22.3. Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$

Интегралы

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx \quad \text{и} \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$$

непосредственно вычисляются, если их подынтегральные функции преобразовать по формулам

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin (\alpha + \beta)x + \sin (\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos (\alpha - \beta)x - \cos (\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos (\alpha + \beta)x + \cos (\alpha - \beta)x].$$

Например,

$$\int \sin 2x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

22.4. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям

К таким интегралам относятся, например, интегралы

$$\int e^{\alpha x}\cos \beta x \, dx, \int e^{\alpha x}\sin \beta x \, dx, \int x^n\cos \alpha x \, dx, \int x^n\sin \alpha x \, dx,$$

$$\int x^n e^{\alpha x} \, dx, \int x^n\arcsin x \, dx, \int x^n\arccos x \, dx, \int x^n\operatorname{arctg} x \, dx,$$

$$\int x^n\operatorname{arcctg} x \, dx, \int x^n\ln x \, dx \ (n \text{ — целое неотрицательное}).$$

Все эти интегралы вычисляются с помощью, вообще говоря, последовательного интегрирования по частям. Действительно, имеем

$$I = \int e^{\alpha x}\cos \beta x \, dx = \int e^{\alpha x} \, d\frac{\sin\beta x}{\beta} =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x} \, d\left(-\frac{\cos\beta x}{\beta}\right) =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos \beta x \, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I,$$

откуда

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C. \qquad (22.3)$$

Аналогично интегралу $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ вычисляется интеграл

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2},$$

а через эти два интеграла легко выражаются интегралы

$$\int \operatorname{sh}\alpha x\cos\beta x\,dx, \quad \int \operatorname{sh}\alpha\sin\beta x\,dx,$$
$$\int \operatorname{ch}\alpha x\cos\beta x\,dx, \quad \int \operatorname{ch}\alpha x\sin\beta x\,dx.$$

Впрочем, эти последние четыре интеграла можно вычислить и непосредственно с помощью интегрирования по частям подобно тому, как был вычислен рассмотренный выше интеграл (22.3).

В интегралах $\int x^n\cos\alpha\,dx$, $\int x^n\sin\alpha x\,dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$, положив $u = x^n$ и соответственно $dv = \cos\alpha x\,dx$, $dv = \sin\alpha x\,dx$, $dv = e^{\alpha x}\,dx$, после интегрирования по частям снова придем к интегралу одного из указанных видов, но уже с показателем степени у переменной x, меньшим на единицу. Применяя этот прием n раз, придем к интегралу рассматриваемого типа с $n = 0$, который, очевидно, сразу берется. Например,

$$\int x^2\sin x\,dx = \int x^2\,d(-\cos x) = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx =$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\,d\sin x = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int\sin x\,dx =$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Используя интегралы, рассмотренные выше, можно вычислить и более сложные интегралы. Вычислим, например, интеграл $\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Интегрируя по частям и применяя (22.3), имеем

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \int x^n d\left[\frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}\right] =$$
$$= x^n e^{\alpha x}\frac{\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\int x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx -$$
$$- \frac{n\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\int x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$