Университет ИТМО
МФ КТиУ, Ф ПИиКТ

Лабораторная работа №1
Дисциплина «Вычислительная математика»

Решение системы линейных алгебраических уравнений СЛАУ

Выполнил:
Галлямов Камиль Рустемович

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

г. Санкт-Петербург
2024 г.

Описание метода

Основан на приведении матрицы системы к треугольному виду так, чтобы ниже ее главной диагонали находились только нулевые элементы.

Прямой ход метода Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Сначала с помощью первого уравнения исключается $x1$ из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается $x2$ из третьего и всех последующих уравнений и т.д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в левой части последнего (n-го) уравнения не останется лишь один член с неизвестным xn, т. е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим неизвестное xn. Далее, из предыдущего уравнения вычисляем $xn-1$ и т. д. Последним найдем $x1$ из первого уравнения. Метод имеет много различных вычислительных схем. Основное требование - $\det A \neq 0$.

Листинг программы (python)

```python
from random import randint


def get_random_matrix(n):
    mn = -1000
    mx = 1000
    a = [
        [randint(mn, mx) for __ in range(n)]
        for _ in range(n)
    ]
    b = [randint(mn, mx) for __ in range(n)]
    return a, b


def get_data():
    random_word = 'RANDOM'

    sn = input('введите размерность матрицы (n): ').strip()
    while not sn.isdigit() or int(sn) < 1 or int(sn) > 20:
        print('-' * 50)
        print('n должно быть числом на отрезке [1;20]')
        sn = input('введите размерность матрицы (n): ').strip()

    n = int(sn)

    rw = input(f'введите "{random_word}" для генерации рандомной матрицы (A и B): ')
    if rw == 'RANDOM':
        a, b = get_random_matrix(n)
        print('Сгенерированная матрица: ')
        for i in range(n):
            print(*a[i], '|', b[i], sep='\t')
        print('-' * 50)
    else:
        print('введите элементы матрицы A:')
        a = []
        for i in range(n):
            fl = False
            while not fl:
                try:
                    print(f'Введите строчку ({i}) (n чисел): ')
                    cur = list(map(float, input().split()))
                    assert len(cur) == n
                    fl = True
                except Exception:
                    pass
            a.append(cur)

        print('введите элементы матрицы B:')
        fl = False
        while not fl:
            try:
                print('Введите строчку (n чисел): ')
                b = list(map(float, input().split()))
                assert len(b) == n
                fl = True
            except Exception:
                pass

    return n, a, b


def get_data_from_file():
```

```
    with open('input.txt') as f:
        n = int(f.readline())
        f.readline()
        a = [
            list(map(float, f.readline().split()))
            for _ in range(n)
        ]
        f.readline()
        b = list(map(float, f.readline().split()))
        return n, a, b


def get_determinant(triangular_matrix, k):
    res = 1
    for i in range(len(triangular_matrix)):
        res *= triangular_matrix[i][i]
    return (-1) ** k * res


def get_solution_and_k(a, b):
    x = [None] * n
    k_ = 0

    for i in range(0, n - 1):
        while a[i][i] == 0:
            a = a[:i] + a[i + 1:] + [a[i]]
            b = b[:i] + b[i + 1:] + [b[i]]
            k_ += 1

        for k in range(i + 1, n):
            c = a[k][i] / a[i][i]
            a[k][i] = 0
            for j in range(i + 1, n):
                a[k][j] = a[k][j] - c * a[i][j]
            b[k] = b[k] - c * b[i]


    for i in range(n - 1, -1, -1):
        s = 0
        for j in range(i + 1, n):
            s = s + a[i][j] * x[j]
        x[i] = (b[i] - s) / a[i][i]

    return x, k_, a, b


def get_r(a, b, x):
    n = len(a)
    r = [0] * n
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            r[i] += a[i][j] * x[j]
        r[i] -= b[i]
    return r


n, a, b = get_data_from_file()

first_a = [el[:] for el in a]
first_b = b[:]

x, k, a, b = get_solution_and_k(a, b)

print('Определитель: ', get_determinant(a, k))
```

```
print('Треугольная матрица: ')

for i in range(n):
    print(*a[i], '|', b[i], sep='\t')
print('-' * 50)

print('Вектор неизвестных: ', *map(lambda xi: round(xi, 5), x))

print('Вектор невязок: ', *get_r(first_a, first_b, x))
```

Блок-схема численного метода

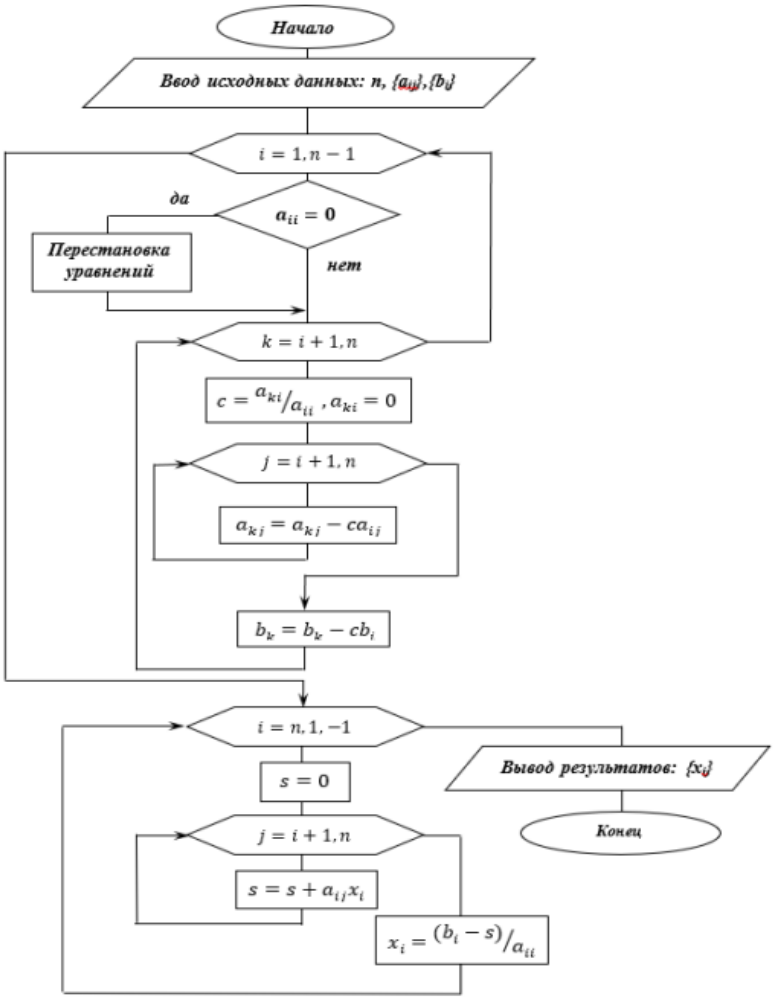
Блок-схема метода Гаусса

Первый цикл с переменной цикла i реализует прямой ход, а второй – обратный ход метода.

i – номер неизвестного, которое исключается из оставшихся $n-1$ уравнений при прямом ходе (а также номер уравнения, из которого исключается x_i) и номер неизвестного, которое определяется из i -го уравнения при обратном ходе;

k – номер уравнения, из которого исключается неизвестное x_i при прямом ходе;

j – номер столбца при прямом ходе и номер уже найденного неизвестного при обратном ходе.



Тестовые данные

Тест 1:

```
3

1 3 5
1 3 6
9 8 5

1 2 0
```

```
Определитель:  19.0
Треугольная матрица:
 1.0   3.0   5.0   |     1.0
0     -19.0 -40.0 |     -9.0
 0     0     1.0   |     1.0
-------------------------------------------------
Вектор неизвестных:  0.89474 -1.63158 1.0
Вектор невязок:  0.0 0.0 -1.7763568394002505e-15
```

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы я вспомнил теоретическую базу про слау, познакомился с численными методами, реализовал метод Гаусса на языке программирования python.

Метод Гаусса: точный метод, но при маленьких значениях имеется вычислительная погрешность.

Метод Гаусса с выбором главного элемента: точный метод, избегается вычислительная погрешность для маленьких значений, модификация метода Гаусса.

Метод простой итерации: итерационный метод, универсальный, медленная скорость сходимости.

Метод Гаусса-Зейделя: итерационный метод, универсальный, модификация простой итерации, более быстрая скорость сходимости.