НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Квадратичная оптимизация в задаче прогнозирования SUT таблиц

Поздняков Виталий, Рог Алексей

Высшая школа экономики

Декабрь 2019

Что такое SUT таблицы

	Отрасль 1	Отрасль 2	…	Отрасль N
Продукция 1	…	…	…	…
Продукция 2	…	…	…	…
…	…	…	…	…
Продукция M	…	…	…	…

- SUT (Supply and Use tables) — таблицы "затраты-выпуск"
- Supply Table — таблица **ресурсов** показывает сколько продукции было **реализовано** каждой отраслью в стране за год
- Use table — таблица **использования** показывает сколько продукции было **потреблено** каждой отраслью в стране за год

Пример SUT таблиц

	Сбор и переработка отходов	Строительство	Оптовая торговля
Таблица поставок			
Неметаллические минералы	84	19	95
Основные металлы	388	0	80
Металлоконструкуции	0	950	122
Строительные работы	2	84 100	73
Таблица потребления			
Неметаллические минералы	6	4 128	0
Основные металлы	56	944	0
Металлоконструкуции	41	5 033	16
Строительные работы	41	22 250	216

Нидерланды, 2010 год, фрагмент

Задача прогнозирования SUT таблиц

- Полное исследование требует финансовых и временных затрат, поэтому обычно проводится раз в 5 лет
- Требуется спрогнозировать SUT по историческим и сводным данным
- Исторические данные — это SUT прошлых лет
- Сводные данные:
  - Итоговой объем продукции для каждой отрасли
  - Итоговой объем продукции для каждого вида продукции

Модель

- $A_{m \times n}$ — матрица за прошлый год
- $X^{true}_{m \times n}$ — искомая поставок за текущий год
- Сводные данные за текущий год:
  - Вектор $u = X^{true}\mathbf{1}$ содержит сумму для $1, 2, \ldots, m$ строки, где $\mathbf{1}$ — вектор единиц
  - Вектор $v = (X^{true})^T\mathbf{1}$ содержит сумму для $1, 2, \ldots, m$ колонки
- Требуется построить такую матрицу X, чтобы расстояние $f(X)$ до матрицы A было минимальным при ограничениях:

$$\begin{cases} X\mathbf{1} = u \\ X^T\mathbf{1} = v \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} = 0 \forall i, j : a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Пример

Пусть матрица A имеет вид:

84	19	95	198
388	0	80	468
0	950	122	1 072
2	84 100	73	84 175
474	85 069	370	

Требуется построить матрицу X с ограничениями на сумму по строкам и столбцам:

?	?	?	185
?	?	?	495
?	?	?	968
?	?	?	88 008
473	88 748	435	

Общая постановка задачи

$$f(X) \to \min(\max)$$

$$g_i(X) \begin{bmatrix} = \\ \geq \\ \leq \end{bmatrix} 0, i = 1, 2, \dots, m$$

- Метод замены переменных
- Метод штрафных функций
- Метод множителей Лагранжа
- Релаксационный метод

Метод замены переменных

В целевой функции выполняем замену

$$x_i = \phi(z)$$

таким образом, чтобы безусловный экстремум новой функции совпадал с условным экстремумом целевой функции.
Например

$$f(x) = x^2 \to \min$$

$$x \geq 1$$

Выполним замену

$$x = 1 + z^2$$

Получаем

$$(1 + z^2)^2 \to \min$$

Метод штрафных функций

В целевую функцию добавляем штрафную функцию, которая очень быстро растет (убывает) при нарушении ограничений. Например

$$f(x) = x^2 \to \min$$

$$x \geq 1$$

Добавим штрафную функцию

$$h(x) = (\min\{x - 1, 0\})^2$$

Тогда задача условной оптимизации сводится к безусловной

$$x^2 + M \cdot h(x) \to \min$$

где $M > 0$ — выбранная константа.

Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$f(X) \to \min$$

При ограничениях

$$g_1(X) = 0$$
$$\dots$$
$$g_k(X) = 0$$

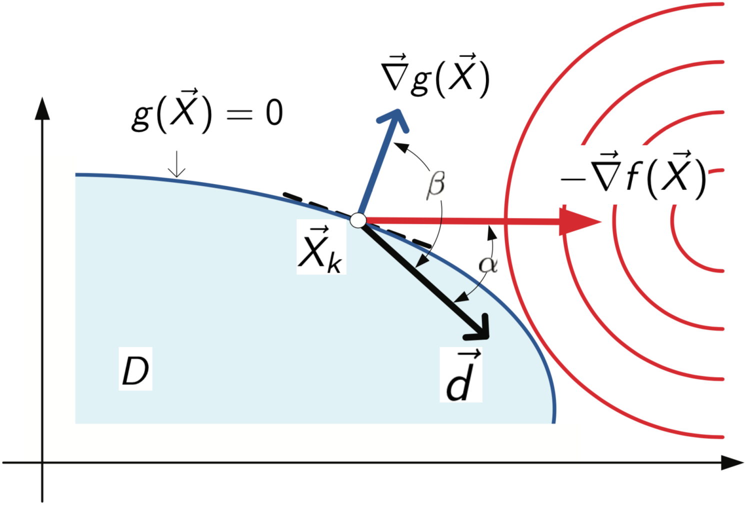
Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(X, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(X) + \lambda_1 g_1(X) + \dots + \lambda_k g_k(X)$$

Решаем систему уравнений

$$\nabla \mathcal{L}(X, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0$$

Релаксационный метод



Возможные и прогрессивные направления

Реализованные методы для прогнозирования SUT таблиц

- Метод проектирования градиента (релаксационный)
- Статья "Projection of Supply and Use tables: methods and their empirical assessment"(Temurshoev, Yamano, Webb, 2010):
  - Improved squared differences (ISD)
  - **Improved normalized squared differences** (INSD)
  - Improved weighted squared differences (IWSD)
  - RAS

Метод Improved normalized squared differences

Сделаем замену

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{a_{ij}}$$

Решаем оптимизационную задачу

$$f(Z) = \sum_i \sum_j |a_{ij}|(z_{ij} - 1)^2 \to \min$$

При ограничениях

$$\sum_j a_{ij} z_{ij} = u_i$$
$$\sum_i a_{ij} z_{ij} = v_j$$
$$a_{ij} z_{ij} \geq 0$$

Метод Improved normalized squared differences

Запишем функцию Лагранжа (M — штрафной коэффициент)

$$\mathcal{L}(Z,\lambda,\tau) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j |a_{ij}| \left((z_{ij}-1)^2 + M(\min\{0, z_{ij}\})^2\right)$$

$$+\sum_i \lambda_i \left(u_i - \sum_j a_{ij} z_{ij}\right) + \sum_j \tau_j \left(v_j - \sum_i a_{ij} z_{ij}\right)$$

Требуется решить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{ij}} = 0 \\ \sum_j a_{ij} z_{ij} = u_i \\ \sum_i a_{ij} z_{ij} = v_j \end{cases}$$

Метод Improved normalized squared differences

Решение

$$
z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } a_{ij} = 0 \\ 1 + \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|(\lambda_i + \tau_i)} & \text{если } 1 + \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|(\lambda_i + \tau_i)} \geq 0 \\ \frac{1}{1+M}\left(1 + \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|(\lambda_i + \tau_i)}\right) & \text{в остальных случаях} \end{cases}
$$

$$
\lambda_i = \frac{1}{\sum_j |a_{ij}|} \left(u_i - \sum_j a_{ij} + \sum_j (M a_{ij} \min\{0, z_{ij}\} - \tau_j |a_{ij}|) \right)
$$

$$
\tau_j = \frac{1}{\sum_i |a_{ij}|} \left(v_i - \sum_i a_{ij} + \sum_i (M a_{ij} \min\{0, z_{ij}\} - \lambda_i |a_{ij}|) \right)
$$

Метод Improved normalized squared differences

Применим итерационный алгоритм:

1. Инициализируем $Z^{[0]} = (1)$, $\lambda^{[0]} = (0)$, $\tau^{[0]} = (0)$
2. Вычисляем новые $\lambda^{[i]}, \tau^{[i]}$
3. Вычисляем новую матрицу $Z^{[i]}$
4. Повторяем 2-3 до тех пор пока не выполнится условие

$$\begin{cases} \lambda^{[i]} - \lambda^{[i-1]} < \epsilon_\lambda \\ \tau^{[j]} - \tau^{[j-1]} < \epsilon_\tau \end{cases}$$

5. Выполняем обратную замену $x_{ij} = z_{ij} a_{ij}$

Метод проектирования градиента (релаксационный)

Запишем матрицу $X_{m \times n}$ в виде вектора

$$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn})^T$$

Выполним замену переменных

$$z_i = \frac{x_i}{a_i} - 1$$

Решаем задачу квадратичной оптимизации

$$f(Z) = z^T \cdot A^* \cdot z \to \min$$

$$A^{**} z = b$$

Метод проектирования градиента (релаксационный)

$$f(Z) = z^T \cdot A^* \cdot z \to \min$$

$$A^{**}z = b$$

На примере матрицы $A_{2\times 2}$:

$$A^* = \begin{bmatrix} |a_{11}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a_{12}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |a_{21}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |a_{22}| \end{bmatrix}; A^{**} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T - A^{**} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Метод проектирования градиента (релаксационный)

Переобозначим для краткости $A^{**} := A$.
Решение находится итерационно с начальной точкой

$$Az_0 = b \Rightarrow z_0 = A^+ b$$

$$z_{i+1} = z_i + t_i D_i$$

где D_i — направление шага, t_i - длина шага

$$D = -P\nabla f(Z) = -P \begin{pmatrix} 2 \cdot |a_{11}| \cdot z_{11} \\ \dots \\ 2 \cdot |a_{mn}| \cdot z_{mn} \end{pmatrix}$$

$$P = I - A^T(AA^T)^{-1}A = I - A^+A$$

Пример

Имеем исходную матрицу A:

84	19	95	198
388	0	80	468
0	950	122	1 072
2	84 100	73	84 175
474	85 069	370	

Если установить $M = 100$, $\epsilon_\lambda = \epsilon_\tau = 10^{-8}$, то за 95 итерации матрица X примет вид:

72	14	99	185
398	0	97	495
0	826	142	968
2	87 908	98	88 008
473	88 748	435	

Другие методы

1. Improved squared differences

$$f(Z) = \sum_i \sum_j a_{ij}^2 (z_{ij} - 1)^2$$

2. Improved weighted squared differences

$$f(Z) = \sum_i \sum_j |a_{ij}^3| (z_{ij} - 1)^2$$

3. RAS

$$f(Z) = \sum_i \sum_j |a_{ij}| \left(z_{ij} \ln \left(\frac{z_{ij}}{e} \right) + 1 \right)$$

Данные для тестирования

- SUT за 2010, 2011, 2012 годы (Нидерланды)
  6 матриц 64x64
  Источник: World Input-Output Database
  (http://www.wiod.org/)
  - Первый сценарий: 2010 $\Rightarrow$ 2011
  - Второй сценарий: (2010 $\Rightarrow$ 2011) $\Rightarrow$ 2012
- SUT за 2012, 2013 годы (Россия)
  4 матрицы 62x59
  Источник: Росстат
  - Третий сценарий: 2012 $\Rightarrow$ 2013

	NACE	A01	A02	A03	B	C10-C12	C13-C15	C16	C17
CPA	Description	Crop and animal production, hunting and	Forestry and logging	Fishing and aquaculture	Mining and quarrying	Manufacture of food products, beverages and	Manufacture of textiles, wearing apparel and	Manufacture of wood and of products of wood	Manufacture of paper and paper products
CPA_A01	Products of agriculture, hunting and related	25 470	0	0	0	19	0	0	0
CPA_A02	Products of forestry, logging and related ser	0	144	0	0	0	0	0	0
CPA_A03	Fish and other fishing products; aquaculture	0	0	231	0	0	0	0	0
CPA_B	Mining and quarrying	0	0	0	21 715	0	0	0	0
CPA_C10-C12	Food products, beverages and tobacco prod	78	0	277	1	55 351	6	0	0
CPA_C13-C15	Textiles, wearing apparel and leather produc	0	0	0	0	0	3 132	7	17
CPA_C16	Wood and of products of wood and cork, ex	0	0	0	0	0	2	2 308	0
CPA_C17	Paper and paper products	0	0	0	0	0	9	3	5 713
CPA_C18	Printing and recording services	0	0	0	0	0	5	0	25
CPA_C19	Coke and refined petroleum products	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C20	Chemicals and chemical products	1	0	0	68	214	2	2	0
CPA_C21	Basic pharmaceutical products and pharma	0	0	0	0	4	0	0	0
CPA_C22	Rubber and plastics products	0	0	0	0	0	21	55	48
CPA_C23	Other non-metallic mineral products	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C24	Basic metals	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C25	Fabricated metal products, except machiner	0	0	0	0	32	26	42	1
CPA_C26	Computer, electronic and optical products	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C27	Electrical equipment	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C28	Machinery and equipment n.e.c.	0	0	0	0	18	0	3	3
CPA_C29	Motor vehicles, trailers and semi-trailers	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C30	Other transport equipment	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_C31_C32	Furniture; other manufactured goods	0	0	0	0	0	43	54	0
CPA_C33	Repair and installation services of machiner	157	0	0	1	8	10	86	1
CPA_D35	Electricity, gas, steam and air-conditioning	544	0	0	419	0	0	0	0
CPA_E36	Natural water; water treatment and supply s	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_E37-E39	Sewerage; waste collection, treatment and c	0	0	0	1	2	24	5	52
CPA_F	Constructions and construction works	120	0	0	0	3	0	0	0
CPA_G45	Wholesale and retail trade and repair service	0	0	0	0	0	0	0	0
CPA_G46	Wholesale trade services, except of motor v	144	0	0	89	1 434	176	81	69
CPA_G47	Retail trade services, except of motor vehic	0	0	0	0	0	0	0	0

Метрики

- Mean absolute percentage error

$$MAPE = \frac{1}{nm}\sum_i \sum_j \frac{|x_{ij} - x_{ij}^{true}|}{|x_{ij}^{true}|} \cdot 100$$

- Weighted absolute percentage error

$$WAPE = \sum_i \sum_j \left(\frac{|x_{ij}^{true}|}{\sum_k \sum_l x_{kl}^{true}}\right) \frac{|x_{ij} - x_{ij}^{true}|}{|x_{ij}^{true}|} \cdot 100$$

- Standardized weighted absolute difference

$$SWAD = \frac{\sum_i \sum_j |x_{ij}^{true}| \cdot |x_{ij} - x_{ij}^{true}|}{\sum_k \sum_l \left(x_{kl}^{true}\right)^2}$$

Результаты. Нидерланды, зависимость от M

M = 0	Supply 2010 ⇒ 2011			
	IWSD	INSD	ISD	RAS
MAPE	852.87	7.58	191.20	81.94
WAPE	16.03	1.70	10.94	5.83
SWAD	0.05	0.00	0.05	0.05

M = 10^5	Supply 2010 ⇒ 2011			
	IWSD	INSD	ISD	RAS
MAPE	319.21	7.58	157.43	81.94
WAPE	13.68	1.70	10.66	5.83
SWAD	0.05	0.00	0.05	0.05

Результаты. Нидерланды, при $M = 10^5$

	Supply 2010 ⇒ 2011					Use 2010 ⇒ 2011				
	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	319.21	7.58	157.43	81.94	7.14	331.94	11.99	156.98	33.43	10.96
WAPE	13.68	1.70	10.66	5.83	1.67	21.39	5.01	17.10	9.52	6.07
SWAD	0.052	0.004	0.046	0.049	0.003	0.134	0.022	0.125	0.076	0.033

	Supply (2010 ⇒ 2011) ⇒ 2012					Use (2010 ⇒ 2011) ⇒ 2012				
	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	337.66	9.76	253.14	83.09	9.19	369.60	14.59	245.09	32.90	13.16
WAPE	18.65	2.38	14.24	5.12	2.38	29.97	7.32	24.03	9.17	8.29
SWAD	0.070	0.005	0.059	0.038	0.004	0.186	0.033	0.175	0.075	0.052

Результаты. Россия, при $M = 1000$

Supply 2012 ⇒ 2013

	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	26898.99	183.51	7512.82	245.85	160.42
WAPE	18.21	1.86	15.35	9.91	1.92
SWAD	0.07	0.00	0.06	0.09	0.00
Time (sec)	303.64	64.31	4.06	5.41	0.58

Use 2012 ⇒ 2013

	IWSD	INSD	ISD	RAS	Grad
MAPE	31852.40	11.27	1715.71	25.86	12.80
WAPE	26.08	5.52	16.54	10.50	8.23
SWAD	0.10	0.03	0.09	0.10	0.06
Time (sec)	264.08	0.29	3.97	0.01	0.58