Промежуточный экзамен 2016-2017

Алексей Сек, БЭК182

28 мая 2020 г.

Промежуточный экзамен 2016-2017

1. Известно, что некоторые события A и B независимы, если выполняется такое условие: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, верно и обратное: если данное условие не выполняется - события являются зависимыми. Исходя из этого, решим задачу:

   Посчитаем вероятности каждого из событий отдельно:

   Вполне очевидно, что троек в колоде ровно 4, тогда по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

   Семерок в колоде, что также очевидно, ровно 4, но т.к. событие заключается в вытаскивании второй карты, то вероятность будет иной. Примем во внимание, что первой картой могла быть как семерка, так и не семерка, вычислим вероятность события B: $P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$.

   Если третья карта - дама пик, то первые две карты - не дамы пик, а дама пик в колоде всего одна, следовательно: $P(C) = \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$

   Посчитаем все произведения пар событий (от перестановок множителей сумма не меняется - поэтому считаем только 3 пары):

   $P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{52} \cdot (\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51})$
   $P(A) \cdot P(C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$
   $P(B) \cdot P(C) = (\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}) \cdot \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$

   Теперь посчитаем пересечения рассмотренных событий:

   $P(A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}$ (первая карта - тройка, вторая - семерка)

   $P(A \cap C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{1}{50}$ (первая карта - тройка, третья - дама пик)

   $P(B \cap C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{1}{50} + \frac{47}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{1}{50}$ (вторая - семерка, третья - дама пик. Во второй части мы считаем, что первая карта не семерка и не дама пик, таких карт $52 - 4 - 1 = 47$)

   Сравним вероятности пересечений событий и произведения вероятностей этих событий:

   $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B) \Rightarrow A$ и B - зависимые события

   $P(A) \cdot P(C) \neq P(A \cap C) \Rightarrow A$ и C - зависимые события

   $P(B) \cdot P(C) \neq P(B \cap C) \Rightarrow B$ и C - зависимые события

   Ответ: B. События A и B зависимы, события B и C зависимы

2. Известно, что функция плотности $f(x)$ обладает следующими свойствами:

   - $f(x) \geq 0$, для $\forall x$ - вероятность не может быть отрицательной
   - $f(x)$ непрерывна в области опрелеления
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ - условие нормировки (вероятность от 0 до 1)

   Рассмотрим каждую из функций на выполнение указанных свойств:

   A. $f(x) = -1 \leq 0 \Rightarrow$ не подходит

   B. $f(x) \leq 0$ например, при $x = 0 \Rightarrow$ не подходит

   C. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{+\infty} dx/x^2 = 1 \Rightarrow$ все свойтсва соблюдаются

   D. Данная функция похожа на функцию плотности для нормального распределения, но из-за отсутствия делителя в степени экспоненты - интеграл нельзя посчитать $\Rightarrow$ не подходит

   E. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \neq 1 \Rightarrow$ не подходит

   Ответ: C.

3. Известно, что $\mathbb{E}(XY) = COV(X,Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

   Откуда $\mathbb{E}(XY) = 2 + 3 \cdot 2 = 8$

   Ответ: A.

4. Известно, что $corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y}}$

   Откуда $corr(X,Y) = \frac{2}{\sqrt{12}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

   Ответ: A.

5. Изввестно, что $Var(aX+bY+c) = a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)$, где $a, b, c = const, X, Y$ - некоторые случайные величины

   Откуда $Var(2X - Y + 4) = 2^2 \cdot 12 + 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 48 + 1 - 8 = 41$

   Ответ: E.

6. Известно, что в ковариационной матрице на главной диагонали стоят дисперсии случайных величин, а на побочной - ковариации данных случайных величин друг с другом

   Если матрица единичная, то на главной диагонали стоят единицы: $Var(X) = 1$ и $Var(Y) = 1$, а на побочной - нули: $Cov(X,Y) = 0$

   Если ковариация равна нулю, то случайные величины независимы, что и утверждается в варианте D

   Ответ: D.

7. Для решения вспомним свойства корреляции и ковариации:

   $$Corr(X+Y, 2Y-7) = \frac{Cov(X+Y,2Y-7)}{\sqrt{Var(X+Y)}\sqrt{Var(2Y-7)}} = \frac{\frac{Cov(X,2Y)+2Var(Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}}{\frac{\sqrt{Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)}\sqrt{4Var(Y)}}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}} =$$

   $$\frac{\frac{2Cov(X,Y)}{Var(X)+Var(Y)} + \frac{2Var(Y)}{Var(X)+Var(Y)}}{2\sqrt{1+\frac{Var(Y)}{Var(X)}+\frac{2Cov(X,Y)}{Var(X)}}} = \frac{2 \cdot 0.5 + 2 \cdot \sqrt{\frac{Var(Y)}{Var(Y)}}}{2\sqrt{1+1+1}} = \frac{1+2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Промежуточные подсчеты: $Corr(X,Y) = 0.5, Var(X) = Var(Y) \Rightarrow Cov(X,Y) = 0.5\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}$

Ответ: B.

8. И так несложная задача сильно упроститься, если представить отрезок от 0 до 1, на котором случайная величина ξ может равномерно распределена. С какой же вероятностью она попадет в часть этого отрезка, ограниченную точками 0.2 и 0.7, очевидно, что длина такой части отрезка равна 0.5, когда длина всего отрезка от 0 и 1 равна 1

   Очевидно: $P(0.2 < \xi < 0.7) = \frac{0.7-0.2}{1-0} = 0.5$

   Ответ: D.

9. По ЦПТ указанное распределение сходится к стандартному нормальному распределению $N(0,1)$ при $n \to \infty$

   Нам известна функция плотности стандартной нормальной случайной величины, а вероятность, как известно, находится как определенный интеграл от функции плотности.

   Пределы интеграрирования равны: 1 и $+\infty$, т.к. исходя из условия нам интересны значения $x > 1$

   Очевидно, что подойти может только ответ B, который представляет интеграл с правильными пределами интегрирования от правильной функцмм плотности

   Ответ: B.

10. **Известно из условия, что:**

    $\mathbb{E}(S_n) = 400$

    $Var(S_n) = Var(\sum X_i) = n * Var(X_i) = 40000$ т.к. с.в. независимы

    $n = 100$

    Применим ЦПТ:

    $P(S_n > 40400) = P(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} > \frac{40400-400}{\sqrt{40000}}) = P(N(0,1) > 2) = 1 - P(N(0,1) < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

    В ответах указать приближенный ответ, там есть 0.0227, что нам подходит

    Ответ: D.

11. По условию дано:

    $\mathbb{E}(X) = 10000$

    Неравенство Макркова:

    $P(\mid X \mid > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

    В нашем случае:

    $P(\mid X \mid > 50000) \leq \frac{10000}{50000} = 0.2$

    Ответ: A.

12. Несовместность $\Leftrightarrow$ события не могут произойти вместе

    Всего 3 подбрасывания монеты:

    Событие A: хотя бы 1 раз решка

    Событие B: хотя бы 1 раз орел

    Событие C: все три раза орел

    Применим здравый смысл:

    A и B одновременно произойти могут: например, 1 орел, 2 решки $\Rightarrow$ Совместны

    A и C одновременно произойти не могут: если 3 орла из 3, то решек 0 $\Rightarrow$ Несовместны

    B и C одноврменно произойти могут: если 3 раза орел, то хотя бы 1 орел точно есть $\Rightarrow$ Совместны

    Ответ: A.

13. По условию дано:

    $\mathbb{E}(X) = 50000$

    $Var(X) = 10000^2 = \sigma^2$ Дано стандартное отклонение, а нужна дисперсия

    Неравенство Чебышёва:

    $P(\mid X - \mathbb{E}(X) \mid > a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$

    В нашем случае:

    $P(\mid X - 50000 \mid \leq 20000) = 1 - P(\mid X - 50000 \mid > 20000) = 1 - \frac{10^8}{(2*10^4)^2} = 1 - 0.25 = 0.75$

    Ответ: C.

14. Мат. ожидание биномиального распределения: $\mathbb{E}((\xi_1)^{2016}) = 0.6$

    По Закону Больших Чисел:

    $p\lim_{n\to\infty} \frac{(\xi_1)^{2016}+\ldots+(\xi_n)^{2016}}{n} = \mathbb{E}((\xi_1)^{2016}) = 0.6$
    frac16

15. **Кубик подбросили** 5 **раз:**

    Ровно 2 раза шестерка $\Rightarrow$ 2 раза шестерка и 3 раза не шестерка

    События независимые $\Rightarrow$ можем взять их произведение

    Пусть X количество выпавших шестерок, тогда:

    Биномиальное распределение, поэтому:

    $P(X = 2) = C_5^2 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^3 = \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^5}$

    Ответ: Нет верного ответа.

16. **Кубик подбросили** 5 **раз:**

    Несложно найти мат. ожидание для одного броска:

    $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot 0 = \frac{1}{6}$

    Посчиатем мат. ожидание 5 бросоков:

$Y = \sum X_i \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) = \frac{5}{6}$

Биномиальное распределение, поэтому:

$Var(Y) = npq = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{36}$

Ответ: Нет верного ответа.

17. **Биномиальное распределение, поэтому:**

    $np - q \leq moda \leq np + p$

    В нашем случае:

    $5 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leq moda \leq 5 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

    $0 \leq moda \leq 1$ то есть моды две - это 0 и 1

    Ответ: E.

18. Несложно найти мат. ожидание для одного броска:

    $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$

    Посчиатем мат. ожидание 5 бросоков:

    $Y = \sum X_i \Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) = \frac{105}{6} = 17.5$

    Ответ: E.

19. Мат. ожидания случайных величин ξ, η: $\mu_\xi = \mu_\eta = 0$

    На главной диагонали ковариационной матрицы расположены дисперсии случайных величин ξ, η: $D(\xi) = D(\eta) = 1$

    На побочной диагонали их ковариация: $Cov(\xi, \eta) = 0.5$

    Теперь можем найти $r = Corr(\xi, \eta) = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{Var(\xi)}\sqrt{Var(\eta)}} = \frac{0.5}{1} = 0.5$

    Вспомним функцию плотности нормального двумерного распределения:

    $f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\{\frac{-1}{2(1-r^2)}(\frac{(x-\mu_\xi)^2}{D(\xi)} - \frac{2r(x-\mu_\xi)(y-\mu_\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}} + \frac{(y-\mu_\eta)^2}{D(\eta)})\}$

    Подставим наши параметры:

    $f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-0.5^2)}} \cdot \exp\{\frac{-1}{1.5}(x^2 - xy + y^2\}$

    Откуда очевидно, что $a = \sqrt{(1 - 0.5^2)} = \sqrt{0.75} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ из знаменателя, $b = 1$, т.к. перед xy в степени экспоненты не стоит множителя

    Ответ: C.

20. **Уточнить**

    Заметим, что случайные величины ξ, η стандартные нормальные, так как равны их параметры: $D(\xi) = D(\eta) = 1$ и $\mu_\xi = \mu_\eta = 0$

    Попробуем решить методом исключения:

    A) Хи-квадрат закон распределения случайной величины предполагает случайную величину, равную сумме стандартных нормальных случайных величин.

    η - стандартная нормальная случайная велична, но 2η уже не будет являться стандартной, хотя и останется нормальной случайной величиной $\Rightarrow$ ответ A не подходит

C) D) ответы C и D эквивалентны, но здесь ответ единственный $\Rightarrow$ ответы C и D не подходят

E) ξ - стандартная нормальная случайная велична, но если вычесть из нее некоторую другую случайную величину, то стандартной ξ уже не будет $\Rightarrow$ ответ E не подходит

Остался ответ B) - его и выбираем

Если решать не методом исключения, то ответ B) также окажется верным: $z = (\xi - 0.5\eta, \eta)^T$ второй элемент случайного вектора - стандартная нормальная случайная величина (известно из условия), первый элемент случайного вектора - также нормальная случайная величина, т.к. представляет собой линейную комбинацию нормальных случайных величин

Ответ: B.

21. **Уточнить**

22. $\mathbb{E}(X \mid Y = 0) = 0 \cdot P(X = 0 \mid Y = 0) + 2 \cdot P(X = 2 \mid Y = 0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

    Ответ: A.

23. $P(X = 0 \mid Y < 1) = \frac{P(X=0 \cap Y<1)}{P(Y<1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = 0.25$

    Ответ: B.

24. $Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$

    $E(Y) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0 \Rightarrow E^2(Y) = 0$

    $E(Y) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 0 \Rightarrow E^2(Y) = \frac{2}{3}$

    $Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

    Ответ: A.

25. $Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

    $E(XY) = 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$

    $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

    $E(Y) = 0$ из предыдущего вопроса

    $Cov(XY) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot 0 = -\frac{1}{3}$

    Ответ: B.

26. $P(X < 0.5, Y < 0.5) = \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} 9x^2y^2 \, dx \, dy = \int_0^{0.5} \frac{3}{8} y^2 ,dy = \frac{1}{64}$

    Ответ: D.

27. $f_{x|y=1} = \frac{f_{xy}}{f_y}$

    $f_y = \int_0^1 9x^2y^2 \, dx = 3y^2$

    $f_{x|y=1} = \frac{9x^2y^2}{3y^2} = 3x^2$

    Ответ: A.

28. Пусть X=1 - событие в классе есть отличник

    Сначала выбирается класс (вероятность выбрать любой из классов равна $\frac{1}{3}$), затем в зависимости от класса вероятности будут отличаться, т.к. в них разная концентрация отличников

    $P(X = 1) = 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.3 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} = 0.4$

    Ответ: E.

29. По формуле условной вероятности: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

    Или в другом виде: $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$

    $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.5 - 0.15 = 0.55$

    Ответ: D.

30. Вспомним формулу вероятности для биномиального распределения:

    $P(X >= 2) = C_{10}^{1} \cdot 0.2^{1} \cdot 0.8^{9}$

    Ответ: A.

31. Пусть $W = 1$ - событие "покупатель женщина M - случайная величина, показывающая сумму в чеке. Покупка была совершена на 1234 рубля, то есть $M > 1000$

    $P(W = 1 \mid M > 1000) = \frac{P(W=1 \cup M>1000)}{P(M>1000)}$

    Покупку совершила женщина ($W = 1$) и сумма $M > 1000$:

    $P(W = 1 \cup M > 1000) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$

    Доли женщин и мужчин одинаковы, вычислим $P(M > 1000)$:

    $P(M > 1000) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.45$

    Следовательно:

    $P(W = 1 \mid M > 1000) = \frac{0.3}{0.45} = \frac{2}{3}$

    Ответ: C.

32. Известно, что функция распределения:

    (a) существует для непрерывных случайных величин

    (b) $F_X \in [0; 1]$

    (c) при $x \to -\infty$ $F_X = 0$

    (d) при $x \to +\infty$ $F_X = 1$

    (e) $P(X \in (a; b]) = F_X(b) - F_X(a)$

    Ответ: D.