \varphi_E(z_1) = 240^\circ.$

4.1.17.  $H_m(z_2) = 8,872 \text{ мА/м; } \varphi_H(z_2) = -59^\circ 3'.$

4.1.18.  $\bar{E}(t, x_1) = 4,326 \cos(5 \cdot 10^8 t - 156^\circ 58') \bar{1}_y \text{ мВ/м.}$

4.1.19.  $\bar{H}(t, z_1) = 4,926 \cos(6\pi \cdot 10^7 t - 56^\circ 55') \bar{1}_x +$   
 $+ 4,926 \sin(6\pi \cdot 10^7 t - 56^\circ 55') \bar{1}_y \text{ мА/м.}$

$$4.1.20. \dot{\vec{H}} = 10,34(j\bar{1}_x - \bar{1}_z) \exp(-j12,25y) \text{ мкА/м.}$$

$$4.1.21. \dot{\vec{E}} = 5,590(\bar{1}_x + j2\bar{1}_y) \exp[-j(0,6283z + 26^\circ 34')] \text{ В/м;}$$

$$\dot{\vec{H}} = 14,83(-j2\bar{1}_x + \bar{1}_y) \exp[-j(0,6283z + 26^\circ 34')] \text{ мА/м.}$$

$$4.1.22. f = 0,7418 \text{ МГц; } \lambda = 125,9 \text{ м.}$$

$$4.1.23. \varepsilon = 2,088; Z_c = 242,8 \exp(j15^\circ) \text{ Ом.}$$

$$4.1.24. H_m(\lambda) = 0,1494 \text{ мА/м; } \varphi_E - \varphi_H = 16^\circ 36'.$$

$$4.1.25. \dot{\vec{H}}(0) = 10(j\bar{1}_x + \bar{1}_y) \text{ мА/м;}$$

$$\dot{\vec{E}}(0) = 2,016 \exp(j15^\circ 29')(\bar{1}_x - j\bar{1}_y) \text{ В/м.}$$

$$4.1.26. \vec{H}(t, x) = -11,06 \exp(-0,2768x) \times$$

$$\times \sin(2 \cdot 10^8 t - 1,362x - 41^\circ 29') \bar{1}_y \text{ мкА/м.}$$

$$4.1.27. \dot{\vec{H}}(0) = 10(j\bar{1}_x + \bar{1}_y) \text{ мА/м;}$$

$$\dot{\vec{E}}(0) = 2,016 \exp(j15^\circ 29')(\bar{1}_x - j\bar{1}_y) \text{ В/м.}$$

$$4.1.28. \varepsilon = 5,217; \sigma = 0,01055 \text{ См/м.}$$

$$4.1.29. \dot{\vec{H}} = 11,86 \bar{1}_x \text{ мА/м; } \bar{P}_{cp} = 23,73 \bar{1}_y - 11,86 \bar{1}_z \text{ мВт/м}^2.$$

$$4.1.30. \dot{\vec{E}} = 2,903 \exp[-j(11,24z + 5,620x)] \bar{1}_y \text{ В/м;}$$

$$\dot{\vec{H}} = (-6,888 \bar{1}_x + 3,444 \bar{1}_z) \exp[-j(11,24z + 5,620x)] \text{ мА/м.}$$

$$4.1.31. E_m = 129,8 \text{ В/м; } H_m = 0,7702 \text{ А/м.}$$

$$4.1.32. \dot{\vec{E}} = 0,1585 \exp(-j60\pi x)(j\bar{1}_y - \bar{1}_z) \text{ В/м;}$$

$$\dot{\vec{H}} = 1,262 \exp(-j60\pi x)(\bar{1}_y + j\bar{1}_z) \text{ мА/м.}$$

$$4.1.33. P_{cp}(y_1) = 11,66 \text{ мВт/м}^2.$$

$$4.1.34. \text{ На частоте } 100 \text{ МГц } \bar{P}_{cp} = 101,6 \bar{1}_z \text{ мВт/м}^2; \text{ на частоте } 10 \text{ ГГц } \bar{P}_{cp} = 98,41 \bar{1}_z \text{ мВт/м}^2.$$

$$4.1.35. E_m = 50,99 \text{ В/м.}$$

$$4.1.36. P_{cp} = 18,62 \text{ мВт/м}^2.$$

$$4.1.37. P_{cp} = 17,70 \text{ мВт/м}^2; P_{m \text{ кол}} = 18,96 \text{ мВт/м}^2.$$

$$4.1.38. \text{ Для мышечной ткани } l = 3,30 \text{ см; для жировой ткани } l = 16,6 \text{ см.}$$

$$4.1.39. \text{ На частоте } 100 \text{ МГц } l = 7,78 \text{ см; на частоте } 10 \text{ ГГц } l = 0,709 \text{ см.}$$

$$4.1.40. E_{ck} = 713,4 \text{ В/м.}$$

$$4.1.41. \text{ Средняя мощность солнечного излучения, падающего на поверхность Земли, составляет } 1,72 \cdot 10^{17} \text{ Вт. Полная средняя мощность солнечного излучения равна } 3,8 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

$$4.1.42. w(t) = \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega_0 t - \beta_0 z + \varphi_0); w_{cp} = \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 / 2.$$

$$4.1.43. v_\varphi = c / \sqrt{\mu \varepsilon}.$$

$$4.1.44. \text{ При } \operatorname{tg}(\delta) = 0 \quad w_{cp \text{ э}} / w_{cp \text{ м}} = 1; \quad \text{если } \operatorname{tg}(\delta) = 10, \text{ то } w_{cp \text{ э}} / w_{cp \text{ м}} = 0,0995.$$

$$4.1.47. J_0 = 1,457 \text{ мА/м.}$$

$$4.1.50. \beta_z^2 - \alpha_x^2 = (\omega_0 / c)^2 \mu \varepsilon.$$

$$4.1.51. \alpha_x = 108,8 \text{ 1/м; } \beta_z = 125,7 \text{ 1/м.}$$



$$4.1.52. \quad \bar{\Pi}_{\text{cp}} = (\beta_z / (2\mu_0 \omega)) E_0^2 \exp(-2\alpha_x x) \bar{1}_z.$$

4.1.53. Волна имеет эллиптическую поляризацию. Главные оси эллипса поляризации повернуты относительно осей  $x$ ,  $y$  на угол  $\pi/4$  против часовой стрелки, если смотреть с конца орта  $\bar{1}_z$ . В повернутой системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z$  с ортами  $\bar{1}_{x'} = (\bar{1}_x + \bar{1}_y)/\sqrt{2}$ ;  $\bar{1}_{y'} = (-\bar{1}_x + \bar{1}_y)/\sqrt{2}$  составляющие вектора  $\bar{E}$  принимают вид

$$E_{x'} = E_m \sqrt{2} \cos[(\varphi_y - \varphi_x)/2] \cos[\omega t - \beta z + (\varphi_y + \varphi_x)/2];$$

$$E_{y'} = -E_m \sqrt{2} \sin[(\varphi_y - \varphi_x)/2] \sin[\omega t - \beta z + (\varphi_y + \varphi_x)/2].$$

Если  $\cos[(\varphi_y - \varphi_x)/2] > 0$  и  $\sin[(\varphi_y - \varphi_x)/2] > 0$ , то вектор  $\bar{E}$  будет вращаться по часовой стрелке, если смотреть с конца орта  $\bar{1}_z$  (правополяризованная волна).

$$4.1.54. \quad \bar{E}_\Sigma(t) = 2E_0 \left[ \bar{1}_x \cos\left(\frac{\varphi_\Pi - \varphi_\Pi}{2}\right) + \bar{1}_y \sin\left(\frac{\varphi_\Pi - \varphi_\Pi}{2}\right) \right] \times \\ \times \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{\varphi_\Pi + \varphi_\Pi}{2}\right].$$

Волна имеет линейную поляризацию, колебания вектора  $\bar{E}$  происходят по прямой, перпендикулярной оси  $z$  и повернутой на угол  $(\varphi_\Pi - \varphi_\Pi)/2$  относительно оси  $x$ .

$$4.1.55. \quad \bar{E}_\Sigma(t) = (E_\Pi + E_\Pi) \cos[\omega_0(t - z/c) + \varphi_0] \bar{1}_x - \\ - (E_\Pi - E_\Pi) \sin[\omega_0(t - z/c) + \varphi_0] \bar{1}_y.$$

Волна имеет эллиптическую поляризацию, полуоси эллипса поляризации равны  $E_\Pi + E_\Pi$  и  $|E_\Pi - E_\Pi|$  и ориентированы вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Если  $E_\Pi > E_\Pi$ , то волна будет правополяризованной, при  $E_\Pi < E_\Pi$  — левополяризованной.

4.1.56. Главные оси эллипса поляризации повернуты относительно ортов  $\bar{1}_x$ ,  $\bar{1}_y$  на угол  $(90^\circ - \theta/2)$  по часовой стрелке, если смотреть с конца орта  $\bar{1}_z$ . Положение главных осей дается повернутыми базисными векторами

$$\bar{1}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2[1 - \cos(\theta)]}} ([1 - \cos(\theta)] \bar{1}_x - \sin(\theta) \bar{1}_y);$$

$$\bar{1}_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2[1 + \cos(\theta)]}} ([1 + \cos(\theta)] \bar{1}_x + \sin(\theta) \bar{1}_y).$$

Составляющие вектора  $\bar{E}$  суммарной волны в повернутой системе координат:

$$E_{x'} = -E_m \sqrt{1 - \cos(\theta)} \sin[\omega_0(t - z/c) + \varphi_1 - \pi/4];$$

$$E_{y'} = E_m \sqrt{1 + \cos(\theta)} \cos[\omega_0(t - z/c) + \varphi_1 - \pi/4].$$

Волна является левополяризованной (вектор  $\bar{E}$  вращается против часовой стрелки, если смотреть навстречу распространяющейся волне).

4.1.57. Главные оси эллипса поляризации повернуты относительно осей  $x$ ,  $y$  на угол  $\pi/4$  против часовой стрелки, если смотреть с конца орта  $\bar{1}_z$ . В повернутой системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z$

с ортами  $\bar{1}_{x'} = (\bar{1}_x + \bar{1}_y)/\sqrt{2}$  и  $\bar{1}_{y'} = (-\bar{1}_x + \bar{1}_y)/\sqrt{2}$  составляющие вектора  $\bar{E}$  записываются в виде

$$E_{x'}(t) = \sqrt{2} E_m \cos(\theta) \cos[(\omega_1 + \omega_2)/2]t - [(\beta_1 + \beta_2)/2]z;$$

$$E_{y'}(t) = -\sqrt{2} E_m \sin(\theta) \sin[(\omega_1 + \omega_2)/2]t - [(\beta_1 + \beta_2)/2]z,$$

где  $\theta = [(\omega_2 - \omega_1)/2]t - [(\beta_1 - \beta_1)/2]z$ . В различные моменты времени и в разных точках оси  $z$  меняется соотношение полуосей эллипса поляризации. Это изменение определяется величиной угла  $\theta$  и происходит медленно по сравнению с периодом высокочастотных колебаний  $4\pi/(\omega_1 + \omega_2)$  и плавно по сравнению с длиной волны высокочастотных колебаний  $4\pi/(\beta_1 + \beta_2)$ . При  $\theta = 0$  поляризация линейная по оси  $x'$ , при  $\theta = \pi/4$  — правая круговая, при  $\theta = \pi/2$  — линейная по оси  $y'$ , при  $\theta = 3\pi/4$  — левая круговая и т. д.

**4.1.58.**  $\bar{E}(t) = 2E_m[\cos(\theta)\bar{1}_x + \sin(\theta)\bar{1}_y]\cos[\omega_0(t - z/c) + \varphi_0]$ , где  $\theta = [(\omega_2 - \omega_1)/2](t - z/c) + (\varphi_2 - \varphi_1)/2$ . Волна имеет линейную поляризацию. Колебания вектора  $\bar{E}$  происходят по прямой, повернутой на угол  $\theta$  относительно оси  $x$  в плоскости  $ХОУ$ . Изменение направления колебаний происходит медленно по сравнению с периодом высокочастотных колебаний  $2\pi/\omega_0$  и плавно по сравнению с длиной волны  $2\pi c/\omega_0$ . Если  $\omega_2 > \omega_1$ , то вектор  $\bar{E}(t)$  медленно поворачивается против часовой стрелки, если смотреть с конца орта  $\bar{1}_z$  (навстречу распространяющейся волне).

**4.2.1.**  $v_\phi = 5,130 \cdot 10^3$  м/с;  $\lambda = 34,20$  мкм.

**4.2.2.**  $\alpha = 2,351 \cdot 10^5$  1/м;  $Z_c = 0,01679(1 + j)$  Ом.

**4.2.3.** На частоте 50 Гц  $d = 9,428$  мм; на частоте 50 МГц  $d = 9,428$  мкм.

**4.2.4.**  $c/v_\phi = \lambda_0/\lambda = 1,308 \cdot 10^4$ .

**4.2.5.**  $L = 0,0594$  мм; для частоты 60 Гц необходимая толщина экрана увеличивается в  $10^3$  раз и равна 5,94 см.

**4.2.6.**  $f = 942,4$  МГц;  $\lambda = 13,64$  мкм.

**4.2.7.**  $f = 6,442$  ГГц;  $E(0) = 14,94$  мВ/м;  $E(h) = 4,48$  мВ/м.

**4.2.8.** В вакууме  $E_m = 452,4$  В/м; для латуни  $E_m = 6,372$  мВ/м.

**4.2.9.**  $\lambda = 18,19$  мкм;  $d = 2,895$  мкм.

**4.2.10.**  $\Delta_{\text{пор}} = 96,39$  дБ/см;  $\lambda = 2,180$  мм.

**4.2.11.**  $v_\phi = 3,311 \cdot 10^8$  м/с;  $v_{\text{гp}} = 2,718 \cdot 10^8$  м/с;  $\lambda = 11,04$  м.

**4.2.12.**  $\alpha = 2,688$  1/м;  $\lambda = 6,559$  см.

**4.2.13.**  $L = 16,68$  м.

**4.2.14.**  $\Delta = 42,23$  дБ.

**4.2.15.** При  $\omega < \omega_0$

$$v_{\text{гp}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \left[ 1 + \frac{\omega_N^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + \omega_N^2 - \omega^2)} \right]^{-1} < \frac{c}{\sqrt{\epsilon}},$$

где  $\omega_N^2 = e^2 N / (\epsilon_0 m_e)$ .

$$4.2.17. E(t, z) = E_0(t - b_1 z) \cos(\omega_0 t - b_0 z);$$

$$S_E(k) = \frac{1}{b_1} S_0(-\omega) \Big|_{\omega=k/b_1} \exp(-jkz_0),$$

где  $z_0 = t_0/b_1$ ;  $k$  — пространственная частота (волновое число) в распределении огибающей поля.

$$4.2.18. \Delta t / \tau_{\text{и}} = 8\pi L b_2 / \tau_{\text{и}}^2.$$

$$4.2.19. t = 0,7682 \text{ мс.}$$

$$4.2.20. L = 2,62 \cdot 10^{19} \text{ м} = 850 \text{ пс.}$$

$$4.2.21. \Delta t = 4,8 \text{ с.}$$

$$4.2.22. \Delta f = 831 \text{ кГц.}$$

$$4.2.23. f_0 \geq 41,22 \text{ МГц.}$$

$$4.2.24. f_0 \geq 26,24 \text{ МГц.}$$

4.2.25.  $L = \tau_{\text{и}} c (\omega_0^2 - \omega_{\text{пл}}^2)^{3/2} / (\omega_{\text{пл}}^2 \Delta \omega)$ . Коэффициент  $a$  должен быть положительным, т. е. частота увеличивается к концу импульса.

$$4.2.26. h = 173,2 \text{ нм.}$$

$$4.2.27. h = 173,2 \text{ нм.}$$

$$4.2.28. \text{а) } h = 2,12 \text{ мм; б) } h = 53,2 \text{ нм.}$$

## ГЛАВА ПЯТАЯ

$$5.1.1. E_{\text{м отр}} = 1,414 \text{ В/м; } E_{\text{м пр}} = 3,586 \text{ В/м.}$$

$$5.1.2. H_{\text{м отр}} = 2,31 \text{ А/м; } H_{\text{м пр}} = 12,31 \text{ А/м.}$$

$$5.1.3. \Pi_{\text{отр}} = 3,93 \text{ Вт/м}^2; \Pi_{\text{пр}} = 11,07 \text{ Вт/м}^2.$$

$$5.1.4. \varepsilon = 33,97.$$

$$5.1.5. H_{\text{м пр}} = 0,459 \text{ А/м.}$$

$$5.1.6. \varepsilon_1 = 5,44; T_{\text{Н}} = 0,6; T_{\text{П}} = 0,84; R_E = R_H = 0,4; R_{\text{П}} = 0,16.$$

$$5.1.7. T^2 = \sqrt{\mu/\varepsilon}(1 - R^2).$$

$$5.1.8. \varphi = 43^\circ 10'.$$

$$5.1.11. E_{\text{м отр}} = 5,55 \text{ В/м; } E_{\text{м пр}} = 4,45 \text{ В/м.}$$

$$5.1.12. E_{\text{м отр}} = 0,0571 \text{ В/м; } E_{\text{м пр}} = 1,071 \text{ В/м.}$$

$$5.1.13. H_{\text{м отр}} = 5,965 \text{ А/м; } H_{\text{м пр}} = 12,50 \text{ А/м.}$$

$$5.1.14. \Pi_{\text{отр}} = 0,0267 \text{ Вт/м}^2; \Pi_{\text{пр}} = 0,3912 \text{ Вт/м}^2.$$

$$5.1.15. \Pi_{\text{отр}} = 0,164 \text{ Вт/м}^2; \Pi_{\text{пр}} = 5,075 \text{ Вт/м}^2.$$

$$5.1.16. \text{а) } \varphi = 32^\circ; \text{б) } \varphi \geq 38^\circ 41'.$$

$$5.1.17. \varphi = 50^\circ.$$

$$5.1.19. \text{а) } k_{\text{эл}} = 2,275; \text{б) } k_{\text{эл}} = 0,9154.$$

$$5.1.20. \text{а) } k_{\text{эл}} = 1,966; \text{б) } k_{\text{эл}} = 0,928.$$

$$5.1.21. \varphi = 62^\circ 50'.$$

$$5.1.22. \Pi_{\text{пр}} = \Pi_{\text{пад}} / \sqrt{\varepsilon_{\text{д}}}.$$

$$5.1.23. \Pi_{\text{пр}} = \Pi_{\text{пад}} \sqrt{\varepsilon_{\text{д}}}.$$

$$5.1.28. \text{Не менее } 6,84 \text{ м.}$$

$$5.1.29. \Delta T = 15,2^\circ.$$

$$5.1.30. R = \exp(j158^\circ 38'); T = 0,7225 \exp(j79^\circ 19').$$

$$5.1.31. R = \exp(j108^\circ 42'); T = 1,165 \exp(j54^\circ 24').$$

$$5.1.32. \varphi = 21^\circ 12'.$$

$$5.1.33. \varphi = 30^\circ 2'.$$

$$5.1.34. v_\phi = 1,785 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$5.1.35. \varphi = 47^\circ 36'.$$

$$5.1.36. E_{m \text{ пр}} = 0,0657 \text{ В/м.}$$

$$5.1.37. \text{ а) } R = -0,8705 \exp(-j4^\circ 42'); T = 0,1504 \exp(j28^\circ 17').$$

$$\text{ б) } R = -0,7423 \exp(-j2^\circ 53'); T = 0,2614 \exp(j8^\circ 14').$$

$$5.1.38. R = -0,7962 \exp(-j2^\circ 51'); T = 0,2086 \exp(j10^\circ 58').$$

$$5.1.39. E_{m \text{ пр}} = 0,1496 \text{ В/м.}$$

$$5.1.40. \varphi_{\text{нд}} = 16^\circ 25'; \text{ ошибка равна } 5^\circ 32'.$$

$$5.1.41. \varphi_{\text{нд}} = 49''.$$

5.1.42.  $\varphi = 56^\circ 18'$ . Вектор  $\bar{E}$  параллелен плоскости падения.  
 Теряется 50% мощности излучения.

$$5.1.43. R = (R_{12} + R_{23} A^2) / (1 + A^2 R_{12} R_{23}) = \\ = R_{12} + (1 - R_{12}^2) A^2 R_{23} / (1 + A^2 R_{12} R_{23});$$

$$T = A T_{12} T_{23} / (1 + A^2 R_{12} R_{23}), \text{ где } A =$$

$$= \exp[-j(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_2}d];$$

$$R_{12} = (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}) / (\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2});$$

$$R_{23} = (\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_3}) / (\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_3});$$

$$T_{12} = 1 + R_{12} = 2\sqrt{\varepsilon_1} / (\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2});$$

$$T_{23} = 1 + R_{23} = 2\sqrt{\varepsilon_2} / (\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_3}).$$

$$5.1.44. R = R_{12}(1 - A^2) / (1 - A^2 R_{12}^2); T = A(1 - R_{12}^2) / (1 - A^2 R_{12}^2);$$

$$\text{ где } A = \exp[-j(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_d}d]; R_{12} = (1 - \sqrt{\varepsilon_d}) / (1 + \sqrt{\varepsilon_d}).$$

Отражение отсутствует, если  $d_0 = \lambda_0 N / (2\sqrt{\varepsilon_d})$ ,

здесь  $N = 1, 2, \dots; \lambda_0 = c/f_0$ .

$$5.1.45. |R|^2 = 0,07643; |T|^2 = 1 - |R|^2 = 0,9236.$$

$$5.1.46. n_2 = 1,225; d = 0,1123 \text{ мкм.}$$

$$5.1.47. d_1 = \lambda_0 N / (2\sqrt{\varepsilon_d}), \text{ где } N = 1, 2, \dots; \lambda_0 = c/f_0.$$

$$5.1.48. 2\Delta f = \frac{2f_0}{\pi N} \arcsin\left(\frac{1 - R_{12}^2}{2|R_{12}|} \sqrt{\frac{\delta}{1 - \delta}}\right), \text{ где } N = 1, 2, \dots \text{ Решение}$$

существует при  $\varepsilon \geq [(1 + \sqrt{\delta} - \sqrt{1 - \delta}) / (-1 + \sqrt{\delta} + \sqrt{1 - \delta})]^2$ .

$$5.1.49. 2\Delta f = [2f_0 / (\pi N)] \arcsin[(1 - R_{12}^2) / (2|R_{12}|)],$$

где  $N = 1, 2, \dots$  Решение существует при  $\varepsilon_d \geq (\sqrt{2} - 1)^{-2} \cong 5,828$ .

$$5.1.50. K_{\text{пр}} = 1 / (1 + [\sin(\varphi) / \sin(\psi)]^2),$$

$$\text{ где } \varphi = N\pi\Delta f / f_0; \sin(\psi) = (1 - R_{12}^2) / (2|R_{12}|).$$

Если  $\varphi \ll 1$  и  $\psi \ll 1$ , то  $K_{\text{пр}} = 1/(1 + [\Delta f/\Delta f_{\text{п}}]^2)$ , причем полоса пропускания  $2\Delta f_{\text{п}} = [2f_0/(\pi N)](1 - R_{12}^2)/(2|R_{12}|)$ .

$$5.1.51. R = j \frac{\pi d \sqrt{\varepsilon_d}}{\lambda_0} \frac{4R_{12}}{1 - R_{12}^2}; \quad T = 1 - j \frac{2\pi d \sqrt{\varepsilon_d}}{\lambda_0} \frac{1 + R_{12}^2}{1 - R_{12}^2}.$$

$$5.1.52. R \cong R_{12}[1 - (1 - R_{12}^2)A^2] \cong R_{12}[1 - \exp(-j4\pi d/\lambda)];$$

$$T \cong (1 - R_{12}^2)A \cong \exp(-j2\pi d/\lambda),$$

$$\text{где } A = \exp(-j2\pi d/\lambda);$$

$$R_{12} = (1 - \sqrt{\varepsilon_d})/(1 + \sqrt{\varepsilon_d}); \quad \lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_d}.$$

$$5.1.53. |R|^2 \cong 4R_{12}^2 \sin^2[(\pi/2)(1 - \lambda_0/\lambda)].$$

Для синего света  $|R|^2 = 4,7 \cdot 10^{-3}$ , для красного света  $|R|^2 = 2,3 \cdot 10^{-3}$ .

$$5.1.54. \Pi_{\text{ср } z} = \frac{|E_0|^2}{2Z_0} [n_R(e^{-2\alpha z} - |\dot{R}|^2 e^{2\alpha z}) + 2|\dot{R}|n_I \sin(\varphi_R + 2\beta z)],$$

$$\text{где } \tilde{n} = n_R + jn_I; \quad \beta = (\omega/c)n_R;$$

$$\alpha = (\omega/c)|n_I|; \quad \dot{R} = |\dot{R}|\exp(j\varphi_R).$$

$$5.2.1. \Pi_{\text{ср пр}}/\Pi_{\text{ср пад}} = 1,217 \cdot 10^{-4}.$$

$$5.2.2. R = -1 + \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma_m}(1 + j).$$

$$5.2.3. H_{m \text{ тм}} = |\dot{H}_{\text{тм}}| \approx 2H_{m \text{ пад}}(1 - \sqrt{\omega\varepsilon_0/(2\sigma_m)});$$

$$H_{m \text{ тм}} = 2H_{m \text{ пад}}(1 - 3,82 \cdot 10^{-5}).$$

$$5.2.4. E_{m \text{ тм}} = 2E_{m \text{ пад}}\sqrt{\omega\varepsilon_0/\sigma_m}; \quad E_{m \text{ тм}}/E_{m \text{ пад}} = 1,054 \cdot 10^{-4}.$$

$$5.2.5. T_H = 2\exp(-\alpha l); \quad T_E = 2\sqrt{\omega\varepsilon_0/\sigma_m} \exp(-\alpha l),$$

где  $\alpha = \sqrt{\omega\mu_0\sigma_m}/2$ .

$$5.2.6. \Delta = \Delta_{\text{отр}} + \Delta_{\text{мет}}, \text{ где } \Delta_{\text{отр}} = 10 \lg \sqrt{\sigma_m/(8\omega\varepsilon_0)};$$

$$\Delta_{\text{мет}} = 20(\lg e)\alpha l; \quad \alpha = \sqrt{\omega\mu_0\sigma_m}/2.$$

$$5.2.7. \Delta = \Delta_{\text{отр}} + \Delta_{\text{мет}} = 453 \text{ дБ, где } \Delta_{\text{отр}} = 41 \text{ дБ; } \Delta_{\text{мет}} = 412 \text{ дБ.}$$

$$5.2.8. H_{m \text{ тм}} = 53,05 \text{ мА/м; } E_{m \text{ тм}} = 1,826 \text{ мВ/м.}$$

$$5.2.9. H_{m \text{ тм}} = 45,94 \text{ мА/м; } E_{m \text{ тм}} = 1,581 \text{ мВ/м.}$$

$$5.2.10. \Pi_{\text{ср пр}} = 51,05 \text{ мкВт/м}^2.$$

$$5.2.11. P_{\text{уд}} = 0,5164 \text{ мВт/м}^2.$$

$$5.2.12. \text{Для } n = 3 \quad f = 13,02 \text{ ГГц; для } n = 4 \quad f = 130,2 \text{ МГц.}$$

$$5.2.13. E_{m \text{ пад}} = 11,08 \text{ В/м; } H_{m \text{ пад}} = 29,38 \text{ мА/м.}$$

$$5.2.14. \text{При перпендикулярной поляризации}$$

$$R = [Z_{\text{см}}\cos(\varphi) - Z_0]/[Z_{\text{см}}\cos(\varphi) + Z_0];$$

$$T = 2Z_{\text{см}}\cos(\varphi)/[Z_{\text{см}}\cos(\varphi) + Z_0],$$

где  $Z_0 = 120\pi$  — характеристическое сопротивление вакуума;

$Z_{\text{см}} = (1 + j)\sqrt{\omega\mu_0/(2\sigma_m)}$  — характеристическое сопротивление металла. Поскольку для реального металла  $|Z_{\text{см}}| \ll Z_0$ , то

$$R \approx -1 + (1 + j)\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma_m} \cos(\varphi); \quad T \approx (1 + j)\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma_m} \cos(\varphi).$$

5.2.15. При параллельной поляризации

$$R = [Z_0 \cos(\varphi) - Z_{\text{см}}] / [Z_0 \cos(\varphi) + Z_{\text{см}}];$$

$$T = 2Z_{\text{см}} \cos(\varphi) / [Z_0 \cos(\varphi) + Z_{\text{см}}]$$

(обозначения см. в ответе к задаче 5.2.14). Поскольку для реального металла  $|Z_{\text{см}}| \ll Z_0$ , то

$$R \approx 1 - (1 + j)\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma_{\text{м}}} / \cos(\varphi); \quad T \approx (1 + j)\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma_{\text{м}}}.$$

5.2.17.  $\dot{J}_{\text{пов}} = \dot{E}_{\tau \text{ м}} \sigma_{\text{м}} d / (1 + j).$

5.2.18.  $R_{\text{пог}} = 1/(\pi D \sigma_{\text{м}} d); L_{\text{пог}} = 1/(\omega \pi D \sigma_{\text{м}} d).$

5.2.19.  $R_{\text{пог}} = 0,838 \text{ Ом}; L_{\text{пог}} = 0,333 \text{ нГн}.$

5.2.20.  $\omega_{\text{э ср}}/\omega_{\text{м ср}} = \omega\varepsilon_0/\sigma_{\text{м}} = 0,97 \cdot 10^{-8}.$

5.2.21.  $W_{\text{м ср}} = (1/4)\sqrt{\mu_{\text{ам}}/(2\omega\sigma_{\text{м}})} \int |\dot{H}_{\tau \text{ м}}|^2 dS$

5.2.22.  $E_m(z) = E_0 e^{-\alpha z} \{1 + 2\exp[-2\alpha(D-z)]\cos[2\alpha(D-z)] + \exp[-4\alpha(D-z)]\}^{1/2},$

где  $E_0 = 2E_{\text{пад}}\sqrt{\omega\varepsilon_0/\sigma_{\text{м}}}/\sqrt{1 - 2e^{-2\alpha D}\cos(2\alpha D) + e^{-4\alpha D}}.$

5.2.23.  $R_{\Pi} = |R_E|^2 = 0,941; P_{\text{ср пот}} = 58,83 \text{ кВт}.$

5.2.24.  $d = 0,121 \text{ мкм}.$

5.2.25. а)  $P_{\text{уд}} = 2,79 \text{ Вт/м}^2$ ; б)  $P_{\text{уд}} = 2,61 \text{ мВт/м}^2.$

5.2.26. а)  $\Delta = 76,6 \text{ дБ}$ ; б)  $\Delta = 401,2 \text{ дБ}.$

5.2.27.  $T_{\Pi} = 1/\{1 + [(1 - A^2)(1 + N^2)/(4AN)]^2\};$

$$R_{\Pi} = 1/\{1 + [4AN/[(1 - A^2)(1 + N^2)]]^2\}.$$

5.2.28.  $T_{\Pi} = |T_E|^2 = 2,610 \cdot 10^{-4}; E_{\text{м пр}} = 16,16 \text{ В/м}.$

5.3.1.  $E_m(z) = 75,4|\sin(20\pi z)| \text{ В/м}; H_m(z) = 0,2|\cos(20\pi z)| \text{ А/м}.$

5.3.2.  $\bar{E}(t) = 20\sin(200\pi z/3)\sin(2\pi \cdot 10^{10}t)\bar{1}_y \text{ В/м};$

$$\bar{H}(t) = -0,053\cos(200\pi z/3)\cos(2\pi \cdot 10^{10}t)\bar{1}_x \text{ А/м}.$$

5.3.3.  $\bar{J}_{\text{пов}} = 2,653\cos(2\pi \cdot 10^9 t)\bar{1}_y \text{ МА/м}.$

5.3.4.  $I_{\text{м пов}} = 7,979 \text{ А}.$

5.3.5.  $v_{\text{ф}} = 11,59 \cdot 10^8 \text{ м/с}; h_{\text{мин}} = 0,259 \text{ м}.$

5.3.6.  $\lambda_{\text{прод}} = 15,56 \text{ см}; \lambda_{\text{попер}} = 13,05 \text{ см}.$

5.3.7.  $\lambda_{\text{прод}} = 9,72 \text{ см}; \lambda_{\text{попер}} = 8,16 \text{ см}.$

5.3.8.  $\lambda_{\text{прод}} = 3,0 \text{ см}; h_{\text{мин}} = 0,433 \text{ см}.$

5.3.9.  $\varphi = 19^\circ 28'.$

5.3.10.  $f = 3,162 \text{ ГГц}; \varphi = 71^\circ 34'.$

5.3.13.  $\bar{P}_{\text{ср}} = 1,081\sin^2(54,61\pi z)\bar{1}_x \text{ Вт/м}^2;$

$$\bar{P}_p = -0,772\sin(109,2\pi z)\bar{1}_z \text{ Вт/м}^2,$$

где ось  $x$  направлена вдоль границы раздела в плоскости падения; ось  $z$  направлена по нормали к поверхности проводящей среды (вглубь среды).

5.3.14.  $\bar{P}_{\text{ср}} = 1,838\cos^2(10\pi z)\bar{1}_x \text{ Вт/м}^2;$

$$\bar{P}_p = -0,531\sin(20\pi z)\bar{1}_z \text{ Вт/м}^2$$

(направление осей см. в ответе к предыдущей задаче).

5.3.15.  $\dot{J}_{\text{пов}} = 26,53\exp(-j\pi x)\bar{1}_x \text{ МА/м}$  (направление осей см. в ответе к задаче 5.3.13).

5.3.16.  $\dot{J}_{\text{пов}} = -22,97 \exp(-j\pi x) \bar{1}_y$  мА/м (направление осей см. в ответе к задаче 5.3.13).

5.3.17. Падающая волна имеет перпендикулярную поляризацию;  $\varphi = 56^\circ 27'$ ;  $E_{\text{м пад}} = 68,2$  В/м.

5.3.18.  $h_{\text{мин}} = 2,54$  см.

5.3.19. Эллипс поляризации вектора  $\bar{H}$  расположен в плоскости падения. Большая ось эллипса поляризации параллельна проводящей плоскости. Коэффициент эллиптичности  $k_{\text{эл}} = 2,737$ .

5.3.20.  $z = 2,924m$  см, где  $m = 1, 2, \dots$  При изменении поляризации ответ не изменится.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

6.1.1. а)  $H_{10}$ ; б)  $H_{10}, H_{20}, H_{01}, H_{11}, E_{11}$ .

6.1.2.  $H_{10}, H_{20}, H_{01}, H_{11}, E_{11}$ ;  $f = 6,061$  ГГц.

6.1.3.  $7,5 \text{ см} < a < 15 \text{ см}$ ;  $b < 7,5 \text{ см}$ .

6.1.4.  $2,083 \text{ ГГц} < f < 4,167 \text{ ГГц}$ .

6.1.5.  $\varepsilon = 1,634$ .

6.1.6.  $a/b > \sqrt{3}$ .

6.1.7. а)  $H_{01}$ ; б)  $H_{20}$ .

6.1.8.  $f_{\text{кр}} = 31,58 \text{ ГГц}$ ;  $v_{\text{ф}} = 4,705 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\lambda_{\text{в}} = 11,48 \text{ мм}$ .

6.1.9.  $\lambda_{\text{в}} = 4 \text{ см}$ ;  $a = 2,27 \text{ см}$ .

6.1.10.  $\lambda_{\text{в}} = 4,179 \text{ см}$ ;  $\varepsilon = 1,557$ .

6.1.11.  $f = 2,978 \text{ ГГц}$ ;  $v_{\text{ф}} = 2,799 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

6.1.12.  $v_{\text{ф}} = 4,715 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $a = b = 5,5 \text{ см}$ .

6.1.13.  $v_{\text{ф}} = 2,25 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\varepsilon = 2,86$ .

6.1.14.  $a = 2,3 \text{ см}$ ;  $b = 1 \text{ см}$ .

6.1.15.  $f = 13,26 \text{ ГГц}$ .

6.1.16.  $L = 4,4 \text{ см}$ .

6.1.17.  $\dot{E}_y = 18,27 \exp(-j44^\circ 10') \text{ мВ/м}$ .

6.1.18.  $g_x = \pi/a$ ;  $h = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/a)^2}$ .

6.1.19. а)  $v_{\text{ф}} = 3,392 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\lambda_{\text{в}} = 10,55 \text{ см}$ ;

б)  $v_{\text{ф}} = 9,375 \cdot 10^{11} \text{ м/с}$ ;  $\lambda_{\text{в}} = 291,7 \text{ м}$ .

6.1.27. а)  $H_{11}$ ; б)  $H_{11}, H_{21}, H_{01}, E_{01}, E_{11}$ .

6.1.28.  $8,79 \text{ мм} < r_0 < 11,48 \text{ мм}$ .

6.1.29. а)  $5,860 \text{ ГГц} < f < 7,655 \text{ ГГц}$ ;

б)  $3,663 \text{ ГГц} < f < 4,785 \text{ ГГц}$ .

6.1.30. а)  $f_{\text{кр}} = 10,99 \text{ ГГц}$ ;  $v_{\text{ф}} = 5,613 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\lambda_{\text{в}} = 4,318 \text{ см}$ ;

б)  $f_{\text{кр}} = 6,867 \text{ ГГц}$ ;  $v_{\text{ф}} = 2,208 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\lambda_{\text{в}} = 1,699 \text{ см}$ .

6.1.31.  $\lambda_{\text{в}} = 3 \text{ см}$ ;  $d = 2r_0 = 2,21 \text{ см}$ .

6.1.32.  $f = 9,879 \text{ ГГц}$ ;  $\lambda_{\text{в}} = 4,05 \text{ см}$ .

6.1.33.  $v_{\text{ф}} = 3,36 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $d = 2r_0 = 4,039 \text{ см}$ .

6.1.34.  $v_{\text{ф}} = 2,88 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\varepsilon = 2,58$ .

$$6.1.35. f = 1,674 \text{ ГГц}; v_{\Phi} = 3,182 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$6.1.36. d = 2r_0 = 2,62 \text{ см.}$$

$$6.1.37. L = 4,88 \text{ см.}$$

$$6.1.38. \dot{E} = 25 \exp(-j105^\circ 26') \text{ МВ/м.}$$

$$6.2.1. f = 4,419 \text{ ГГц.}$$

$$6.2.2. H_{mz \max} = 0,1 \text{ А/м.}$$

$$6.2.3. Z_{cH} = 523,5 \text{ Ом}; E_{my \max} = 52,35 \text{ В/м.}$$

$$6.2.4. E_{mz \max} = 29,45 \text{ В/м.}$$

$$6.2.5. f = 70,08 \text{ ГГц.}$$

$$6.2.6. Z_{cH} = 270,3 \text{ Ом}; H_{my \max} = 0,5549 \text{ МА/м.}$$

$$6.2.7. x_1 = 1,17 \text{ см}; x_2 = 3,63 \text{ см.}$$

$$6.2.8. y_1 = 8,8 \text{ мм}; y_2 = 25,2 \text{ мм.}$$

$$6.2.9. E_m = 18,21 \text{ В/м.}$$

$$6.2.10. H_m = 2,593 \text{ МА/м.}$$

$$6.2.11. \dot{J}_{\text{пов}} = 40,49 \bar{1}_z \text{ МА/м.}$$

$$6.2.12. J_{m \text{ пов}} = 86,03 \text{ МА/м.}$$

$$6.2.13. J_{m \text{ см max}} = 1,936 \text{ А/м}^2.$$

$$6.2.14. E_{my} = 0,5769 \text{ В/м.}$$

$$6.2.15. f = 13,26 \text{ ГГц.}$$

$$6.2.16. \dot{J}_{\text{пов}} = 0,3 \cos(\pi x/a) \bar{1}_x - j0,443 \sin(\pi x/a) \bar{1}_z,$$

где  $a = 10,7 \text{ мм.}$

$$6.2.17. I_{m \text{ пов}} = 0,433 \text{ МА.}$$

$$6.2.18. I_{m \text{ см}} = 25,45 \text{ МА.}$$

$$6.2.19. \bar{E}_1 = -j[C_1 \mu_0 \omega / (2g)] \exp(j\beta_0 \cos(\varphi)x) \exp(-j\beta_0 \sin(\varphi)z) \bar{1}_y;$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{H}}_1 &= (C_1/2)[\bar{1}_z + \bar{1}_x \sin(\varphi)/\cos(\varphi)] \times \\ &\times \exp(j\beta_0 \cos(\varphi)x) \exp(-j\beta_0 \sin(\varphi)z); \end{aligned}$$

$$\dot{\bar{E}}_2 = j[C_1 \mu_0 \omega / (2g)] \exp(-j\beta_0 \cos(\varphi)x) \exp(-j\beta_0 \sin(\varphi)z) \bar{1}_y;$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{H}}_2 &= (C_1/2)[\bar{1}_z - \bar{1}_x \sin(\varphi)/\cos(\varphi)] \times \\ &\times \exp(-j\beta_0 \cos(\varphi)x) \exp(-j\beta_0 \sin(\varphi)z); \end{aligned}$$

$$v_{\Phi} = c / \sin(\varphi) = c / \sqrt{1 - (\omega_{\text{кр}}/\omega)^2}, \text{ где } \omega_{\text{кр}} = \pi c/a.$$

$$6.2.20. \cos(\varphi_{\text{пад}}) = \lambda_0/\lambda_{\text{кр}} = \lambda_0/(2a).$$

$$6.2.21. \Delta u_{\text{д}}/u_{\text{д}} = 2,43 \cdot 10^{-4}.$$

$$6.2.22. \dot{\sigma}_{\text{пов}}|_{y=0} = -j2,556 \sin(gx) \exp(-jhz) \text{ нКл/м}^2;$$

$$\dot{\sigma}_{\text{пов}}|_{y=b} = -\dot{\sigma}_{\text{пов}}|_{y=0}, \text{ где } g = 1,366 \text{ 1/см}; h = 1,588 \text{ 1/см.}$$

$$6.2.23. \dot{J}_{\text{см}} = -j2C_2[\omega^2/(c^2g)] \sin(gx) \sin(hz) \bar{1}_y;$$

$$\begin{aligned} \dot{J}_{\text{пов}}|_{y=0} &= -j2C_2 \cos(gx) \sin(hz) \bar{1}_x - \\ &- j2C_2(h/g) \sin(gx) \cos(hz) \bar{1}_z; \end{aligned}$$

$$\dot{J}_{\text{пов}}|_{x=0} = j2C_2 \sin(hz) \bar{1}_y,$$



где  $g = \pi/a$ ,  $C_2$  — комплексная амплитуда составляющей  $H_z$  в падающей волне (распространяющейся в сторону увеличения координаты  $z$ ) при  $x = z = 0$ .

$$6.2.26. E_{mr \max} = 0,12 \text{ В/м.}$$

$$6.2.27. Z_{сЕ} = 270,7 \text{ Ом; } E_{mr \max} = 16,24 \text{ В/м.}$$

$$6.2.28. H_{mz \max} = 0,0481 \text{ А/м.}$$

6.2.29.  $E_{m\phi} = E_{m\phi \max}$  и  $H_{mr} = H_{mr \max}$  при  $r = 4,8 \text{ мм}$ ;  $H_z = 0$  при  $r = 6,3 \text{ мм}$ .

6.2.30.  $E_{mz} = E_{mz \max}$  при  $r = 0$ ;  $E_{mr} = E_{mr \max}$  и  $H_{m\phi} = H_{m\phi \max}$  при  $r = 12,2 \text{ мм}$ .

6.2.31.  $H_{m\phi} = H_{m\phi \max}$  при  $r = 8,3 \text{ мм}$ ;  $E_z = 0$  при  $r = 10,9 \text{ мм}$  и  $r = r_0 = 25 \text{ мм}$ .

$$6.2.37. \bar{J}_{\text{пов}}(z_1) = -84,57 \bar{1}_{\phi} \text{ МА/м.}$$

$$6.2.38. J_{m \text{ пов}} = 14,45 \text{ МА/м.}$$

$$6.2.39. \bar{J}_{\text{пов}} = [87,29 \cos(\phi) \bar{1}_{\phi} - j72,11 \sin(\phi) \bar{1}_z] \exp(-j350z) \text{ МА/м.}$$

$$6.2.40. J_{m \text{ пов}} = 1,781 \text{ МА/м.}$$

$$6.2.41. I_{m \text{ пов}} = 7,715 \text{ МА.}$$

$$6.2.42. I_{m \text{ см}} = 0,9323 \text{ МА.}$$

$$6.3.1. \Pi_{\text{ср max}} = 1,031 \text{ Вт/см}^2; \Pi_{\text{ср сеч}} = 0,515 \text{ Вт/см}^2.$$

$$6.3.2. E_{my \max} = 80,49 \text{ В/м; } P_{\text{пер}} = 1,712 \text{ мВт.}$$

$$6.3.3. E_{my \max}(z_1) = 0,4455 \text{ кВ/см; } E_{my \max}(z_2) = 0,8752 \text{ кВ/см.}$$

$$6.3.4. E_{my \max} = 1,228 \text{ кВ/см; } J_{m \text{ пов max}} = 2,606 \text{ А/см.}$$

$$6.3.5. E_{mx \max} = 69,5 \text{ В/м; } E_{mz \max} = 158,2 \text{ В/м.}$$

$$6.3.6. P_{\text{пред}} = 2,720 \text{ мВт.}$$

$$6.3.7. P_{\text{пот пог}} = 18,04 \text{ мВт.}$$

$$6.3.8. P_{\text{пот пог}} = 321,3 \text{ мВт.}$$

$$6.3.9. P_{\text{пот пог}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_m}} \frac{(\omega \varepsilon \varepsilon_0)^2}{2g^4} \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 a + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 b \right] E_{z0}^2.$$

$$6.3.10. P_{\text{пот пог}} = \text{tg}(\delta)(\omega \varepsilon_0 \varepsilon ab/8)[1 + h^2/g^2] E_{z0}^2.$$

$$6.3.11. P_{\text{пот пог}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma_m}} \left( a + b + \frac{h^2}{g^4} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 a + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 b \right] \right) H_{z0}^2.$$

$$6.3.12. P_{\text{пот пог}} = \text{tg}(\delta)(\omega \varepsilon_0 \varepsilon ab/8)(\omega \mu_0/g)^2 H_{z0}^2.$$

$$6.3.13. h'' = 1,137 \cdot 10^{-3} \text{ 1/м; } \Delta_{\text{пог}} = 9,87 \text{ дБ/кМ.}$$

$$6.3.14. h'' = 0,243 \cdot 1/\text{м; } \Delta_{\text{пог}} = 2,11 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.15. h'' = 0,0536 \cdot 1/\text{м; } \Delta_{\text{пог}} = 0,47 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.16. h'' = 1,65 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м; } \Delta_{\text{пог}} = 0,143 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.17. h'' = 7,57 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м; } \Delta_{\text{пог}} = 0,66 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.18. f_{\min} = 22,63 \text{ ГГц, } h''(f_{\min}) = 1,690 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м;}$$

$$h''(14,06 \text{ ГГц}) = 2,005 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м.}$$

$$6.3.19. h''(b_1)/h''(b_2) = 0,654.$$

$$6.3.20. \Delta_{\text{пог}} = 0,18 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.21. P_{\text{пот пог диэл}} = 2,30 \text{ Вт.}$$

$$6.3.22. \eta = 63,27\%; h'' = 0,019 \text{ 1/м.}$$

$$6.3.23. \text{ а) } 0,6 \text{ кВт; б) } 0,444 \text{ кВт; в) } 25,92 \text{ кВт; г) } 74,08 \text{ кВт.}$$

$$6.3.30. P_{\text{пер}} = 5,107 \text{ мВт.}$$

$$6.3.31. H_{mz0} = 25,59 \text{ А/м; } E_{m\varphi\text{max}} = 7,670 \text{ кВ/м.}$$

$$6.3.32. J_{m\text{пов}} = 85,48 \text{ А/м.}$$

$$6.3.33. P_{\text{пред}} = 5,104 \text{ мВт.}$$

$$6.3.34. P_{\text{пред}} = 0,843 \text{ мВт.}$$

$$6.3.35. P_{\text{пот пог}} = 0,8302 \text{ Вт.}$$

$$6.3.36. P_{\text{пот пог}} = 59,75 \text{ мкВт.}$$

$$6.3.37. P_{\text{пот пог}} = \sqrt{\omega\mu_0 / (2\sigma_m)} \pi r_0^3 (\omega\varepsilon_0 / v_{01})^2 E_{z0}^2 J_1^2(v_{01}).$$

$$6.3.38. P_{\text{пот пог}} = (\pi/2) \text{tg}(\delta) \omega^3 \varepsilon_0 \varepsilon [\mu_0 r_0^2 J_0(\mu_{01}) / \mu_{01}]^2 H_{z0}^2.$$

$$6.3.39. h'' = 2,158 \cdot 10^{-3} \text{ 1/м; } \Delta_{\text{пог}} = 0,0187 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.40. h'' = 3,414 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м; } \Delta_{\text{пог}} = 0,297 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.41. h'' = 2,016 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м; } \Delta_{\text{пог}} = 0,175 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.42. h'' = 0,0905 \text{ 1/м; } \Delta_{\text{пог}} = 0,786 \text{ дБ/м.}$$

$$6.3.43. f_{\text{min}} = 34,62 \text{ ГГц, } h''(f_{\text{min}}) = 8,891 \cdot 10^{-3} \text{ 1/м; } \\ h''(12,67 \text{ ГГц}) = 2,309 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м.}$$

$$6.3.44. \Delta_{\text{пог}} = 1,265 \text{ дБ/м.}$$

$$6.4.1. \text{ а) } v_{\text{гп}} = 2,159 \cdot 10^8 \text{ м/с; б) } v_{\text{гп}} = 1,823 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$6.4.2. v_{\text{гп}} = 2,153 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$6.4.3. a = 50 \text{ мм; } b = 25 \text{ мм.}$$

$$6.4.4. \tau_3 = 0,233 \text{ мкс.}$$

$$6.4.5. \varepsilon = 2,25.$$

$$6.4.6. f = 3,437 \text{ ГГц.}$$

$$6.4.7. a = 16,6 \text{ мм.}$$

$$6.4.8. \varepsilon = 1,047.$$

$$6.4.15. \Delta t / \tau_{\text{и}} = [(f_0 / f_{\text{кр}})^2 - 1]^{-3/2} 2L / (c \tau_{\text{и}}^2 f_{\text{кр}}).$$

$$6.4.16. \tau_{\text{и}} \geq 23,28 \text{ нс.}$$

$$6.4.17. L \leq 4,33 \text{ м.}$$

$$6.4.18. E_y(t) = 0,8 \exp[-3,1 \cdot 10^{14}(t - 0,2199 \cdot 10^{-6})^2] \times \\ \times \cos(2\pi \cdot 10^{10}t - 161^\circ 38') \text{ В/м.}$$

$$6.4.19. E_y(t) = 10 \exp[-1,037 \cdot 10^{-2}|z - 44,37|] \times \\ \times \cos(98,59z - 86^\circ 14') \text{ В/м.}$$

$$6.4.20. E_y(t) = 0,2 \exp[-2,5 \cdot 10^{13}(t - 2,175 \cdot 10^{-7})^2] \times \\ \times \cos(1,5 \cdot 10^{11}t + 32^\circ 5') + 0,2 \exp[-2,5 \cdot 10^{13}(t - 4,180 \cdot 10^{-7})^2] \times \\ \times \cos(1,5 \cdot 10^{11}t + 55^\circ 38') \text{ В/м.}$$

$$6.4.21. \text{ а) } v_{\text{гп}} = 2,130 \cdot 10^8 \text{ м/с; б) } v_{\text{гп}} = 1,815 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$6.4.22. D = 2r_0 = 26,6 \text{ мм.}$$

$$6.4.23. \tau_3 = 45,24 \text{ нс.}$$

$$6.4.24. \varepsilon = 1,861.$$

$$6.4.27. \tau_{\text{и}} \geq 61 \text{ нс.}$$

$$6.4.28. L \leq 21 \text{ м.}$$

$$6.4.30. \varphi(\omega) = -(L/c) \sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{кр}}^2}, \text{ где } \omega_{\text{кр}} = \mu_{11}c/r_0.$$

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

$$7.1.1. l = 2 \text{ см.}$$

$$7.1.2. l = 4 \text{ см; } f_{\text{рез}} = 6,369 \text{ ГГц.}$$

$$7.1.3. f_{\text{рез}} = 2,989 \text{ ГГц; тип колебания — } H_{101}, l = 70 \text{ мм.}$$

7.1.4.  $l = 15 \text{ мм, } a = 13,4 \text{ мм;}$  размер  $b$  из условий задачи не определяется (в волноводах обычно  $b \approx a/2$ ).

7.1.5. Основной тип колебаний —  $H_{101}$  с резонансной частотой  $f_{\text{рез}} = 6,25 \text{ ГГц}$ , ближайший тип колебаний —  $E_{110}$  с резонансной частотой  $f_{\text{рез}} = 8,385 \text{ ГГц}$ .

$$7.1.6. b = 1,5 \text{ см.}$$

$$7.1.7. \varepsilon = 3,063.$$

$$7.1.8. f_{\text{рез}}(H_{101})/f_{\text{рез}}(E_{111}) = 0,8165.$$

$$7.1.9. a/b = 1,183.$$

7.1.10.  $l = 6,405 \text{ см,}$  для перехода к колебанию  $H_{102}$  длину резонатора нужно удвоить.

$$7.1.11. 45,4 \text{ мм} \geq l \geq 21,2 \text{ мм.}$$

7.1.12. Необходимо увеличить длину резонатора от  $5,33 \text{ см}$  до  $6,02 \text{ см}$ .

$$7.1.13. l = 10 \text{ мм.}$$

7.1.16.  $J_{\text{см}} = 0,5 \cos(1,054 \cdot 10^{11} t) \text{ А/м}^2$ . Вектор плотности тока смещения направлен вдоль оси резонатора (ось  $z$ ).

$$7.1.17. H_{m \text{ max}} = 2,207 \text{ МА/м.}$$

$$7.1.18. J_{m \text{ см max}} = 90,88 \text{ А/м}^2.$$

$$7.1.19.$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\text{пов}}|_{x=0} &= 19,74 \sin(78,54z) \sin(2,714 \cdot 10^{10} t) \bar{I}_y \text{ МА/м;} \\ \bar{J}_{\text{пов}}|_{y=b} &= 19,74 \cos(44,88x) \sin(78,54z) \sin(2,714 \cdot 10^{10} t) \bar{I}_x + \\ &+ 34,55 \sin(44,88x) \cos(78,54z) \sin(2,714 \cdot 10^{10} t) \bar{I}_z \text{ МА/м.} \end{aligned}$$

$$7.1.26. I_{m \text{ см}} = 62,28 \text{ МА; } q_m = 3,01 \text{ пКл.}$$

$$7.1.27. W_{\text{зап}} = 4,974 \text{ мкДж.}$$

$$7.1.28. W_{\text{э}}(t) = 2,949 \cdot 10^{-11} [1 - \cos(4,446 \cdot 10^{10} t)] \text{ Дж;}$$

$$W_{\text{м}}(t) = 2,949 \cdot 10^{-11} [1 + \cos(4,446 \cdot 10^{10} t)] \text{ Дж;}$$

$$W_{\text{зап}} = 5,898 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$

$$7.1.29. P_{\text{ср пот}} = 0,3906 \text{ мВт.}$$

$$7.1.30. P_{\text{ср пот}} = 3,437 \text{ мВт.}$$

$$7.1.31. f_{\text{рез}} = 5,336 \text{ ГГц; } Q = 10,262 \cdot 10^3.$$

$$7.1.32. Q_{\text{м}} = 9,474 \cdot 10^3; Q_{\text{д}} = 4 \cdot 10^3; Q = 2,813 \cdot 10^3.$$

$$7.1.33. Q = \pi \sqrt{20\sqrt{2}/3} \sqrt{a\sigma_{\text{м}}};$$

$$Q = 5,150 \cdot 10^3 \text{ для } a = 5 \text{ мм;}$$

$$Q = 32,570 \cdot 10^3 \text{ для } a = 20 \text{ см.}$$

$$7.1.34. a = 20,4 \text{ мм.}$$

$$7.1.35. Q = 2534.$$

$$7.1.36. P_{\text{ср пот}} = 0,5862 \text{ мВт.}$$

$$7.1.37. P_{\text{ср н}} = 4,805 \text{ мВт.}$$

$$7.1.38. t = 8,579 \text{ мкс.}$$

$$7.1.39. C_{\text{экв}} = 2,293 \text{ пФ; } L_{\text{экв}} = 0,136 \text{ нГн.}$$

$$7.2.1. f_{\text{рез}} = 5,321 \text{ ГГц.}$$

$$7.2.2. \text{Основной тип — } E_{010} \text{ с резонансной частотой } f_{\text{рез}} = 3,828 \text{ ГГц; ближайший тип — } H_{111} \text{ с резонансной частотой } f_{\text{рез}} = 5,795 \text{ ГГц.}$$

$$7.2.3. \text{Если } D/l < 0,985, \text{ то основным типом является колебание } H_{111}. \text{ При } D/l > 0,985 \text{ основной тип колебания — } E_{010}.$$

$$7.2.4. D = 2r_0 = 23,0 \text{ мм; } l = 40,6 \text{ мм.}$$

$$7.2.5. D = 2r_0 = 76,6 \text{ мм; } l = 53,6 \text{ мм.}$$

$$7.2.6. l = 31,5 \text{ мм.}$$

$$7.2.7. f_{\text{рез0}} = 5,056 \text{ ГГц; } f_{\text{рез1}} = 6,262 \text{ ГГц.}$$

$$7.2.8. \varepsilon = 2,56.$$

$$7.2.9. N_e = 1,618 \cdot 10^{16} \text{ 1/м}^3.$$

$$7.2.10. 21,1 \text{ мм} \leq l \leq 39,3 \text{ мм.}$$

$$7.2.15. H_{m \text{ max}} = 15,44 \text{ А/м.}$$

$$7.2.16. J_{m \varphi \text{ пов max}} = 255,0 \text{ А/м (при } z = l/2, \varphi = 0); J_{m z \text{ пов max}} = 94,5 \text{ А/м (при } z = 0, \varphi = 90^\circ).$$

$$7.2.17. \text{а) } \bar{E}(t) = 10J_0(120,25r)\cos(3,608 \cdot 10^{10}t)\bar{1}_z \text{ В/м;}$$

$$\bar{H}(t) = -26,53J_1(120,25r)\sin(3,608 \cdot 10^{10}t)\bar{1}_\varphi \text{ МА/м;}$$

$$\text{б) } \bar{J}_{\text{см}}(t) = -3,19J_0(120,25r)\sin(3,608 \cdot 10^{10}t)\bar{1}_z \text{ А/м}^2;$$

$$\bar{J}_{\text{пов}}(t)|_{r=r_0} = 13,77\sin(3,608 \cdot 10^{10}t)\bar{1}_z \text{ МА/м;}$$

$$\bar{J}_{\text{пов}}(t)|_{z=0} = 26,53J_1(120,25r)\sin(3,608 \cdot 10^{10}t)\bar{1}_r \text{ МА/м.}$$

$$7.2.18. W_{\text{зап}} = 1,90 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

$$7.2.19. W_{\text{зап}} = 1,671 \cdot 10^{-12} \text{ Дж;}$$

$$W_{\text{э}}(t) = 8,353 \cdot 10^{-13}[1 + \cos(5,356 \cdot 10^{10}t)] \text{ Дж;}$$

$$W_{\text{м}}(t) = 8,353 \cdot 10^{-13}[1 - \cos(5,356 \cdot 10^{10}t)] \text{ Дж.}$$

$$7.2.20. P_{\text{ср пот мет}} = 4,880 \text{ Вт.}$$

$$7.2.21. P_{\text{ср пот диэл}} = 2,724 \text{ мВт.}$$

$$7.2.22. Q = 8,893 \cdot 10^3.$$

$$7.2.23. Q_{\text{м}} = 10,606 \cdot 10^3; Q_{\text{д}} = 5 \cdot 10^3; Q = 3,398 \cdot 10^3.$$

$$7.2.24. Q = \sqrt{60\pi\sigma\nu_{01}r_0}/(1+r_0/l).$$

$$7.2.26. W_{\text{пот}}/W_{\text{зап}} = 0,2428.$$

$$7.2.27. D = 2r_0 = 76,6 \text{ мм; } l = 66,9 \text{ мм.}$$

$$7.2.28. \tau_{\text{н}} \geq 41,55 \text{ мкс.}$$

$$7.2.29. P_{\text{н}} \leq 2,219 \text{ Вт.}$$

$$7.2.30. P_{\text{н}} \leq 35,022 \text{ кВт.}$$

$$7.2.31. C_{\text{экв}} = 0,173 \text{ пФ; } L_{\text{экв}} = 2,5 \text{ нГн.}$$

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

8.1.1. а)  $H_{m\varphi} = 15 \text{ мкА/м}$ ;  $E_{m\theta} = 5,655 \text{ мВ/м}$ ;

б)  $H_{m\theta} = 4,441 \text{ мкА/м}$ ;  $E_{m\varphi} = 1,674 \text{ мВ/м}$ ;

в)  $H_{m\theta} = 0,7958 \text{ мкА/м}$ ;  $E_{m\varphi} = 0,30 \text{ мВ/м}$ .

8.1.2.  $E_{m\text{эл}}/E_{m\text{рам}} = 2,026$ .

8.1.3.  $I_{m\text{э}} = 1,992 \text{ А}$ ;  $P_{\Sigma} = 10,02 \text{ Вт}$ .

8.1.5. а)  $P_{\text{ср}} = 29,45 \text{ нВт/м}^2$ ;  $P_{\Sigma} = 24,67 \text{ Вт}$ ;

б)  $P_{\text{ср}} = 2,802 \text{ нВт/м}^2$ ;  $P_{\Sigma} = 2,347 \text{ Вт}$ .

8.1.6.  $r_{\text{пред}} = 189,7 \text{ км}$ .

8.1.7.  $P_{\Sigma\text{пред}} = 4 \text{ кВт}$ .

8.1.8.  $P_{\Sigma} = 83,78 \text{ кВт}$ .

8.1.9.  $U_{m\text{щ}} = 58,25 \text{ В}$ ;  $I_{m\text{э}} = 0,309 \text{ А}$ .

8.1.10. а)  $E_{my} = 3,332 \text{ В/м}$ ;  $H_{mx} = H_{mz} = 6,25 \text{ мА/м}$ ;

б)  $E_{my} = 0,9689 \text{ В/м}$ ;  $H_{mx} = H_{mz} = 1,817 \text{ мА/м}$ ;

в)  $E_{mx} = E_{mz} = 41,67 \text{ мВ/м}$ ;  $H_{my} = 0,1563 \text{ мА/м}$ .

8.1.11. а)  $I_{m\text{э}} = 130,3 \text{ мА}$ ; б)  $I_{m\text{э}} = 92,13 \text{ мА}$ ; в)  $I_{m\text{э}} = 264,0 \text{ мА}$ ;

г)  $I_{m\text{э}} = 186,7 \text{ мА}$ .

8.1.12.  $I_{m\text{э}} = 2,708 \text{ А}$ ;  $E_{m\theta} = 0,1667 \text{ В/м}$ .

8.1.13.  $\dot{p}_a = \dot{I}_a l / (j\omega)$ .

8.1.14.  $D_{\text{max}} = 1,5$ .

8.1.15. Следует перемещаться по окружности с центром в точке  $(x_{\text{ц}}, z_{\text{ц}})$ , где  $z_{\text{ц}} = 0$ ,  $x_{\text{ц}} = (x_0^2 + z_0^2) / (2x_0)$ . Здесь  $x_0, z_0$  — координаты точки, в которой проведено первое измерение амплитуды напряженности электрического поля. Уравнение окружности:  $(x - x_{\text{ц}})^2 + z^2 = x_{\text{ц}}^2$ .

8.1.16.  $L = 47,14 \text{ см}$ ,  $\varphi = \varphi_0 - \pi y^2$ , где  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний в точке  $x = 10 \text{ м}$ ,  $y = z = 0$ .

8.1.17.  $x_{\text{изл}} = -1 \text{ м}$ ,  $y_{\text{изл}} = 0$ ;  $P_{\Sigma} = 2,25 \text{ мВт}$ .

8.1.18. а)  $F(\varphi) = \cos[(\pi/2)\cos(\varphi)]$ ; б)  $F(\varphi) = \sin[(\pi/2)\cos(\varphi)]$ .

8.1.19. а)  $F(\varphi) = \cos[(\pi/4)(1 - \cos[\varphi])]$ ;

б)  $F(\varphi) = \sin[(\pi/4)(1 - \cos[\varphi])]$ .

8.1.20. а) в плоскости  $XOY$   $\vec{E} = -\vec{E}_0 e^{-j\varphi} \vec{1}_{\varphi}$ ;  $F_{\Pi} = 1$ ;

б) в плоскости  $XOZ$   $\vec{E} = -\vec{E}_0 (\vec{1}_{\varphi} + j \cos(\theta) \vec{1}_{\theta})$ ;

$F_{\Pi} = (1 + \cos^2\theta)/2$ ; в направлении максимального излучения ( $\theta = 0$ ) поляризация круговая; векторы поля вращаются против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\vec{1}_z$ ;

в) в общем случае для дальней зоны

$$\vec{E} = -\vec{E}_0 e^{-j\varphi} (\vec{1}_{\varphi} + j \cos(\theta) \vec{1}_{\theta}); F_{\Pi} = (1 + \cos^2\theta)/2.$$

В этих формулах  $\vec{E}_0 = [I_x l / (2\lambda)] Z_c \exp(-j\beta r) / r$ .

8.1.21.  $\vec{E} = [Z_0 / (2\lambda r)] [(\omega/c) S_p \dot{I}_p - j \dot{I}_a l \cos(\theta)] \exp(-j\beta r) \vec{1}_{\theta}$ . Излучение отсутствует в направлении  $\theta = 180^\circ$ , если  $(\omega/c) S_p I_{m p} = I_{m \text{э}} l$ ;  $\varphi_p = \varphi_a - \pi/2$ . При этом  $F(\theta) = (1 + \cos\theta)/2$ .

8.1.22. а)  $\dot{I}_{\varphi 3} = -\dot{I}_{\varphi}$ ; б)  $\dot{I}_{\varphi 3} = \dot{I}_{\varphi}$ ; в)  $\dot{I}_{\text{м}3} = \dot{I}_{\text{м}}$ ;  
 г)  $\dot{I}_{\text{м}3} = -\dot{I}_{\text{м}}$ ; д)  $\dot{I}_{\text{п}3} = -\dot{I}_{\text{п}}$ ; е)  $\dot{I}_{\text{п}3} = \dot{I}_{\text{п}}$ .

8.1.24.  $R_{\Sigma} = 3,948 \text{ Ом}$ .

8.1.25.  $D_{\text{max}} = 3,0$ .

8.1.26. 1. а)  $E_m = 14,14 \text{ мВ/м}$ ; б)  $E_m = 20 \text{ мВ/м}$ ; в)  $E_m = 0$ .

2. а)  $E_m = 14,14 \text{ мВ/м}$ ; б)  $E_m = 0$ ; в)  $E_m = 20 \text{ мВ/м}$ .

8.1.27. 1. а)  $E_m = 0,5278 \text{ В/м}$ ; б)  $E_m = 0,3732 \text{ В/м}$ ;

в)  $E_m = 0,1849 \text{ В/м}$ .

2. а)  $E_m = 0,9374 \text{ В/м}$ ; б)  $E_m = 0,6628 \text{ В/м}$ ;

в)  $E_m = 0,5046 \text{ В/м}$ .

8.1.28. а)  $F(\varphi) = \sin[(\pi/2)\cos(\varphi)]$ ; б)  $F(\varphi) = \sin[(\pi/2)\cos(\varphi)]\cos(\varphi)$ ;

в)  $F(\varphi) = \cos[(\pi/2)\cos(\varphi)]\sin(\varphi)$ ; г)  $F(\varphi) = \sin[\pi\cos(\varphi)]$ ;

д)  $F(\varphi) = \sin[\pi\cos(\varphi)]\cos(\varphi)$ ; е)  $F(\varphi) = \cos[(\pi\cos(\varphi)]\sin(\varphi)$ ,

здесь угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$  в плоскости  $XOY$ .

8.1.29.  $\dot{A}_{\varphi} = j\mu_a \frac{\dot{I}_{\text{п}} S_{\text{п}}}{2\lambda} \sin(\theta) \frac{e^{-j\beta r}}{r} \bar{1}_{\varphi}$ ;

$\dot{H}_{\theta} = -\pi \frac{\dot{I}_{\text{п}} S_{\text{п}}}{\lambda^2} \sin(\theta) \frac{e^{-j\beta r}}{r}$ ;  $\dot{E}_{\varphi} = -\dot{H}_{\theta} Z_c$ ,

где  $S_{\text{п}} = \pi r_0^2$ .

8.1.30.  $\Pi_{\text{cp}2}/\Pi_{\text{cp}1} = \cos^2(\varphi)$ .

8.2.4.  $R_{\text{д}3} = 2,25 \text{ м}$ .

8.2.6.  $\dot{H} = (j\omega/Z_c)[\dot{A}_{\varphi\theta} \bar{1}_{\theta} - \dot{A}_{\varphi\theta} \bar{1}_{\varphi}]$ ;

$\dot{E} = -j\omega(\dot{A}_{\varphi\theta} \bar{1}_{\theta} + \dot{A}_{\varphi\theta} \bar{1}_{\varphi})$ , где  $Z_c = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$ ;

$\dot{A}_{\varphi\theta} = [\mu_a/(4\pi)]F_{\varphi,\theta} \exp(-j\beta r)/r$ .

8.2.7.  $\dot{H}_{\varphi} = [j\beta \sin(\theta) \exp(-j\beta r)/(4\pi r)] \times$

$\times \int_{-L/2}^{L/2} \dot{I}_{\varphi}(z') \exp(j\beta z' \cos(\theta)) dz'$ ;

$\dot{E}_{\theta} = \dot{H}_{\varphi} Z_c$ ;  $\beta = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$ .

8.2.8.  $\dot{H}_{\varphi} = jI_0 [\cos((\pi/2)\cos(\theta))/\sin(\theta)] \exp(-j\beta r)/(2\pi r)$ ;

$\dot{E}_{\theta} = \dot{H}_{\varphi} Z_c$ ;  $F(\theta, \varphi) = \cos[(\pi/2)\cos(\theta)]/\sin(\theta)$ .

8.2.9.  $\dot{E} = j\beta E_0 ab \bar{F}(\varphi, \theta) \exp(-j\beta r)/(4\pi r)$ , где  $\beta = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$ ;

$\bar{F} = F_{\theta} \bar{1}_{\theta} + F_{\varphi} \bar{1}_{\varphi}$ ;

$F_{\theta} = \frac{\sin(\beta_x a/2)}{\beta_x a/2} \frac{\sin(\beta_y b/2)}{\beta_y b/2} \cos(\varphi) \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a} \cos(\theta)\right)$ ;

$F_{\varphi} = -\frac{\sin(\beta_x a/2)}{\beta_x a/2} \frac{\sin(\beta_y b/2)}{\beta_y b/2} \sin(\varphi) \left(\frac{Z_c}{Z_a} + \cos(\theta)\right)$ ;

$\beta_x = \beta \sin(\theta) \cos(\varphi)$ ;  $\beta_y = \beta \sin(\theta) \sin(\varphi)$ .

$$8.2.10. F(\theta) = [1 + \cos(\theta)] \sin(\beta \sin(\theta)/2) / (\beta \sin(\theta)/2).$$

$$8.2.11. \dot{\vec{E}} = j\beta E_0 \Delta x \Delta y [1 + \cos(\theta)] (\cos(\varphi) \bar{1}_0 - \sin(\varphi) \bar{1}_\varphi) \exp(-j\beta r) / (4\pi r).$$

$$8.2.12. \dot{\vec{E}} = j\beta E_0 \Delta x \Delta y [1 + \cos(\theta)] [\exp(-j\beta r) / (4\pi r)] (\pm \bar{1}_\theta),$$

где  $\beta = 2\pi/\lambda$ ; верхний знак берется для  $x > 0$  ( $\varphi = 0$ ), нижний знак — для  $x < 0$  ( $\varphi = \pi$ ).

$$8.2.13. \dot{\vec{E}} = -j\beta E_0 \Delta x l \frac{\sin(\beta \cos(\theta) l / 2)}{\beta \cos(\theta) l / 2} \sin(\theta) \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \bar{1}_\varphi;$$

$$\dot{\vec{H}} = -(\dot{E}_\varphi / Z_0) \bar{1}_0.$$

$$8.2.14. \dot{\vec{A}}_m = E_0 dl [e^{-j\beta r} / (4\pi r)] \bar{1}_z;$$

$$\dot{\vec{E}} = -j\beta E_0 dl \sin(\theta) [e^{-j\beta r} / (4\pi r)] \bar{1}_\varphi;$$

$$\dot{\vec{H}} = -(\dot{E}_\varphi / Z_0) \bar{1}_0; \quad \dot{I}_m = E_0 d = \dot{U}_{ш}.$$

8.2.15. В области  $z < 0$   $\dot{\vec{E}} = -(\dot{J}_0 Z_0 / 2) e^{j\beta z} \bar{1}_x$ ;  $\dot{\vec{H}} = (\dot{J}_0 / 2) e^{j\beta z} \bar{1}_y$ ;  
для  $z > 0$   $\dot{\vec{E}} = -(\dot{J}_0 Z_0 / 2) e^{-j\beta z} \bar{1}_x$ ;  $\dot{\vec{H}} = -(\dot{J}_0 / 2) e^{-j\beta z} \bar{1}_y$ , где  $\beta = \omega/c$ ;  
 $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ .

8.2.16. В области  $z < 0$

$$\dot{\vec{E}} = -\frac{\dot{J}_0 Z_0}{2\sqrt{1 - (\beta_x / \beta)^2}} \exp[-j(\beta_x x - \beta_z z)] \bar{1}_y;$$

$$\dot{\vec{H}} = -\frac{\dot{J}_0}{2} \left( \bar{1}_x + \frac{1}{\sqrt{(\beta / \beta_x)^2 - 1}} \bar{1}_z \right) \exp[-j(\beta_x x - \beta_z z)];$$

для  $z > 0$

$$\dot{\vec{E}} = -\frac{\dot{J}_0 Z_0}{2\sqrt{1 - (\beta_x / \beta)^2}} \exp[-j(\beta_x x + \beta_z z)] \bar{1}_y;$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{\dot{J}_0}{2} \left( \bar{1}_x - \frac{1}{\sqrt{(\beta / \beta_x)^2 - 1}} \bar{1}_z \right) \exp[-j(\beta_x x + \beta_z z)],$$

где  $\beta = \omega/c$ ;  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ ;  $\beta_x = k_x$ ;  $\beta_z = \sqrt{\beta^2 - k_x^2}$ .

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## 1. ТАБЛИЦЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НЕКОТОРЫХ МАТЕРИАЛОВ

Параметры высокочастотных диэлектриков

Параметр	Материал			
	Полиэтилен	Полистирол	Фторопласт	Плавленый кварц
$\epsilon$	2,25	2,56	2,08	3,80
$\text{tg}\delta$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$

Значения проводимостей металлов

Проводимость	Материал			
	Серебро	Медь	Латунь	Цинк
$\sigma$ , См/м	$6,1 \cdot 10^7$	$5,7 \cdot 10^7$	$1,4 \cdot 10^7$	$1,7 \cdot 10^7$

## 2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ПАКЕТА MATHCAD

### 2.1. ОСОБЕННОСТИ ВВОДА ФОРМУЛ В ПАКЕТЕ MATHCAD

Для ввода нижнего индекса массива используйте клавишу левой скобки <[>.

Для ввода буквенного нижнего индекса, который не будет восприниматься в Mathcad как номер элемента массива, нажмите клавишу точки <.>.



Рекомендуется обозначать действительную часть комплексного числа с помощью апострофа «'», а мнимую часть — двойного апострофа «''». Для ввода «'» нажмите <Ctrl>+<F7>, для ввода «''» нажмите то же самое дважды. Пример:  $\dot{E}_x = E'_x + jE''_x$ , но  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ .

Чтобы вставить греческую букву, напечатайте соответствующую латинскую букву и нажмите <Ctrl>+G. Для ввода  $\pi$  нажмите <Ctrl>+<Shift>+P.

Используйте запись комплексных чисел, обозначая мнимую единицу с помощью символа «j». Для этого определите j, как  $\sqrt{-1}$ , а в меню **Format** используйте пункты **Result**, затем **Display Options**, затем **Imaginary Value** и выбирайте j. При этом ваш ввод и вывод результатов будут выполняться с использованием j в качестве мнимой единицы.

Для ввода основных математических операций в математической панели используйте **Calculator Toolbar**. Для ввода знаков математических операций суммирования, интегрирования и дифференцирования в математической панели используйте **Calculus Toolbar**.

## 2.2. ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Для ввода шаблона графика в математической панели используйте **Graph Toolbar**.

Для получения желаемого вида двухмерного графика щелкните дважды на поле графика и установите достаточное число разбиений координатной сетки: снимите флажок с **Auto Grid** и установите **Number of Grids** не менее 10. После этого поставьте флажок на **Grid Lines**, в результате на графике появится координатная сетка.

При первоначальном наблюдении вида графика обратите внимание на пределы изменения переменных на осях. Эти пределы должны быть такими, чтобы: а) график был наглядным и отображал интересующую вас область; б) в узлах координатной сетки были числа кратные 2, 3, 5 (или 0,2, 0,3, 0,5) и т. п. Если переменные на осях имеют слишком большие или малые по модулю значения, то используйте на осях графика переменные с множителем  $10^n$  или  $10^{-n}$ . В узлах координатной сетки не должны стоять числа с большим количеством нулей. Числа в соседних узлах не должны перекрываться (выбирайте удобный, не мелкий размер графика в документе).

При построении частотных зависимостей ось частот, как правило, оформляется в логарифмическом масштабе (двойной щелчок по полю графика и выбираем **Log Scale** для X-Axis).

### 2.3.

#### ПОИСК КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ

Для решения одного уравнения одной переменной  $f(x) - g(x) = 0$  используйте функцию `root(f(x) - g(x), x)`. Для решения системы уравнений нескольких переменных используйте конструкции `Given` (блок уравнений), `Find(x, y, ...)`. В любом случае перед записью ключевых слов нужно задать начальные значения искомых величин.

### 2.4.

#### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Используйте процедуры `rkfixed` или `rkadapt`. Для этого: 1) запишите уравнения для действительных и мнимых частей векторов поля, в которых слева стоят только производные от искомых величин; 2) введите вектор  $D(x, Y)$  правых частей этой системы (здесь в качестве примера  $x$  — независимая переменная,  $Y$  — вектор искомых величин); 3) введите  $Y_0$  — вектор начальных значений искомых величин (при  $x = 0$ ); 4) вызывайте, например  $Y := \text{rkfixed}(Y_0, x_{\text{нач}}, x_{\text{кон}}, N, D)$ , где  $N$  — число точек, в которых ищется решение — матрица  $Y$ . Нужная функция определяется при обращении к соответствующему столбцу матрицы  $Y$ , например

$$E'_z(x) = Y^{<1>}, \quad E''_z(x) = Y^{<2>}.$$

Дифференциальное уравнение Гельмгольца — уравнение 2-го порядка, и его нужно преобразовать в два дифференциальных уравнения 1-го порядка, введя вспомогательную функцию — первую производную от искомой функции, например

$$E'_z(x) = Y^{<1>}, \quad E''_z(x) = Y^{<2>}, \quad \frac{d}{dx}(E'_z) = Y^{<3>}, \quad \frac{d}{dx}(E''_z) = Y^{<4>}.$$

### 2.5.

#### ПОСТРОЕНИЕ КАРТИН ПОЛЕЙ

Для построения картины линий постоянного уровня для некоторой скалярной функции координат пользуйтесь в панели **Graph** режимом **Contour Plot** (или нажмите **<Ctrl>+5**). Для построения картины векторного поля пользуйтесь в панели **Graph** режимом **Vector Field Plot**.

Для построения полутоновой картины пространственного распределения для некоторой скалярной функции координат пользуйтесь в панели Graph режимом **Surface Plot** (или нажмите **<Ctrl>+2**). При этом в закладке **General** выберите **Contour Plot**, в **Appearance** выберите **Fill Contours**, в **Advanced** выберите **Choose Colormap** и далее — **Greyscale**.

## 2.6. ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЛИПСА ПОЛЯРИЗАЦИИ НЕКОТОРОГО ВЕКТОРА

Определите проекции вектора как функции времени. Задайте диапазон изменения времени от 0 до периода  $T$  с достаточно малым шагом. В графическом режиме **X–Y Plot** выберите одну из проекций как переменную по оси  $X$ , а другую проекцию — как переменную по оси  $Y$ .



## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков, С. И.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М. : Высшая школа, 1992.
2. *Петров, Б. М.* Электродинамика и распространение радиоволн. — М. : Горяч. Линия-Телеком, 2007.
3. *Никольский, В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. — М. : Наука, 1989.
5. *Федоров, Н. Н.* Основы электродинамики. — М. : Высшая школа, 1980.
6. *Гольдштейн, Л. Д.* Электромагнитные поля и волны / Л. Д. Гольдштейн, Н. В. Зернов. — М. : Радио и связь, 1971.
7. *Вайнштейн, Л. А.* Электромагнитные волны. — М. : Радио и связь, 1988.
8. *Тамм, И. Е.* Основы теории электричества. — М. : Наука, 1977.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<i>Глава первая</i>	
<b>Элементы векторного анализа</b> .....	7
Справочный материал .....	7
1.1. Характеристики векторных и скалярных полей .....	8
<i>Глава вторая</i>	
<b>Электростатика и магнитостатика</b> .....	13
Справочный материал .....	13
2.1. Электростатические поля .....	15
2.2. Стационарные магнитные поля .....	19
<i>Глава третья</i>	
<b>Основные положения электродинамики</b> .....	22
Справочный материал .....	22
3.1. Уравнения Максвелла .....	26
3.2. Энергетические соотношения в электродинамике ....	33
3.3. Граничные условия для векторов электромагнитного поля .....	39
<i>Глава четвертая</i>	
<b>Плоские электромагнитные волны</b> .....	43
Справочный материал .....	43
4.1. Основные характеристики плоских волн .....	47
4.2. Электромагнитные волны в средах с частотной дисперсией .....	58
<i>Глава пятая</i>	
<b>Отражение и преломление плоских электромагнитных волн</b> .....	64
Справочный материал .....	64
5.1. Падение плоской волны на границу раздела двух диэлектрических сред .....	70
5.2. Падение плоской волны на границу раздела с реальным металлом .....	80
5.3. Падение плоской волны на идеально проводящую плоскость .....	87

*Глава шестая*

<b>Волноводы</b> .....	92
Справочный материал .....	92
6.1. Условия распространения, фазовая скорость и длина волны в волноводе .....	101
6.2. Структура поля и токов в волноводе .....	107
6.3. Переносимая мощность, затухание волн в волноводах .....	114
6.4. Групповая скорость в волноводах .....	122

*Глава седьмая*

<b>Объемные резонаторы</b> .....	128
Справочный материал .....	128
7.1. Прямоугольный объемный резонатор .....	135
7.2. Круглый объемный резонатор .....	141

*Глава восьмая*

<b>Излучение электромагнитных волн</b> .....	146
Справочный материал .....	146
8.1. Элементарные излучатели .....	151
8.2. Возбуждение свободного пространства некоторыми излучателями .....	158

*Глава девятая*

<b>Задачи для исследований с помощью ПК</b> .....	163
9.1. Плоские волны .....	163
9.2. Отражение и преломление электромагнитных волн .....	173
9.3. Волноводы .....	180

**Указания к задачам** .....

Глава третья .....	191
Глава четвертая .....	193
Глава пятая .....	199
Глава шестая .....	206
Глава седьмая .....	209
Глава восьмая .....	211
Глава девятая .....	216

**Ответы** .....

Глава первая .....	219
Глава вторая .....	220
Глава третья .....	222
Глава четвертая .....	225
Глава пятая .....	229
Глава шестая .....	233
Глава седьмая .....	237
Глава восьмая .....	239

**Приложения** .....

1. Таблицы электродинамических параметров некоторых материалов .....	242
2. Рекомендации по использованию пакета Mathcad ...	242

**Рекомендуемая литература** .....

*Михаил Николаевич КРАММ*

**СБОРНИК ЗАДАЧ  
ПО ОСНОВАМ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

*Учебное пособие*

Художественный редактор *С. Ю. Малахов*  
Технический редактор *Е. Е. Егорова*  
Корректоры *В. С. Герасименко, В. О. Логунова*  
Подготовка иллюстраций *Н. Г. Брусянина*  
Верстка *М. И. Хетерели*  
Выпускающие *Ю. Г. Бакишанова, Д. А. Щепелева*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 20.06.11.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 13,44. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.  
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.iprpps.ru