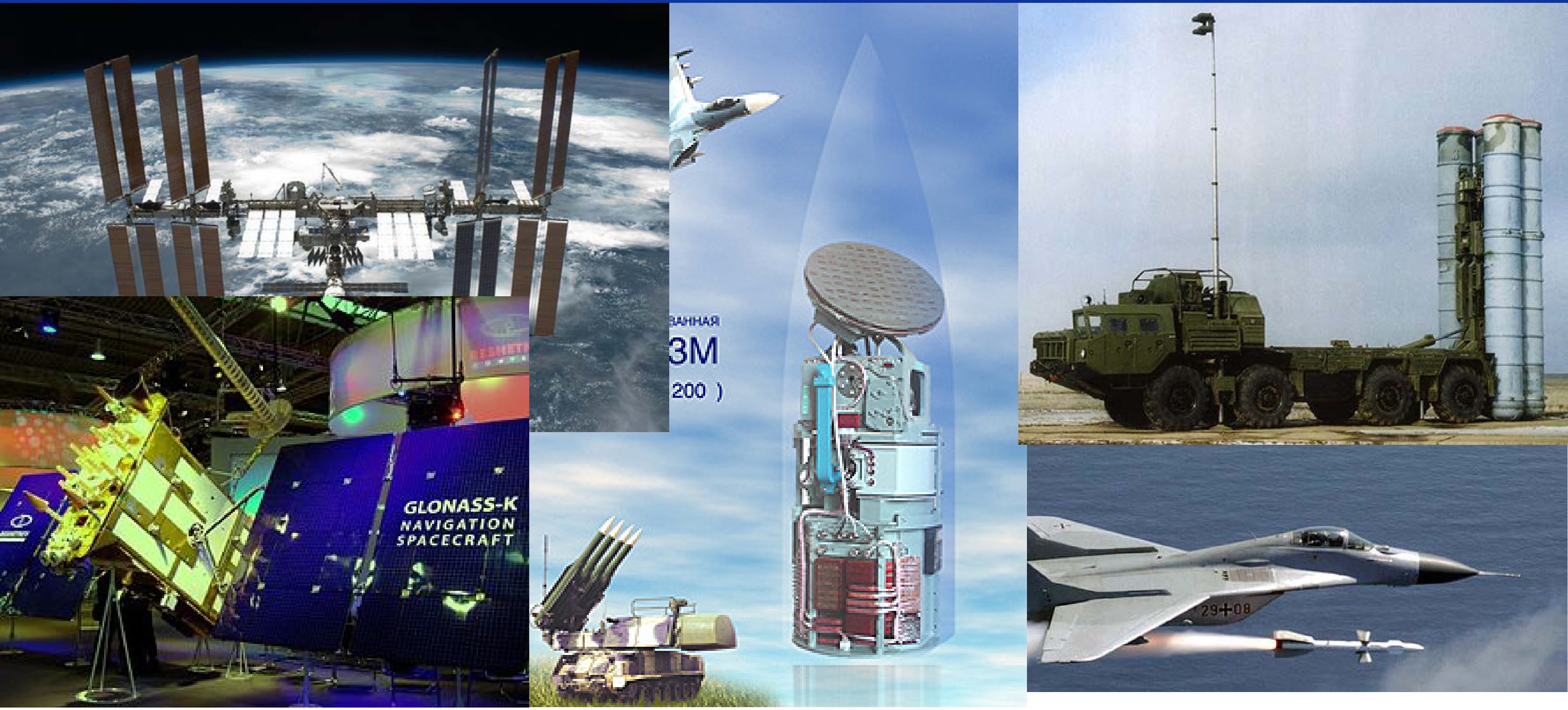


ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОСИСТЕМ И КОМПЛЕКСОВ РАДИОУПРАВЛЕНИЯ

13. Метод пространства состояний

13.1. Основные понятия

Особенности РТСУ

•РТСУ являются многомерными системами (много взаимных связей, обрабатывается много параметров);
•РТСУ не стационарны (изменяется с/ш, расстояние и т.д.);
•РТСУ функционируют под воздействием большого количества мешающих факторов;
•РТСУ имеют в своем составе нелинейные элементы.

Следовательно, для синтеза и анализа необходим мощный математический аппарат.

1. Классические методы описания и анализа РТСУ:

• комплексные коэффициенты передачи
• операторные коэффициенты передачи, передаточные функции
•.преобразование Фурье;
• преобразование Лапласа;
• Z-преобразование

2. Метод пространства состояний:

РТСУ описываются во временной области многомерными дифференциальными уравнениями или дискретными суммарно-разностными уравнениями. Фазовые переменные, определяющие поведение системы, объединяются в ***вектор состояния*** $\vec{x}(t)=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$

Пространство, в котором определен этот вектор - ***пространство состояний*** (***фазовое пространство***). Совокупность $[\vec{x}(t), t]$ - событие или фаза.

Описание в пространстве состояний непрерывных систем

Предполагается, что эволюция состояний нелинейной динамической стохастической системы описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши следующего вида, которые называются ***уравнением стояния, уравнением динамики системы или уравнением объекта***.

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)+\sum_{i=1}^{m} g_{ij}(\vec{x}(t), t)\cdot w_j(t)$$

где $\vec{x}(t)=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ - вектор состояния, $\vec{u}(t)=[u_1, u_2, \ldots, u_l]^{\mathrm{T}}$- вектор управления

$\vec{w}(t)=[w_1, w_2, \ldots, w_m]^{\mathrm{T}}$- вектор случайных возмущений $\overline{\vec{w}(t)}=0$, $\overline{\vec{w}(t)\cdot\vec{w}^{\mathrm{T}}(t-\tau)}=Q(t)\cdot\delta(\tau)$

Для решения уравнения необходимо задать начальные условия. Уравнение состояния описывает случайный ***марковский процесс.***

Уравнение состояния объекта в векторно-матричной форме

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t\right) + G\left(\vec{x}(t), t\right) \cdot \vec{w}(t)$$

Уравнение выхода

$$\vec{y}(t) = h\left(\vec{x}(t), t\right)$$

<u>Линейные системы</u>

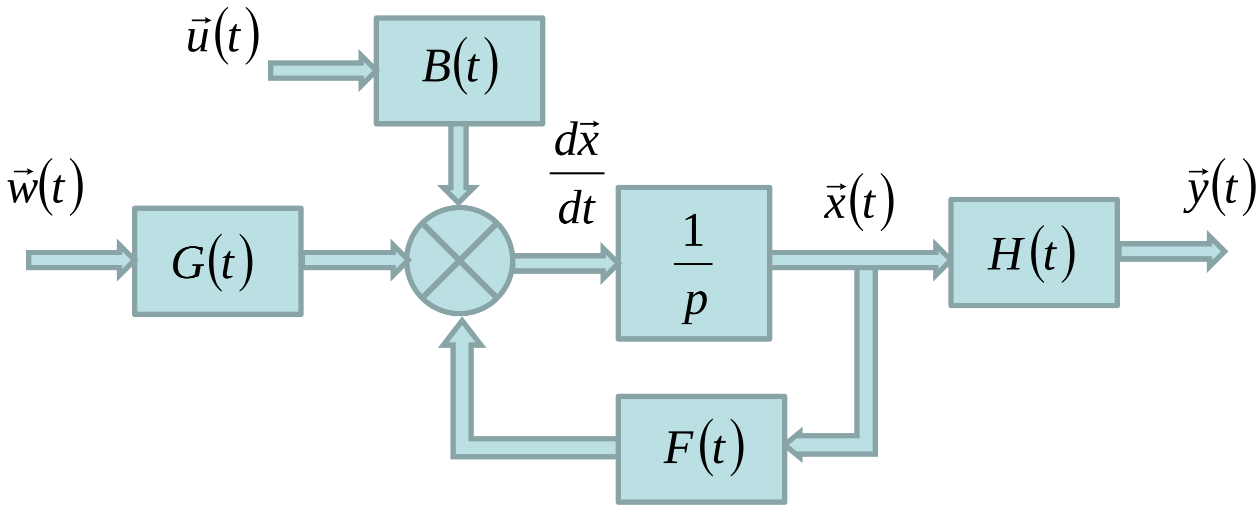
Уравнение состояния для линейной системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(t) \cdot \vec{x}(t) + B(t) \cdot \vec{u}(t) + G(t) \cdot \vec{w}(t)$$

Уравнение выхода

$$\vec{y}(t) = H(t) \cdot \vec{x}(t)$$

Структурная схема линейной системы



Замечания:

1. Один и тот же процесс может быть получен на выходах фильтров различной структуры при различных входных воздействиях, т.е. модель динамики процесса может быть получена в различных формах с различным набором компонент вектора состояния.
2. Универсальных правил построения математической модели системы не существует, во многом выбор удачной модели зависит от интуиции и опыта разработчика системы.

Наиболее общие требования к выбору модели объекта:

1. Выбранная модель должна быть наблюдаема.
2. Выбранная модель должна быть управляема.

Управляемая система – это система, для которой существует воздействие $\vec{u}(t)$, которое за конечное время переведет систему из исходного состояния в заданное состояние.

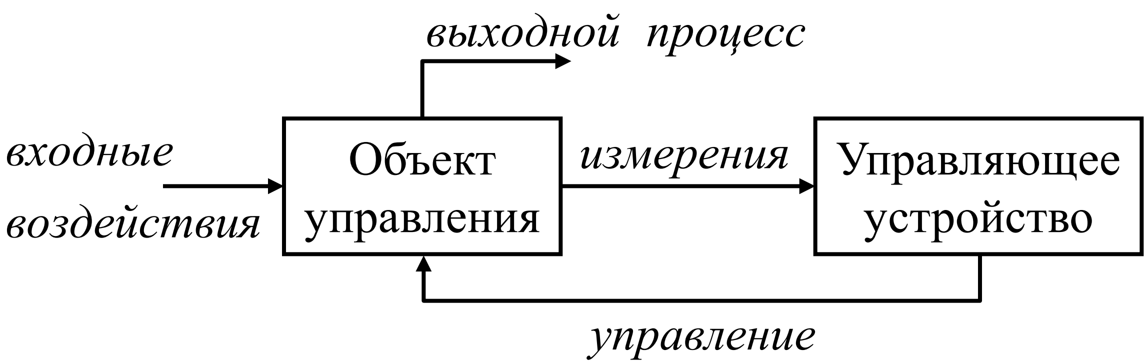
Наблюдаемая система – это система, для которой можно получить значения вектора состояния путем исследования выходного сигнала $\vec{y}(t)$.

Достоинства метода пространства состояний.

1. Описание процессов во временной области удобно для использования полученных алгоритмов в вычислительных машинах.
2. Используемый векторно-матричный аппарат позволяет унифицировать описания, анализ и синтез многомерных и одномерных систем и систем с несколькими источниками информации (несколькими измерителями).
3. Метод применим к нелинейным и нестационарным системам.

13.2. Постановка задачи синтеза оптимального управления

Обобщенная схема системы управления.



1. Уравнение состояния объекта, модель объекта, модель сообщения

Задан объект управления, состояние которого характеризуется n переменными, объединенными в вектор состояния $\vec{x}(t)$. Предполагается, что поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t\right) + G\left(\vec{x}(t), t\right) \cdot \vec{w}(t)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(t) \cdot \vec{x}(t) + B(t) \cdot \vec{u}(t) + G(t) \cdot \vec{w}(t)$$

где $\vec{x}(t) = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ - вектор состояния, $\vec{u}(t) = [u_1, u_2, \ldots, u_l]^{\mathrm{T}}$- вектор управления

$\vec{w}(t) = [w_1, w_2, \ldots, w_m]^{\mathrm{T}}$- вектор случайных возмущений $\overline{\vec{w}(t)} = 0$, $\overline{\vec{w}(t) \cdot \vec{w}^{\mathrm{T}}(t-\tau)} = Q(t) \cdot \delta(\tau)$

2. Уравнение измерений (уравнение наблюдения)

Выходные сигналы ОУ вместе с шумами образуют вектор измерений, доступный для последующей обработки

$$\vec{z}(t) = h(\vec{x}(t), t) + \vec{\xi}(t) \qquad \vec{y}(t) = H(t)\cdot\vec{x}(t) + \vec{\xi}(t)$$

$\vec{z}(t) = [z_1, z_2, \ldots, z_r]^{\mathrm{T}}$ - вектор наблюдений, $\vec{\xi}(t) = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r]^{\mathrm{T}}$ - шум наблюдений

$$\overline{\vec{\xi}(t)} = 0 \qquad \overline{\vec{\xi}(t)\cdot\vec{\xi}^{\,\mathrm{T}}}(t-\tau) = R(t)\cdot\delta(\tau)$$

3. Ограничения на формируемые сигналы управления

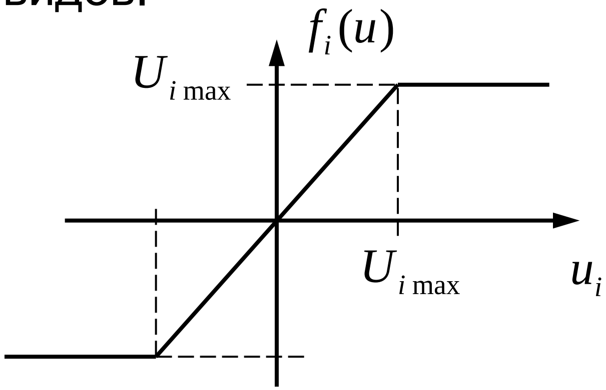
Физически реализуемое управление формируется на основе доступной информации

$$\vec{u}(t) = C(\vec{z}(t), t)$$

Физические свойства ОУ и исполнительных устройств накладывают ограничение на вектор управления.

Наиболее часто рассматривают ограничения трех видов.

1. Ограничение величины команд



$$\vec{u}(t) \in U$$

2. Ограничение средней мощности управления

$$M\left\{\vec{u}^T(t)\cdot\mathbf{K}_u^{-1}\cdot\vec{u}(t)\right\} \le \rho_u(t)$$

3. Ограничение энергозатрат на управление

$$\int_{t_0}^{t_к} M\left\{\vec{u}^T(t)\cdot\mathbf{K}_u^{-1}\cdot\vec{u}(t)\right\} d\tau \le a_u$$

t_0, $t_к$ - время начала и окончания управления

$\mathbf{K}_u$ - квадратная положительно определенная матрица

4. Критерии качества.

Критерий качества – это функционал который учитывает несколько показателей качества соответствующих поставленным целям управления.

Оптимальное управление должно обеспечить экстремум этого функционала.

При синтезе оптимальных РЭСУ часто решают одну из двух задач, которым соответствует два типа критериев качества.

1. Задача ***оптимального терминального управления*** определяет систему, в которой экстремум критерия качества достигается в момент окончания времени управления. Соответствующий ***критерий качества*** называют ***терминальным***.

2. Задача ***оптимального локального управления*** определяет систему, в которой экстремум критерия качества достигается в каждый текущий момент времени. Соответствующий ***критерий качества*** называют ***локальным***.

Широкое распространение получили ***квадратичные функционалы критериев качества***, поскольку хорошо *соответствуют физической сущности решаемых задач* и часто *позволяют аналитически решить* задачу синтеза оптимального управления или определить общий путь ее решения.

Классический квадратичный функционал Летова-Калмана.

Терминальный функционал

$$J=\frac{1}{2}\left\{\vec{x}^{T}(t_{\kappa})\cdot\mathbf{\Gamma}(t_{\kappa})\cdot\vec{x}(t_{\kappa})+\int_{t_0}^{t_{\kappa}}\vec{x}^{T}(\tau)\cdot\mathbf{L}(\tau)\cdot\vec{x}(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t_{\kappa}}\vec{u}^{T}(\tau)\cdot\mathbf{K}_{u}^{-1}\cdot\vec{u}(\tau)\,d\tau\right\}$$

t_0, t_{κ} - время начала и окончания управления

$\mathbf{\Gamma}(t_{\kappa}), \mathbf{K}_{\mathbf{u}}$ - заданные квадратные положительно определенные матрицы

$\mathbf{L}(\tau)$ - заданная квадратная неотрицательно определенная матрица

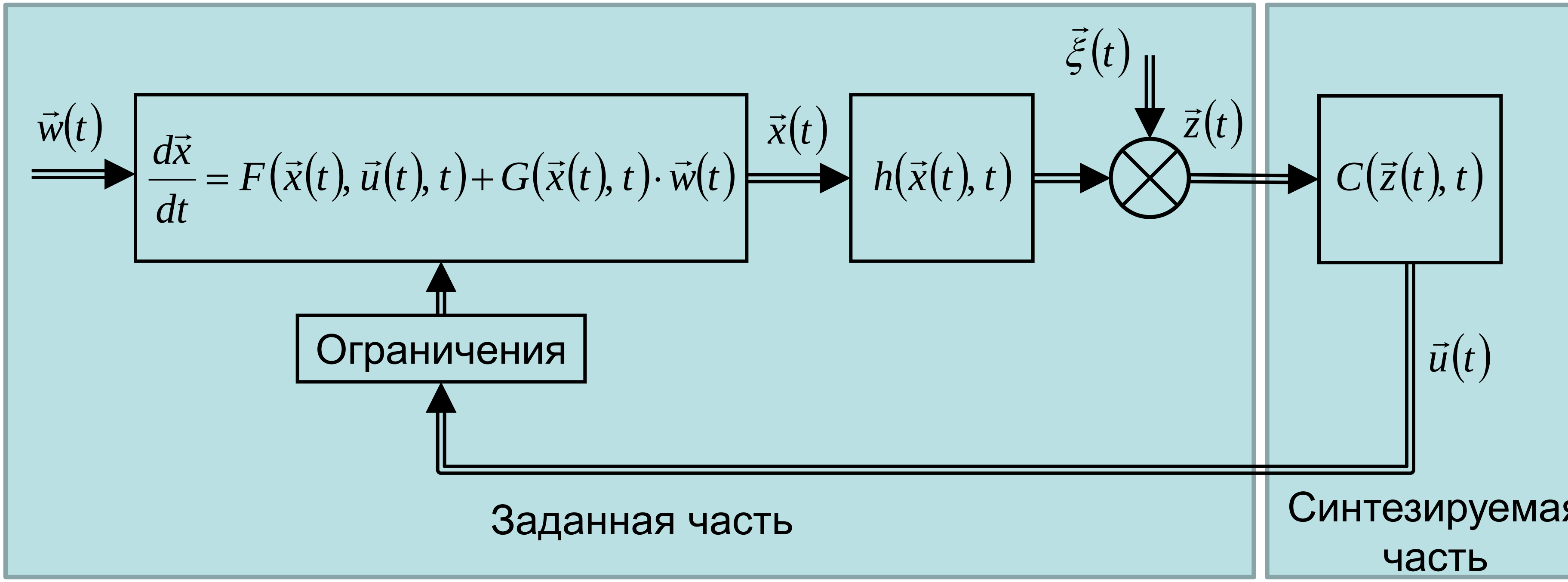
Локальный функционал

$$J=\frac{1}{2}\left\{\vec{x}^{T}(t)\cdot\mathbf{\Gamma}(t)\cdot\vec{x}(t)+\int_{t_0}^{t}\vec{x}^{T}(\tau)\cdot\mathbf{L}(\tau)\cdot\vec{x}(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}\vec{u}^{T}(\tau)\cdot\mathbf{K}_{u}^{-1}\cdot\vec{u}(\tau)\,d\tau\right\}$$

Поскольку $\vec{x}(t)$ случайный процесс, то в качестве критерия для случайных систем принимают условное математическое ожидание

$$J_{y}=M_{\vec{z}(t)}\left\{J\right\}$$

Задача синтеза оптимального управления



Для заданной модели объекта, модели измерений и заданных ограничениях на управляющие воздействия найти алгоритм, который на основе доступных измерений формирует вектор управления, обеспечивающий экстремум выбранного критерия качества.

13.3. Теорема разделения
Принцип статистической эквивалентности

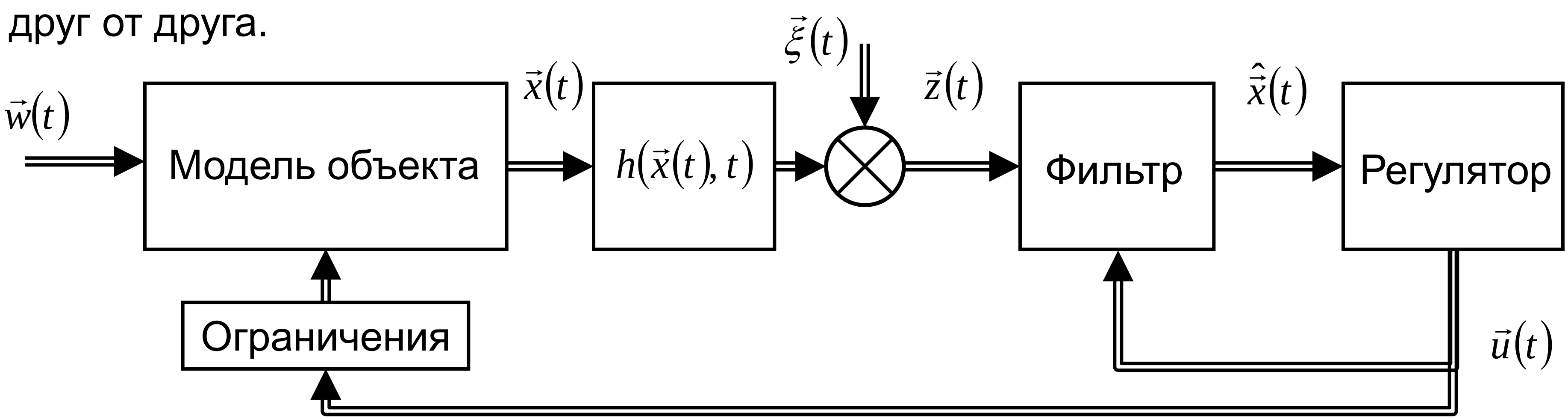
Инженерный синтез систем управления проводят на основе ***принципа статистической эквивалентности***, который также называют ***теоремой разделения***.

Строго теорема разделения доказана только для ***линейных систем***, возмущения и шумы измерений в которых – ***белые гауссовы случайные процессы***, а функционал критерия качества ***квадратичный***

Алгоритм оптимального стохастического управления разделяется на две части:

1. Оптимальный ***фильтр*** для получения оценок вектора состояния
2. Оптимальный детерминированный ***регулятор***

Задачи синтеза ***фильтра*** и ***регулятора*** могут ставиться и решаться отдельно друг от друга.



13.4. Постановка задачи синтеза оптимального детерминированного регулятора

1. *Детерминированная модель объекта*

Исключаются случайные внешние воздействия

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(t)\cdot\vec{x}(t) + B(t)\cdot\vec{u}(t)$$

2. *Модель измерения*

Исключаются из рассмотрения, предполагается, что значения вектора состояния известны точно

3. *Ограничения*

Нет необходимости выполнять усреднение

$$\vec{u}(t)\in U \qquad \vec{u}^{T}(t)\cdot\mathbf{K}_u^{-1}\cdot\vec{u}(t)\le\rho_u(t) \qquad \int_{t_0}^{t_к}\vec{u}^{T}(t)\cdot\mathbf{K}_u^{-1}\cdot\vec{u}(t)\,d\tau\le a_u$$

4. *Критерии качества*

Нет необходимости выполнять усреднение

$$J=\frac{1}{2}\left\{\vec{x}^{T}(t_к)\cdot\mathbf{\Gamma}(t_к)\cdot\vec{x}(t_к)+\int_{t_0}^{t_к}\vec{x}^{T}(\tau)\cdot\mathbf{L}(\tau)\cdot\vec{x}(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t_к}\vec{u}^{T}(\tau)\cdot\mathbf{K}_u^{-1}\cdot\vec{u}(\tau)\,d\tau\right\}$$

13.5. Основные методы решения задачи синтеза оптимального детерминированного регулятора

- ***Метод классического вариационного исчисления***

Применим при отсутствии ограничений на вектор управления. Метод связан с введением дополнительных множителей Лагранжа. В итоге задача сводится к двухточечной краевой задаче.

- ***Метод максимума Понтрягина.***

Метод связан с введением понятия ***игольчатой вариации***, что позволяет свести задачу синтеза при наличии ограничений к двухточечной краевой задаче. При отсутствии ограничений совпадает с методом классического вариационного исчисления

- ***Метод динамического программирования***

Базируется на **принципе оптимальности Беллмана** . Уравнение Беллмана представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных с начальными условиями, заданными для последнего момента времени для функции Беллмана, которая выражает минимальное значение критерия оптимизации, которое может быть достигнуто, при условии эволюции системы из текущего состояния в некоторое конечное. А это в свою очередь позволяет перейти от решения исходной многошаговой задачи оптимизации к последовательному решению нескольких одношаговых задач оптимизации.

Спасибо за внимание!