

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования «**Национальный исследовательский университет ИТМО**»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3**

**‘ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА’**

Вариант №25

*Студент:*

Хоанг Ван Куан

Группа Р3266

*Преподаватель:*

Машина Екатерина Александровна

Санкт-Петербург, 2024

## 1. Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами

## 2. Порядок выполнения работы

### Обязательное задание

- 1 часть: Вычислительная реализация задачи  
Задание:

1. Вычислить интеграл

$$\int_0^2 (2x^3 - 4x^2 + 6x - 25)dx$$

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при  $n = 8$
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при  $n = 10$
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода

- 2 часть: Программная реализация

### Необязательное задание

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить вообщение: «Интеграл не существует»;
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами)
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке  $a$ , 2) в точке  $b$ , 3) на отрезке интегрирования.

## 3. Рабочие формулы

1 – Формула Ньютона – Котеса

$$\int_a^b f(x) \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^n f(x_i)c_n^i$$

2 – Формула метода пряугольников

$$\int_a^b f(x) \approx S_n = \sum_{i=0}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

3 – Формула метода трапеций

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{2} \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

4 – Формула метода Симпсона

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n)$$

#### 4. Вычислительная часть

1 – Вычислить интеграл

$$\int_0^2 (2x^3 - 4x^2 + 6x - 25)dx = \left. \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 25x \right|_0^2 = \frac{-122}{3} = -40. (6)$$

2 – Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при n = 8

Вычисляем коэффициенты Ньютона – Котеса

$$c_8^0 = c_8^8 = \frac{989 \cdot (2-0)}{28350} = \frac{989}{14175}$$

$$c_8^1 = c_8^7 = \frac{5888 \cdot (2-0)}{28350} = \frac{5888}{14175}$$

$$c_8^2 = c_8^6 = -\frac{928 \cdot (2-0)}{28350} = -\frac{928}{14175}$$

$$c_8^3 = c_8^5 = \frac{10496 \cdot (2-0)}{28350} = \frac{10496}{14175}$$

$$c_8^4 = -\frac{4540 \cdot (2-0)}{28350} = -\frac{908}{2835}$$

$$\int_0^2 (2x^3 - 4x^2 + 6x - 25)dx \approx \sum_{i=0}^8 f(x_i) c_n^i$$

$$\approx c_8^0 f(0) + c_8^1 f\left(\frac{2}{8}\right) + c_8^2 f\left(\frac{4}{8}\right) + c_8^3 f\left(\frac{6}{8}\right) + c_8^4 f\left(\frac{8}{8}\right) + c_8^5 f\left(\frac{10}{8}\right) + c_8^6 f\left(\frac{12}{8}\right) + c_8^7 f\left(\frac{14}{8}\right) + c_8^8 f(2)$$

$$\approx -40.667$$

3 – Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n = 10

- Метод средних прямоугольников

Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей  $n = 10, h = \frac{b-a}{n} = 0.2$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

$x_i$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$y_i$	-25	-23.944	-23.112	-22.408	-21.736	-21	-20.104	-18.952	-17.448	-15.496	-13
$x_{i-\frac{1}{2}}$		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$y_{i-\frac{1}{2}}$		-24.438	-23.506	-22.75	-22.074	-21.382	-20.578	-19.566	-18.25	-16.534	-14.322

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$$I_{\text{прав}} = h \sum_{i=1}^n y_i = 0.2 * -197.2 = -39.44$$

$$I_{\text{лев}} = h \sum_{i=1}^n y_{i-1} = 0.2 * -209.2 = -41.84$$

$$I_{\text{сред}} = h \sum_{i=1}^n y_{i-\frac{1}{2}} = 0.2 * -203.4 = -40.68$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет

$$\Delta I_{\text{прав}} = I - I_{\text{прав}} = -40. (6) - (-39.44) = -1.227 (\approx 3.016\%)$$

$$\Delta I_{\text{лев}} = I - I_{\text{лев}} = -40. (6) - (-41.84) = 1.173 (\approx 2.885\%)$$

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = -40. (6) - (-40.68) = 0.01(3) (\approx 0.033\%)$$

- Метод трапеций

Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей  $n = 10, h = \frac{b-a}{n} = 0.2$

$$I_{\text{трап}} = h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) = 0.2 \cdot \left( \frac{-25 + 15.496}{2} - 184.2 \right) = -40.64$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет

$$\Delta I_{\text{трап}} = I - I_{\text{трап}} = -40. (6) - (-40.64) = 0.02(6) (\approx 0.066\%)$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2

$y_i$	-25	-23.944	-23.112	-22.408	-21.736	-21	-20.104	-18.952	-17.448	-15.496	-13
-------	-----	---------	---------	---------	---------	-----	---------	---------	---------	---------	-----

- Метод Симпсона

Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей  $n = 10, h = \frac{b-a}{n} = 0.2$

$$I = \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_8) + y_{10}]$$

$$= \frac{0.2}{3} (-25 - 407.2 - 164.8 - 13) = -40. (6)$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$y_i$	-25	-23.944	-23.112	-22.408	-21.736	-21	-20.104	-18.952	-17.448	-15.496	-13

## 5. Листинг программы

### Программы для методов

```
private double LeftRectangleMethod(double a, double b, double h){
    double res = 0;
    for(double i = a; i < b - h/2; i += h) res += h * apply(i);
    return res;
}
private double RightRectangleMethod(double a, double b, double h){
    double res = 0;
    for(double i = a + h; i < b + h/2; i += h) res += h * apply(i);
    return res;
}
private double MiddleRectangleMethod(double a, double b, double h){
    double res = 0;
    for(double i = a + h/2; i < b; i += h) res += h * apply(i);
    return res;
}
private double TrapezoidMethod(double a, double b, double h){
    double sum = 0;
    for(double i = a + h; i < b - h/2; i += h)
        sum += apply(i);
    return h*((apply(a) + apply(b))/2 + sum);
}
private double SimpsonMethod(double a, double b, double h){
    double sum1 = 0;
    double sum2 = 0;
    for(double i = a + h; i < b - h/2; i += 2*h) sum1 += apply(i);
    for(double i = a + 2*h; i < b - h/2; i += 2*h) sum2 += apply(i);
    return h/3*(apply(a) + 4*sum1 + 2*sum2 + apply(b));
}
```

### Программы для проверки погрешности

```

private double RungeRule(double res, double res2){
    return Math.abs(res2 - res)/(Math.pow(2,k) - 1);
}
private double supMethod(double a, double b, double h){
    switch (MethodNum){
        case 1:
            k = 2;
            return LeftRectangleMethod(a, b, h);
        case 2:
            k = 2;
            return RightRectangleMethod(a, b, h);
        case 3:
            k = 2;
            return MiddleRectangleMethod(a, b, h);
        case 4:
            k = 2;
            return TrapezoidMethod(a, b, h);
        default:
            k = 4;
            return SimpsonMethod(a, b, h);
    }
}
private Result subResul(double a, double b){
    Result result = new Result();
    result.n = nmin;
    do{
        result.res = supMethod(a,b,Math.abs(b-a)/result.n);
        result.n *= 2;
        result.res2 = supMethod(a,b,Math.abs(b-a)/ result.n);
    } while(Math.abs(result.res2 - result.res) > epsilon);
    return result;
}

```

## Дополнительное задание

```

private double c; // Особая точка подынтегральной функции
public void resultImproperIntegral(){
    Timer timer = new Timer();
    timer.schedule(new TimerTask() {
        @Override
        public void run() {
            System.out.println("Интеграл не существует");
            System.exit(0);
        }
    }, 3000);
    if(a <= c && c <= b){
        Result res = new Result();
        try{
            double e = 0.0001;
            if(a == c) res = subResul(a + e,b);
            else if(b == c) res = subResul(a, b - e);
            else {
                Result res1 = subResul(a,c - e);
                Result res2 = subResul(c + e,b);
                res.res = res1.res + res2.res;
                res.res2 = res1.res2 + res2.res;
                res.n = Math.max(res1.n, res2.n);
            }
        } catch (Exception e){
            System.out.println("Интеграл не существует");
            return;
        }
        res.print();
        System.exit(0);
    }
}

```

```

    }
    else{
        resultIntegral();
        System.exit(0);
    }
}

```

## 6. Результаты выполнения программы

### Обязательное задание

ЧАСТЬ 1: ОБЯЗАТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Взять исходные данные из файла (+) или ввести с клавиатуры (-)?

Режим ввода:

+

Значение интеграла: 2.3146093749999994

Число разбиения: 80

Погрешность по правилу Рунге: 0.0031184895833433757

Попробуйте с другими методами (+/-) ?

Режим ввода:

+

Выберите функцию

- 1) Метод левых прямоугольников
- 2) Метод средних прямоугольников
- 3) Метод правых прямоугольников
- 4) Метод трапеций
- 5) Метод Симпсона

Выберите метод из списка

4

Значение интеграла: 2.34

Число разбиения: 5

Погрешность по правилу Рунге: 0.00166666666666661871

Режим ввода:

-

Выберите функцию

- 1)  $2x^3 - 4x^2 + 6x - 25$
- 2)  $1/10x^4 + 1/5x^2 - 7$
- 3)  $x^3 - 2x^2 - 5x + 7$
- 4)  $x^2$

Выберите функцию из списка

4

Выберите функцию

- 1) Метод левых прямоугольников
- 2) Метод средних прямоугольников
- 3) Метод правых прямоугольников
- 4) Метод трапеций
- 5) Метод Симпсона

Выберите метод из списка

1

Введите пределы интегрирования:

1 2

Введите точность вычисления:

0.01

Введите начальное значение числа разбиения:

5

Значение интеграла: 2.314609374999994

Число разбиения: 80

Погрешность по правилу Рунге: 0.0031184895833433757

## Дополнительное задание

-----  
ЧАСТЬ 2: НЕОБЯЗАТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Взять исходные данные из файла (+) или ввести с клавиатуры (-)?

Режим ввода:

+

Интеграл не существует



Выберите функцию

5)  $1/x^2$

6)  $1/\sqrt{x}$

7)  $1/(1-x)$

Выберите функцию из списка

6

Выберите функцию

1) Метод левых прямоугольников

2) Метод средних прямоугольников

3) Метод правых прямоугольников

4) Метод трапеций

5) Метод Симпсона

Выберите метод из списка

1

Введите пределы интегрирования:

0 1

Введите точность вычисления:

0.01

Введите начальное значение числа разбиения:

5

Значение интеграла: 1.991051512821941

Число разбиения: 5120

Погрешность по правилу Рунге: 0.0019464219747543272

## 7. Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работой я познакомился с численными методами интегрирования и реализовал метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона на языке программирования Java, закрепив знания.