

9. Система автоматической подстройки частоты гетеродина

9.1. Назначение и принцип действия системы автоматической подстройки частоты гетеродина

Система автоматической подстройки частоты (АПЧ) гетеродина супергетеродинного радиоприёмника предназначена для управления частотой гетеродинного колебания таким образом, чтобы промежуточная частота f_{Π} была равной или близкой к номинальному значению $f_{\Pi 0}$, на которое настроен усилитель промежуточной частоты.

Изменение промежуточной частоты может происходить как из-за ухода частоты сигнала f_c , вызванного нестабильностью передатчика или эффектом Доплера (в случае взаимного перемещения передатчика и приёмника), так и из-за нестабильности частоты гетеродина f_{Γ} . В простых перестраиваемых РПУ вторая причина является основной.

Система АПЧ – это система автоматического регулирования, в которой регулируемым параметром является частота. Поэтому для её анализа используют методы теории систем автоматического регулирования, изучаемые в курсе «Радиоавтоматика». Структура системы АПЧ как системы автоматического регулирования, где регулируемым параметром является частота, показана на рис. 9.1.

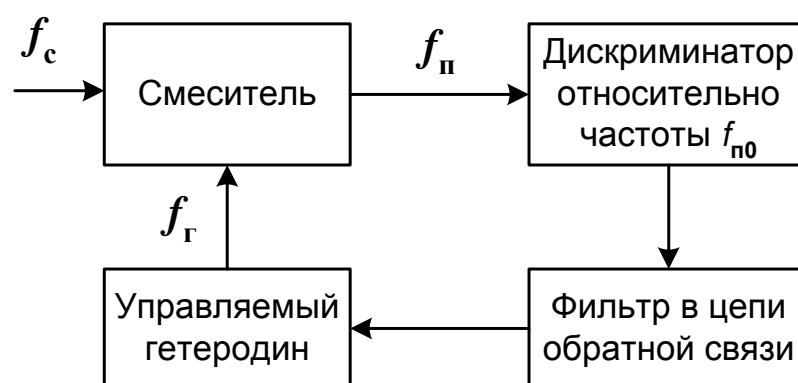


Рис. 9.1. Структура системы АПЧ

Тип дискриминатора определяет вид системы АПЧ: при использовании частотного дискриминатора это будет система частотной автоподстройки (ЧАП), а при использовании фазового дискриминатора – система фазовой автоподстройки (ФАП).

В данном разделе курса рассматривается система ЧАП. Для упрощения анализа примем, что $f_{\Pi} = f_c - f_r$, т.е. будем считать, что в радиоприёмнике используется нижняя настройка гетеродина. Структурная схема системы ЧАП показана на рис. 9.2.

Элементы системы ЧАП выполняют следующие функции:

- **смеситель (См)** переносит спектр сигнала на промежуточную (разностную) частоту;
- **усилитель промежуточной частоты (УПЧ)** усиливает преобразованный по частоте сигнал до рабочего уровня частотного дискриминатора;
- **частотный дискриминатор (ЧД)** формирует управляющее напряжение в зависимости от величины и знака отклонения f_{Π} от переходной частоты ЧД $f_{\Pi 0}$;
- **фильтр нижних частот (ФНЧ)** ослабляет влияние шума и обеспечивает требуемую инерционность системы ЧАП;
- **усилитель постоянного тока (УПТ)** усиливает управляющее напряжение до рабочего напряжения управляемого гетеродина и (при необходимости) изменяет его знак таким образом, чтобы в системе действовала отрицательная обратная связь;
- **управляемый гетеродин (УГ)** формирует гетеродинное колебание управляемой частоты. В качестве элемента, управляющего частотой колебаний, обычно используется варикап (диод с изменяемой ёмкостью p - n перехода), включённый в колебательный контур автогенератора. При увеличении запирающего напряжения, приложенного к варикапу, его ёмкость уменьшается и, следовательно, частота колебаний увеличивается.

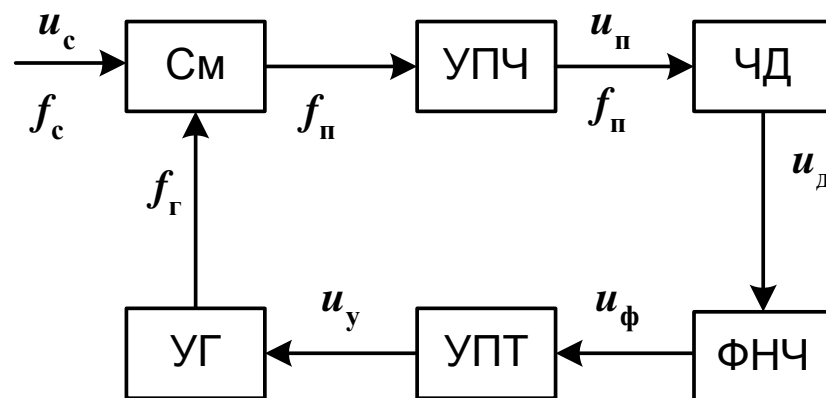


Рис. 9.2. Структурная схема системы ЧАП

Задача системы ЧАП состоит в том, чтобы удерживать отклонение промежуточной частоты от её номинального значения (остаточную расстройку) в допустимых пределах при нестабильности частот сигнала и гетеродинного колебания.

Рассмотрим принцип действия системы ЧАП. Допустим, что произошло увеличение частоты сигнала, которое вызвало увеличение промежуточной частоты $f_{\text{п}} = f_{\text{с}} - f_{\text{г}}$ по сравнению с номинальным значением $f_{\text{п}0}$. В результате этого на выходе ЧД возникает некоторое напряжение, величина и знак которого определяются параметрами характеристики дискриминатора. Под действием этого напряжения начнёт возрастать напряжение на выходе ФНЧ, стоящего в цепи обратной связи. Усиленное в УПЧ выходное напряжение фильтра является управляющим напряжением для гетеродина. Если система ЧАП спроектирована как система с отрицательной обратной связью, то под действием управляющего напряжения частота гетеродинного колебания будет увеличиваться, что приведёт к уменьшению отклонения промежуточной частоты от её номинального значения. Таким образом будет компенсирована (хотя и не полностью) расстройка промежуточной частоты, вызванная увеличением частоты сигнала. Аналогичным образом действует система ЧАП и при уменьшении частоты сигнала.

Для того чтобы проанализировать работу системы ЧАП, необходимо построить её математическую модель. А для этого нужно, прежде всего, принять некоторые математические модели её элементов.

9.2. Математическая модель системы ЧАП

Модели элементов системы ЧАП

Рассмотрим математические модели элементов, входящих в состав системы ЧАП.

1) **Смеситель и УПЧ.** Считая смеситель вместе с усилителем промежуточной частоты безынерционными (по сравнению с фильтром в цепи обратной связи) устройствами, примем в качестве математической модели этой части системы ЧАП соотношение для частот сигнала, колебания гетеродина и выходного колебания УПЧ:

$$f_{\text{п}} = f_{\text{с}} - f_{\text{г}}.$$

Для упрощения дальнейшего анализа удобно перейти к отклонениям частоты:

$\Delta f_{\Gamma} = f_{\Gamma} - f_{\Gamma 0}$, где $f_{\Gamma 0}$ – частота гетеродина при нулевом управляющем напряжении (номинальная частота гетеродина);

$\Delta f_{\Pi} = f_{\Pi} - f_{\Pi 0}$, где $f_{\Pi 0}$ – переходная частота ЧД;

$\Delta f_c = f_c - f_{c0}$, где $f_{c0} = f_{\Gamma 0} + f_{\Pi 0}$.

Легко показать, что $\Delta f_{\Pi} = \Delta f_c - \Delta f_{\Gamma}$. Таким образом математической моделью смесителя и УПЧ является вычитающий элемент (рис. 9.3).

2) **Частотный дискриминатор**. Частотный дискриминатор считается безынерционным по сравнению с ФНЧ. Поэтому в качестве его математической модели принимается нелинейный безынерционный элемент с характеристикой $u_{\text{д}} = u_{\text{д}}(\Delta f_{\Pi})$ (рис. 9.4).

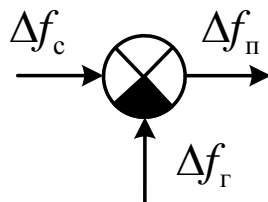


Рис. 9.3. Математическая модель смесителя и усилителя промежуточной частоты

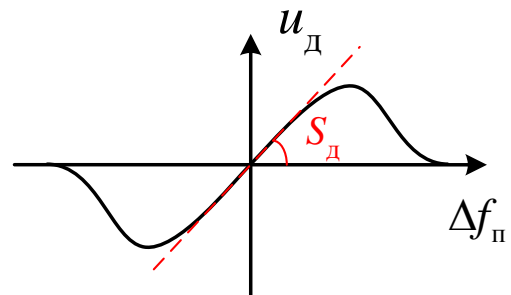


Рис. 9.4. Характеристика ЧД

На линейном участке $u_{\text{д}} = S_{\text{д}} \cdot \Delta f_{\Pi}$, где $S_{\text{д}}$ – крутизна характеристики ЧД.

3) **Фильтр нижних частот** – линейный элемент с передаточной функцией $K_{\text{ф}}(p)$.

4) **Усилитель постоянного тока** – линейный безынерционный элемент с коэффициентом передачи $K_{\text{УПТ}}$.

5) **Управляемый генератор** моделируется как нелинейный безынерционный элемент с характеристикой $\Delta f_{\Gamma} = \Delta f_{\Gamma}(u_{\text{у}})$ (рис. 9.5). На линейном участке $\Delta f_{\Gamma} = S_{\text{у}} \cdot u_{\text{у}}$, где $S_{\text{у}}$ – крутизна характеристики, называемая также крутизной управителя частоты.

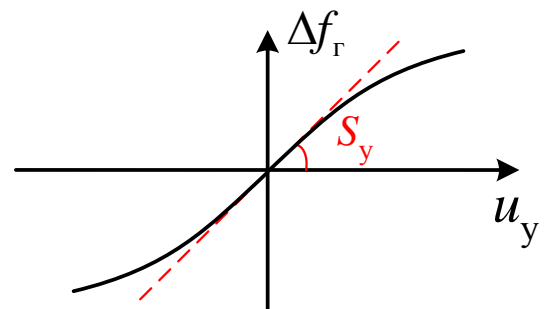


Рис. 9.5. Характеристика управителя частоты

Структурная схема математической модели системы ЧАП, полученная на основе принятых моделей её компонентов, показана на

рис. 9.6. Это – нелинейная инерционная система автоматического регулирования.

Если в приёмнике используется верхняя настройка гетеродина, при которой $f_{\text{п}} = f_{\text{г}} - f_{\text{с}}$, то знак управляющего напряжения нужно изменить на противоположный (например, поменяв местами выводы ЧД или применив инвертирующий УПТ), поскольку в системе ЧАП всегда должна действовать отрицательная обратная связь.

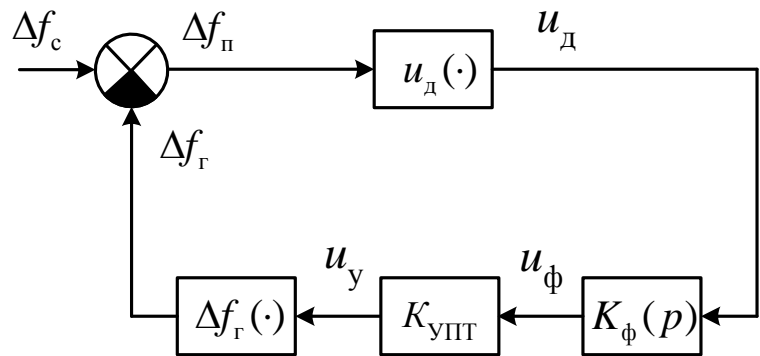


Рис. 9.6. Структурная схема математической модели системы ЧАП

Определить аналитически характеристики нелинейной инерционной системы автоматического регулирования в общем случае нельзя. Поэтому из полной модели системы ЧАП получим две упрощённые модели, изучением которых мы и ограничимся:

- линеаризованную инерционную модель (при малых значениях $\Delta f_{\text{п}}$ и $u_{\text{у}}$);
- нелинейную безынерционную модель (при больших по величине, но медленных изменениях $\Delta f_{\text{с}}$ или $\Delta f_{\text{г}}$).

Линеаризованная модель системы ЧАП

При малых отклонениях промежуточной частоты $\Delta f_{\text{п}}$ и, соответственно, малом управляющем напряжении $u_{\text{у}}$ можно заменить нелинейные элементы $u_{\text{чД}}(\cdot)$ и $\Delta f_{\text{г}}(\cdot)$ линейными с коэффициентами передачи $S_{\text{д}}$ и $S_{\text{у}}$. В результате получится математическая модель линейной системы, структурная схема которой показана на рис. 9.7.

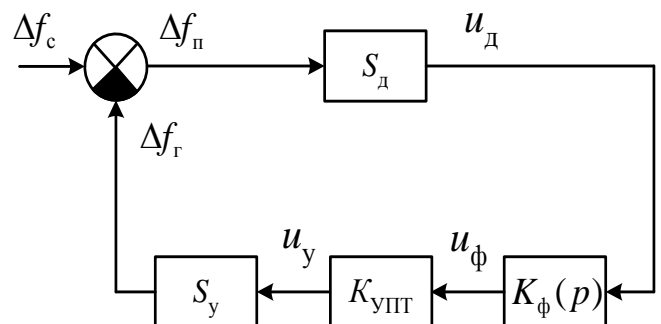


Рис. 9.7. Структурная схема математической модели линеаризованной системы ЧАП

Линейная система автоматического регулирования характеризуется передаточной функцией $K(p)$. Найдём передаточную функцию системы ЧАП, связывающую изменение промежуточной частоты Δf_{Π} с вызвавшим его изменением частоты сигнала Δf_c ,

$$K_{\Delta f_c \Delta f_{\Pi}}(p) = \frac{\mathcal{L}\{\Delta f_{\Pi}(t)\}}{\mathcal{L}\{\Delta f_c(t)\}}, \quad (9.1)$$

где $\mathcal{L}\{\Delta f_{\Pi}(t)\}$ – изображение (преобразование Лапласа) изменения промежуточной частоты, $\mathcal{L}\{\Delta f_c(t)\}$ – изображение изменения частоты сигнала, $\mathcal{L}\{\cdot\}$ – символ оператора преобразования Лапласа.

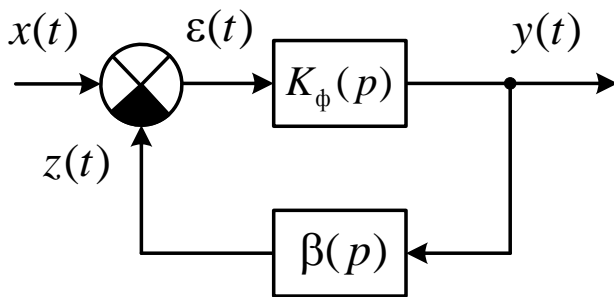


Рис. 9.8. Структурная схема линейной системы автоматического регулирования

Из курса «Радиоавтоматика» известно, что для линейной системы автоматического регулирования общего вида (рис. 9.8) передаточные функции между различными точками равны соответственно:

$$K_{xe}(p) = \frac{1}{1 + K(p)\beta(p)}, \quad (9.2,а)$$

$$K_{xy} = \frac{K(p)}{1 + K(p)\beta(p)}, \quad (9.2,б)$$

$$K_{xz} = \frac{K(p)\beta(p)}{1 + K(p)\beta(p)}. \quad (9.2,в)$$

В случае системы ЧАП $x = \Delta f_c$, $\varepsilon = \Delta f_{\Pi}$, $K(p) = S_d$, $\beta(p) = S_y K_{\text{УПТ}} K_{\phi}(p)$. Поэтому интересующая нас передаточная функция от Δf_c к Δf_{Π} равна

$$K_{\Delta f_c \Delta f_{\Pi}}(p) = \frac{1}{1 + S_d S_y K_{\text{УПТ}} K_{\phi}(p)}. \quad (9.3)$$

Имея передаточную функцию и зная характер изменения частоты сигнала, можно с помощью аппарата преобразования Лапласа исследовать любые переходные процессы в системе ЧАП. Этот подход по-

звояет также определить характеристики системы в установившемся режиме.

9.3. Характеристики системы ЧАП

Остаточная расстройка в системе ЧАП

Найдём **остаточную расстройку** – отклонение Δf_{Π} промежуточной частоты от номинального значения в установившемся режиме при изменении частоты сигнала на некоторую величину $\Delta f_{\text{с.нач}}$, называемую **начальной расстройкой**.

Установившийся режим достигается при $t \rightarrow \infty$. Поэтому для определения остаточной расстройки воспользуемся следующим предельным соотношением для преобразования Лапласа:

$$\Delta f_{\text{п.ост.}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta f_{\Pi}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \mathcal{L}\{\Delta f_{\Pi}(t)\}), \quad (9.4)$$

где $\mathcal{L}\{\Delta f_{\Pi}(t)\} = K_{\Delta f_{\text{с}} \Delta f_{\Pi}}(p) \cdot \mathcal{L}\{\Delta f_{\text{с}}(t)\}$ – изображение процесса изменения отклонения промежуточной частоты. Для определенности будем считать, что частота сигнала изменилась скачком, т.е. $\Delta f_{\text{с}}(t)$ представляет собой ступенчатую функцию высотой $\Delta f_{\text{с.нач}}$ (рис. 9.9). Её преобразование Лапласа равно

$$\mathcal{L}\{\Delta f_{\text{с}}(t)\} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{p}.$$

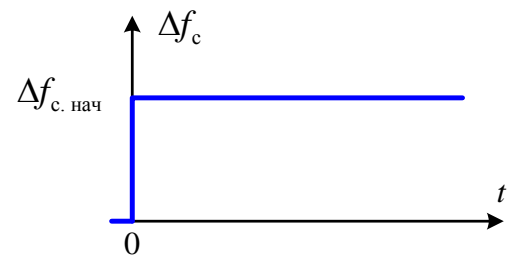


Рис. 9.9. Скачкообразное изменение частоты сигнала

В этом случае остаточная расстройка равна

$$\Delta f_{\text{п.ост.}} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p K_{\Delta f_{\text{с}} \Delta f_{\Pi}}(p) \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{p} \right) = \Delta f_{\text{с.нач}} K_{\Delta f_{\text{с}} \Delta f_{\Pi}}(0) = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{1 + S_{\text{д}} S_{\text{у}} K_{\text{УПТ}} K_{\text{ф}}(0)}.$$

Примем, что $K_{\text{ф}}(0) = 1$, т.е. фильтр в цепи обратной связи не содержит интегратора (поскольку для интегратора $K(p) = \frac{1}{p}$ и $K(0) \rightarrow \infty$) и его коэффициент передачи по постоянному току равен 1. Тогда

$$\Delta f_{\text{п.ост}} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{1 + S_d S_y K_{\text{УПТ}}} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{1 + A}, \quad (9.5)$$

где $A = S_d S_y K_{\text{УПТ}}$ – петлевое усиление (коэффициент передачи разомкнутой системы).

Эффективность работы системы ЧАП в установившемся режиме характеризуется **коэффициентом автоподстройки**, который по определению равен отношению начальной расстройки к остаточной:

$$K_{\text{ЧАП}} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{\Delta f_{\text{п.ост}}}. \quad (9.6)$$

Следовательно, остаточная расстройка равна $\Delta f_{\text{п.ост}} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}}$. Сравнивая это выражение с формулой (9.5) для $\Delta f_{\text{п.ост}}$, получаем формулу, выражающую коэффициент автоподстройки через параметры блоков системы ЧАП:

$$K_{\text{ЧАП}} = 1 + A = 1 + S_d S_y K_{\text{УПТ}}. \quad (9.7)$$

Видно, что при любом значении петлевого усиления остаточная расстройка не равна нулю, т.е. в системе ЧАП, не имеющей интегратора в цепи обратной связи, принципиально не может быть нулевой остаточной ошибки. Это понятно, поскольку для подстройки частоты гетеродина необходимо иметь некоторое ненулевое управляющее напряжение, которое в системе ЧАП может быть получено только из сигнала ошибки на выходе дискриминатора. Поэтому система ЧАП относится к классу **статических систем автоматического регулирования**.

Характеристики системы ЧАП в переходном режиме

Продолжим рассматривать линеаризованную модель системы ЧАП. Определим характер переходных процессов в системе при скачкообразном изменении частоты сигнала. Характер этих процессов зависит от того, какой фильтр стоит в цепи обратной связи системы. Поэтому, прежде всего, уточним тип фильтра.

Простейший ФНЧ – это однозвенный RC -фильтр (или интегрирующая RC -цепь) (рис. 9.10) с передаточной функцией $K_{\phi}(p) = \frac{1}{1 + pT}$, где $T = RC$ – постоянная времени фильтра.

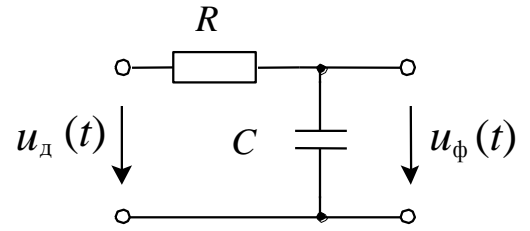


Рис. 9.10. Интегрирующая RC -цепь (ФНЧ 1-го порядка)

Именно для такого фильтра мы и рассмотрим переходные процессы в системе ЧАП. Передаточная функция системы в этом случае равна

$$K_{\Delta f_c \Delta f_n}(p) = \frac{1}{1 + S_d S_y K_{\text{УПТ}} \frac{1}{1 + pT}} = \frac{1 + pT}{(A + 1) + pT} = \frac{1 + pT}{K_{\text{ЧАП}} + pT} = \frac{1/K_{\text{ЧАП}} + pT/K_{\text{ЧАП}}}{1 + pT/K_{\text{ЧАП}}}.$$

Обозначим отношение $T/K_{\text{ЧАП}}$ как $T_{\text{ЧАП}}$ и назовём его **постоянной времени системы ЧАП** (смысл такого наименования будет понятен из дальнейшего). Тогда

$$K_{\Delta f_c \Delta f_n}(p) = \frac{1/K_{\text{ЧАП}} + pT_{\text{ЧАП}}}{1 + pT_{\text{ЧАП}}}. \quad (9.8)$$

Для определения реакции системы ЧАП на скачок частоты воспользуемся операционным методом. В соответствии с этим методом изображение (преобразование Лапласа) процесса изменения промежуточной частоты под действием скачкообразного изменения частоты сигнала равно

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\Delta f_n(t)\} &= \mathcal{L}\{\Delta f_c(t)\} K_{\Delta f_c \Delta f_n}(p) = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{p} \frac{1/K_{\text{ЧАП}} + pT_{\text{ЧАП}}}{1 + pT_{\text{ЧАП}}} = \\ &= \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} \frac{1 + pK_{\text{ЧАП}}T_{\text{ЧАП}}}{p(1 + pT_{\text{ЧАП}})}. \end{aligned}$$

Обозначим $F(p) = \frac{1 + pK_{\text{ЧАП}}T_{\text{ЧАП}}}{p(1 + pT_{\text{ЧАП}})}$, тогда $\mathcal{L}\{\Delta f_n(t)\} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} F(p)$ и

$$\Delta f_{\Pi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} F(p) \right\} = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \}. \quad (9.9)$$

Используя для вычисления обратного преобразования Лапласа метод вычетов (см. Приложение 1), можно получить следующее выражение для процесса изменения отклонения промежуточной частоты от номинального значения при скачкообразном изменении частоты сигнала:

$$\Delta f_{\Pi}(t) = \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} \left[1 + (K_{\text{ЧАП}} - 1) e^{-t/T_{\text{ЧАП}}} \right]. \quad (9.10)$$

График этого процесса показан на рис. 9.11. Видно, что при $t = 0$ $\Delta f_{\Pi}(0) = \Delta f_{\text{с.нач}}$, а при $t \rightarrow \infty$ $\Delta f_{\Pi}(t) \rightarrow \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} = \Delta f_{\text{п.ост}}$.

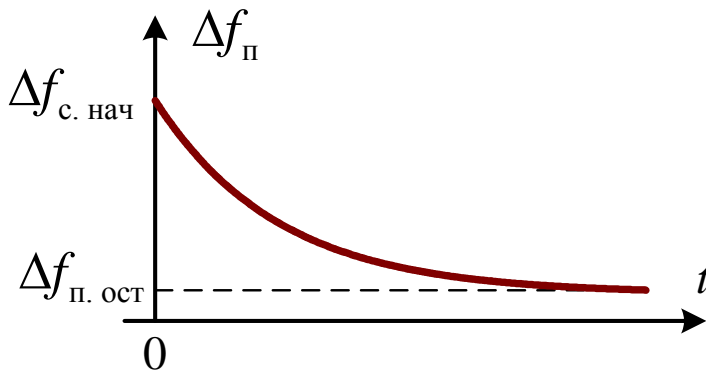


Рис. 9.11. Переходный процесс для отклонения промежуточной частоты при скачке частоты сигнала

Таким образом, процесс установления промежуточной частоты в системе ЧАП описывается экспоненциальной функцией (9.10) с постоянной времени $T_{\text{ЧАП}} = T/K_{\text{ЧАП}}$. Поэтому длительность переходного процесса, т.е. быстродействие системы ЧАП определяется её постоянной времени. Для повышения бы-

стродействия системы ЧАП и уменьшения остаточной ошибки необходимо увеличивать коэффициент автоподстройки $K_{\text{ЧАП}} = 1 + A$ путём увеличения петлевого усиления $A = S_{\text{д}} S_{\text{у}} K_{\text{УПГ}}$. Однако при этом возникает опасность самовозбуждения системы. Эти вопросы рассмотрены в следующем разделе.

Процесс установления частоты гетеродина можно найти аналогично, используя передаточную функцию $K_{\Delta f_{\text{с}} \Delta f_{\text{Г}}}(p)$. Однако проще его определить по известному уже выражению (9.10) для изменения промежуточной частоты $\Delta f_{\Pi}(t)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta f_{\Gamma}(t) &= \Delta f_c(t) - \Delta f_{\Pi}(t) = \Delta f_{\text{с.нач}} - \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} \left[1 + (K_{\text{ЧАП}} - 1) e^{-t/T_{\text{ЧАП}}} \right] = \\
 &= \Delta f_{\text{с.нач}} - \frac{\Delta f_{\text{с.нач}}}{K_{\text{ЧАП}}} - \Delta f_{\text{с.нач}} \frac{K_{\text{ЧАП}} - 1}{K_{\text{ЧАП}}} e^{-t/T_{\text{ЧАП}}} = \\
 &= \Delta f_{\text{с.нач}} \left(1 - \frac{1}{K_{\text{ЧАП}}} \right) - \Delta f_{\text{с.нач}} \left(1 - \frac{1}{K_{\text{ЧАП}}} \right) e^{-t/T_{\text{ЧАП}}} = \\
 &= \Delta f_{\text{с.нач}} \left(1 - \frac{1}{K_{\text{ЧАП}}} \right) (1 - e^{-t/T_{\text{ЧАП}}}). \quad (9.11)
 \end{aligned}$$

График процесса $\Delta f_{\Gamma}(t)$ показан на рис. 9.12. Заметим, что переходный процесс по частоте гетеродина имеет такой же вид как и процесс изменения напряжения на конденсаторе интегрирующей RC -цепи с постоянной времени $T_{\text{ЧАП}}$. (Напомним, что мы рассматриваем простейший случай, когда в контуре обратной связи системы ЧАП стоит фильтр 1-го порядка, т.е. интегрирующая RC -цепь). Пользуясь этой аналогией, а также зная, что в установившемся режиме $\Delta f_{\Gamma} = \Delta f_{\text{с.нач}} - \Delta f_{\text{п.ост}}$, легко записать выражение для $\Delta f_{\Gamma}(t)$, а по нему найти $\Delta f_{\Pi}(t)$.

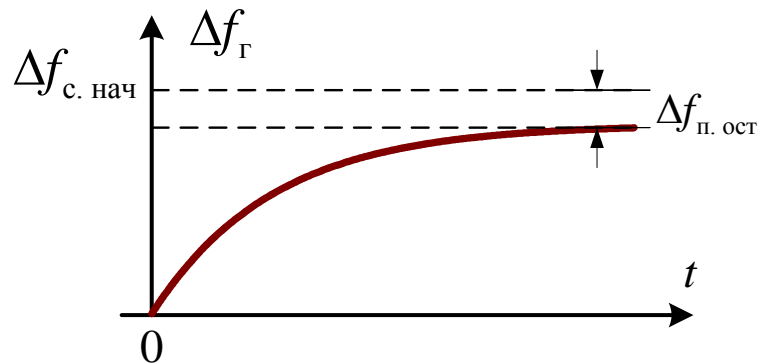


Рис. 9.12. Переходный процесс для отклонения частоты гетеродина при скачке частоты сигнала

Устойчивость системы ЧАП

Применим к системе ЧАП один из критериев устойчивости, известный из курса «Радиоавтоматика». Рассмотрим сначала линейную систему автоматического регулирования общего вида, изображённую на рис. 9.8.

Известно, что для устойчивости такой системы необходимо и достаточно выполнение следующего условия (критерия Найквиста):

Линейная система автоматического регулирования устойчива, если годограф комплексной частотной характеристики разомкнутой системы $\dot{K}(j\Omega)\dot{\beta}(j\Omega)$ не охватывает на комплексной плоскости точку -1.

Для системы ЧАП частотная характеристика разомкнутой системы равна $\dot{K}(j\Omega)\dot{\beta}(j\Omega) = S_d S_y K_{\text{УПТ}} \dot{K}_\phi(j\Omega) = A \cdot \dot{K}_\phi(j\Omega)$. Поэтому для применения критерия Найквиста необходимо рассмотреть годограф частотной характеристики ФНЧ, умноженной на петлевое усиление A (рис. 9.13).

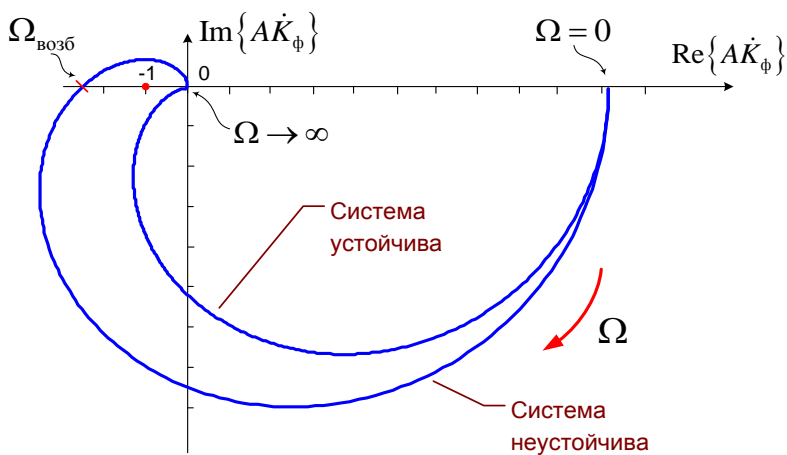


Рис. 9.13. Годограф функции $AK_\phi(j\Omega)$

Физически невыполнение условия критерия Найквиста означает, что на некоторой частоте $\Omega_{\text{возб}}$ фазовый сдвиг в разомкнутой системе равен $\arg AK_\phi(j\Omega_{\text{возб}}) = -\pi$, а коэффициент передачи разомкнутой системы $|AK_\phi(j\Omega_{\text{возб}})| > 1$. Другими словами, это означает, что

на данной частоте в системе вместо отрицательной обратной связи действует положительная, и система переходит в режим самовозбуждения.

Рассмотрим устойчивость системы ЧАП при различных типах фильтров в контуре обратной связи. При этом по-прежнему будем считать, что единственным инерционным элементом системы является ФНЧ.

А) ФНЧ 1-го порядка (однозвенная RC-цепь)

Фильтр имеет передаточную функцию $K_{\phi 1}(p) = \frac{1}{1 + pT}$. Следовательно, частотная характеристика разомкнутой системы равна

$A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega) = \frac{A}{1 + j\Omega T}$. Можно показать (см. Приложение 2), что годограф такой частотной характеристики имеет вид полуокружности радиусом $A/2$ с центром в точке $A/2$ (рис. 9.14). Он не охватывает точку -1 , поэтому система ЧАП с фильтром 1-го порядка устойчива.

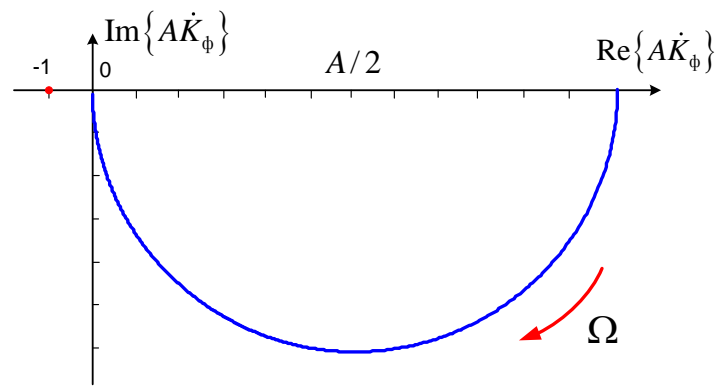


Рис. 9.14. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы в случае фильтра 1-го порядка

Б) ФНЧ 2-го порядка

Рассмотрим в качестве примера ФНЧ 2-го порядка две последовательно соединённые идентичные интегрирующие RC -цепи, разделённые буферным каскадом. Передаточная функция такого фильтра

равна $K_{\phi 2}(p) = \frac{1}{(1 + pT)^2}$, а

частотная характеристика разомкнутой системы имеет

вид $A\dot{K}_{\phi 2}(j\Omega) = \frac{A}{(1 + j\Omega T)^2}$.

Годограф частотной характеристики показан на

рис. 9.15. Максимальный фазовый сдвиг в разомкнутой системе в данном случае

удваивается по сравнению с

системой, имеющей фильтр 1-го порядка, и достигает $-\pi$. Однако это

будет лишь в пределе при $\Omega \rightarrow \infty$, когда $|A\dot{K}_{\phi 2}| \rightarrow 0$, поэтому система

остаётся устойчивой.

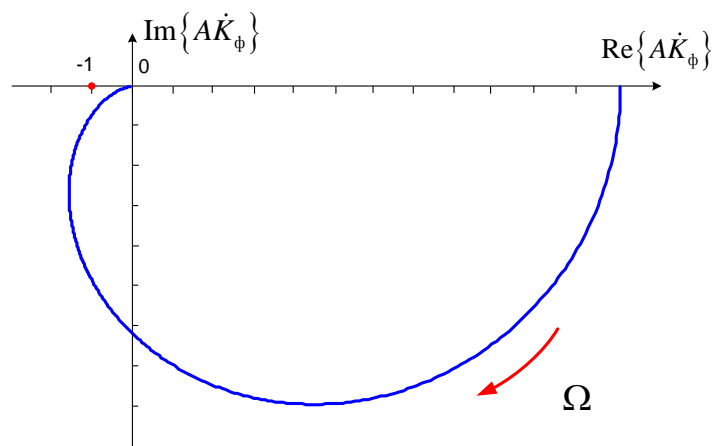


Рис. 9.15. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы в случае фильтра 2-го порядка

В) ФНЧ 3-го порядка

Рассмотрим ФНЧ 3-го порядка, состоящий из трёх последовательно соединённых идентичных интегрирующих RC -цепей, разделённых буферными каскадами.

Передаточная функция такого фильтра равна $K_{\Phi 3}(p) = \frac{1}{(1 + pT)^3}$,

а частотная характеристика разомкнутой системы имеет вид

$$A\dot{K}_{\Phi 3}(j\Omega) = \frac{A}{(1 + j\Omega T)^3}.$$

Годограф частотной характеристики показан на рис. 9.16 для двух значений петлевого усиления A . Максимальный

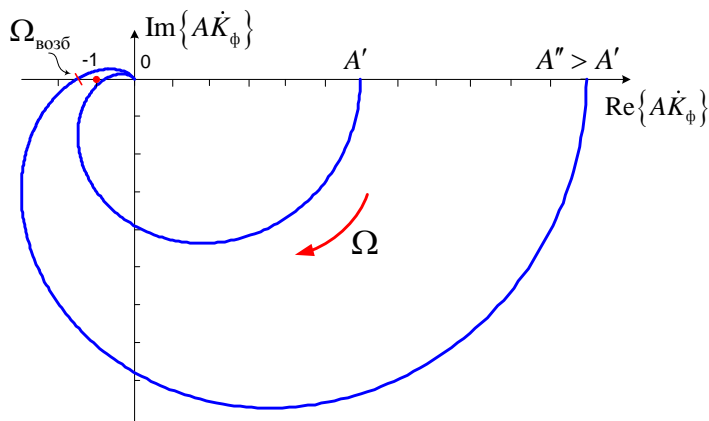


Рис. 9.16. Годограф частотной характеристики разомкнутой системы в случае фильтра 3-го порядка

фазовый сдвиг в разомкнутой системе в данном случае уравнивается по сравнению с ФНЧ 1-го порядка и составляет $\varphi_{3\max} = -\frac{3\pi}{2}$, следова-

тельно по фазе условие самовозбуждения выполняется с запасом. Выполнение условия самовозбуждения по амплитуде зависит от величины коэффициента петлевого усиления. При петлевом уси-

лении A' годограф не охватывает точку -1 , и система устойчива. При $A'' > A'$ годограф проходит левее точки -1 , следовательно, условие устойчивости не выполняется, и происходит самовозбуждение системы ЧАП на частоте $\Omega_{\text{возб}}$.

Таким образом, при использовании в контуре обратной связи ФНЧ 3-го порядка система ЧАП может быть неустойчивой при достаточно большой величине петлевого усиления. Физически это объясняется тем, что на некоторой частоте $\Omega_{\text{возб}}$ каждое звено фильтра вносит фазовый сдвиг $-180^\circ/3 = -60^\circ$. При этом коэффициент передачи ФНЧ на частоте, соответствующей фазовому сдвигу -60° , уменьшается незначительно (рис. 9.17).

Найдём коэффициент передачи ФНЧ на частоте возбуждения. ФЧХ одного звена (интегрирующей RC -цепи 1-го порядка) равна

$\varphi_1(\Omega) = -\arctg(\Omega T)$. На частоте возбуждения $-\arctg \Omega_{\text{возб}} T = -\frac{\pi}{3}$, откуда следует, что $\Omega_{\text{возб}} T = \tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. При этом коэффициент передачи звена равен

$$K_1(\Omega_{\text{возб}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega_{\text{возб}} T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, коэффициент передачи трёхзвенного ФНЧ на частоте возбуждения равен

$$K_{\text{фз}}(\Omega_{\text{возб}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, если в системе ЧАП с трёхзвенным ФНЧ 3-го порядка петлевое усиление $A > 1/K_{\text{фз}}(\Omega_{\text{возб}}) = 8$ (т.е. коэффициент автоподстройки $K_{\text{ЧАП}} = A + 1 > 9$), то система неустойчива. Это условие практически всегда выполняется, так как для обеспечения малой остаточной расстройки обычно задают $K_{\text{ЧАП}} \gg 9$.

Напомним, что проведённый анализ устойчивости системы ЧАП основан на предположении, что единственным инерционным элементом системы является ФНЧ в цепи обратной связи. Более строгий анализ показывает, что из-за группового запаздывания сигнала в фильтре УПЧ на время $\tau_{\text{УПЧ}}$ (т.е. из-за инерционности УПЧ) возникает дополнительный фазовый сдвиг, и система ЧАП может возбудиться даже тогда, когда в цепи обратной связи стоит фильтр 1-го порядка. Это произойдёт в том случае, когда на некоторой частоте $\Omega_{\text{возб}}$ сумма фазового сдвига $\Delta\varphi_{\text{УПЧ}} = -\tau_{\text{УПЧ}}\Omega_{\text{возб}}$, обусловленного запаздыванием в УПЧ, и фазового сдвига $\Delta\varphi_{\text{ФНЧ}} = -\arctg \Omega_{\text{возб}} T$, связанного с инерци-

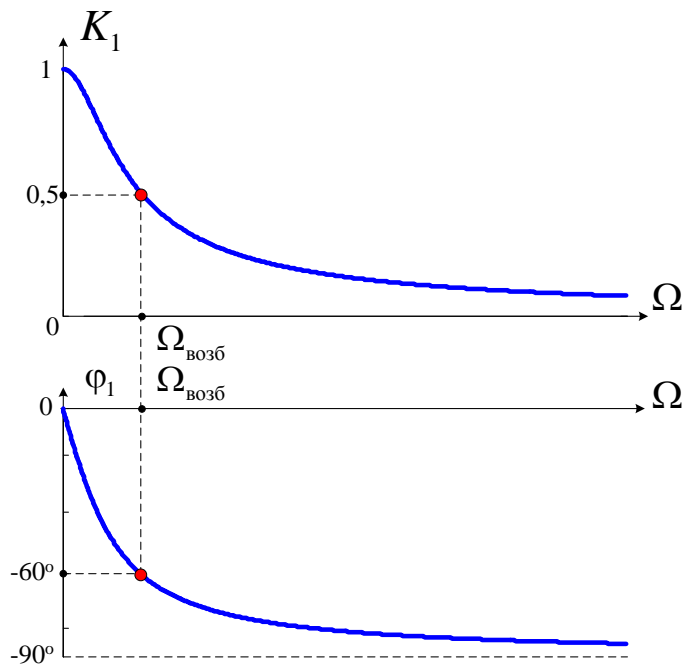


Рис. 9.17. АЧХ и ФЧХ одного звена фильтра 3-го порядка

онностью ФНЧ, будет равна $-\pi$, а коэффициент передачи разомкнутой системы будет превышать 1.

Что физически собой представляет самовозбуждение системы ЧАП? Если в системе выполняется условие самовозбуждения, то при подаче на вход системы немодулированного сигнала напряжение промежуточной частоты и колебание гетеродина будут иметь частотную модуляцию с частотой $\Omega_{\text{возб}}$. Если же на входе системы сигнала нет, то её самовозбуждение невозможно, поскольку в этом случае напряжение на выходе смесителя равно нулю и, следовательно, система разомкнута.

При самовозбуждении системы ЧАП она перестаёт выполнять свою функцию, и приёмник становится неработоспособным.

Статические характеристики системы ЧАП в нелинейном режиме

При медленном изменении частоты сигнала, когда переходными процессами можно пренебречь, т.е. в статическом режиме, работа системы ЧАП описывается **характеристикой регулирования** – зависимостью остаточной расстройки по промежуточной частоте $\Delta f_{\text{п.ост}}$ от расстройки по частоте сигнала $\Delta f_{\text{с.нач}}$. Если бы система ЧАП была линейной, то характеристика регулирования описывалась бы линейной функцией, поскольку в этом случае $\Delta f_{\text{п.ост}} = \Delta f_{\text{с.нач}} / K_{\text{ЧАП}}$. Наличие нелинейных блоков в системе ЧАП, и в первую очередь ЧД, приводит к тому, что характеристика регулирования имеет более сложный вид.

Для упрощения анализа работы системы ЧАП в нелинейном режиме сделаем ряд допущений:

- 1) коэффициент передачи ФНЧ на нулевой частоте будем считать равным единице: $K_{\text{ф}}(0) = 1$;
- 2) не будем учитывать нелинейность характеристики управителя частоты, т.е. примем, что $\Delta f_{\text{г}} = S_y u_y$.

Таким образом, систему ЧАП будем рассматривать как безынерционную систему автоматического регулирования, содержащую единственный нелинейный элемент – частотный дискриминатор с характеристикой $u_{\text{д}}(\Delta f_{\text{п}})$. Структурная схема математической модели такой системы показана на рис. 9.18. В соответствии с этой структурной схемой система ЧАП описывается следующим нелинейным ал-

гебраическим уравнением (здесь и далее начальная расстройка по частоте сигнала для краткости обозначается как Δf_c , а остаточная расстройка по промежуточной частоте – как Δf_n):

$$\Delta f_n = \Delta f_c - \Delta f_r = \Delta f_c - S_y K_{\text{УПТ}} u_d(\Delta f_n).$$

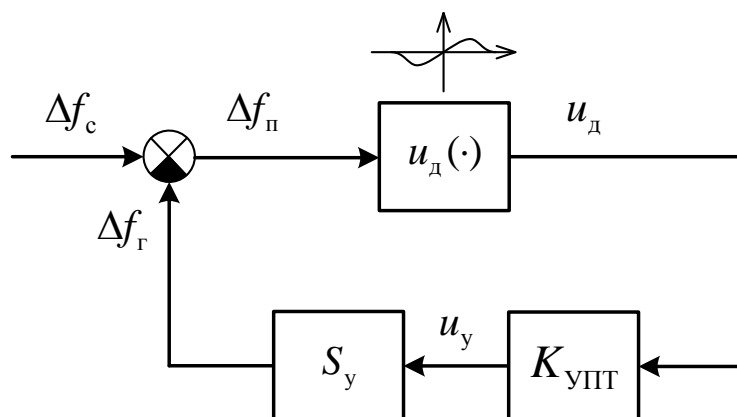


Рис. 9.18. Структурная схема нелинейной математической модели системы ЧАП

Решим это уравнение графически. Для этого запишем его в следующем виде:

$$S_y K_{\text{УПТ}} u_d(\Delta f_n) = \Delta f_c - \Delta f_n. \quad (9.12)$$

Левая и правая части этого уравнения определяют одну и ту же величину – отклонение частоты гетеродина Δf_r . Поэтому решение уравнения, т.е. значение $\Delta f'_n$ при некоторой заданной величине $\Delta f'_c$, будет определяться абсциссой точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения (9.12) (рис. 9.19).

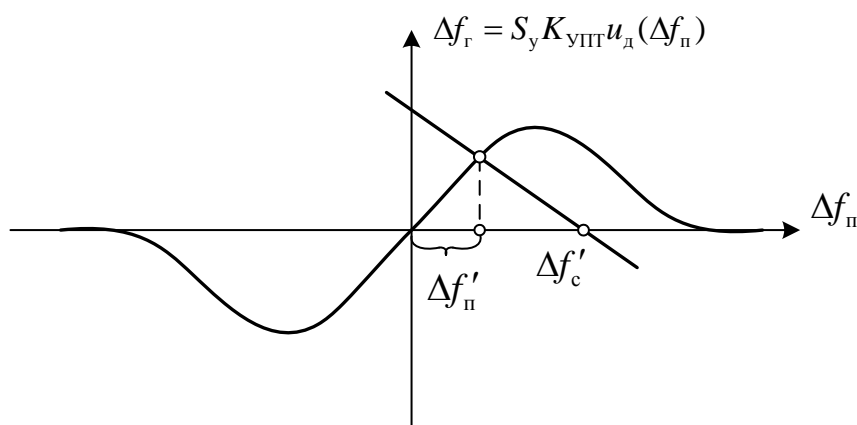


Рис. 9.19. Графическое определение остаточной расстройки

Используя этот подход, построим графически характеристику регулирования. Для этого будем постепенно увеличивать отклонение частоты сигнала Δf_c , т.е. сдвигать вправо прямую линию, описывающую правую часть уравнения (9.12), и отмечать абсциссу точки пересечения этой прямой с графиком левой части (рис. 9.20,а). Заданное значение $\Delta f_c'$ и соответствующее ему значение $\Delta f_n'$ определяют точку на графике характеристики регулирования (рис. 9.20,б)^{*)}. Из рис. 9.20,а видно, что пока отклонение частоты сигнала не превысит значения $\Delta f_c''$, при котором прямая $\Delta f_c - \Delta f_n$ касается нижнего сгиба графика левой части уравнения (9.12), существует только одна точка A' пересечения этих двух графиков, т.е. единственное решение уравнения (9.12), которое и определяет величину остаточной расстройки $\Delta f_n'$. При этом в области малых отклонений Δf_c характеристика регулирования линейна, и её угловой коэффициент равен $1/K_{\text{АП}}$. Если $\Delta f_c < \Delta f_c''$, то система ЧАП работает эффективно: расстройка промежуточной частоты остаётся малой при значительных отклонениях частоты сигнала.

При дальнейшем увеличении отклонения частоты сигнала появляются три точки пересечения графиков: A''', B''' и C''' . При этом состоянию устойчивого равновесия системы ЧАП соответствуют только точки A''' и C''' , а точка B''' характеризует неустойчивое равновесие: при малейшем отклонении от этого состояния система будет всё сильнее удаляться от него, стремясь к точке A''' или C''' . Наличие нескольких состояний равновесия в системе ЧАП – следствие её нелинейности. Если отклонение частоты больше $\Delta f_c''$, но не превышает значения Δf_c^{IV} , при котором прямая $\Delta f_c - \Delta f_n$ касается верхнего сгиба графика левой части уравнения (9.12), то система ЧАП по-прежнему обеспечивает подстройку частоты гетеродина, хотя и не так эффективно, как при малых отклонениях. При этом характеристика регулирования становится заметно нелинейной (см. рис. 9.20,б). Если $\Delta f_c = \Delta f_c^{IV}$, то точка устойчивого равновесия A^{IV} и неустойчивого равновесия B^{IV} сливаются, и система скачком переходит в новое состояние устойчивого равновесия, соответствующее точке C^{IV} . В системе ЧАП происходит срыв слежения, и она уже не обеспечивает эффективной подстройки

^{*)} На графике характеристики регулирования, показанном на рис. 9.20,б, для удобства изображения масштаб по вертикальной оси сделан меньше, чем по горизонтальной.

частоты гетеродина. При этом $\Delta f_{\pi} \approx \Delta f_c$. Аналогичная картина будет и при отрицательных значениях расстройки Δf_c .

Интервал отклонений частоты сигнала, в пределах которого обеспечивается эффективная подстройка частоты гетеродина, при условии, что предварительно система ЧАП находилась в режиме слежения, называется **полосой удержания** $\Pi_{\text{уд}}$.

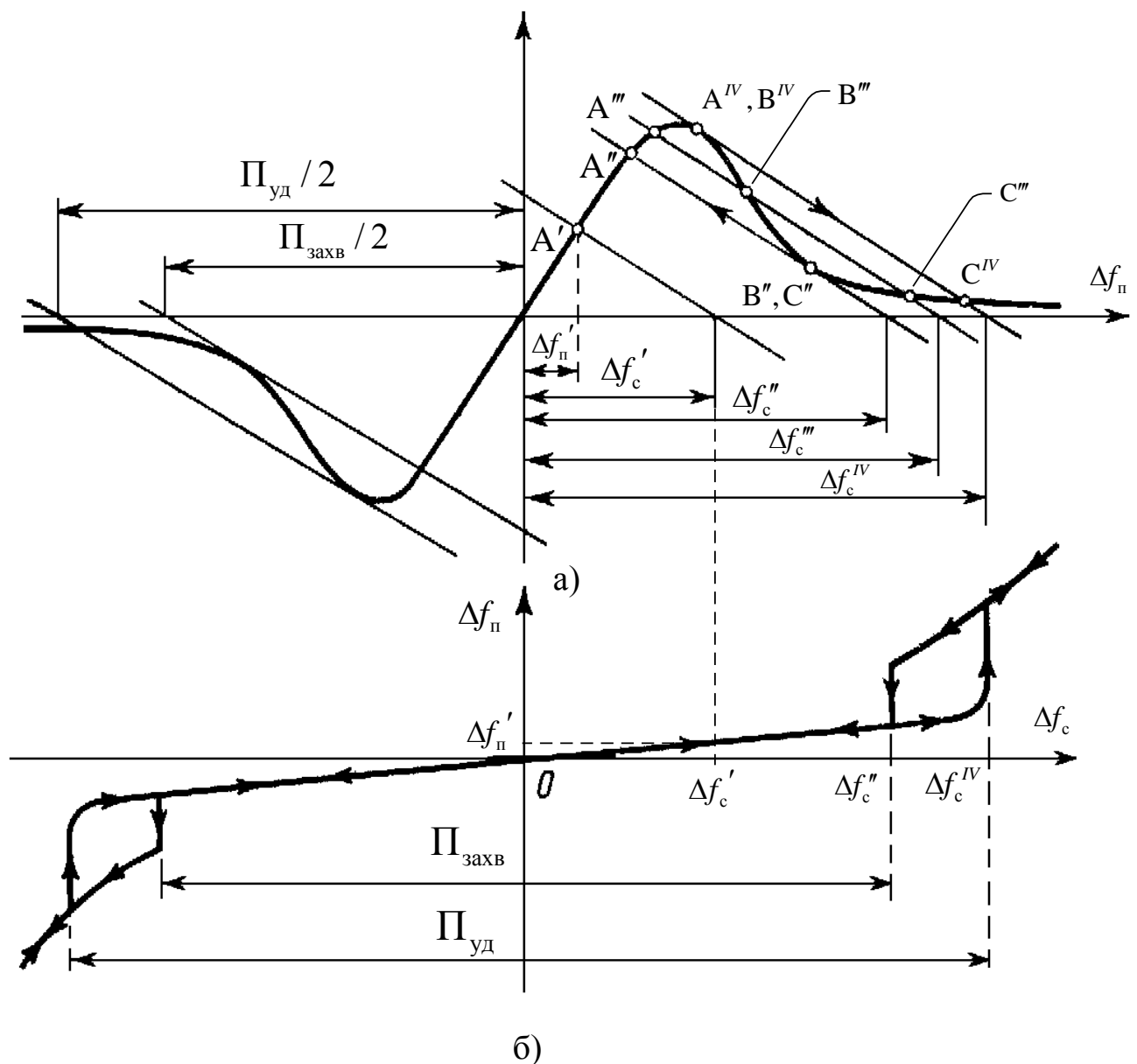


Рис. 9.20. Построение характеристики регулирования

Будем теперь уменьшать отклонение частоты сигнала, начиная с некоторой величины $\Delta f_c > \Delta f_c^{IV}$, соответствующей режиму отсутствия слежения в системе ЧАП. Система будет находиться в устойчивом

состоянии неэффективной работы до тех пор, пока прямая $\Delta f_c - \Delta f_n$ не коснётся нижнего сгиба графика левой части уравнения (9.12), т.е. пока отклонение частоты сигнала не уменьшится до значения $\Delta f_c''$. При $\Delta f_c = \Delta f_c''$ точки В'' и С'' сольются, и система скачком перейдёт в новое устойчивое состояние, соответствующее точке А''. В системе ЧАП происходит «захват» частоты сигнала, и она начинает работать эффективно.

Интервал отклонений частоты сигнала, в пределах которого обеспечивается эффективная подстройка частоты гетеродина, при условии, что предварительно система ЧАП не находилась в режиме слежения, называется **полосой захвата** $\Pi_{\text{захв}}$.

Из-за того, что полоса удержания всегда больше полосы захвата, характеристика регулирования системы ЧАП имеет «петлеобразные» участки при значениях отклонения частоты сигнала от $\Delta f_c''$ до Δf_c^{IV} при положительных расстройках и от $-\Delta f_c^{IV}$ до $-\Delta f_c''$ – при отрицательных. Характеристика такого вида называется **гистерезисной**^{*)}.

Если характеристику управителя частоты нельзя считать линейной, то характеристика регулирования системы ЧАП строится несколько по-другому. Используемая при этом методика применима и в случае линейной характеристики управителя, однако она менее наглядна, чем рассмотренная выше. Такая методика удобна также для построения характеристики регулирования по экспериментально полученным данным.

В общем случае характеристика регулирования строится по точкам. Для этого следует задаться некоторыми значениями остаточной расстройки и найти соответствующие им значения отклонения частоты сигнала.

1) Строим график характеристики ЧД $u_d(\Delta f_n)$, умноженной на коэффициент усиления УПТ $K_{\text{УПТ}}$, т.е. график зависимости управляющего напряжения u_y от Δf_n , задаёмся некоторым значением остаточной расстройки $\Delta f_n'$ и находим соответствующее значение управляющего напряжения u_y' (рис. 9.21).

^{*)} Гистерезис (от греческого слова *hysteresis* – запаздывание) – отставание следствия от вызывающей его причины.

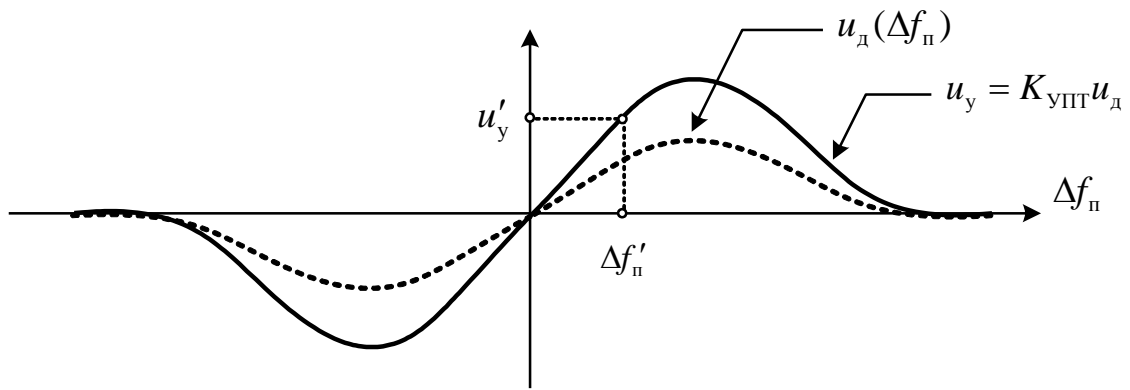


Рис. 9.21. Определение управляющего напряжения по заданной остаточной расстройке

2) По графику характеристики управителя частоты $\Delta f_r(u_y)$ находим изменение частоты гетеродина $\Delta f_r'$, вызванное напряжением u_y' (рис. 9.22).

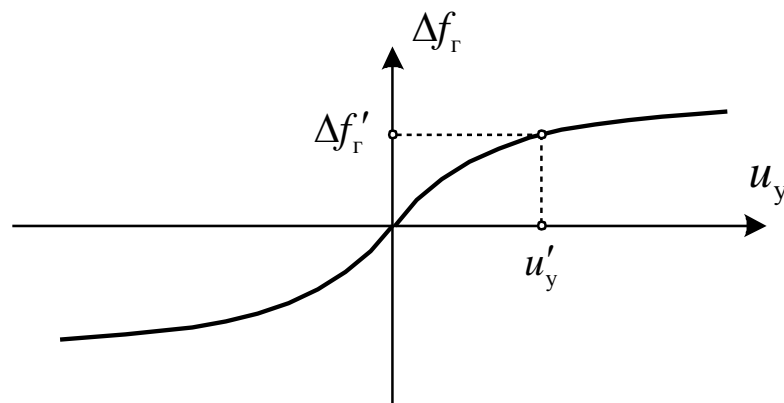


Рис. 9.22. Определение изменения частоты гетеродина

- 3) Вычисляем отклонение частоты сигнала как $\Delta f_c' = \Delta f_r' + \Delta f_{\pi}'$.
- 4) На график характеристики регулирования наносим точку с координатами $(\Delta f_c', \Delta f_{\pi}')$.

Границы полосы захвата и полосы удержания в общем случае определяются графически по характеристике регулирования. Однако при использовании линейной аппроксимации характеристики управителя частоты и линейно-ломаной аппроксимации характеристики ЧД их легко найти аналитически. Характеристика ЧД при линейно-ломаной аппроксимации показана на рис. 9.23. Здесь $\Delta f_{\text{чд}}$ – апертюра характеристики ЧД, $\Delta f_{\text{чд max}}$ – протяжённость характеристики по оси частот, S_d – крутизна характеристики. При такой форме характеристики дискриминатора система ЧАП находится в режиме слежения

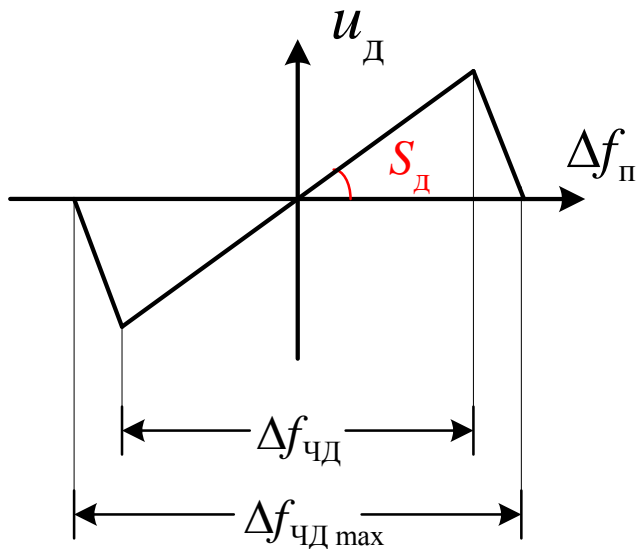


Рис. 9.23. Характеристика ЧД при линейно-ломаной аппроксимации

за частотой сигнала до тех пор, пока остаточная расстройка Δf_{π} не выходит за пределы линейного участка характеристики, т.е. пока $\Delta f_{\pi} \leq \Delta f_{\text{чД}}/2$ (см. рис. 9.24). А поскольку в режиме слежения $\Delta f_{\pi} = \Delta f_{\text{с}}/K_{\text{ЧАП}}$, то максимальная по абсолютной величине начальная расстройка, соответствующая границе полосы удержания, равна $|\Delta f_{\text{с}}|_{\text{max}} = \Pi_{\text{уд}}/2 = K_{\text{ЧАП}} \cdot \Delta f_{\text{чД}}/2$. Следовательно, полоса удержания определяется выражением

$$\Pi_{\text{уд}} = K_{\text{ЧАП}} \Delta f_{\text{чД}}.$$

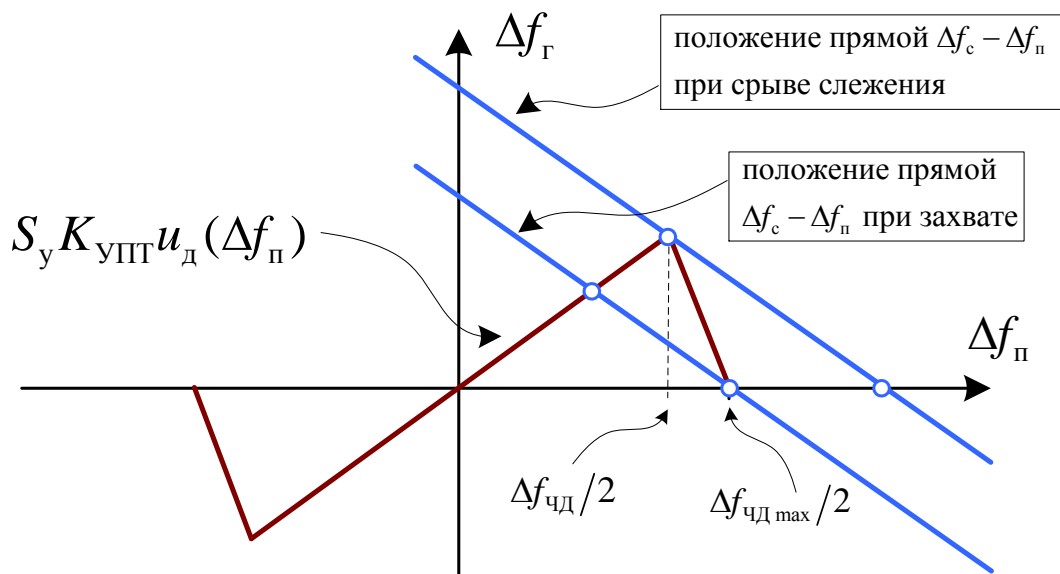


Рис. 9.24. К определению полосы удержания и полосы захвата системы ЧАП при линейно-ломаной аппроксимации характеристики ЧД

Из рис. 9.24 видно, что захват в системе ЧАП происходит при абсолютной величине начальной расстройки равной границе характеристики ЧД $\Delta f_{\text{чД max}}/2$. Следовательно, полоса захвата равна

$$\Pi_{\text{захв}} = \Delta f_{\text{чД max}}.$$

9.4. Влияние системы ЧАП на приём частотно-модулированных сигналов

В случае приёма ЧМ сигнала система ЧАП реагирует на полезную частотную модуляцию точно так же, как и на любые другие изменения частоты: она подстраивает частоту гетеродинного колебания под изменение частоты сигнала. Это приводит к уменьшению девиации частоты сигнала на выходе смесителя и, следовательно, к уменьшению амплитуды демодулированного колебания. Оценим это уменьшение количественно в случае системы ЧАП с фильтром 1-го порядка в цепи обратной связи.

В соответствии с (9.8) операторный коэффициент передачи, связывающий изменение промежуточной частоты с изменением частоты сигнала, равен

$$K_{\Delta f_c \Delta f_n}(p) = \frac{1/K_{\text{ЧАП}} + pT_{\text{ЧАП}}}{1 + pT_{\text{ЧАП}}} = \frac{1 + pT}{K_{\text{ЧАП}} + pT}.$$

Для определения комплексной частотной характеристики системы ЧАП относительно частоты модуляции заменим p на $j\Omega$:

$$\dot{K}_{\Delta f_c \Delta f_n}(j\Omega) = \frac{1 + j\Omega T}{K_{\text{ЧАП}} + j\Omega T}. \quad (9.13)$$

Амплитудно-частотная характеристика системы ЧАП равна модулю комплексной частотной характеристики (9.13):

$$\begin{aligned} K_{\Delta f_c \Delta f_n}(F) &= \left| \dot{K}_{\Delta f_c \Delta f_n}(j2\pi F) \right| = \left| \frac{1 + j2\pi FT}{K_{\text{ЧАП}} + j2\pi FT} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{1 + (2\pi FT)^2}{K_{\text{ЧАП}}^2 + (2\pi FT)^2}}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

График этой АЧХ как функции произведения FT показан на рис. 9.25. Значение коэффициента передачи $K_{\Delta f_c \Delta f_n}$ характеризует уменьшение девиации частоты и, следовательно, уменьшение амплитуды демодулированного сигнала на выходе ЧД. Задавая допустимую величину этого уменьшения K^* , можно найти соответствующую ве-

личину $(FT)^*$, а затем определить требуемую постоянную времени фильтра в цепи обратной связи системы ЧАП:

$$T = \frac{(FT)^*}{F_{\min}}, \quad (9.15)$$

где F_{\min} – минимальная частота модуляции.

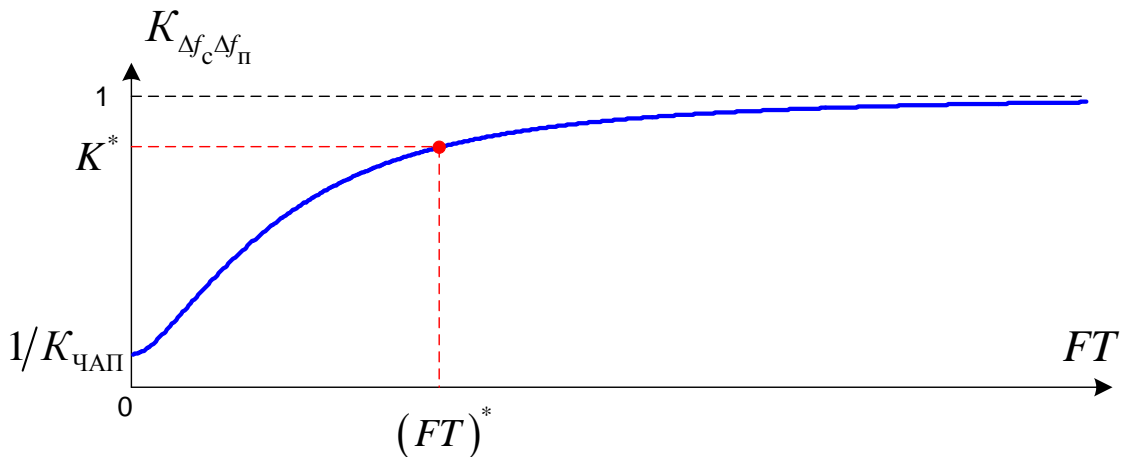


Рис. 9.25. Амплитудно-частотная характеристика системы ЧАП

Приложение 1

Вычисление обратного преобразования Лапласа

Обратное преобразование Лапласа функции $F(p) = \frac{1 + pK_{\text{ЧАП}}T_{\text{ЧАП}}}{p(1 + pT_{\text{ЧАП}})}$ равно

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \frac{1 + pK_{\text{ЧАП}}T_{\text{ЧАП}}}{p(1 + pT_{\text{ЧАП}})} e^{pt} dp,$$

где a – произвольная константа, определяющая положение прямой, по которой проводится интегрирование.

Функция $F(p)$ имеет особые точки в виде простых полюсов: $p_1 = 0$, $p_2 = -1/T_{\text{ЧАП}}$. Для вычисления интеграла с помощью вычетов дополним прямую, по которой проводится интегрирование, до замкнутого контура, добавив к ней дугу C_R окружности бесконечно большого радиуса с центром в точке 0 и расположим прямую так, чтобы оба полюса находились внутри контура (рис. 9.П). Тогда интеграл по замкнутому контуру будет равен

$$\oint F(p)e^{pt} dp = \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt} dp + \int_{C_R} F(p)e^{pt} dp.$$

Поскольку при бесконечном увеличении радиуса дуги окружности функция $F(p)$ стремится к нулю, то по лемме Жордана интеграл по этой дуге также стремится к нулю. Следовательно, при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \oint F(p)e^{pt} dp.$$

Интеграл по замкнутому контуру выражается через сумму вычетов подынтегральной функции:

$$\oint F(p)e^{pt} dp = 2\pi j \sum_{i=1}^2 \text{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p_i}.$$

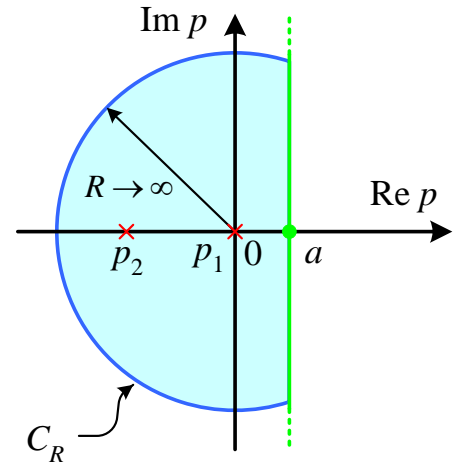


Рис. 9.П. Контур интегрирования

Таким образом, обратное преобразование Лапласа равно

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sum_{i=1}^2 \text{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p_i}.$$

Вычет функции $F(p)e^{pt}$ в точке простого полюса равен

$$\text{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p_i} = \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i) F(p)e^{pt}.$$

Найдём вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в точках $p_1 = 0$, $p_2 = -1/T_{\text{чАП}}$:

$$\text{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p_1} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1 + pK_{\text{чАП}}T_{\text{чАП}}}{p(1 + pT_{\text{чАП}})} e^{pt} = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(F(p)e^{pt}) \Big|_{p_2} &= \lim_{p \rightarrow -1/T_{\text{чАП}}} \left(p + \frac{1}{T_{\text{чАП}}} \right) \frac{1 + pK_{\text{чАП}}T_{\text{чАП}}}{p(1 + pT_{\text{чАП}})} e^{pt} = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1/T_{\text{чАП}}} \left(\frac{pT_{\text{чАП}} + 1}{T_{\text{чАП}}} \right) \frac{p \left(\frac{1}{p} + K_{\text{чАП}}T_{\text{чАП}} \right)}{p(1 + pT_{\text{чАП}})} e^{pt} = \frac{1}{T_{\text{чАП}}} \left(\frac{1}{p} + K_{\text{чАП}}T_{\text{чАП}} \right) e^{pt} \Big|_{p=-1/T_{\text{чАП}}} = \\ &= (K_{\text{чАП}} - 1)e^{-t/T_{\text{чАП}}}. \end{aligned}$$

Суммируя оба вычета, окончательно получим:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 1 + (K_{\text{чАП}} - 1)e^{-t/T_{\text{чАП}}}.$$

Приложение 2

Годограф частотной характеристики разомкнутой системы в случае ФНЧ 1-го порядка в цепи обратной связи

В случае фильтра 1-го порядка с передаточной функцией $K_{\phi 1}(p) = \frac{1}{1 + pT}$ комплексная частотная характеристика разомкнутой системы равна $A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega) = \frac{A}{1 + j\Omega T}$. Покажем, что при этом годограф частотной характеристики разомкнутой системы имеет вид полуокружности радиуса $A/2$, лежащей в правом нижнем квадранте. Для этого, прежде всего, найдём вещественную и мнимую части комплексной частотной характеристики:

$$A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega) = \frac{A}{1 + j\Omega T} = A \frac{1 - j\Omega T}{1 + (\Omega T)^2} = \frac{A}{1 + (\Omega T)^2} - j \frac{A\Omega T}{1 + (\Omega T)^2}.$$

Видно, что при любых значениях частоты $\operatorname{Re}\{A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega)\} > 0$ и $\operatorname{Im}\{A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega)\} \leq 0$, следовательно годограф расположен в правом нижнем квадранте и при $\Omega = 0$ и $\Omega \rightarrow \infty$ касается вещественной оси.

Затем, для того чтобы показать, что годограф имеет форму полуокружности с центром в точке $A/2$ на вещественной оси, найдём длину вектора $\dot{R} = A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega) - \frac{A}{2}$, соединяющего эту точку, с точкой годографа, соответствующей текущей частоте Ω :

$$\begin{aligned} |\dot{R}| &= \left| A\dot{K}_{\phi 1}(j\Omega) - \frac{A}{2} \right| = \left| \frac{A}{1 + j\Omega T} - \frac{A}{2} \right| = A \left| \frac{2 - (1 + j\Omega T)}{2(1 + j\Omega T)} \right| = \\ &= \frac{A}{2} \left| \frac{1 - j\Omega T}{1 + j\Omega T} \right| = \frac{A}{2} \left| \frac{(1 + j\Omega T)^*}{1 + j\Omega T} \right| = \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку длина вектора \dot{R} не зависит от частоты Ω и равна $A/2$, то годограф частотной характеристики действительно представляет собой полуокружность радиуса $A/2$ (см. рис. 9.14).