Промежуточный экзамен 2016-2017

Алексей Сек, БЭК182

30 мая 2020 г.

Промежуточный экзамен 2016-2017

1. Известно, что некоторые события A и B независимы, если выполняется такое условие: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, верно и обратное: если данное условие не выполняется — события являются зависимыми. Исходя из этого, решим задачу:

   Посчитаем вероятности каждого из событий отдельно:

   Вполне очевидно, что троек в колоде ровно 4, тогда по классическому определению вероятности:

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

   Семерок в колоде, что также очевидно, ровно 4, но т.к. событие заключается в вытаскивании второй карты, то вероятность будет иной. Примем во внимание, что первой картой могла быть как семерка, так и не семерка, вычислим вероятность события B:

   $$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$$

   Если третья карта — дама пик, то первые две карты — не дамы пик, а дама пик в колоде всего одна, следовательно:

   $$\mathbb{P}(C) = \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

   Посчитаем все произведения пар событий (от перестановок множителей сумма не меняется — поэтому считаем только 3 пары):

   $$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} \cdot (\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51})$$

   $$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

   $$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = (\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}) \cdot \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

   Теперь посчитаем пересечения рассмотренных событий:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

Во второй части мы считаем, что первая карта не семерка и не дама пик, таких карт $52 - 4 - 1 = 47$:

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{1}{50} + \frac{47}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{1}{50}$$

Сравним вероятности пересечений событий и произведения вероятностей этих событий:

$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow A$ и B — зависимые события

$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \neq \mathbb{P}(A \cap C) \Rightarrow A$ и C — зависимые события

$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \neq \mathbb{P}(B \cap C) \Rightarrow B$ и C — зависимые события

Ответ: B.

2. Известно, что функция плотности $f(x)$ обладает следующими свойствами:

   - $f(x) \geqslant 0$, для $\forall x$ — вероятность не может быть отрицательной
   - $f(x)$ — непрерывна в области опрелеления
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ — условие нормировки (вероятность от 0 до 1)

   Рассмотрим каждую из функций на выполнение указанных свойств:

   A. $f(x) = -1 \leqslant 0 \Rightarrow$ не подходит

   B. $f(x) \leqslant 0$ например, при $x = 0 \Rightarrow$ не подходит

   C. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{+\infty} dx/x^2 = 1 \Rightarrow$ все свойтсва соблюдаются

   D. Данная функция похожа на функцию плотности для нормального распределения, но из-за отсутствия делителя в степени экспоненты - интеграл нельзя посчитать $\Rightarrow$ не подходит

   E. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{8}{3} \neq 1 \Rightarrow$ не подходит

   Ответ: C.

3. Известно, что:

   $$\mathbb{E}(XY) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

   Следовательно:

   $$\mathbb{E}(XY) = 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

   Ответ: A.

4. Известно, что:

$$\operatorname{Corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y}}$$

Следовательно:

$$\operatorname{Corr}(X,Y) = \frac{2}{\sqrt{12}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ответ: A.

5. Изввестно, что, если a, b, c — некоторые константы, X, Y — некоторые случайные величины:

$$\operatorname{Var}(aX + bY + c) = a^2 \operatorname{Var}(X) + b^2 \operatorname{Var}(Y) + 2ab \operatorname{Cov}(X,Y)$$

Следовательно:

$$\operatorname{Var}(2X - Y + 4) = 2^2 \cdot 12 + 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 48 + 1 - 8 = 41$$

Ответ: E.

6. Известно, что в ковариационной матрице на главной диагонали стоят дисперсии случайных величин, а на побочной — ковариации данных случайных величин друг с другом

Если матрица единичная, то на главной диагонали стоят единицы: $\operatorname{Var}(X) = 1$ и $\operatorname{Var}(Y) = 1$, а на побочной - нули: $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$

Если ковариация равна нулю, то случайные величины независимы, что и утверждается в варианте D

Ответ: D.

7. Для решения вспомним свойства корреляции и ковариации:

$$Corr(X+Y, 2Y-7) = \frac{\operatorname{Cov}(X+Y, 2Y-7)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X+Y)}\sqrt{\operatorname{Var}(2Y-7)}} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{Cov}(X,2Y)+2\operatorname{Var}(Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}}{\frac{\sqrt{\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y)}\sqrt{4\operatorname{Var}(Y)}}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}} =$$

$$= \frac{\frac{2\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)} + \frac{2\operatorname{Var}(Y)}{\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)}}{2\sqrt{1 + \frac{\operatorname{Var}(Y)}{\operatorname{Var}(X)} + \frac{2\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0.5 + 2 \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{Var}(Y)}{\operatorname{Var}(Y)}}}{2\sqrt{1+1+1}} = \frac{1+2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Промежуточные подсчеты:

$$\operatorname{Corr}(X,Y) = 0.5; \operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) \Rightarrow \operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}{2}$$

Ответ: B.

8. И так несложная задача сильно упроститься, если представить отрезок от 0 до 1, на котором случайная величина ξ может равномерно распределена.

   С какой же вероятностью она попадет в часть этого отрезка, ограниченную точками 0.2 и 0.7?

   Очевидно, что длина такой части отрезка равна 0.5, когда длина всего отрезка от 0 и 1 равна 1

   Очевидно:

$$\mathbb{P}(0.2 < \xi < 0.7) = \frac{0.7 - 0.2}{1 - 0} = 0.5$$

   Ответ: D.

9. По ЦПТ указанное распределение сходится к стандартному нормальному распределению $\mathcal{N}(0,1)$ при $n \to \infty$

   Нам известна функция плотности стандартной нормальной случайной величины, а вероятность, как известно, находится как определенный интеграл от функции плотности.

   Пределы интегрирования равны: 1 и $+\infty$, т.к. исходя из условия нам интересны значения $x > 1$

   Очевидно, что подойти может только ответ B, который представляет интеграл с правильными пределами интегрирования от правильной функцмм плотности

   Ответ: B.

10. **Известно из условия, что $n = 100$:**

    Используем свойство математического ожидания суммы:

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_i) \cdot n = 400 \cdot 100 = 40000$$

    Так как случайные величины независимые:

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(\sum X_i) = n * \mathrm{Var}(X_i) = 40000$$

    Применим ЦПТ:

$$\mathbb{P}(S_n > 40400) = \mathbb{P}(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} > \frac{40400 - 40000}{\sqrt{40000}}) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 2) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

    В ответах указать приближенный ответ, там есть 0.0227, что нам подходит

    Ответ: D.

11. По условию дано: $\mathbb{E}(X) = 10000$

    Неравенство Макркова:

    $$\mathbb{P}(\mid X \mid > a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

    В нашем случае:

    $$\mathbb{P}(\mid X \mid > 50000) \leqslant \frac{10000}{50000} = 0.2$$

    Ответ: A.

12. Несовместность событий $\Leftrightarrow$ они не могут произойти вместе

    Всего 3 подбрасывания монеты:

    Событие A: хотя бы 1 раз решка

    Событие B: хотя бы 1 раз орел

    Событие C: все три раза орел

    Применим здравый смысл:

    A и B одновременно произойти могут: например, 1 орел, 2 решки $\Rightarrow$ Совместны

    A и C одновременно произойти не могут: если 3 орла из 3, то решек 0 $\Rightarrow$ Несовместны

    B и C одноврменно произойти могут: если 3 раза орел, то хотя бы 1 орел точно есть $\Rightarrow$ Совместны

    Ответ: A.

13. По условию математическое ожидание:

    $$\mathbb{E}(X) = 5 \cdot 10^4$$

    Дано стандартное отклонение, а нужна дисперсия:

    $$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = (10^4)^2 = 10^8$$

    Неравенство Чебышёва:

    $$\mathbb{P}(\mid X - \mathbb{E}(X) \mid > a) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

    В нашем случае:

    $$\mathbb{P}(\mid X - 5 \cdot 10^4 \mid \leqslant 2 \cdot 10^4) = 1 - \mathbb{P}(\mid X - 5 \cdot 10^4 \mid > 2 \cdot 10^4) =$$
    $$= 1 - \frac{10^8}{(2 \cdot 10^4)^2} = 1 - 0.25 = 0.75$$

    Ответ: C.

14. Мат. ожидание биномиального распределения:

$$\mathbb{E}((\xi_1)^{2016}) = 0.6$$

По Закону Больших Чисел:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{(\xi_1)^{2016} + ... + (\xi_n)^{2016}}{n} = \mathbb{E}((\xi_1)^{2016}) = 0.6$$

Ответ: A.

15. Ровно 2 раза шестерка $\Rightarrow$ 2 раза шестерка и 3 раза не шестерка

События независимые $\Rightarrow$ можем взять их произведение

Пусть X количество выпавших шестерок, тогда из функции вероятности биномиального распределения:

$$\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^3 = \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^5}$$

Ответ: Нет верного ответа.

16. Несложно найти мат. ожидание для одного броска:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot 0 = \frac{1}{6}$$

Посчиатем мат. ожидание 5 бросоков:

$$Y = \sum_{i=1}^{5} X_i \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 5\,\mathbb{E}(X) = \frac{5}{6}$$

Биномиальное распределение, поэтому:

$$\mathrm{Var}(Y) = np(1-p) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Ответ: Нет верного ответа.

17. Биномиальное распределение, поэтому:

$$np - q \leqslant moda \leqslant np + p$$

В нашем случае:

$$5 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leqslant moda \leqslant 5 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

То есть моды две — это 0 и 1:

$$0 \leqslant moda \leqslant 1$$

Ответ: E.

18. Несложно найти мат. ожидание для одного броска:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$$

Посчиатем мат. ожидание 5 бросоков:

$$Y = \sum_{i=1}^{5} X_i \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 5\,\mathbb{E}(X) = \frac{105}{6} = 17.5$$

Ответ: E.

19. Мат. ожидания случайных величин ξ, η даны в условии :

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$$

На главной диагонали ковариационной матрицы расположены дисперсии случайных величин ξ, η:

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathrm{Var}(\eta) = 1$$

На побочной диагонали их ковариация:

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0.5$$

Теперь можем найти корреляцию:

$$r = \mathrm{Corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}\sqrt{\mathrm{Var}(\eta)}} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

Вспомним функцию плотности нормального двумерного распределения:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)\,\mathrm{Var}(\eta)(1-r^2)}} \times$$
$$\times \exp\{\frac{-1}{2(1-r^2)}(\frac{(x-\mathbb{E}(\xi))^2}{\mathrm{Var}(\xi)} - \frac{2r(x-\mathbb{E}(\xi))(y-\mathbb{E}(\eta))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)\,\mathrm{Var}(\eta)}} + \frac{(y-\mathbb{E}(\eta))^2}{\mathrm{Var}(\eta)})\}$$

Подставим наши параметры:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-0.5^2)}} \exp\{\frac{-1}{1.5}(x^2 - xy + y^2\}$$

Откуда a очевидно из знаменателя первого множителя, b очевидно, т.к. в степени экспоненты не стоит множителя:

$$a = \sqrt{(1-0.5^2)} = \sqrt{0.75} = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = 1$$

Ответ: C.

20. **Уточнить**

    Заметим, что случайные величины ξ, η стандартные нормальные, так как их параметры: $\text{Var}(\xi) = \text{Var}(\eta) = 1$ и $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$

    Попробуем решить методом исключения:

    A) Хи-квадрат закон распределения случайной величины предполагает случайную величину, равную сумме стандартных нормальных случайных величин.

    η - стандартная нормальная случайная велична, но 2η уже не будет являться стандартной, хотя и останется нормальной случайной величиной $\Rightarrow$ ответ A не подходит

    C) D) ответы C и D эквивалентны, но здесь ответ единственный $\Rightarrow$ ответы C и D не подходят

    E) ξ - стандартная нормальная случайная велична, но если вычесть из нее некоторую другую случайную величину, то стандартной ξ уже не будет $\Rightarrow$ ответ E не подходит

    Остался ответ B) - его и выбираем

    Если решать не методом исключения, то ответ B) также окажется верным: $z = (\xi - 0.5\eta, \eta)^T$ второй элемент случайного вектора — стандартная нормальная случайная величина (известно из условия), первый элемент случайного вектора — также нормальная случайная величина, т.к. представляет собой линейную комбинацию нормальных случайных величин

    Ответ: B.

21. **Уточнить**

22. Найдем условное математическое ожидание:

    $$\mathbb{E}(X \mid Y = 0) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0 \mid Y = 0) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

    Ответ: A.

23. Найдем условную вероятность:

    $$\mathbb{P}(X = 0 \mid Y < 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 0 \cap Y < 1)}{\mathbb{P}(Y < 1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 0.25$$

    Ответ: B.

24. Известно, что дисперсию можно найти по формуле:

    $$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y)$$

    Найдем квадрат мат. ожидания случайной величины:

    $$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0 \Rightarrow E^2(Y) = 0$$

Найдем мат. ожидание квадрата случайной величины:

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 0 \Rightarrow \mathbb{E}^2(Y) = \frac{2}{3}$$

Найдем искомую дисперсию:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Ответ: A.

25. Известно, что ковариация может быть найдена по следующей формуле:

$$\mathrm{Cov}(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

Найдем мат. ожидание произведения случайных величин X и Y:

$$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

Найдем мат. ожидание случайной величины X:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Найдем мат. ожидание случайной величины Y:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

Найдем искомую ковариацию:

$$\mathrm{Cov}(XY) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot 0 = -\frac{1}{3}$$

Ответ: B.

26. Известно, что вероятность может быть найдена как интеграл по заданной области:

$$\mathbb{P}(X < 0.5, Y < 0.5) = \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} 9x^2y^2\,dx\,dy = \int_0^{0.5} \frac{3}{8}y^2,dy = \frac{1}{64}$$

Ответ: D.

27. Известно, что условная функция плотности может быть найдена по следующей формуле:

$$f_{x|y=1} = \frac{f_{xy}}{f_y}$$

Найдем функцию плотности случайной величины Y из совместной функции плотности:

$$f_y = \int_0^1 9x^2y^2\,dx = 3y^2$$

Найдем искомую условную функцию плотности:

$$f_{x|y=1} = \frac{9x^2y^2}{3y^2} = 3x^2$$

Ответ: A.

28. Пусть $X = 1$ — событие в классе есть отличник

    Сначала выбирается класс (вероятность выбрать любой из классов равна $\frac{1}{3}$), затем в зависимости от класса вероятности будут отличаться, т.к. в них разная концентрация отличников:

    Искомая вероятность может быть вычислена таким образом:

    $$\mathbb{P}(X = 1) = 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.3 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} = 0.4$$

    Ответ: E.

29. По формуле условной вероятности:

    $$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

    Или в другом виде:

    $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

    Вероятность объединения событий:

    $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.2 + 0.5 - 0.15 = 0.55$$

    Ответ: D.

30. Из формулы вероятности для биномиального распределения:

    $$\mathbb{P}(X >= 2) = C_{10}^{1} \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^9$$

    Ответ: A.

31. Пусть $W = 1$ — событие "покупатель женщина M — случайная величина, показывающая сумму в чеке. Покупка была совершена на 1234 рубля, то есть $M > 1000$

    Вероятность покупки женищной при условии $M > 1000$:

    $$\mathbb{P}(W = 1 \mid M > 1000) = \frac{\mathbb{P}(W = 1 \cup M > 1000)}{\mathbb{P}(M > 1000)}$$

    Вероятность объединения событий $(W = 1)$ и $M > 1000$:

    $$\mathbb{P}(W = 1 \cup M > 1000) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$$

Доли женщин и мужчин одинаковы, вычислим $\mathbb{P}(M > 1000)$:

$$\mathbb{P}(M > 1000) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.45$$

Следовательно, искомая вероятность равна:

$$\mathbb{P}(W = 1 \mid M > 1000) = \frac{0.3}{0.45} = \frac{2}{3}$$

Ответ: C.

32. Известно, что функция распределения обладает следующими свойствами:

    (a) существует для непрерывных случайных величин

    (b) $F_X \in [0; 1]$

    (c) при $x \to -\infty$ $F_X = 0$

    (d) при $x \to +\infty$ $F_X = 1$

    (e) $\mathbb{P}(X \in (a; b]) = F_X(b) - F_X(a)$

    Проверим каждый из вариантов на соответствие свойствам функции распределения: подходит только вариант D.

    Ответ: D.