Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

09.03.04 Программная инженерия

Системное и прикладное программное обеспечение

# Лабораторная работа №2
По дисциплине «Вычислительная математика»
Вариант № 1

Выполнила студентка группы P3213:

Авшистер Ольга Аркадьевна

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

г. Санкт-Петербург 2024 г.

## Цель работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

## Рабочие формулы

Метод Ньютона:

$$\boxed{x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}}$$

Метод секущих:

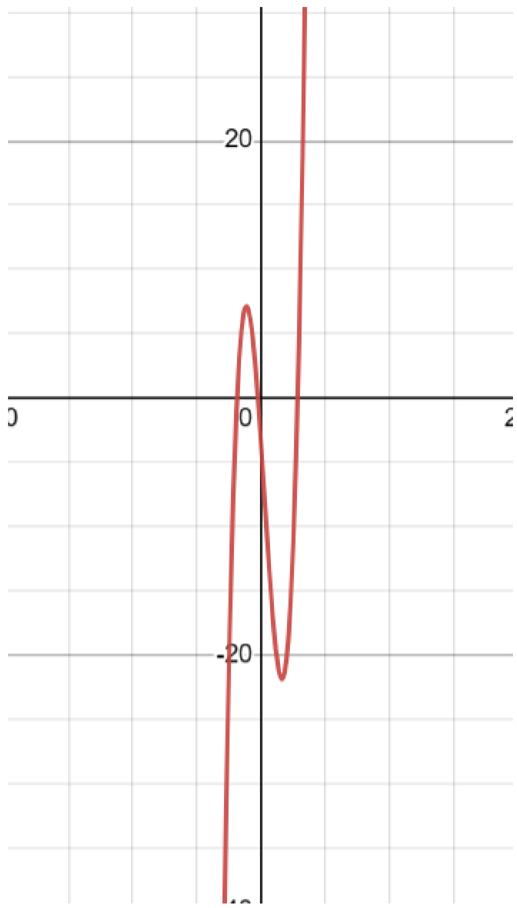
$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)$$

Метод простой итерации:

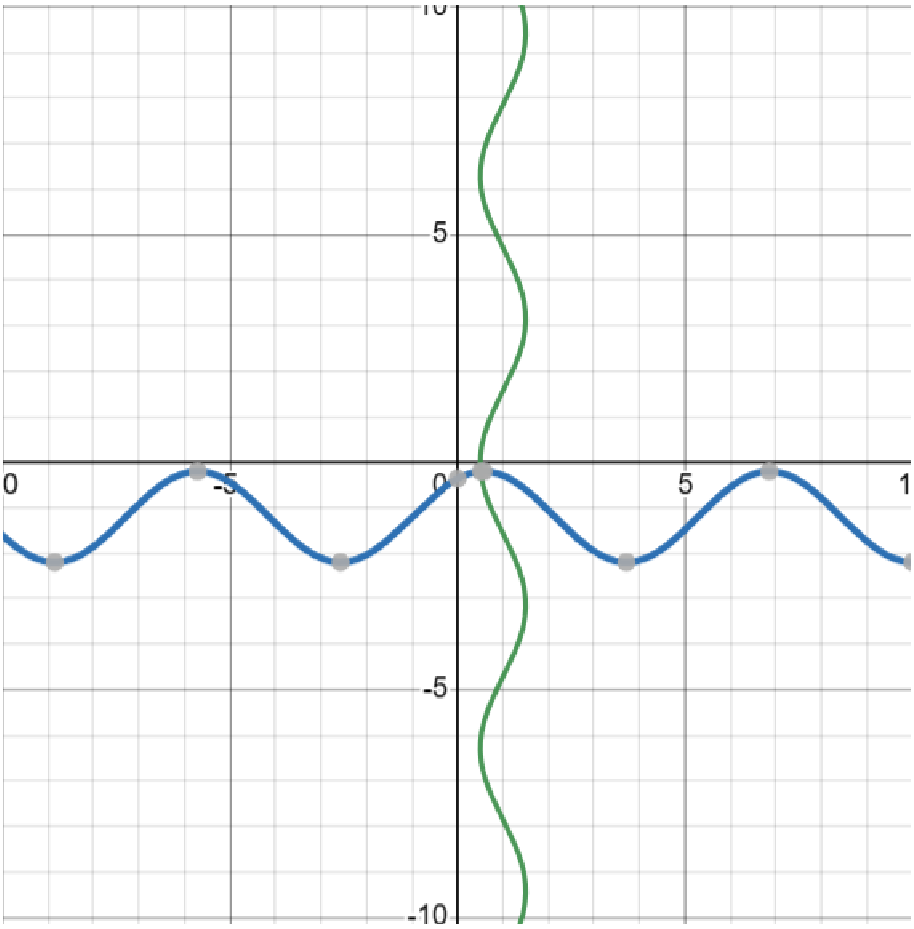
$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

## Графики функции

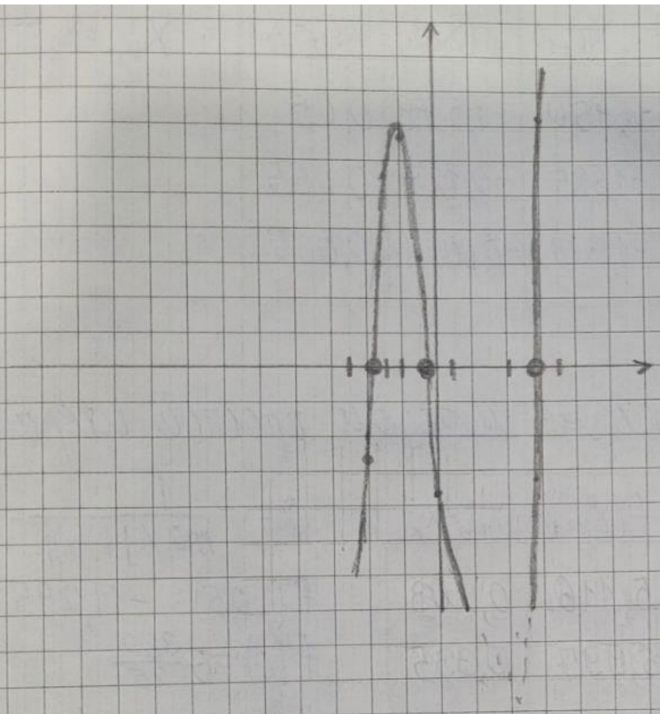
$$y = 2.74x^3 - 1.93x^2 - 15.28x - 3.72$$



$$\begin{cases} sin(x+1) - y = 1.2 \\ 2x + cos\, y = 2 \end{cases}$$



## Вычислительная часть



| x | f(x) |
|---|---|
| -3 | -49,23 |
| -2,5 | -20,395 |
| -2 | -2,8 |
| -1,5 | 5,61 |
| -1 | 6,89 |
| -0,5 | 3,095 |
| 0 | -3,72 |
| 0,5 | -11,5 |
| 1 | -18,19 |
| 1,5 | -21,735 |
| 2 | -20,08 |
| 2,5 | -11,17 |
| 3 | 7,05 |
| 3,5 | 36,635 |

$$f'(x) = \frac{411}{50}x^2 - \frac{193}{50}x - \frac{38}{25}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

### Уточнение корня методом Ньютона

| № итерации | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ | $x_{k+1}$ | $\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,500 | -11,170 | 26,445 | 2,922 | 0,422 |
| 2 | 2,922 | 3,512 | 43,624 | 2,841 | 0,081 |
| 3 | 2,841 | 0,122 | 40,099 | 2,838 | 0,003 |
| 4 | 2,838 | 0,001 | 39,971 | 2,838 | ≈0 |

## Уточнение корня методом секущих

| № итерации | $x_{k-1}$ | $x_k$ | $x_{k+1}$ | $f(x_{k+1})$ | $\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | -2,000 | -1,950 | -1,579 | 0,05 |
| 2 | -2,000 | -1,950 | -1,885 | -0,127 | 0,065 |
| 3 | -1,950 | -1,885 | -1,879 | -0,0004 | 0,006 |

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

## Уточнение корня методом простой итерации

| № итерации | $x_k$ | $x_{k+1}$ | $f(x_{k+1})$ | $\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,500 | -0,297 | 0,576 | 0,203 |
| 2 | -0,297 | -0,259 | 0,060 | 0,038 |
| 3 | -0,259 | -0,255 | 0,005 | 0,004 |

$$\lambda = \frac{1}{max\lvert f'(x)\rvert} = \frac{25}{382}$$

$$f'(-0,5) = -11,295$$

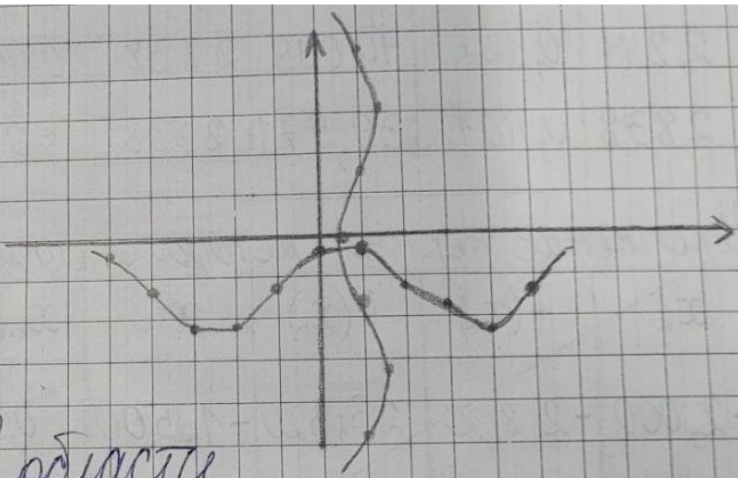
$$f'(0) = -\frac{382}{25}$$

$$x = x + \lambda f(x)$$

$$x = x + \frac{25}{382}(2,74x^3 - 1,93x^2 - 15,28x - 3,72)$$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{137}{764}x^3 - \frac{193}{1528}x^2 - \frac{93}{382}}$$

$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$$



Из графика видно, что корень системы лежит в области

$0 < x < 1$ и $0 < y < 1$

$$\begin{cases} y = \sin(x+1) - 1{,}2 \\ x = 1 - \frac{1}{2}\cos y \end{cases}$$

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \cos(x+1)$ $\quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin y$

$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| = \cos(x+1)$ $\quad \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| = \frac{1}{2}\sin y$

Т.к $|\cos(a)|$ и $\frac{1}{2}|\sin(a)|$ всегда меньше либо равны 1 и в данной области они не принимают значение 1

$\Rightarrow \max|\varphi'(x)| < 1 \rightarrow$ процесс сходящийся

Выберем начальное приближение: $x_0 = 1$ и $y_0 = 1$

1 шаг:

$x_1 = 1 - \frac{1}{2}\cos 1 \approx 0{,}7298 \qquad |x_1 - x_0| = 0{,}2702 > \varepsilon$

$y_1 = \sin 2 - 1{,}2 \approx -0{,}2907 \qquad |y_1 - y_0| = 1{,}2907 > \varepsilon$

2 шаг:

$x_2 = 1 - \frac{1}{2}\cos(-0{,}2907) \approx 0{,}521 \qquad |x_2 - x_1| = 0{,}2088 > \varepsilon$

$y_2 = \sin(1{,}7298) - 1{,}2 \approx -0{,}213 \qquad |y_2 - y_1| = 0{,}0777 > \varepsilon$

3 шаг:

$x_3 = 1 - \frac{1}{2}\cos(-0{,}213) \approx 0{,}511 \qquad |x_3 - x_2| = 0{,}01 = \varepsilon$

$y_3 = \sin(1{,}521) - 1{,}2 \approx -0{,}201 \qquad |y_3 - y_2| = 0{,}012 > \varepsilon$

4 шаг:

$x_4 = 1 - \frac{1}{2}\cos(-0{,}201) \approx 0{,}51 \qquad |x_4 - x_3| = 0{,}001 < \varepsilon$

$y_4 = \sin(1{,}511) - 1{,}2 \approx -0{,}2 \qquad |y_4 - y_3| = 0{,}001 < \varepsilon$

## Листинг программы

### Для уравнений

```
def pol_del(a, b, e):
    y_0 = 10 ** 8
    last = 5000
    x_0 = 0
    while abs(b - a) > e or abs(y_0) > e or abs(x_0 - last) > e:
        last = x_0
        x_0 = (a + b) / 2
        y_0 = f(x_0)
        y_a = f(a)
        y_b = f(b)
```

```
        if y_0 * y_a < 0:
            b = x_0
        elif y_0 * y_b < 0:
            a = x_0
    x = (a + b) / 2
    y = f(x)
    return [float('%.5f' % x), float('%.5f' % y)]


def N(a, b, e):
    y_a = f(a)
    y_b = f(b)
    x = sympy.symbols('x')
    pr2_a = diff(diff(f(x))).subs(x, a)
    pr2_b = diff(diff(f(x))).subs(x, b)
    if y_a * pr2_a > 0:
        x_i = a
    elif y_b * pr2_b > 0:
        x_i = b
    else:
        return "У метода Ньютона нет сходимости"
    last = 10 ** 8
    while (abs(f(x_i)) > e or abs(f(x_i) / diff(f(x)).subs(x, x_i)) > e or abs(x_i - last) > e) and a <= x_i <= b:
        last = x_i
        x_i = x_i - f(x_i) / diff(f(x)).subs(x, x_i)
    y = f(x_i)
    return [float('%.5f' % x_i), float('%.5f' % y)]


def pr_it(a, b, e):
    x = sympy.symbols('x')
    if diff(f(x)).subs(x, a) > 0 or diff(f(x)).subs(x, b) > 0:
        lam = - 1 / max(abs(diff(f(x)).subs(x, a)), abs(diff(f(x)).subs(x, b)))
```

```
    else:
        lam = 1 / max(abs(diff(f(x)).subs(x, a)), abs(diff(f(x)).subs(x, b)))
    phi = x + lam * f(x)
    q = max(abs(diff(phi).subs(x, a)), abs(diff(phi).subs(x, b)))
    if q > 1:
        return "В методе простых итераций сходимости нет"
    else:
        x_n = a
        last = 10 ** 8
        while abs(x_n - last) > e or abs(f(x_n)) > e:
            last = x_n
            x_n = phi.subs(x, x_n)
        y = f(x_n)
        return [float('%.5f' % x_n), float('%.5f' % y)]
```

## Для систем:

```
def N(x_0, y_0, e):
    x_0 = float(x_0)
    y_0 = float(y_0)
    x = sympy.symbols('x')
    y = sympy.symbols('y')
    m = fun(x, y, num)
    f_x = diff(m[0], x).subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    f_y = diff(m[0], y).subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    g_x = diff(m[1], x).subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    g_y = diff(m[1], y).subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    j = f_x * g_y - f_y * g_x
    f = m[0].subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    g = m[1].subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    x = float(x_0 - (f * g_y - f_y * g) / j)
    y = float(y_0 - (f_x * g - f * g_x) / j)
    it = 1
    while abs(x - x_0) > e or abs(y - y_0) > e:
        x_0 = x
```

```
    y_0 = y
    x = sympy.symbols('x')
    y = sympy.symbols('y')
    f_x = diff(m[0], x).subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    f_y = diff(m[0], y).subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    g_x = diff(m[1], x).subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    g_y = diff(m[1], y).subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    j = f_x * g_y - f_y * g_x
    f = m[0].subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    g = m[1].subs(x, x_0).subs(y, y_0)
    x = x_0 - float(f * g_y - f_y * g) / j
    y = y_0 - float(f_x * g - f * g_x) / j
    it += 1
print("Метод Ньютона дал следующий результат: x=", x, "y=", y)
print("Количество итераций равно ", it)
print("Погрешность равна ", x - x_0)
return 1
```

## Примеры и результаты работы программы

```
Выберите уравнение (цифра от 1 до 5):
1. y = x^2-2x-5
2. y = 2/x-3x
3. y = 546x-123
4. y = 2.74x^3-1.93x^2-15.28x-3.72
5. y = e^(3x)-2
5
Введите 1 для ввода данных из файла, 2 - с клавиатуры: 2
Введите границы интервала и погрешность вычисления (все числа через пробел)
0 1 0,01
Введите 1, если хотите сохранить результат в файл. 2, если нет 2
Метод половинного деления дал следующие результаты:  0.81631 0.00113
Метод Ньютона дал следующие результаты:  0.8165 0.0
Метод простой итерации дал следующие результаты:  0.81485 0.0099
```

```
Выберите систему уравнений (1 или 2):
1. 5x^2-3y=4
   7x-y=1
2. x^3-3y=5
   2x+y=1
1
Введите начальное приближение для x и y:
3 8
Метод Ньютона дал следующий результат: x= 4.24709105536004 y= 28.7296373875203
Количество итераций равно  5
Погрешность равна  -2.66124078240892e-6
```

## Вывод

В результате выполнения данной лабораторной работы были изучены численные методы решения нелинейных уравнений и их систем. У каждого из них есть свои достоинства и недостатки. Например, метод половинного деления очень прост и он всегда сходится. Однако, скорость сходимости очень мала. Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости, но она зависит от вида функции, поэтому отрезок, на котором отделяется корень, лучше выбирпть небольшой длины. Метод простой итерации прост и обладает хорошей сходимостью. Однако перед его использованием требуется преобразование исходного уравнения и проведение дополнительных вычислений.