НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ

КАФЕДРА РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ В АППАРАТУРЕ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ СРНС

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

ФИО СТУДЕНТА: Жеребин В.Р.

ГРУППА: ЭР-15-15

ВАРИАНТ №: 3

ДАТА: 31.10.2019

ПОДПИСЬ: ________________

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ: Шатилов А.Ю.

ОЦЕНКА: ____________

МОСКВА, 2019 Г.

Дано

Флуктуационная характеристика частотного дискриминатора:

$$\widetilde{N_0}\left(q_{c/n_0}\right) = \frac{2}{q_{c/n_0}T^2}\left(1 + \frac{1}{2q_{c/n_0}T}\right)$$

$T = 10$ мс – период дискретизации;

$\alpha = 1\ \text{с}^{-1}$ – ширина спектра флуктуаций радиального ускорения;

$q_{c/n_0} = 10^{0.1\cdot(14\ldots50\ \text{дБГц})}$ [Гц] – отношение мощности сигнала к спектральной плотности шума на входе приемника;

$\omega_0 = 2\pi \cdot (1602\ \text{МГц})$ – несущая частота;

Задание

1. Найти аналитически и построить на графиках зависимости СКО фильтрации частоты и оптимальной полосы ЧАП от отношения с/ш:

Находим спектральную плотность мощности (СПМ) формирующего шума:

$\sigma_\alpha = 10\ \text{м/с}^2$ – среднеквадратическое ускорение

$c = 3 \cdot 10^8\ \text{м/с}^2$ – скорость света в свободном пространстве

$$S_\xi = 2{\sigma_\alpha}^2\alpha\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 = 2 \cdot 10^2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 1602 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8}\right)^2 = 2{,}25 \cdot 10^5$$

Аналитическое выражение для определения дисперсии:

$$D_{11}\left(q_{c/n_0}\right) = \frac{\alpha\widetilde{N_0}\left(q_{c/n_0}\right)}{2}\left(\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{S_\xi}{\alpha^2\widetilde{N_0}\left(q_{c/n_0}\right)}}} - 1\right)$$

Из этого выражение получаем зависимость СКО фильтрации от отношения с/ш:

$$\sigma_\Omega\left(q_{c/n_0}\right) = \sqrt{D_{11}\left(q_{c/n_0}\right)} = \sqrt{\frac{\alpha\widetilde{N_0}\left(q_{c/n_0}\right)}{2}\left(\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{S_\xi}{\alpha^2\widetilde{N_0}\left(q_{c/n_0}\right)}}} - 1\right)}$$

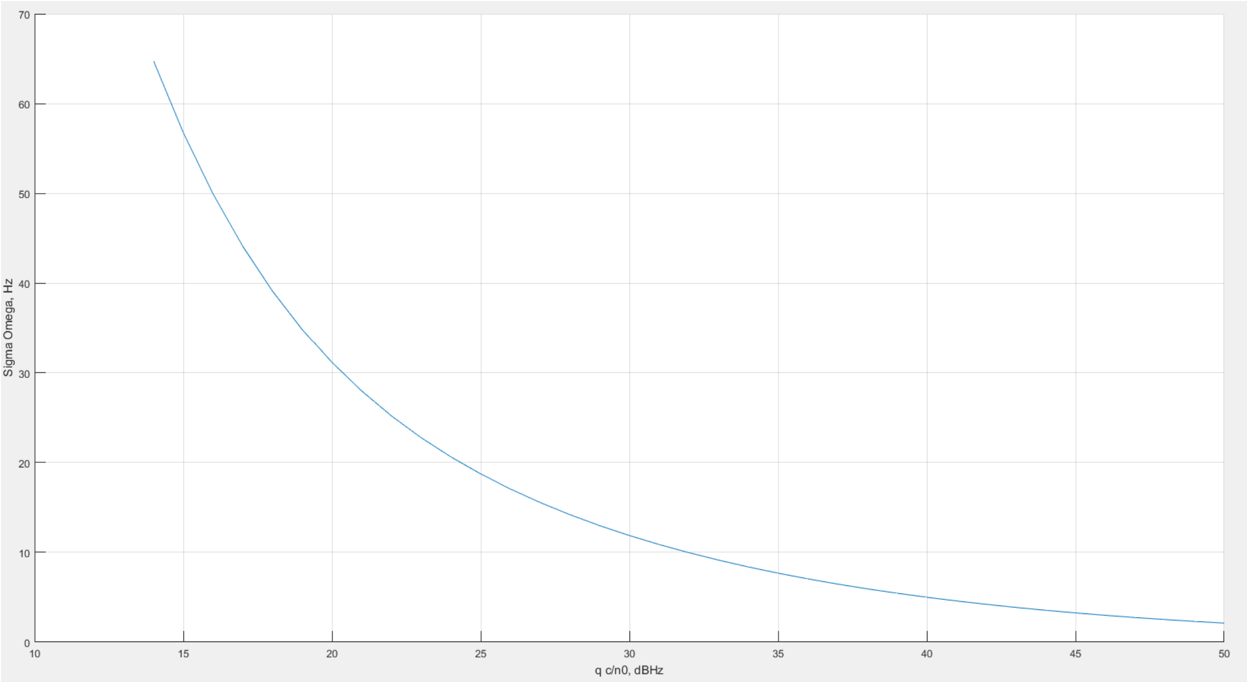

Рис.1. Зависимость СКО фильтрации от отношения с/ш

Среднеквадратичная ошибка фильтрации уменьшается, при увеличении отношения с/ш.

Общая формула нахождения полосы ЧАП:

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi\left|K_{y\Omega}(0)\right|^2}\int_0^{\infty}\left|K_{y\Omega}(j\omega)\right|^2 d\omega$$

$$K_{y\Omega}(p) = \frac{K_\Phi(p)}{1+K_\Phi(p)}$$

Коэффициенты передачи фильтра:

$$K_\Phi(p) = \frac{1}{p}\left(K_1 + \frac{K_2}{p+\alpha}\right)$$

$$K_1 = \alpha\left(\sqrt{1+2\sqrt{\frac{S_\xi}{\alpha^2\widetilde{N_0}\left(q_{c/n_0}\right)}}}-1\right), \qquad K_2 = \frac{{K_1}^2}{2}$$

Аналитическое решение:

$$K_{y\Omega}(p) = \frac{\frac{1}{p}\left(K_1+\frac{K_2}{p+\alpha}\right)}{1+\frac{1}{p}\left(K_1+\frac{K_2}{p+\alpha}\right)} = \frac{K_1+\frac{K_2}{p+\alpha}}{p+K_1+\frac{K_2}{p+\alpha}} = \frac{pK_1+\alpha K_1+K_2}{(p+K_1)(\alpha+p)+K_2}$$

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi \left|\frac{\alpha K_1 + K_2}{\alpha K_1 + K_2}\right|^2} \int_0^\infty \left|\frac{j\omega K_1 + \alpha K_1 + K_2}{(j\omega + K_1)(j\omega + \alpha) + K_2}\right|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{(\omega K_1)^2 + (\alpha K_1 + K_2)^2}\right)^2}{|(j\omega)^2 + (K_1 + \alpha)(j\omega) + K_2|} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-(j\omega)^2 {K_1}^2 + (\alpha K_1 + K_2)^2}{[(j\omega)^2 + (K_1 + \alpha)(j\omega) + K_2][(-j\omega)^2 + (K_1 + \alpha)(-j\omega) + K_2]} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{G_2(j\omega)}{H_2(j\omega)H_2(-j\omega)} d\omega = 2J_2$$

Где $J_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1}$ – интеграл второго порядка с коэффициентами:

$$G_2(j\omega) = -(j\omega)^2 {K_1}^2 + (\alpha K_1 + K_2)^2 = b_0(j\omega)^2 + b_1$$

$$\begin{cases} b_0 = -{K_1}^2 \\ b_1 = (\alpha K_1 + K_2)^2 \end{cases}$$

$$H_2(j\omega) = (j\omega)^2 + (K_1 + \alpha)(j\omega) + K_2 = a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_2$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = (K_1 + \alpha) \\ a_2 = K_2 \end{cases}$$

$$J_2 = \frac{{K_1}^2 + \frac{1 \cdot (\alpha K_1 + K_2)^2}{K_2}}{2 \cdot 1 \cdot (K_1 + \alpha)} = \frac{{K_1}^2 K_2 + (\alpha K_1 + K_2)^2}{2(K_1 + \alpha)}$$

Итоговой аналитическое решение для оптимальной полосы ЧАП:

$$\Delta F = \frac{{K_1}^2 K_2 + (\alpha K_1 + K_2)^2}{K_1 + \alpha}$$

Коэффициенты фильтра зависят от отношения с/ш

$$\Delta F\left(q_{c/n_0}\right) = \frac{K_1\left(q_{c/n_0}\right)^2 K_2\left(q_{c/n_0}\right) + \left(\alpha K_1\left(q_{c/n_0}\right) + K_2\left(q_{c/n_0}\right)\right)^2}{K_1\left(q_{c/n_0}\right) + \alpha}$$

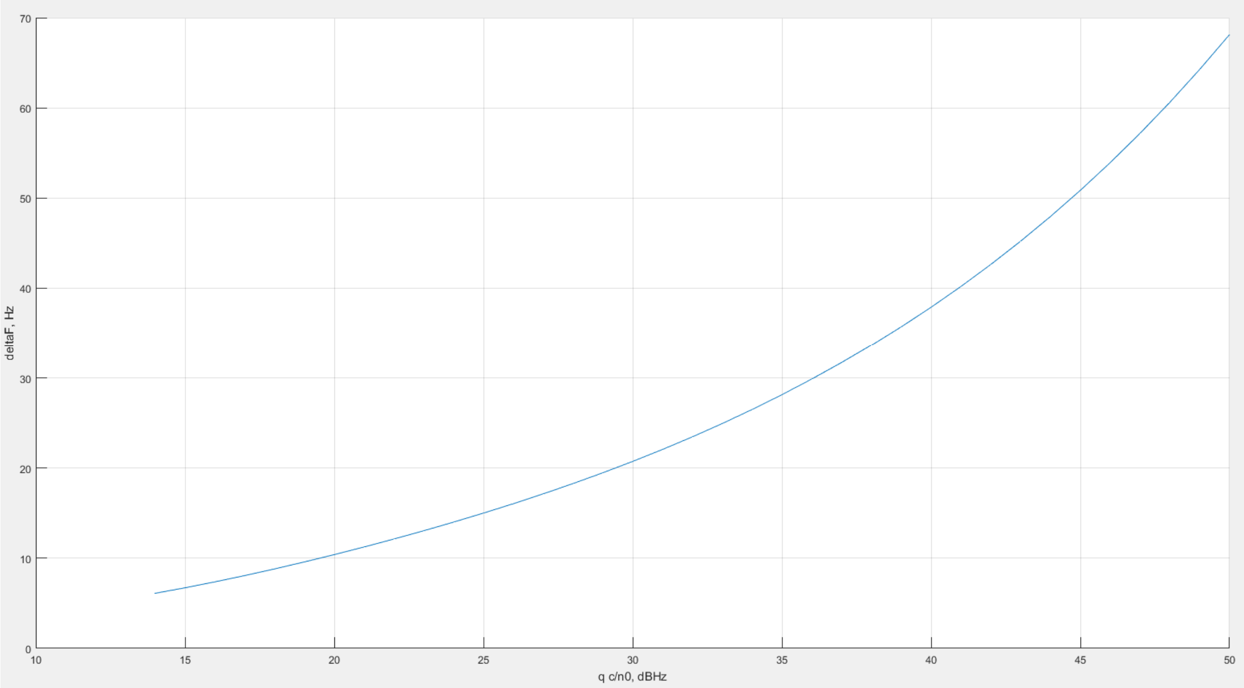

Рис.2. Зависимость полосы ЧАП от отношения с/ш

Полоса ЧАП увеличивается, при увеличении отношения с/ш.

2. Найти аналитически и построить на графиках зависимости СКО фильтрации частоты и оптимальной полосы ЧАП от среднеквадратичного ускорения:

Находим флуктуационную характеристику частотного дискриминатора:

$q_{c/n_0} = 10^{0.1\cdot(30\ \text{дБГц})}$ [Гц] – отношение мощности сигнала к спектральной плотности шума на входе приемника;

$$\widetilde{N_0} = \frac{2}{q_{c/n_0}T^2}\left(1 + \frac{1}{2q_{c/n_0}T}\right) = \frac{2}{10^3 0{,}01^2}\left(1 + \frac{1}{2\cdot 10^3\cdot 0{,}01}\right) = 21$$

Аналитическое выражение для определения дисперсии:

$$S_\xi(\sigma_\alpha) = 2{\sigma_\alpha}^2\alpha\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2$$

$$D_{11}(\sigma_\alpha) = \frac{\alpha\widetilde{N_0}}{2}\left(\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{S_\xi(\sigma_\alpha)}{\alpha^2\widetilde{N_0}}}} - 1\right)$$

Из этого выражение получаем зависимость СКО фильтрации от среднеквадратичного ускорения:

$$\sigma_\Omega(\sigma_\alpha) = \sqrt{D_{11}(\sigma_\alpha)} = \sqrt{\frac{\alpha\widetilde{N_0}}{2}\left(\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{S_\xi(\sigma_\alpha)}{\alpha^2\widetilde{N_0}}}} - 1\right)}$$

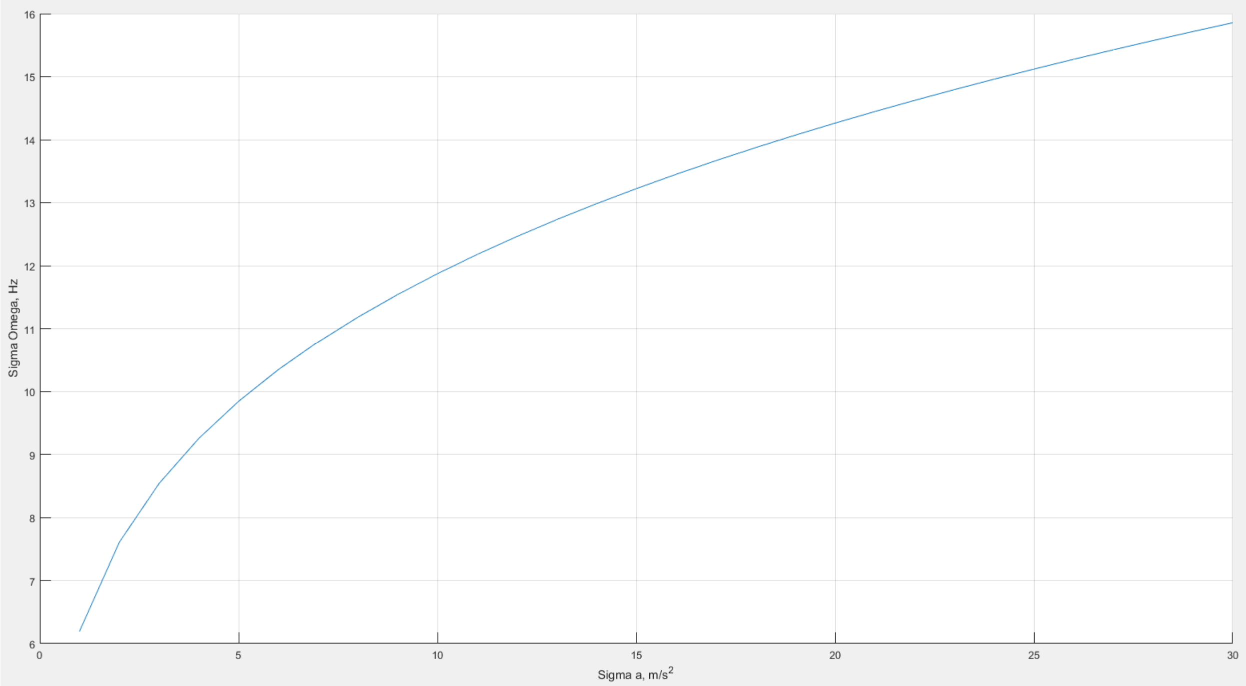

Рис.3. Зависимость СКО фильтрации от среднеквадратичного ускорения

Среднеквадратичная ошибка фильтрации уменьшается, при увеличении среднеквадратичного ускорения.

Аналитическое решение для полосы ЧАП уже было найдено в пункте 1. Перепишем его

$$\Delta F = \frac{{K_1}^2 K_2 + (\alpha K_1 + K_2)^2}{K_1 + \alpha}$$

Коэффициенты фильтра зависят от среднеквадратичного ускорения:

$$\Delta F(\sigma_\alpha) = \frac{K_1(\sigma_\alpha)^2 K_2(\sigma_\alpha) + \left(\alpha K_1(\sigma_\alpha) + K_2(\sigma_\alpha)\right)^2}{K_1(\sigma_\alpha) + \alpha}$$

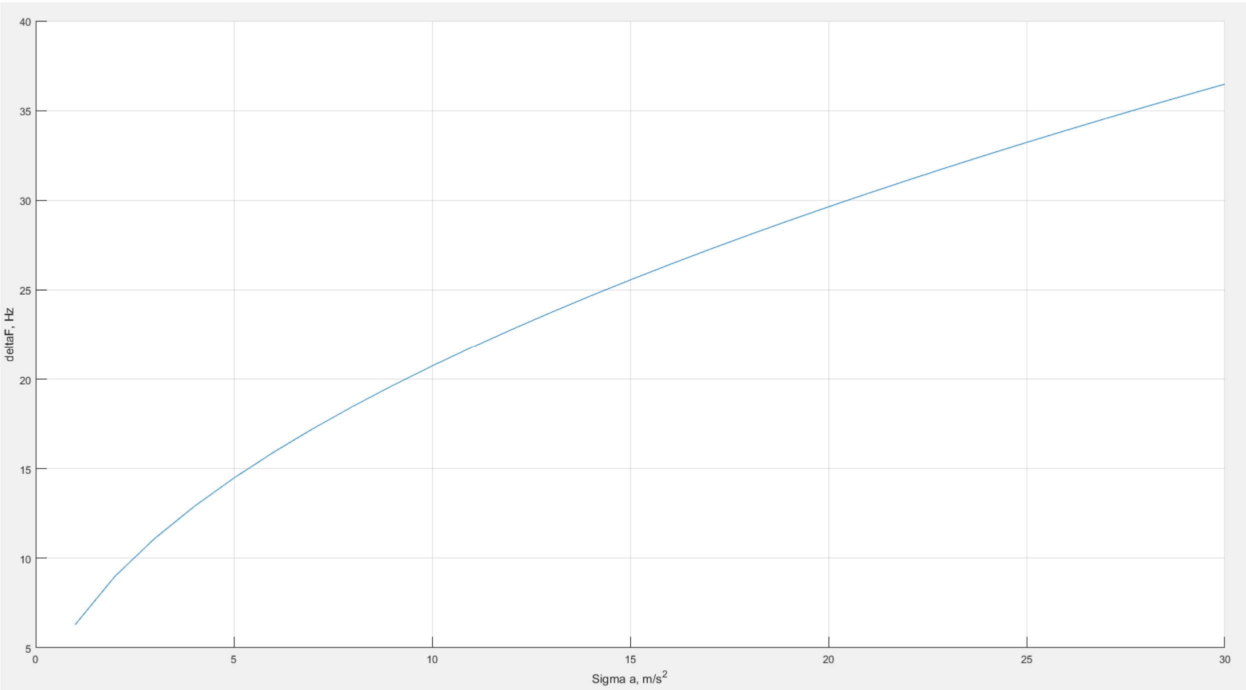

Рис.4. Зависимость полосы ЧАП от среднеквадратичного ускорения

Полоса ЧАП увеличивается, при увеличении среднеквадратичного ускорения.

3. Записать уравнения оптимальной фильтрации для дискретного времени:

$$\widehat{\Omega}_k = \widehat{\Omega}_{k-1} + \nu_{k-1}T$$
$$\hat{\nu}_k = \hat{\nu}_{k-1}(1-\alpha T) + \alpha T \cdot \xi_{k-1}$$

4. Смоделировать входное воздействие и оптимальную систему ЧАП в дискретном времени при следующих параметрах:

$q_{c/n_0} = 10^{0{,}1\cdot(30\ \text{дБГц})}$, $\sigma_\alpha = 10\ \text{м/с}^2$, $D_0 = \begin{vmatrix} (34\ \text{рад/с})^2 & 0 \\ 0 & (340\ \text{рад/с})^2 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} \Omega_0 \\ \nu_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \widehat{\Omega}_k \\ \hat{\nu}_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$;

$x_k = \begin{vmatrix} \Omega_k \\ \nu_k \end{vmatrix}$ – вектор состояния

Смоделируем входное воздействие (наблюдение):

$$\tilde{y}_k = H \cdot x_k + \tilde{n}_k, \qquad \tilde{n}_k \text{ – ДБГШ с дисперсией } {\sigma_n}^2 = \frac{\widetilde{N_0}(q_{c/n_0})}{2T}$$
$$H = |1 \quad 0|$$

Синтез оптимальной системы ЧАП:

$$x_k = F \cdot x_{k-1} + G \cdot \xi_{k-1}\,, \qquad {\sigma_\xi}^2 = \frac{S_\xi}{2T}$$

С учетом выражений из 3 пункта найдем коэффициенты фильтра:

$$F = \begin{vmatrix} 1 & T \\ 0 & (1-\alpha T) \end{vmatrix}, \qquad G = \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha T \end{vmatrix};$$

Подставим коэффициенты фильтра в рекуррентное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \Omega_k \\ \nu_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & T \\ 0 & (1-\alpha T) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Omega_k - 1 \\ \nu_k - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha T \end{vmatrix} \cdot \xi_{k-1}$$

Шаг экстраполяции:

$$\widetilde{D}_k = F_{k-1} \cdot D_{k-1} \cdot {F_{k-1}}^T + G_{k-1} \cdot D_\xi \cdot {G_{k-1}}^T$$
$$\tilde{x}_k = F \cdot \hat{x}_{k-1}$$

Шаг оценивания:

$$D_k = (I - K_k \cdot H)\widetilde{D}_k$$
$$K_k = \widetilde{D}_k H^T \left(H \cdot \widetilde{D}_k \cdot H^T + D_n\right)^{-1}$$
$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k(y_k - H \cdot \tilde{x}_k)$$

5. Построить график зависимости истинной доплеровской частоты от времени:

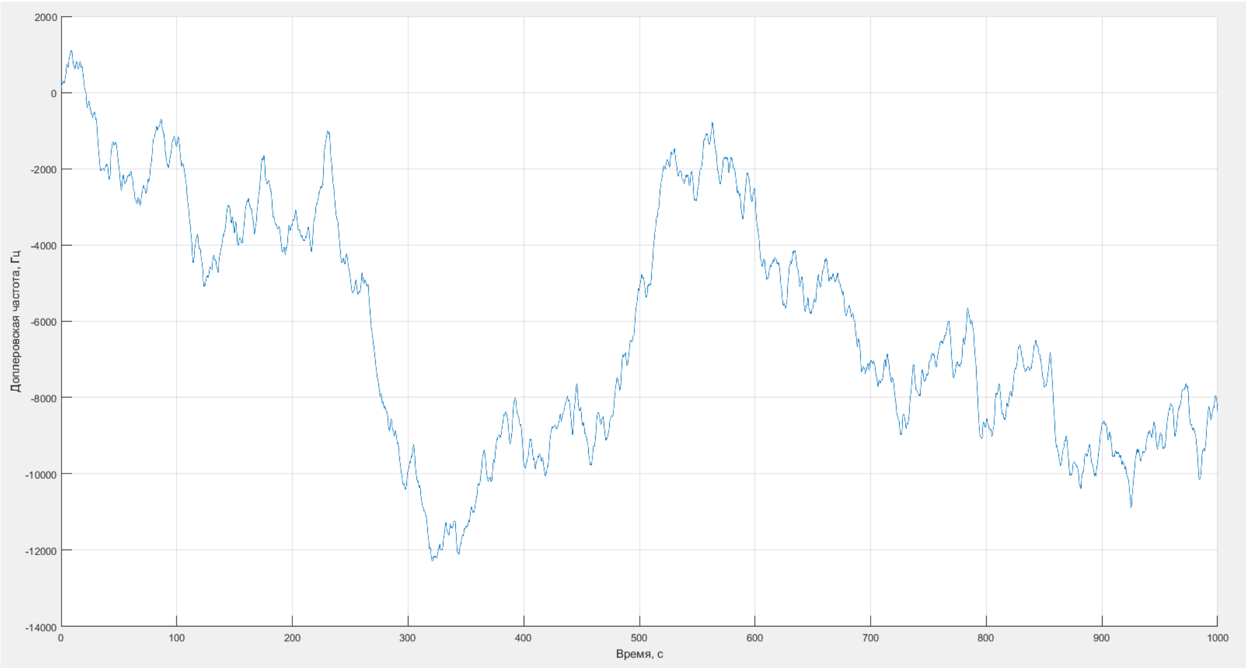

Рис.5. График зависимости истинной доплеровской частоты от времени

6. Построить график зависимости СКО фильтрации частоты от времени (до установившегося режима):

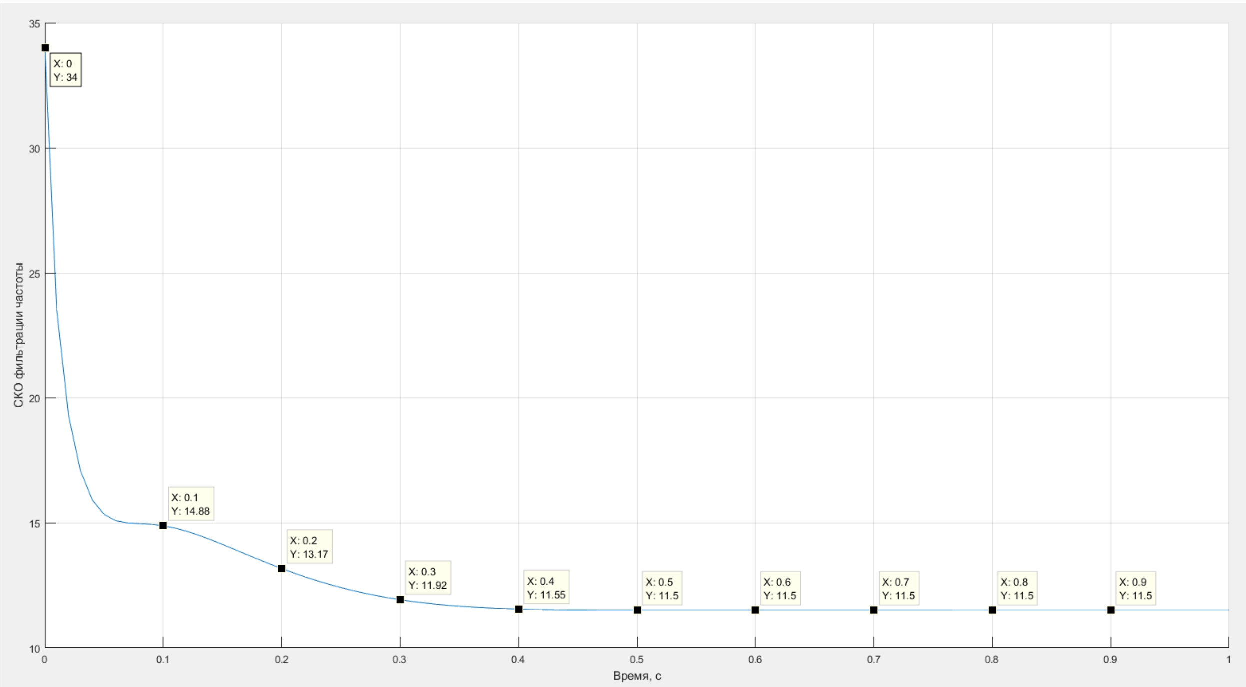

Рис.6. График зависимости СКО фильтрации частоты от времени

7. Построить график мгновенной ошибки фильтрации частоты от времени:

$$\varepsilon_{\Omega} = \widehat{\Omega}_k - \Omega_k$$

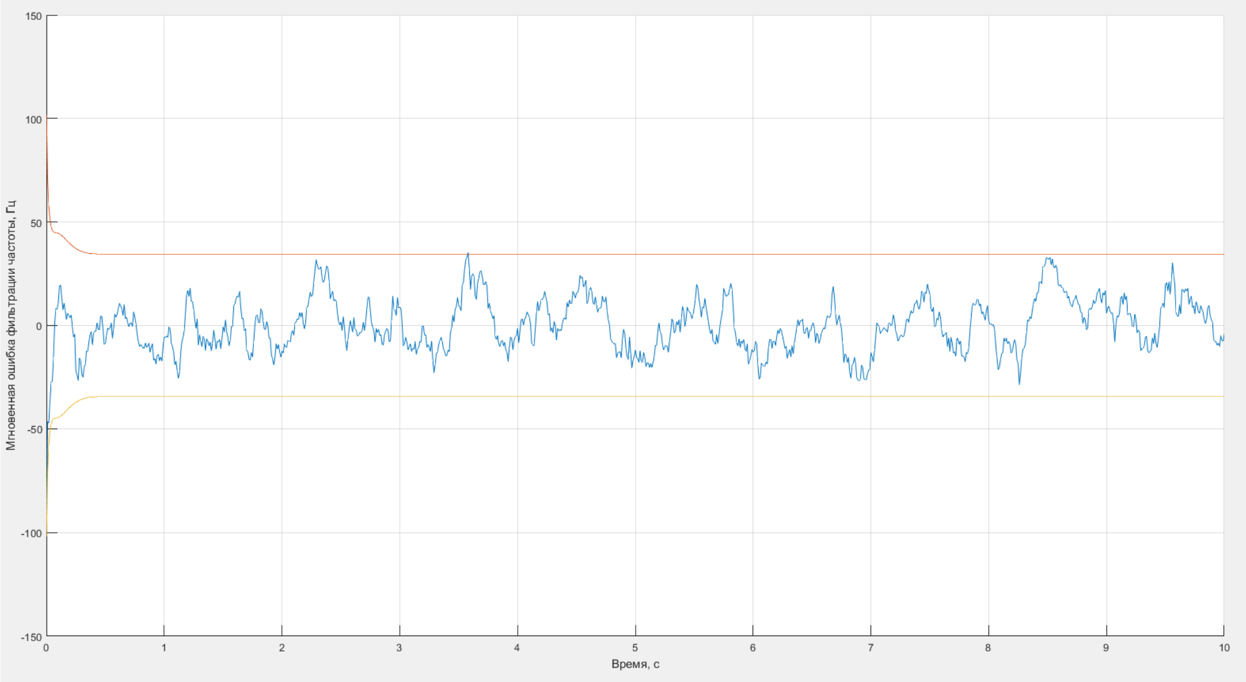

Рис.7. График мгновенной ошибки фильтрации частоты от времени

8. Для установившегося режима сравнить D_{11} и дисперсию ошибки, рассчитанную по графику ε_{Ω}, сделать вывод:

Для установившегося режима $D_{11} \approx 54{,}111$

Дисперсия мгновенной ошибки для всего участка наблюдения будет $D_{\varepsilon} \approx 64{,}096$

Дисперсия мгновенной ошибки для установившегося режима будет $D_{\varepsilon} \approx 55{,}273$

Дисперсия мгновенной ошибки D_{ε} совпадает с дисперсией D_{11} для установившегося режима.

Приложение 1

Листинг программы MATLAB для первого пункта

```
function Main()
    close all; clear all; clc;

    T = 10e-3;
    alpha = 1;
    c = 3e8;
    f0 = 1602e6;
    omega0 = 2*pi*f0;
    sigma = 10;
    q_dB = 14:1:50;

    S_ksi = 2*sigma^2*alpha*(omega0/c)^2;

    sigma_OMEGA = nan(size(q_dB));

    for k = 14:1:50
        q = 10^(k/10);
        N0 = 2/(q*T^2)*(1+1/(2*q*T));
        K1 = alpha*(sqrt(1+2*sqrt(S_ksi/(alpha^2*N0)))-1);
        K2 = (K1^2)/2;
        D11 = K1*N0/2;
        sigma_OMEGA_k = sqrt(D11);
        sigma_OMEGA(k-13) = sigma_OMEGA_k;
        deltaF_k = (K1^2*K2+(alpha*K1+K2)^2)/(K2*(K1+alpha));
        deltaF(k-13) = deltaF_k;
    end

    figure(1);
    hold on; grid on;
    plot(q_dB, sigma_OMEGA);
    xlabel('q c/n0, dBHz');
    ylabel('Sigma Omega, Hz');

    figure(2);
    hold on; grid on;
    plot(q_dB, deltaF);
    xlabel('q c/n0, dBHz');
    ylabel('deltaF, Hz');
end
```

Листинг программы MATLAB для второго пункта

```
function Main()
    close all; clear all; clc;

    T = 10e-3;
    alpha = 1;
    c = 3e8;
    f0 = 1602e6;
    omega0 = 2*pi*f0;
    q_dB = 30;
    q = 10^(q_dB/10);
    N0 = 2/(q*T^2)*(1+1/(2*q*T));

    sigma_a = 1:30;

    sigma_OMEGA = nan(size(sigma_a));

    for k = 1:30
```

```
        S_ksi = 2*k^2*alpha*(omega0/c)^2;
        K1 = alpha*(sqrt(1+2*sqrt(S_ksi/(alpha^2*N0)))-1);
        K2 = (K1^2)/2;
        D11 = K1*N0/2;
        sigma_OMEGA_k = sqrt(D11);
        sigma_OMEGA(k) = sigma_OMEGA_k;
        deltaF_k = (K1^2*K2+(alpha*K1+K2)^2)/(K2*(K1+alpha));
        deltaF(k) = deltaF_k;
    end

    figure(1);
    hold on; grid on;
    plot(sigma_a, sigma_OMEGA);
    xlabel('Sigma a, m/s^2');
    ylabel('Sigma Omega, Hz');

    figure(2);
    hold on; grid on;
    plot(sigma_a, deltaF);
    xlabel('Sigma a, m/s^2');
    ylabel('deltaF, Hz');
end
```

Листинг программы MATLAB для остальных пунктов

```
function Main()
    close all; clear all; clc;

    %% Параметры
    T = 10e-3;
    t = 0:T:10;
    q_dB = 30;
    q = 10^(q_dB/10);
    alpha = 1;
    c = 3e8;
    f0 = 1602e6;
    omega0 = 2*pi*f0;
    sigma_alpha = 10;

    %% СПМ шума наблюдений
    N0 = 2/(q*T^2)*(1+1/(2*q*T));
    D_n = N0/(2*T);

    %% СПМ формирующего шума
    S = 2*sigma_alpha^2*alpha*(omega0/c)^2;
    D_ksi = S/(2*T);

    %% Коэффициенты фильтра
    H = [1 0];
    F = [1 T; 0 (1-alpha*T)];
    G = [0; alpha*T];

    %% Начальное приближение
    x = [100; 100];
    D0 = [34^2 0; 0 340^2];
    xf = [0; 0];

    %% Выделение памяти и начальные приближения
    OMEGA       = nan(size(t)); OMEGA(1)      = x(1);
    Nu          = nan(size(t)); Nu(1)         = x(2);
    D_OMEGA     = nan(size(t)); D_OMEGA(1)    = D0(1,1);
    y           = nan(size(t)); y(1)          = 0;
    OMEGA_extr  = nan(size(t)); OMEGA_extr(1) = xf(1);
```

```
    for k = 2:length(t)
        ksi = randn(1,1)*sqrt(D_ksi);
        x = F*x + G*ksi;
        OMEGA(k) = x(1);
        Nu(k)    = x(2);

        %% экстраполяция
        D0 = F*D0*F' + G*D_ksi*G';
        K = D0*H'*inv(H*D0*H' + D_n);
        xf = F * xf;

        %% наблюдения
        yk = OMEGA(k) + randn(1,1)*sqrt(D_n);
        y(k) = yk;

        %% коррекция
        D0 = (eye(length(x)) - K*H)*D0;
        D_OMEGA(k) = D0(1,1);
        xf = xf + K * (yk - H*xf);
        OMEGA_extr(k) = xf(1);

    end

    d_OMEGA = (OMEGA_extr - OMEGA);
    std(d_OMEGA)^2 % Для всего временного участка
    mean(D_OMEGA())
    std(d_OMEGA(30:1000))^2 % Для установившегося режима
    mean(D_OMEGA(30:1000))

    figure(1);
    hold on, grid on;
    plot(t, OMEGA)
    xlabel("Время, с");
    ylabel("Доплеровская частота, Гц");

    figure(2);
    hold on, grid on;
    plot(t, sqrt(D_OMEGA))
    xlabel("Время, с");
    ylabel("СКО фильтрации частоты");

    figure(3);
    hold on, grid on;
    plot(t, d_OMEGA, t, [+3*sqrt(D_OMEGA); -3*sqrt(D_OMEGA)])
    xlabel("Время, с");
    ylabel("Мгновенная ошибка фильтрации частоты, Гц");
end
```