Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№4**
«Аппроксимация функции методом наименьших квадратов»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **4**

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Касымов Тимур Шавкатович
Группа: P3210

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

1. Вычислительная реализация задачи

Линейная аппроксимация:

$$y = \frac{15x}{x^4+4}$$

n = 11
x ∈ [-4; 0]
h = 0.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y_i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233

φ(x) = a + bx

Вычисляем суммы: sx = 22, sxx = 61.6, sy = 19.52 sxy = 26.116

$$\begin{cases} n*a+sx*b=sy \\ sx*a+sxx*b=sxy \end{cases} \begin{cases} 11*a+22*b=19.52 \\ 22*a+61.6*b=26.116 \end{cases} \begin{cases} 11*a+22*b=19.52 \\ 17.6*b=-12.924 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-12.924/\,17.6\ =-0.7343 \\ 11a=19.52-22*(-0.7343)=35.6746 \end{cases} \begin{cases} b\ =-0.7343 \\ a=3.2431 \end{cases}$$

φ(x) = $3.2431-0.7343*x$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y_i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233
φ(xi)	3.243	2.949	2.656	2.362	2.068	1.775	1.481	1.187	0.893	0.6	0.306
(φ (xi)-yi)^2	10.518	0.0	5.403	4.231	0.544	0.012	0.21	0.276	0.197	0.079	0.00

σ = $\sqrt{\frac{\sum(\varphi\ (xi)-yi)^2}{n}}$ = **1.3972**

Квадратичная аппроксимация:

y = $\frac{15x}{x^4+2}$
n = 11
x ∈ [0; 4]
h = 0.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y_i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233

φ(x) = a + bx + cx^2

Вычисляем суммы:
sx = 22, sxx = 61.6, sxxx = 193.6, sxxxx = 648.52, sy = 19.52, sxy = 26.116, sxxy = 47.405

$$\begin{cases} n*a+sx*b+sxx*c=sy \\ sx*a+sxx*b+sxxx*c=sxy \\ sxx*a+sxxx*b+sxxxx*c=sxxy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11*a+22*b+61.6*c=19.52 \\ 22*a+61.6*b+193.6*c=26.116 \\ 61.6*a+193.6*b+648.52*c=47.405 \end{cases}$$

По методу Крамера:
$\Delta = 4251.456$
$\Delta_1 = 9043.80576, \Delta_2 = 4785.47696, \Delta_3 = -1976.8496$

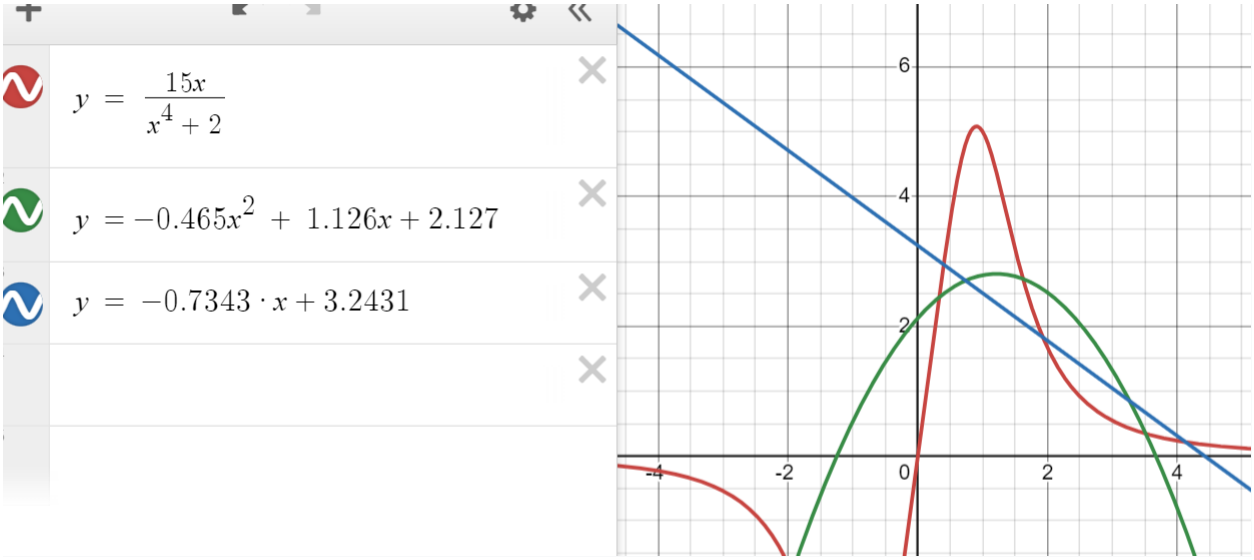
$$\begin{cases} a=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{9043.80576}{4251.456}\approx 2.127 \\ b=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{4785.47696}{4251.456}\approx 1.126 \\ c=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-1976.8496}{4251.456}\approx -0.465 \end{cases}$$

φ(x) $= 2.127 + 1.126x - 0.465x^2$

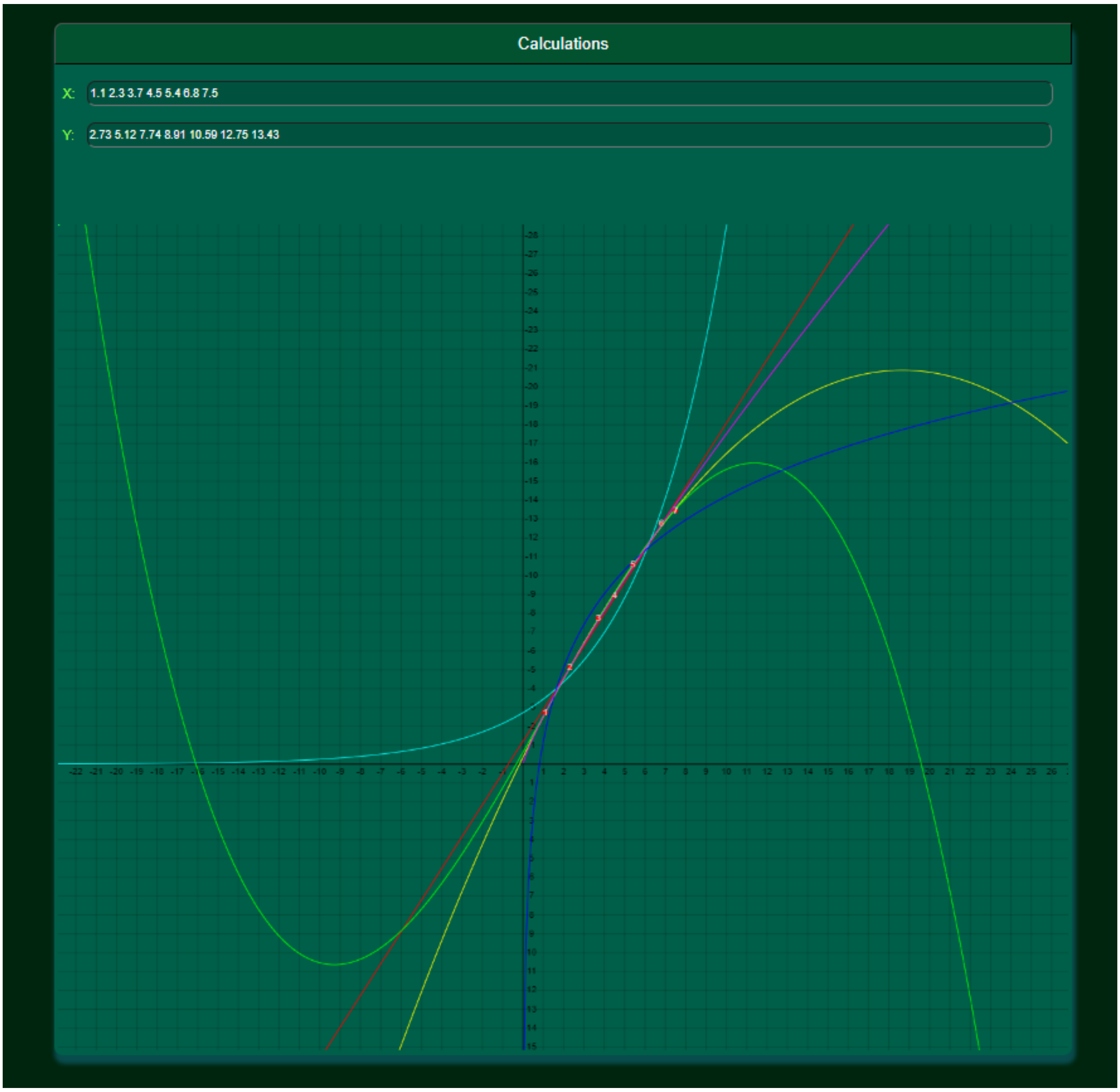
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y_i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233
φ(xi)	2.127	2.503	2.73	2.809	2.738	2.519	2.151	1.634	0.969	0.154	-0.809
(φ (xi)-yi)^2	4.524	0.211	5.062	2.593	0.005	0.726	1.272	0.945	0.27	0.027	1.086

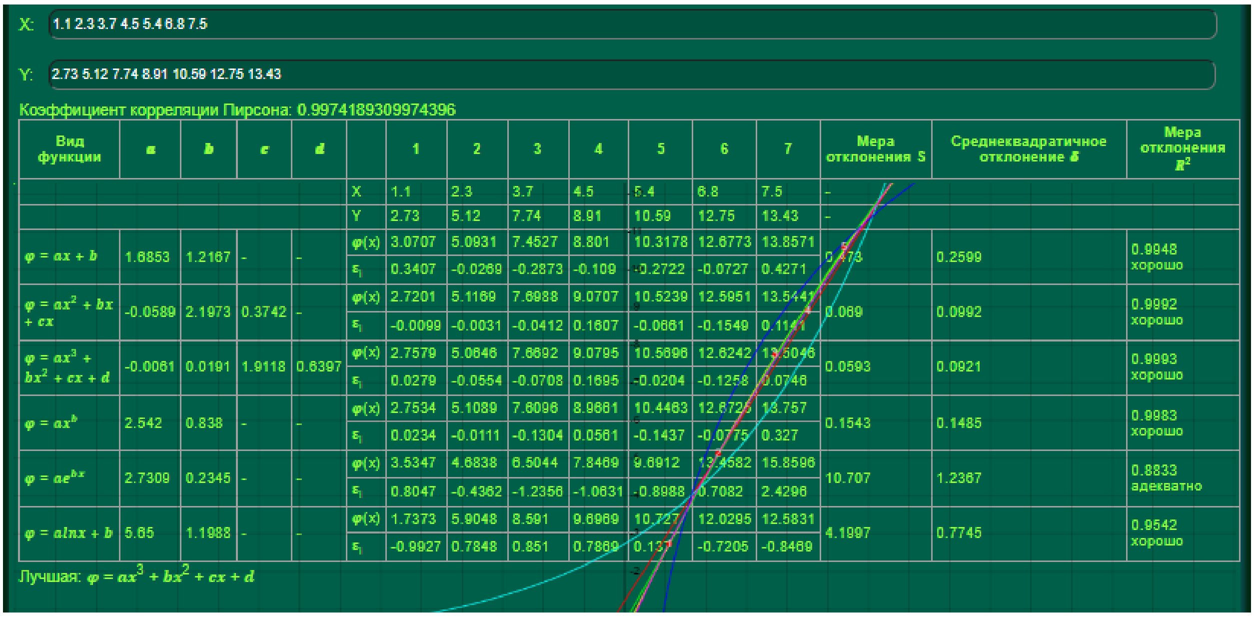
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\varphi\ (xi) - yi)^2}{n}} = \mathbf{1.23292}$$

1.23292 < 1.3972, у квадратичной аппроксимации среднеквадратичное отклонение меньше, поэтому это приближение лучше.



2. Программная реализация задачи





X: 1.1 2.3 3.7 4.5 5.4 6.8 7.5

Y: 2.73 5.12 7.74 8.91 10.59 12.75 13.43

Коэффициент корреляции Пирсона: 0.9974189309974396

Вид функции	a	b	c	d		1	2	3	4	5	6	7	Мера отклонения S	Среднеквадратичное отклонение δ	Мера отклонения R^2
					X	1.1	2.3	3.7	4.5	5.4	6.8	7.5	-		
					Y	2.73	5.12	7.74	8.91	10.59	12.75	13.43	-		
$\varphi = ax + b$	1.6853	1.2167	-	-	$\varphi(x)$	3.0707	5.0931	7.4527	8.801	10.3178	12.6773	13.8571	0.473	0.2599	0.9948 хорошо
					ε_i	0.3407	-0.0269	-0.2873	-0.109	-0.2722	-0.0727	0.4271			
$\varphi = ax^2 + bx + cx$	-0.0589	2.1973	0.3742	-	$\varphi(x)$	2.7201	5.1169	7.6988	9.0707	10.5239	12.5951	13.5441	0.069	0.0992	0.9992 хорошо
					ε_i	-0.0099	-0.0031	-0.0412	0.1607	-0.0661	-0.1549	0.1141			
$\varphi = ax^3 + bx^2 + cx + d$	-0.0061	0.0191	1.9118	0.6397	$\varphi(x)$	2.7579	5.0646	7.6692	9.0795	10.5696	12.6242	13.5046	0.0593	0.0921	0.9993 хорошо
					ε_i	0.0279	-0.0554	-0.0708	0.1695	-0.0204	-0.1258	0.0746			
$\varphi = ax^b$	2.542	0.838	-	-	$\varphi(x)$	2.7534	5.1089	7.6096	8.9661	10.4463	12.6725	13.757	0.1543	0.1485	0.9983 хорошо
					ε_i	0.0234	-0.0111	-0.1304	0.0561	-0.1437	-0.0775	0.327			
$\varphi = ae^{bx}$	2.7309	0.2345	-	-	$\varphi(x)$	3.5347	4.6838	6.5044	7.8469	9.6912	13.4582	15.8596	10.707	1.2367	0.8833 адекватно
					ε_i	0.8047	-0.4362	-1.2356	-1.0631	-0.8988	0.7082	2.4296			
$\varphi = a\ln x + b$	5.65	1.1988	-	-	$\varphi(x)$	1.7373	5.9048	8.591	9.6969	10.727	12.0295	12.5831	4.1997	0.7745	0.9542 хорошо
					ε_i	-0.9927	0.7848	0.851	0.7869	0.137	-0.7205	-0.8469			

Лучшая: $\varphi = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Вывод

В ходе данной работы была выполнена аппроксимация функций с использованием линейного, квадратичного, кубического, экспоненциального и логарифмического приближений. Также на основе этих методов был реализован JS скрипт, который реализует метод наименьших квадратов и строит графики исходной функции и аппроксимаций.

Исследование позволило определить наилучшее приближение, вычислить среднеквадратические отклонения и коэффициент корреляции Пирсона для линейной зависимости.