Представление функции описания угла в виде цепных бесконечных дробей

Толстопятов А.А.

6 марта 2025 г.

Представление $\sin(x)$ Рассмотрим ряд Тейлора для функции $f(x) = \sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots + (-1^{n+1})\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Этот ряд сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, но чем больше значение $|x|$, тем больше элементов необходимо учитывать для достижения точности. Например, если аргумент $x > \pi$, требуется гораздо больше элементов последовательности, чтобы сохранять точность аппроксимации.

Данное выражение структурно представляется в виде многочлена $P_n(x)$, где количество членов описывается элементами множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, поскольку выражение представляет бесконечную сумму дробей одного вида.

$$f(x) = P_n(x) = p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots + p_nx^n$$

Пока что разложение функции описания угла будет указано традиционно $\sin(x)$. Как было указано раньше представляет из себя только ряд без каких-либо изменений. Рассмотрим альтернативную запись ряда $S_n(x)$

$$\sin(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1^{n+1})\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\right)$$

$$\sin(x) = x * S_n(x)$$

$$S_n(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Метод Паде-аппроксимации С одной стороны, метод Паде-аппроксимации предоставляют более систематический подход к построению рациональных аппроксимаций, что «играет на руку» при построении представления в виде бесконечных цепных дробей.

Паде-аппроксимация представляет собой рациональную функцию $R(x)$,

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Где в данном случае $P_n(x)$ - многочлен степени n, а $Q_m(x)$ - многочлен степени m. Коэффициенты этих полиномов выбираются так, чтобы ряд данного соотношения $R(x)$ совпадал с рядом функции $S_n(x)$ до члена степени $n+m$. Будем считать, что элемент q_0 единичный.

$$P_1(x) = p_0 + p_1 x^2$$
$$Q_1(x) = q_0 + q_1 x^2 = 1 + q_1 x^2$$

$$R_2(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{p_0 + p_1 x^2}{1 + q_1 x^2}$$

Желательно, чтобы разложение дроби $R(x)$ в ряд Тейлора совпадало с разложением $S_n(x)$ до члена x^4. Разложим дробь в ряд:

$$(p_0+p_1\cdot x^2)\cdot(1-q_1x^2+(q_1x^2)^2-\dots) = p_0+(p_1-p_0q_1)x^2+(p_0q_1^2-p_1q_1)\cdot x^4+\dots$$

Сравнивая коэффициенты с рядом для $S_n(x)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 - p_0q_1 = -\frac{1}{6} \\ p_0q_1^2 - p_1q_1 = \frac{1}{120} \end{cases} = \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 - q_1 = -\frac{1}{6} \\ q_1^2 - q_1 = \frac{1}{120} \end{cases} = \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 - q_1 = -\frac{1}{6} \\ q_1(q_1 - 1) = \frac{1}{120} \end{cases} = \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_1 = \frac{1}{5} \\ p_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимация выглядит так:

$$\frac{1 + \frac{x^2}{30}}{1 + \frac{x^2}{5}}$$

Преобразование $R(x)$ в смешанный вид Чтобы представить дробно-рациональную функцию в смешанном виде, достаточно буквально найти отношение двух многочленов (числитель разделить на знаменатель). Скорее всего, как и числа, имеющие остаток от деления, два многочлена тоже могут содержать остаток от деления, что как раз поможет представить это в виде цепной дроби.

$$\frac{1 + \frac{x^2}{5}}{1 + \frac{x^2}{30}} = \frac{30 + x^2}{6 + 6x^2} = \frac{30 + x^2}{6(1 + \frac{x^2}{6})} = \frac{30 + x^2}{6 + 6x^2} = \frac{30 + x^2}{6(1 + \frac{x^2}{6})}$$

Во время тридцать шестой попытки заметить решения, обнаружилось, что выгоднее всего будет умножить числитель на 5 и вычесть знаменатель, таким образом получится похожее превидение:

$$(30 + x^2) - 5(6 + 6x^2) = (30 + x^2) - (30 + 30x^2) = -29x^2$$

И на этом этапе можно заметить, что дробь из исходной станет «ступенчатого» вида.

$$5 + \frac{-29x^2}{6 + 6x^2}$$

Следует продолжить деление многочленов для получение остатка, начиная с предыдущего шага.

$$\frac{30 + x^2}{6 + 6x^2} = \frac{30 + x^2}{6(1 + \frac{x^2}{6})} = \frac{-29x^2}{6 + 6x^2} = -\frac{29}{6} \cdot \frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{6}}$$

Это был только первый шаг. Следует напомнить, что рациональная функция вида $R_{n+m}(x)$ была только для многочленов первой степени. Следовательно, указав другие параметры для отношения многочленов, в результате получится аппроксимация совершенно другого вида, и её приведение делением «в столбик» даст другую большую дробь цепного вида.

Говоря об общем виде последовательности, после нескольких десятков итераций по преобразованию в итоге получается следующее:

$$S_n(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2\cdot3 - x^2 + \frac{2\cdot3\cdot x^2}{1 + 4\cdot5 - x^2 + \ldots}}}$$

Соответственно, возвращаясь к самой функции синуса, получится следующее выражение.

$$x \cdot S_n(x) = \sin(x) = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{2\cdot3 - x^2 + \frac{2\cdot3\cdot x^2}{1 + 4\cdot5 - x^2 + \ldots}}}$$

Данное преобразовывалось и используя метод Паде-аппроксимации и используя реккурентные соотношения. На этом алгоритме основывается подход по вычислению синуса угла, описанный на языке программирования C++.

Для реализации всех гиперболических функций раскладывается гиперболический тангенс половинного угла $\tanh(\frac{x}{2})$ и преобразовывается в разного вида цепные дроби, подобные представлениям функций косинуса, синуса, тангенса, котангенса. Для гиперболических функций так же предусмотрен алгоритм представления в виде цепных бесконечных дробей, что будет представлено далее.