Университет ИТМО
МФ КТиУ, Ф ПИиКТ

Лабораторная работа №6
Дисциплина «Вычислительная математика»

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Выполнил
Галлямов Камиль Рустемович

Преподаватель:
Машина Екатерина
Алексеевна

г. Санкт-Петербург
2024 г.

Программная реализация задачи

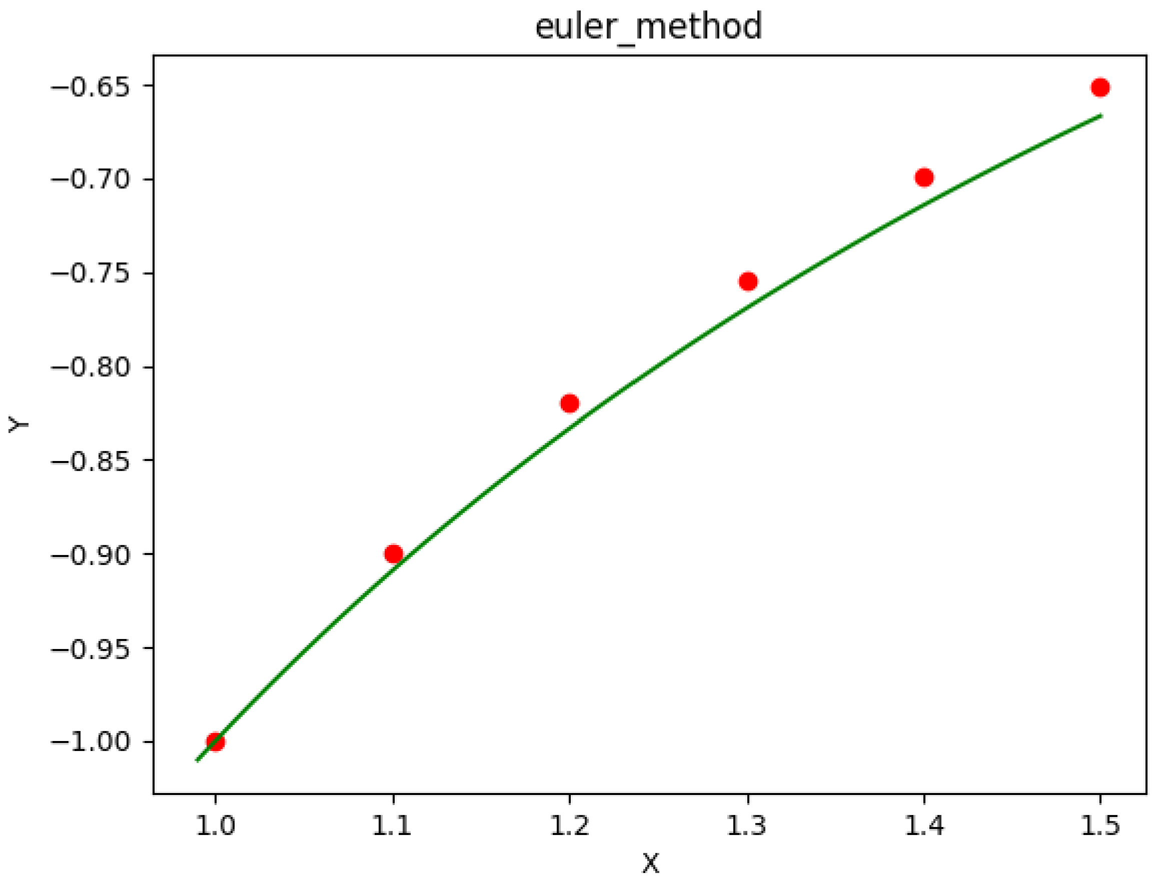
```
from matplotlib import pyplot as plt
from math import exp


def euler_method(f, xs, y0):
    ys = [y0]
    h = xs[1] - xs[0]
    for i in range(1, len(xs)):
        ys.append(ys[i - 1] + h * f(xs[i - 1], ys[i - 1]))
    return ys


def fourth_order_runge_kutta_method(f, xs, y0):
    ys = [y0]
    h = xs[1] - xs[0]
    for i in range(1, len(xs)):
        k1 = h * f(xs[i - 1], ys[i - 1])
        k2 = h * f(xs[i - 1] + h / 2, ys[i - 1] + k1 / 2)
        k3 = h * f(xs[i - 1] + h / 2, ys[i - 1] + k2 / 2)
        k4 = h * f(xs[i - 1] + h, ys[i - 1] + k3)
        ys.append(ys[i - 1] + 1 / 6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4))
    return ys


def milne_method(f, xs, y0, eps=1e-7):
    ys = fourth_order_runge_kutta_method(f, xs[:4], y0)
    h = xs[1] - xs[0]
    for i in range(4, len(xs)):
        pre_y = ys[i - 4] + 4 * h / 3 * \
                (2 * f(xs[i - 3], ys[i - 3]) -
                 f(xs[i - 2], ys[i - 2]) +
                 2 * f(xs[i - 1], ys[i - 1]))
        cor_y = ys[i - 2] + h / 3 * \
                (f(xs[i - 2], ys[i - 2]) +
                 4 * f(xs[i - 1], ys[i - 1]) +
                 f(xs[i], pre_y))
        while abs(pre_y - cor_y) > eps:
            pre_y = cor_y
            cor_y = ys[i - 2] + h / 3 * \
                    (f(xs[i - 2], ys[i - 2]) +
                     4 * f(xs[i - 1], ys[i - 1]) +
                     f(xs[i], pre_y))
        ys.append(cor_y)
    return ys


def draw_plot(a, b, func, dx=0.01):
    xs, ys = [], []
    a -= dx
    b += dx
    x = a
    while x <= b:
        xs.append(x)
        ys.append(func(x))
        x += dx
    plt.plot(xs, ys, 'g')


def main(f, xs, y0, exact_y):
    methods = [euler_method,
               fourth_order_runge_kutta_method,
               milne_method]
    for method in methods:
```

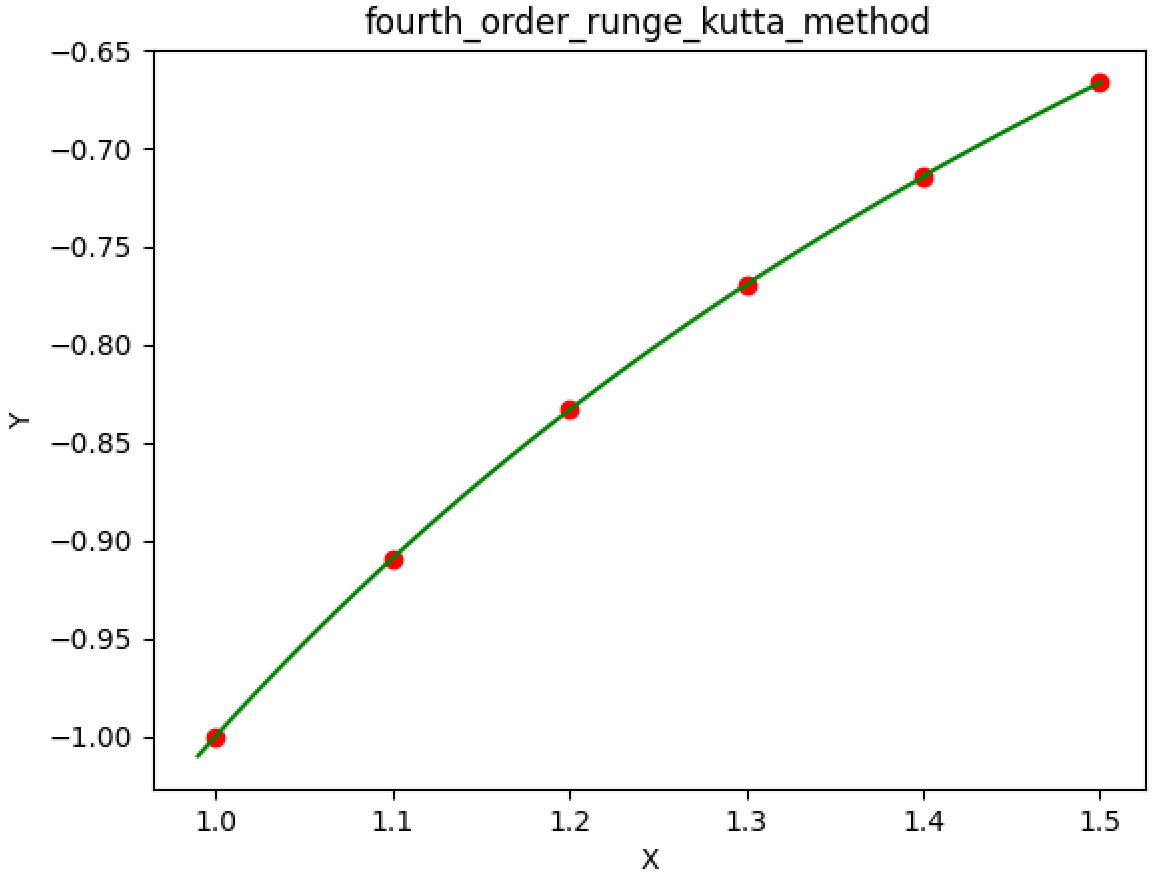
```python
        print(method.__name__)

        ys = method(f, xs, y0)
        if method is milne_method:
            inaccuracy = max([abs(exact_y(x) - y)
                              for x, y in zip(xs, ys)])
        else:
            xs2 = []
            for x1, x2 in zip(xs, xs[1:]):
                xs2.extend([x1, (x1 + x2) / 2, x2])
            ys2 = method(f, xs2, y0)
            p = 4 if method is fourth_order_runge_kutta_method else 1
            inaccuracy = max([abs(y1 - y2) / (2 ** p - 1) for y1, y2 in zip(ys, ys2)])
        print("ys:", *map(lambda x: round(x, 5), ys))
        print(f"inaccuracy = {inaccuracy}")

        plt.title(method.__name__)

        draw_plot(xs[0], xs[-1], exact_y)
        for i in range(len(xs)):
            plt.scatter(xs[i], ys[i], c='r')
        plt.xlabel("X")
        plt.ylabel("Y")
        plt.show()
        print('-' * 30)


if __name__ == '__main__':
    # print("1. y' = y + (1 + x) * y ** 2")
    # print("2. y' = x")
    # print("3. y' = e ** x")
    # print("4. y' = x ** 2")
    # mode = int(input('input 1 or 2 or 3 or 4: '))
    mode = 1
    if mode == 1:
        xs = [1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5]
        f = lambda x, y: y + (1 + x) * y ** 2
        y0 = -1
        exact_y = lambda x: -1 / x
    elif mode == 2:
        xs = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
        f = lambda x, y: x
        y0 = 1
        exact_y = lambda x: x ** 2 / 2 + 1
    elif mode == 3:
        xs = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
        f = lambda x, y: exp(x)
        y0 = 0
        exact_y = lambda x: exp(x) - 1
    else:
        xs = [0, 1, 2, 3, 4, 5]
        f = lambda x, y: x ** 2
        y0 = 5
        exact_y = lambda x: x ** 3 / 3 + 5
    # x0 = int(input('input x0: '))
    # h = int(input('input h: '))
    # n = int(input('input n: '))
    # xs = [x0 + i * h for i in range(n)]
    # y0 = int(input('input y0: '))
    main(f, xs, y0, exact_y)
```

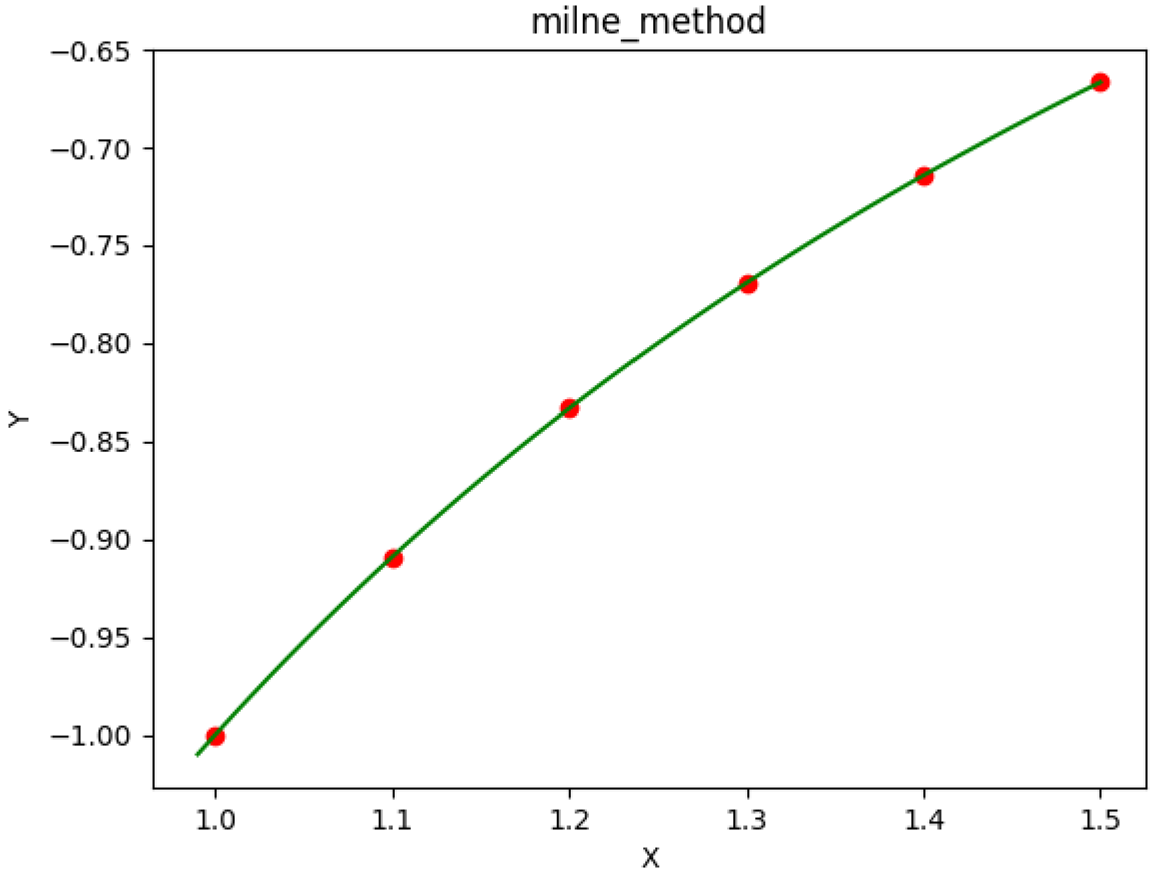
Тестовые данные

```
xs = [1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5]
f = lambda x, y: y + (1 + x) * y ** 2
y0 = -1
exact_y = lambda x: -1 / x
```

```
euler_method
ys: -1 -0.9 -0.8199 -0.754 -0.69864 -0.65136
inaccuracy = 0.14523946114539443
------------------------------
fourth_order_runge_kutta_method
ys: -1 -0.90909 -0.83334 -0.76923 -0.71429 -0.66667
inaccuracy = 0.009092460612566352
------------------------------
milne_method
ys: -1 -0.90909 -0.83334 -0.76923 -0.71428 -0.66667
inaccuracy = 3.723231798202775e-06
------------------------------
```




fourth_order_runge_kutta_method
−0.65
−0.70
−0.75
−0.80
−0.85
−0.90
−0.95
−1.00
Y
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
X


milne_method
−0.65
−0.70
−0.75
−0.80
−0.85
−0.90
−0.95
−1.00
Y
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
X

Вывод

В ходе лабораторной работы я познакомился с численным решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера – простой, но неточный метод, одношаговый.
Модификация метода Эйлера – более точный чем оригинал.
Методы Рунге-Кутта – хороший метод, но требует много вычислений по сравнению с прошлыми двумя, одношаговый.
Метод Адамса – многошаговый метод, точный. Использует на каждом шаге результаты предыдущих четырёх шагов. Использует конечные разности.
Метод Милна – многошаговый метод прогноза и коррекции. Коррекция проводится до тех пор, пока она не будет похожа на прогноз. Тоже использует результаты предыдущих четырёх шагов.