Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3

по дисциплине

«Вычислительная математика»

Вариант №13

Выполнил:

Студент группы P3213

Султанов А.Р.

Проверила:

Машина Е.А.

г. Санкт-Петербург

2024г.

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

$$\int_{1}^{3}(-\ 2x^{3}\ -\ 5x^{2}\ +\ 7x\ -\ 13)dx$$

Обязательное задание

Программная реализация задачи

Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)

Левые: $\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i y_{i-1}$, при $h = const$: $h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$

Средние: $\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i y_i$, при $h = const$: $h\sum_{i=1}^{n} y_i$

Правые: $\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i y_{i-0.5}$, при $h = const$: $h\sum_{i=1}^{n} y_{i-0.5}$

```
from functions import Function
from methods.method import Method
from input import read_choice_from_stdin

SUBMETHODS = [
    dict(
        name='Левые',
        starting_index=lambda a, h: a,
    ),
    dict(
        name='Средние',
        starting_index=lambda a, h: a + h / 2,
    ),
    dict(
        name='Правые',
        starting_index=lambda a, h: a + h,
    ),
]


class RectangleMethod(Method):
    NAME = 'Метод прямоугольников.'
```

```python
    submethod_index: float

    def read_input(self):
        super().read_input()
        self.submethod_index = read_choice_from_stdin(
            'Выберите под-метод:',
            [sm['name'] for sm in SUBMETHODS],
        )

    def _perform(self, func: Function, interval_count: int) -> float:
        h = (self.b - self.a) / interval_count

        area = 0
        x = SUBMETHODS[self.submethod_index]['starting_index'](self.a, h)

        for _ in range(interval_count):
            y = func.safe_f(x, self.e)

            area += y * h

            x += h

        return area
```

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i(y_{i-1} + y_i), \text{ при } h = const\text{: } h(\frac{y_o+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i)$$

```python
from functions import Function
from methods.method import Method


class TrapezoidMethod(Method):
    NAME = 'Метод трапеций.'

    def _perform(self, func: Function, interval_count: int) -> float:
        h = (self.b - self.a) / interval_count

        x_0 = self._get_x(0, h)
        y_0 = func.safe_f(x_0, self.e)

        x_n = self._get_x(interval_count, h)
        y_n = func.safe_f(x_n, self.e)

        middle = sum([
            func.safe_f(self._get_x(i, h), self.e)
```

```
            for i in range(1, interval_count)
        ])

        area = h * ((y_0 + y_n) / 2 + middle)

        return area
```

Метод Симпсона

(n - четное, $h = const$)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_o + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + y_n]$$

```
from functions import Function
from methods.method import Method


class SimpsonMethod(Method):
    NAME = 'Метод Симпсона.'

    def _perform(self, func: Function, interval_count: int) -> float:
        h = (self.b - self.a) / interval_count

        x_0 = self._get_x(0, h)
        y_0 = func.safe_f(x_0, self.e)

        x_n = self._get_x(interval_count, h)
        y_n = func.safe_f(x_n, self.e)

        odd = sum([
            func.safe_f(self._get_x(i, h), self.e)
            for i in range(1, interval_count, 2)
        ])

        even = sum([
            func.safe_f(self._get_x(i, h), self.e)
            for i in range(2, interval_count - 1, 2)
        ])

        area = (h / 3) * (y_0 + 4 * odd + 2 * even + y_n)

        return area
```

Вычислительная реализация задачи

$$\int_1^3 (-2x^3 - 5x^2 + 7x - 13)\,dx =$$

№1. $$\int_1^3 (-2x^3 - 5x^2 + 7x - 13)\,dx = \left(-\frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 13x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{81}{2} - \frac{5\cdot 27}{3} + \frac{7\cdot 9}{2} - 13\cdot 3\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{7}{2} - 13\right) =$$

$$= -\frac{244}{3} = -81{,}333\ldots$$

№2. Ньютон-Котес, $n = 6$.

строка $n = 6$: $C_6^0 = C_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$ $C_6^1 = C_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$ $C_6^2 = C_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$ $C_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$

$x_0 = 1$ $x_1 = \frac{4}{3}$ $x_2 = \frac{5}{3}$ $x_3 = 2$ $x_4 = \frac{7}{3}$ $x_5 = \frac{8}{3}$ $x_6 = 3$

$$f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13$$

$f(x_0) = f(1) = -13$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{467}{27}$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{661}{27}$

$f(2) = -35$

$f\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{1331}{27}$

$f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1831}{27}$

$f(3) = -91$

тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_6^0 f(x_0) + C_6^1 f(x_1) + C_6^2 f(x_2) + C_6^3 f(x_3) + C_6^4 f(x_4) + C_6^5 f(x_5) + C_6^6 f(x_6)$$

$$C_6^0 = C_6^6 = \frac{41(3-1)}{840} = \frac{41}{420}$$

$$C_6^1 = C_6^5 = \frac{216(3-1)}{840} = \frac{216}{420} = \frac{18}{35}$$

$$C_6^2 = C_6^4 = \frac{27(3-1)}{840} = \frac{27}{420} = \frac{9}{140}$$

$$C_6^3 = \frac{272(3-1)}{840} = \frac{272}{420} = \frac{68}{105}$$

$$\int_1^3 (-2x^3-5x^2+7x-13)\,dx \approx \frac{41}{420}\cdot(-13)+\frac{18}{35}\left(-\frac{467}{27}\right)+\frac{9}{140}\left(-\frac{661}{27}\right)+\frac{68}{105}(-35)+$$

$$+\frac{9}{140}\left(-\frac{1331}{27}\right)+\frac{18}{35}\left(-\frac{1831}{27}\right)+\frac{41}{420}(-91)=-\frac{533}{420}-\frac{934}{105}-\frac{661}{420}-\frac{68}{3}-$$

$$-\frac{1331}{420}-\frac{3662}{105}-\frac{533}{60}=-\frac{244}{3}\approx-81{,}3\ldots$$

Отн. погрешность:

$$\left|\frac{\left(-\frac{244}{3}\right)-\left(-\frac{244}{3}\right)}{\left(-\frac{244}{3}\right)}\right|=0$$

№3 $n=10$

Средние прямоугольники

$h=\frac{3-1}{10}=0{,}2$

x_i: 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8; 3

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-\frac{1}{2}}) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\cdot y_{i-\frac{1}{2}} = h\cdot\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}}$$

Середины: 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 2,1; 2,3; 2,5; 2,7; 2,9

$f(1{,}1)=-\frac{3503}{250}$ $f(1{,}3)=-\frac{2093}{125}$ $f(1{,}5)=\left(-\frac{41}{2}\right)$ $f(1{,}7)=-\frac{3172}{125}$ $f(1{,}9)=-\frac{7867}{250}$

$f(2{,}1)=-\frac{4859}{125}$ $f(2{,}3)=-\frac{11921}{250}$ $f(2{,}5)=-58$ $f(2{,}7)=-\frac{17479}{250}$ $f(2{,}9)=-\frac{10441}{125}$

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx 0{,}2\cdot\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}}=-81{,}22$$

Отн. погрешность:

$$\left|\frac{\left(-\frac{244}{3}\right)-(-81{,}22)}{-\frac{244}{3}}\right|=0{,}0014$$

Трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$h=0{,}2$, $x_0 - x_n$: как в прямоугольниках.

$y_0=f(x_0)=f(1)=-13$ $y_n=f(x_n)=f(3)=-91$

$f(1{,}2)=-\frac{1907}{125}$ $f(1{,}4)=-\frac{2311}{125}$ $f(1{,}6)=-\frac{2849}{125}$ $f(1{,}8)=-\frac{3533}{125}$ $f(2{,}2)=-\frac{5387}{125}$ $f(2{,}4)=-\frac{6581}{125}$

$f(2{,}6)=-\frac{7969}{125}$ $f(2{,}8)=-\frac{9563}{125}$ $f(2)=-35$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 0{,}2\cdot\left(\frac{-13-91}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)=-81{,}56$$

Отн. погрешность:

$$\left|\frac{\left(-\frac{244}{3}\right)-(-81{,}56)}{-\frac{244}{3}}\right|=0{,}0028$$

Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left(y_0+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})+y_n\right)$$

$$\int_1^3 f(x) = \frac{0{,}2}{3}\left(-13+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)-91\right)=-81{,}3\ldots$$

Отн. погрешность:

$$\left|\frac{\left(-\frac{244}{3}\right)-\left(-\frac{244}{3}\right)}{\left(-\frac{244}{3}\right)}\right|=0$$

Листинг программы

Доступен по ссылке:

https://github.com/MakeCheerfulInstall/Computational-Math-2024/pull/35