

# “节水洗衣机”问题数学建模及若干评注

付 鹂

(重庆大学系统工程及应用数学系, 重庆 630044)

**摘 要** 对“节水洗衣机”问题进行了分析, 建立了一种数学模型, 展示了相应的分析和求解方法. 结合 1996 年全国大学生建模竞赛情况作了若干评注.

**关键词** 洗衣机, 节水, 数学建模, 数学规划

## 1. 引 言

我国许多城镇都存在淡水短缺的问题, 给单位和居民用水造成困难. 洗衣在家庭(包括洗衣店)用水中占有相当大的份额, 因此研究开发节水型洗衣机是很有意义的. 这一课题经过充分简化后被选定作为 1996 年全国大学生数学建模竞赛题目(B 题). 本文对该题进行了剖析, 建立了一种数学模型, 展示了相应的分析和求解方法. 需要说明, 本文的有关内容不作为竞赛题目的参考解答.

本文还结合这次竞赛情况对数学建模的一些问题及分析和求解简要地作了评注.

## 2. 问题剖析

### 2.1 “洗衣节水”问题

不论人工洗衣还是洗衣机洗衣, 都存在节水问题. 可作一个理想实验: 若用水量为零, 则显然洗衣不净衣物; 若用水量为无穷大, 则肯定浪费水. 因此必然存在刚好“洗净”衣物的“最少”用水量. 机器能够比人更精确地控制洗衣过程, 所以提出“节水洗衣机”的问题.

### 2.2 洗衣机的基本原理和过程

本文不拟对洗衣的微观机制(包括机械的、物理的、化学的、物理化学的)作讨论, 而仅仅从宏观的层次去把握.

洗衣的基本原理就是将吸附在衣物上的污物溶于水, 通过脱去污水而带走污物. “溶污物—脱污水”是由两个根本要素构成的一个“元动作”, 无论是如何精心设计的洗衣方式和程序都是以此为基础的. 洗衣的过程就是通过加水来实现上述“溶污物—脱污水”动作的反复执行, 使得残留在衣物上的污物越来越少, 直到满意的程度.

通常洗衣要加入洗涤剂, 它帮助衣物上原有的污物溶解. 但应注意的是, 洗涤剂本身也是不希望留在衣物上的东西. 因此“污物”应是衣物上原有污物与洗涤剂的总和. 有了这种认识后, 我们就可以统一地处理“洗涤”(即通常加洗涤剂的首轮洗衣)和“漂洗”(即通常的以后各轮洗衣, 不再加洗涤剂, 但水中还有剩余洗涤剂), 把二者都看作“溶污物”环节.

“脱污水”在洗衣机中通常称为“脱水”, 常由排水和甩干两个步骤组成.

### 2.3 “节水洗衣机”要点分析

立足于“溶污物—脱污水”这种基本原理, 我们可以找出“节水洗衣机”问题的基本要点如下:

1) 污物的溶解情况如何? 我们将用“溶解特性”来刻画.

2) 每轮脱去污水后污物减少情况如何? 这将由系统的动态方程表示.

3) 如何设计由一系列“溶污物—脱污水”构成的节水洗衣程序? 这将通过用水程序来反映, 也是我们最终需要的结果.

### 3. “节水洗衣机”问题建模

#### 3.1 基本假设

1) 仅考虑离散的洗衣方案, 即“加水—溶污物—脱污水”(以下称为“加水—洗涤脱水”)三个环节是分离的. 这三个环节构成一个洗衣周期, 称为“一轮”.

2) 每轮用水量不能低于  $L$ , 否则洗衣机无法转动; 用水量不能高于  $H$ , 否则会溢出. 设  $L < H$ .

3) 每轮的洗涤时间是足够的, 以便衣物上的污物充分溶入水中从而使每轮所用的水被充分利用.

4) 每轮的脱水时间也是足够的, 以使污水脱出, 即让衣物所含的污水量达到一个低限, 设这个低限是一个大于 0 的常数  $C$ . 设  $C < L$ .

注 除首轮外, 每轮“用水量”实际包括该轮加水量和衣物中上轮脱水后残留的水量, 即残留水量被自然地利用了.

#### 3.2 变量定义

1) 设共进行  $n$  轮“加水—洗涤—脱水”的过程, 依次为第 0 轮第 1 轮, 第 2 轮, 第  $n-1$  轮.

2) 第  $k$  轮用水量为  $u_k (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ .

3) 衣物上的初始污物量为  $x_0$ . 在第  $k$  轮脱水之后仍吸附在衣物上的污物量为  $x_{k+1} (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ .

#### 3.3 溶解特性和动态方程

第  $k$  轮洗漂之后和脱水之前, 第  $k-1$  轮脱水之后的污物量  $x_k$  已成为两部分

$$x_k = p_k + q_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.3.1)$$

其中  $p_k$  表示已溶入水中的污物量,  $q_k$  表示尚未溶入水中的污物量.  $p_k$  与第  $k$  轮的加水量  $u_k$  有关, 总的规律是  $u_k$  越大  $p_k$  越大, 且当  $u_k = L$  时  $p_k$  最小 ( $= 0$ , 因为此时洗衣机处于转动临点, 有可能无法转动, 该轮洗衣无效); 当  $u_k = H$  时  $p_k$  最大 ( $= Qx_k, 0 < Q < 1$  其中  $Q$  称为“溶解率”). 因此简单地选用线性关系表示这种溶解特性则有

$$p_k = Qx_k \frac{u_k - L}{H - L} \quad (3.3.2)$$

在第  $k$  轮脱水之后, 衣物上尚有污物  $q_k = x_k - p_k$ , 有污水  $C$  其中污水  $C$  中所含污物量为  $(p_k/u_k)C$ . 于是第  $k$  轮完成之后衣物上尚存的污物总量为

$$x_{k+1} = (x_k - p_k) + C \frac{p_k}{u_k}, \quad (3.3.3)$$

将 (3.3.2) 代入上式并整理后得系统动态方程

$$x_{k+1} = x_k \left[ 1 - Q \left( 1 - \frac{C}{u_k} \right) \frac{u_k - L}{H - L} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.3.4)$$

#### 3.4 优化模型

由于  $x_n$  是洗衣全过程结束后衣服上最终残留的污物量, 而  $x_0$  是初始污物量, 故  $x_n/x_0$  反映了洗净效果. 由系统动态方程 (3.3.4) 可得

$$\frac{x_n}{x_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \left[ 1 - Q \left( 1 - \frac{C}{u_k} \right) \frac{u_k - L}{H - L} \right], \quad (3.4.1)$$

又总用水量为

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k, \quad (3.4.2)$$

于是可得优化模型如下

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ \text{s.t.} \quad & \prod_{k=0}^{n-1} \left[ 1 - Q \left( 1 - \frac{C}{u_k} \right) \frac{u_k - L}{H - L} \right] \leq \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

其中  $\varepsilon$  代表对洗净效果的要求. 若令

$$v_k = \frac{u_k - L}{H - L}, \quad (3.4.4)$$

$$u_k(H - L)v_k + L, \quad (3.4.5)$$

则优化模型成为更简洁的形式

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ \text{s.t.} \quad & \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 - Qv_k + \frac{Qv_k}{Av_k + B} \right) \leq \varepsilon \\ & 0 \leq v_k \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

其中

$$A = \frac{H - L}{C} = B \left( \frac{H}{L} - 1 \right), \quad B = \frac{L}{C}. \quad (3.4.7)$$

## 4. 分析与求解

### 4.1 最少洗衣轮数

定义函数

$$r(t) = 1 - Qt + \frac{Qt}{At + B}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.1.1)$$

易知

$$r'(t) = Q \left[ \frac{B}{(At + B)^2} - 1 \right] < 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.1.2)$$

可见  $\tau(t)$  是区间  $[0, 1]$  上的单调减函数, 所以

$$\tau_{\min} = \tau(1) = 1 - Q + \frac{QC}{H} \in (0, 1) \quad (4.1.3)$$

第  $k$  轮的洗净效果为

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \tau(v_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.1.4)$$

由此不难得出  $n$  轮洗完后洗净效果最多可达到

$$\left[1 - Q + \frac{QC}{H}\right]^n \quad (4.1.5)$$

给定洗净效果的要求  $\varepsilon$  则应有

$$\left[1 - Q + \frac{QC}{H}\right]^n \leq \varepsilon \quad (4.1.6)$$

于是

$$n \geq \frac{\log \varepsilon}{\log \left(1 - Q + \frac{QC}{H}\right)}. \quad (4.1.7)$$

设  $N_0$  为满足 (4.1.7) 的最小整数, 则最少洗衣轮数即为  $N_0$ .

#### 4.2 算法

可采用非线性规划算法, 对  $n = N_0, N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N$  (凭常识洗衣的轮数不应太多, 比如取  $N = 10$  已足够) 进行枚举求解, 然后选出最好的结果. 其中  $N_0$  是满足 (4.1.7) 的最小整数. 不必使用求解混合整数非线性规划问题的其它复杂算法.

### 5. 注 记

1) 乘积约束可化为  $\sum_{k=0}^{n-1} \log(1 - Qv_k + \frac{Qv_k}{Av_k+B}) \leq \log \varepsilon$ , 在计算中要注意采取适当措施防止溢出, 如何用  $\log[\max(\delta, t)]$  代替  $\log(t)$ , 其中  $\delta$  是所用计算机的最小正浮点.

2) 可考虑“洗涤”和“漂洗”的不同(两者统称“洗漂”), 前者加洗涤剂. 一般仅第 0 轮是洗涤. 可用特殊的溶解特性 ( $p_k - u_k$  关系) 加以区别, 例如在洗涤剂用量一定时, 考虑到多加水会降低洗涤剂的浓度, 其溶解特性用具有最大值的单峰函数表示应当更合理.

3) 在实际中, 无论是参数  $L, H, C, Q$  以及洗净效果要求  $\varepsilon$ , 还是溶解特性, 均应在各种不同条件下(如针对衣物量的多少, 衣物的各种质地以及衣物脏污的程度) 通过实验确定.

4) 基于前述分析和初步的仿真实验结果(本文略去了仿真实验部分), 提出猜想: “若每轮洗衣的溶解特性相同, 则最优洗衣轮数等于最少洗衣轮数  $N_0$  且每轮的最优用水量相等 ( $v_k = v, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ )”. 若真如此, 则易知每轮的最优用水量  $v$  就是下列二次方程的解  $1 - Qv + \frac{Qv}{Av+B} = \varepsilon^{1/N}$  其中  $N_0$  是满足 (4.1.7) 的最小整数, 这样问题可大大简化.

5) “节水洗衣机”是一个非常实际的课题, 本文仅围绕最基本的要素展开了分析, 实际中要考虑的因素会多得多.

## 6. 若干评注

1996 年全国大学生数学建模竞赛中约有三分之一的参赛队作“节水洗衣机”问题 (B 题). 下面对学生好的方面和不足之处作简要评述, 其中也有涉及数学建模 (包括分析和求解) 的普遍问题.

好的方面:

1) 学生查阅了大量资料, 包括有关洗衣机的国家标准, 反映了他们具备情报检索的意识和能力.

2) 大部分参赛队都能抓住“污物浓度不断减少”这一点进行深入, 大方向正确, 得出了各种结果, 这对于仅仅限于三天的参赛时间来说是十分可贵的.

3) 部分学生的思路是很开阔的, 如有的学生提到水的重复使用 (实际上在家庭中利用双桶洗衣机集中处理大批衣物就符合这种道理, 对于洗衣店而言更是如此了). 还有的学生想到用实验的手段探讨污水浓度的规律等等.

4) 许多参赛队都证明了每轮用水量相等, 尽管是在理想溶解特性 (即  $p_k = x_k$ ) 的条件下证明的, 仍反映了学生观察是敏锐的.

5) 许多学生都明确了污物和洗涤剂均需去掉, 表明他们的思维是细致严谨的.

不足之处:

1) 假设过多. 有相当多的论文 (包括一些优秀论文), 列出了大量假设. 其实有的假设是不必要的. 如类似“洗衣过程不停电”, “洗衣的人懂得操作规程”等假设就是多余的. 为了有效地解决问题, 大胆假设是必要的, 但决非假设越多越好.

2) 模型多. 有的论文提出了多种而又对每种模型未作较深入的探讨. 这种情况就不宜鼓励.

3) 部分参赛队采用了过于繁复的分析和不必要的数学方法. 应当提倡抓住主要矛盾单刀直入地解决问题.

4) 几乎没有学生明确考虑到“溶解特性” (或者其它与溶解特性等效的因素), 都隐含地假定了溶解特性是理想的, 即  $p_k = x_k$ . 至少应当提到采用理想溶解特性的充分理由.