Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчёт

Лабораторная работа №2

Вариант 10

Выполнил:

Сандов Кирилл Алексеевич

P3213

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2024 г

.

Цель работы

Научиться решать нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений различными способами. Написать программу, которая делает это относительно функций, начальных приближений, количества итераций и точности вычисления. Вывести соответствующие графики.

Описание используемых методов

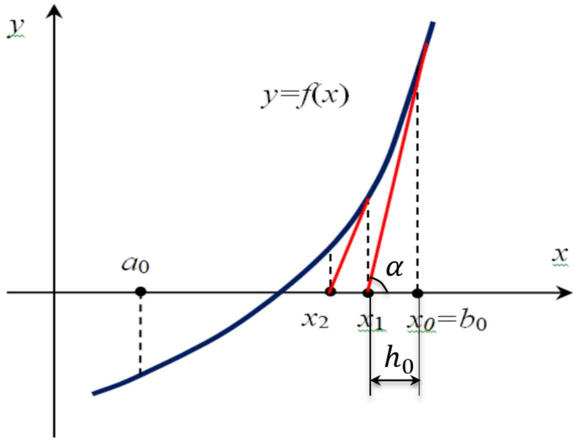
Метод Ньютона (касательных)

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке [a, b] заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня $x^* = x_n$ принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

$$x_1 = x_0 - h_0$$

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\tan\alpha} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}}$$

Критерий окончания итерационного процесса:

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \le \varepsilon$ или $\boldsymbol{|f(x_n)| \le \varepsilon}$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Метод половинного деления

Идея метода: начальный интервал изоляции корня делим пополам, получаем начальное приближение к корню:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

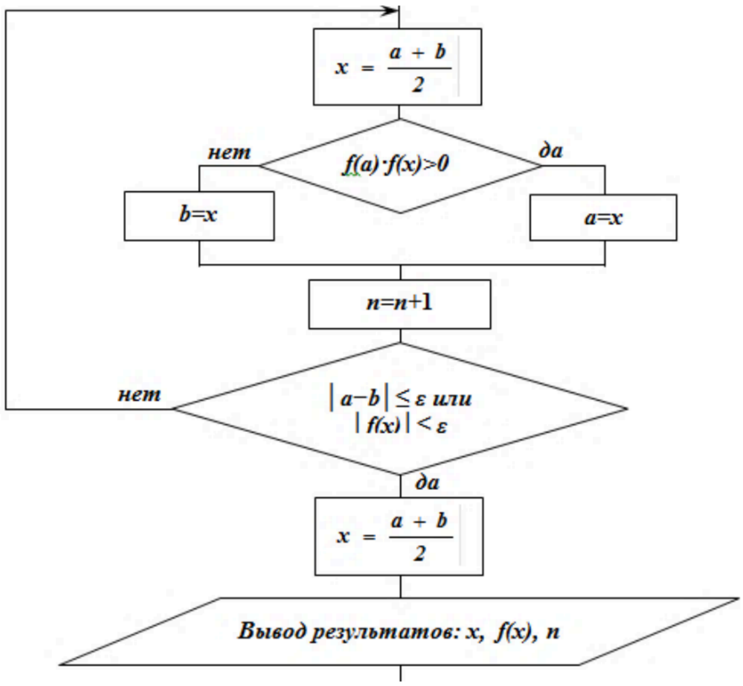
Вычисляем $f(x_0)$. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, x_0]$ либо $[b_0, x_0]$. Другую половину отрезка $[a_0, b_0]$, на которой функция $f(x)$ знак не меняет, отбрасываем. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню: $x_1 = (a_1 + b_1)/2$. и т.д.

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_i = \frac{a_i + b_i}{2}}$

Критерий окончания итерационного процесса: $|b_n - a_n| \le \varepsilon$ или $\boldsymbol{|f(x_n)| \le \varepsilon}$.

Приближенное значение корня: $x^* = \frac{a_n + b_n}{2}$ или $x^* = a_n$ или $x^* = b_n$

Блок-схема метода половинного деления



Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду: $x = \varphi(x)$, выразив x из исходного уравнения.

Зная начальное приближение: $x_0 \in [a, b]$, найдем очередные приближения:

$x_1 = \varphi(x_0) \rightarrow x_2 = \varphi(x_1) \ldots$

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_{i+1} = \varphi(x_i)}$

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

Теорема. Если на отрезке локализации $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$|\varphi'(x)| < q$, где $0 \le q < 1$, то независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ итерационная последовательность $\{x_n\}$ метода будет сходится к корню уравнения.

<u>Достаточное</u> условие сходимости метода:

$|\varphi'(x)| \le q < 1$, где q – некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)

Чем меньше q, тем выше скорость сходимости.

Критерий окончания итерационного процесса:

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ (при $0 < q \le 0{,}5$)

$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$ (при $0{,}5 < q < 1$)

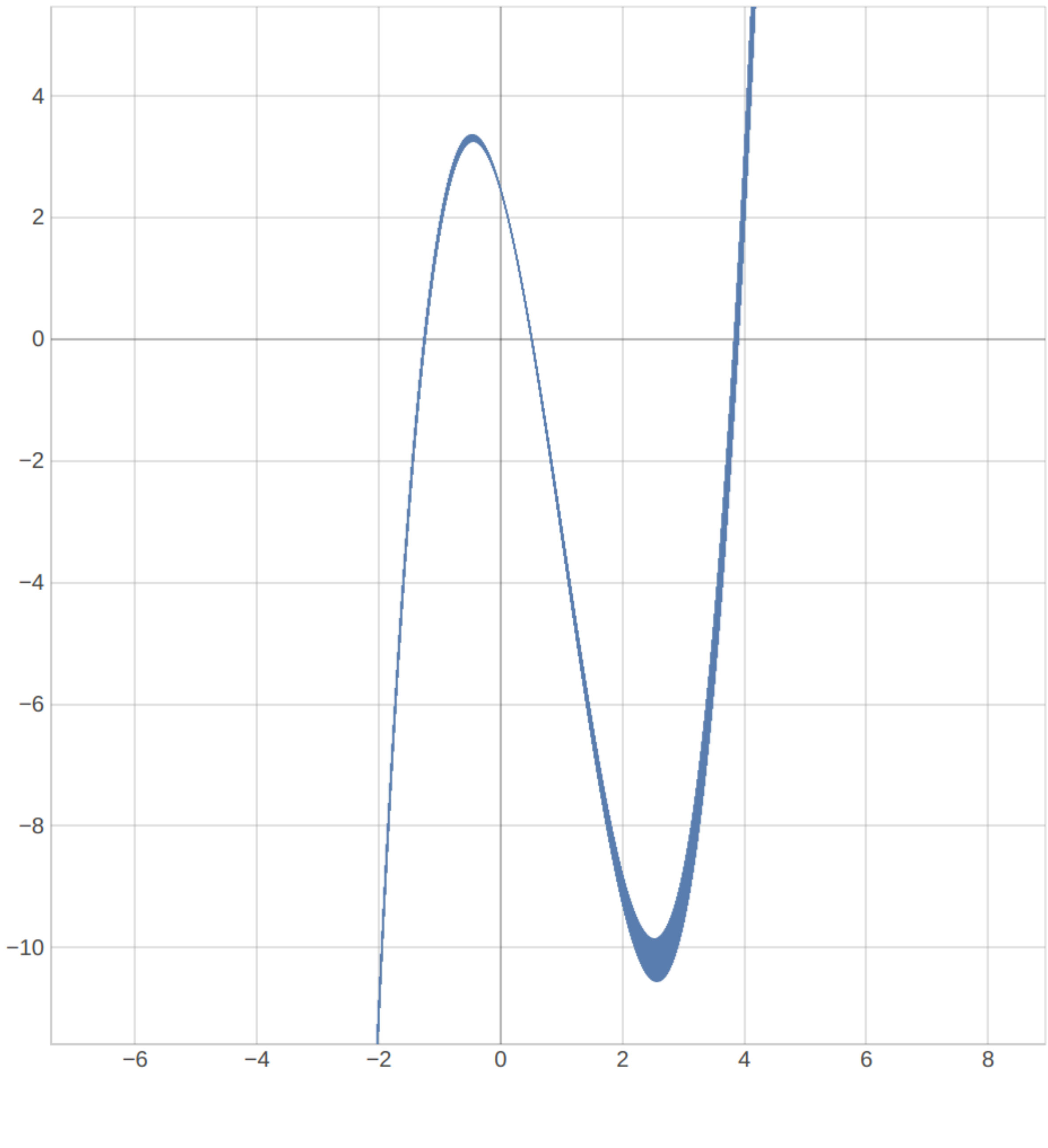
Можно ограничиться: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$

Первая часть

Функцция

$$x^3 - 3{,}125x^2 - 3{,}5x + 2{,}458$$

График функции



Корни

x_1 = -1.25

x_2 = 0.509

x_3 = 3.866

Поиск крайнего левого корня методом Ньютона

X: -1.2497

f(X): -0.0001

Количество итераций: 3

Таблица:

x_i	f(x_i)	f'(x_i)	x_i+1	|x_i+1 - x_i|
-1.0000	1.8330	5.7500	-1.3188	0.3188
-1.3188	-0.6548	9.9600	-1.2530	0.0657
-1.2530	-0.0303	9.0418	-1.2497	0.0034

Поиск среднего корня методом половинного деления

X: 0.5078

f(X): 0.0058

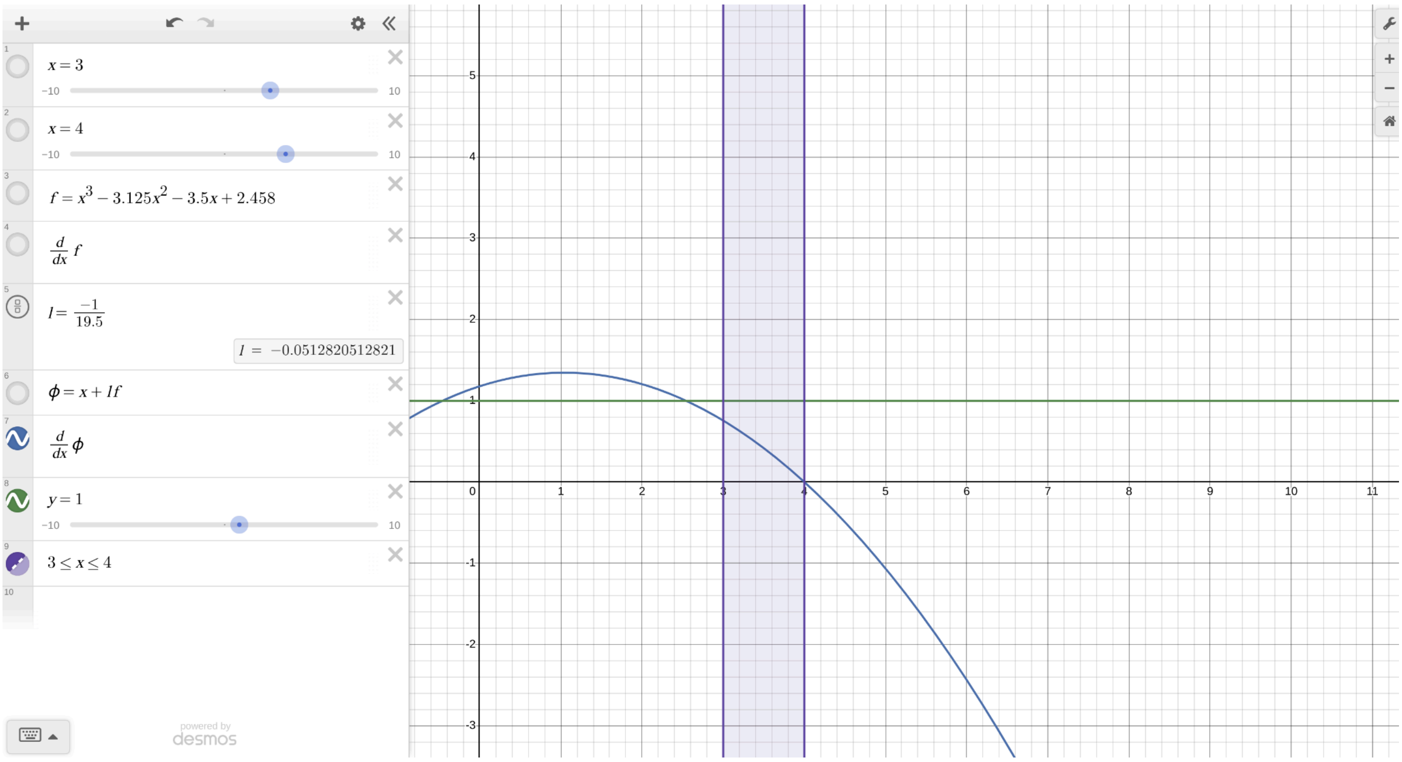
Количество итераций: 7

Таблица:

a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|a - b|
0.0000	1.0000	0.5000	2.4580	-3.1670	0.0518	1.0000
0.5000	1.0000	0.7500	0.0518	-3.1670	-1.5029	0.5000
0.5000	0.7500	0.6250	0.0518	-1.5029	-0.7061	0.2500
0.5000	0.6250	0.5625	0.0518	-0.7061	-0.3215	0.1250
0.5000	0.5625	0.5313	0.0518	-0.3215	-0.1334	0.0625
0.5000	0.5313	0.5156	0.0518	-0.1334	-0.0404	0.0313
0.5000	0.5156	0.5078	0.0518	-0.0404	0.0058	0.0156

Поиск крайнего правого корня методом простых итераций

Проверка сходимости



Решение

X: 3.8659

f(X): -0.0000

Количество итераций: 8

Таблица:

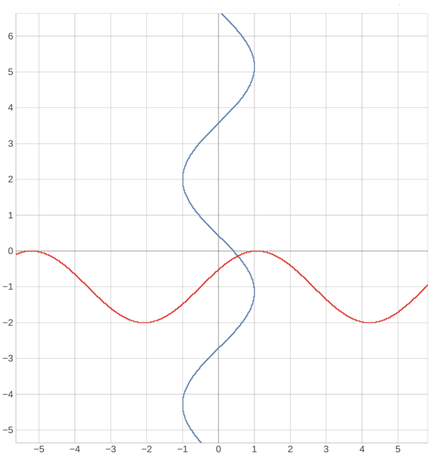
x_i	x_i+1	f(x_i+1)	|x_i+1 - x_i|
3.0000	3.4701	-5.5317	0.4701
3.4701	3.7538	-1.8201	0.2837
3.7538	3.8471	-0.3192	0.0933
3.8471	3.8635	-0.0410	0.0164
3.8635	3.8656	-0.0049	0.0021
3.8656	3.8659	-0.0005	0.0003
3.8659	3.8659	-0.0000	0.0000

Вторая часть

Система

$$\begin{cases} sin(x + 0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$$

График



Проверка условия сходимости метода простых итераций

$$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$$

$x \in (0;1)$

$y \in (-1;0)$

$$\begin{cases} x = -\cos(y-2) \longleftarrow \varphi_1(y) \\ y = \sin(x+0{,}5) - 1 \longleftarrow \varphi_2(x) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi_1'(y)| = |\sin(y-2)| \leq 1 \\ |\varphi_2'(x)| = |\cos(x+0{,}5)| \leq 1 \end{array}\right\} \text{усл. сх. выполнено.}$$

Поиск решения методом простых итераций

(X, Y): (0.5477, -0.1408)

Количество итераций: 12

Векторы значений X и Y:

X	Y
-0.5403	-0.0025
0.4184	-1.0403
0.9949	-0.2054
0.5928	-0.0029
0.4188	-0.1121
0.5152	-0.2051
0.5927	-0.1504
0.5477	-0.1121
0.5153	-0.1337
0.5337	-0.1504
0.5477	-0.1408
0.5397	-0.1337

Невязки: (0.0080, 0.0071)

Код программы

https://github.com/amphyxs/Computational-Math-2024/tree/main/P3213/Sandow_367527/lab1

Вывод

В результате выполнения данной лабораторной работы были изучены методы для решения нелинейных уравнений и систем их них.

Для решения уравнений были использованы метод Ньютона, половинного деления и простых итераций. Для решения систем нелинейных уравнений был использован метод простых итераций.

Также была написана программа, реализующая все методы решений.