Министерство высшего образования и науки Российской Федерации

Национальный научно-исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3

по дисциплине

«Вычислительная математика»

Вариант 11

Работу выполнил:

Макеев Роман Ильич

Группа P3208

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург

2024

Цель работы:

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Порядок выполнения работы:

1. Реализовать программу, выполняющую вычисление 3-5 заданных интегралов следующими методами:

   - Метод левых прямоугольников
   - Метод правых прямоугольников
   - Метод средних прямоугольников
   - Метод трапеций
   - Метод Симпсона

2. Вычислить данный по варианту интеграл:

$$\int_1^3 (2x^3 - 9x^2 - 7x + 11)dx$$

следующими методами:

- Точно (аналитически)
- По формуле Ньютона-Котеса
- Методом средних прямоугольников
- Методом трапеций
- Методом Симпсона

Сравнить результаты и вычислить погрешность методов

Рабочие формулы используемых методов:

Формула Ньютона-Котеса

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i$$

Метод прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\right]$$

Листинг программы:

Объединение методов прямоугольников

```
def abstract_squares(intg: Integral, left: float, n: int, h:
float, m_type: MethodType) -> float:
    ans: float = 0
    for i in range(n):
        x: float = left
        match m_type:
            case MethodType.LEFT_SQ:
                x += h * i
            case MethodType.RIGHT_SQ:
                x += h * (i + 1)
            case MethodType.MID_SQ:
                x += h * (i + 0.5)

        # Обработка точки разрыва
        try:
            y: float = intg.f_x(x)
        except ArithmeticError:
            if i == 0:
                y: float = intg.f_x(x + DELTA)
            elif i == n-1:
                y: float = intg.f_x(x - DELTA)
            else:
                return abstract_squares(intg, left, i + 1, h,
m_type) + abstract_squares(intg, x, n - i, h, m_type)

        ans += y

    return ans * h
```

Объединение методов трапеции и Симпсона

```
def trap_or_simpson(intg: Integral, left: float, n: int, h:
float, m_type: MethodType) -> float:
    x_0: float = left
    x_n: float = left + n * h

    # Обработка точки разрыва
    try:
        y_0: float = intg.f_x(x_0)
    except ArithmeticError:
        y_0: float = intg.f_x(x_0 + DELTA)
    try:
        y_n: float = intg.f_x(x_n)
    except ArithmeticError:
        y_n: float = intg.f_x(x_n - DELTA)

    ans: float = y_0 + y_n

    for i in range(1, n):
```

```
        x: float = left + h * i
        try:
            y: float = intg.f_x(x)
        except ArithmeticError:
            return trap_or_simpson(intg, left, i, h, m_type) +
trap_or_simpson(intg, x, n - i, h, m_type)

        if m_type == MethodType.TRAP or i % 2 == 0:
            ans += 2 * y
        else:
            ans += 4 * y

    if m_type == MethodType.TRAP:
        return ans * h / 2
    else:
        return ans * h / 3
```

Результаты работы программы:

```
    1: 2x^3 - 9x^2 - 7x + 11
    2: 3x^2 - e^x
    3: x * sin(x)
Choose function for integral: [1/2/3] -> 1
Set interval a b -> 1 3
Set accuracy -> 1E-5
    1: Метод левых прямоугольников
    2: Метод правых прямоугольников
    3: Метод средних прямоугольников
    4: Метод трапеций
    5: Метод симпсона
Choose solving method: [1/2/3/4/5] -> 3
Integral value: -44.00000190734863
Interval count: 1024
```

```
    1: 2x^3 - 9x^2 - 7x + 11
    2: 3x^2 - e^x
    3: 1 / sin(sqrt(|x|))
Choose function for integral: [1/2/3] -> 3
Set interval a b -> -2 2
Set accuracy -> 1E-4
    1: Метод левых прямоугольников
    2: Метод правых прямоугольников
    3: Метод средних прямоугольников
    4: Метод трапеций
    5: Метод симпсона
Choose solving method: [1/2/3/4/5] -> 5
Integral value: 6.3661212060257775
Interval count: 16384
```

Вычисление интеграла:

Аналитическое решение:

$$\int_1^3 (2x^3 - 9x^2 - 7x + 11)dx = \left(\frac{x^4}{2} - 3x^3 - \frac{7x^2}{2} + 11x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^4}{2} - 3 \cdot 3^3 - \frac{7 \cdot 3^2}{2} + 11 \cdot 3\right) - \left(\frac{1^4}{2} - 3 \cdot 1^3 - \frac{7 \cdot 1^2}{2} + 11 \cdot 1\right) =$$

$$= (-39) - \left(5\right) = -44$$

Точный ответ: -44

Решение по формуле **Ньютона-Котеса** при $n = 6$:

Нужно найти $n + 1 = 7$ точек на графике функции

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7x + 11$:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1	1.35	1.7	2	2.35	2.7	3
y_i	-3	-9.932	-17.084	-23	-29.197	-34.144	-37

При этом длина отрезка $(b - a) = 3 - 1 = 2$

Тогда по формуле:

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{41(b-a)}{840}f(x_0) + \frac{216(b-a)}{840}f(x_1) + \frac{27(b-a)}{840}f(x_2) +$$

$$+\frac{272(b-a)}{840}f(x_3) + \frac{27(b-a)}{840}f(x_4) + \frac{216(b-a)}{840}f(x_5) + \frac{41(b-a)}{840}f(x_6) =$$

$$= 0.0976 \cdot (-3) + 0.5143 \cdot (-9.932) + 0.0643 \cdot (-17.084) + 0.6476 \cdot (-23) +$$

$$+0.0643 \cdot (-29.197) + 0.5143 \cdot (-34.144) + 0.0976 \cdot (-37) = -44.443$$

Погрешности:

$$\Delta x = |x - x^*| = |-44 + 44.443| = 0.443$$

$$\sigma x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{0.443}{-44}\right| = 0.0101 \approx 1.01\,\%$$

Решение методом **средних прямоугольников** при $n = 10$:

$$h = \frac{b - a}{n} = 0.2$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9
y_i	-4.928	-8.916	-13	-17.084	-21.072	-24.868	-28.376	-31.5	-34.144	-36.212

$$\int_1^3 f(x)dx = h\sum_{i=0}^{9} y_i = -0.2\cdot(4.928+8.916+13+17.084+$$

$$+21.072+24.868+28.376+31.5+34.144+36.212) = -44.02$$

Погрешности:

$$\Delta x = |x - x^*| = |-44+44.02| = 0.02$$

$$\sigma x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{0.02}{-44}\right| = 0.00045 \approx 0.045\,\%$$

Решение методом **трапеций** при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = 0.2$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y_i	-3	-6.904	-10.952	-15.048	-19.096	-23	-26.664	-29.992	-32.888	-35.256	-37

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{h}{2}\cdot\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{9} y_i\right) = -0.1\cdot\big[3+37+2(6.904+10.952+15.048+$$

$$+19.096+23+26.664+29.992+32.888+35.256)\big] = -43.96$$

Погрешности:

$$\Delta x = |x - x^*| = |-44+43.96| = 0.04$$

$$\sigma x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{0.04}{-44}\right| = 0.0009 \approx 0.09\,\%$$

Решение методом **Симпсона** при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = 0.2$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y_i	-3	-6.904	-10.952	-15.048	-19.096	-23	-26.664	-29.992	-32.888	-35.256	-37

$$\int_{1}^{3} f(x)dx = -\frac{0.2}{3}\left[3 + 37 + 4(6.904 + 15.048 + 23 + 29.992+\right.$$

$$\left.+35.256) + 2(10.952 + 19.096 + 26.664 + 32.888)\right] = -44$$

Погрешности:

$\Delta x = 0$

$\sigma x = 0$

Выводы:

В ходе работы я нашел приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами и реализовал программную реализацию задачи