第 28 卷 第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 28 No. 1
1998 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan., 1998

零件的参数设计

孙连山 洪 献 曹奕剑

指导教师：周 钢

(上海交通大学，上海 200030)

编者按 本文的建模思路很有条理，模型简洁、正确，并对结果的敏感性作了详尽的分析，在算法上也作了探讨，有一定创造.

摘 要 模型是研究产品各零件参数对产品某一性能影响的连续模型，以减少生产产品总费用最小为最终目的．主要用非线性规划化的思想建立．因为零件参数为随机变量，所以建模时要用概率论的方法给出非线性规划化问题目标函数．模型形式简洁．因零件加工精度的限制，实际参数标定值的选取是离散的，我们可充分利用计算机的数值计算能力，用格种方法搜索最优值．其中虎克－吉福斯直接搜索法效果最好.

一、问题重述 (略)

二、合理的假设

根据零件设计工艺中的一些具体要求，并为达到简化问题的目的．除问题中已给出的假设外，我们进一步做以下假设：

1. 假设组成产品的各个零件在生产过程中互不影响，而且这些零件可以无困难的组装成一件产品．即若视各零件的参数为随机变量，则它们相互独立.

2. 假设问题中的经验公式在给定的零件参数变化范围之中是有效的.

3. 在大批量生产当中，假设整批零件都处在同一等级．本题中可视 1000 个零件都是 A 等、B 等或 C 等.

4. 设得到的产品分三个等级：正品、次品、废品．各等级产品性能参数的目标值分别为：正品：$y \in (y_0-0.1, y_0+0.1)$ 次品：$y \in [y_0-0.3, y_0-0.1] \cup [y_0+0.1, y_0+0.3]$ 废品：$y \in \{y \mid |y-y_0| \geq 0.3\}$

并设生产过程中没有工艺失误造成产品的损坏.

5. 由于制造工艺技术上的限制，标定值只能以某种确定的间隔来选取．例如本问题中，则由于精度的关系，我们可以选取的最小步长为 0.001.

三、符号约定

y：	粒子分离器某性能参数;
y_0：	y的目标值 ($y_0 = 1.50$);
y_-：	的计算值;
$X = (x_1, \cdots, x_7)^T$	其中$x_i = (i = 1, \cdots, 7)$为7个零件参数;
$x\min x_i$：	x_i的取值下限;
$x\max x_i$：	x_i的取值上限;
$F(X)$：	y关于X的经验公式;
u_i	参数x_i的标定值；$(i = 1, \cdots, 7)$
Δx_i	：参数 x_i的容差;

Δy	参数 y的变化量;
r_i :	容差关于标定值 u_i的相对系数;
	即$\Delta x_i = r_1 u_1 (i = 1, \cdots, 7)$;
σ_i :	x_i的方差$(i = 1, \cdots, 7)$;
σ :	y的方差;
$C(X)$:	产品的成本函数 (单位：元);
$N(\mu, \sigma^2)$:	表示以μ为均值,σ^2为方差的正态分布;
$f(y)$:	y的分布密度函数;
$W(X)$:	产品质量损失函数 (单位 / 元);
C :	产品的总成本 (单位 / 元);
W :	产品质量总损失 (单位 / 元);
N :	产品数量 (单位 / 个);
C_i :	零件容差等级分类标准值$j = 1, \cdots, m$

四、问题分析

本问题是一个有条件约束的非线性规划问题.

问题的约束条件由零件参数 (包括标定值和容差) 变化范围确定. 参数标定值的有效取值范围构成问题解的可行域. 我们的目标是确定零件参数的可行值，使得我们的产品总费用尽可能低.

问题的目标函数就是总费用函数. 总费用由产品参数偏离目标值引起的质量损失费用和产品的成本费用两部分组成. 由于零件参数为随机变量，具有不确定性，我们考虑采用概率论方法来生成目标函数. 对于值在可行域内的参数变量，利用它们的概率分布通过经验公式得出产品参数的概率分布，从而可以得出产品的质量损失费用函数 $W(X)$, 而对应参数向量 X 存在一个成本费用函数 $C(X)$. 于是得出我们的产品总费用函数表示 $W(X) + C(X)$. 我们的目标就是确定参数向量 X 的值以及各种零件的等级，使目标函数 $W(X) + C(X)$ 达到最小.

本问题的求解过程实际上是一种优解搜索过程，由于参数的标定值容许范围是一个连续域，穷举法显然是不可行的，而各种传统的优解搜索方法都只能得到局部最优解. 既然得到全局最优解有困难，从方法的可行性和有效性方面考虑，我们考虑采用混合搜索方法，利用计算机强大的计算能力，由点到面，从多个局部最优解中选取最优的作为近似最优解. 具体算法及其实现将在第七小解中详细讨论.

五、原理和建模

因原问题是一个非线性规划问题, 我们可设目标函数为 $g(X), X = (x_1, \cdots, x_n)^T$, 则一般模型可以写成如下形式：

$$\begin{cases} \min & g(X) \\ \text{s.t.} & x \min x_i \le x \max x_i \\ r_i = a_j & i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{1}$$

在本问题中，目标函数受 y 偏移 y_0 造成的损失 $W(X)$ 和 $C(X)$ 选取零件所需成本两发面的影响. 则有 $g(X) = W(X) + C(X)$. 下面分别求出 $W(X)$ 和 $C(X)$ 就可得到本问题的数学模型.

1. 求成本消耗函数 $C(X)$ 生产中用到的第 i 种零件成本为，则一件产品的成本为，从而批量生产总成本为：

$$C(X) = N \tag{2}$$

2. 求目标 y 值偏离 y_0 造成的损耗 $W(X)$. 因为零件参数是随机变量 u_i 是其标定值，即 $u_i = Ex_i$ 是 x_i 的数学期望. σ_i 是其均方差. 当进行大批量生产时，根据概率论中的大数定律就有服从

正态分布. 即 $\Delta x_i = -x_i - u_i$ 服从期望为 0 、方差为 σ_i^2 的正态分布. 记为 $\Delta x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. 又容差通常规定为均方差的 3 倍，则有 $3\sigma_i = u_i r_i$, 即 $\sigma_i = u_i r_i/3$. 由 $y = F(X)$ 得

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{7} \Delta x_i \cdot F_x' \tag{3}$$

其中对于一组给定的标定值 $(u_1, \cdots, u_7) F_{x_i}'$ 是确定的数值，记为 F_i. 由概率论中相关的结论就有 $\Delta y \sim N(0, \sum\limits_{i=1}^{7} \frac{F_i^2 u_i^2 r_i^2}{9})$. 从而由有服从期望为 $y = y_- + \Delta y$ 方差为 $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{7} \frac{F_i^2 u_i^2 r_i^2}{9}$ 的正态分布. 则其密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-y_-)^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

则由假设 y 为正品的概率为

$$p_1 = \int_{y_0-0.1}^{y_0+0.1} f(y) dy$$

y 为次品的概率为

$$p_2 = \int_{y_0-0.3}^{y_0-0.1} f(y) + \int_{y_0-0.1}^{y_0-0.3} f(y) dy$$

y 为废品的概率为

$$p_3 = \int_{y_0+0.3}^{+\infty} f(y) dy + \int_{+\infty}^{y_0-0.3} f(y) dy$$

则总损失为

$$W(X) = N(1000p_2 + 9000p_3) \tag{5}$$

综和上面 (1) 、 (2) 、 (5) 的结论可得到数学模型如下

$$\begin{cases} \min \quad N \sum\limits_{i=1}^{7} c_i + N(1000p_2 + 9000p_3) \\ \text{s. t.} \quad x \min x_i \le u_i \le x \max x_i \\ \qquad r_i = a_i \quad i = 1, \cdots, 7, \ j = 1 \cdots 3 \end{cases} \tag{6}$$

六、模型的计算机解法及框图

对该非线性规划问题，一般只能通过计算机编程，采用随 # 求解. 我们采用的搜索法中主要的一个单步搜索的步骤如下：

首先，对当前的 X 计算其目标函数值. 然后，对其中的当前搜索的分量加大一个步长. 如果此时新的在允许的变化范围内，同时其目标值优于前值，则沿这个方向 (即加大方向) 一直往前找，直到 x_i 越界，或者找到一个 x_i 值，使得目标值在该点不优. 此时退回一步得到 x_i^*. 如果原来的 x_i 增加步长后已经超过了允许范围，或者新的目标值并不比旧的优秀，则同样的沿减小方向搜索，类似的获得 x_i^* 这个 x_i^* 所对应的 X^x 就是在其他分量不变的情况下，目标函数沿 x_i 方向上的一个局部最优解.

这样的单步搜索步骤对每个分量都适用. 因此可以循环的对每个 x_i 依次进行搜索，直到目标值逐渐变优. 由于程序是离散的有穷取点，根据题意也应存在一个全局最优值，则程序应在有限步内结束.

给定搜索初值，对于零件等级的各种选取排列方法，依次取得在该排列下的局部最优解，经比较即得在该搜索初值下的局部最优解. 给定更多的初值，则能得到更接近全局最优解的解在程序设计中采

用了几种改进方法. 其一是采用两倍或更多倍最小步长 (即能达到精度要求的最大步长) 搜索，获得该步长下的局部最优解 X^*. 再修改程序，在 X^* 附近以最小步长或缩短的步长进行搜索，这样可能获得一个更优的解. 其二是当获得一个局部最优解时，把不可能的解域删除，如 x_4 取 A 等的情况，这样可以减少循环次数. 其三建立在对 $F(X)$ 的值的分析上. 注意到 $F(X)$ 不能与 y_0 有太大偏差. 诸如 $F(X)$ 不能大于 $y_0+0.1$, 否则至少有一半的产品是次品，单产品损失就超过 $1000\times1000\times\frac{1}{2}=500000$, 超过了某些局部最优值.

实际上考察这些局部最优值，可发现其对应 $F(X)$ 值都在 ±0.3 之间. 因此在搜索前先检验 $F(X)$ 值，对超过这个范围的初值不进行搜索，这样能减少最耗时间的搜索步骤.

该模型的计算机解法中还需要几个对 $F(X)$ 求偏导数后的函数，这个可以采用离散的方法解决. 实际中为了保证偏导函数的精度，我们使用 Mathematica 数学软件包计算出了这几个偏导函数的形式，将其换为 C++ 语言以认可的形式，直接使用 C 语函数求得精度较高的值.

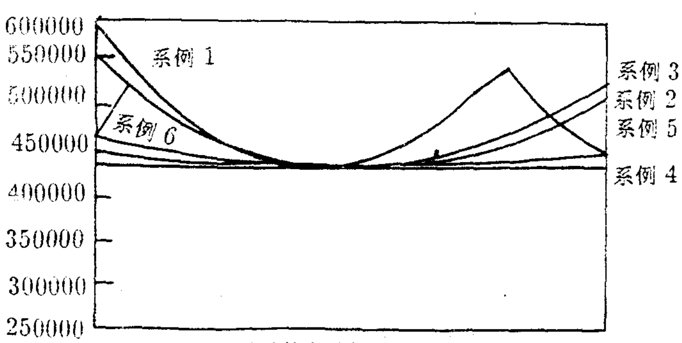
当给定等级方案及初值 X 时的搜索程序框图 (略)

七、结果分析

(一) 参数分析

求解模型所得的最优设计方案，主要显示了各参数的综合效果. 为了了解各参数对最优设计方案的影响，以便于在以后的设计中控制这些参数的调整范围. 因此有必要将各参数对优化设计方案的影响进行具体分析.

为了研究某个参数对结果的影响程度，以最优值点为基础，先暂时固定其余的参数，有规律地改变该参数变量值，观察其偏离最优值变化对目标函数的影响. 下面给出了目标函数在最优解附近对七个零件参数的敏感程度曲线图 (其中系列 i 对应零件参数 x_i) .



优解对零件参数的敏感性曲线图

根据曲线与零件参数的对应关系，从上图可以看出，参数 x_1 在最优解附近对目标函数影响最大，即目标函数最优点附近对零件参数 x_1 的敏感度大. 相比之下，对零件参数 x_4,x_6,x_7 的敏感度较小，也据是说，在最优点附近改变单个零件参数 x_4 或 x_6 或 x_7 的标定值，不会引起目标值即总费用太大变化. 而对于参数 x_5 来说，则是随标定值减少方向敏感而相反方向几乎没有引起目标值的变化. 总之目标值对各个零件参数，在最优点附近的敏感性综合如下：

x_1：敏感性高；　x_2：左侧敏感性次高，右侧敏感性低；　x_3：左侧不敏感，右侧敏感性低；　x_4：不敏感

x_5：左侧敏感性次高，右侧敏感性低；　x_6：不敏感；　x_7：不敏感

有了以上参数分析的结果，便可在设计实践中指导控制参数. 例如对敏感性高的参数，应尽量保证它在最优值附近；而对那些不敏感的参数可以放宽对他的要求，必要时可作适当调整.

(二) 误差分析

零件参数的取值误差均会引起计算结果的误差. 在以上参数分析中我们讨论了各个参数在最优点

附近对目标函数的影响，由于关系式

$$x_i = u_i + \Delta x_i, \qquad \Delta x_i = r_i u_i, \ i = 1 \cdots 7$$

即

$$x_i = u_i + r_i u_i \quad i = 1 \cdots 7$$

固定 r_i，则 x_i 与 u_i 是线性关系，于是从以上分析结果可以窥得标定值误差对计算结果的影响．结合误差理论，根据多变量误差传递公式，参数 y 的标准误差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \sigma_i^2}$$

再由 y 的计算值 y_-，可得它的百分误差为：$\frac{\sigma}{y_-} \times 100\%$

在最优点时有结果

$$\sigma = 0.071864, \qquad y_- = 1.49994 \qquad \frac{\sigma}{y_-} \times 100\% = 4.79\%$$

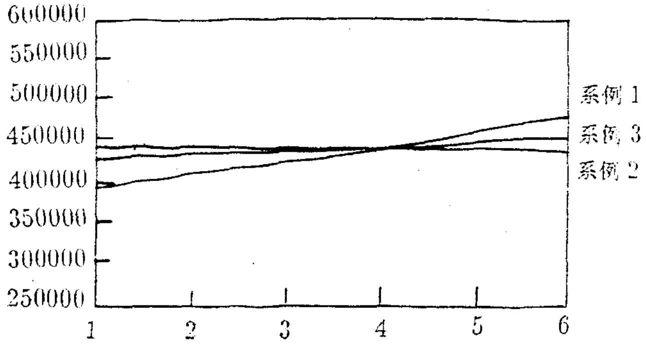
又由建模部分有如下关系式 $\sigma_i = r_i u_i$ 对于固定的一组标定值，标准误差 σ 与某个相对系数 r_i 的关系是

$$\sigma = \sqrt{D + L r_i^2}$$

其中 D, L 为某一常数值．于是

$$\frac{\partial \sqrt{D + L r_i^2}}{\partial r_i} = \frac{r_i}{\sqrt{D + L r_i^2}} \to 0, \ r_1 \to 0$$

这就说明 σ 对单个相对系数有良好的稳定性．以下给出了 A,B,C 三个等次相对偏差系数分别对最优解的影响关系曲线．



优解对相对零件系数的敏感性曲线图

注 系列 1 曲线对应 C 等，系列 2 对应 B 等，横坐标 4 处为最优值点．描点步长为各等级最大相对系数的 $\frac{1}{10}$ 即依次为 1%, 0.5%, 0.1%.

图形表明改变相对系数在最优值点对结果影响不大．例如把 B 等以 5% 为标准改为以 5.5% 或 4.5% 为标准，其它保持不变，可以看出最优目标值变化很小．同理 A 等标准从 1% 改为 0.9% 或 1.1%，目标值几乎不变． C 等标准不变引起目标值不变稍微大些，但这也在情理之中．因为相对系数处于越大值，传递的误差也越大．

八、模型的特点、改进、推广及实际工艺操作

在该模型的建立过程中，我们用了概率论和误差传递的知识，简洁地对实际问题构造了一种数学模型. 该模型可以用于一般的零件设计，其给出的目标函数也可以用于通常的产品生产中以估算成本. 在建模的过程中，我们充分发挥了计算机的功能，行之有效的获得了几组局部最优解. 我们还针对了解灵活的调整程序，从而大大加快了程序运行的效率，并获得了更优的解. 但是或许由于模型自身的问题，或许由于非线性规划的现行解法的问题，我们所得的只能是局部最优解. 并且由于过多的依赖计算机的运算能力，对该模型的数学内涵也讨论的偏少. 同时，该搜索方法随着问题所要求的精度的提高，计算时间上将成灾难性的增长.

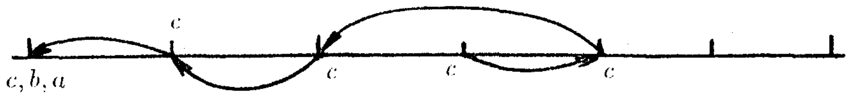
对于该模型的改进，今后可以对函数作一些性质上的分析，以减少搜索的范围. 在搜索方法上，可以采用最优速降法，以加快搜索速度，还可以采用遗传算法. 对染色体的基因组采用浮点编码，通过繁殖交叉从而在大量解空间内很快的接近全局最优解. 如果不考虑工艺加工上的限制，由于函数的连续性，这样的基因编码方式是可行的.

在实际问题中，考虑的因素将更多，模型将相当复杂. 譬如零件标定值的改变可能造成产品不能装配，这样零件间就不是独立相关的了. 还可能在实际生产中，该产品的质量要求远远大于其价格因素 (如开发新产品的过程中)，那么目标函数可变为

$$\min : g(x) = \text{weight} \times N \sum_{i=1}^{7} + N(1000p_2 + 9000p_3)$$

其中 weight 表示产品质量对产品价值影响的重要性. weight 越小产品质量越重要， weight 大产品质量不太重要. 也有可能要增加一个零件. 这样有两种调整方案，一种是对全局的零件都进行调整，另一种就针对新加零件进行调整. 如果考虑算法的效率、工艺操作的简捷性以及人事诸多方面的因素，似乎还是第二种更为合理些. 在这种方案下，如果不使用计算机，考虑到使 $F(X)$ 接近 y_0 对目标值产生的影响远大于选等级的影响，可以采用如下方法调整：

首先选用该零件的最劣等级，然后采用类似搜索的方法来试生产，步长可以适当拉大些，直到达到一个优值的生产点. 最后，调整该产品的等级，再次在这个标定值下进行试生产. 一般的，每批试生产的产品不需要太多，有 3 ～ 50 个左右，就可以使产品很好的符合正态分布，满足其内在的数学规律. 如果在标定值范围内共有 $2m+1$ 个生产点的话，至多试生产 $50(m+4)$ 个产品就可以得到一个尚可的生产点了. 对于 $m=3$ 时，可以采取如图的试生产步骤：



$m=3$ 时的操作步骤 (共 7 次)

对于需要全局调整的方案，这种操作合理但不经济. 建议采用计算机求解.

参 考 文 献

[1] 符曦著，系统最优化及控制.
[2] 詹姆斯恩 - 西多著，最优工程设计－原理及应用.
[3] 陈立周等著，工程离散变量优化设计方法－原理及应用，复旦大学出版，上海.
[4] 概率论，机械工业出版社.
[5] 魏权龄等著，数学规划与优化设计，国防工业出版社.