

Промежуточный экзамен 2016-2017

Алексей Сек, БЭК182

30 мая 2020 г.

Промежуточный экзамен 2016-2017

Ответы: BCAAЕ DBDBD AACA? ?EECB ?ABAB DAEDA CD

1. Известно, что некоторые события A и B независимы, если выполняется такое условие: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, верно и обратное: если данное условие не выполняется — события являются зависимыми. Исходя из этого, решим задачу:

Посчитаем вероятности каждого из событий отдельно:

Вполне очевидно, что троек в колоде ровно 4, тогда по классическому определению вероятности:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Семерок в колоде, что также очевидно, ровно 4, но т.к. событие заключается в вытаскивании второй карты, то вероятность будет иной. Примем во внимание, что первой картой могла быть как семерка, так и не семерка, вычислим вероятность события B :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$$

Если третья карта — дама пик, то первые две карты — не дамы пик, а дама пик в колоде всего одна, следовательно:

$$\mathbb{P}(C) = \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

Посчитаем все произведения пар событий (от перестановок множителей сумма не меняется — поэтому считаем только 3 пары):

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} \cdot \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} \right)$$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

$$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} \right) \cdot \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

Теперь посчитаем пересечения рассмотренных событий:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

Во второй части мы считаем, что первая карта не семерка и не дама пик, таких карт $52 - 4 - 1 = 47$:

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{1}{50} + \frac{47}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

Сравним вероятности пересечений событий и произведения вероятностей этих событий:

$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow A$ и B — зависимые события

$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \neq \mathbb{P}(A \cap C) \Rightarrow A$ и C — зависимые события

$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \neq \mathbb{P}(B \cap C) \Rightarrow B$ и C — зависимые события

Ответ: В.

2. Известно, что функция плотности $f(x)$ обладает следующими свойствами:

- $f(x) \geq 0$, для $\forall x$ — вероятность не может быть отрицательной
- $f(x)$ — непрерывна в области определения
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ — условие нормировки (вероятность от 0 до 1)

Рассмотрим каждую из функций на выполнение указанных свойств:

A. $f(x) = -1 \leq 0 \Rightarrow$ не подходит

B. $f(x) \leq 0$ например, при $x = 0 \Rightarrow$ не подходит

C. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{+\infty} dx/x^2 = 1 \Rightarrow$ все свойства соблюдаются

D. Данная функция похожа на функцию плотности для нормального распределения, но из-за отсутствия делителя в степени экспоненты — интеграл нельзя посчитать \Rightarrow не подходит

E. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \neq 1 \Rightarrow$ не подходит

Ответ: C.

3. Известно, что:

$$\mathbb{E}(XY) = \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$$

Следовательно:

$$\mathbb{E}(XY) = 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

Ответ: A.

4. Известно, что:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

Следовательно:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{2}{\sqrt{12}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ответ: А.

5. Известно, что, если a, b, c — некоторые константы, X, Y — некоторые случайные величины:

$$\text{Var}(aX + bY + c) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$$

Следовательно:

$$\text{Var}(2X - Y + 4) = 2^2 \cdot 12 + 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 48 + 1 - 8 = 41$$

Ответ: Е.

6. Известно, что в ковариационной матрице на главной диагонали стоят дисперсии случайных величин, а на побочной — ковариации данных случайных величин друг с другом

Если матрица единичная, то на главной диагонали стоят единицы: $\text{Var}(X) = 1$ и $\text{Var}(Y) = 1$, а на побочной — нули: $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Если ковариация равна нулю, то случайные величины независимы, что и утверждается в варианте D

Ответ: D.

7. Для решения вспомним свойства корреляции и ковариации:

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X + Y, 2Y - 7) &= \frac{\text{Cov}(X + Y, 2Y - 7)}{\sqrt{\text{Var}(X + Y)}\sqrt{\text{Var}(2Y - 7)}} = \\ &= \frac{\frac{\text{Cov}(X, 2Y) + 2 \text{Var}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}}{\frac{\sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)}\sqrt{4 \text{Var}(Y)}}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}} = \\ &= \frac{\frac{2 \text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)} + \frac{2 \text{Var}(Y)}{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}}{2\sqrt{1 + \frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}(X)} + \frac{2 \text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}}} = \\ &= \frac{2 \cdot 0.5 + 2 \cdot \sqrt{\frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}(X)}}}{2\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1 + 2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Промежуточные подсчеты:

$$\text{Corr}(X, Y) = 0.5; \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}{2}$$

Ответ: В.

8. И так несложная задача сильно упроститься, если представить отрезок от 0 до 1, на котором случайная величина ξ может равномерно распределена.

С какой же вероятностью она попадет в часть этого отрезка, ограниченную точками 0.2 и 0.7?

Очевидно, что длина такой части отрезка равна 0.5, когда длина всего отрезка от 0 и 1 равна 1

Очевидно:

$$\mathbb{P}(0.2 < \xi < 0.7) = \frac{0.7 - 0.2}{1 - 0} = 0.5$$

Ответ: D.

9. По ЦПТ указанное распределение сходится к стандартному нормальному распределению $\mathcal{N}(0,1)$ при $n \rightarrow \infty$

Нам известна функция плотности стандартной нормальной случайной величины, а вероятность, как известно, находится как определенный интеграл от функции плотности.

Пределы интегрирования равны: 1 и $+\infty$, т.к. исходя из условия нам интересны значения $x > 1$

Очевидно, что подойти может только ответ В, который представляет интеграл с правильными пределами интегрирования от правильной функции плотности

Ответ: В.

10. **Известно из условия, что $n = 100$:**

Используем свойство математического ожидания суммы:

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_i) \cdot n = 400 \cdot 100 = 40000$$

Так как случайные величины независимые:

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum X_i\right) = n * \text{Var}(X_i) = 40000$$

Применим ЦПТ:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > 40400) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} > \frac{40400 - 40000}{\sqrt{40000}}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 2) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

В ответах указать приближенный ответ, там есть 0.0227, что нам подходит

Ответ: D.

11. По условию дано: $\mathbb{E}(X) = 10000$

Неравенство Маркова:

$$\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

В нашем случае:

$$\mathbb{P}(|X| > 50000) \leq \frac{10000}{50000} = 0.2$$

Ответ: А.

12. Несовместность событий \Leftrightarrow они не могут произойти вместе

Всего 3 подбрасывания монеты:

Событие А: хотя бы 1 раз решка

Событие В: хотя бы 1 раз орел

Событие С: все три раза орел

Применим здравый смысл:

А и В одновременно произойти могут: например, 1 орел, 2 решки \Rightarrow Совместны

А и С одновременно произойти не могут: если 3 орла из 3, то решек 0 \Rightarrow Несовместны

В и С одновременно произойти могут: если 3 раза орел, то хотя бы 1 орел точно есть \Rightarrow Совместны

Ответ: А.

13. По условию математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(X) = 5 \cdot 10^4$$

Дано стандартное отклонение, а нужна дисперсия:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = (10^4)^2 = 10^8$$

Неравенство Чебышёва:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - 5 \cdot 10^4| \leq 2 \cdot 10^4) &= 1 - \mathbb{P}(|X - 5 \cdot 10^4| > 2 \cdot 10^4) = \\ &= 1 - \frac{10^8}{(2 \cdot 10^4)^2} = 1 - 0.25 = 0.75 \end{aligned}$$

Ответ: С.

14. Мат. ожидание биномиального распределения:

$$\mathbb{E}((\xi_1)^{2016}) = 0.6$$

По Закону Больших Чисел:

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(\xi_1)^{2016} + \dots + (\xi_n)^{2016}}{n} = \mathbb{E}((\xi_1)^{2016}) = 0.6$$

Ответ: А.

15. Ровно 2 раза шестерка \Rightarrow 2 раза шестерка и 3 раза не шестерка

События независимые \Rightarrow можем взять их произведение

Пусть X количество выпавших шестерок, тогда из функции вероятности биномиального распределения:

$$\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^5}$$

Ответ: Нет верного ответа.

16. Несложно найти мат. ожидание для одного броска:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot 0 = \frac{1}{6}$$

Посчитаем мат. ожидание 5 бросков:

$$Y = \sum_{i=1}^5 X_i \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 5 \mathbb{E}(X) = \frac{5}{6}$$

Биномиальное распределение, поэтому:

$$\text{Var}(Y) = np(1-p) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Ответ: Нет верного ответа.

17. Биномиальное распределение, поэтому:

$$np - q \leq \text{moda} \leq np + p$$

В нашем случае:

$$5 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leq \text{moda} \leq 5 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

То есть моды две — это 0 и 1:

$$0 \leq \text{moda} \leq 1$$

Ответ: Е.

18. Несложно найти мат. ожидание для одного броска:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$$

Посчитаем мат. ожидание 5 бросков:

$$Y = \sum_{i=1}^5 X_i \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 5 \mathbb{E}(X) = \frac{105}{6} = 17.5$$

Ответ: Е.

19. Мат. ожидания случайных величин ξ, η даны в условии :

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$$

На главной диагонали ковариационной матрицы расположены дисперсии случайных величин ξ, η :

$$\text{Var}(\xi) = \text{Var}(\eta) = 1$$

На побочной диагонали их ковариация:

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = 0.5$$

Теперь можем найти корреляцию:

$$r = \text{Corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\text{Var}(\xi)}\sqrt{\text{Var}(\eta)}} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

Вспомним функцию плотности нормального двумерного распределения:

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\text{Var}(\xi)\text{Var}(\eta)(1-r^2)}} \times \\ \times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-\mathbb{E}(\xi))^2}{\text{Var}(\xi)} - \frac{2r(x-\mathbb{E}(\xi))(y-\mathbb{E}(\eta))}{\sqrt{\text{Var}(\xi)\text{Var}(\eta)}} + \frac{(y-\mathbb{E}(\eta))^2}{\text{Var}(\eta)}\right)\right\}$$

Подставим наши параметры:

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-0.5^2)}} \exp\left\{\frac{-1}{1.5}(x^2 - xy + y^2)\right\}$$

Откуда a очевидно из знаменателя первого множителя, b очевидно, т.к. в степени экспоненты не стоит множителя:

$$a = \sqrt{(1-0.5^2)} = \sqrt{0.75} = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = 1$$

Ответ: С.

20. **Уточнить**

Заметим, что случайные величины ξ, η стандартные нормальные, так как их параметры: $\text{Var}(\xi) = \text{Var}(\eta) = 1$ и $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$

Попробуем решить методом исключения:

А) Хи-квадрат закон распределения случайной величины предполагает случайную величину, равную сумме стандартных нормальных случайных величин.

η - стандартная нормальная случайная величина, но 2η уже не будет являться стандартной, хотя и останется нормальной случайной величиной \Rightarrow ответ А не подходит

С) D) ответы С и D эквивалентны, но здесь ответ единственный \Rightarrow ответы С и D не подходят

Е) ξ - стандартная нормальная случайная величина, но если вычесть из нее некоторую другую случайную величину, то стандартной ξ уже не будет \Rightarrow ответ Е не подходит

Остался ответ В) - его и выбираем

Если решать не методом исключения, то ответ В) также окажется верным: $z = (\xi - 0.5\eta, \eta)^T$ второй элемент случайного вектора — стандартная нормальная случайная величина (известно из условия), первый элемент случайного вектора — также нормальная случайная величина, т.к. представляет собой линейную комбинацию нормальных случайных величин

Ответ: В.

21. **Уточнить**

22. Найдем условное математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(X \mid Y = 0) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0 \mid Y = 0) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ответ: А.

23. Найдем условную вероятность:

$$\mathbb{P}(X = 0 \mid Y < 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 0 \cap Y < 1)}{\mathbb{P}(Y < 1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 0.25$$

Ответ: В.

24. Известно, что дисперсию можно найти по формуле:

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y)$$

Найдем квадрат мат. ожидания случайной величины:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0 \Rightarrow \mathbb{E}^2(Y) = 0$$

Найдем мат. ожидание квадрата случайной величины:

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 0 \Rightarrow \mathbb{E}^2(Y) = \frac{2}{3}$$

Найдем искомую дисперсию:

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Ответ: А.

25. Известно, ковариация может быть найдена по следующей формуле:

$$\text{Cov}(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$$

Найдем мат. ожидание произведения случайных величин X и Y :

$$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

Найдем мат. ожидание случайной величины X :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Найдем мат. ожидание случайной величины Y :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

Найдем искомую ковариацию:

$$\text{Cov}(XY) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot 0 = -\frac{1}{3}$$

Ответ: В.

26. Известно, что вероятность может быть найдена как интеграл по заданной области:

$$\mathbb{P}(X < 0.5, Y < 0.5) = \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} 9x^2y^2 dx dy = \int_0^{0.5} \frac{3}{8}y^2 dy = \frac{1}{64}$$

Ответ: D.

27. Известно, что условная функция плотности может быть найдена по следующей формуле:

$$f_{x|y=1} = \frac{f_{xy}}{f_y}$$

Найдем функцию плотности случайной величины Y из совместной функции плотности:

$$f_y = \int_0^1 9x^2y^2 dx = 3y^2$$

Найдем искомую условную функцию плотности:

$$f_{x|y=1} = \frac{9x^2y^2}{3y^2} = 3x^2$$

Ответ: А.

28. Пусть $X = 1$ — событие в классе есть отличник

Сначала выбирается класс (вероятность выбрать любой из классов равна $\frac{1}{3}$), затем в зависимости от класса вероятности будут отличаться, т.к. в них разная концентрация отличников:

Искомая вероятность может быть вычислена таким образом:

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.3 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} = 0.4$$

Ответ: Е.

29. По формуле условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Или в другом виде:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

Вероятность объединения событий:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.2 + 0.5 - 0.15 = 0.55$$

Ответ: D.

30. Из формулы вероятности для биномиального распределения:

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = C_{10}^1 \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^9$$

Ответ: А.

31. Пусть $W = 1$ — событие "покупатель женщина M — случайная величина, показывающая сумму в чеке. Покупка была совершена на 1234 рубля, то есть $M > 1000$

Вероятность покупки женицной при условии $M > 1000$:

$$\mathbb{P}(W = 1 | M > 1000) = \frac{\mathbb{P}(W = 1 \cup M > 1000)}{\mathbb{P}(M > 1000)}$$

Вероятность объединения событий ($W = 1$) и $M > 1000$:

$$\mathbb{P}(W = 1 \cup M > 1000) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$$

Доли женщин и мужчин одинаковы, вычислим $\mathbb{P}(M > 1000)$:

$$\mathbb{P}(M > 1000) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.45$$

Следовательно, искомая вероятность равна:

$$\mathbb{P}(W = 1 \mid M > 1000) = \frac{0.3}{0.45} = \frac{2}{3}$$

Ответ: С.

32. Известно, что функция распределения обладает следующими свойствами:

- (a) существует для непрерывных случайных величин
- (b) $F_X \in [0; 1]$
- (c) при $x \rightarrow -\infty$ $F_X = 0$
- (d) при $x \rightarrow +\infty$ $F_X = 1$
- (e) $\mathbb{P}(X \in (a; b]) = F_X(b) - F_X(a)$

Проверим каждый из вариантов на соответствие свойствам функции распределения: подходит только вариант D.

Ответ: D.