

# 最优捕鱼策略问题答卷评述

刘来福

(北京师范大学, 北京 100875)

资源和环境的合理开发和保护是国民经济发展中的一个十分重要问题. 特别是可再生资源的持续开发和利用的问题已经是一个全世界关注热点话题. 渔业的可持续开发的问题是应用数学来研究资源的利用的一个成功的例子. “最优捕鱼策略”这个问题就是在这个背景下提出来的. 意图使大家了解如何把数学应用于探讨资源和环境的合理开发和利用.

这个问题是来自关于渔业资源开发利用的研究工作, 为适应竞赛的实际情况对问题进行了适当的加工和简化. 数据也是实际的观测数据. 类似的问题我曾经在《大学生数学建模辅导材料》一书中做过介绍. 与之比较, 题目中给出的鱼类的种群的死亡过程是连续的. 集中的季节性的产卵表明繁殖是离散的, 形成的种群的世代是分明的. 因此鱼类种群在年龄上可以理解为离散变化的. 鱼类种群的繁殖行为是非线性的. 而渔业捕捞作业只在鱼类生长过程的部分时间进行. 应该说这些都使得我们所讨论的问题更接近于渔业生产的实际. 当然也增加了问题的复杂性. 最后得到的目标函数(通常称之为产量努力量(捕捞强度)函数)已经足够复杂, 使用解析的方法是很难进行分析的. 必须要掌握计算机编程的技巧来解决这个优化问题. 第一问虽然复杂但比较规范, 难度并不高. 第二问中的“五年后鱼群的生产能力不能受到太大的破坏”的提法较前多了一些灵活性. 可以按照不同的理解和方法来处理这个问题.

这次竞赛多数同学都做了这个题目. 从答卷上看, 同学们做题是努力的, 也很认真. 有些答卷是相当优秀的. 也有不少的答卷存在着这样或那样的问题. 其中多数发生在对问题的理解上. 主要有如下几点:

1. 捕捞强度系数. 这个概念题目中交代的十分清楚, 它是单位时间捕捞量与鱼群条数成正比时的比例系数. 如果用数学语言来表示就是: 只考虑捕捞对种群变化的影响, 则在  $[t, t + \Delta t]$  这段时间内鱼类种群由捕捞产生的变化量(捕捞量)为  $N(t) - N(t + \Delta t)$ , 单位时间的捕捞量是  $[N(t) - N(t + \Delta t)]/\Delta t$ . 当它与鱼群的大小成正比时应该有关系

$$[N(t) - N(t + \Delta t)]/\Delta t = qN(t)$$

这个关系应该对任何的时间间隔  $\Delta t$  都成立. 于是, 令  $\Delta t \rightarrow 0$  就得到方程  $dN/dt = -qN$ , 捕捞强度系数应该理解为满足这个关系的量  $q$ . 如果直接把它理解为捕捞的百分率是不恰当的.

2. 关于鱼类的“季节性集中繁殖”问题. 应该说这里对这种鱼类的繁殖行为的特征已经交代清楚了, 问题中还特别指出它的生物学背景: 鲢鱼, 以便于大家通过查阅文献资料得出更具体的印象. 为了用数学语言描述这种繁殖行为应该通过假设对上述特征给出更明显确叙述. 题目中说产卵孵化期是一年的最后四个月, 而且是集中产卵, 那么假设产卵均匀地分布在整个四个月的期间内是不合适的. 因为从我们的生物学常识也可以知道鱼的产卵繁殖与鸡的产卵繁殖不同. 再仔细分析一下就发现, 如果在四个月均匀地产卵, 那么这种鱼类应该每 1.2 分钟产一个卵. 显然这不符合鱼类的生物学实际的. 有的队假设产卵的过程从正态分布, 在方差很小的前提下, 这样的假设是可以的, 但大大增加了问题的难度. 在不失生物学的真实的前提下, 使模型的分析尽量简单的假设应该是假设鱼群的个体在后四个月的第一天集中一次产卵, 还有使用后四个月的平均鱼群量来计算产卵的总数. 这样处理与前面的假设没有本质的区别, 但处理起来要复杂.

3. 议论比较多的是“自然死亡率为  $0.8(1/\text{年})$ ”这个提法, 这是一个比较复杂的概念. 因为它既不是简单的百分比率又不是简单的变化的速率. 实际上它是百分比率的变化速率. 它的具体含义与前面的捕捞强度的概念是一致的. 由于在这个种群变化的模型中, 时间是以变量的形式出现的, 这个量是有量纲的它的量纲单位必须是  $1/\text{时间}$ . 它应该理解为鱼群是以每年死亡百分之八十的速度减少. 由于死亡现象是在任意时刻瞬时发生的, 它所导致的结果并不是在一年内恰好死亡百分之八十. 因此它不同于每年死亡百分之八十的说法. 后一个说法经常用于离散模型的参数, 这时时间是以固定间隔(通常为单位时间, 如: 年)的离散量出现的, 它不是模型中的变量. 因此这时的死亡率仅仅是一个简单的百分率, 是一个无量纲的量. 否则将无法保持模型中量纲的平衡. 因此在连续模型和离散模型中死亡率这个参数的给出方式是不同的. 这个概念已经多次出现在数学模型的教材中. 在介绍生物种群增长的数学模型时, 它作为指数增长模型中的唯一的一个重要的参数, 一般都被称为此“增长率”或“自然增长率”. 我们这里只是沿用了这个概念的习惯用法, 量纲单位的使用实际上已经标志出简单的百分率与百分率的变化速率的区别.

4. 文中指出了所讨论的鱼分四个年龄组, 并没有指明四龄以上的鱼如何对待. 我们可以假设这种鱼只活到四龄, 以后它就死掉了. 也可以假设四龄以后的鱼仍然可能活着. 在这两个假设下模型没有太大的差异. 只是后者的分析计算过程稍复杂一些, 计算的结果也只是稍有区别.

对问题的正确理解, 在建模过程中是非常重要的. 它直接地影响到所建的模型是否正确地反映了实际情况. 特别对捕捞强度系数和自然死亡率的不同的理解会导致计算结果的明显差异. 尽管在这次改卷的过程中我们尽量降低了它们对答卷成绩的影响. 在我们解决实际问题时, 必须要给予足够的重视.

这里问题所要组建的基本模型是在每年年初各年龄组的鱼群数量的迭代关系,它是一个与捕捞强度系数(或捕捞努力量)有关的离散模型.模型的参数应该由各年龄组的鱼群在年内动态的连续模型估算出来.由这个模型就可以得到由于捕捞而获得的渔获年产量(依赖于捕捞努力量的函数)模型.这个函数就是优化的目标函数.可持续捕捞应该在离散模型的平衡解处发生.因此模型的平衡解的迭代关系就给出了优化问题的约束条件.进一步分析表明,它可以化为单参数(努力量)函数的极值问题.编程在计算机上不难得到问题的答案:二龄组的捕捞强度为 7.29/年,捕捞率为 89.7%;四龄组的捕捞强度为 17.36/年,捕捞率为 95.6%;最优可持续捕捞量 38.87 万吨;可持续捕捞的鱼群大小(条数):

一龄  $1.19 \times 10^{11}$ , 二龄  $5.37 \times 10^{10}$ , 三龄  $2.41 \times 10^{10}$ , 四龄  $8.4 \times 10^7$ .

问题的第二问的灵活处理之处在于处理如何实现五年后保持鱼群的生产能力不受到太大的破坏,以及如何使用题目所要求的固定努力量的捕捞方式.由于所给的初始鱼群并不是可持续捕捞的鱼群,为了在五年内既得到最大的收益,又不破坏鱼群的生产能力.从数学上说应该是五年后鱼群尽量接近可持续捕捞鱼群的条件下来达产量最高.至于如何实现尽量接近可持续捕捞种群,每个队的处理方式可以不尽相同.如果把不破坏生产力处理为使鱼群回到初始状态,这样做是不可能实现收益最大的.对于捕捞方式,题目只要求以固定努力量的方式捕捞,可以是在五年内以同样的强度实现固定努力量的捕捞,也可以在不同的年份以不同的强度实现固定努力量的捕捞.可以发挥每个队的创造能力.事实上在这一问许多队都给出了自己的处理方式.