Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

09.03.04 Программная инженерия

Системное и прикладное программное обеспечение

Лабораторная работа №4
По дисциплине «Вычислительная математика»
Вариант № 1

Выполнила студентка группы Р3213:

Авшистер Ольга Аркадьевна

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

г. Санкт-Петербург 2024 г.

Цель работы

Найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

Рабочие формулы

Линейная аппроксимация:

$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $SY = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $SXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Получим систему уравнений для нахождения параметров *a* и *b:*

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY \end{cases},$$

Коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Квадратичная аппроксимация:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\boldsymbol{\delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}}$$

Достоверность аппроксимации (коэффициент детерминации):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{\varphi_i})^2}$$

Листинг программы

```
def lin_func(x, y):
    data = {}
    n = len(x)
    sx = sum(x)
    sx2 = sum([xi ** 2 for xi in x])
    sy = sum(y)
    sxy = sum([x[i] * y[i] for i in range(n)])
    x_m = sx / n
    y_m = sy / n
    numerator = sum((x[i] - x_m) * (y[i] - y_m) for i in range(n))
    denominator1 = sum((x[i] - x_m) ** 2 for i in range(n))
    denominator2 = sum((y[i] - y_m) ** 2 for i in range(n))
    r = numerator / math.sqrt(denominator1 * denominator2)
    d = det([[sx2, sx],
             [sx, n]])
    d1 = det([[sxy, sx],
              [sy, n]])
    d2 = det([[sx2, sxy],
              [sx, sy]])
    try:
        a = d1 / d
        b = d2 / d
    except ZeroDivisionError:
        raise ZeroDivisionError
    data['a'] = a
    data['b'] = b
    data['x'] = x
    data['y'] = y
    f = [a * x_i + b for x_i in x]
    data['f'] = f
    numerator = [(y[i] - f[i]) ** 2 for i in range(n)]
    denominator = [(y[i] - (sum(f) / n)) ** 2 for i in range(n)]
```

```
R2 = 1 - (sum(numerator) / sum(denominator))
if R2 < 0.5:
    data['R2'] = 'Недостаточная точность аппроксимации'
elif R2 < 0.75:
    data['R2'] = 'Слабая точность аппроксимации'
elif R2 < 0.95:
    data['R2'] = 'Удовлетворительная точность аппроксимации'
else:
    data['R2'] = 'Высокая точность аппроксимации'
data['s'] = calc_s(y, f)
data['delta'] = calc_delta(y, f)
data['r'] = r
return data
```

Примеры и результаты работы программы

C:\Users\olyaa\PycharmProjects\pythonProject5\venv\Scripts\python.exe C:\Users\olyaa\PycharmProjects\pythonProject5\lab4.py

Введите 1, если ввод данных будет происходить из файла. Введите 2, если с клавиатуры1

Введите 1, если вывод данных будет происходить в файл. Введите 2, если в консоль2

Линейная

{'a': 1.0, 'b': 0.0, 'x': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'y': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'f': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'R2': 'Высокая точность аппроксимации', 's': 0.0, 'delta': 0.0, 'r': 1.0}

Полином 2 степени

{'a': 0.0, 'b': 1.0, 'c': 0.0, 'x': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'y': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'f': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'R2': 'Высокая точность аппроксимации', 's': 0.0, 'delta': 0.0}

Полином 3 степени

{'a': 0.0, 'b': 0.0, 'c': 1.0, 'd': 0.0, 'x': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'y': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'f': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'R2': 'Высокая точность аппроксимации', 's': 0.0, 'delta': 0.0}

Экспоненциальная

{'a': 1.090755420423895, 'b': 0.2752677467527349, 'x': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'y': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'f': [1.4363975090530023, 1.8915677753055251, 2.4909738606642673, 3.280321675764657, 4.319800567325883, 5.688672875997486, 7.491317848069584, 9.865190761380441], 'R2': 'Удовлетворительная точность аппроксимации', 's': 5.259170484681636, 'delta': 0.8107997968581421}

Логарифмическая

{'a': 3.3381688220873187, 'b': 0.07500565242989041, 'x': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'y': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'f': [0.07500565242989041, 2.388847959692829, 3.7423589420237677, 4.702690266955767, 5.4475811128027045, 6.056201249286706, 6.570782242589624, 7.016532574218706], 'R2': 'Удовлетворительная точность аппроксимации', 's': 3.406611182679314, 'delta': 0.652553750916286}

Степенная

{'a': 2.718281828459045, 'b': 0.0, 'x': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'y': [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0], 'f': [2.718281828459045, 2.718281828459045, 2.718281828459045, 2.718281828459045, 2.718281828459045, 2.718281828459045, 2.718281828459045, 2.718281828459045], 'R2': 'Недостаточная точность аппроксимации', 's': 67.39615714239396, 'delta': 2.9025023071135094}

Наилучшее приближение дают функции: ['Линейная', 'Полином 2 степени', 'Полином 3 степени']

Вычислительная часть

$$y = \frac{12x}{x^4+1}$$

$y(0)=0$; $y(0,2)=2,396$; $y(0,4)=4,68$;
$y(0,6)=6,374$; $y(0,8)=6,81$; $y(1)=6$
$y(1,2)=4,685$; $y(1,4)=3,47$; $y(1,6)=2,542$
$y(1,8)=1,879$; $y(2)=1,412$

Линейная:

$SX=\sum_1^n x_i = 0,2+0,4+\ldots+2=11$ $\quad SY=\sum_1^n y_i = 40,248$

$SXX=\sum_1^n x_i^2 = 15,4$ $\quad SXY=\sum_1^n x_i y_i = 38,377$

$$\begin{cases} 15,4a+11b=38,377 \\ 11a+11b=40,248 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-0,425 \\ b=4,084 \end{cases} \qquad y=-0,425x+4,084$$

Квадратичная:

$SX=11$ $\quad SXX=15,4$ $\quad SY=40,248$ $\quad SXY=38,377$

$SXXX=\sum_1^n x_i^3=24,2$ $\quad SXXXX=\sum_1^n x_i^4=40,533$ $\quad SXXY=\sum_1^n x_i^2 y_i=45,29$

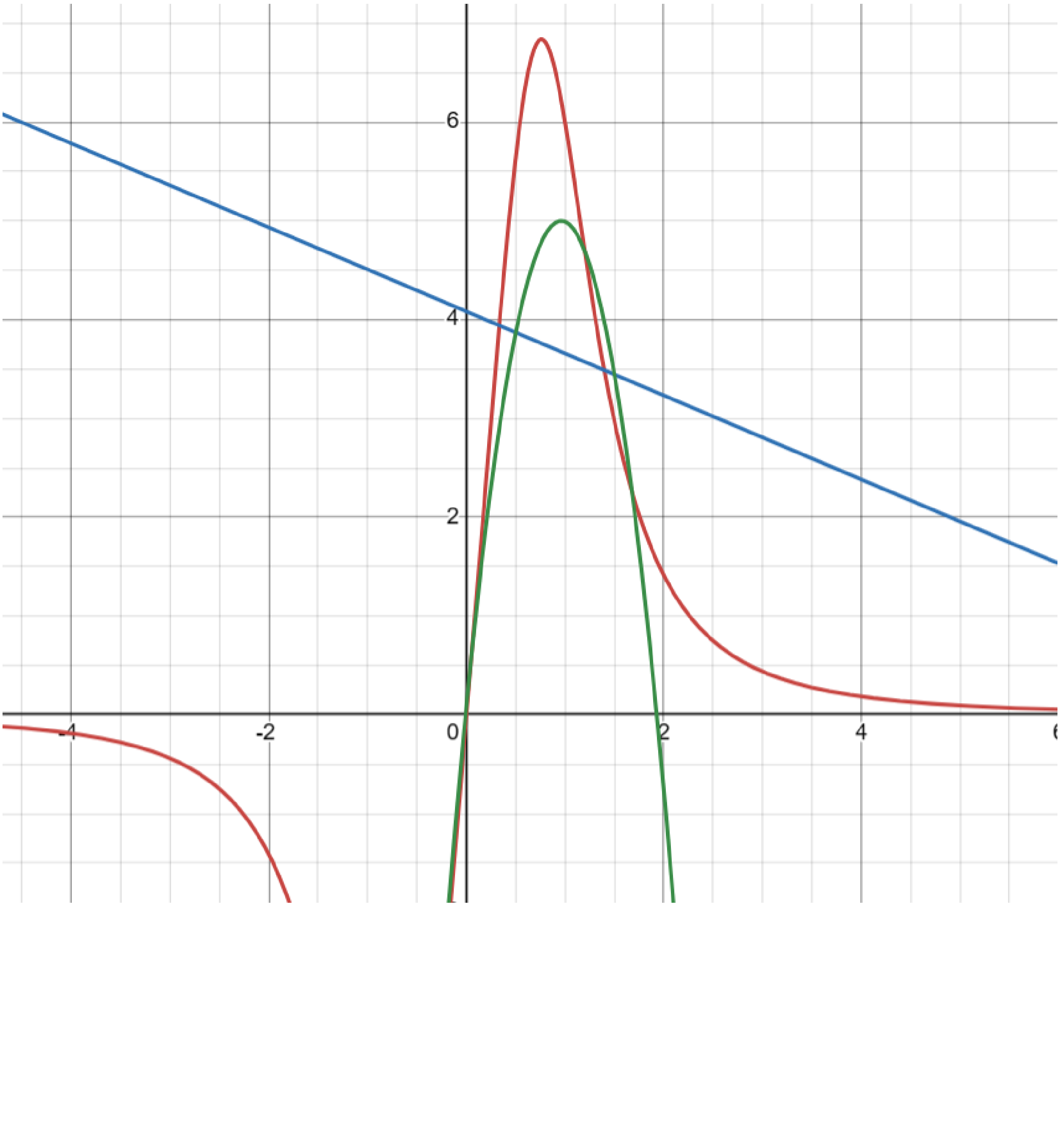
$$\begin{cases} 15,4a+11b+11c=40,248 \\ 24,2a+15,4b+11c=38,377 \\ 40,533a+24,2b+15,4c=45,29 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-5,328 \\ b=10,231 \\ c=0,887 \end{cases} \qquad y=-5,328x^2+10,231x+0,887$$

СКО для линейной:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{4{,}084^2 + (3{,}999-2{,}396)^2 + (3{,}914-4{,}68)^2 + (3{,}829-6{,}374)^2 + (3{,}744-6{,}81)^2 + (3{,}659-6)^2 + (3{,}574-4{,}685)^2 + (3{,}489-3{,}47)^2 + (3{,}404-2{,}542)^2 + (3{,}319-1{,}879)^2 + (3{,}234-1{,}412)^2} = 2{,}101$$

СКО для квадратичной: $\sigma_2 = 0{,}933$

$\sigma_1 > \sigma_2 \Rightarrow$ квадратичное приближение лучше



Вывод

В результате выполнения данной лабораторной работы были изучены различные методы аппроксимации функции.