Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№2**
«Численное решение нелинейных уравнений и систем»

по дисциплине «Вычислительная математика**»**

Вариант: **4**

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Касымов Тимур Шавкатович
Группа: P3210

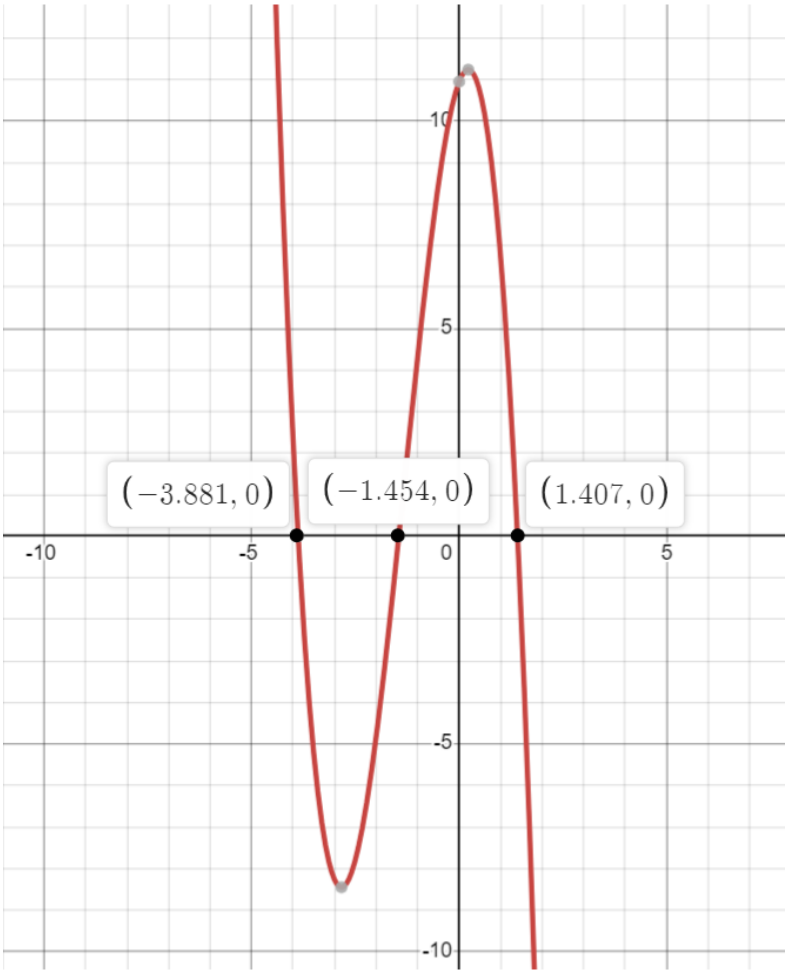
Санкт-Петербург, 2024 г.

<u>Цель работы</u>: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

1. Вычислительная реализация задачи

1. Решение нелинейного уравнения

1. $-1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57x + 10{,}95$



2.

Для определения интервалов изоляции корней данного уравнения, можно воспользоваться методом интервалов знакопеременности. Для этого нужно найти значения функции на различных интервалах и определить знак функции на каждом из них.

Получим приближенные значения корней:
x ≈ -3.9, x ≈ -1.5, x ≈ 1.4

Теперь нужно разбить ось x на 4 интервала: (-∞, -3.9), (-3.9, -1.5), (-1.5, 1.4) и (1.4, +∞). На каждом из этих интервалов нужно определить знак функции.

Для этого можем вычислить значения функции в произвольной точке каждого интервала. Например, для интервала (-∞, -3.9) можно выбрать x = -4, для интервала (-3.9, -1.5) x = -2, для интервала (-1.5, 1.4) x = 0, и для интервала (1.4, +∞) x = 2.

Таким образом, получим следующие значения функции:

для x = -4: f(-4) = 2.27

для x = -2: f(-2) = -4.83

для x = 0: f(0) = 10.95

для x = 2: f(2) = -16.63

Знаки функции на каждом интервале будут соответственно:

(-∞, -3.9)	(-3.9, -1.5)	(-1.5, 1.4)	(1.4, +∞)
+	-	+	-

Таким образом, мы получаем два интервала изоляции корней уравнения:

(-4, -1.5), (-1.5, 1) и (1, 1.5).

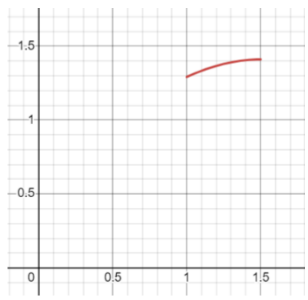
3.

$x_1 \approx -3{,}88$
$x_2 \approx -1{,}45$
$x_3 \approx 1{,}41$

4.

Крайний правый корень – **Метод простой итерации**

$\varphi(x)$

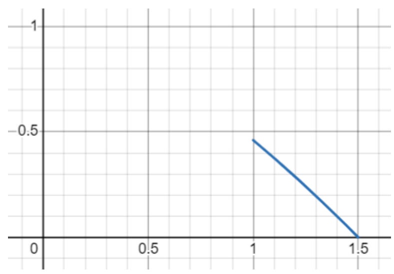


sПроверка **условия сходимости** метода на выбранном интервале:
$f(x) = -1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57x + 10{,}95 = 0$
$f'(x) = -4{,}14x^2 - 10{,}84x + 2{,}57$
$f'(a) = -12{,}41 < 0, f'(b) = -23{,}005 < 0$
$\max(|f'(a)|, |f'(b)|) = 23{,}005 \rightarrow \lambda = \frac{1}{\max(|f'(x)|)} = \frac{1}{23{,}005}$

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x + \frac{-1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57x + 10{,}95}{23{,}005}$$

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 + \frac{-4{,}14x^2 - 10{,}84x + 2{,}57}{23{,}005}$$

$\varphi'(x)$



На отрезке начального приближения [1, 1.5] функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема.

$|\varphi'(a)| = 0{,}461$
$|\varphi'(b)| = 0$
$|\varphi'(x)| \leq q$, где $q = 0{,}461$
$0 \leq q < 1 \rightarrow$ **итерационная последовательность сходится,** скорость сходимости высокая, $0 \leq q < 0{,}5 \rightarrow$ критерий окончания итерационного процесса $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$, $x_0 = 1.5$

№	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	1.500	1.411	-0.091	0.089
2	1.411	1.40704	-0.00834798	0.00396
3	1.40704	1.40668	-0.000833168	0.00036
4	1.40668	**1.40664**	0.00000163104	0.00004

Крайний левый корень – **Метод хорд**

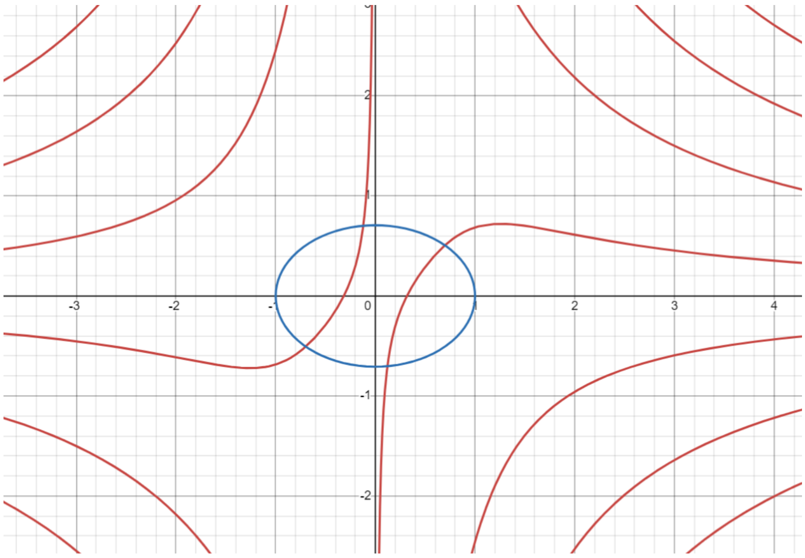
№	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	-4.000	-1.908	-3.254	2.270	-4.098	-7.253	1.346
2	-4.000	-3.254	-3.822	2.270	-7.253	-0.996	0.568
3	-4.000	-3.822	-3.876	2.270	-0.996	-0.072	0.054
4	-4.000	-3.876	**-3.880**	2.270	-0.072	-0.005	0.004

Центральный корень – **Метод половинного деления**

№	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|a – b|
1	-1.500	1.000	-0.250	-0.443	6.720	9.990	2.500
2	-1.500	-0.250	-0.875	-0.443	9.990	5.476	1.250
3	-1.500	-0.875	-1.188	-0.443	5.476	2.566	0.625
4	-1.500	-1.188	-1.344	-0.443	2.566	1.058	0.312
5	-1.500	-1.344	-1.422	-0.443	1.058	0.305	0.156
6	-1.500	-1.422	-1.461	-0.443	0.305	-0.070	0.078
7	-1.461	-1.422	-1.441	-0.070	0.305	0.117	0.039
8	-1.461	-1.441	-1.451	-0.070	0.117	0.024	0.020
9	-1.461	-1.451	**-1.456**	-0.070	0.024	-0.023	0.010

2. Решение системы нелинейных уравнений

1. $\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$, Метод Ньютона



2.

$$\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{f(x,y)} = 0 \\ \mathrm{g(x,y)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg(xy+0.1) - x^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения эллипса и $tg(xy+0.1) - x^2 = 0$, следовательно, система имеет не более четырех различных решений.

Построим матрицу Якоби:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,sec(xy+0.1) - 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x\,sec^2(xy+0.1)$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 4y$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y\,sec(xy+0.1) - 2 & x\,sec^2(xy+0.1) \\ 2x & 4y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - tg(xy+0.1) \\ 1 - x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ysec(xy+0.1)\Delta x - 2\Delta x + x\,sec^2(xy+0.1)\Delta y = x^2 - tg(xy+0.1) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Корень 1: Шаг 1: Выбираем $x_0 = -0.12;\ y_0 = 0.7$

$$\begin{cases} ysec(xy+0.1)\Delta x - 2\Delta x + x\,sec^2(xy+0.1)\Delta y = x^2 - tg(xy+0.1) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Шаг 2. Решаем полученную систему.

$$\begin{cases} \Delta x + 0.077\,\Delta y = 0.0154 \\ -0.2\Delta x + 2.8\Delta y = 0.01 \end{cases} \to \Delta x = -0.0014;\ \Delta y = 0.0019$$

Шаг 3. Вычисляем очередные приближения:

$x_1 = x_0 + \Delta x = -0.12 - 0.0014 = -0.1214$

$y_1 = y_0 + \Delta y = 0.7 + 0.0019 = 0.7019$

$|x_1 - x_0| \le \varepsilon$, $|y_1 - y_0| \le \varepsilon$

$|-0.1214 + 0.12| \le \varepsilon$, $|0.7019 - 0.7| \le \varepsilon$ → ответ найден, **корень 1**: $(-0.1214, 0.7019)$

Аналогично находим **другой корень**: $(0.698, 0.506)$

Из графического решения, корни симметричны, следовательно, **другие 2 корня** $(-0.698, -0.506), (0.1214, -0.7019)$

2. Программная реализация задачи

```
metods.equation.push({
	"name":"Метод половинного деления",
	"eps_req": true,
	"interval_req": true,
	"calculate":
		(f, arg)=>{
			let a = arg['a'];
			let b = arg['b'];
			let eps = arg['eps'];
			let path = [];

			if (f(a) * f(b) >= 0) return "Уравнение не удовлетворяет условию метода половинного деления.";

			let c = a;
			var iter = 0;
			while (1) {
				iter++;
				c = (a + b) / 2;
				path.push({x: c, y: f(c)});

				if ((b - a) < eps) {
					break;
```

```
                } else if (f(c) === 0.0) {
                    break;
                } else if (f(c) * f(a) < 0) {
                    b = c;
                } else {
                    a = c;
                }
            }

            return {path: path, text: 'Корень: ('+math.floor(c,math.floor(4-
math.log10(eps))) + ', '+math.floor(f(c),math.floor(4-math.log10(eps)))+'). Количество
итераций: '+iter};
        }
});

metods.equation.push({
    "name":"Метод секущих",
    "eps_req": true,
    "interval_req": true,
    "calculate":
        (f, arg, df) => {
            let a = arg['a'];
            let b = arg['b'];
            let eps = arg['eps'];
            let path = [];

            let x_prev = 0;
            let x_curr = a;
            let x_next = b;
            let tmp;

            path.push({x: x_curr, y: f(x_curr)});

            var iter = 0;
            do
            {
                iter++;
                x_prev = x_curr;
                x_curr = x_next;
                x_next = x_curr - f(x_curr) * (x_prev - x_curr) / (f(x_prev) -
f(x_curr));

                path.push({x: x_next, y: f(x_next)});
            } while (Math.abs(x_next - x_curr) > eps);

            return {path: path, text: 'Корень: ('+math.floor(x_next,math.floor(4-
math.log10(eps))) + ', '+math.floor(f(x_next),math.floor(4-math.log10(eps)))+').
Количество итераций: '+iter};
        }
});
```

```
metods.equation.push({
	"name": "Метод простой итерации",
	"eps_req": true,
	"x0_req": true,
	"calculate": (f, arg, df) => {
		let x0 = arg['x0'];
		let eps = arg['eps'];
		let path = [];

		let lambda = 1/df(x0);

		const g = (x) => {
		  return x-lambda*f(x);
		};

		let x_next = x0;
		path.push({x: x_next, y: f(x_next)});
		let iter = 0;
		let x_current;
		do {
			x_current = x_next;
			x_next = g(x_current);
			if (Math.abs((x_next-g(x_current+eps/10))*eps/10)>=1) return 'не выполнено условие сходимости!';
			path.push({x: x_next, y: f(x_next)});
			iter++;
		} while (Math.abs(x_next - x_current) >= eps);

		return {
			path: path,
			text: 'Корень: (' + math.floor(x_next,math.floor(4-math.log10(eps))) + ', '+math.floor(f(x_next),math.floor(4-math.log10(eps))) + '). Количество итераций: ' + iter
		};
	}
});

metods.system.push({
  "name": "Метод ньютона",
  "eps_req": true,
  "x0_req": true,
  "calculate": (f, g, jacobian, arg) => {
    let x = arg['x0'];
    let y = arg['y0'];
    let eps = 0.01;
    let path = [];

    let iter = 0;
    path.push({x:x, y:y});

    let delta;
    do {
```

```
    let fg = [[f(x, y)],[g(x,y)]];

    let jac = jacobian(x, y);

    try{delta = math.multiply(math.inv(jac), math.multiply(-1, fg));} catch{break;}
        delta = [delta[0][0], delta[1][0]];
    x -= delta[0];
    y -= delta[1];

    path.push({x:x, y:y});
    iter++;
  } while (math.norm(delta) >= eps);

  return {
    path: path,
    text: 'Корень: (' + math.floor(x,math.floor(4-math.log10(eps))) + ', '+math.floor(y,math.floor(4-math.log10(eps))) + '). Количество итераций: ' + iter
  };
 }
});
```

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений с использованием JS. В результате работы были найдены корни заданных уравнений и систем с использованием различных численных методов, а также были построены графики функций для полного представления исследуемых интервалов.