2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЛАБО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДЕ

Нефть является слабо сжимаемой жидкостью, для описания модели которой установлены следующие допущения [6]:

- изменение площади сечение трубопровода, то есть трубопровод в данных расчетах принимается с постоянным сечением с диаметром d;
- изменение плотности во времени много меньше ее первоначального значения, то есть плотность при этом принимается неизменной;
- температура жидкости считается постоянной, то есть перекачка нефти по трубе происходит изотермически; следовательно, плотность и вязкость не зависят от температуры и остаются так же неизменны.

В работе решается математическая модель участка нефтепровода, состоящая в описании дифференциальных уравнений частных производных для получения значений давления и скорости при нестационарном течении.

2.1. Модель нестационарного течения

Закон сохранения массового расхода в дифференциальной форме [6]:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \rho \upsilon S}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

где ρ – плотность, кг/м^3; v – скорость, м/с; x,t – координата вдоль оси и время; $S = \pi d^2 / 4$ - площадь поперечного сечения, м^2.

Левая часть уравнения, то есть $\partial \rho S / \partial \mathrm{t}$ – частная производная по времени, которая для стационарного течения равна нулю, образуя из уравнения (1) закон сохранения массового расхода (уравнение неразрывности).

В представленной модели используется система уравнений для нахождения неизвестных функций скорости и давления по координате и времени, то есть $\upsilon = \upsilon(x,t)$ и $p = p(x,t)$, образуя систему [6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{t}} + \rho c^2 \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0, \\ \rho \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\lambda \dfrac{1}{d} \dfrac{\rho \upsilon |\upsilon|}{2} - \rho g \dfrac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}x}, \end{cases} \tag{2}$$

где c – скорость звука в жидкой среде, м/с; λ – коэффициент гидравлического сопротивления в зависимости от режима течения; p – давление, Па; z – профиль трубопровода, м (принимается равным нулю для горизонтального трубопровода).

Система уравнений (2), представлена из двух законов: первая часть – закон сохранения массы отдельного взятого объема жидкости; вторая часть – закон сохранения количества движения определенного объема жидкости, учитывающем силы вязкого трения (потери напора на трение) и влияние гравитационных сил (за счет высотной отметки).

С целью определения коэффициента гидравлического сопротивления λ необходимо определить режим течения по числу Рейнольдса Re:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}, \tag{3}$$

где v – скорость нефти, м/с; d – внутренний диаметр трубопровода; ν – кинематическая вязкость нефти, м^2/с.

Тогда коэффициент гидравлического сопротивления определяется из следующих соотношений:

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{64}{\mathrm{Re}}, \quad \text{если} \quad \mathrm{Re} \le 2320; \\ \dfrac{64}{\mathrm{Re}}(1-\gamma) + \dfrac{0,3164}{\mathrm{Re}^{0,25}}\gamma, \quad \text{если} \quad 2320 < \mathrm{Re} \le 10000; \\ \dfrac{0,3164}{\mathrm{Re}^{0,25}}, \quad \text{если} \quad 10000 < \mathrm{Re} \le 10\dfrac{d}{\Delta}; \\ 0,11\left(\dfrac{\Delta}{d} + \dfrac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0,25}, \quad \text{если} \quad 10\dfrac{d}{\Delta} < \mathrm{Re} \le 500\dfrac{d}{\Delta}; \\ 0,11\left(\dfrac{\Delta}{d}\right)^{0,25}, \text{если} \quad \mathrm{Re} > 500\dfrac{d}{\Delta}; \end{cases} \tag{4}$$

где Δ – абсолютная шероховатость внутренней стенки цилиндрической трубы.

Иногда для удобства расчетов абсолютную шероховатость Δ заменяют на связанную с ней через внутренний диаметр d относительную ε, которая показывает среднюю величину высоты бугорков (неровностей) вдоль характерного размера:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{d}. \tag{5}$$

Уравнения (4) характеризуют различный режим течения нефти по трубопроводу: ламинарный (формула Стокса), переходный (формула Гинзбурга), развитый турбулентный в зоне гидравлически гладких труб (формула Блазиуса), в зоне смешанного трения (формула Альтшуля) и в зоне квадратичного трения (формула Шифринсона).

2.2. Метод характеристик для решения уравнений движения

Основным методом решения уравнения (2) является метод характеристик, при помощи которого решаются уравнения с частными дифференциалами, для этого принимаем, что трубопровод является горизонтальным, а затем умножим нижнее уравнение на скорость распространения волны с и сложим оба уравнения, получив следующее [6]:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{t}} + c\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \rho c\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + c\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) = -\lambda \frac{1}{d}\frac{\rho c \upsilon|\upsilon|}{2}. \tag{6}$$

Таким же образом получают еще одно уравнение, только в результате вычитания из системы:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{t}} - c\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \rho c\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - c\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) = \lambda \frac{1}{d}\frac{\rho c \upsilon|\upsilon|}{2}. \tag{7}$$

Представим на плоскости переменных *x-t* прямые линии, связанные с уравнениями (6) и (7), но в упрощенном виде:

- $\dfrac{dx}{dt} = C, \qquad x - Ct = \xi = const;$

- $\dfrac{dx}{dt} = -C, \qquad x + Ct = \eta = const;$

которые называются характеристиками, где для определенного параметра $A(x,t)$ выполняется равенство в направлении первой характеристики (производная вдоль ξ) и в направлении второй характеристики (производная вдоль η) [12]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} + c\dfrac{\partial A}{\partial x} = \left(\dfrac{dA}{dt}\right)_{\xi}, \\ \dfrac{\partial A}{\partial t} - c\dfrac{\partial A}{\partial x} = \left(\dfrac{dA}{dt}\right)_{\eta}. \end{cases} \tag{8}$$

Пользуясь полученным выражение частной производной (8), уравнения (6) и (7) можно записать в ином виде, а именно:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\xi=const} + \rho c\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_{\xi=const} = -\lambda\dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon|\upsilon|}{2}; \\ \left(\dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\eta=const} - \rho c\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_{\eta=const} = \lambda\dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon|\upsilon|}{2}; \end{cases} \tag{9}$$

или же в упрощенной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(p + \rho c v\right)_{\xi=const} = -\lambda\dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon|\upsilon|}{2}; \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(p - \rho c v\right)_{\eta=const} = \lambda\dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon|\upsilon|}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

Формулы, полученные в (10), используются для выполнения различных задач на неустановившееся движение жидкости в трубопроводе.

Для решения поставленной задачи в работе принимается следующее. Пусть вдоль оси OX (в момент времени равный $t = 0$) известно распределение как давления $p(x,0)$, так и скорости $v(x,0)$. Таким образом, в начальный момент времени существовало стационарное распределение величин. Тогда необходимо будет найти распределение этих же функций при изменении времени на величину Δt, то есть давление $p(x, \Delta t)$ и скорость $v(x, \Delta t)$.

С этой целью производится замена направления характеристик на прямые MA и MB (рисунок 2.1), тогда получается:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta}{\Delta t}\left(p+\rho cv\right)_{\xi=const} = -\lambda_A \dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon_A\left|\upsilon_A\right|}{2}; \\ \dfrac{\Delta}{\Delta t}\left(p-\rho cv\right)_{\eta=const} = \lambda_B \dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon_B\left|\upsilon_B\right|}{2}; \end{cases} \qquad (11)$$

где Δt – шаг следующего момента во времени.

Здесь левая часть уравнения (11) равна:

- $\Delta\left(p+\rho cv\right)_{\xi=const} = (p_M+\rho cv_M)-(p_A+\rho cv_A)$;
- $\Delta\left(p+\rho cv\right)_{\eta=const} = (p_M-\rho cv_M)-(p_B-\rho cv_B)$.

Исходя из этого, уравнения (11) для определения давления и скорости в точке M в следующий период времени Δt при известных параметрах в точках A и B выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} p_M+\rho cv_M = p_A+\rho cv_A-\lambda_A \dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon_A\left|\upsilon_A\right|}{2}\Delta t; \\ p_M-\rho cv_M = p_B-\rho cv_B+\lambda_B \dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon_B\left|\upsilon_B\right|}{2}\Delta t; \end{cases} \qquad (12)$$

или

$$\begin{cases} p_M+\rho cv_M = I_A; \\ p_M-\rho cv_M = I_B; \end{cases} \qquad (13)$$

где использованные обозначения называются инвариантами и равны соответственно:

- $I_A = p_A+\rho cv_A-\lambda_A \dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon_A\left|\upsilon_A\right|}{2}\Delta t$;
- $I_B = p_B-\rho cv_B+\lambda_B \dfrac{1}{d}\dfrac{\rho c\upsilon_B\left|\upsilon_B\right|}{2}\Delta t$.

Из полученной системы уравнений (13) путем ее решения вычисляются значения p_M (сложение первого и второго) и v_M (разница первого и второго):

$$\begin{cases} P_M = \dfrac{I_A+I_B}{2} \\ v_M = \dfrac{I_A-I_B}{2\rho c} \end{cases} \qquad (14)$$

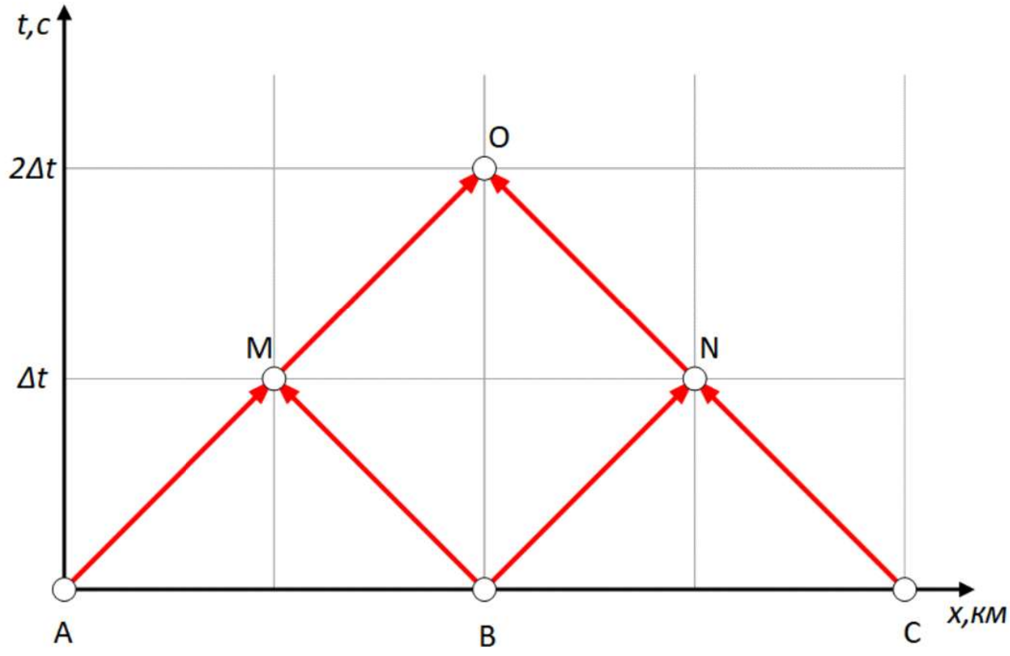

Рисунок 2.1 – Сетка и слои метода характеристик

Однако данный метод характеристик для нахождения значений функций давления $p(x,0)$ и скорости $v(x,0)$ может быть использован только на промежутке $x \in (0;L)$, где L – длина участка трубопровода. Возникает проблема нахождения значения функций в крайнем левом и крайнем правом положении (рисунок 2.2).

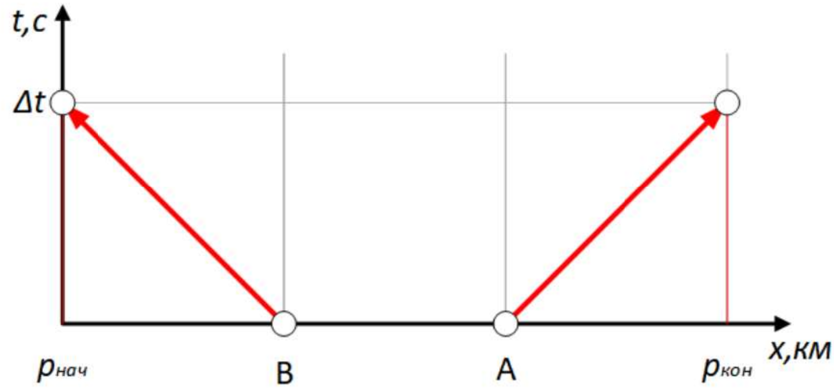

Рисунок 2.2 – Граничные условия метода характеристик

Для этого вводятся краевые условия, в которых «закрепляется» давление p_M, равное начальному (на левой границе) и конечному (на правой границе), известные изначально и остающееся неизменными на рассматриваемом участке:

- левая граница $v_M = \dfrac{p_M - I_B}{\rho c}$;
- правая граница $v_M = \dfrac{I_A - p_M}{\rho c}$.

При помощи полученных уравнений можно определить величину давления p_M и скорости жидкости v_M в любых точках по длине трубопровода в момент времени Δt, зная значения в предыдущий момент времени путем пересечения линий характеристик. Кроме того, после нахождения новых значений, данная методика может быть использована для следующего момента времени $2\Delta t$, принимая значения в момент времени Δt в качестве начальных. В результате наблюдается слоевая структура метода характеристик с промежутком Δt между слоями.