第十二讲：非线性规划问题建模方法

刘保东
山东大学, 计算机科学与技术学院
Email:baodong@sdu.edu.cn

本讲主要内容

1. 从示例看非线性规划建模问题
2. 非线性规划模型的一般形式
3. 求解非线性规划的一般方法—迭代法
4. 利用MATLAB 求解非线性规划模型
5. 利用LINGO 求解非线性规划模型
6. 建模案例: 钢管的订购和运输模型

例 1　一元函数极值问题

已知一元函数

$$y = x^2 - x + 1,$$

求它在区间 $[-1, 1]$ 内的极小值.

用严格的规划问题模型描述出来：

$$\begin{cases} \min y = x^2 - x + 2 \\ \text{s.t.} -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

例 2 曲线(数据)拟合问题

已知一组观测数据 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, 寻求某个近似函数 $\varphi(x;\theta)$, 使得理论曲线与实际观测点拟合程度最好. 其中, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ 为待定系数向量, m 为待定系数个数.

利用第四章中的最小二乘拟合思想, 问题转化如下非线性极小值问题

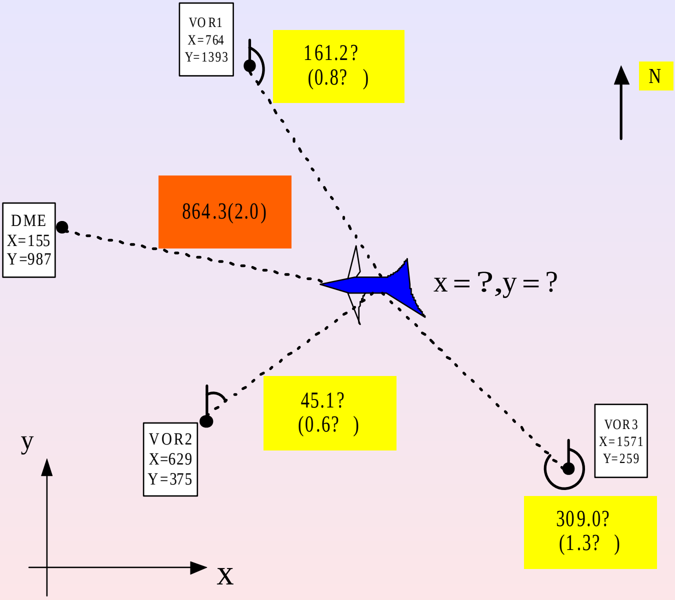
$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i;\theta)]^2. \tag{1}$$

例 3 飞机定位问题

飞机在飞行过程中, 能够收到地面上各个监控台发来的关于飞机当前位置的信息. 已知飞机接收到来自 3 个 VOR 设备给出的角度信息和 1 个 DME 设备给出的距离(图中括号内数据为测量误差限), 信息如下表所示.假设飞机和这些设备都在同一平面上, 问如何根据这些信息精确地确定当前飞机的位置?

表1 观测信息

观测站点	x_i	y_i	观测结果	观测误差
VOR1	764	1393	161.2°(2.81347弧度)	0.8°(0.0140弧度)
VOR2	629	375	45.1°(0.78714弧度)	0.6°(0.0105弧度)
VOR3	1571	259	309.0°(5.39307弧度)	1.3°(0.0227弧度)
DME	155	987	d_4=864.3(km)	2.0(km)


VOR1
X=764
Y=1393
161.2?
(0.8?)
N
DME
X=155
Y=987
864.3(2.0)
x = ?,y = ?
45.1?
(0.6?)
y
VOR2
X=629
Y=375
VOR3
X=1571
Y=259
309.0?
(1.3?)
x

问题分析

已知数据:

- 监控台观测设备位置坐标:
  $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4;$
- 各监控台测量结果:
  观测角度θ_i, 观测误差σ_i, $i = 1, 2, 3;$
- 测量距离d_4, 距离误差σ_4

建模目的：求飞机的位置坐标(x, y)

模型I: 不考虑误差因素

由已知条件, 可得:

$$\arctan\frac{x-x_i}{y-y_i}=\theta_i, i=1,2,3;$$

$$\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}=d_4$$

or

$$\frac{x-x_i}{y-y_i}=\tan\theta_i, i=1,2,3;$$

$$(x-x_4)^2+(y-y_4)^2=d_4^2$$

问题：4 个方程，2个未知参数，非线性超定方程组!!!

由最小二乘准则，问题变为

$$\min_{x,y}\sum_{i=1}^{3}(\arctan\frac{x-x_i}{y-y_i}-\theta_i)^2+(\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}-d_4)^2$$

或者

$$\min_{x,y}\sum_{i=1}^{3}(\frac{x-x_i}{y-y_i}-\tan\theta_i)^2+(\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}-d_4)^2$$

表达式是否正确?

进一步修正

$$\min_{x,y}\sum_{i=1}^{3}(\frac{\arctan\frac{x-x_i}{y-y_i}-\theta_i}{\theta_i})^2+(\frac{\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}-d_4}{d_4})^2$$

或者

$$\min_{x,y}\sum_{i=1}^{3}(\frac{\frac{x-x_i}{y-y_i}-\tan\theta_i}{\tan\theta_i})^2+(\frac{\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}-d_4}{d_4})^2$$

模型II: 考虑误差因素

$$\begin{aligned} \theta_i - \sigma_i &\leq \arctan\frac{x - x_i}{y - y_i} \leq \theta_i + \sigma_i \\ d_4 - \sigma_4 &\leq \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2} \leq d_4 + \sigma_4 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \tan(\theta_i - \sigma_i) &\leq \frac{x - x_i}{y - y_i} \leq \tan(\theta_i + \sigma_i) \\ d_4 - \sigma_4 &\leq \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2} \leq d_4 + \sigma_4 \end{aligned}$$

问题变为非线性方程组，如何求解？解是否唯一？

模型修正:无约束非线性最小二乘模型

- 误差一般服从什么分布？正态分布！
- 不同量纲的因素如何处理：归一化

$$\begin{aligned}\min_{x,y} E(x,y) &= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\arctan\frac{x-x_i}{y-y_i}-\theta_i}{\sigma_i}\right)^2 \\ &+\left(\frac{\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}-d_4}{\sigma_4}\right)^2\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\min_{x,y} E(x,y) &= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\frac{x-x_i}{y-y_i}-\tan\theta_i}{\tan\sigma_i}\right)^2 \\ &+\left(\frac{\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}-d_4}{\sigma_4}\right)^2\end{aligned}$$

- 记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的决策向量(n 维向量)
- $f(\mathbf{x})$为目标函数
- $g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \cdots, p$ 和 $h_j(\mathbf{x}), j = 1, 2, \cdots, q$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数，为约束条件

若 $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \cdots, p$ 和 $h_j(\mathbf{x}), j = 1, 2, \cdots, q$ 中至少有一个是 $\mathbf{x}$ 的非线性函数时, 称如下形式的数学模型

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, i = 1, \cdots, p, \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \cdots, q. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

为**非线性规划**(有时也称**数学规划**)模型的一般形式.

- 称满足所有约束条件的点 $\mathbf{x}$ 的集合$\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \middle| g_i(\mathbf{x})\le 0, i=1,\cdots,p;\ h_j(\mathbf{x})=0, j=1,\cdots,q\right.$$

为非线性规划问题的**约束集或可行域**.

- 对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$, 称 $\mathbf{x}$ 为非线性规划问题的**可行解**或**可行点**.
- 使目标函数取得最优值的可行解称为**最优解**

在此定义下, 非线性规划模型(2)可等价地写为

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} f(\mathbf{x}). \tag{3}$$

几点说明:

1. 目标函数的最大值、最小值转换问题, 以及约束条件中的 “$=, \leq, \geq$” 形式互相转换方式
2. 若 p, q 不全为 0, 则称模型(2)为**约束非线性规划**或**约束最优化模型**.
3. 若 $p = q = 0$, 即非线性规划模型的可行域 $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ 时, 称为**无约束非线性规划**或**无约束最优化模型**.

定义1

对于非线性规划模型(2), 若存在 $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$, 并且有

$$f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

则称

- $\mathbf{x}^*$ 是非线性规划模型(2) 的**整体最优解**(有时也称**全局最优解**)或**整体极小点**(或**全局最小点**)
- $f(\mathbf{x}^*)$ 为**整体最优值**(也称**全局最优值**)或**整体极小值**(也称**全局极小值**)

特别地, 如果存在 $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ 使得

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

则称

- $\mathbf{x}^*$ 是非线性规划模型(2)的**严格整体最优解**或**严格整体极小点**
- $f(\mathbf{x}^*)$ 为**严格整体最优值**或**严格整体最小值**.

定义2

对于非线性规划问题(2), 若存在 $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$, 以及 $\mathbf{x}^*$ 的一个邻域

$$N_\delta(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leqslant \delta\}$$

其中 $\delta > 0$ 是实数, $\|\cdot\|$ 为向量的某种范数(模), 使

$$f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}^*) \cap \mathbf{X}$$

则称 $\mathbf{x}^*$ 是非线性规划模型(2) 的**局部最优解或局部极小点**, 称 $f(\mathbf{x}^*)$ 为**局部最优值或局部极小值**. 进一步地, 如果有

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}^*) \cap \mathbf{X}, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

成立, 则称 $\mathbf{x}^*$ 是非线性规划模型(2) 的**严格局部最优解**或**严格局部极小点**, $f(\mathbf{x}^*)$ 为**严格局部最优值**或**严格局部极小值**.

利用迭代方法，求解非线性规划模型(3)的一般步骤:

第 1 步 选取初始点 $\mathbf{x}^0, k := 0$;
第 2 步 构造搜索方向 $\mathbf{p}^k$;
第 3 步 根据 $\mathbf{p}^k$, 确定步长 t_k ;
第 4 步 令 $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t_k\mathbf{p}^k$. 若 $\mathbf{x}^{k+1}$ 已满足某种终止条件, 停止迭代, 输出近似最优解 $\mathbf{x}^{k+1}$. 否则令 $k := k + 1$, 转回第2 步.

几点说明

- 如何确定初始点?
- 如何确定搜索方向?
- 如何确定迭代终止（收敛）条件?

1、无约束优化问题 利用 MATLAB 软件求解无约束优化问题的函数为fminsearch, fminunc. 调用格式如下:

格式I: x=fminsearch(fun,x0),或x = fminunc(fun,x0)"

说明: 用于求解如下无约束优化模型

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \tag{4}$$

其中, fun 为用户定义的目标函数名(M函数文件名) 或句柄函数, x0 为初始迭代点.

格式II: x = fminsearch(fun,x0,options),或x = fminunc(fun,x0,options)

说明: 也用于求解模型 (4), 其中 "options" 表示优化参数, 如指定终止误差大小等.

格式III: [x,fval] = fminsearch(...),或[x,fval] = fminunc(...)

说明: 返回最优解 x 及 x 处的目标函数值fval.

例 4

求解如下无约束优化问题

$$f(x_1, x_2) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1$$

MATLAB 命令及其运行结果如下：

```
>> f=@(x)(3/2)*x(1)∧2+x(2)∧2/2-x(1)*x(2)-2*x(1)
>> x=fminsearch(f,[-2,4])
x = 1.0000 1.0000
```

也可以利用fminunc 函数求解，如输入MATLAB 命令如下:

```
>>
x=fminunc('(3/2)*x(1)∧2+x(2)∧2/2-x(1)*x(2)-2*x(1)',[-1,2])
```

显示运行结果完全相同.

例5 利用 MATLAB 求解例3 的飞机精确定位问题.

模型描述

$$\min_{x,y} E(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\frac{x-x_i}{y-y_i} - \tan\theta_i}{\tan\theta_i}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2} - d_4}{d_4}\right)^2$$

首先创建并保存 MATLAB 函数 flight.m 在当前目录中, 程序代码如下

```
function f=flight(x)
X=[746 629 1571]; Y=[1393 375 259];%VOR监控台坐标
theta=[161.2 45.1 309];sigma=[0.8 0.6 1.3];%VOR监控台观测数据
x4=155;y4=987;d4=864.3;sigma4=2; %DME 坐标及观测数据
theta=theta*pi/180;sigma=sigma*pi/180;%角度转换成弧度
z=(x(1)-X)./(x(2)-Y)-tan(theta);
z=z./tan(theta);
f=sum(z.^2)+((d4-sqrt((x(1)-x4)^2+(x(2)-y4)^2))/d4)^2;
end
```

在 MATLAB 命令窗口下运行命令

```
>> [x,feval]=fminsearch('flight',[500 500])
```

运行结果为

x =

977.3617 726.2796

feval =

0.0013

即飞机的坐标为(977.3617, 726.2796), 相对残差平方和为 0.0013.

2、有约束优化问题的MATLAB 求解

利用 MATLAB 软件求解约束优化问题的函数调用方式及其功能说明如下:

格式 I:x = fmincon(fun,x0,A,b)

说明：用于求如下解模型, 其中 x0 表示迭代初始点.

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \end{array} \tag{5}$$

格式 II: x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq)

说明: 用于求解模型：

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} \\ \mathbf{Aeq} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{beq} \end{cases} \end{array} \tag{6}$$

格式 III: x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
说明: 用于求解模型:

$$
\begin{array}{ll}
\min & f(\mathbf{x}) \\
\text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{Aeq} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{beq} \\ \mathbf{lb} \le \mathbf{x} \le \mathbf{ub} \end{cases}
\end{array}
\tag{7}
$$

格式 IV: x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
说明: 用于求解模型:

$$
\begin{array}{ll}
\min & f(\mathbf{x}) \\
\text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{Aeq} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{beq} \\ \mathbf{lb} \le x \le \mathbf{ub} \\ c(\mathbf{x}) \le 0 \\ ceq(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}
\end{array}
\tag{8}
$$

其中: nonlcon 为非线性约束. $c(\mathbf{x}) \le 0$、$ceq(\mathbf{x}) = 0$ 分别为对应非线性不等式约束和等式约束.

格式 V: [x,fval] = fmincon(...)
说明: 返回最优解 $\mathbf{x}$ 及 $\mathbf{x}$ 处的目标函数值 fval.
格式 VI: [x,fval,exitflag,output,lambda,grad] = fmincon(...)
说明:返回最优解 $\mathbf{x}$ 处的目标函数的梯度.
格式 VII: [x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] =fmincon(...)
说明: 返回最优解 $\mathbf{x}$ 处的 Hesse 矩阵.

例 6 求解如下的约束非线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & f = -x_1 x_2 x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leqslant x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 72 \end{aligned}$$

解: 在命令窗口输入以下信息:

```
>> cnpfun=@(x)-x(1)*x(2)*x(3);
>> A=[-1,-2,-2;1,2,2];
>> b=[0;72];
>> x0 = [10; 10; 10]; % Starting guess at the solution
>> [x,fval] = fmincon(cnpfun,x0,A,b)
```

输出结果显示,得到局部最优解, 结果如下:

```
x= 24.0000 12.0000 12.0000
fval = -3.4560e+003
```

3、二次规划问题的求解

二次规划是一类特殊的非线性最优化问题，专用 MATLAB 求解函数为quadprog()，调用格式及功能说明如下:

格式I: x = quadprog(H,c,A,b)

说明: 用于求解模型:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \end{array} \tag{9}$$

格式II: x = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq)

说明: 用于求解模型:

$$\begin{array}{ll} \min & \dfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{Aeq}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{beq} \end{cases} \end{array} \tag{10}$$

格式III： x = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
说明: 用于求解模型：

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}\leq\mathbf{b} \\ \mathbf{Aeq}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{beq} \\ \mathbf{lb}\leq\mathbf{x}\leq\mathbf{ub} \end{cases} \end{array} \tag{11}$$

格式IV: x = quadprog(H,c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
说明: 也用于求解模型 (11), 其中 x0 为初始迭代点.
格式V： [x,fval] = quadprog(...)
说明：返回最优解 x 及 x 处的目标函数值 fval.

例 7 求解如下的二次规划

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1,x_2)=8x_1+10x_2-x_1^2-x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1+2x_2\le 6 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解: 首先把模型写成标准矩阵形式

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x)=\frac{1}{2}(x_1\ \ x_2)\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+(-8\ \ -10)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

在命令窗口输入以下信息:

```
>> H=[2,0;0,2];c=[-8;-10];A=[3,2;-1,0;0,-1];b=[6;0;0];
>> [x,f]=quadprog(H,c,A,b)
```

运行结果为

x = 0.3077 2.5385

f = -21.3077

五、利用LINGO 求解非线性规划模型

LINGO 也是解决非线性规划问题的有力工具之一. 它使用较为方便, 类似于线性规划问题, 只要直接在模型窗口键入要解决的问题即可.

例 9.10 利用 LINGO 求解如下线性规划

$$\begin{array}{ll} \min & f = -x_1 x_2 x_3 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 72 \end{array}$$

解: 在模型命令窗口键入以下内容:

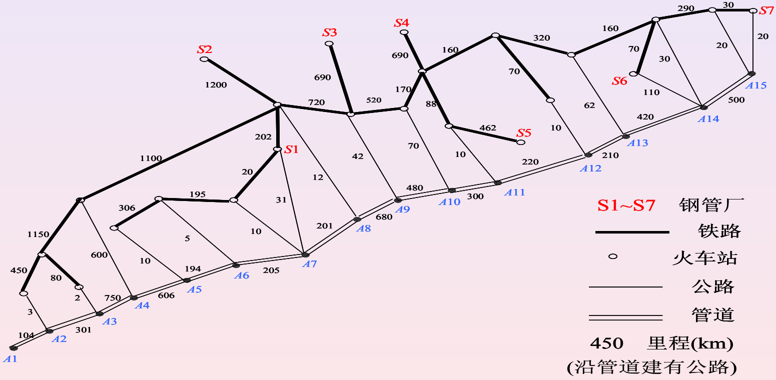
```
min=-x1*x2*x3;
x1+2*x2+2*x3>=0;
x1+2*x2+2*x3<=72;
end
```

按 Solve 按钮在 solution report 窗口得到以下结果:（略）

六、建模案例：钢管的订购和运输模型—CUMCM2000B

问题提出

- 要铺设一条
$$A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{15}$$
的输送天然气的主管道, 如图所示
- 经筛选后可以生产这种主管道钢管的钢厂有$S_1, S_2, \cdots, S_7$
- 图中粗线表示铁路，单细线表示公路，双细线表示要铺设的管道(假设沿管道或者原来有公路，或者建有施工公路)，圆圈表示火车站，每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程(单位km)。
- 为方便计，1km主管道钢管称为1单位钢管


S1~S7 钢管厂
铁路
火车站
公路
管道
450 里程(km)
(沿管道建有公路)
S1
S2
S3
S4
S5
S6
S7
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A9
A10
A11
A12
A13
A14
A15

钢厂的产量和销价(1单位钢管=1km管道钢管)
表一

钢厂	1	2	3	4	5	6	7
产量上限	800	800	1000	2000	2000	2000	3000
销价(万元)	160	155	155	160	155	150	160

1单位钢管的铁路运价

里程(km)	≤300	301～350	351～400	401～450	451～500
运价(万元)	20	23	26	29	32
里程(km)	501～600	601～700	701～800	801～900	901～1000
运价(万元)	37	44	50	55	60

1000km以上每增加1至100km运价增加5万元.
1单位钢管的公路运价：0.1万元/km（不足整公里部分按整公里计）

问题分析

- 建模目的: 求一个主管道钢管的订购和运输策略, 使总费用最小. — 最优化问题
- 费用组成：订购费用和运输费用; 订购费用取决于单价和订购数量, 运输费用取决于往哪里运(即目的地)和运输路线
- 已知： 7 个供选择的钢厂—供应方；目的地— 铺设地点（到每一个具体铺设位置）
- 困难：每一个钢厂到铺设地点大多都有多条可供选择的运输路线, 应选择哪一条路线？.
- 结合总目标的要求, 可以很容易地想到应选择运费最小的路线.

- 注意到, 题目中购买数量、运费、铺设长度等的计量方式是按 1 个单位钢管计量的，因此按单位钢管计量是唯一选择（难度系数降低）
- 从同一个钢厂订购钢管运往同一个目的地, 一旦最小运输费用路线确定, 则单位钢管的运费就确定了
- 单位钢管的总定购、运输费用= 钢管单价+运输费用.
- 同一个钢厂订购钢管运往同一个目的地的总费用等于订购数量乘以单位钢管的购运费用(单价+ 单位钢管运费)

(1) 铺设方案的设定

- 方案1：从钢厂订购一个单位的钢管直接送往最终管线的铺设地点，此时需要计算沿线共有多少个铺设点. 总管线长度为5171 km, 以 1km 管道为一个铺设地点, 则总共有 5171 个目的铺设点
- 方案2: 从钢管厂订购若干个单位的钢管运送至枢纽点 $A_1, A_2, \cdots, A_{15}$, 再由枢纽点按一个单位计分别往枢纽点两侧运送至最终铺设地点(从运费最低的角度, 此为唯一最佳选择).
- 无论采用哪一种方案, 因枢纽点 A_1 无路可通, 只能通过 A_2 点往前铺设

(2) 运输费用及运输路线的确定:

- 钢管可以通过铁路或公路运输
- 公路运费是运输里程的线性函数 (稍有不同的是不足 1km 要进整); 铁路运价是分段的阶跃的常数函数
- 在计算时, 不管对运输里程还是费用而言, 都不具有可加性, 只能将铁路运价 (即由运输总里程找出对应费率) 和公路运价分别计算后再迭加.
- 鉴于该问题的可能的运输路线很少, 且钢厂出来都是铁路, 铺设点沿线都是公路, 而且通常情况下平均每公里的铁路运价要低于公路运价, 所以只要在优先考虑尽量使用铁路运输的前提下, 通过可能方案的枚举, 就能找到费用最小的运输路线和最小运费.

方案1：最小购运费用的计算

- 记从各钢厂 S_i 购买一个单位的钢管，并运到需要最终管线铺设点 P_j 的最小运输费用为 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,7,j=1,\cdots,5171)$
- 因为从 S_i 到 P_j 总要经过某个枢纽站．假定 P_j 位于枢纽站 A_k 和 A_{k+1} 之间，那么只要比较从 $S_i \to A_k \to P_j$ 和 $S_i \to A_{k+1} \to P_j$ 两者的大小．也就是说，只要先求出 $S_i \to A_k$ 的费用，再在 A_kA_{k+1} 段上找出通过两侧到达铺设点 P_j 费用相同的平衡点 Q_{ik}，显然如果 P_j 在平衡点的左侧，则应该经过 A_k 到达，如果在平衡点的右侧，则应该经过 A_{k+1} 到达．这样就可以大大减少计算量．
- 注意到，枢纽点 A_1 只能通过 A_2 运输，然后再向左铺设即可．而 A_{15} 点则只能往左铺设．
- 从钢厂 S_i 购买 1 个单位的钢管费用为 p_i，然后加上按最小费用路线运输到 A_j 的运费 c_{ij}，构成了从 S_i 到 A_j 最小购运费用．据此计算各钢管厂到各运输枢纽点的最小购运费用(计算结果略)

模型 I: 0-1 整数规划模型

决策变量: 用 x_{ij} 表示铺设点 P_j 的钢管是否从第 i 个钢厂购运而来, $i = 1, 2, \cdots, 7, j = 1, 2, \cdots, 5171$. 如果是则取 1, 否则取 0.

目标函数: 仍记 c_{ij} 为从第 i 个钢管厂购买 1 个单位钢管到铺设地点 P_j 的最小购运费用, 则总的购运费用为

$$W = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{5171} c_{ij} \times x_{ij}.$$

约束条件: 根据钢厂生产能力约束或购买限制, 有以下不等式:

$$\sum_{j=1}^{5171} x_{ij} \in \{0\} \cup [500, s_i], \quad i = 1, 2, \cdots, 7.$$

原问题的数学模型就可以表示为如下形式

$$\min \quad \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{5171} c_{ij} \times x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{5171} x_{ij} \in \{0\} \cup [500, s_i], \quad i = 1, 2, \cdots, 7 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1, 2, \cdots, 7, j = 1, 2, \cdots, 5171 \end{cases}$$

该模型共有 $7 \times 5171 = 36197$ 个决策变量, 是一个中等或以上规模的 0 - 1 规划问题.

从钢厂到铺设点的运输必定要经过枢纽站, 因此可以用下述方式简化.

决策变量: 记

- x_{ij} 表示从钢厂 S_i 运到枢纽站 A_j 的运量, $i=1,2\cdots,7, j=2,3,\cdots,15$.
- y_j、z_j 分别表示从枢纽站 A_j 向右边 (即 A_jA_{j+1} 段) 及左边 (即 $A_{j-1}A_j$ 段) 铺设的钢管总量(这里假设 y_j 、z_j 都是整数).

目标函数: 若记 c_{ij} 表示从钢厂 S_i 运到枢纽站 A_j 时单位钢管的最小购运费用, $i=1,2\cdots,7, j=2,3,\cdots,15$.

- 从钢厂到各枢纽点的总购运费用为

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=2}^{15} c_{ij}x_{ij}.$$

- 铺设管道不能只运输到枢纽点, 而是要运送并铺设到全部管线,对应的铺设费用为

约束条件:

(1) 根据钢厂生产能力约束或购买限制, 有以下不等式:

$$\sum_{j=2}^{15} x_{ij} \in \{0\} \cup [500, s_i], \quad i = 1, 2, \cdots, 7.$$

(2) 购运量应等于需求量

$$y_j + z_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij}, j = 2, 3, \cdots, 15.$$

(3) 枢纽点间距约束, 从两个枢纽点分别往右、左铺设的总单位钢管数应等于其间距.

$$y_j + z_{j+1} = |A_j A_{j+1}|, j = 2, 3, \cdots, 14.$$

其中 $|A_j A_{j+1}|$ 表示主管道在枢纽点 A_j, A_{j+1} 之间的距离.

(4) 端点约束:
从 A_1 到 A_2 只能从 A_2 往左铺设, 故

$$z_2 = |A_1A_2|.$$

在枢纽点 A_{15} 只能往左铺设, 即

$$y_{15} = 0$$

(5) 非负约束

$$x_{ij} \geq 0, y_j \geq 0, z_j \geq 0, i = 1, 2, \cdots, 7, j = 2, 3, \cdots, 15.$$

综上所述, 原问题的模型为:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=2}^{15} c_{ij}x_{ij} + \frac{0.1}{2}\sum_{j=2}^{15}\Big[y_j(y_j+1)+z_j(z_j+1)\Big]$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=2}^{15} x_{ij} \in \{0\}\cup[500, s_i], \quad i=1,2,\cdots,7, \\ y_j + z_{j+1} = |A_jA_{j+1}|, \quad j=1,\cdots,14, \\ y_j + z_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij}, j=2,\cdots,15, \\ z_2 = |A_1A_2|, y_{15}=0, \\ x_{ij}, y_j, z_j \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,7, j=2,3,\cdots,15. \end{cases}$$

这是一个二次规划模型, 变量个数为 $7\times 14 + 2\times 14 = 126$ 个.

如仍考虑枢纽节点 A_1, 即可以考虑先经枢纽节点 A_2, 再通过 A_2 经管线施工公路运至枢纽节点 A_1, 则上述模型可更改为

$$\min \quad \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} c_{ij}x_{ij} + \frac{0.1}{2}\sum_{j=1}^{15}\Big[y_j(y_j+1)+z_j(z_j+1)\Big]$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{15} x_{ij} \in \{0\}\cup[500, s_i], \quad i=1,2,\cdots,7, \\ y_j + z_{j+1} = |A_jA_{j+1}|, \quad j=1,2,\cdots,14, \\ y_j + z_j = \sum\limits_{i=1}^{7} x_{ij}, j=1,2,3,\cdots,15, \\ z_1 = 0, y_{15}=0, \\ x_{ij}, y_j, z_j \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,7, j=2,3,\cdots,15, \text{均为整数} \end{cases} \tag{12}$$

该模型的变量个数为 $7\times 15+2\times 15=135$ 个.

由于模型约束中存在区间约束 $[500, s_i]$, 用通常的求解方法无法求解, 处理此问题的方法一般是将它分解为多个线性约束下的优化问题, 分情形进行求解[3].

首先将约束条件 $\sum_{j=1}^{15} x_{ij} \in \{0\} \cup [500, s_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ 更改为

$$\sum_{j=1}^{15} x_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, 2, \cdots, 7,$$

其它不变. 则模型变为标准的二次规划问题, 可用 LINGO 软件求解, 并分析其运算结果, 若某个钢厂的订购量小于 500 的最低订购限量要求, 可以考虑取消该钢厂的订货, 或者限定其订货量不小于 500 个单位, 即问题化为两个子问题, 再次进行求解.

利用LINGO 编程（程序源代码略）。运行结果发现, 购运方案中钢厂 S_7 的订购量为 245 个单位, 不足 500 个单位, 其它钢厂订购量均满足问题要求, 因此我们把它分为两个子问题再分别求解

子问题一: 取消钢厂 S_7 的订货, 模型变为

$$\min \quad W=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=2}^{15}c_{ij}x_{ij}+\frac{0.1}{2}\sum_{j=2}^{15}\Big[y_j(y_j+1)+z_j(z_j+1)\Big]$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases}\sum\limits_{j=2}^{15}x_{ij}\le s_i, \quad i=1,2,\cdots,6,\\ y_j+z_{j+1}=|A_jA_{j+1}|, \quad j=1,\cdots,14,\\ y_j+z_j=\sum\limits_{i=1}^{7}x_{ij}, j=1,2,\cdots,15,\\ z_21=0, y_{15}=0,\\ x_{ij}, y_j, z_j\geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,6, j=2,3,\cdots,15.\end{cases}$$

适当修改上述程序, 运用 LINGO 软件求解, 计算结果显示所有订购方案都满足约束条件, 且最低购运费用为 1239618 万元.

子问题二: 限定钢厂 S_7 的订购量不小于 500 个单位, 模型描述变为

$$\min \quad W=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=2}^{15}c_{ij}x_{ij}+\frac{0.1}{2}\sum_{j=2}^{15}\Big[y_j(y_j+1)+z_j(z_j+1)\Big]$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=2}^{15}x_{ij}\le s_i, \quad i=1,2,\cdots,6,\\ y_j+z_{j+1}=|A_jA_{j+1}|, \quad j=2,\cdots,14,\\ \displaystyle y_j+z_j=\sum_{i=1}^{7}x_{ij}, j=2,3,\cdots,15,\\ z_2=|A_1A_2|, y_{15}=0,\\ \displaystyle 500\le\sum_{j=2}^{15}x_{7j}\le s_7,\\ x_{ij},y_j,z_j\geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,7, j=2,3,\cdots,15. \end{cases}$$

修订 LINGO 程序, 重新运用 LINGO 软件求解, 计算结果显示所有订购方案都满足约束条件, 且最低购运费用为 1279664 万元.

比较两个子问题的计算结果发现, 取消钢厂 S_7 的订货需求是一种最优的方案. 此时, 具体的订购和运输方案略.

源程序代码和具体运算结果详见

刘保东等编，数学建模基础教程，高等教育出版社，2015.