

# Представление функции описания угла в виде цепных бесконечных дробей

Толстомятов А.А.

6 марта 2025 г.

**Представление  $\sin(x)$**  Рассмотрим ряд Тейлора для функции  $f(x) = \sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Этот ряд сходится для всех  $x \in \mathbb{R}$ , но чем больше значение  $|x|$ , тем больше элементов необходимо учитывать для достижения точности. Например, если аргумент  $x > +\pi$ , требуется гораздо больше элементов последовательности, чтобы сохранять точность аппроксимации.

Данное выражение структурно представляется в виде многочлена  $P_n(x)$ , где количество членов описывается элементами множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , поскольку выражение представляет бесконечную сумму дробей одного вида.

$$f(x) = P_n(x) = p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3 + \dots + p_nx^n$$

Пока что разложение функции описания угла будет указано традиционно  $\sin(x)$ . Как было указано раньше представляет из себя только ряд без каких-либо изменений. Рассмотрим альтернативную запись ряда  $S_n(x)$

$$\sin(x) = x \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} \right)$$

$$\sin(x) = x * S_n(x)$$

$$S_n(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

**Метод Паде-аппроксимации** С одной стороны, метод Паде-аппроксимации предоставляют более систематический подход к построению рациональных аппроксимаций, что «играет на руку» при построении представления в виде бесконечных цепных дробей.

Паде-аппроксимация представляет собой рациональную функцию  $R(x)$ ,

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Где в данном случае  $P_n(x)$  - многочлен степени  $n$ , а  $Q_m(x)$  - многочлен степени  $m$ . Коэффициенты этих полиномов выбираются так, чтобы ряд данного соотношения  $R(x)$  совпадал с рядом функции  $S_n(x)$  до члена степени  $n + m$ . Будем считать, что элемент  $q_0$  единичный.

$$P_1(x) = p_0 + p_1 x^2$$

$$Q_1(x) = q_0 + q_1 x^2 = 1 + q_1 x^2$$

$$R_2(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{p_0 + p_1 x^2}{1 + q_1 x^2}$$

Желательно, чтобы разложение дроби  $R(x)$  в ряд Тейлора совпадало с разложением  $S_n(x)$  до члена  $x^4$ . Разложим дробь в ряд:

$$(p_0 + p_1 \cdot x^2) \cdot (1 - q_1 x^2 + (q_1 x^2)^2 - \dots) = p_0 + (p_1 - p_0 q_1) x^2 + (p_0 q_1^2 - p_1 q_1) \cdot x^4 + \dots$$

Сравнивая коэффициенты с рядом для  $S_n(x)$ , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 - p_0 q_1 = -\frac{1}{6} \\ p_0 q_1^2 - p_1 q_1 = \frac{1}{120} \end{cases} = \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 - q_1 = -\frac{1}{6} \\ q_1^2 - q_1 = \frac{1}{120} \end{cases} = \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 - q_1 = -\frac{1}{6} \\ q_1(q_1 - 1) = \frac{1}{120} \end{cases} = \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_1 = \frac{1}{5} \\ p_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимация выглядит так:

$$\frac{1 + \frac{x^2}{30}}{1 + \frac{x^2}{5}}$$

**Преобразование  $R(x)$  в смешанный вид** Чтобы представить дробно-рациональную функцию в смешанном виде, достаточно буквально найти отношение двух многочленов (числитель разделить на знаменатель). Скорее всего, как и числа, имеющие остаток от деления, два многочлена тоже могут содержать остаток от деления, что как раз поможет представить это в виде цепной дроби.

$$\frac{1 + \frac{x^2}{5}}{1 + \frac{x^2}{30}} = \frac{30 + x^2}{6 + 6x^2} = \frac{30 + x^2}{6(1 + \frac{x^2}{6})} = \frac{30 + x^2}{6 + 6x^2} = \frac{30 + x^2}{6(1 + \frac{x^2}{6})}$$

Во время тридцать шестой попытки заметить решения, обнаружилось, что выгоднее всего будет умножить числитель на 5 и вычесть знаменатель, таким образом получится похожее превидение:

$$(30 + x^2) - 5(6 + 6x^2) = (30 + x^2) - (30 + 30x^2) = -29x^2$$

И на этом этапе можно заметить, что дробь из исходной станет «ступенчатого» вида.

$$5 + \frac{-29x^2}{6 + 6x^2}$$

Следует продолжить деление многочленов для получение остатка, начиная с предыдущего шага.

$$\frac{30 + x^2}{6 + 6x^2} = \frac{30 + x^2}{6(1 + \frac{x^2}{6})} = \frac{-29x^2}{6 + 6x^2} = -\frac{29}{6} \cdot \frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{6}}$$

Это был только первый шаг. Следует напомнить, что рациональная функция вида  $R_{n+m}(x)$  была только для многочленов первой степени. Следовательно, указав другие параметры для отношения многочленов, в результате получится аппроксимация совершенно другого вида, и её приведение делением «в столбик» даст другую большую дробь цепного вида.

Говоря об общем виде последовательности, после нескольких десятков итераций по преобразованию в итоге получается следующее:

$$S_n(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot x^2}{1 + 4 \cdot 5 - x^2 + \dots}}}$$

Соответственно, возвращаясь к самой функции синуса, получится следующее выражение.

$$x \cdot S_n(x) = \sin(x) = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot x^2}{1 + 4 \cdot 5 - x^2 + \dots}}}$$

Данное преобразовывалось и используя метод Паде-аппроксимации и используя рекуррентные соотношения. На подобном алгоритме основывается подход по вычислению синуса угла, описанный на языке программирования C++ 20. Только для реализации всех тригонометрических функций раскладывается тангенс половинного угла  $\tan(\frac{x}{2})$  и преобразовывается в разного вида цепные дроби, подобные представлениям функций косинуса, синуса, тангенса, котангенса. Для гиперболических функций так же предусмотрен алгоритм представления в виде цепных бесконечных дробей, что будет представлено далее.