

22.3. Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$

Интегралы

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x dx \quad \text{и} \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

непосредственно вычисляются, если их подынтегральные функции преобразовать по формулам

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta)x + \sin (\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta)x - \cos (\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta)x + \cos (\alpha - \beta)x].$$

Например,

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin x) dx = \\ &= -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

22.4. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям

К таким интегралам относятся, например, интегралы

$$\begin{aligned} &\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx, \int x^n \cos \alpha x dx, \int x^n \sin \alpha x dx, \\ &\int x^n e^{\alpha x} dx, \int x^n \arcsin x dx, \int x^n \arccos x dx, \int x^n \operatorname{arctg} x dx, \\ &\int x^n \operatorname{arcctg} x dx, \int x^n \ln x dx \quad (n - \text{целое неотрицательное}). \end{aligned}$$

Все эти интегралы вычисляются с помощью, вообще говоря, последовательного интегрирования по частям. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} I &= \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \int e^{\alpha x} d \frac{\sin \beta x}{\beta} = \\ &= \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} d \left(-\frac{\cos \beta x}{\beta} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \\
&= \frac{e^{\alpha x} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I,
\end{aligned}$$

откуда

$$I = \frac{e^{\alpha x} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C. \quad (22.3)$$

Аналогично интегралу $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$ вычисляется интеграл

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2},$$

а через эти два интеграла легко выражаются интегралы

$$\begin{aligned}
&\int \operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x dx, \int \operatorname{sh} \alpha x \sin \beta x dx, \\
&\int \operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x dx, \int \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x dx.
\end{aligned}$$

Впрочем, эти последние четыре интеграла можно вычислить и непосредственно с помощью интегрирования по частям подобно тому, как был вычислен рассмотренный выше интеграл (22.3).

В интегралах $\int x^n \cos \alpha x dx$, $\int x^n \sin \alpha x dx$, $\int x^n e^{\alpha x} dx$, положив $u = x^n$ и соответственно $dv = \cos \alpha x dx$, $dv = \sin \alpha x dx$, $dv = e^{\alpha x} dx$, после интегрирования по частям снова придем к интегралу одного из указанных видов, но уже с показателем степени у переменной x , меньшим на единицу. Применяя этот прием n раз, придем к интегралу рассматриваемого типа с $n = 0$, который, очевидно, сразу берется. Например,

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x dx &= \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \\
&= -x^2 \cos x + 2 \int x d \sin x = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.
\end{aligned}$$

Используя интегралы, рассмотренные выше, можно вычислить и более сложные интегралы. Вычислим, например, интеграл $\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x dx$. Интегрируя по частям и применяя (22.3), имеем

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \int x^n \left[\frac{e^{\alpha x} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= x^n e^{\alpha x} \frac{\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx - \\
&\quad - \frac{n\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.
\end{aligned}$$