空中防撞系统的设计

黄春峰　　饶红玲　　刘　伟

（中国科学技术大学，合肥 230026）

指导教师：于清娟

编者按：本文用相对运动的观点建立飞机两两不相撞的约束条件，将问题归结为一个非线性规划问题，用惩罚函数方法化为无约束极值问题求得最优解。罚函数选取合理，表达清楚。

关键词：非线性规划，惩罚函数，最优解

一、符号约定

P_i 为第 i 架飞机坐标；θ_i 为第 i 架飞机方向角；r_{ij} 为 P_i 和 P_j 间距；θ_{ij} 为 P_{ij} 与 X 轴的夹角；ν 为飞机飞行速度。

二、问题的分析与求解

1. 设计目标

要设计的防撞系统中，为确保飞机不相撞，应满足如下条件：

(1) 安全距离要求 $|P_{ij}|\geq 8$

(2) 飞机偏离航向不应太远，要求 $|\triangle\theta|_i\leq 30°$

根据上述条件及题目的要求，防撞系统的目标是达到总航向的改变最小。即

$\min\left(\sum_{i=1}^{6}|\triangle\theta_i|\right)$ 上述的条件和目标是我们建模的依据。

2. 飞机相撞的判据

根据相对运动原理 P_i 相对 P_j 的速度方向为 $(\nu(cos\theta_i - cos\theta_j),\nu(sin\theta_i - sin\theta_j))$

t 时刻 P_i 相对 P_j 的位置为 $(a_{ij} + \nu t(cos\theta_i - cos\theta_j),\ b_{ij} + \nu t(sin\theta_i - sin\theta_j))$

令 $\nu t = l$，则有

$$|P_iP_j|^2 = f(l) = (a_{ij}^2 + b_{ij}^2) + 4l sin\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\left(-a_{ij}sin\frac{\theta_i+\theta_j}{2} + b_{ij}cos\frac{\theta_i+\theta_j}{2}\right) + 4l^2sin^2\frac{\theta_i+\theta_j}{2},\quad 0<l<l_{max}$$

由上可知，P_i 与 P_j 若相撞仅有三种可能：

1　f(0)<64　　　但这与初始条件不符，故无须考虑

2　$f(l_{max})<64$　　$r_{ij}^2\cos^2\left(\frac{\theta_i+\theta_j}{2}-\theta_{ij}\right)<64$

且

$$30 < l_p = -r_{ij}\sin(\theta_{ij}-\frac{\theta_i+\theta_j}{2})/2\sin\frac{\theta_i-\theta_j}{2} < l_{max}$$

所以当 f(l)满足(2)或(3)时，P_i 与 P_j 相撞，否则不相撞。

通过上述问题分析，可以看出这个模型的总目标就是确定每个可调的方向角，使它在不违反判据 $|r\cos(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2})|\geq 8$ 所规定的限制下，实现前述子目标。因此从本质上这是一个非线性规划问题。

3. 非线性规划法解决问题

根据前面的分析，我们已把问题转化为求如下极值

$$\begin{cases} \min f(\theta) = \sum_i |\triangle\theta_i| \\ |\triangle\theta_i| < \frac{\pi}{6} \\ |P_{ij}(t)| > 8 \\ \quad 0 < t < l_{min}/\nu \end{cases}$$

用惩罚函数法可将其作为无约束极值问题求解，也即求 $\min h(\theta)=f(\theta)+Mc(\theta)$

M 是一个很大的常数因子，$c(\theta)$ 在 θ 满足约束条件时为 0，否则为正值，这样，$h(\theta)$ 的极值通常只能在满足约束条件处取得，并且是 $f(\theta)$ 的极值。

取 $c(\theta)=cb(\theta)+cr(\theta)$

$$cr(\theta_i,\theta_j)=\begin{cases} 8-\left|r_{ij}\cos\left(\theta_{ij}-\frac{\theta_i+\theta_j}{2}\right)\right|, & 0<\dfrac{r_{ij}\cos\left(\theta_{ij}-\frac{\theta_i+\theta_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_i-\theta_j}{2}\right)}<160\sqrt{2} \\ 0 & \end{cases}$$

$$Cb(\theta_i)=\begin{cases} 0 & |\triangle\theta_i|<\pi/6 \\ |\triangle\theta_i| & |\triangle\theta_i|>\pi/6 \end{cases}$$

我们用步长加速法求极值(详见文献)

由于步长加速法求出的是局部最优解，为尽量求出全局最优解，为尽量求出全局最优解，我们选用几组不同的初值代入，求出极小值，再从中选出最优者。

取刚进入的飞机左偏 1 度为初始值，得出一个解为第三架飞机左偏约 2.68 度，第六架飞机左偏约 0.94 度，总改变角为约 3.629693 度。即各机新方向角为 243，236，223.18，159，230，52.94。