Университет ИТМО
МФ КТиУ, Ф ПИиКТ

Лабораторная работа №5
Дисциплина «Вычислительная математика»

Интерполяция функции

Выполнил
Касымов Тимур Шавкатович

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

г. Санкт-Петербург
2024 г.

Вычислительная реализация задачи

x	1.10	1.25	1.40	1.55	1.70	1.85	2.00
y	0.2234	1.2438	2.2644	3.2984	4.3222	5.3516	6.3867

n = 6

Таблица конечных разностей:

x_i	1.10	1.25	1.40	1.55	1.70	1.85	2.00
y_i	0.2234	1.2438	2.2644	3.2984	4.3222	5.3516	6.3867
Δy_i	1.0204	1.0206	1.034	1.0238	1.0294	1.0351	-
$\Delta^2 yi$	0.0002	0.0134	-0.0102	0.0056	0.0057	-	-
$\Delta^3 yi$	0.0132	-0.0236	0.0158	0.0001	-	-	-
$\Delta^4 yi$	-0.0368	0.0394	-0.0157	-	-	-	-
$\Delta^5 yi$	0.0762	-0.0551	-	-	-	-	-
$\Delta^6 yi$	-0.1313	-	-	-	-	-	-

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

X_1 = 1.121

x_0 <= X_1 <= x_1 => первая интерполяционная формула Ньютона

h = 1.25 – 1.10 = 0.15

t = (x – x0) / h = (x – 1.10) / 0.15

$$N_n(\mathrm{x}) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{\mathrm{t(t-1)}}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\mathrm{t(t-1)(t-2)}}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{\mathrm{t(t-1)(t-2)(t-3)}}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{\mathrm{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{\mathrm{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}}{6!}\Delta^6 y_0$$

x = 1.121=> t = (1.121 – 1.10) / 0.15 = 0.14

$$N_6(1.121) = 0.2234 + 0.14 * 1.0204 + \frac{0.14(0.14-1)}{2}0.0002 + \frac{0.14(0.14-1)(0.14-2)}{6}0.0132 + \frac{0.14(0.14-1)(0.14-2)(0.14-3)}{24}(-0.0368) + \frac{0.14(0.14-1)(0.14-2)(0.14-3)(0.14-4)}{120}0.0762 + \frac{0.14(0.14-1)(0.14-2)(0.14-3)(0.14-4)(0.14-5)}{720}(-0.1313)$$

=0.2234+0.142856+0+0.00049+0.00098+0.00156+0.00219 = **0.3715**

$X_2 = 1.482$
$a = x_3 = 1.55$
$x_2 < X_2 < x_3 \Rightarrow X_2 < a \Rightarrow$ вторая интерполяционная формула Гаусса

$h = 1.25 – 1.10 = 0.15$
$t = (x – a) / h = (x – 1.55) / 0.15$

Таблица конечных разностей:

i	-3	-2	-1	0	1	2	3
x_i	1.10	1.25	1.40	1.55	1.70	1.85	2.00
y_i	0.2234	1.2438	2.2644	3.2984	4.3222	5.3516	6.3867
Δy_i	1.0204	1.0206	1.034	1.0238	1.0294	1.0351	-
$\Delta^2 yi$	0.0002	0.0134	-0.0102	0.0056	0.0057	-	-
$\Delta^3 yi$	0.0132	-0.0236	0.0158	0.0001	-	-	-
$\Delta^4 yi$	-0.0368	0.0394	-0.0157	-	-	-	-
$\Delta^5 yi$	0.0762	-0.0551	-	-	-	-	-
$\Delta^6 yi$	-0.1313	-	-	-	-	-	-

$$G_n(\mathrm{x}) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{\mathrm{t(t+1)}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{\mathrm{t(t+1)(t-1)}}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{\mathrm{t(t+2)(t+1)(t-1)}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{\mathrm{t(t+2)(t+1)(t-1)(t-2)}}{5!}\Delta^5 y_{-3} + \frac{\mathrm{t(t+3)(t+2)(t+1)(t-1)(t-2)}}{6!}\Delta^6 y_{-3}$$

$x = 1.482 \Rightarrow t = (1.482 – 1.55) / 0.15 = -0.453$

$$G_6(\mathrm{x}) = 3.2984 - 0.453 * 1.034 + \frac{-0.453(-0.453+1)}{2}(-0.0102) + \frac{-0.453(-0.453+1)(-0.453-1)}{6}(-0.0236) + \frac{-0.453(-0.453+2)(-0.453+1)(-0.453-1)}{24}(-0.0394) + \frac{-0.453(-0.453+2)(-0.453+1)(-0.453-1)(-0.453-2)}{120}0.0762 + \frac{-0.453(-0.453+3)(-0.453+2)(-0.453+1)(-0.453-1)(-0.453-2)}{720}(-0.1313)$$

= 3.2984 - 0.4684 + 0.00126 - 0.00141 - 0.00091 - 0.00087 + 0.00063 = **2.8287**

Программная реализация задачи

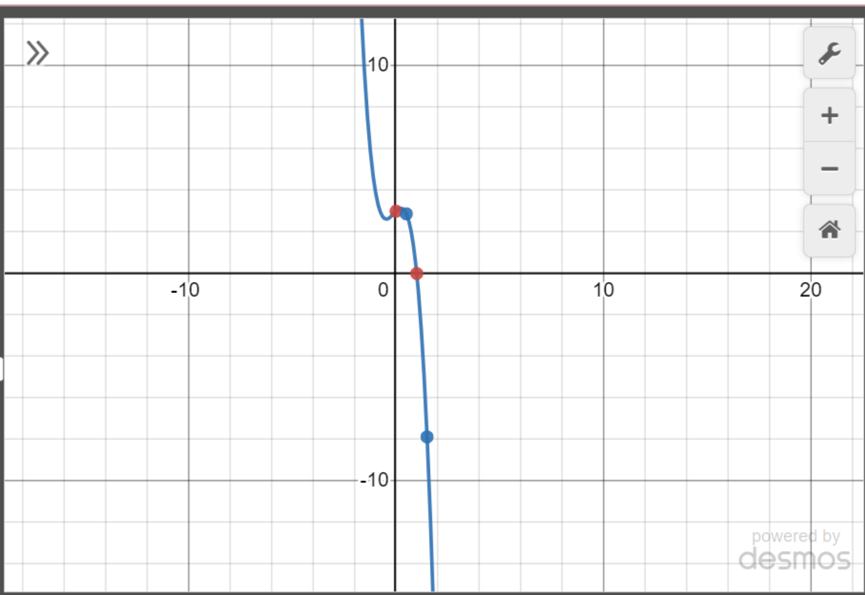
```
function lagrSolve() {
    let xsOut = ["x"]
    let ysOut = ["y"]
    document.getElementById('table-cont').innerHTML = ""
    for (let i = 0; i < xs.length - 1; i++) {
        let m = _(`(${xs[i]} + ${xs[i + 1]}) / 2`)
        let sol = lagr(m)
        xsOut.push(m); ysOut.push(sol)
        calculator.setExpression({ id: 'methodPoint' + i, latex: `(${m}, ${sol})`, color:
Desmos.Colors.BLUE })
    }
    document.getElementById('result-points').innerHTML = arrayToTable([xsOut, ysOut])
}

function newtonSepSolve() {
    let xsOut = ["x"]
    let ysOut = ["y"]
    document.getElementById('table-cont').innerHTML =
arrayToTable(rotate_table(table_for_neravnoots()))
    for (let i = 0; i < xs.length - 1; i++) {
        let m = _(`(${xs[i]} + ${xs[i + 1]}) / 2`)
        let sol = neravnoots_solve(m)
        xsOut.push(m); ysOut.push(sol)
        calculator.setExpression({ id: 'methodPoint' + i, latex: `(${m}, ${sol})`, color:
Desmos.Colors.GREEN })
    }
    document.getElementById('result-points').innerHTML = arrayToTable([xsOut, ysOut])
}

function newtonFinSolve() {
    let xsOut = ["x"]
    let ysOut = ["y"]
    document.getElementById('table-cont').innerHTML =
arrayToTable(rotate_table(table_for_ravnoots()))
    for (let i = 0; i < Math.floor(xs.length / 2); i++) {
        let m = _(`(${xs[i]} + ${xs[i + 1]}) / 2`)
        let sol = ravnootst_solve_right(m)
        xsOut.push(m); ysOut.push(sol)
        calculator.setExpression({ id: 'methodPoint' + i, latex: `(${m}, ${sol})`, color:
Desmos.Colors.BLACK })
    }
    for (let i = Math.floor(xs.length / 2); i < xs.length - 1; i++) {
        let m = _(`(${xs[i]} + ${xs[i + 1]}) / 2`)
        let sol = ravnootst_solve_left(m)
        xsOut.push(m); ysOut.push(sol)
        calculator.setExpression({ id: 'methodPoint' + i, latex: `(${m}, ${sol})`, color:
Desmos.Colors.BLACK })
    }

    document.getElementById('result-points').innerHTML = arrayToTable([xsOut, ysOut])
}
```

Тестовые данные



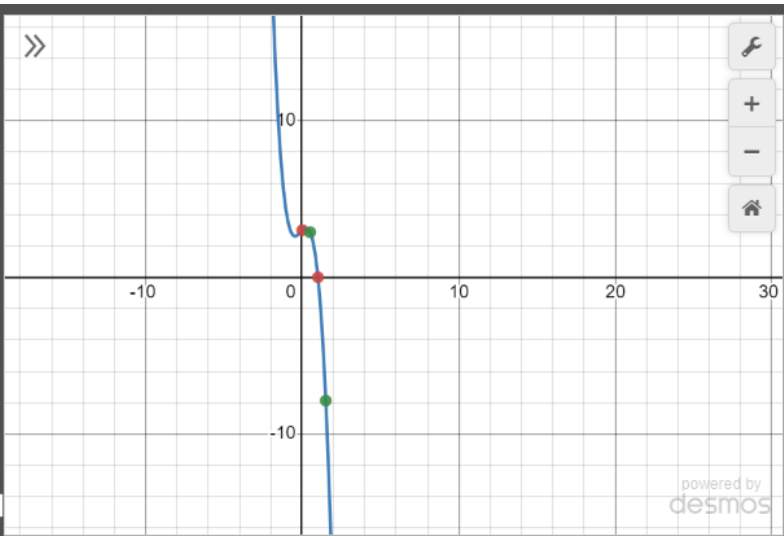
Choose File No file chosen

-3*x^3 - x^2 + x + 3

Лагранжа

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
y	2.875	-7.875	-47.625	-134.375	-286.125	-520.875	-856.625	-1311.375	-1903.125	-2649.875



Choose File No file chosen

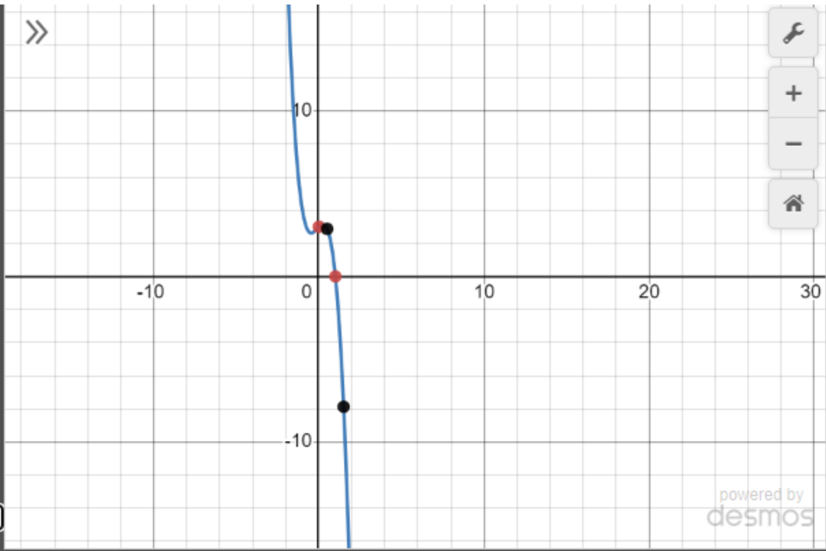
-3*x^3 - x^2 + x + 3

Ньютона с разделенными разностями

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

	3	-3	-10	-3	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-23	-19	-3	0	0	0	0	0	0	
2	-23	-61	-28	-3	0	0	0	0	0		
3	-84	-117	-37	-3	0	0	0	0			
4	-201	-191	-46	-3	0	0	0				
5	-392	-283	-55	-3	0	0					
6	-675	-393	-64	-3	0						
7	-1068	-521	-73	-3							
8	-1589	-667	-82								
9	-2256	-831									
10	-3087										

x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
y	2.875	-7.875	-47.625	-134.375	-286.125	-520.875	-856.625	-1311.375	-1903.125	-2649.875



Choose File No file chosen

-3*x^3 - x^2 + x + 3

Ньютона с конечными разностями

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

	3	-3	-20	-18	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-23	-38	-18	0	0	0	0	0	0	
2	-23	-61	-56	-18	0	0	0	0	0		
3	-84	-117	-74	-18	0	0	0	0			
4	-201	-191	-92	-18	0	0	0				
5	-392	-283	-110	-18	0	0					
6	-675	-393	-128	-18	0						
7	-1068	-521	-146	-18							
8	-1589	-667	-164								
9	-2256	-831									
10	-3087										

x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
y	2.875	-7.875	-47.625	-134.375	-286.125	-520.875	-856.625	-1311.375	-1902	-2671.5

Вывод

В ходе лабораторной работы я познакомился с интерполяцией функции разными методами (линейная, квадратичная, многочлен Лагранжа, многочлен Ньютона, многочлены Гаусса, Стирлинга и Бесселя).

Линейная и квадратичная интерполяция – простые методы, но неточные.

Многочлен Лагранжа – хороший метод, но много вычислений. Малая погрешность при небольших n, с изменением числа узлов все вычисления заново.

Многочлен Ньютона с разделёнными разностями – хороший метод. Используется для неравноотстоящих узлов. При добавлении новых узлов первые члены многочлена остаются неизменными.

Многочлен Ньютона с конечными разностями – хороший метод. Используется для равноотстоящих узлов. При добавлении новых узлов первые члены многочлена остаются неизменными. Есть формулы для интерполирования вперёд и назад. Можно использовать для экстраполирования (но будут бОльшие погрешности).