



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра алгоритмических языков

Плотников Алексей Сергеевич

**Математическая модель изменения  
уровня воды в водохранилище**

Реферат

**Преподаватель:**  
Сычугов Дмитрий Юрьевич

Москва, 2025

# Содержание

1	Введение	3
2	Физическая постановка задачи	3
3	Вывод основного уравнения модели	4
4	Сравнение модели с реальными данными	5
5	Заключение	6
	Список литературы	7

# 1 Введение

Целью данной работы является построение и анализ математической модели, описывающей изменение уровня воды в водохранилище. Водохранилище представляет собой искусственный водоём, объём воды в котором зависит от множества физических процессов:

- приток воды из питающих рек и подземных источников;
- отток воды через плотину, водослив или гидротурбины;
- атмосферные осадки на поверхность водоёма;
- испарение воды с открытой поверхности;
- фильтрационные потери через почву.

## 2 Физическая постановка задачи

Пусть  $V(t)$  — объём воды в водохранилище в момент времени  $t$ . Тогда общий баланс масс можно записать в виде:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{out}}(t) + Q_{\text{atm}}(t) - Q_{\text{loss}}(t). \quad (1)$$

Здесь:

- $Q_{\text{in}}(t)$  — приток воды в водохранилище;
- $Q_{\text{out}}(t)$  — отток через плотину;
- $Q_{\text{atm}}(t)$  — влияние атмосферы (осадки минус испарение);
- $Q_{\text{loss}}(t)$  — фильтрационные потери (количество воды уходящее через почву).

Фильтрационные потери зависят от уровня воды  $h(t)$ :

$$Q_{\text{loss}}(t) = k_f h(t), \quad (2)$$

где  $k_f$  — коэффициент фильтрации.

Отток воды  $Q_{\text{out}}(t)$ , в основном, происходит через плотину. В общем случае расход может включать как контролируемый сброс  $Q_{\text{ctrl}}(t)$  через затворы или турбины, так и естественный перелив  $Q_{\text{spill}}(t)$ :

$$Q_{\text{out}}(t) = Q_{\text{ctrl}}(t) + Q_{\text{spill}}(t). \quad (3)$$

- $Q_{\text{ctrl}}(t)$  — управляемый расход воды заданный оператором станции;
- $Q_{\text{spill}}(t)$  — поток воды сбрасываемый при превышении уровня воды.

Влияние атмосферы определяется площадью зеркала водоёма  $A(t)$ :

$$Q_{\text{atm}}(t) = A(t)(P(t) - E(t)), \quad (4)$$

где  $P(t)$  — интенсивность осадков,  
 $E(t)$  — интенсивность испарения.

Пусть зависимость объёма водохранилища от уровня воды аппроксимируется степенной функцией:

$$V(h) = \alpha h^n. \quad (5)$$

Тогда площадь зеркала определяется:

$$A(h) = \frac{dV}{dh} = \alpha n h^{n-1}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в выражение (4), получим:

$$Q_{\text{atm}}(t) = \alpha n h^{n-1}(P(t) - E(t)). \quad (7)$$

### 3 Вывод основного уравнения модели

Подставим выражения (7), (2) в баланс (1) и учтём (5). Производная объёма:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(\alpha h^n)}{dt} = \alpha n h^{n-1} \frac{dh}{dt}. \quad (8)$$

Тогда основное уравнение принимает вид:

$$\alpha n h^{n-1} \frac{dh}{dt} = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{ctrl}}(t) - Q_{\text{spill}}(t) + \alpha n h^{n-1}[P(t) - E(t)] - k_f h. \quad (9)$$

После деления на  $\alpha n h^{n-1}$  получим уравнение динамики уровня воды:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{ctrl}}(t) - Q_{\text{spill}}(t) - k_f h}{\alpha n h^{n-1}} + [P(t) - E(t)]. \quad (10)$$

## 4 Сравнение модели с реальными данными

Для оценки корректности модели рассмотрим иркутское водохранилище

Площадь водохранилища:  $A_0 = 154 \text{ км}^2$  [1]

Другие параметры:

- Ежемесячное количество осадков [2]
- Ежемесячная величина испарения [3]
- Естественном приток воды [4]
- Средний расход воды [4]

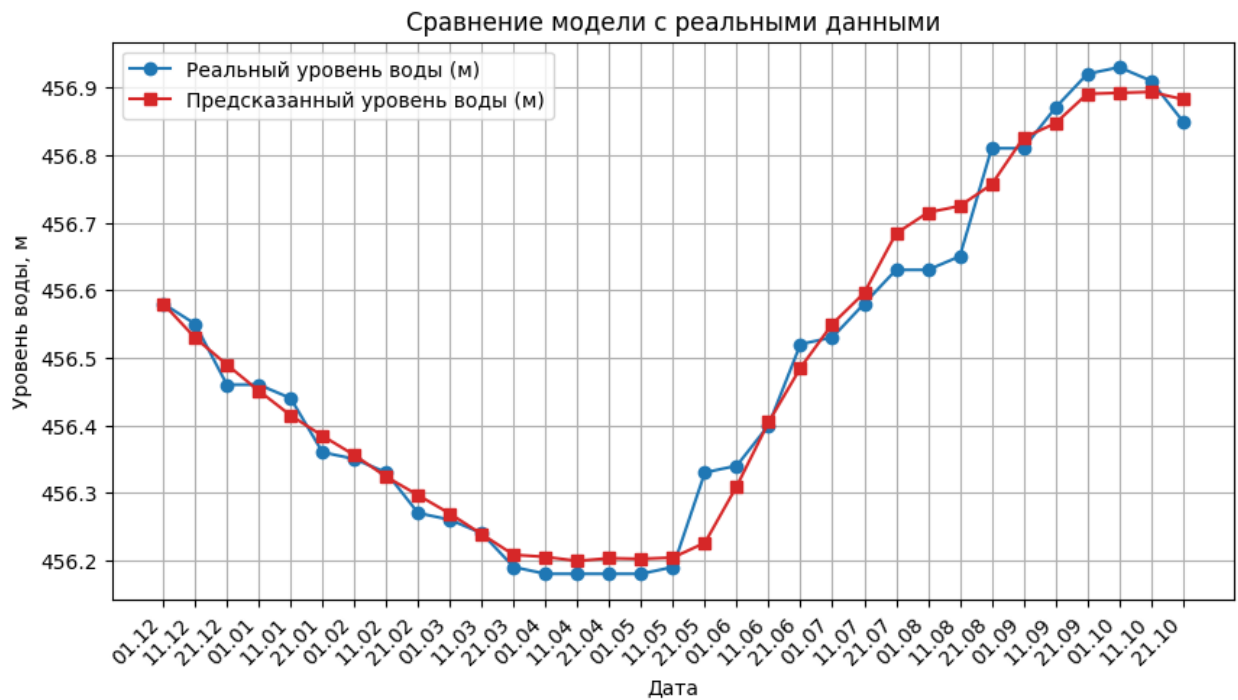


Рис. 1: Сравнение модели с реальными данными

- Максимальное отклонение: 10.41см
- Стандартное отклонение: 3.57см
- Среднеквадратичная ошибка: 3.59см

Отклонение от реальных данным может быть вызвано:

- Использование усреднённых значений осадков и испарения
- Аппроксимация объёма воды степенной функцией от высоты

## 5 Заключение

В работе построена математическая модель изменения уровня воды в водохранилище. Учтены основные физические процессы: приток, отток, осадки, испарение и фильтрация. Получено дифференциальное уравнение, описывающее динамику уровня воды.

Полученная модель была сравнена с реальными данными Иркутского водохранилища. Среднеквадратичная ошибка модели от реальных данных составила 3.59см.

## Список литературы

- [1] Данные об Иркутском водохранилище. — Дата доступа: (11.11.2025).  
<https://shorturl.at/XIjcg>.
- [2] Данные об осадках в Иркутске. — Дата доступа: (11.11.2025). <https://en.climate-data.org/asia/russian-federation/irkutsk-oblast/irkutsk-473/>.
- [3] Оценка испарений над водоёмами. — Дата доступа: (11.11.2025). <https://journals.ametsoc.org/view/journals/mwre/149/6/MWR-D-20-0421.1.xml>.
- [4] Данные об уровне воды в Иркутском водохранилище. — Дата доступа: (11.11.2025). <https://rushydro.ru/informer/>.