

БИЛЕТ 7. ДНФ

Простой конъюнкцией (англ. *inclusive conjunction*) или **конъюнктом** (англ. *conjunct*) называется конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Простая конъюнкция

- **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно 1 раз;
- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Дизъюнктивная нормальная форма, ДНФ (англ. *disjunctive normal form, DNF*) — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид дизъюнкции нескольких простых конъюнктов.

Пример ДНФ: $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge \neg z)$.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ (англ. *perfect disjunctive normal form, PDNF*) — ДНФ, удовлетворяющая условиям:

- в ней нет одинаковых простых конъюнкций,
- каждая простая конъюнкция полная.

Пример СДНФ: $f(x, y, z) = (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$.

Для любой булевой функции $f(\vec{x})$, не равной тождественному нулю, существует СДНФ, ее задающая.

Пример построения СДНФ для медианы

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 1.

| x | y | z | $\langle x, y, z \rangle$ |
|-----|-----|-----|---------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

| x | y | z | $\langle x, y, z \rangle$ | |
|-----|-----|-----|---------------------------|------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $(\neg x \wedge y \wedge z)$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $(x \wedge \neg y \wedge z)$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $(x \wedge y \wedge \neg z)$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $(x \wedge y \wedge z)$ |

3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции:

$$\langle x, y, z \rangle = (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$$