

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Физический факультет

Кафедра информационных технологий
в физических исследованиях

Методы построения спектрограмм сигналов

**Отчёт по научно
исследовательской работе**
студента группы 05192М
Андреева А.Н.

09.04.02 – Информационные
системы и технологии

Научный руководитель:
Профессор каф. ИТФИ,
д.ф.-м.н.
Морозов О.А.

Нижний Новгород, 2019

Оглавление

Введение	3
Постановка задачи	4
Теоретическая часть.....	5
Фурье представление спектра.....	5
Спектральные представления случайных процессов	7
Коррелограммный метод оценки СПМ	9
Авторегрессионный процесс и свойства его спектра.....	11
Определение порядка автокорреляционной модели	17
Multitaper Spectrum Estimation	18
Спектрограммы	21
Практическая часть.....	24
Описание программы.....	24
Алгоритм работы программы	24
Алгоритм определения порядка AR-модели.....	25
Результаты тестирования	25
Разные методы спектрального оценивания.....	27
Сравнение методов	34
Список литературы	37

Введение

Оценка и вычисление спектральной плотности мощности дискретных и случайных процессов (сигналов) чаще всего происходят с помощью алгоритма Быстрого Преобразования Фурье (БПФ) [1]. Такой метод спектрального анализа эффективен в вычислительном плане и подходит для получения допустимых результатов для большого количества различных сигнальных процессов. Тем не менее, вопреки этим двум достоинствам, данный метод все же имеет недостатки и ограничения к применению. Наиболее важное – это ограничение частотного разрешения: способности различать спектральные линии нескольких сигналов. Следующее ограничение связано с тем, что в частотной области возникает «утечка» энергии главного лепестка спектральной линии в боковые лепестки. Следствием этого является наложение и искажение спектральных линий других сигналов, присутствующих в рассматриваемом процессе. В данном случае спектральные линии этих слабых сигналов могут быть и вовсе не видны: они будут маскироваться за боковыми лепестками спектральных линий других более сильных сигналов этого процесса.

Эти ограничения методов, основанных на БПФ, наиболее сильно проявляют себя при исследовании и анализе коротких, конечных сигналов (процессов), с которыми чаще всего сталкиваются на практике.

Существует множество разных подходов к оцениванию спектральной плотности мощности сигнальных процессов, целью разработки которых являлась необходимость ослабить ограничения, связанные с методами, основанными на БПФ. Зачастую о сигнальном процессе известна какая-либо априорная информация. Это позволяет выбрать к рассмотрению модель процесса, которая будет являться его хорошей аппроксимацией. В таком случае можно попытаться получить более точную оценку СПМ.

Постановка задачи

Впускная квалификационная работа посвящена изучению и реализации различных методов построения спектрограмм сигналов. Получение и анализ спектрограмм является важной задачей в цифровой обработке сигналов.

Поставлены следующие задачи:

1. Изучить литературу по теме спектрального оценивания.
2. Реализовать методы спектрального оценивания:
 - a. метод периодограмм (без усреднения).
 - b. метод кореллограмм.
 - c. авторегрессионный метод.
 - d. "Multitaper Spectrum Estimation."
3. Изучить методы построения спектрограмм.
4. Разработать программу, реализующую различные методы построения спектрограмм.

Теоретическая часть

Фурье представление спектра

Приведём определения понятий, связанных со спектральными представлениями детерминированных сигналов непрерывного и дискретного времени [1-3].

Для непрерывных во времени детерминированных сигналов $x(t)$ понятие спектральной плотности амплитуды $X(f)$ связано с парой преобразований Фурье (НВПФ):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df. \quad (2)$$

Энергия E сигнала $x(t)$ определяется следующим соотношением

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) df, \quad (3)$$

где $E(f) = |X(f)|^2$ – спектральная плотность энергии (СПЭ), описывающая распределение энергии сигнала по частоте. Для сигналов с ограниченной мощностью вводят спектральную плотность мощности, описывающую распределение мощности по частоте. В обозначениях функций дискретный аргумент будем заключать в квадратные скобки, а непрерывный аргумент – в круглые скобки [1-3].

В том случае, когда мы имеем только отсчеты (выборки) непрерывной функции времени $x[n] = x(t)|_{t=nT}$, взятые с периодом T , понятие спектральной плотности амплитуды последовательности отсчетов определяется парой дискретно-временного преобразования Фурье (ДВПФ):

$$X_p(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fnT}, \quad (4)$$

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_p(f)e^{j2\pi fnT} df, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (5)$$

Для последовательности $x[n]$ конечной длины в N отсчетов спектральные представления связываются с дискретно - временным рядом Фурье (ДВРФ):

$$X[k] = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (6)$$

$$x[n] = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (7)$$

Обе последовательности $X[k]$ и $x[n]$ периодичны с периодом N и на интервале в один период представляют соответственно совокупность отсчетов спектра $X(f)$ в точках $f_k = k/NT$ и отсчетов сигнала $x(t)$ в точках $t = nT$.

Данные соотношения также называются парой дискретного преобразования Фурье (ДПФ), их отличия от традиционно используемых, вызваны наличием множителей T и $1/T$ и связаны с желанием обеспечить корректность масштабов при вычислении энергии и мощности [1-3].

Теорема об энергии для ДПФ имеет следующий вид:

$$E = T \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2. \quad (8)$$

Поэтому спектральная плотность энергии будет иметь вид:

$$E[k] = |X[k]|^2 = \left| T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right|^2, \quad (9)$$

а выражение для спектральной плотности мощности (СПМ) примет форму:

$$P[k] = \frac{1}{NT} E[k] = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right|^2, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (9)$$

Таким образом, ДПФ преобразует N отсчетов $x[n]$ непрерывного во времени сигнала $x(t)$ со спектральной плотностью $X(f)$ в N отсчетов $X[k]$ его спектральной плотности. Для получения большего количества отсчетов

спектра $L > N$, т.е. для частот $f_k = k/L$, нужно доопределить начальную последовательность $x[n]$, известную на интервале $0 \leq n \leq (N-1)$, необходимым числом нулевых отсчетов, полагая $x[n] = 0$, $N \leq n \leq (L-1)$. Алгоритм ДПФ, реализуемый одним из вариантов БПФ, является основным при реализации спектрального анализа сигналов на основе цифровых вычислительных устройств [1-3].

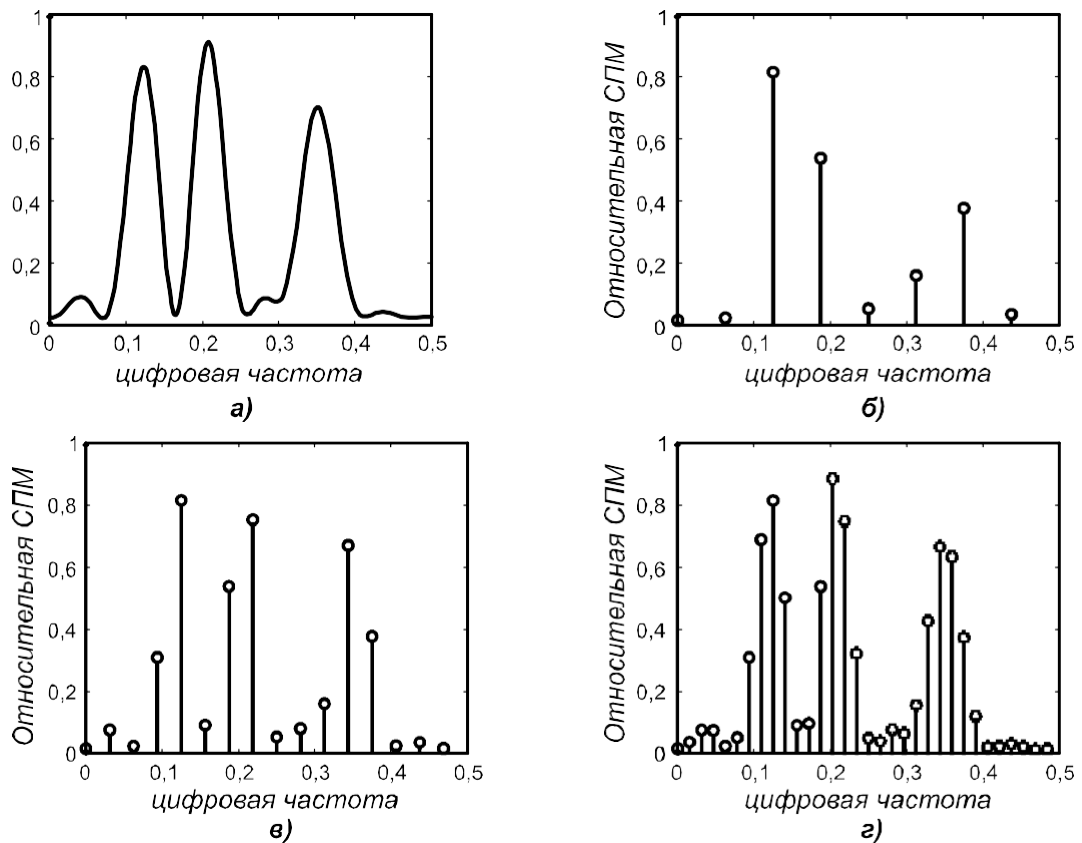


Рис. 1. Интерполяция за счет дополнения нулями: а - модуль ДВПФ 16-точечной записи данных, содержащих три синусоиды; б - модуль ДПФ той же последовательности данных без дополнения нулями (неопределенности не разрешены); в - модуль ДПФ той же последовательности после двукратного увеличения ее отсчетов за счет дополнения нулями (неопределенности разрешены, так как различимы все три синусоиды); г - модуль ДПФ той же последовательности данных после четырехкратного увеличения числа ее отсчетов за счет дополнения нулями [1].

Рис.1 показывает, какое влияние окажет дополнение нулями исходной 16-точечной последовательности данных, содержащих три синусоиды, с соответствующим увеличением объема ДПФ на воспроизведение ее спектра.

Спектральные представления случайных процессов

Дискретный случайный процесс можно рассматривать как некую совокупность или ансамбль действительных или комплексных дискретных временных последовательностей $\{x_i[n]\}$, где $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, каждую из

которых можно было бы рассматривать как результат проведения некоторого эксперимента. При фиксации временного индекса n в сечениях случайного процесса образуются случайные величины, при задании распределений плотностей вероятностей которых можно определить соответствующие моменты распределений [1-3].

Среднее значение (момент 1-го порядка) определяется следующим выражением

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_i[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x, n) dx. \quad (10)$$

Автокорреляция случайного процесса в два различных момента времени n_1 и n_2 определяется выражением:

$$r_{xx}[n_1, n_2] = \langle x[n_1] x^*[n_2] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* p_2(x_1, n_1, x_2, n_2) dx_1 dx_2. \quad (11)$$

где * - знак комплексного сопряжения [1].

Автокорреляция центрированного случайного процесса, т.е. с удаленным средним значением, называется автоковариацией и имеет вид:

$$\begin{aligned} c_{xx}[n_1, n_2] &= \langle (x[n_1] - \langle x[n_1] \rangle)(x^*[n_2] - \langle x^*[n_2] \rangle) \rangle = \\ &= r_{xx}[n_1, n_2] - \langle x[n_1] \rangle \langle x^*[n_2] \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его среднее значение не зависит от времени, а автокорреляционная последовательность (АКП) зависит только от разности индексов времени $m = n_1 - n_2$ [1].

Спектральная плотность мощности (СПМ) стационарного случайного процесса определяется как дискретно - временное преобразование Фурье автокорреляционной последовательности и имеет вид:

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] e^{-j2\pi f m T}. \quad (13)$$

СПМ дискретного случайного процесса периодически (с периодом $1/T$ Гц) размножает по оси частот СПМ исходного непрерывного во времени процесса в предположении, что она локализована в интервале частот $-1/2T \leq f \leq 1/2T$ [1-3].

Обратное ДВПФ имеет вид:

$$r_{xx}[m] = \int_{-1/2T}^{1/2T} P_{xx}(f) e^{j2\pi f m T} df, \quad (14)$$

поэтому при $m = 0$ получается:

$$r_{xx}[0] = \langle |x[n]|^2 \rangle = \int_{-1/2T}^{1/2T} P_{xx}(f) df. \quad (15)$$

Последнее соотношение оправдывает трактовку $P_{xx}(f)$ как распределение средней мощности процесса по частоте. Представленная пара преобразований Фурье называется соотношениями Винера-Хинчина для случая дискретного времени. Поскольку $r_{xx}[-m] = r_{xx}^*[m]$, то СПМ является действительной и неотрицательной функцией. Если АКП – действительная функция, то $r_{xx}[-m] = r_{xx}[m]$, и СПМ можно представить в форме:

$$P_{xx}(f) = 2T \sum_{m=0}^{\infty} r_{xx}[m] \cos(2\pi f m T), \quad (16)$$

а это означает четность СПМ как функции частоты, т.е. $P_{xx}(-f) = P_{xx}(f)$ [1-3].

Коррелограммный метод оценки СПМ

Ознакомимся подробнее с практической реализацией коррелограммного метода оценивания СПМ. Автокорреляционная последовательность $r_{xx}[m]$ эргодического процесса, как предел среднего по времени, определяется следующим соотношением:

$$r_{xx}[m] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n+m] x^*[n]. \quad (17)$$

На практике эта последовательность обычно не известна и поэтому должна оцениваться по конечной последовательности уже имеющихся данных [1-3].

Допустим, что мы располагаем N отсчетами данных $x[n]$: $n = 0, \dots, N-1$, тогда для оценки АКП можно использовать следующее соотношение:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n], \quad (18)$$

применимое при $0 \leq m \leq N-1$.

Если индекс m имеет отрицательные значения, то значения АКП получаются из свойства сопряженной симметрии $\hat{r}_{xx}[-m] = \hat{r}^*[m]$. Таким образом, $(2N-1)$ значений АКП могут быть оценены по N отсчетам данных. Дискретная последовательность $r_{xx}[m]$ является несмещенной оценкой истинной АКП, поскольку

$$\langle \hat{r}_{xx}[m] \rangle = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} \langle x[n+m]x^*[n] \rangle = r_{xx}[m]. \quad (19)$$

При увеличении N значение дисперсии оценки $r_{xx}[m]$ стремится к нулю, поэтому это статистически состоятельная оценка АКП [1-3].

Коррелограммный метод оценивания СПМ является подстановкой в соотношение (13) конечной последовательности значений оценки автокорреляции (коррелограммы) на место бесконечной последовательности неизвестных истинных значений АКП. Так, при подстановке несмещенной оценки АКП $r_{xx}[m]$ с максимальными значениями временного сдвига $\pm L$ получается оценка СПМ вида:

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \hat{r}_{xx}[m] e^{-j2\pi f m T}, \quad -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T}. \quad (20)$$

Максимальный индекс временного сдвига L обычно ограничивается величиной $L \approx N/10$. Причина выбора такого максимального значения – стремление устранить большие значения дисперсии, связанные с оценками автокорреляции при больших временных сдвигах [1-3].

Среднее значение оценки $P_{xx}(f)$ будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}_{xx}(f) \rangle &= T \sum_{m=-L}^L \langle \hat{r}_{xx}[m] \rangle e^{-j2\pi f m T} = T \sum_{m=-L}^L r_{xx}[m] e^{-j2\pi f m T} \\ &= T \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m] r_{xx}[m] e^{-j2\pi f m T}, \end{aligned} \quad (21)$$

где прямоугольная функция (окно) единичной амплитуды задается, как

$$w[m] = \begin{cases} 1, & -L \leq m \leq L, \\ 0, & m < -L; m > L. \end{cases} \quad (22)$$

Таким образом, среднее значение оценки $P_{xx}(f)$ отличается от истинного спектра $P_{xx}(f)$, поскольку это свертка истинного спектра и спектра прямоугольного окна [1-3].

Авторегрессионный процесс и свойства его спектра

АР-модель применяется для спектрального оценивания, при необходимости получить спектры с острыми пиками, обычно это и связывается с высоким частотным разрешением. Также, в отличие от других подходов к спектральному оцениваю, оценки АР-параметров получаются из решения системы линейных уравнений. АР-процесс описывается следующим линейным разностным уравнением с комплексными коэффициентами:

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a[k]x[n-k] + u[n], \quad (23)$$

где $x[n]$ – АР-последовательность на выходе каузального фильтра, формирующего наблюдаемые данные, параметры $a[k]$ характеризуют авторегрессионную часть этой модели порядка p , $u[n]$ – входная возбуждающая последовательность, соответствующая белому шуму с нулевым средним и дисперсией ρ_w [1-3].

Спектральная плотность мощности АР-процесса:

$$P_{AP}(f) = \frac{T\rho_w}{|A(f)|^2} = \frac{T\rho_w}{\mathbf{e}_p^H(f) \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{e}_p(f)}, \quad (24)$$

где полином $A(f) = 1 + \sum_{k=1}^p a(k)\exp(-j2\pi f kT)$, вектор комплексных синусоид $\mathbf{e}_p(f)$ и вектор параметров \mathbf{a} имеют следующий вид:

$$\mathbf{e}_p(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi f T) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi f p T) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix}, \quad (25)$$

а надстрочный символ «Н» означает эрмитово сопряжение (или эрмитово транспонирование) вектора, которое получается в результате

комплексного сопряжения его элементов с последующей их транспозицией, т.е. образованием вектор-строки [1-3].

Уравнение, связывающее автокорреляционную последовательность с параметрами автокорреляционной модели имеет вид:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k], & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[-k] + \rho_w, & m = 0 \\ r_{xx}^*[-m], & m < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Это выражение можно записать для $p+1$ значений индекса временного сдвига $0 \leq m \leq p$ и затем представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[-p+1] \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_w \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Таким образом, при заданной автокорреляционной последовательности для $0 \leq m \leq p$, АР-параметры находятся в результате решения системы линейных уравнений, которая называется системой уравнений Юла-Уолкера для АР-процесса. Автокорреляционная матрица теплицева и эрмитова, поскольку $r_{xx}^*[k] = r_{xx}[-k]$. Очевидно, что для СПМ АР-процесса справедливо следующее эквивалентное выражение:

$$P_{AP}(f) = \frac{T\rho_w}{|A(f)|^2} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k] \exp(-j2\pi f k T). \quad (27)$$

Отметим, что значения автокорреляции, соответствующие индексам временного сдвига от 0 до p , позволяют определить из уравнения Юла-Уолкера дисперсию белого шума ρ_w и АР - параметры $a[1], a[2], \dots, a[p]$, а затем по данной формуле вычислить АР СПМ. Можно также рассчитать значения автокорреляции для $m > p$ по следующему соотношению:

$$r_{xx}[m] = - \sum_{k=1}^p a[k] r_{xx}[m - k], \quad (28)$$

А далее воспользоваться второй частью (27) для вычисления АР СПМ, хотя это может быть не всегда эффективным на практике. Здесь уместно сравнить АР СПМ с оценкой СПМ, полученной классическим коррелограммным методом. Напомним, что этот метод позволяет по $p + 1$ значениям автокорреляции получить оценку СПМ в виде

$$P_{\text{кор}}(f) = T \sum_{k=-p}^p r_{xx}[k] \exp(-j2\pi f k T). \quad (29)$$

Можно заметить, что в коррелограммном методе значения АКП вне интервала суммирования, то есть для $|k| > p$, полагаются равными нулю, в то время как для АР-оценки они экстраполируются в соответствие с (28). Этот факт отображен на Рис. 2. Благодаря применению такой ненулевой экстраполяции АКП при вычислении АР СПМ с помощью (27) можно объяснить то высокое разрешение, которое характерно для оценок АР СПМ. Поскольку при получении оценок АР СПМ не используется обработка АКП с помощью функции окна, в них не встречаются эффекты, которые проявляются наличием боковых лепестков и всегда присутствуют в классических спектральных оценках [1-3].

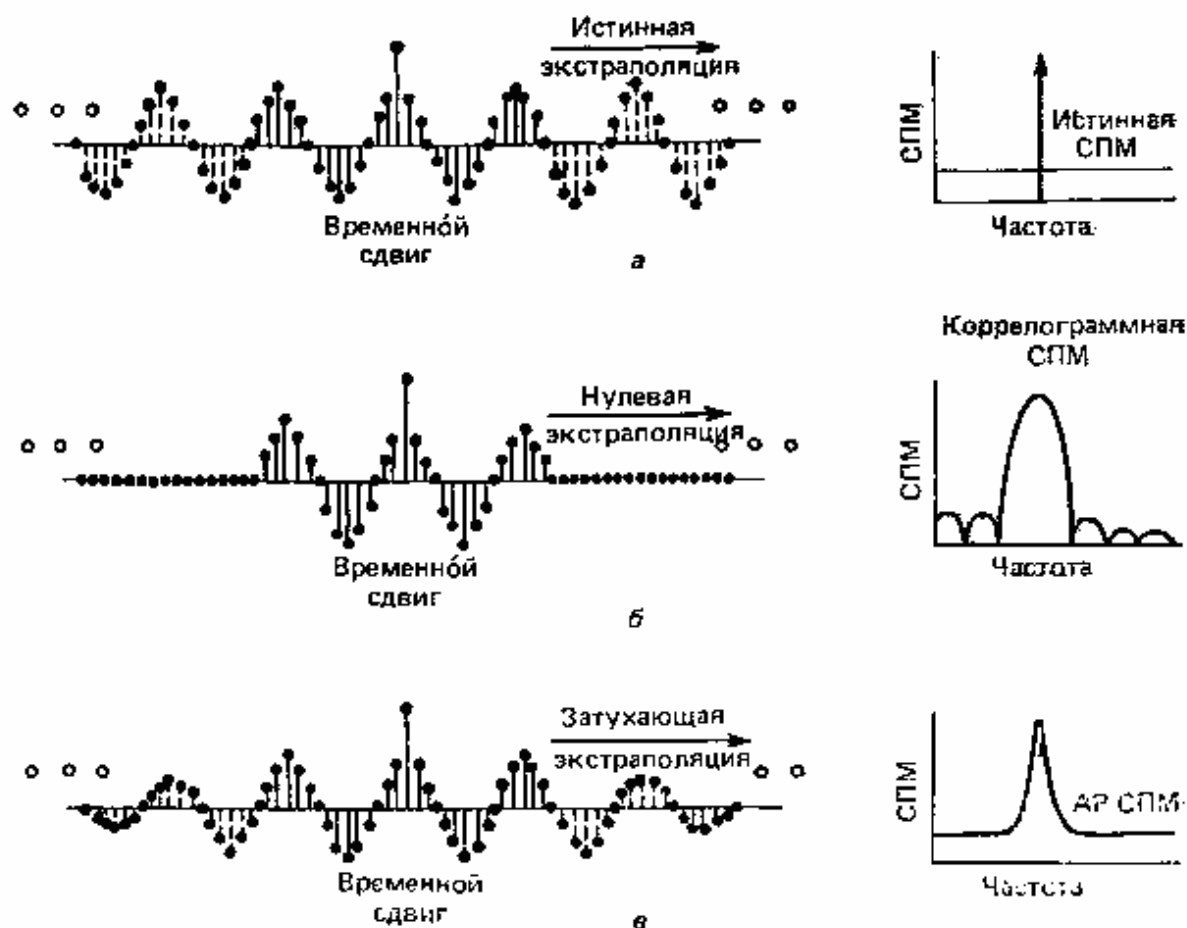


Рис.2. Экстраполяция автокорреляционной последовательности (АКП): а— исходная бесконечная АКП и истинный спектр процесса, состоящего из одной действительной синусоиды в белом шуме; б— нулевая экстраполяция АКП подразумеваемая при использовании коррелограммного метода оценивания СПМ, и соответствующая спектральная оценка; в— экстраполяция при использовании авторегрессионного метода оценивания СПМ и соответствующая спектральная оценка [1].

Метод Берга определения коэффициентов авторегрессионной модели.

Наибольшее внимание специалистов в практическом применении нашли АР-модели, поскольку для них характерны спектры с острыми пиками, что часто связывается с высоким частотным разрешением. Разработан целый набор эффективных алгоритмов нахождения оценок параметров АР-модели, в числе которых алгоритм Берга.

Алгоритм Берга основан на оценивании АР-параметров по последовательности коэффициентов отражения. Достоинства данного метода: высокая разрешающая способность при анализе коротких сигналов, гарантированная стабильность рассчитанного формирующего фильтра.

Метод Берга относят к параметрическим методам, для применения которых, необходимо, исходя из имеющихся априорных данных, построить математическую сигнальную модель. Задачей параметрических методов является оценка неизвестных параметров математической сигнальной модели.

Рассмотрим частный случай параметрической модели: авторегрессионная модель.

АР-процесс описывается следующим линейным разностным уравнением с комплексными коэффициентами:

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a[k]x[n-k] + u[n], \quad (23)$$

где $x[n]$ – АР-последовательность на выходе каузального фильтра, формирующего наблюдаемые данные, параметры $a[k]$ характеризуют авторегрессионную часть этой модели порядка p , $u[n]$ – входная возбуждающая последовательность, соответствующая белому шуму с нулевым средним и дисперсией ρ_w [1-3].

Авторегрессионная модель СПМ порядка p имеет вид:

$$P_{AP}(f) = \frac{T\rho_w}{|A(f)|^2} \quad (24)$$

где полином $A(f) = 1 + \sum_{k=1}^p a(k)\exp(-j2\pi f k T)$, $a(k)$ – вектор коэффициентов авторегрессии.

Метод расчета коэффициентов авторегрессии Берга основан на вычислении коэффициентов АР последовательно, начиная с модели первого порядка, и увеличивая порядок модели на каждой итерации, вплоть до максимального заданного порядка. Сначала вычисляются коэффициенты отражения:

$$K_k = \frac{-2 \sum_{n=p}^{n-1} e_{p-1}^f[n] * (e_{p-1}^b[n-1])^*}{\sum_{n=p}^{n-1} (|e_{p-1}^f[n]|^2 + |e_{p-1}^b[n-1]|^2)}, \quad (23)$$

где $p = 1 \dots N$.

Эти коэффициенты получаются в результате минимизации ошибок линейного предсказания вперед и назад, определяемых по методу наименьших квадратов.

$$\begin{aligned} e_p^f[n] &= x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k] \times x[n-k], \\ e_p^b[n] &= x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k] \times x[n-k]. \end{aligned} \quad (23)$$

где: x – входной сигнал,

a – искомый вектор коэффициентов авторегрессии,

e^f, e^b – коэффициенты предсказания вперед и назад.

Для получения АР-коэффициента для модели следующего порядка используется рекурсивный алгоритм Левинсона

Согласно этому алгоритму систему уравнений решают для последовательно увеличивающихся порядков АР-модели $m = 1, 2, \dots, p$. Так рекурсивное решение уравнений Юла-Уолкера методом Левинсона связывает АР-параметры порядка m с параметрами порядка $(m-1)$ соотношением:

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_k \times a_{m-1}^*[k-1] \quad (23)$$

где полагается $a_{m-1}[0] = 1$, а $K_1 = a_1[1]$. Коэффициент $K_p = a_p[p]$ – коэффициент отражения.

Рекурсивная процедура повторяется до нахождения всех АР-коэффициентов. В итоге, используя вектор авторегрессии, строится искомая СПМ процесса.

К недостаткам метода Берга следует отнести то, что он дает точного ответа на вопрос, каковы величины амплитуд и фаз обнаруживаемых гармоник, а также необходимость предварительного подбора порядка модели авторегрессии. Метод Берга не так хорошо работает с простыми гармоническими сигналами, поэтому желательно «зашумлять» исходный синусоидальный ряд. Преимущества метода будут очевидны при анализе сложных и сильно зашумленных рядов.

Определение порядка автокорреляционной модели

Оценка АКП имеет вид:

$$r_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n], \quad (30)$$
$$0 \leq n \leq N-m-1, 0 \leq m \leq N$$

где N - количество отсчетов рассматриваемого сигнала.

Автокорреляционная матрица процесса имеет следующий вид:

$$R_{xx} = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[-N] \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ r_{xx}[N] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \quad (31)$$

Сингулярное разложение:

Сингулярное разложение матрицы R позволяет предельно разделить сингулярные числа этой матрицы, а также её левые и правые сингулярные векторы:

1) левые сингулярные векторы матрицы R - это собственные векторы матрицы RR^* ;

2) правые сингулярные векторы матрицы R - это собственные векторы матрицы R^*R .

Сингулярным разложением матрицы R порядка $m \times n$ будет являться разложение следующего вида:

$$R = UEV^*, \quad (32)$$

где E - матрица размерности $m \times n$ с неотрицательными элементами, а элементы, лежащие на главной диагонали этой матрицы - это сингулярные числа (а все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю), а матрицы U (порядка m) и V (порядка n) являются унитарными (результатом умножения их на эрмитово сопряжённую будет являться единичная матрица), состоящие из левых и правых сингулярных векторов соответственно (V^* - это сопряжённо-транспонированная матрица к V).

AR- модель:

Авторегрессионная (AR-) модель (autoregressive model) – модель временных рядов, в которой значения временного ряда в данный момент времени линейно зависят от предыдущих значений этого же временного ряда. Авторегрессионный процесс порядка P (AR(P)-процесс) описывается следующим выражением:

$$x[n] = - \sum_{i=1}^P a[i]x[n-i], \quad (33)$$

где a_i – коэффициенты AR-модели, P - порядок модели.

Коэффициенты AR-модели находятся из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) Юла-Уокера:

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[-N] \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ r_{xx}[N] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Порядок модели P должен равняться рангу автокорреляционной матрицы R_{xx} .

Чтобы найти ранг матрицы, нужно:

- 1) Привести матрицу к собственному базису,
- 2) Найти собственные значения матрицы.

Количество собственных значений, неравных нулю, будет являться рангом данной матрицы.

Теоретическая зависимость порядка модели P от количества синусоид N : в общем случае $P = 2N$ (а при наличии шума $P = 2N + 1$).

Multitaper Spectrum Estimation

Наиболее часто применяемым методом для получения спектральной плотности мощности $P(f)$ временного ряда $x(t)$ конечной длины N является вычисление преобразования Фурье. Надежность этого метода значительно понижается из-за дисперсии оценки $P(f)$ на каждой частоте (т.е. спектр обычно выглядит зашумлённым) и утечки энергии по частотам. Утечка возникает по той причине, что мы берем сигнал конечной длины, что соответствует умножению сигнала на прямоугольное окно. В результате преобразования Фурье от прямоугольного окна возникает несколько боковых лепестков, т.е. энергия главного лепестка спектральной линии «утекает» в боковые лепестки. Чтобы уменьшить утечки в частотной области, будет правильно умножать сигнал во временной области с непрямоугольным окном, преобразование Фурье от которого характеризуется меньшими затратами энергии на боковые лепестки.

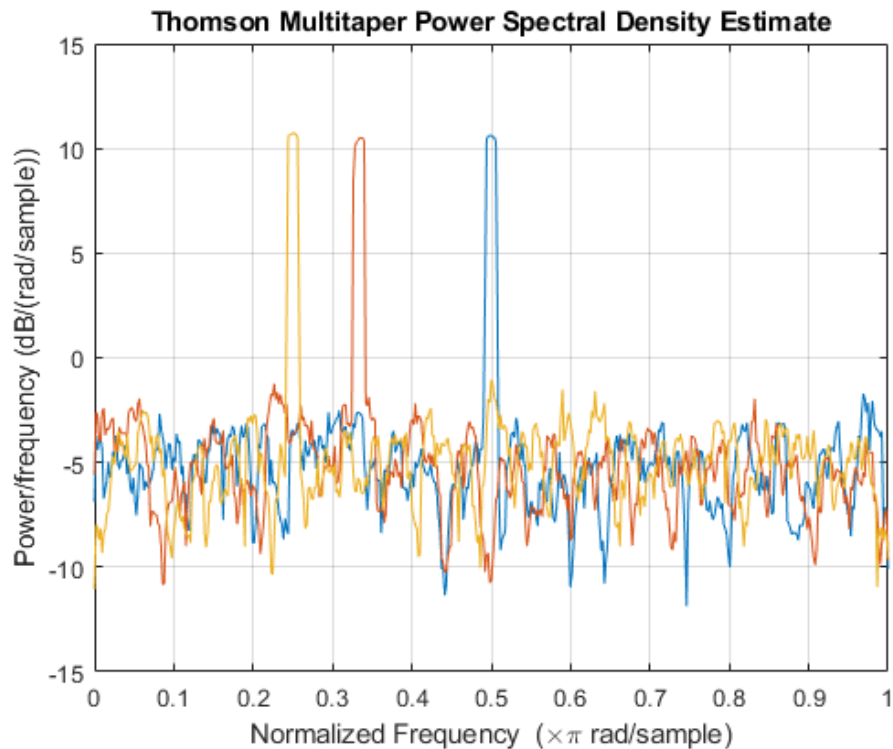


Рис. 5. СПМ сигнала (синусоиды с частотами $\pi/2$, $\pi/3$, and $\pi/4$ rad/sample) вычисленная с помощью метода Thomson's multitaper [12].

Подход Multitaper, описанный David J. Thomson (1982), улучшает оценку СПМ, устраняя утечки энергии в боковые лепестки и дисперсию оценки СПМ. Идея подхода состоит в следующем: вместо того, чтобы использовать одно окно, лучше использовать несколько специальных.

При таком подходе каждое окно v_k из набора окон немного отличается от остальных и уменьшает утечки энергии по частотам.

Многослойный спектр получается путем усреднения нескольких оконных БПФ, сгенерированных с помощью набора сужающихся окон ортогональных данных, известных как дискретные вытянутые сфероидальные последовательности (DPSS - discrete prolate spheroidal sequences) или функции Слепяна (Рис. 6) [11].

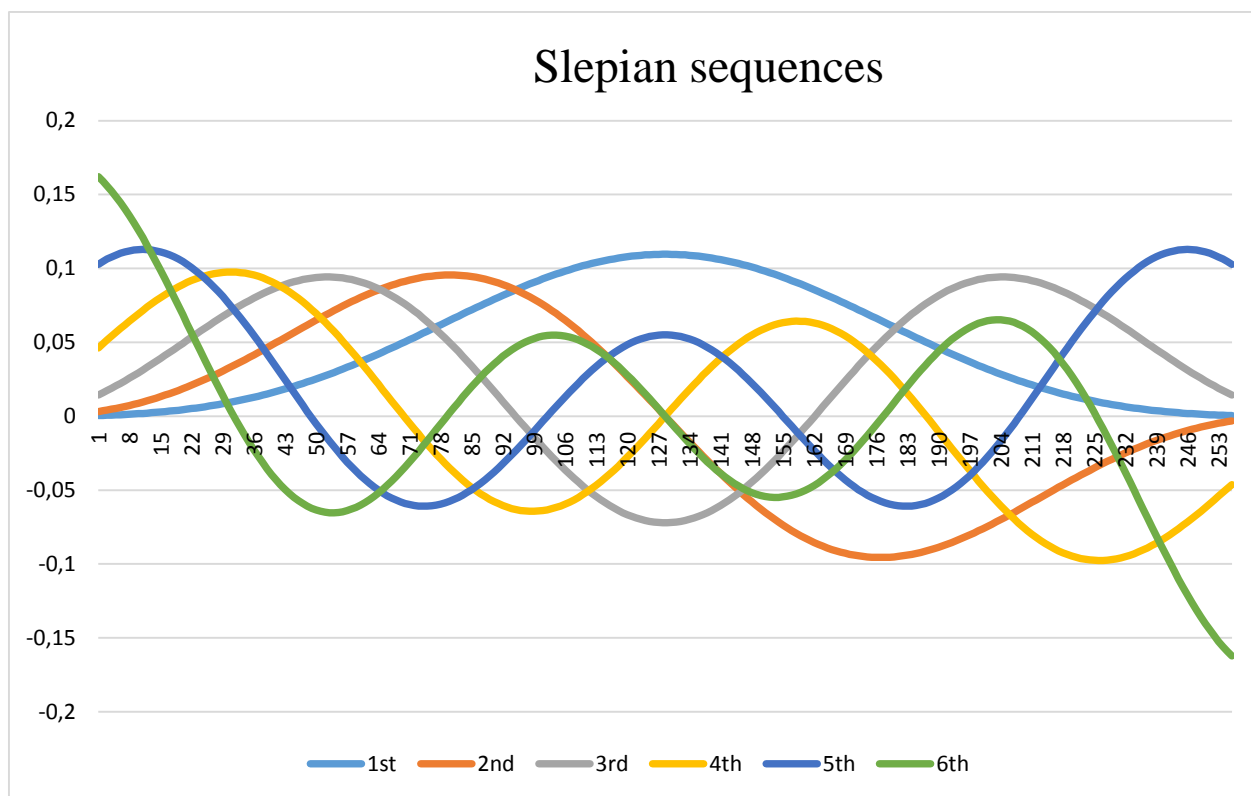


Рис. 6. Последовательности Слепяна.

Функции Слепяна, в дискретном варианте – последовательности, впервые были введены как функции, обладающие максимальной концентрацией энергии в некотором наперед заданном частотном диапазоне. Последовательности Слепяна получили широкое распространение в качестве оптимальных «окон» при спектральном анализе, а также при синтезе цифровых фильтров с высокими избирательными способностями.

Спектр окна с несколькими «изгибами» обеспечивает не особо более высокое разрешение по частоте, чем спектр окна с одним. Фактически, спектральные пики, вытекающие из алгоритма, имеют форму огибающей с плоским верхом, что затрудняет определение центральной частоты.

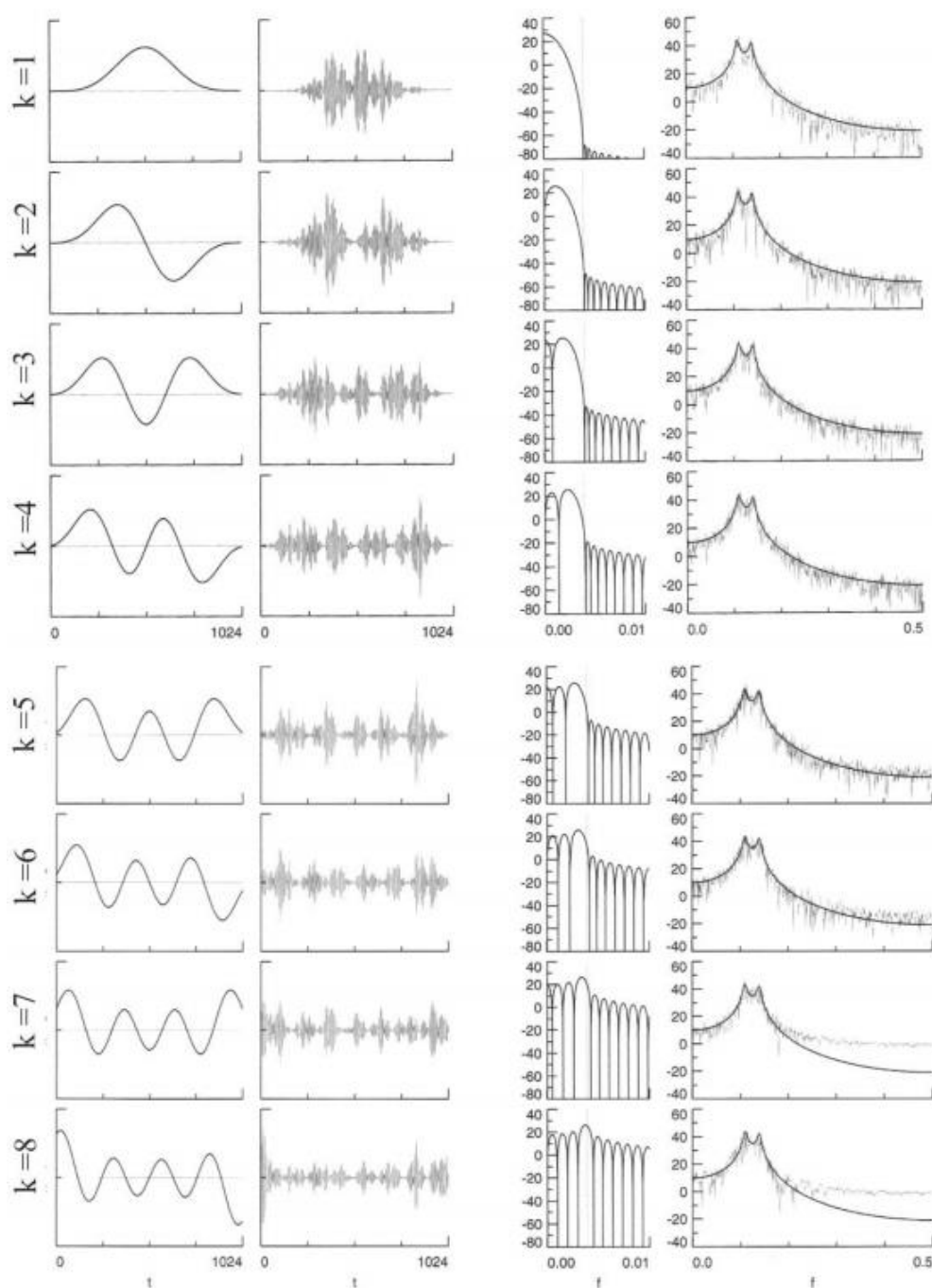


Рис.7. Пример влияния окон. Левая колонна: 8 discrete prolate spheroidal tapers. Вторая колонна: сигнал, умноженный на эти окна. Третья колонна: спектры окон. Правая колонна: СПМ (черная линия – теоретическая СПМ, серая – СПМ по методу Multitaper) [5].

Спектрограммы

На практике часто возникает необходимость проследить, как спектр сигнального процесса может изменяться со временем. FFT-анализаторы (FFT (fast Fourier transform) – алгоритм быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье) помогают сделать это в режиме реального времени

при воспроизведении сигнала. Обычно в ряде случаев оказывается удобной визуализация изменения спектра во всём отрывке сигнала сразу. Подобное представление сигнала именуется спектрограммой. Обычно для того, чтобы её вычислить применяется оконное преобразование Фурье: спектр вычисляется от последовательных окон сигнала (Рис.8), а в дальнейшем каждый из этих вычисленных спектров образует столбец в спектрограмме [9].

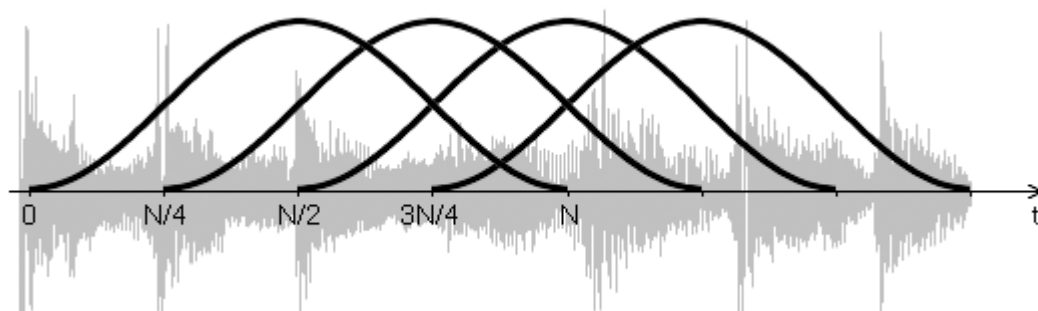


Рис. 8. Вычисление спектрограммы сигнала [9].

Самым распространенным и удобным представлением спектрограммы является цветная двумерная диаграмма: на горизонтальной оси которой представлено время, а по вертикальной оси — частота; третье измерение с указанием амплитуды на определенной частоте в конкретный момент времени представлено интенсивностью или цветом каждой точки изображения [9].

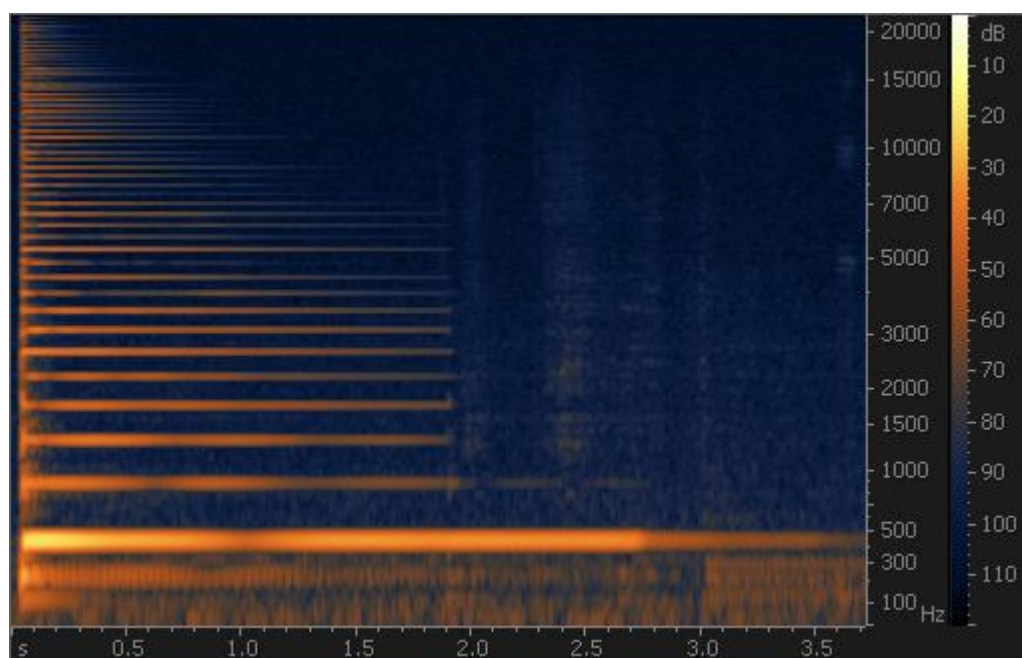


Рис.9. Спектрограмма гитарной ноты [9].

На спектрограмме гитарной ноты на Рис. 9 видно, как развивается звучание: оно начинается резко и продолжается в виде гармоник, которые кратны по частоте основному тону 440 Гц. Можно увидеть, что амплитуда у верхних гармоник меньше, и они затухают быстрее нижних. Также на данной спектрограмме прослеживается шум записи – однородный фон тёмно-синего цвета. Правее представлена шкала соответствия цветов и уровней сигнала (в децибелах ниже нуля) [9].

Спектрогра́мма (соногра́мма) — изображение, показывающее зависимость спектральной плотности мощности сигнала от времени. Спектрограммы применяются для идентификации речи, анализа звуков животных, в различных областях музыки, радио- и гидролокации, обработке речи, сейсмологии и в других областях [10].

Практическая часть

Описание программы

В ходе работы была написана программа, реализующая методы построения спектрограмм: метод периодограмм (без усреднения), метод коррелограмм, авторегрессионный метод и метод “Multitaper Spectrum Estimation.”

На Рис. 10. Представлен интерфейс программы:

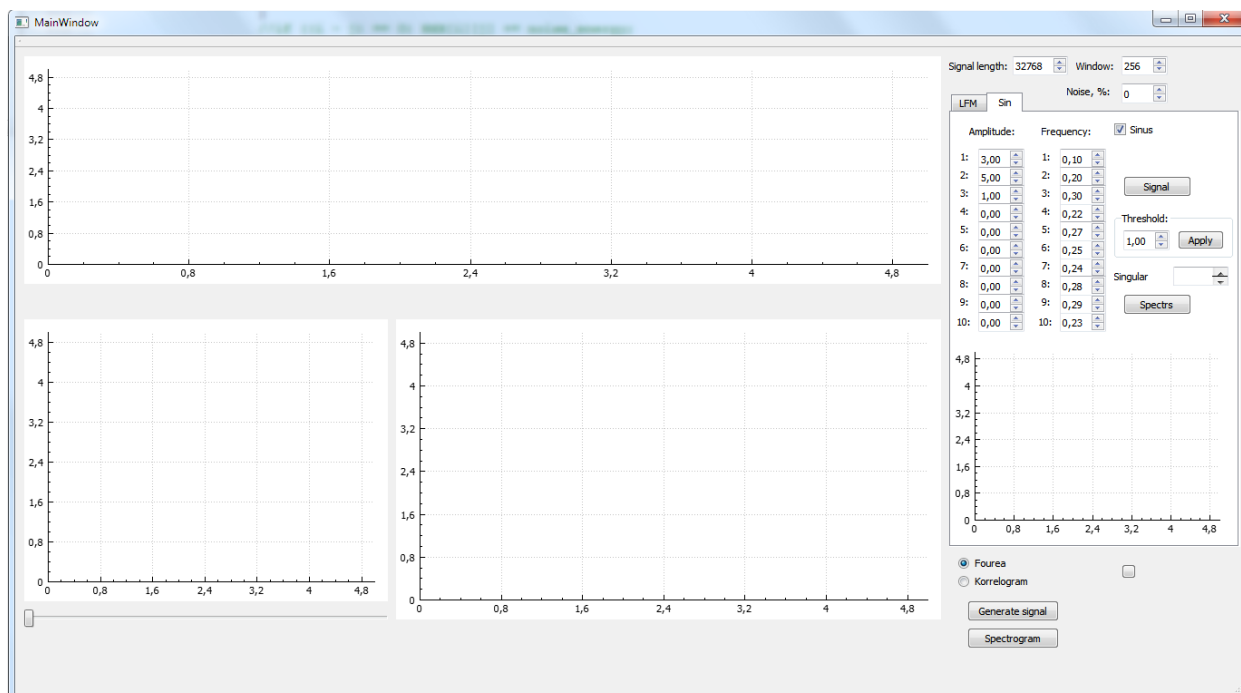


Рис. 10. Интерфейс программы.

Здесь задаются начальные данные: выбор типа сигнала (ЛЧМ модуляция либо сумма синусоид), параметры исследуемого сигнала (амплитуда, несущая частота, девиация частоты), его длительность, размер окон, на которые разбивается сигнал. После этого выбирается метод построения спектра.

После выбора метода исследования при нажатии на кнопку «Generate signal» генерируется сигнал. Этот сигнал выводится на экран. Также программа позволяет выделить одно из окон и отображает спектр сигнала на этом окне. При нажатии на кнопку «Spectrogram» отображается спектрограмма, основанная на вычисленных спектрах.

Алгоритм работы программы

1. Для тестирования методов оценивая в программе, учитывая начальные данные, моделируется периодический ЛЧМ-сигнал, либо сигнал вида:

Ы

$$s(t) = \sum_{i=1}^L A_i \sin(2\pi f_i t), \quad (33)$$

где A_i – амплитуды сигнала, f_i – частоты сигнала, L – количество отсчетов сигнала. Все параметры задаются с экрана.

2. Этот Сигнал разбивается на окна заданного размера.
3. В каждом окне исходного сигнала применяется выбранный метод, для вычисления спектра.
4. Каждый из этих спектров образует столбец в спектрограмме.

Алгоритм определения порядка AR-модели

1. Оцениваем АКП сигнала (33) по формуле (30).
2. Строим АК матрицу по формуле (31).
3. Находим сингулярные числа матрицы с помощью сингулярного разложения и отображаем на экране график зависимости этих чисел от их количества.
4. Находим порядок AR-модели, отделив порогом на графике сингулярных чисел нулевые компоненты от ненулевых. Порог задается с экрана, как 1% от максимального значения по оси ординат.
5. Строим зависимость порядка модели от количества синусоид, выполняя последовательно пункты.

Результаты тестирования

На Рис.11. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы ЛЧМ-сигнала, используя метод периодограмм (без усреднения).

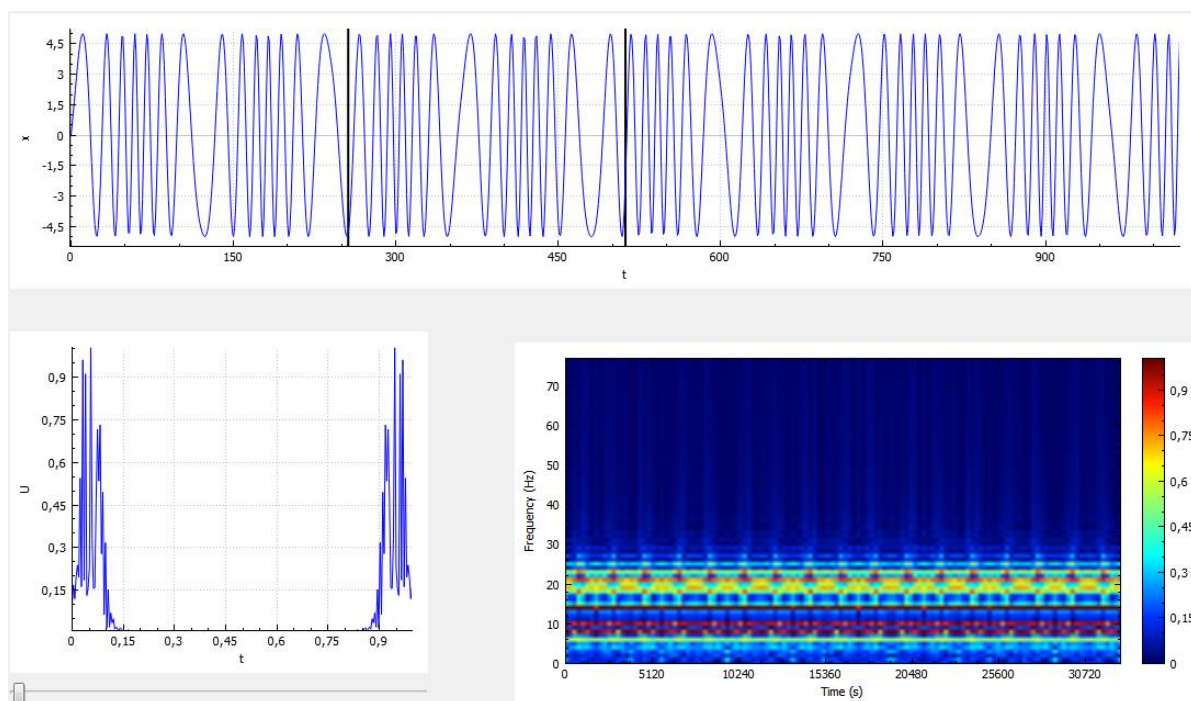


Рис.11. Спектрограмма, полученная методом периодограмм (без усреднения)

На Рис.12. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы ЛЧМ-сигнала, рассчитанных методом коррелограмм при 16 корреляционных отсчётах.

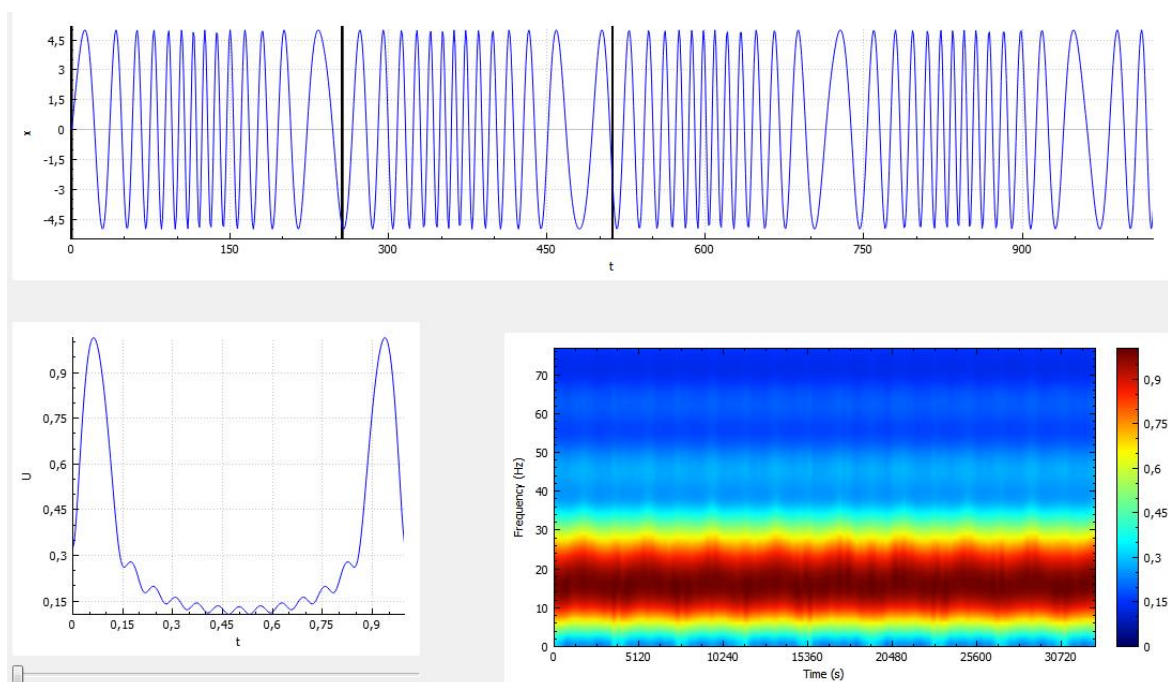


Рис.12. Спектрограмма, полученная методом коррелограмм при 16 сдвигах.

На Рис.13. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы ЛЧМ-сигнала, рассчитанных методом коррелограмм при 32 корреляционных отсчётах.

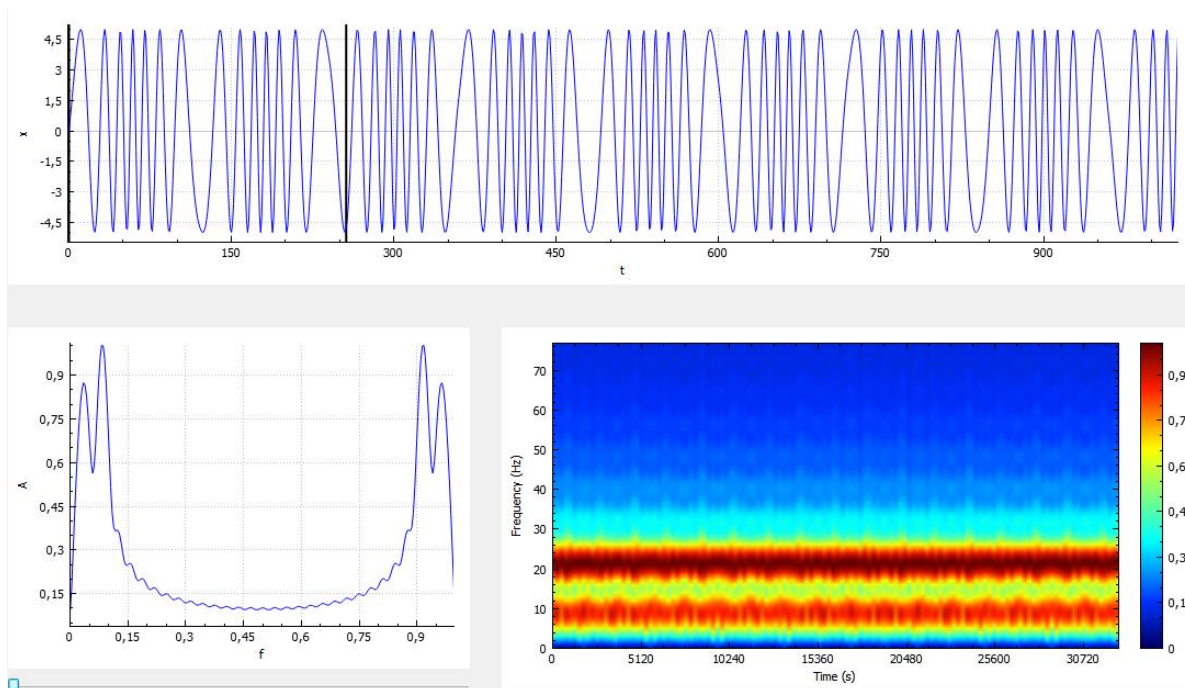


Рис.13. Спектрограмма, полученная методом коррелограмм при 32 сдвигах.

Таким образом, видно, что характерный вид спектра зависит от количества корреляционных отсчетов. Так же можно заметить, что вид спектрограммы зависит от метода получения спектра сигнала.

Разные методы спектрального оценивания

Далее приводится сравнение методов построения спектрограмм на примере сигнала (33). Разными методами находится спектры и на их основе строятся спектрограммы одного и того же сигнала. Сначала исследуется сигнал без шума, потом на него накладывается аддитивный белый гауссов шум (5%).

На Рис.14. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) без шума, используя метод периодограмм (без усреднения).

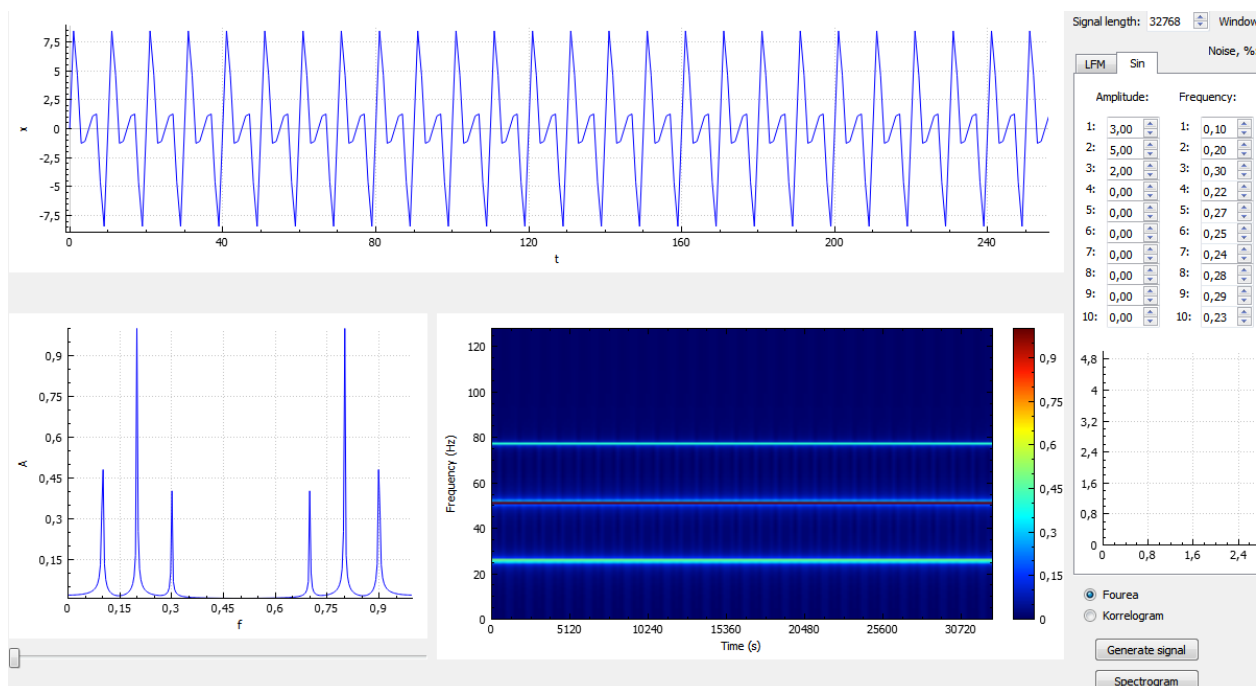


Рис.14. Спектрограмма, полученная методом периодограмм (без усреднения).
Сигнал без шума.

На Рис.15. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) без шума, рассчитанных методом коррелограмм при 32 корреляционных отсчётах.

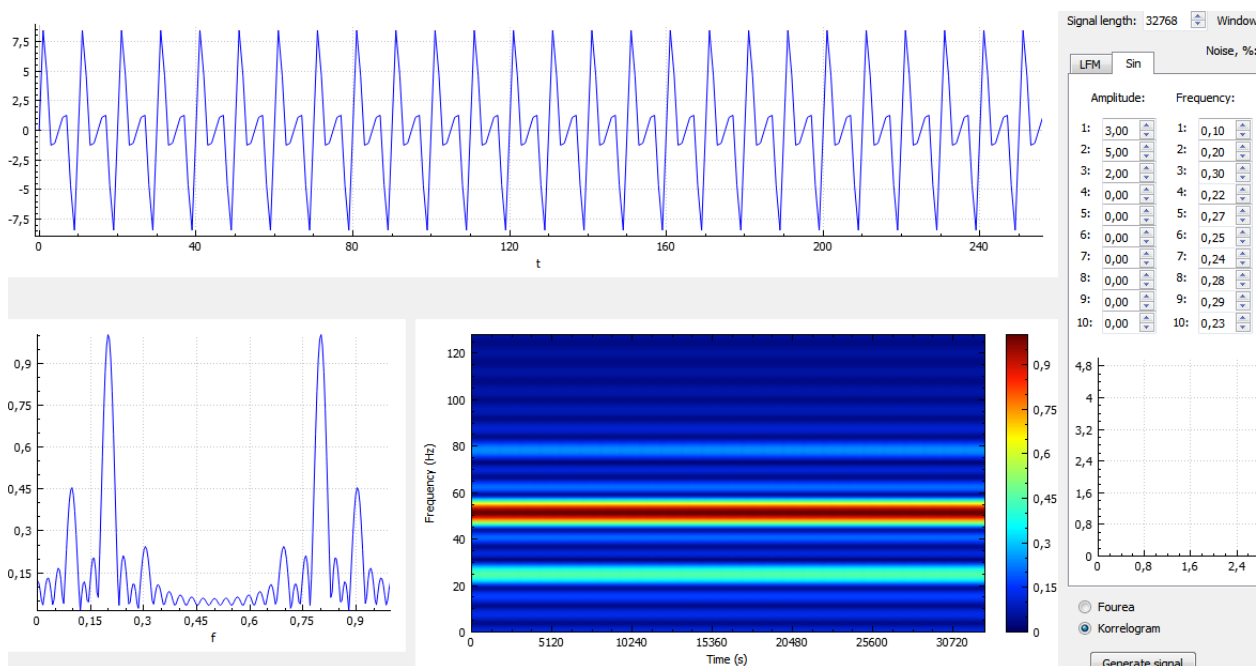


Рис.15. Спектрограмма, полученная методом коррелограмм при 32 сдвигах.
Сигнал без шума.

На Рис.16. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) без шума, рассчитанных авторегрессионным методом.

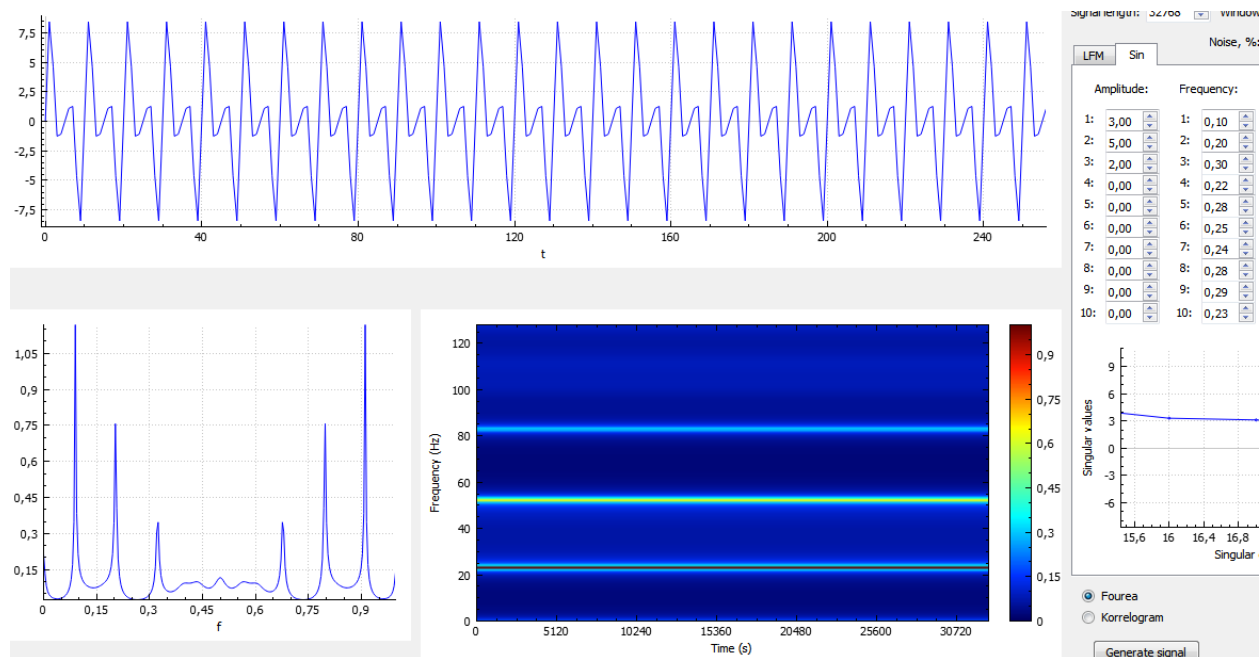


Рис.16. Спектрограмма, полученная авторегрессионным методом.
Сигнал без шума.

На Рис.16. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) без шума, рассчитанных авторегрессионным методом.

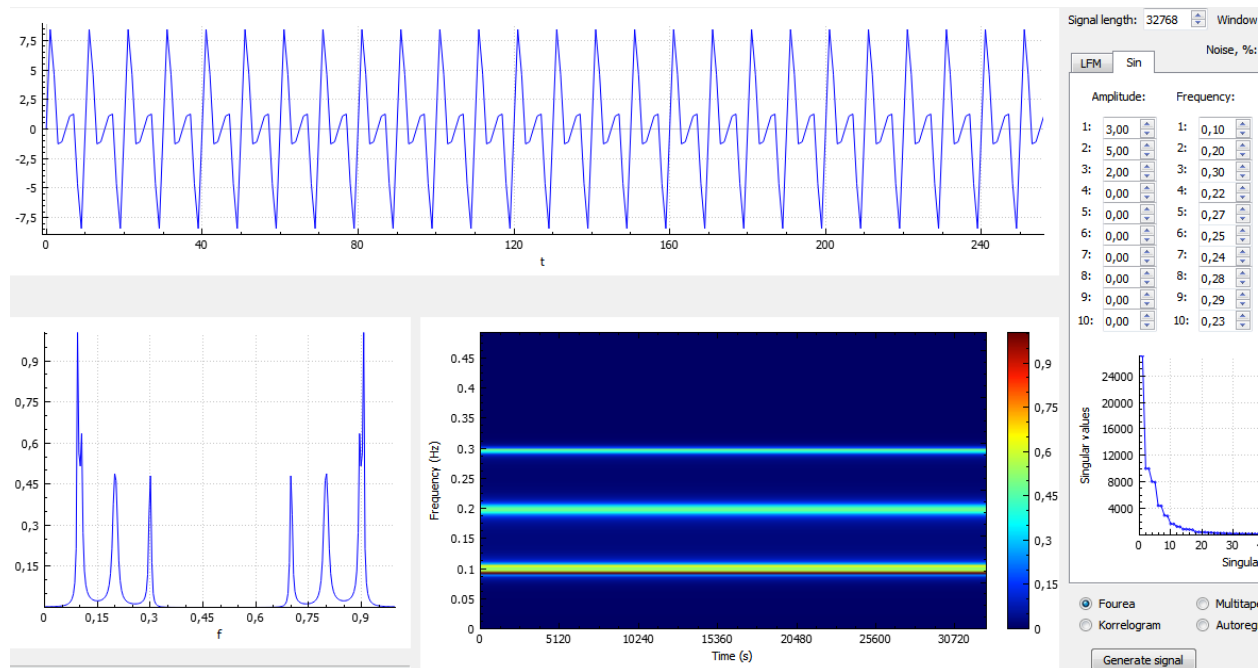


Рис.16. Спектрограмма, полученная авторегрессионным методом Берга.
Сигнал без шума.

На Рис.17. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) без шума, рассчитанных методом “Multitaper Spectrum Estimation.”

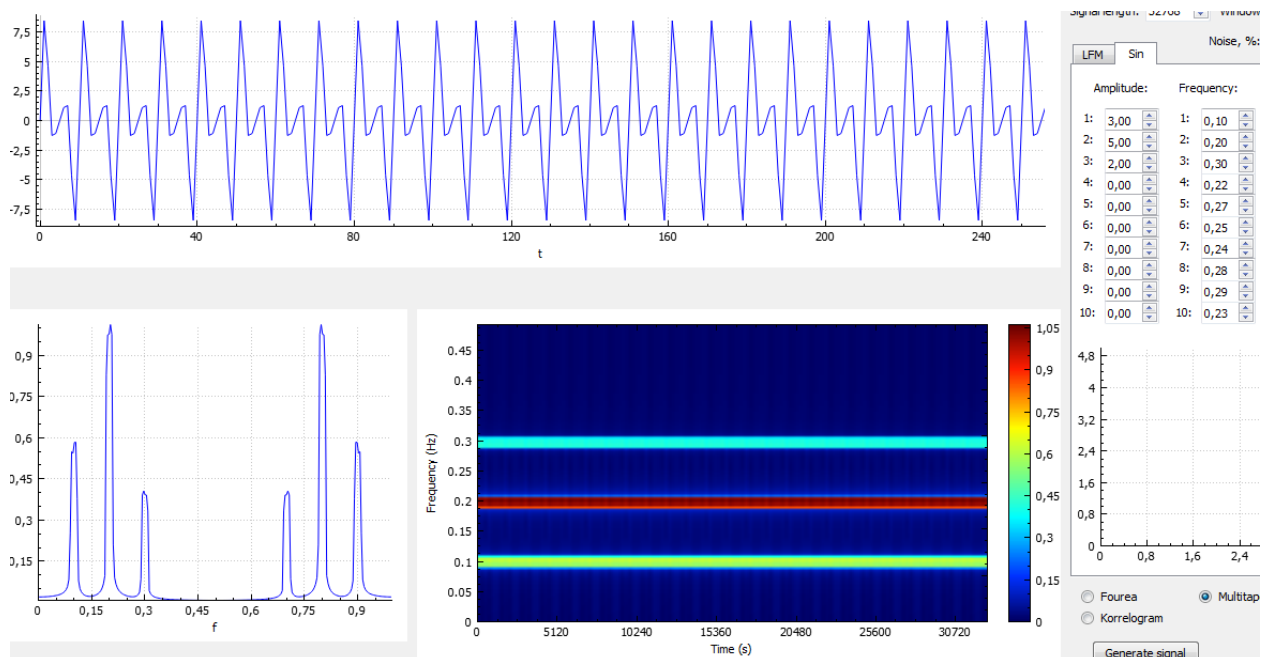


Рис.17. Спектрограмма, полученная методом “Multitaper Spectrum Estimation.”
Сигнал без шума.

На Рис.18. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) при 5% шума, используя метод периодограмм (без усреднения).

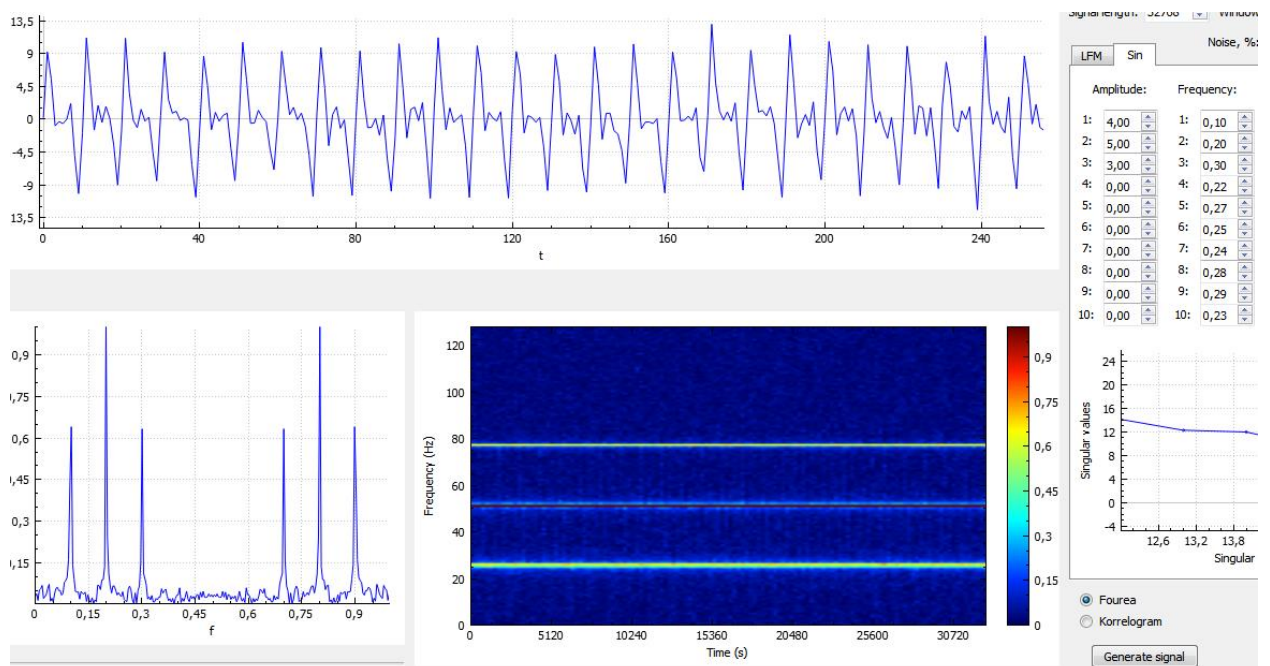


Рис.18. Спектрограмма, полученная методом периодограмм (без усреднения).
Сигнал с долей шума 5%.

На Рис.19. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) при 5% шума, рассчитанных методом коррелограмм при 32 корреляционных отсчётах.

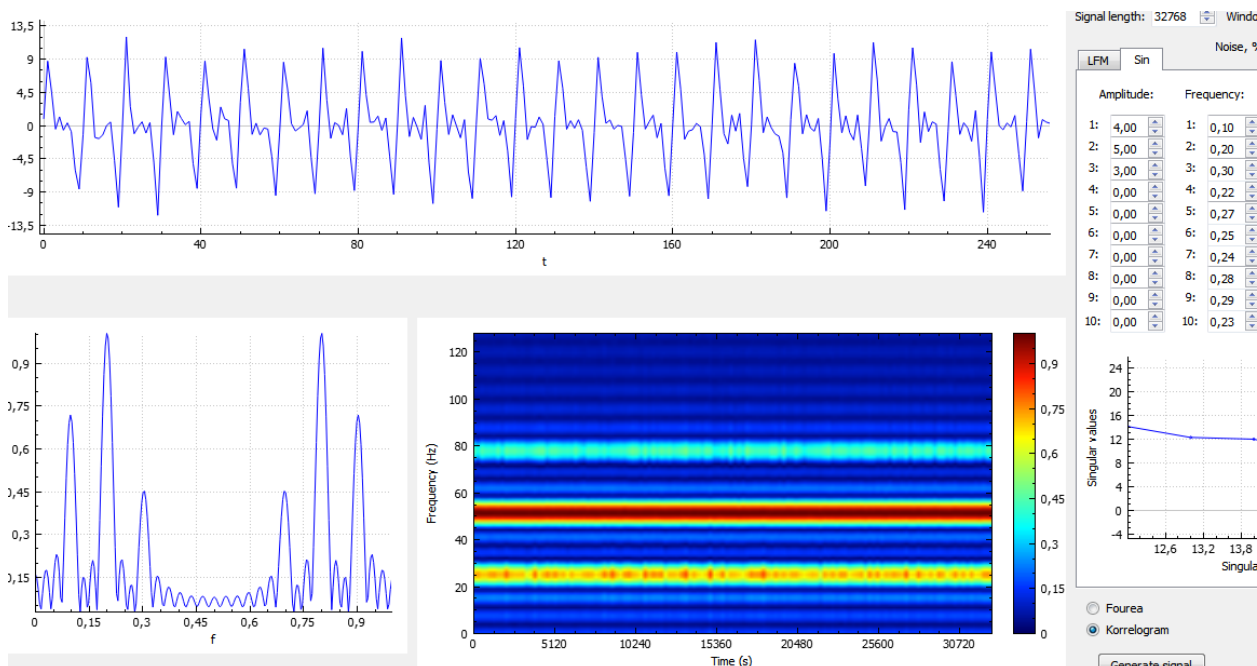


Рис.19. Спектрограмма, полученная методом коррелограмм при 32 сдвигах. Сигнал с долей шума 5%.

На Рис.20. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) при 5% шума, рассчитанных авторегрессионным методом.

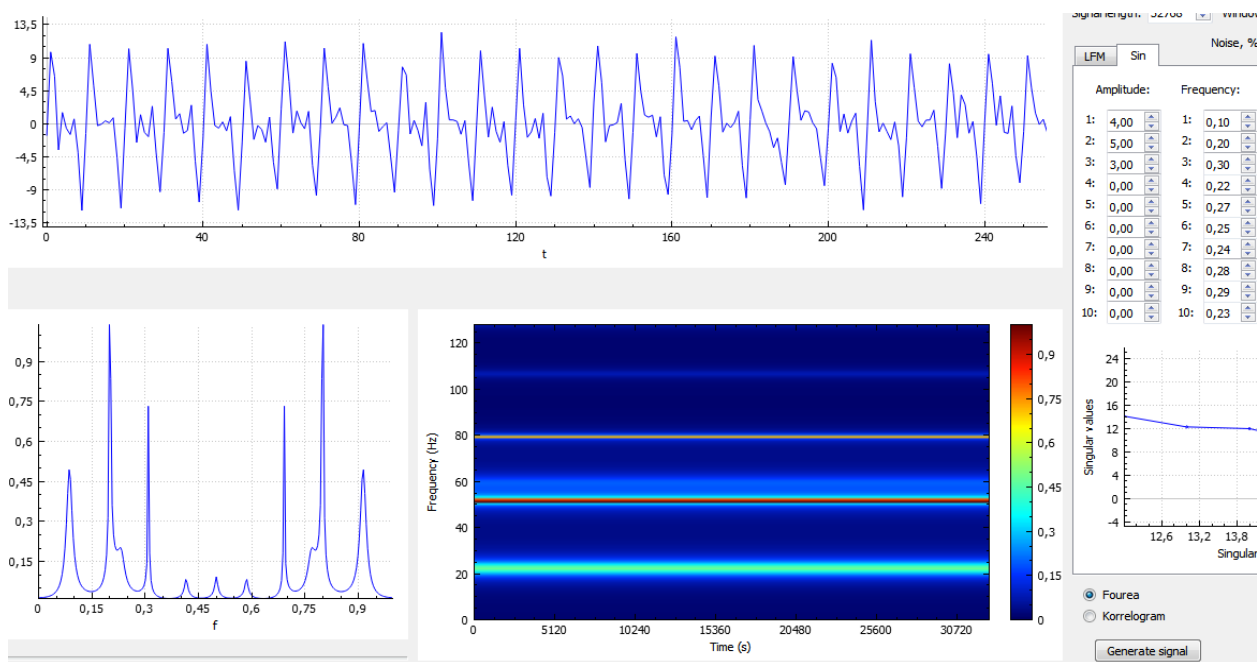


Рис.20. Спектрограмма, полученная авторегрессионным методом. Сигнал с долей шума 5%.

На Рис.20. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) при 5% шума, рассчитанных авторегрессионным методом.

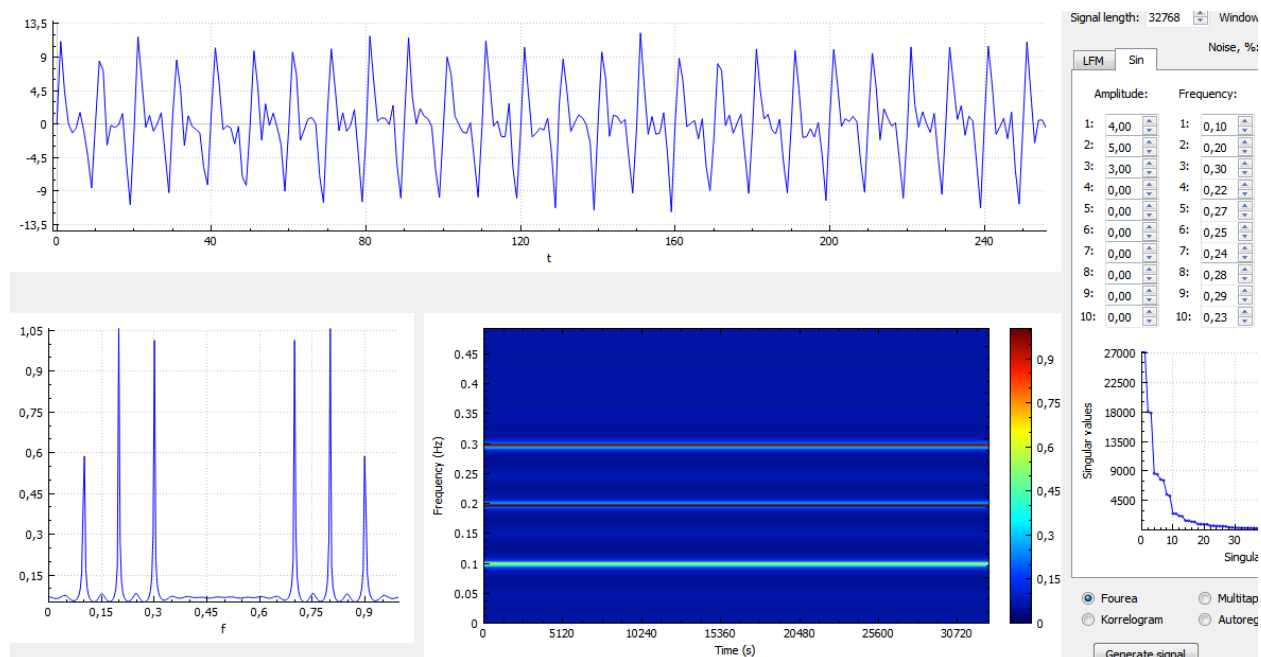


Рис.20. Спектрограмма, полученная авторегрессионным методом Берга.

Сигнал с долей шума 5%.

На Рис.20. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) при 30% шума, рассчитанных авторегрессионным методом.

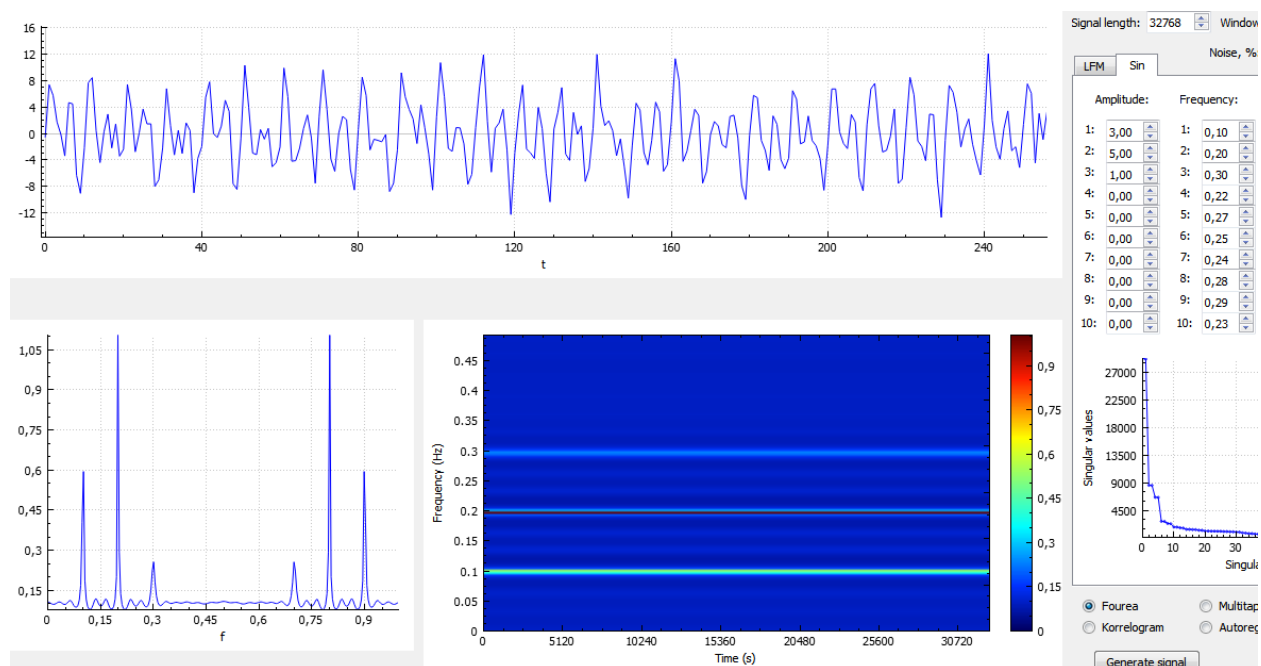


Рис.20. Спектрограмма, полученная авторегрессионным методом Берга.

Сигнал с долей шума 30%.

На Рис.20. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) при 50% шума, рассчитанных авторегрессионным методом.

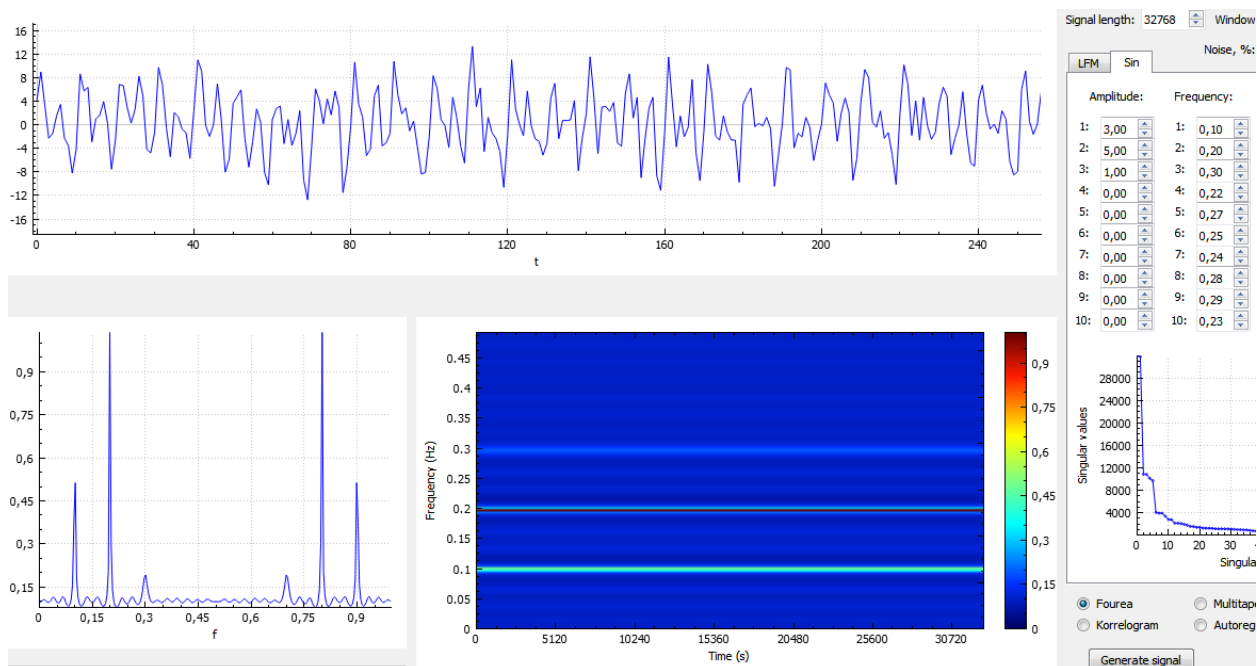


Рис.20. Спектрограмма, полученная авторегрессионным методом Берга.
Сигнал с долей шума 50%.

На Рис.21. Продемонстрирован результат вычисления программой спектра (в отдельном окне) и спектрограммы сигнала (33) при 5% шума, рассчитанных методом “Multitaper Spectrum Estimation.”

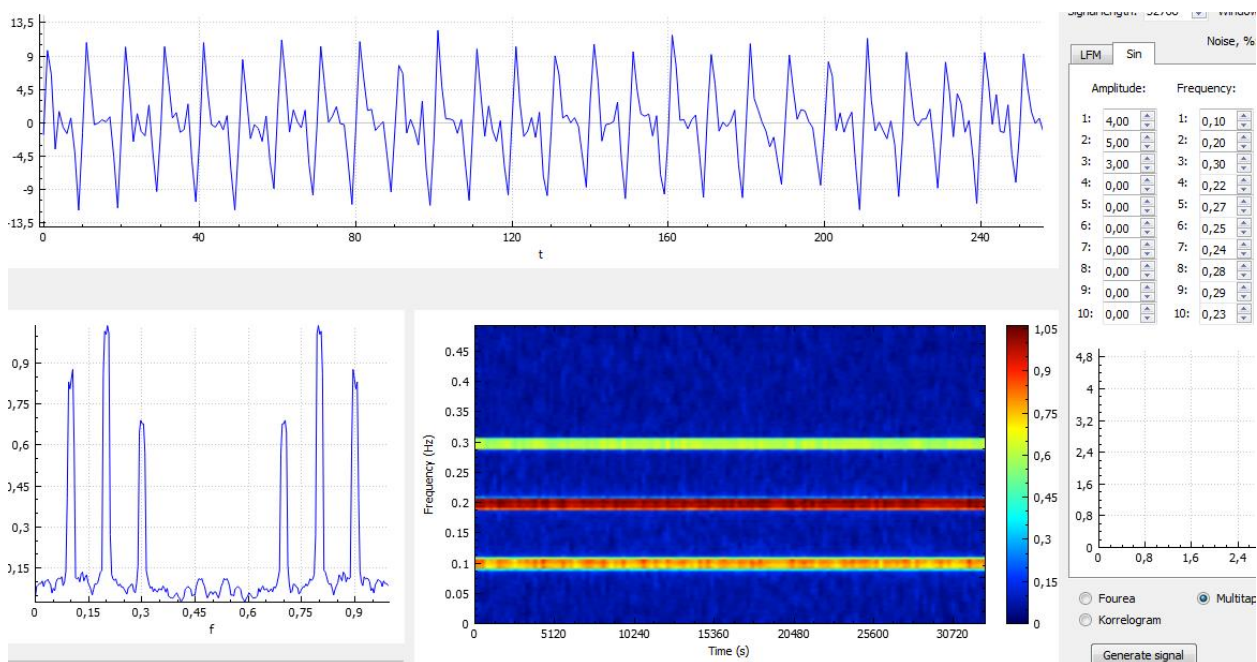


Рис.21. Спектрограмма, полученная методом “Multitaper Spectrum Estimation.”
Сигнал с долей шума 5%.

Можно заметить, что шум вносит искажения, а вид спектрограммы зависит от метода получения спектра сигнала.

Сравнение методов

На практике может возникнуть такой случай, когда в одном сигнальном процессе присутствуют разные сигналы на близких частотах, и эти сигналы нужно различить друг от друга.

Далее приводится сравнение методов построения спектрограмм на примере сигнального процесса (33). Разными методами находятся спектры и на их основе строятся спектрограммы одного и того же сигнала с долей шума в 10%. На Рис.22. Продемонстрирован результат вычисления программой спектрограмм такого сигнального процесса.

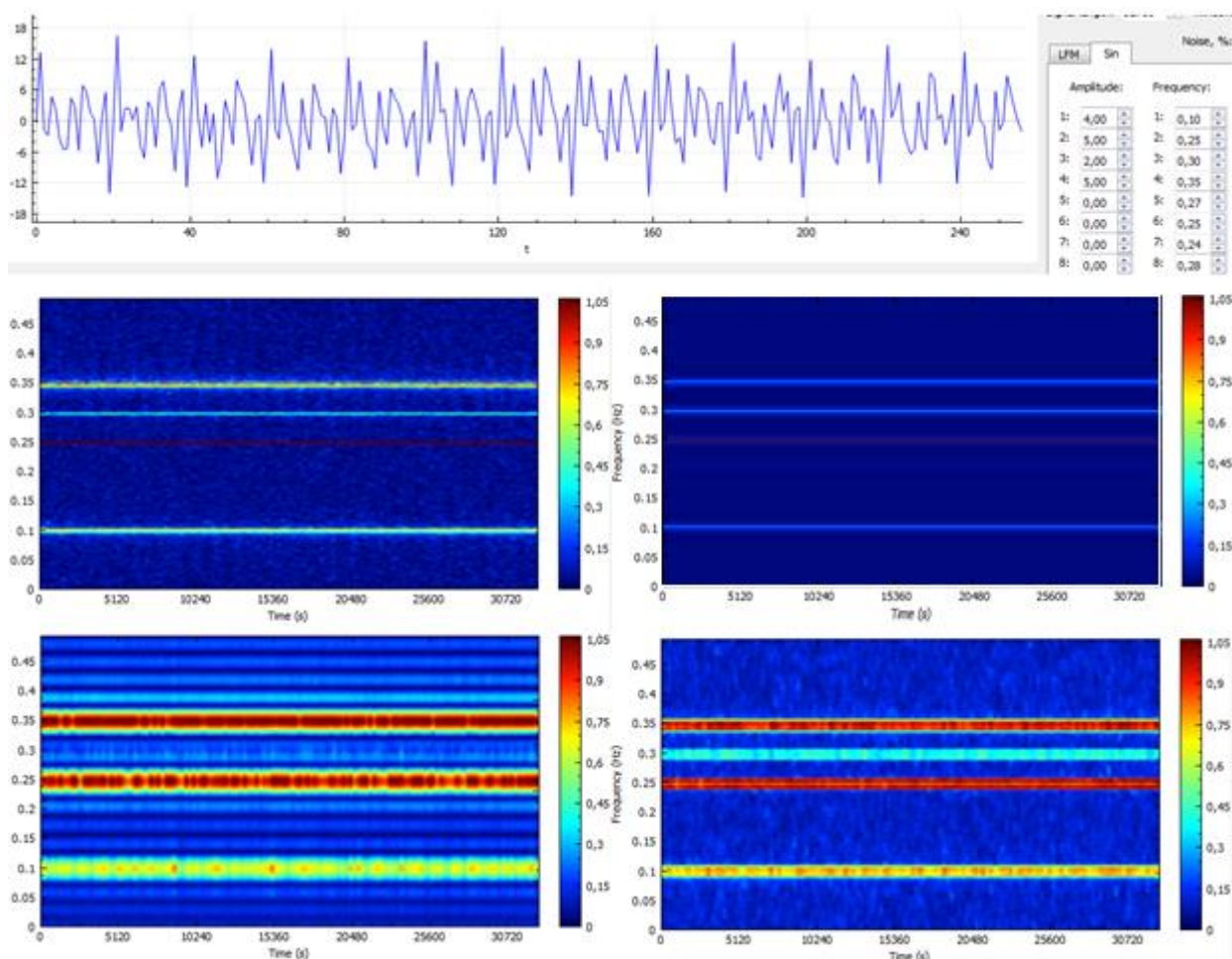


Рис.22. Спектрограммы, полученные разными методами, сигнал с долей шума 10%. (слева-направо: методом периодограмм (без усреднения), авторегрессионным методом Берга, методом коррелограмм, методом “Multitaper Spectrum Estimation.”)

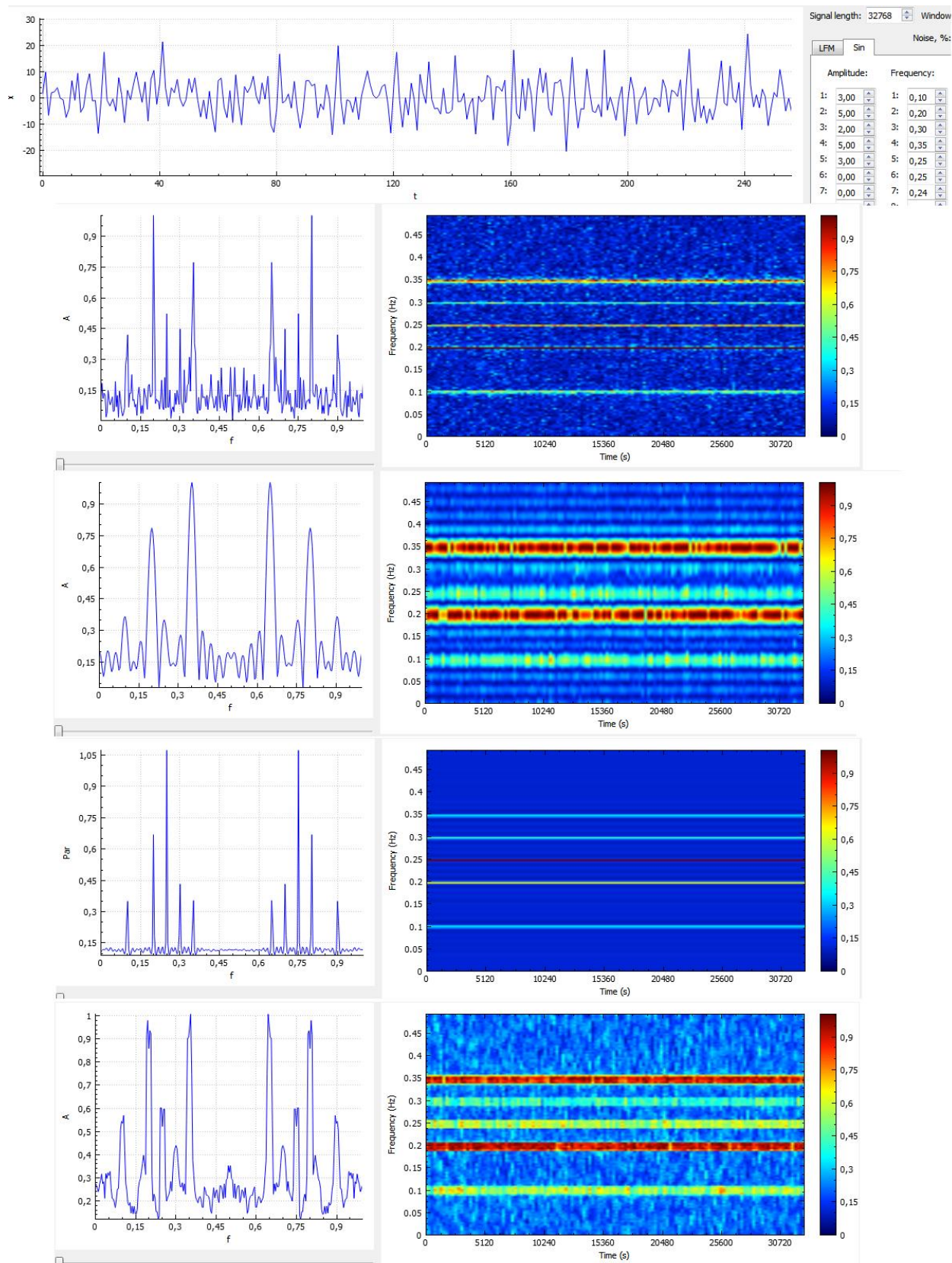


Рис.22. Спектрограммы, полученные разными методами, сигнал с долей шума 50%.
(сверху-вниз: методом периодограмм (без усреднения), методом коррелограмм,
авторегрессионным методом Берга, методом “Multitaper Spectrum Estimation.”)

Можно увидеть, что разные методы дают более точную оценку по отношению друг к другу. Так, например, на спектрограмме, полученной коррелогоамным методом, не наблюдается одной составляющей сигнального процесса. На спектрограммах полученных методами периодограмм и авторегрессионным не получится правильно различить сигналы по амплитуде, в то время как на спектрограмме вычисленной на основе подхода “Multitaper Spectrum Estimation” сигналы отчетливо различаются по амплитуде.

Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы на языке C++ разработана компьютерная программа для построения спектрограмм сигналов, в которой реализованы уже известные и изученные методы спектральной оценки: метод периодограмм (без усреднения), метод кореллограмм и авторегрессионный метод, а также изучен и реализован новый подход к получению спектральной оценки “Multitaper Spectrum Estimation”.

Преимущество такого подхода в том, что получаются более точные оценки СПМ при более высоком разрешении, чем при традиционных подходах на основе периодограмм и корреллограмм, поскольку не используется прямоугольное окно и устраняются связанные с ним искажения, также нет необходимости знать какие-либо данные о сигнальном процессе, как при оценивании авторегрессионным методом. Платой за улучшение качества оценок СПМ выступает повышение вычислительной сложности алгоритма вычисления оценки, но эта сложность успешно преодолевается на современном уровне развития вычислительной техники.

Список литературы

1. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584с.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 768 с.
3. Кривошеев В.И. Современные методы цифровой обработки сигналов (цифровой спектральный анализ). –Н.Новгород: Изд-во нижегородского государственного университета, 2006, –117 с.
4. Gruenbacher D.M., Hummels D.R. A Simple Algorithm for Generating Discrete Prolate Spheroidal Sequences // IEEE Transactions on signal processing, vol. 42, № 11, 1994.
5. Van Drongelen W. Multitaper Power Spectrum Estimation, 2014. – 16с.
6. Лимарев А.Е. Быстрый алгоритм формирования дискретных последовательностей Слепяна // Теория и техника радиосвязи, № 2. 2013.
7. Thomson D.J. Spectrum estimation and harmonic analysis // Processings of the IEEE, VOL. 70, № 9, 1982.
8. Sanchez C.A. Mtpsd Documentation, №2, 2010. – 50 с.
9. Лукин А. Спектроанализатор – что мы на нем видим? – URL: <http://prosound.ixbt.com/education/spektr-analys.shtml> (дата обращения: 13.06.2019).
10. Словари и энциклопедии на Академике? – URL: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/684889> (дата обращения: 13.06.2019).
11. Multitaper Spectral Algorithm – URL: https://www.weisang.com/en/documentation/fourierspectrumalgorithmsmultitaper_en (дата обращения: 13.06.2019)
12. Multitaper power spectral density estimate - MATLAB pmtm – MathWorks – URL: https://ww2.mathworks.cn/help/signal/ref/pmtm.html?action=changeCountry&refresh=true&s_tid=gn_loc_drop (дата обращения: 13.06.2019).