

# Using circular mean Radon transform for numerical solution of inverse gravity problem

Alexey Pechnikov

[pechnikov@mobicgroup.ru](mailto:pechnikov@mobicgroup.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-9626-8615> (ORCID)

## Abstract

We consider numerical computation model for modified inverse gravity problem approximated solution by circular mean Radon transform. Gravity fields and reconstruction results for some gravity sources configurations are obtained.

## Введение

Как было показано в работах [1] и [2], с помощью кольцевого преобразования Радона (КПР) можно получить аналитическое и численное решения модифицированной обратной задачи гравики для некоторых конфигураций источников. Под модифицированной обратной задачей понимается нахождение градиентов исходного гравитационного потенциала. Ниже будет рассмотрено обобщенное численное решение для восстановления сложных конфигураций источников.

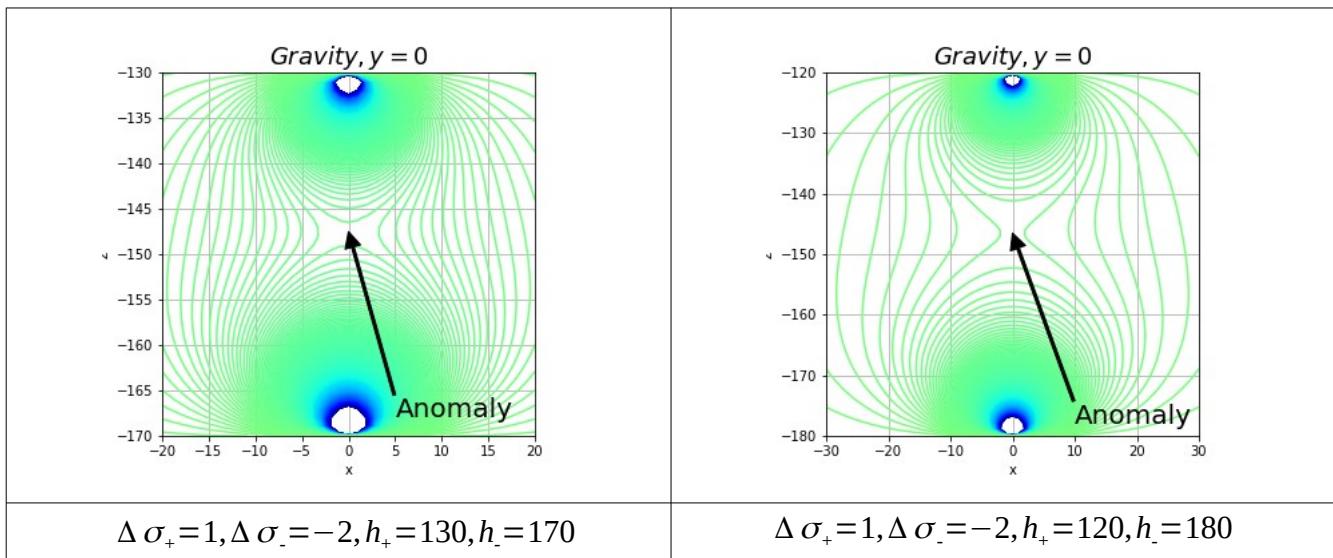
Описываемый метод позволяет восстановить положение точек перегиба гравитационного потенциала (называемых далее аномалиями) между источниками (аномальными плотностями, определяемыми как отклонение от средней плотности) для различных конфигураций гравитационных источников. При рассмотрении непрерывной среды переменной плотности она может быть представлена в виде трехмерных ячеек заданного размера. Сила гравитационного взаимодействия убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, поэтому искажения, вносимые не смежными ячейками модели, достаточно малы. Следовательно, при разбиении непрерывной среды на ячейки мы наблюдаем аномалии на всех границах между ячейками разной плотности и, восстанавливая их положение предложенным методом, находим распределение градиентов плотности среды. В зависимости от амплитуды плотностных аномалий выбирается размер ячейки для численной модели так, что погрешность нахождения границ ячеек (положения гравитационных аномалий) не превышает выбранный размер ячейки. Ниже также будет показано, как расстояние между источниками (т.е. размер ячейки в случае модели непрерывной среды) и величина аномалий плотности влияют на точность полученного решения.

## Численная модель

Моделирование проведено на сетке с шагом 1 по всем трем пространственным координатам. В модели использовались безразмерные величины, так что представленные результаты верны, в частности, как для масштабов сантиметров или метров, так и для масштабов километров.

Распределение аномальной силы тяжести  $\Delta g(x, y)$  на поверхности  $z=0$  представляет собой вертикальную компоненту поля силы тяжести от заданных гравитационных потенциалов источников [1], [2]. Положительные аномальные плотности и их глубины обозначим  $\Delta\sigma_+$  и  $h_+$  соответственно, и отрицательные  $\Delta\sigma_-$  и  $h_-$  соответственно. Источниками гравитационного потенциала будем полагать точечные аномалии плотности с массой, равной произведению объема шара радиусом  $R=10$  и аномальной плотностью  $\Delta\sigma$ , т.е. равной  $\Delta M=(4/3)\pi\cdot R^3\cdot\Delta\sigma$ . Заметим, что при таком пространственном размере аномалий плотности шаг сетки можно увеличить в несколько раз без заметного ухудшения качества результатов.

В случае двух источников будем называть искомой аномалией гравитационного поля точку перегиба изолиний, расположенную на соединяющем источники отрезке. Другими словами, в этой точке гравитационные потенциалы источников равны по модулю. При этом для двух равных по модулю гравитационного потенциала источников эта точка располагается посередине между двумя источниками. Покажем, как графически определяются глубины для аномалий от заданных источников для случая двух не равных по модулю гравитационного потенциала источников.



Изображение 1, 2. Расположение исследуемой аномалии гравитационного поля для заданной пары аномалий плотности

Используемый пошаговый порядок работ следующий:

1. Определение пространственного масштаба, в котором проводится решение обратной задачи. На практике масштаб определяется или разрешением доступных

исходных данных или предполагаемыми размерами искомых объектов. Все компоненты поля с длиной волны менее требуемого пространственного масштаба являются помехой и должны быть отфильтрованы с помощью фильтра высоких частот (high pass filter).

Поскольку в численной модели исходное распределение поля силы тяжести смоделировано с разрешением 1, то именно это значение выбрано граничным и применен фильтр высоких частот для удаления более низкочастотных компонент поля.

Примечание: в геофизике принято разделять частотные компоненты гравитационного поля и оперировать с ними раздельно, в частности, операция удаления низкочастотных компонент известна как редукция Буге и выполняется разными способами.

2. Вычисление 3D куба как значений КПР [1], [2], известного также как фокальное среднее или focal mean. Эта операция подробно рассмотрена в указанных выше статьях и, кроме того, реализована во многих программных ГИС пакетах.

3. К полученному кубу значений КПР необходимо применить преобразование масштаба  $z=z/\sqrt{2}$  [1], [2].

4. Вычисление градиента по вертикальной координате для полученного куба значений КПР [2].

5. Полученный куб z-градиента КПР может быть проанализирован разными способами. Для визуализации удобно рассмотреть его градиенты по всем осям.

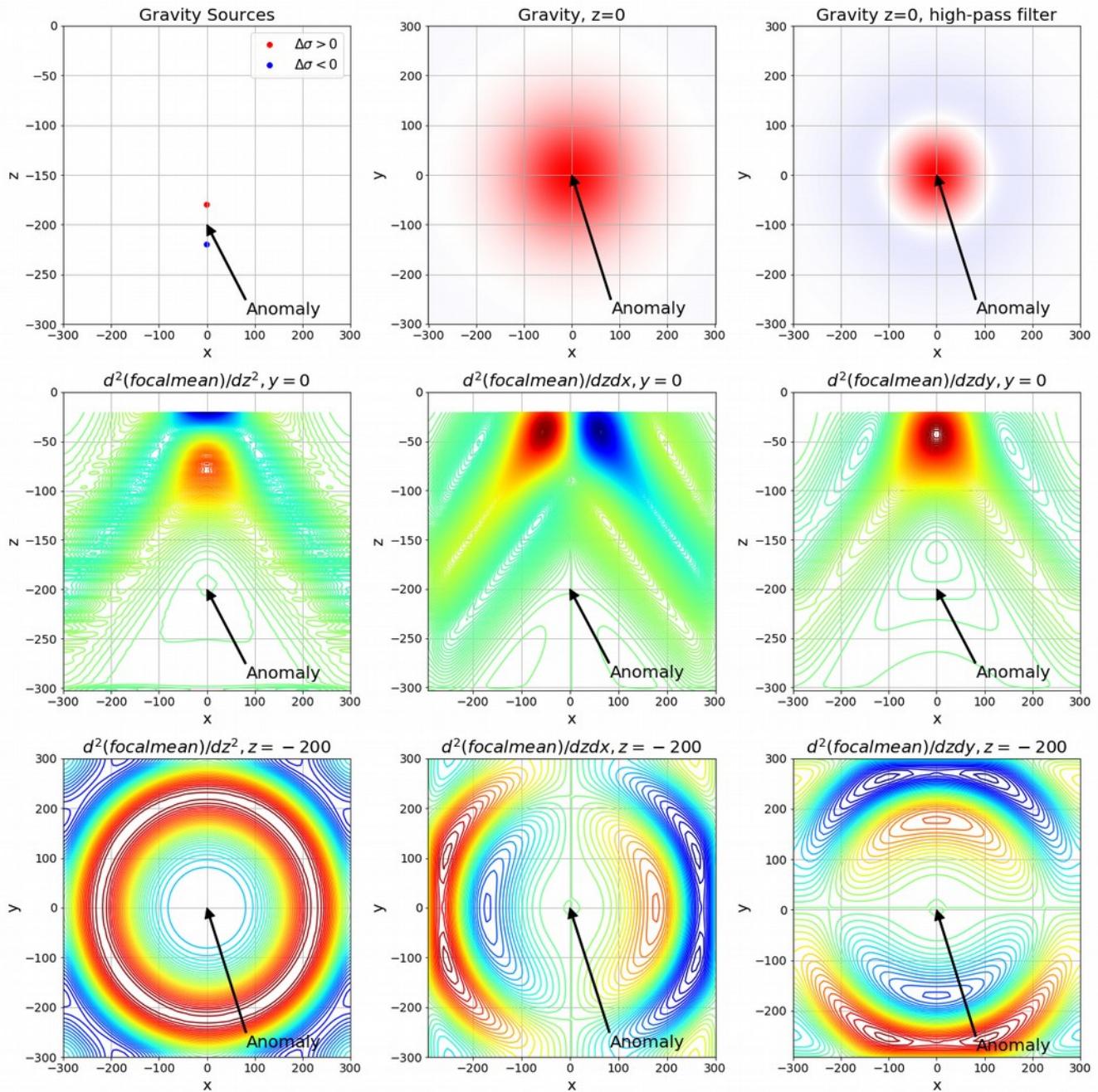
На изображениях для пар источников стрелками показано положение искомых гравитационных аномалий и приведено расположение аномальных масс. Для сложных конфигураций гравитационные аномалии на изображениях не приведены, указано только расположение аномальных масс.

На представленных вертикальных и горизонтальных сечениях искомые гравитационные аномалии соответствуют точкам перегиба изолиний градиентов КПР. Таким образом, рисунок изолиний градиентов КПР может быть использован для восстановления положения источников графическим методом. Для численного анализа также иллюстрируется расположение аномалий в точках прохождения через ноль значений частных производных КПР. Очевидно, что анализ рисунка изолиний и численных значений может выполняться совместно для получения более точного результата.

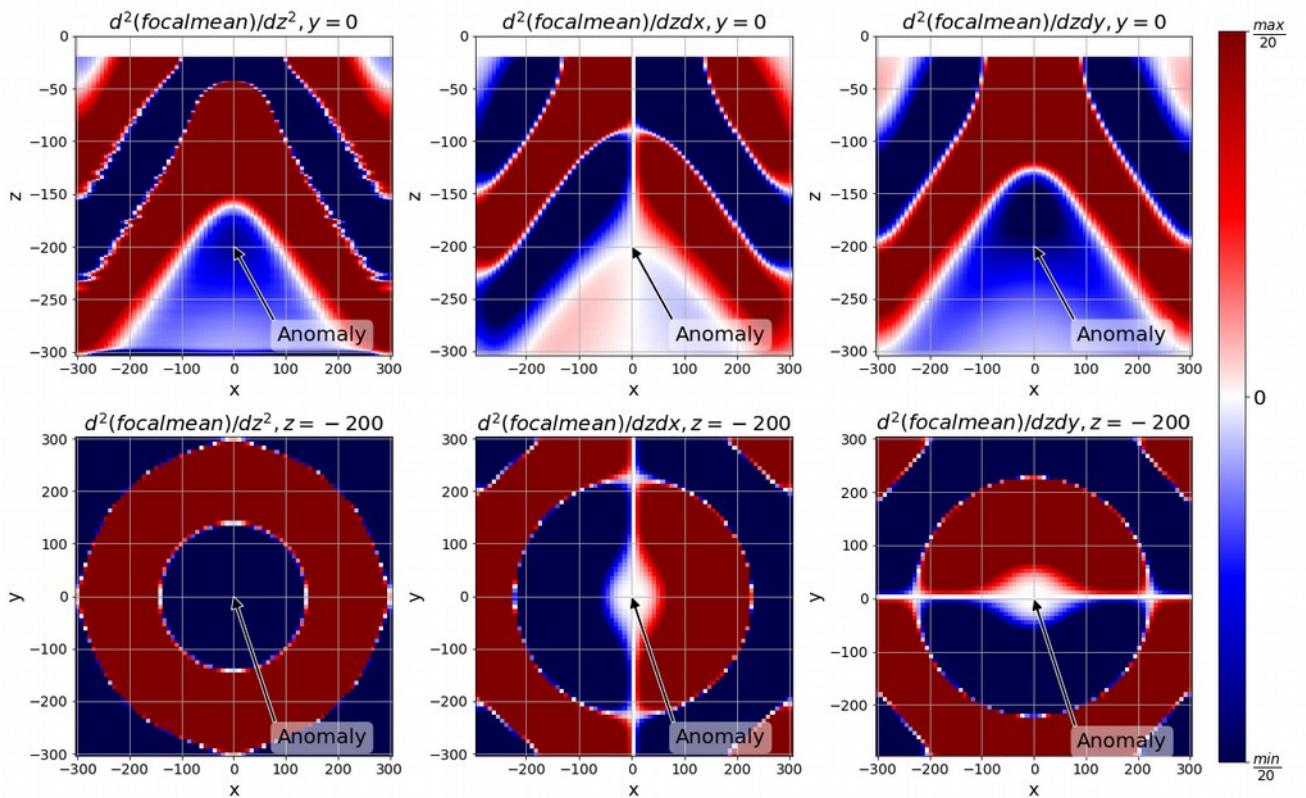
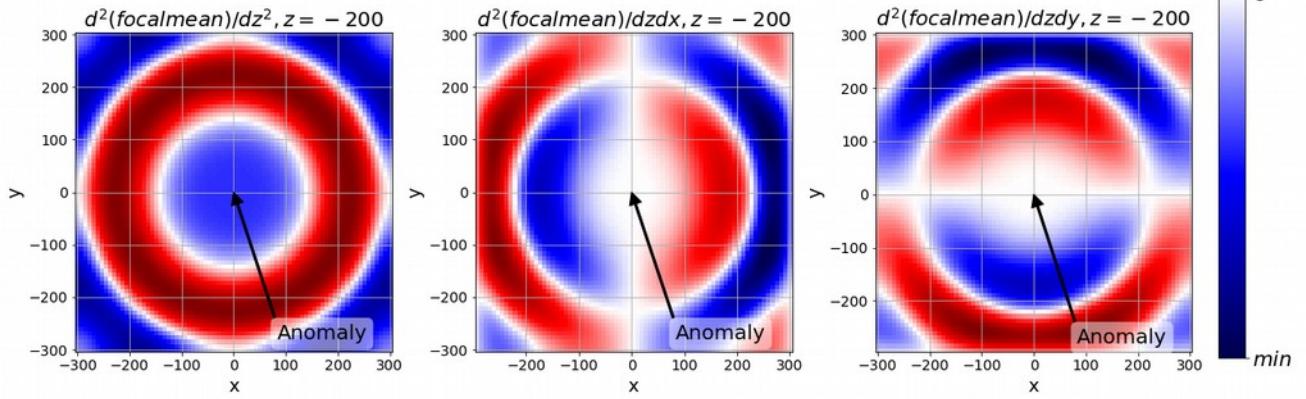
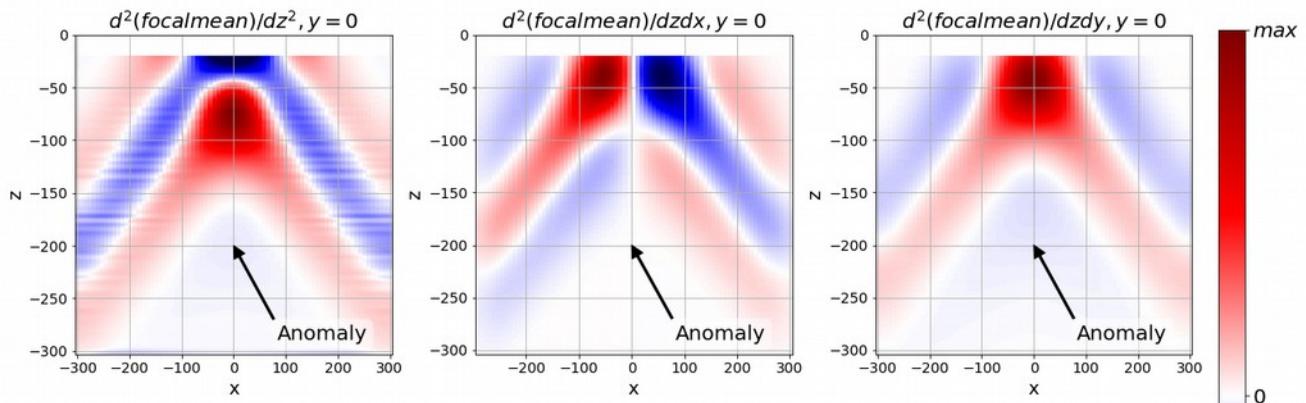
## Пара вертикально расположенных источников

$$\Delta\sigma_+=1, \Delta\sigma_-=-1, h_+=180, h_-=220, x=0, y=0$$

Искомая аномалия гравитационного поля расположена в точке  $x=0, y=0, h=200$ .



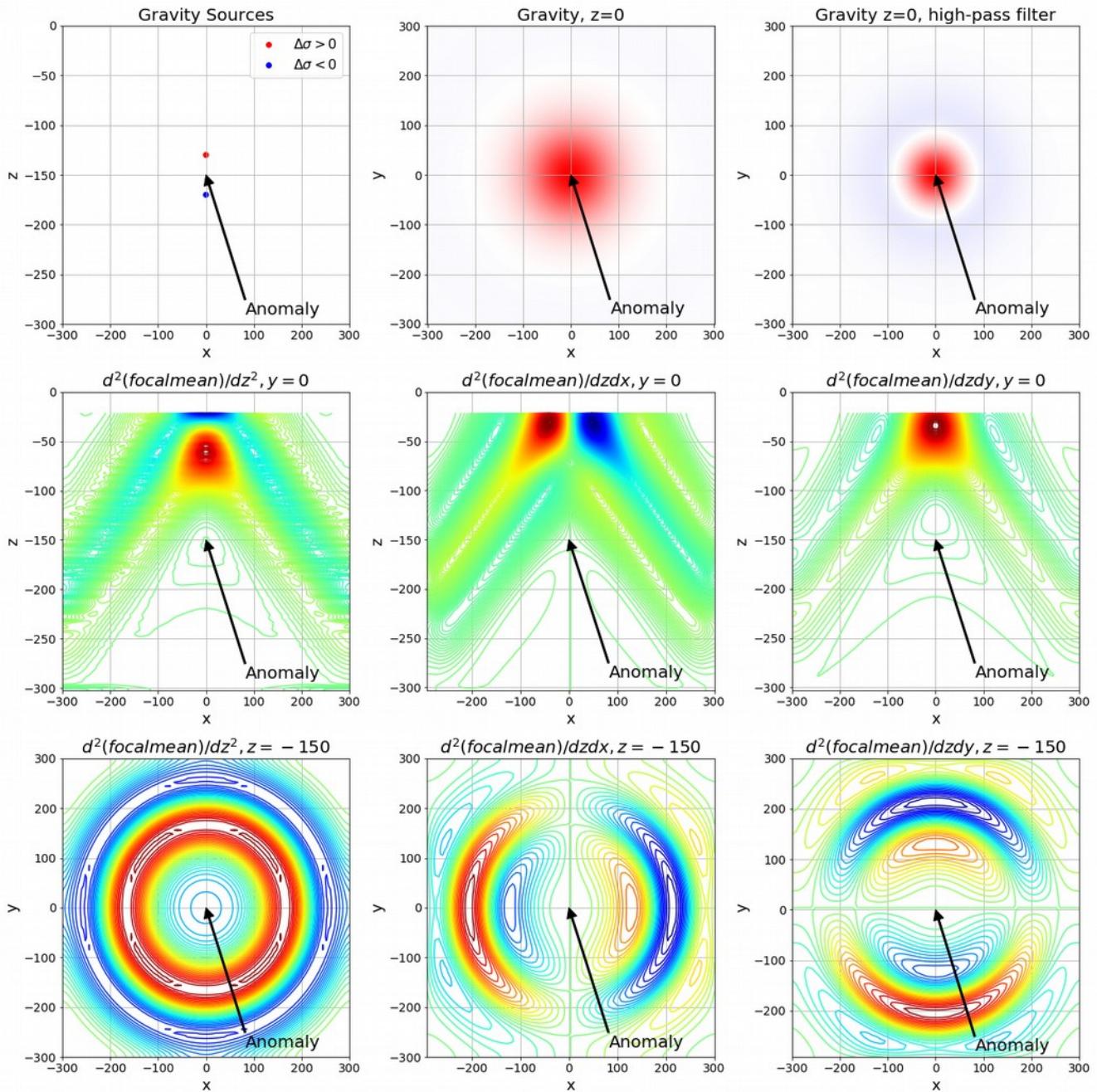
Найденное графическим методом расположение аномалии соответствует ожидаемому. В картине гравитационного поля на поверхности кольцевые структуры проявляются только после фильтрации.



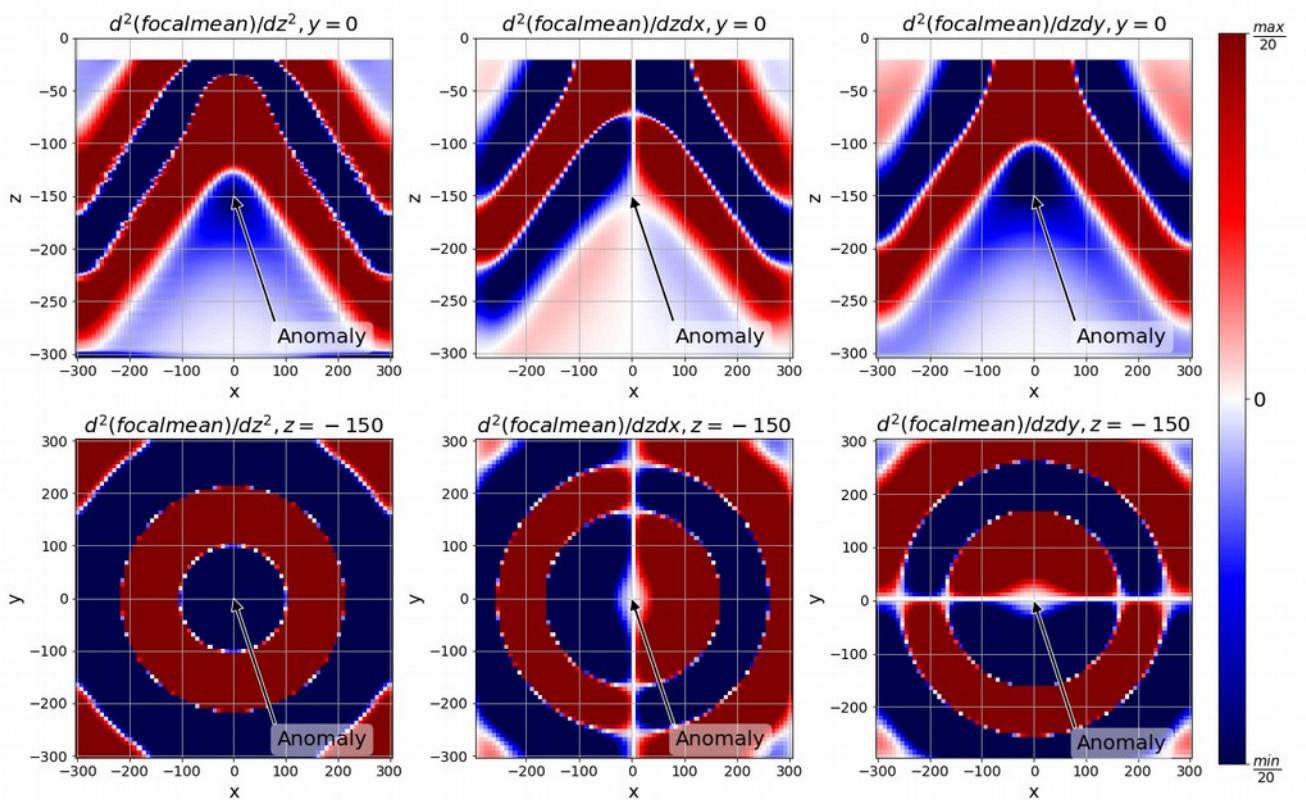
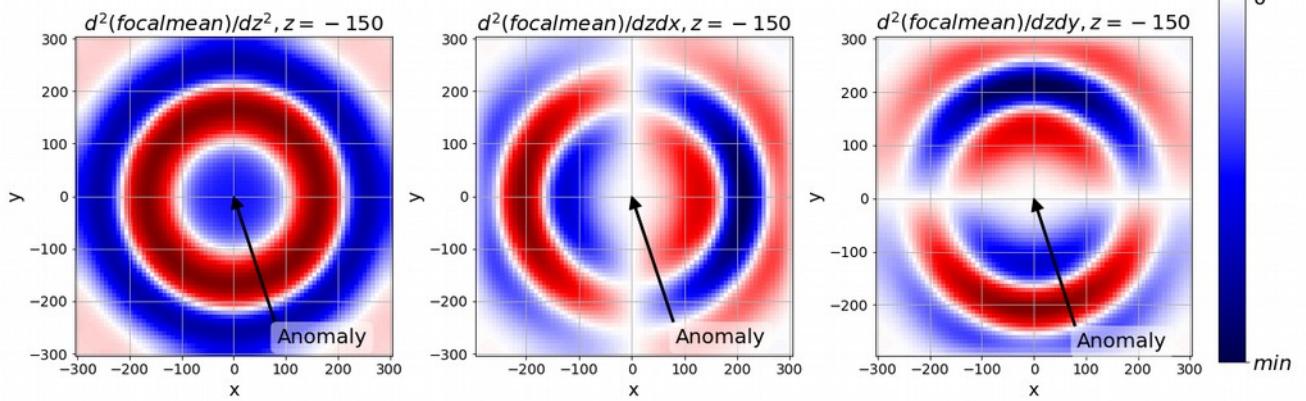
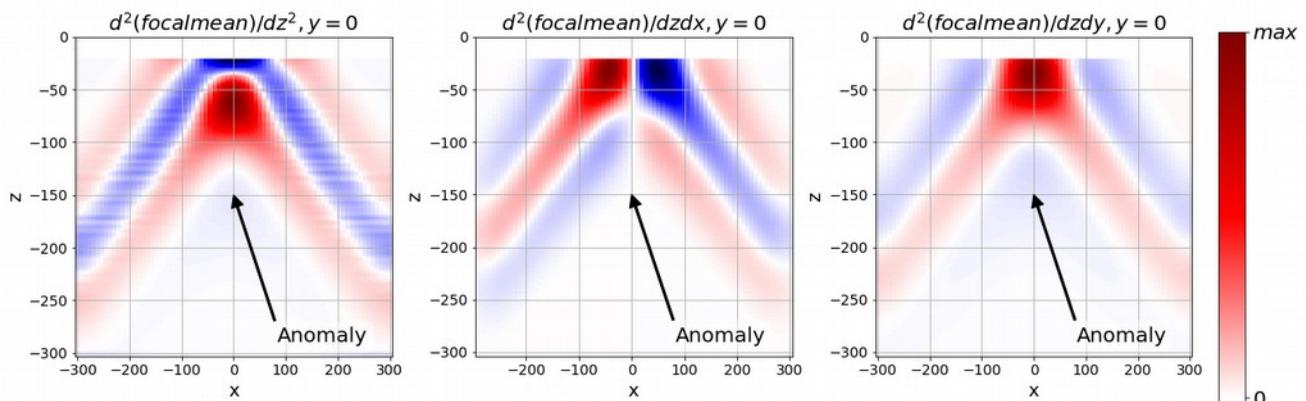
## Пара вертикально расположенных источников

$$\Delta \sigma_+ = 1, \Delta \sigma_- = -1, h_+ = 130, h_- = 170, x = 0, y = 0$$

Искомая аномалия гравитационного поля расположена в точке  $x=0, y=0, h=150$ .



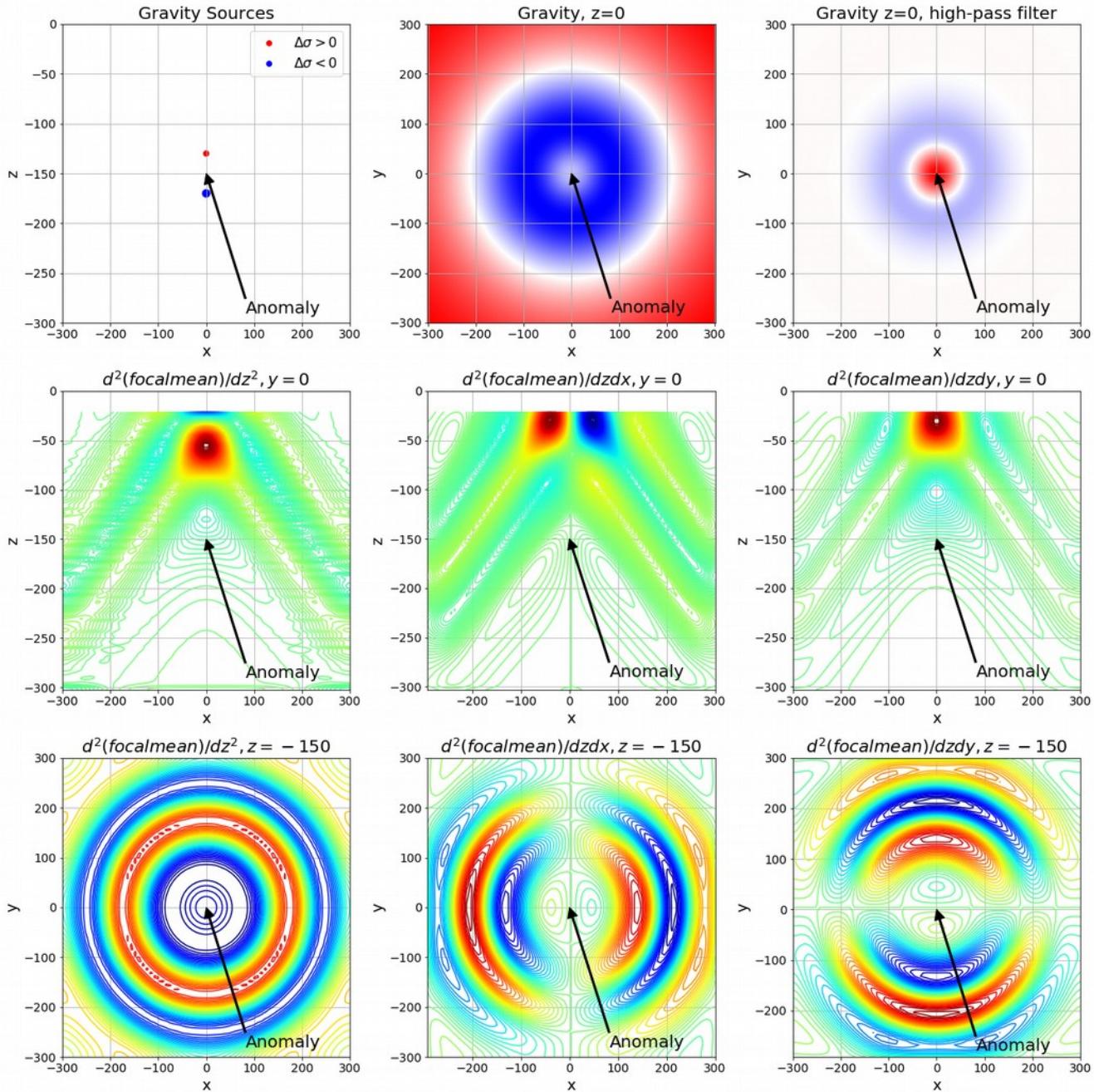
Найденное графическим методом расположение аномалии соответствует ожидаемому. В картине гравитационного поля на поверхности кольцевые структуры проявляются только после фильтрации.



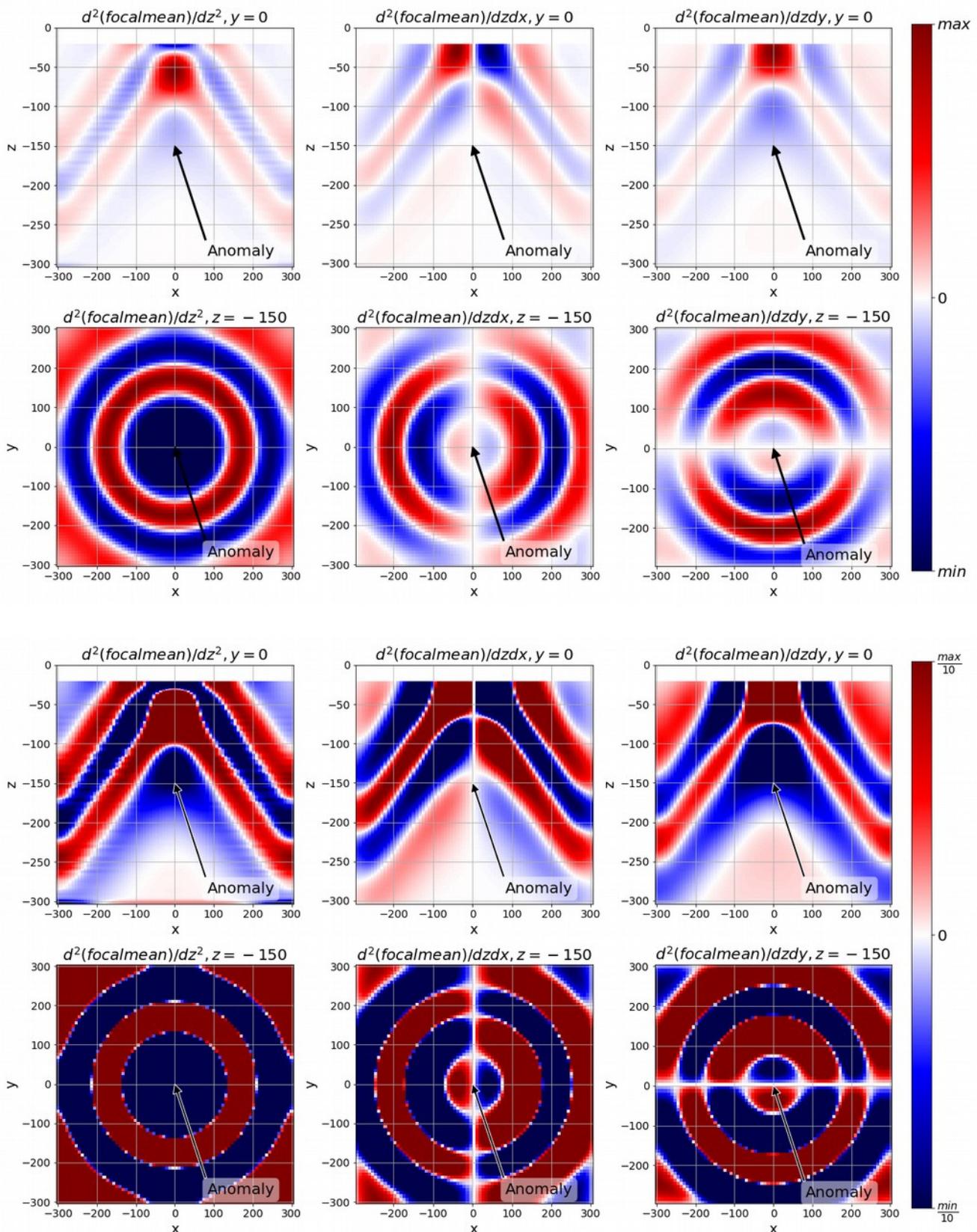
## Пара вертикально расположенных источников

$$\Delta \sigma_+ = 1, \Delta \sigma_- = -2, h_+ = 130, h_- = 170, x = 0, y = 0$$

Искомая аномалия гравитационного поля расположена в точке  $x=0, y=0, h \sim 147.5$ .



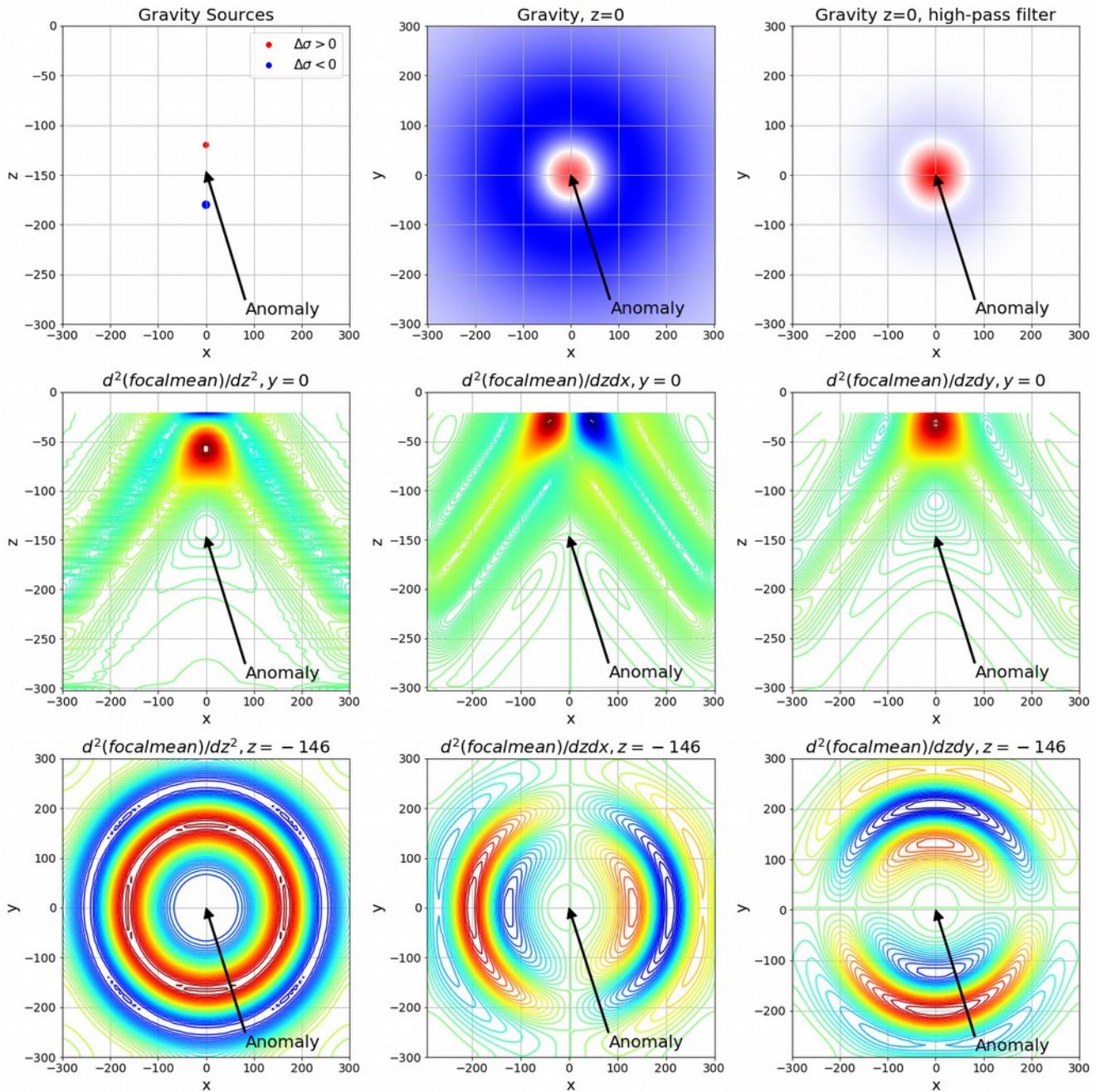
Находимая графически аномалия здесь несколько смещена от истинной (обозначенной стрелкой). Картинка гравитационного поля на поверхности без фильтрации представляет собой выраженные кольца, как и было показано для случая вертикального расположения асимметричных масс в работе [2].



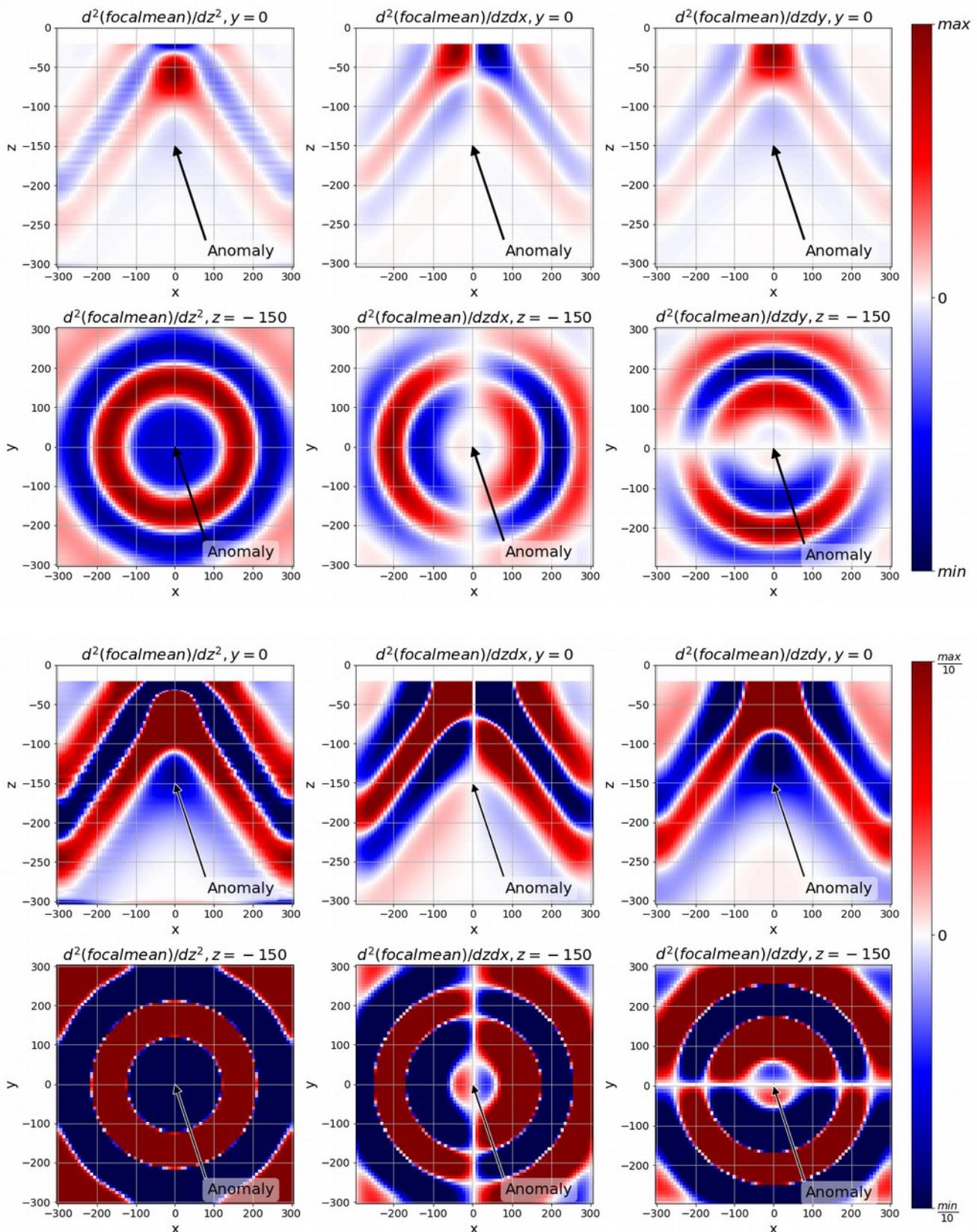
## Пара вертикально расположенных источников

$$\Delta \sigma_+ = 1, \Delta \sigma_- = -2, h_+ = 120, h_- = 180, x = 0, y = 0$$

Искомая аномалия гравитационного поля расположена в точке  $x=0, y=0, h \sim 146.5$ .



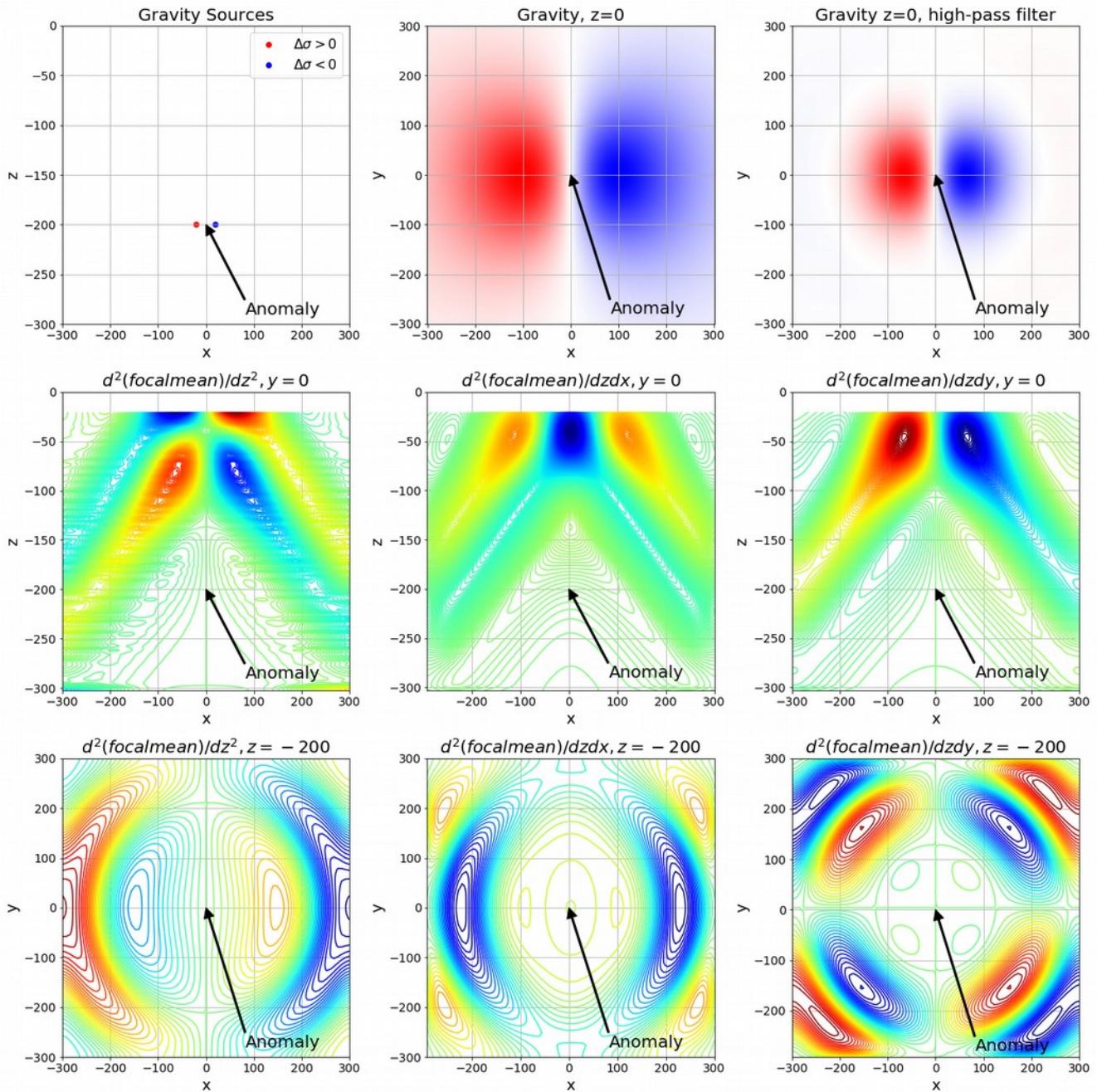
Картина гравитационного поля на поверхности без фильтрации представляет собой выраженные кольца, как и было показано для случая вертикального расположения асимметричных масс в работе [2].



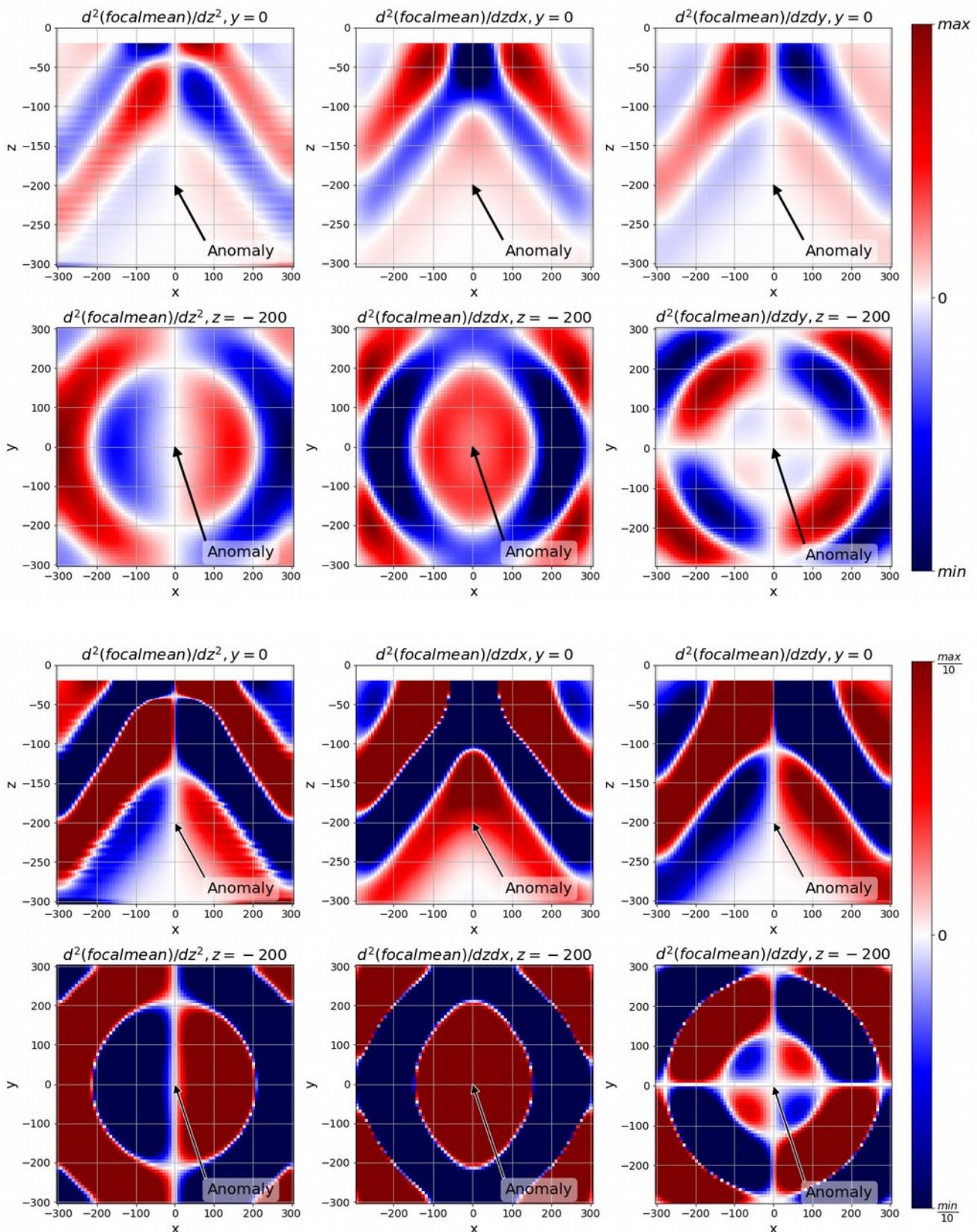
## Пара горизонтально расположенных источников

$$\Delta \sigma_+ = 1, \Delta \sigma_- = -1, h = 200, x_+ = -20, x_- = 20, y = 0$$

Искомая аномалия гравитационного поля расположена в точке  $x=0, y=0, h=200$ .



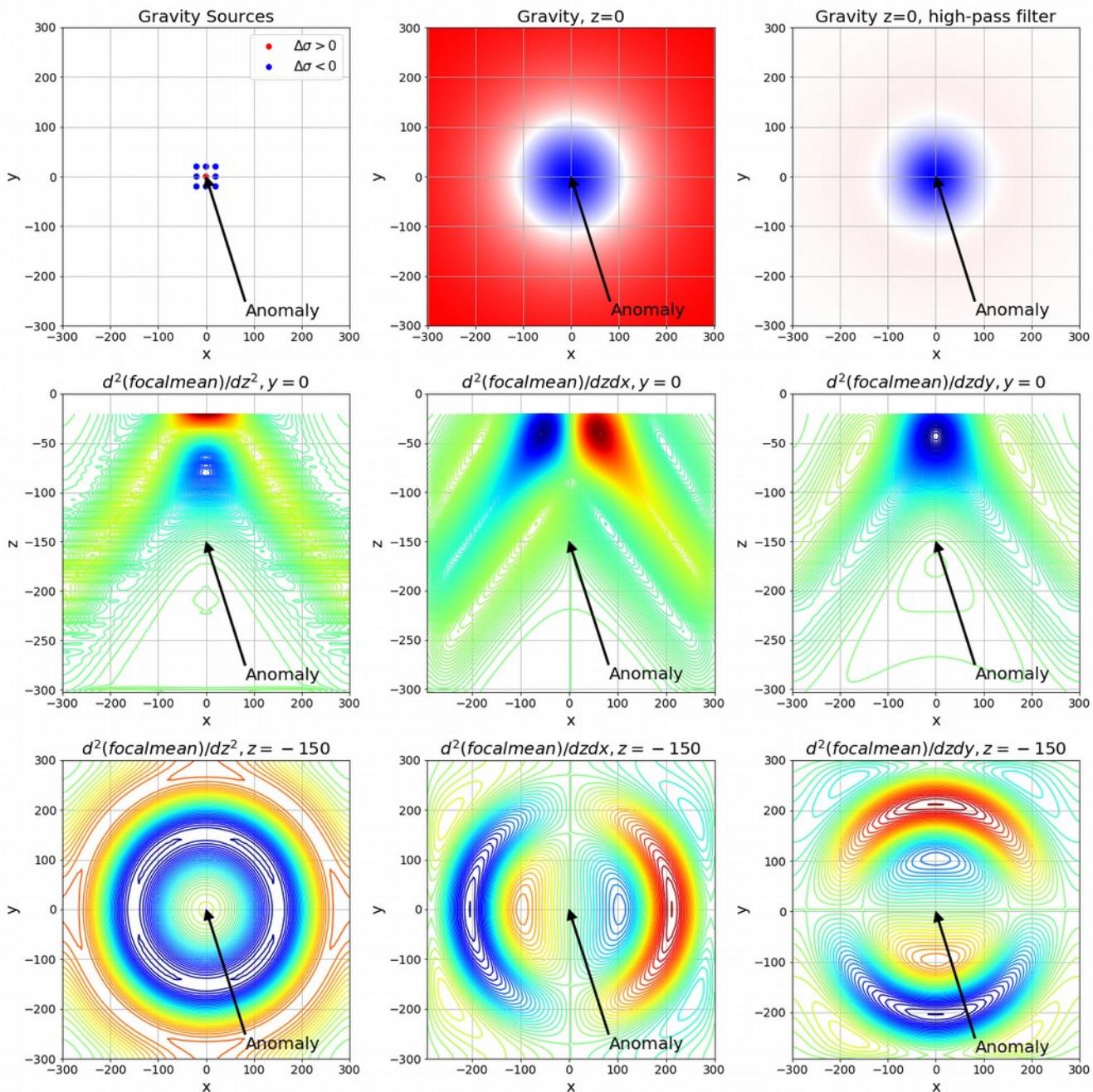
Модуль гравитационного поля на поверхности симметричен по оси X, а карта изолиний обладает симметрией по осям X и Y.



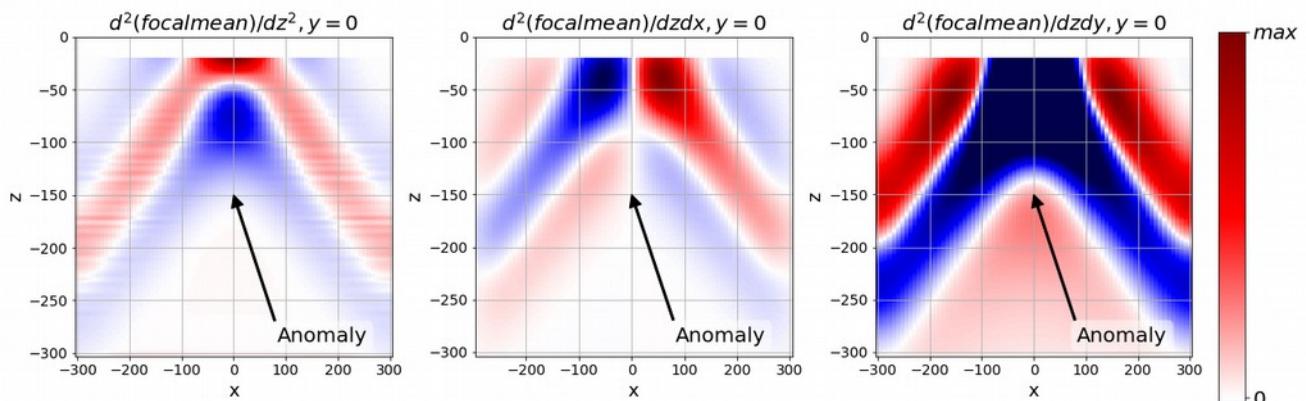
## Горизонтальная квадратная рамка 3x3 с точечным источником в центре

$$\Delta \sigma_+ = 1, \Delta \sigma_- = -1, h = 150, x_- = 0, y_- = 0$$

Искомая аномалия гравитационного поля представляет собой сложную фигуру, для упрощения будем полагать ее кольцом в плоскости XY радиуса 10 вокруг точки  $x=0, y=0$ ,  $h=150$ .



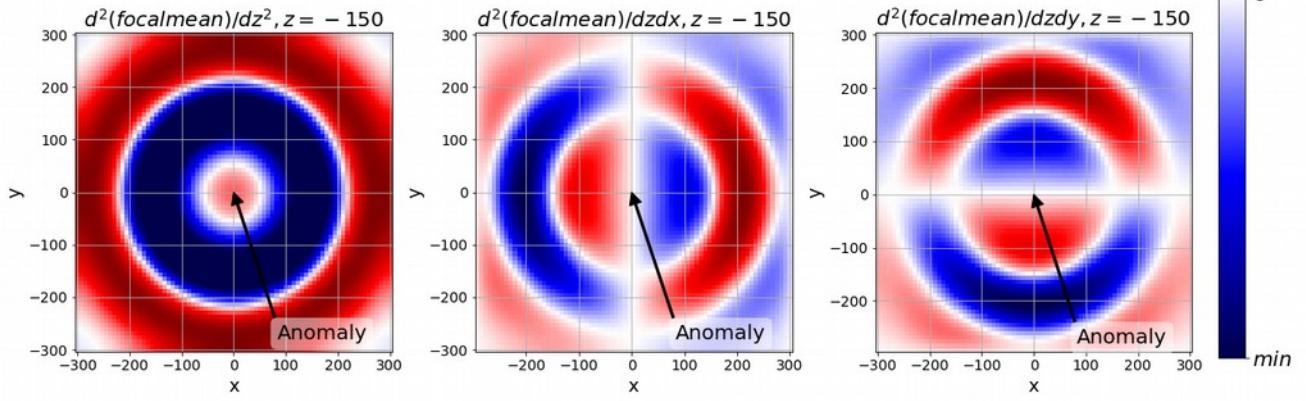
Полученная картина изолиний обладает симметрией по осям X и Y. Картина гравитационного поля на поверхности без фильтрации представляет собой выраженные кольца.



max

0

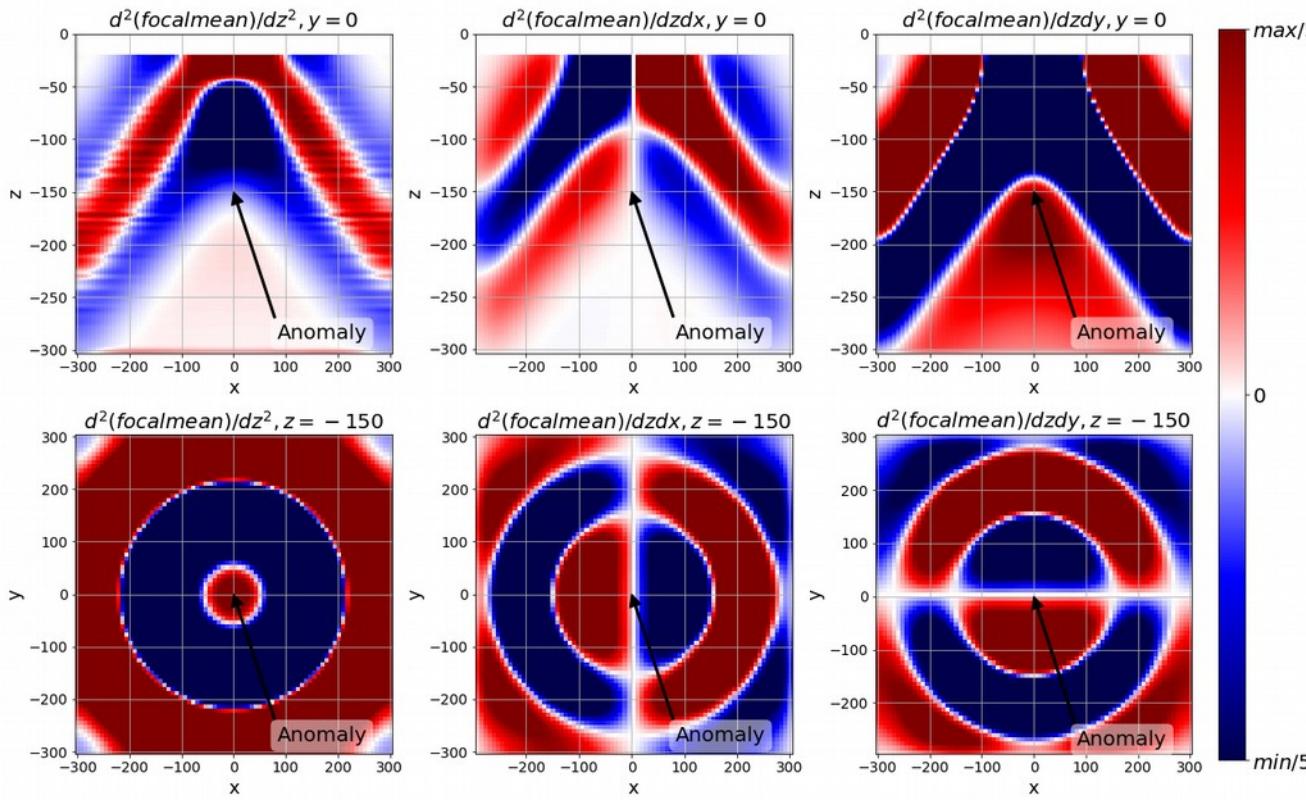
min



max

0

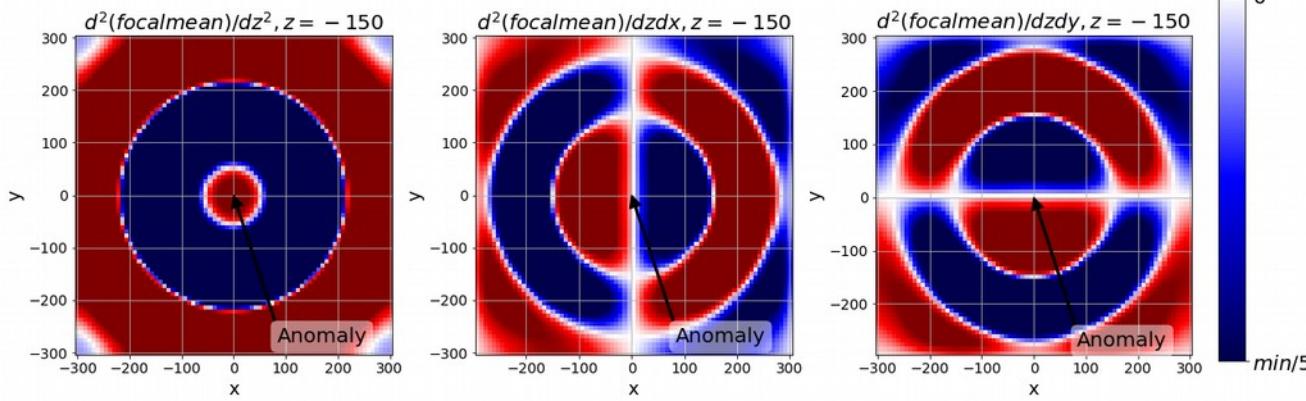
min



max/5

0

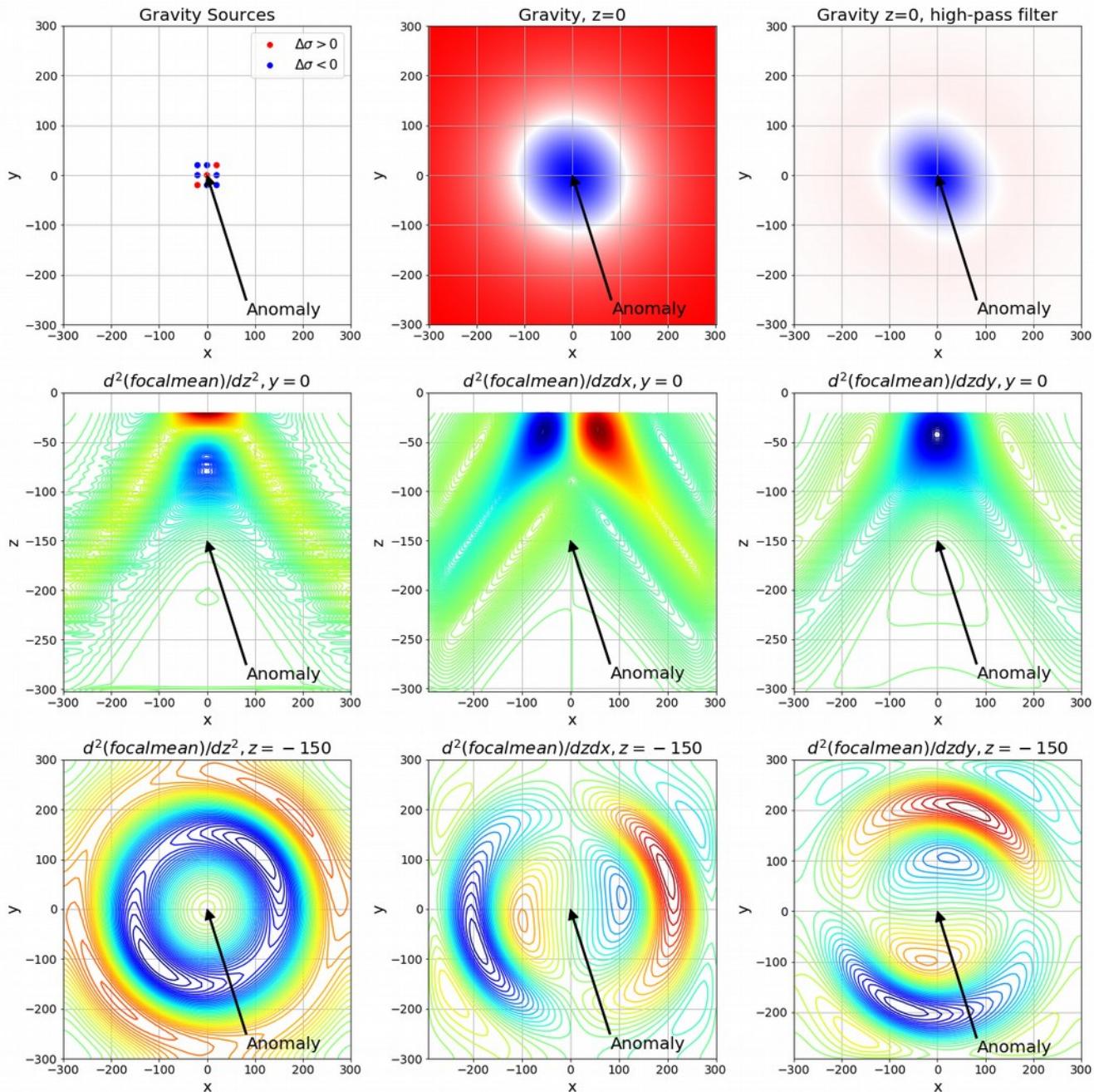
min/5



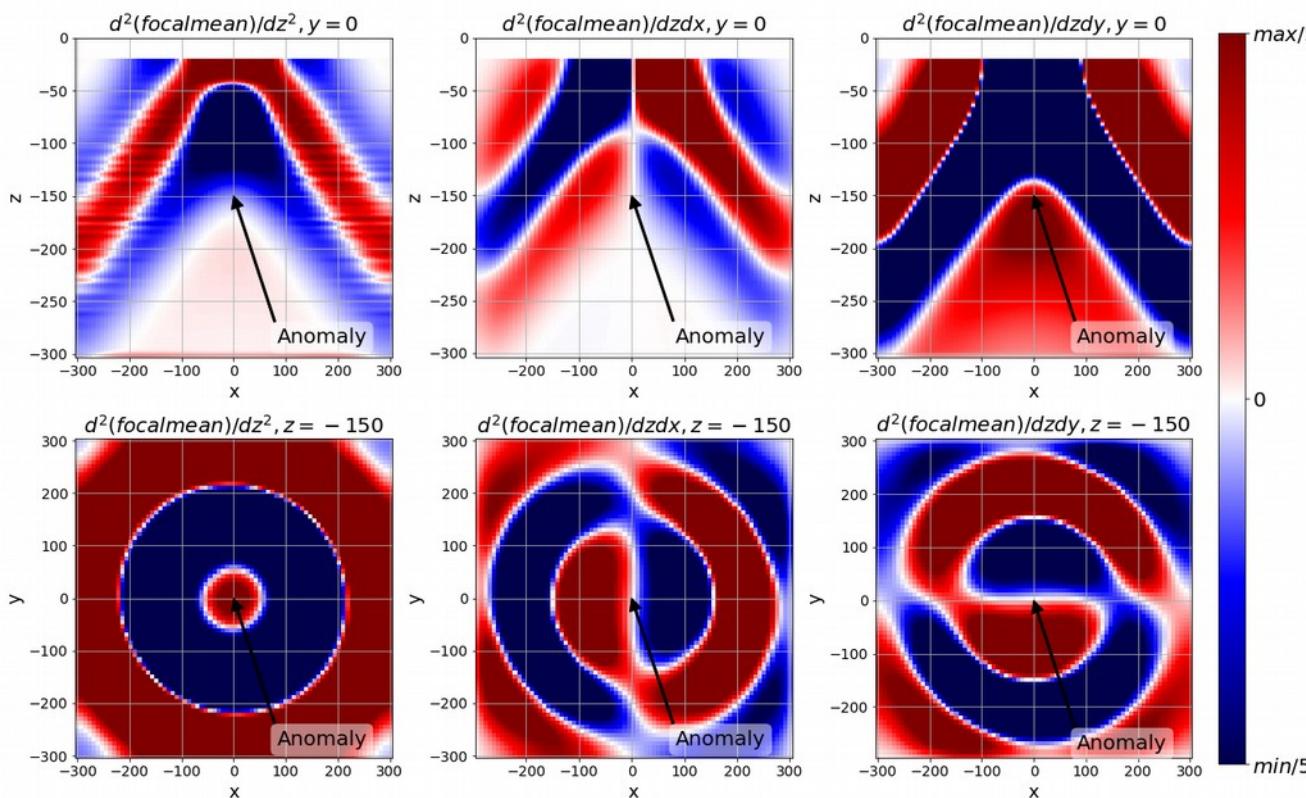
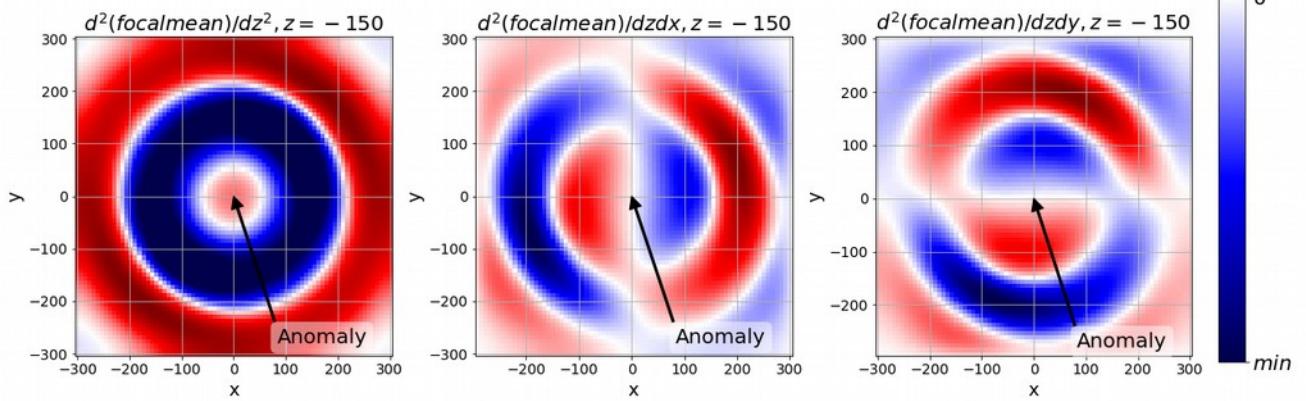
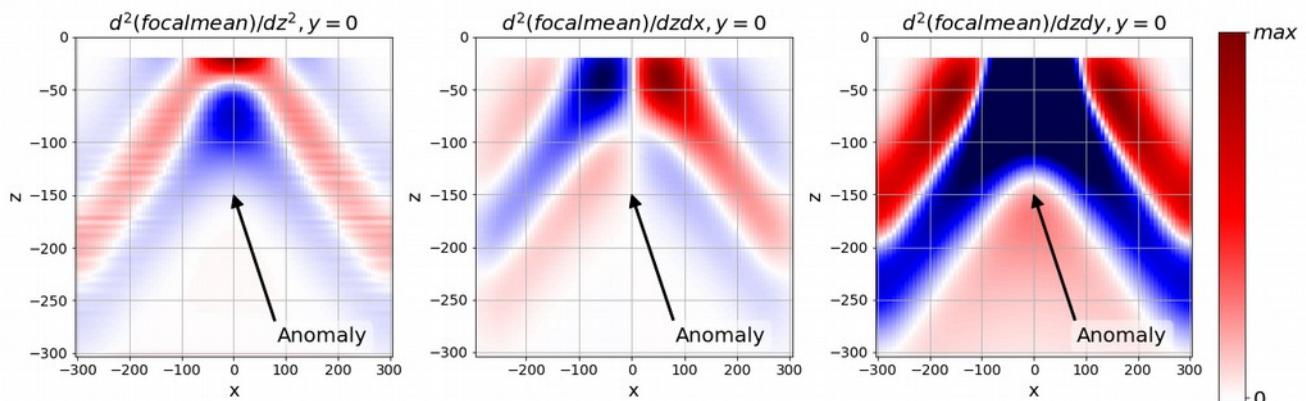
## Горизонтальный квадрат 3х3 пересекается по диагонали

$$\Delta \sigma_+ = 1, \Delta \sigma_- = -1, h = 150$$

Искомая аномалия гравитационного поля представляет собой сложную фигуру, см. рисунок ниже.



Отметим возникновение асимметрии как на поверхности в гравитационном поле при  $z=0$ , так и в сечении градиентов построенного 3D куба на целевой глубине. Картина гравитационного поля на поверхности без фильтрации представляет собой выраженные эллипсы.



## **Выводы**

Как показано выше, использование КПР позволяет получать решение модифицированной обратной задачи гравитации для измеренных значений аномальной силы тяжести на поверхности. Ложные аномалии в случае непрерывной среды будут перекрываться истинными аномалиями и могут искажать истинную картину распределения аномалий плотности. Эта проблема может быть решена путем выбора подходящего масштаба таким образом, чтобы ложные аномалии были или слабее по амплитуде или меньшего пространственного размера и вызванные их наложением искажения были минимальны. Также показано, что при увеличении расстояния между источниками и уменьшении различия аномальных плотностей точность метода увеличивается, при уменьшении расстояния между источниками и увеличении различия аномальных плотностей точность уменьшается.

Для различных конфигураций источников показаны соответствующие им рисунки на поверхности, которые являются уникальными и хорошо распознаваемыми. Таким образом, даже визуально оказывается возможно определить расположение и типы конфигураций источников, основываясь лишь на картине гравитационного поля на поверхности. Глубины залегания заданных конфигураций источников линейно пропорциональны радиусам соответствующих им колец, при этом коэффициент пропорциональности зависит от метода измерения радиуса, см. [2]. Для некоторых конфигураций источников этот коэффициент также зависит от асимметрии масс положительных и отрицательных источников в конфигурации.

## **Список литературы:**

[1] Alexey Pechnikov, Compensation of noise using circular mean Radon transform for the inverse gravity problem, 2018

[https://github.com/mobigroup/articles/blob/master/gravity/sphere\\_radon.pdf](https://github.com/mobigroup/articles/blob/master/gravity/sphere_radon.pdf)

[2] Alexey Pechnikov, Using circular mean Radon transform for circular geological structures recognition and 3D geological volume reconstruction, 2018

[https://github.com/mobigroup/articles/blob/master/gravity/circle\\_radon.pdf](https://github.com/mobigroup/articles/blob/master/gravity/circle_radon.pdf)