

*MATHEMATICAL MODELING*

数 模

S H U M O

---

SHUMO.COM 出品

2004. 1

Vol. 1 No. 1

## 声 明

本资料仅供参考，文章作者保留全部权力，任何将该资料全部或部分内容用于商业的行为，均须事先征得作者本人同意。转载或传播时，请保持该资料的完整性，并保留该声明。

《数 模》

MATHEMATICAL MODELING

---

主 办：中国数学建模网  
编 辑：《数模》杂志社  
主 页：[www.shumo.com](http://www.shumo.com)  
电子邮件：[mmjournal@yeah.net](mailto:mmjournal@yeah.net)  
通信地址：湖南长沙国防科大理学院  
邮政编码：410073

---

SPONSORED BY: SHUMO.COM  
COMPILED BY: *Mathematical Modeling* Editors Group  
HOMEPAGE: [www.shumo.com](http://www.shumo.com)  
EMAIL: [mmjournal@yeah.net](mailto:mmjournal@yeah.net)  
ADDRESS: Science College, NUDT, Changsha Hunan  
POSTALCODE: 410073

---

奥运会临时超市网点设计\*

于旭东, 詹 浩, 梁 政  
(国防科技大学, 湖南 长沙 410073)

摘 要

本文首先对三次问卷调查的结果进行统计分析, 以年龄结构、出行方式、用餐习惯以及消费水平为不同划分标准, 得出人群的分布规律以及各规律间的内在联系:

- 1. 选择不同出行方式的各类人群在消费水平方面的分布是相似的。
- 2. 选择不同用餐习惯的各类人群在消费水平方面的分布是相似的。

在对人流量分布问题的处理上, 我们根据题目给出的假设, 在保证每位观众的“最短路径”前提下, 模拟出观众的行进路线, 从而跟踪计算出各商区的人流量比例。结果见表 1。

对各商区的 MS 设置的方案设计, 是一个多目标规划问题, 目标函数为: 满足观众购物需求、分布均衡以及商业上盈利。我们首先根据基于网络的 Huff 模型, 研究了人群进入商区的购物欲望曲线, 计算出每个商区的总消费量, 从而得到每个商区需要的 MS 的大致数目。为了得到最优的设计方案, 我们定义了饱和指数指标  $\sigma^2$ , 来衡量整个商业区的 MS 分布情况, 再通过改进的模拟退火算法求出各商区间 MS 分布方差最小的设计方案, 即为所求的最优解。由于存在两种不同规模的 MS, 我们严格讨论了其性质与特征, 并根据不同情况, 在满足目标函数的前提下, 对 MS 和 LMS 在商区内的数量分布进行了设计, 结果见表 2。

最后, 我们对模型的科学性与现实性进行了阐述。根据雅典奥运体育场的构造图, 验证了各商区的 MS 个数比例是符合实际的。

表 1: 各商区的人流量分布

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
5.87%	4.05%	4.93%	5.81%	6.70%	13.8%	6.70%	5.81%	4.93%	4.05%
B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
3.71%	3.44%	5.58%	3.44%	3.71%	6.94%	0.78%	3.35%	0.78%	5.60%

表 2: 各个商区 LMS 和 MS 的设计方案

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
LMS	3	1	2	2	3	6	3	2	2	1
MS	2	2	1	1	0	0	0	1	1	2
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
LMS	2	2	4	2	2	3	1	3	1	4
MS	0	0	2	1	1	1	1	2	1	2

关键词: 人流量分布; 购物欲望曲线; 饱和指数指标; 模拟退火算法

\*2004 年全国大学生数学建模竞赛一等奖

## 1 问题重述

(略)

## 2 问题背景

2008 年北京奥运会, 将使北京走向世界, 提升北京的国际形象, 推进北京的市政建设。目前, 奥运会的建设工作已经进入全面设计和实施阶段。

题图 1 给出了奥运会比赛主场馆的规划图, 即为实际中的奥运会中心区。北京的奥运会中心区用地宽裕, 涵盖的功能较多, 除奥体中心外, 将新建国家体育场、国家体育馆、国家网球中心、国家曲棍球场、奥林匹克公园、射箭场等, 并利用展览中心的 4 个展厅作为临时比赛场地, 同时, 把原来安排在五棵松体育中心的游泳中心也挪至中心区内, 组成“三大件”, 使北京的奥运中心区拥有 14 个场馆可进行 15 个项目的比赛<sup>[1]</sup>。

在新建奥运会大型场馆的同时, 场馆周边的文化商业设施由于其对观众的服务作用以及蕴含的巨大商业利润, 也是开发和规划的重中之重。据统计, 奥运场馆周边的文化商业设施, 共占地面积 33 公顷, 规划建筑面积 137 万平方米, 如何能使如此大规模的商区在奥运会期间充分服务游客, 同时使开发商及经营商盈利, 这是一个亟待解决的现实问题。这就需要为其建立数学模型, 充分发挥数学的工具作用, 为相关部门对其规划和开发制定合理方案提供参考。

根据以往奥运会的经验, 提前对奥运场馆进行预演以及相应的大量问卷调查, 对于保证奥运会的成功举办是十分必要的。目前, 北京奥运的场馆建设及其周边的文化商业区域规划及招商正在紧张地进行, 争取完成“2006 年底建设推广完毕、2007 年进行测试性比赛”的建设任务。

## 3 问题分析

在奥运会之前, 提前进行比赛预演以及相应的大量问卷调查, 可以预测到奥运会举行期间的人流量、交通工具的需求量, 以及人们对饮食和消费的需求, 对于主办方合理建设场馆、规划商业区、调度交通工具具有重大的作用。

本题要求我们在大量的 (10600 份) 问卷调查的基础上, 归纳出观众在出行、用餐和购物等方面所反映的规律, 并基于该规律预计奥运场馆周边商业区的人流量分布, 从而给出一个关于商区 MS 网点规划的建设性方案, 具有很强的现实意义。

为使我们的方案尽可能贴近现实, 具有实用性, 我们必须首先在正确统计出观众出行、用餐和购物规律的前提下, 尽可能发现它们之间的联系; 同时, 大量合理的假设是本题的关键, 如观众上座率、MS 营业额、MS 商圈覆盖范围、大小不同规模的 MS 的具体区别等等, 对这些数据的假设, 还应注意特殊性与普遍性相结合, 保证我们建立的数学模型是现实可行的。

## 4 模型假设与约定

1. 假设 2008 年观看奥运会的观众, 在年龄结构、性别比例、交通方式、饮食习惯、消费水平的组成结构与本模型中问卷调查的人员结构近似相同。
2. 对同一个体育馆, 观众到每个看台观看比赛是等概率的。
3. 由于比赛的上座率决定了人流量的绝对值, 进而影响到商区 MS 的数量与布局。参照雅典奥运会上座率 62%, 同时考虑到中国观众对北京奥运会的大力支持, 我们合理假设北京奥运会的上座率为

75%。

4. 由于 MS 是由小型商亭构建的临时商业网点, 且其位于比赛场馆的周边区域, 所以我们认为其面积不可能太大, 相当于小型的便利店, 面积为 50—100 平方米之间, 故我们统一将 MS 的面积设为 50 平方米。另外, MS 的形状应为较规则的长方形或正方形, 这样便于其经营。不规则的面积很难合理地安排商品陈列, 会增加顾客选购商品的时间<sup>[2]</sup>。
5. 参照小型便利店的商圈范围, 我们选定 MS 的商圈范围为以 MS 为中心, 半径为 20 米的圆形区域。
6. 考虑到北京奥运会时人均消费水平和场馆的大小, 我们设定每个 MS 的最大营业额为 20 万元。
7. 每个商区里的 MS 是均匀分布的。
8. 经调查得到国家体育场(鸟巢)的占地面积为 16.5 万平方米, 国家体育馆的占地面积为 7.26 万平方米, 国家游泳中心(水立方)的占地面积为 7.17 万平方米。题目将上述场馆周围划分为若干区域, 经简单计算得到各个商区的各边长为 70 米到 110 米, 简化问题, 我们假设每个商区为 80 米×80 米的正方形区域。

## 5 符号说明及名词定义

**商圈:** 在现代市场中, 零售企业进行销售活动的空间范围, 它是由消费者的购买行为和零售企业的经营能力所决定的。

**商区:** 题中标有 A1-A10、B1-B6、C1-C4 的区域。

**商业区:** A1-A10 十个商区构成商业区 A, B1-B6 六个商区构成商业区 B, C1-C4 四个商区构成商业区 C。

**商区人流数:** 一天内通过该商区的人次。

**商区人流量:** 简称人流量, 指该商区人流数占全部商区人流数的比例。

$i$ : 年龄结构。20 岁以下  $i = 1$ ; 20—30 岁  $i = 2$ ; 30—50 岁  $i = 3$ ; 50 岁以上  $i = 4$ 。

$j$ : 性别。其中, 男性  $j = 1$ ; 女性  $j = 2$ 。

$k$ : 出行方式。其中, 公交南北、东西, 分别对应  $k = 1, k = 2$ ; 出租车,  $k = 3$ ; 私车,  $k = 4$ ; 地铁东、西, 分别对应  $k = 5, k = 6$ 。

$s$ : 用餐方式。其中, 中餐,  $s = 1$ ; 西餐,  $s = 2$ ; 商场餐饮,  $s = 3$ 。

$t$ : 消费额。其中, 0—100,  $t = 1$ ; 100—200,  $t = 2$ ; 200—300,  $t = 3$ ; 300—400,  $t = 4$ ; 400—500,  $t = 5$ ; 500 以上  $t = 6$  (单位: 元)。

$P(k, s)$ : 出行方式为  $k$ , 用餐方式为  $s$  的人群占总人数的百分比。

**LMS:** 相对 MS 更大型的迷你超市。

$N$ : 总人数, 取为三个场馆总容量 20 万。

$u_i$ : 第  $i$  个商区的人流量,  $i = 1, 2, 3, \dots, 20$ 。

$A$ : 每个 MS 能提供的最大消费额。

$B$ : 每个 MS 的成本, 包括建造费用、场地费用、维护费用、销售成本等。

$\omega_i$ : 人群在各个商区的消费权重。

$\alpha$ : 观众的上座率。

## 6 模型建立与求解

### 6.1 问题一

经过对三次问卷调查, 共 10600 份问卷结果的统计分析, 我们得出以下规律:

- 1. 年龄结构: 年龄在 20—30 岁的人群占绝对多数, 为 58.02%; 20 岁以下的青少年、儿童与 50 岁以上老人的比例占相当少数, 分别为 11.08% 和 10.72%。
- 2. 性别比例: 男 (52. 17%) 女 (47. 83%) 比例基本持平。
- 3. 出行方式情况见表 3.

表 3: 出行方式统计表						
$k$	1	2	3	4	5	6
$P(k)$	17. 49%	17. 09%	19. 43%	8. 80%	18. 43%	18. 77%

公交车和地铁是大多数人群的出行首选, 分别占总人口数的 33.98% (17. 49%+17. 09%) 和 38.00% (18. 43%+18. 77%); 其次为选乘出租车的人群, 占总人口数的 19.43%; 只有很少部分 (9.4%) 人使用私家车, 而且在使用私车的人群中, 50 岁以上的老年人所占比重较大, 占 35.82% (参见附表 1)。

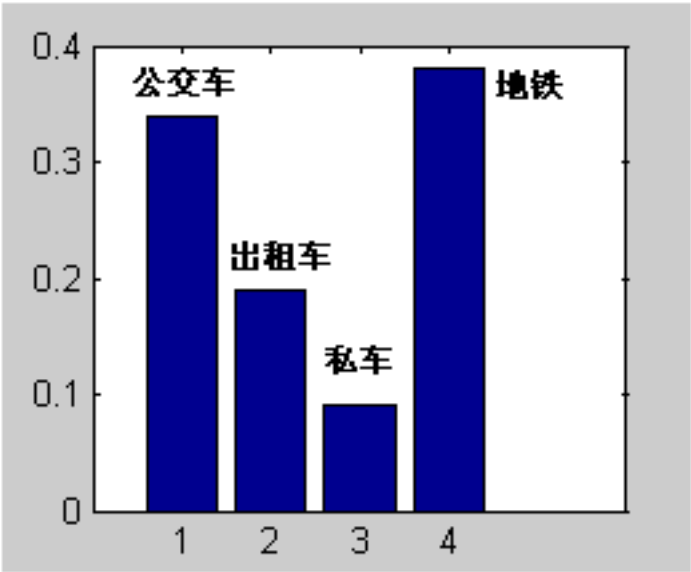


图 1: 不同交通工具的使用情况

- 4. 用餐方式情况见表 4.

表 4: 用餐方式统计表			
$s$	1	2	3
$P(s)$	22. 37%	52. 49%	25. 14%

绝大多数的人 (52.52%) 选择西餐, 选择中餐和商餐的人数大致相当; 另外, 30 岁以下的年轻人基本上都倾向于吃西餐, 或是在商场就餐, 而 30 岁以上人群对中餐、西餐或是商场餐饮的需求则比较平均 (参见附表 2)。

- 5. 消费额情况见表 5. 在对消费水平的调查中, 我们发现, 人群的消费额在 200—300 元间比较集中, 占总人数的 45.43%, 绝大部分人的消费额都在 300 元以下, 消费额超过 500 元的人仅占 0.97%。另

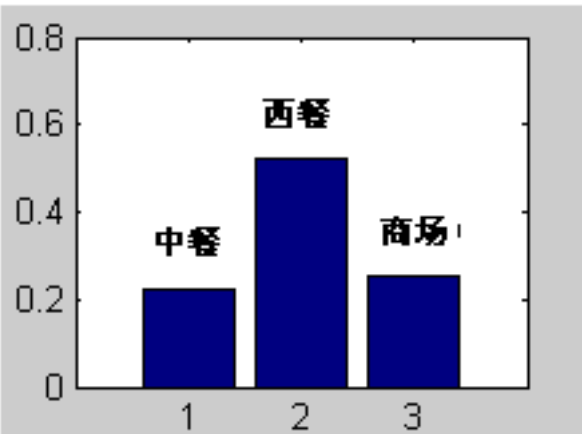


图 2: 不同用餐方式的比例

表 5: 不同消费额所占比例						
$t$	1	2	3	4	5	6
$P(t)$	19. 51%	23. 80%	45. 43%	8. 94%	3. 14%	0. 97%

外，在研究年龄结构与消费额的关系时，我们发现，50 岁以上老年人消费额普遍较低，消费额在 300—400 元之间的人群几乎都是 20—30 岁的年轻人（参见附表 3）。

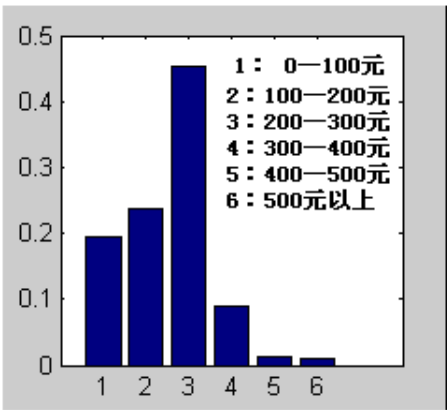


图 3: 不同消费额所占比例

6. 出行、用餐、消费额三者间的关系

- (a) 选择不同出行方式的各类人群在消费水平方面的分布是相似的。例如，选乘公交车的人群消费水平在 200-300 元间的比例与乘私家车的人群消费水平在 200-300 元间的比例是近似相等的。  
图 4 可以说明以上规律：不同出行方式的各类人群的消费水平分布是接近的。同时，我们对其进行双因素试验的方差分析，分析的结果再度说明了我们规律的正确性。（参见附表 4，5，6）
- (b) 选择不同用餐习惯的各类人群在消费水平方面的分布是相似的。例如，吃中餐的人群消费水平在 200-300 元间的比例与吃西餐的人群消费水平在 200-300 元间的比例是近似相等的。

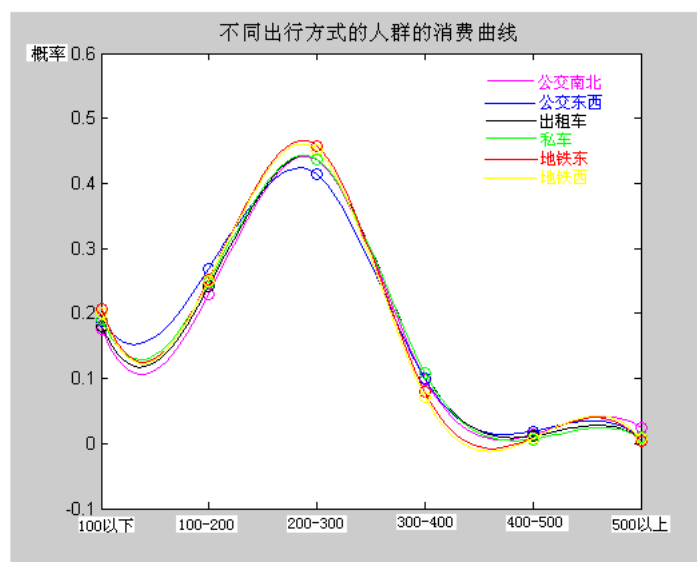


图 4: 不同出行方式人群的消费水平分布

## 6.2 问题二

### 6.2.1 最短路的确定

为保证每位观众平均出行两次，且其出行均采用最短路径，我们首先提出以下假设：

1. 公交南，公交北，为不同方向的同一公交车站，公交西、公交东也为不同方向的同一公交车站，且这两个车站是可相互通行的；地铁东、地铁西为同一条地铁线的不同两站。观众选择离自己目的地最近的车站或地铁站下车。
2. 将题图二中部分人行道进行标注，如图 5 所示。图 5 中标出距离为实际距离<sup>[4]</sup>。



图 5: 场馆示意图

3. 我们认为在公交南，北和地铁东下车的观众全部到国家体育场（鸟巢）观看比赛。

理由：若该观众的目的地为国家体育馆或国家游泳中心（水立方），乘坐公交时可在公交东，西下车，乘坐地铁时可在地铁西下车。当观众到水立方去观看节目却在公交南，北下车，要步行近 2000 米，我们认为这样的情形是不合理的。



我们认为在公交东, 西, 地铁西下车的观众按比例到国家体育馆和国家游泳中心(水立方)观看比赛。

理由: 在公交东, 西下车的观众不到国家体育场看比赛的原因同上, 由于公交东, 西的观众到达国家体育场的距离要小于公交南, 北到国家体育馆的距离, 故我们认为在国家体育馆观看比赛的观众在公交东, 西下车。且到国家体育馆和水立方的观众比例按各体育场馆容纳的人数之比计算, 即 6:4。

我们认为乘出租车以及私车的观众按比例到三个场馆观看比赛。

理由: 出租车以及私家车仅有唯一的出租车停靠点以及私家车停靠点, 乘坐该部分车的人只能在停车场附近下车, 故其观看比赛的场馆不能由停靠点所在的位置决定。故我们将到三个场馆的观众按比例分配, 比例系数按各体育场馆容纳的人数计算, 即 10: 6: 4。

- 根据图 5, 又已知观众在奥运会某一天平均出行两次, 一次为进出场馆、一次为餐饮, 观众进出场馆并餐饮, 其顺序先后是随机的, 既可先看完比赛, 再餐饮, 亦可在餐饮后再观看比赛, 其中, 只要观众经过体育馆前商区, 我们便认为其存在消费的可能。观众往返经过商区, 其两次消费的概率是相同的。故认为观众在出行过程中的消费是单向的。
- 观众出行往返选择最短路径。例如: 观众在公交南下车, 其目的地为“鸟巢”, 且其饮食习惯为“中餐”, 那么其出行路线应为: 1→商区→“鸟巢”看比赛→2→7→中餐馆, 进餐完毕后, 该观众已完成出行两次的任务, 该观众应返回, 根据最短路径原则, 该观众必须原路返回, 再次经过商区, 至公交南。又如: 观众在私家车停靠点下车后, 欲前往“国家体育馆”, 且其饮食习惯为中餐, 那么, 其路线应为: 10→7→4→商区→体育馆, 待观看完比赛后, 经 4→7 至中餐馆, 用餐完毕后, 根据最短路径原则, 该观众只需沿 7→10 直接回到原停车点, 而不必再经过商区及体育馆。

### 6.2.2 计算人流量的追踪模型

以“鸟巢”中的 A8 商区为例, 图 6, 7 为经过商区 A8 的人流示意图。

图 6 是经过 A8 商区且穿过场馆 A (“鸟巢”) 的观众的流量示意图, 这些观众在看完比赛后从另一出口离开体育馆。

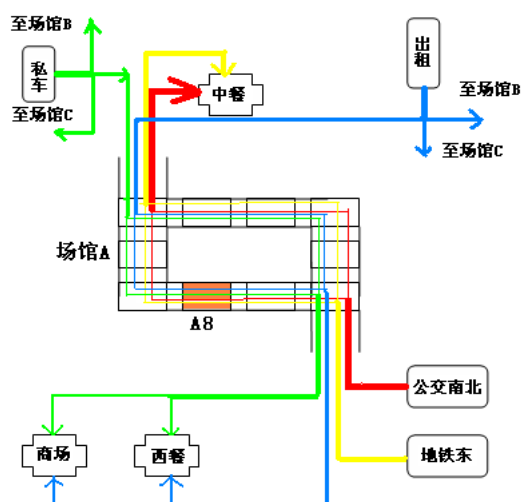


图 6: 经过 A8 商区且穿过场馆 A (“鸟巢”) 的观众的流量示意图

由图 6, 不难发现: 位于入、出口处的商区人流量为非入、出口商区人流量流量的两倍, 可得到此时 A8 商区中的人流量  $u_8^1$  为:

$$u_8^1 = P(1, 1) \times \frac{1}{2} + P(5, 1) \times \frac{1}{2} + [P(3, 2) + P(3, 3) + P(4, 2) + P(4, 3)] \times \frac{10}{10 + 6 + 4} \times \frac{1}{2}$$

图 7 为经过 A8 商区且不穿过场馆 A (“鸟巢”) 的观众的流量示意图。此时, 观众在看完比赛后将从其进入体育场的入口走出体育场。鉴于情形较复杂, 我们仅给出从地铁东下车的观众规律, 其余情形与此类似。

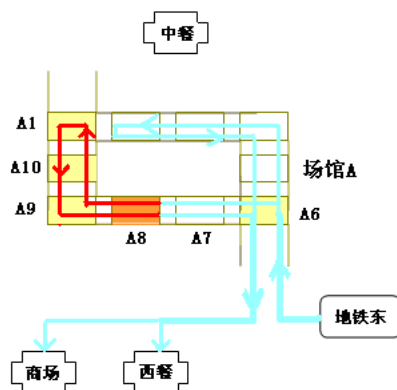


图 7: 经过 A8 商区且不穿过场馆 A (“鸟巢”) 的观众的流量示意图

此时, 若观众从 A6 进入场馆 A, 按照最短路径原则, 当且仅当该观众所在看台入口为 A1、A10、A9、A8 时, 该观众才有可能经过商区 A8, 此时的概率为  $4/10$ ; 若观众从 A1 进入场馆 A, 按照最短路径原则, 当且仅当该观众所在看台入口为 A8、A7、A6 该观众才有可能经过商区 A8, 且若该观众位于看台 A6 时, 他只有  $1/2$  的概率通过商区 A8, 此时的概率为  $2/10 + 1/10 \times 1/2 = 5/20$ 。综合可得到地铁东下车的人在 A8 商区中的人流量  $u_8^2$  为:

$$u_8^2 = [P(5, 2) + P(5, 3)] \times \frac{4}{10} + [P(3, 1) + P(4, 1)] \times \frac{5}{20}$$

按照上述方法, 计算 A8 人流量为:

$$u_8 = 5.81\%$$

类似地, 我们可以得到其余所有商区的人流量分布:

$u_1 = 5.87\%$	$u_2 = 4.05\%$	$u_3 = 4.93\%$	$u_4 = 5.81\%$	$u_5 = 6.70\%$
$u_6 = 13.8\%$	$u_7 = 6.70\%$	$u_8 = 5.81\%$	$u_9 = 4.93\%$	$u_{10} = 4.05\%$
$u_{11} = 3.71\%$	$u_{12} = 3.44\%$	$u_{13} = 5.58\%$	$u_{14} = 3.44\%$	$u_{15} = 3.71\%$
$u_{16} = 6.94\%$	$u_{17} = 0.78\%$	$u_{18} = 3.35\%$	$u_{19} = 0.78\%$	$u_{20} = 5.60\%$

各商区人流量分布如图 8 所示。

#### 结果分析:

由图 8 我们发现:

1. A1, A6, B3, B6, C2, C4 的人流量较大, 因为该区域是体育场馆的出入通道, 故人流量要大于周围的商区。

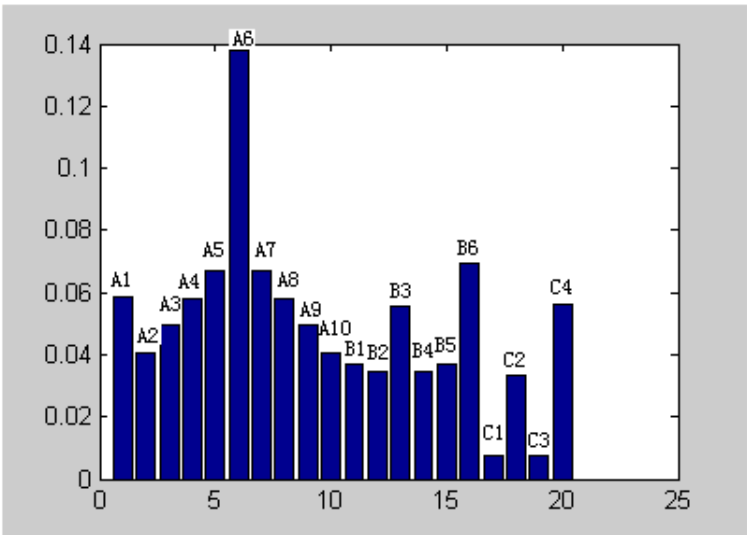


图 8: 各商区人流量分布图

- 2.  $A6 > A1$ ,  $B6 > B3$ ,  $C4 > C2$ , 这主要是受餐馆位置的影响, 西餐店和商餐店位于整个区域的下半部分, 且吃西餐的人的比率很大, 所以场馆下侧通道的人流量要大于上侧的人流量。
- 3. 受到结论 2 的影响,  $A6$  的人流量最大, 且约等于  $A5$ ,  $A7$  的 2 倍, 因为  $A6$  处于节点位置, 进入  $A6$  的人流等概率的分流到  $A5$ ,  $A7$ 。

6.3 问题三

题目要求设计 20 个商区的 MS 网点, 三个商业区 (A, B, C 区) 相互独立, 故我们只分析 A 区, 其他区域相同。

我们认为 MS 网点的设置首先取决于各个商区的总销费额, 商区的总销费额受两个方面因素的影响, 即①经过商区的总人流量②经过商区的人群的购买欲望。我们首先拟合出经过商区的人群的购买欲望曲线, 再结合人流量算出各个商区的总销费额, 利用题目中的基本要求 (各个商区的 MS 应当满足奥运会期间的购物需求) 概略的确定各个商区的 MS 个数, 得到一个可行解, 然后利用商业上盈利和饱和指数指标进行优化, 确定各个商区的 MS 个数, 最后讨论了 MS 和 LMS 在各个商区的分配情况。

6.3.1 商区消费额的确定

1. 购买欲望曲线:

人群消费的心理是指在成交过程中发生的一系列极其复杂、极其微妙的心理活动, 包括人对商品成交的数量、价格等问题的想法及对支付条件的选择等。人群在奥运会期间, 根据自己的需求, 在商区购买消费品。其中, 不同的心理态度, 会影响自己的消费的方式及数量。我们认为以下三种心理会起主要作用, 即纪念心理, 偏好心理和仿效心理。

我们利用基于网络的 Huff 模型<sup>[4]</sup>来研究人群进入商业区的购买欲望曲线。

Huff 模型是美国零售学者 Huff D 提出的, 他认为, 在数个商业集聚区 (或商店) 集中于一地时, 顾客利用哪一个商业集聚区 (或商店) 的概率, 是由商业集聚区 (或商店) 的规模和顾客到该区 (或商店) 的距离所决定的, 即一个商店对顾客的吸引力取决于两个因素: 商店的规模和距离。

Huff 模型的数学表达是:

$$P_{ij} = S_j \cdot F(d_{ij}) / \sum_{j=1}^m S_j \cdot F(d_{ij}) \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

其中  $F(d_{ij}) = d_{ij}^{-\lambda}$ ,  $P_{ij}$  为  $i$  地区消费者到  $j$  商店购物的概率;  $S_j$  为  $j$  商店的规模 (由营业面积, 商品种类多少等决定);  $d_{ij}$  为  $i$  地区消费者到  $j$  商店的距离;  $\lambda$  为距离衰减系数。

可知: 交通时间越长, 距离越远, 消费者越不愿光顾, 购买欲望越低。

下面分析人群进入奥运场馆商业区的具体情形:

- (a) 人群进入商区 (如 A6 区) 时购买消费品的概率要大于其后到达的商区 (如 A8 区) 的概率。这一点从 Huff 模型中易得。

因此我们根据 Huff 模型, 得到反映消费概率与进入商区距离关系的购买欲望曲线。如图 9 所示。

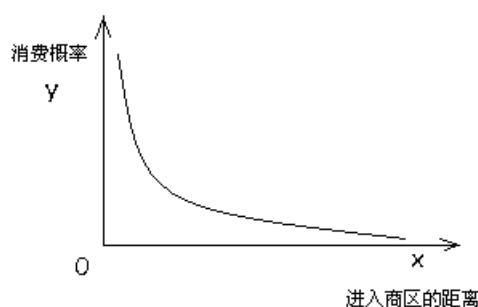


图 9: 消费概率与进入商区距离关系的购买欲望曲线

- (b) 考虑到奥运期间观看奥运比赛与购买奥运消费品的特殊关系, 特别是在入场及退场时, 观众在局部商区可能会出现消费高峰。例如某位观众在 A8 区观看比赛, 则在该商区消费的概率和数量通常要大于在其他商区消费的概率和数量。则对于该观众, 会产生图 10 所示的购买欲望曲线。

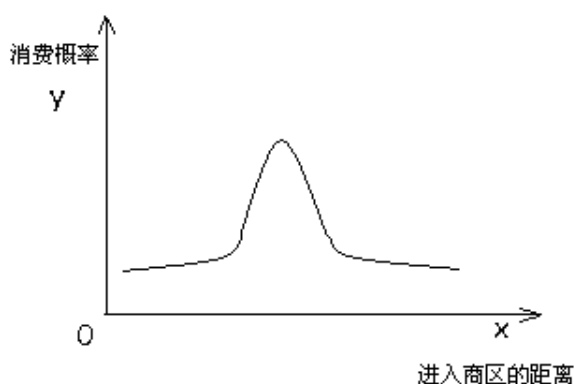


图 10: 单个观众对特定商区的购买欲望曲线

图 10 的购买欲望曲线是一个人的单次行为, 由于人群从各个商区进、出场的概率是相等的, 即人群在各个商区是均匀分布的, 当把所有观看比赛的人群作为研究对象时, 人群在各个

商区出现波峰的概率是相同的，即人群在各个商区购买欲望是相同的，则人群在各个商区的购买欲望曲线趋近于一条直线。

综合上述两种情形，我们得到人群购买欲望曲线，如图 11 所示：

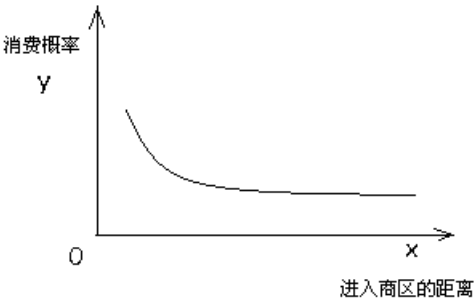


图 11: 购买欲望曲线

由图 11 通过数据拟合的方法可以得到人群在各个商区的消费权重  $\omega_i$ 。

2. 商区的消费额：

根据问题一中的规律 6：不同出行方式的人群的非餐饮消费额是近似相等的，我们可以认为每个人的非餐饮消费额是近似相同的，根据问卷调查表的数据计算，我们得到人均购买力（观众的平均消费水平）为  $C = 209.785$  元。

则各个商区的总消费额

$$q_i = \sum_i \omega_i u_i N \alpha C \tag{1}$$

式中  $\omega_i$ —人群在各个商区的消费权重， $u_i$ —人流量分布， $N$ —三个比赛场馆的总人数， $\alpha$ —上座率。

对图 11 的曲线拟合，得到各个商区的消费权重  $\omega_i$ ，如表 6 所示。

表 6: 人群在各个商区的消费权重					
i	1	2	3	4	5
$\omega_i$	0.1089	0. 099	0. 099	0. 099	0. 099
i	6	7	8	9	10
$\omega_i$	0.1089	0. 099	0. 099	0. 099	0. 099
i	11	12	13	14	15
$\omega_i$	0. 1639	0. 1639	0.1803	0. 1639	0. 1639
i	16	17	18	19	20
$\omega_i$	0.1803	0.2439	0.2683	0.2439	0.2683

利用公式 (1) 计算得到各个商区的总消费额，如图 12 所示：

6.3.2 各个商区 MS 数量的概略确定

我们认为每个 MS 能提供的最大消费额，即每个 MS 只能提供一定的消费品，但并不一定能保证满足该商区所有的购物需求。这就要求我们在各个商区设定一定个数的 MS，我们先不考虑 LMS 与 MS 的区别，而是首先确定区域中的 MS 的个数，再讨论 LMS 与 MS 共存的情形。为了满足购物总量的需求，我们选取各个商区的 MS 的个数  $n_i = \left\lceil \frac{q_i}{A} \right\rceil + 1$ ，则每个商区的 MS 的消费额为  $x_i = \frac{q_i}{n_i}$ 。

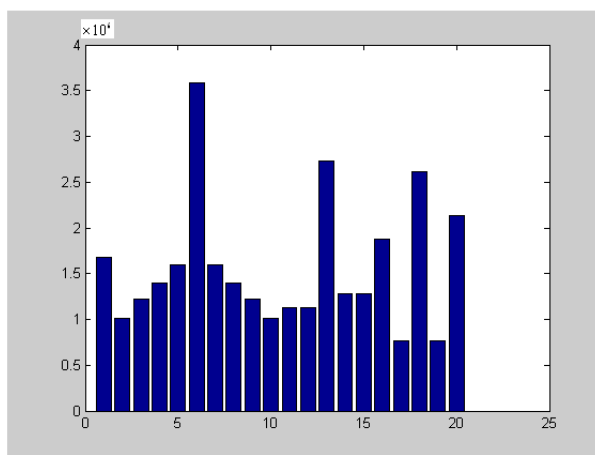


图 12: 各个商区的总消费额

各个商区 MS 数量的概略值如表 7 所示: (设计方案的一个可行解)

表 7: 各个商区MS数量的概略值

$A_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_i$	9	6	7	7	9	18	9	7	7	6

### 6.3.3 各个商区 MS 数量的精确确定

上面的方法只是概略的确定各个区域的 MS 个数, 并没有考虑商区与商区之间的内在联系, 故只能保证在局部上是可行的, 且是最优的, 而不能保证在整个商业区的最优性。

饱和指数<sup>[3]</sup>是考虑选址时的一个有用指标, 这里我们从零售商圈理论中引用一个饱和指标的概念, 用一个商区内每个 MS 的平均销售额来衡量该商区的饱和指数。饱和指数的计算公式为:

$$IRS = \frac{C \times RE}{RF}$$

式中:  $IRS$  为该商区的饱和指数,  $RE$  为商区内人均消费额,  $C$  为商区内所有顾客数目,  $RF$  为商区内的 MS 个数。

这一数字越大, 则意味着该商区内的饱和程度越低, 该数字越小, 则意味着区内的饱和程度越高。在不同的选址方案中, 应选择在饱和指数较高的地址建立 MS。

由上一节内容可知,  $IRS = x_i$ 。

我们定义饱和指数指标  $\sigma^2$ , 来衡量整个商业区的 MS 分布情况。

饱和指数指标  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \hat{x})^2$ 。

当  $\sigma^2$  较大时, 说明存在饱和指数相差较大的商区, 我们可以减少饱和程度较低的商区的 MS 的个数和增加饱和程度较高的商区的 MS 的个数, 使得整个商业区的 MS 分布达到最优。

由上分析我们得到:

**定理 9.1** 如果一个 MS 网的设计方法是所谓的最优非劣解, 则各个商区中 MS 饱和指数应基本相等, 即

$$x_i \approx x_j, \quad i, j = 1, \dots, n$$

**证明:** 假设在最优方案  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  中, 有  $x_1 < x_2$  (为简化问题, 我们只考虑  $n = 2$ , 即只有两个商区时的情况),

令  $y_1 = x_1 + \Delta x$ ,  $y_2 = x_2 - \Delta x$ , 且  $\Delta x \ll x_1, x_2$ , 即  $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 = M$  (定值), 则目标函数  $\sigma^2$  变为  $1/8(x_1 - x_2 + 2\Delta x)^2$  必小于最优解, 故有  $1/8(x_1 - x_2 + 2\Delta x)^2 \leq 1/8(x_1 - x_2)^2$ .

可得  $1/2\Delta x(x_1 - x_2 + \Delta x) \leq 0$ , 即  $1/2\Delta x(x_1 - x_2) \leq 0$ .

该方程在  $\Delta x$  取一切值均成立, 即  $\Delta x$  既可为正, 又可为负, 故只有  $x_1 - x_2 = 0$  时才满足要求, 假设非真。

同理可以证明  $x_1 > x_2$  的情形, 故有  $x_i \approx x_j$ , 将两个区域推广到  $n$  个商区, 可证得上述定理。

这样我们认为各个商区的 MS 的饱和指数指标达到最小时 (饱和指数基本相同), 网点的分布达到最均衡。

依据题目中三个基本要求:

1. 商业上赢利
2. 分布基本均衡
3. 满足奥运会期间的购物需求

我们将满足奥运会期间的购物需求作为约束条件, 得到以下多目标规划:

$$\max : \quad \sum q_i - \sum n_i B \quad (2)$$

$$\min : \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \hat{x})^2 \quad \text{其中} \quad \hat{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad n = \sum n_i \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum n_i A \geq \sum q_i$$

说明:

**2** 表示商区的盈利额, 即商区的总收入减去总支出 (MS 的总成本)。由于奥运会期间, 人群的总数是一定的, 则消费总额  $\sum q_i$  是一定的, 在满足奥运会期间的购物需求的条件下, MS 总成本越小, 则盈利越多。

**3** 式中  $\sigma^2$  是反映分布均衡的指标。

此目标规划是多目标非线性规划问题, 我们将多目标非线性规划问题转化为单目标规划问题。

定义效用函数  $U(n)$  如下:

$$U(n) = \sum \lambda_i f(n_i)$$

题目中有两个目标函数, 我们取一定的权系数, 则目标函数变为:

$$\min \quad \{U(n) = \lambda_1 (\sum n_i B - \sum q_i) + \lambda_2 \sigma^2\}$$

其中

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

当  $\lambda_1$  的值较大时, 是否盈利是主要考虑因素 (从商家的角度), 我们选址的原则是在满足奥运会购物需求的前提下, 尽量减少 MS 总数 (总支出减少), 且尽量减小方差, 使得分布均衡。

当  $\lambda_2$  的值较大时, MS 的分布是否均衡是主要考虑因素 (从消费者角度), 我们的选址原则使分布尽量均衡, 且尽量减少 MS 的个数, 以达到商业上的利益。

而实际情况是设计者要获取最大利益, 同时还要照顾消费人群, 我们选取  $\lambda_1 = 0.8$ ,  $\lambda_2 = 0.2$ , 应用改进的模拟退火算法寻求最优解。



### 改进模拟退火算法:

在 MS 的总供应量达到总需求量的条件下, 适当减少 MS 的个数, 使得成本最低。并且使得营业区各个 MS 的方差之和最小, 实质上是求各个商区中 MS 数目的最优组合, 于是我们改进经典的“模拟退火算法”来求解该最优组合。研究表明, “模拟退火算法”对大多数组合优化问题要优于局部搜索算法, 是一个效果较好的算法。“模拟退火算法”具体思想见附录。针对本题情况, 我们改进的模拟退火算法的具体步骤如下:

变量说明:

$S_0$  已经得到的可行解;

$MSNo(S)$  状态  $S$  的 MS 个数

$C(S^*)$  状态  $S$  的综合指数值

$MSNo$  某区域里 (如鸟巢 A 区) 满足总需求量需要的最少的 MS 个数

**Step 1** 对已经得到的可行解  $S_0$ , 用模拟退火算法对  $S_0$  求得  $S_0$  的最优状态  $S_0^*$ ;

**Step 2** 考虑减少  $S_0^*$  的 MS 个数所有情况  $S_i$ , 假设状态共有  $n$  个, 则  $1 \leq i \leq n$ ; 在保证满足总需求量的前提下, 即  $MSNo(S_i) \geq MSNo$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 应用模拟退火算法对  $S_i$  进行组合优化, 得到  $S_i^*$  ( $1 \leq i \leq n$ );

**Step 3** 计算  $C(S_j^*)$  ( $0 \leq j \leq n$ ), 找出  $C(S_j^*)$  最小是对应的状态  $S_k^*$ , (假设  $j = k$  时,  $C(S_j^*)$  最小); 返回  $S_k^*$  和  $C(S_k^*)$

算法得到各个商区 MS 个数的可行优化解如表 8 所示。

表 8: 各个商区 MS 个数的可行优化解

$A_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum n_i$	$\sigma^2$
$n_i$	9	6	7	7	9	18	9	7	7	6	85	$1.41593 \times 10^8$
	8	5	7	7	9	19	9	7	7	6	85	$1.09264 \times 10^8$
	8	6	7	7	9	18	9	7	7	6	84	$1.53641 \times 10^8$

算法得到各个商区 MS 个数的最优解如表 9 所示。

表 9: 各个商区 MS 个数的最优解

$A_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum n_i$	$\sigma^2$
$n_i$	8	5	7	7	9	18	9	7	7	5	82	$1.40176 \times 10^8$

### 结果分析:

1. 在满足奥运会期间的购物需求的前提下, 盈利大小的不同, MS 的设计方案会有所不同, 故存在一些可行解。
2. 表 8 中第二组数据在 MS 总数不变的条件下, 局部调整了各个商区的 MS 个数, 使得  $\sigma^2$  减小, 从而分布更加均衡。
3. 表 8 中第三组数据减少了 MS 的总数, 使得总成本降低, 但同时使得  $\sigma^2$  变大, 使得分布稍显不均。
4. 表 9 中给出了 MS 设计方案的最优解, 使得总成本降低, 且分布均衡。

#### 6.3.4 LMS 和 MS 的分配情况讨论

首先, 我们假定 LMS 与 MS 在供应量、商圈覆盖面积、成本之间存在如下比例关系:



供应量之比:  $G_{\text{LMS}} : G_{\text{MS}} = p : q$ .

商圈覆盖面积之比:  $S_{\text{LMS}} : S_{\text{MS}} = m : n$ .

成本之比:  $F_{\text{LMS}} : F_{\text{MS}} = c : d$ .

设该商区原有 MS 的个数为  $\omega$ , 现可将其替换为  $x$  个 LMS 和  $y$  个 MS, 则可得到下列目标函数:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x \cdot c + y \cdot d) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x \cdot m + y \cdot n \geq \omega \cdot n \\ x \cdot p + y \cdot q \geq \omega \cdot q \end{cases} \end{aligned}$$

在已知所有商区 MS 的最优数量的前提下讨论某一商区讨论 LMS 与 MS 的配置方案, 即是在已经满足分布基本均衡要求的条件下, 讨论满足观众购物需求与商家盈利最大化的问题:

1. 此时, 分布基本均衡的要求已得到满足, 我们只需讨论 LMS 与 MS 的数量配置问题, 故我们不再考虑商圈的影响, 即不考虑 LMS 与 MS 的商圈覆盖面积的比例, 配置方案仅与它们之间的供应量以及成本之比有关。
2. 若 LMS 与 MS 的供应量之比等于成本之比, 即  $p : q = c : d$ , 此时每个 LMS 就可以等价于  $\frac{p}{q}$  个 MS。此时 LMS 与 MS 可任意比例配置在该商区, 这对观众和商家都不会造成影响。
3. 若 LMS 与 MS 的供应量之比大于成本之比, 即  $p : q > c : d$ , 即在供应量相同的前提下, LMS 的成本低于 MS, 即此时选择在商区设置 LMS, 将为商家带来更大的盈利。故应该在商区设置尽可能多的 LMS, 具体设计按方案为:

$$y = \left\lfloor \frac{n_i}{p/q} \right\rfloor, \quad x = n_i - y$$

4. 若 LMS 与 MS 的供应量之比小于成本之比, 即  $p : q < c : d$ , 即在供应量相同的前提下, LMS 的成本反而高于 MS, 此时, 设置 LMS 反而不利于商家的盈利, 故商区的所有选择均为 MS。

我们选取供应量之比  $G_{\text{LMS}} : G_{\text{MS}} = 3 : 1$  成本之比:  $F_{\text{LMS}} : F_{\text{MS}} = 2 : 1$ , 考虑改进的模拟退火算法得到的最优解, 我们得到各个商区 LMS 和 MS 的分配方案, 如表 10 所示:

表 10: A 区各商区 LMS 和 MS 的分配方案

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
LMS	3	1	2	2	3	6	3	2	2	1
MS	2	2	1	1	0	0	0	1	1	2

同理, 我们可得到 B 区及 C 区的 LMS 和 MS 分配方案。

表 11: B、C 区各商区 LMS 和 MS 的分配方案

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
LMS	2	2	4	2	2	3	1	3	1	4
MS	0	0	2	1	1	1	1	2	1	2

#### 6.4 问题四

1. 方法的科学性:
  - (a) 对样本的分析是科学的。

我们对 10600 份调查进行统计分析, 以年龄结构、出行方式、用餐习惯以及消费水平为不同划分标准, 得出人群的分布规律, 再通过计算条件概率和双因素方差分析得到他们之间的内在规律, 故我们认为采用的方法是科学的。

(b) 计算人流量的追踪模型是科学的。

在计算各个商区的人流量时, 追踪每一条经过该商区的人流路线, 将所有可能情况全部计算在内, 真实地反映了人群在商区内的流动, 所以我们认为该模型是科学的。

(c) 对商区内 MS 网点的设计方案是科学的。

将所有指标公式化, 建立多目标规划, 利用改进的模拟退火算法寻求得到最优解, 即得出各个商区设计方案。目标明确, 涵义清晰, 充分考虑了各方面的因素, 所以我们的设计方案是科学的。

2. 结果的贴近实际性:

由概率论的知识可知, 在大样本的情况下, 样本的平均数是相应总体的无偏估计, 虽然抽样调查的运动场的分布与奥运主场馆的结构分布存在差异, 但仍然可以反映整个社会群体的行为规律, 故我们可以用在建设好的运动场的问卷调查数据来规划奥运主场馆, 是切合实际的。模型中的假设或是来自于文献资料, 或是参照了历届奥运会的信息, 或是来自于对实际情况的考虑, 故我们认为假设是真实可靠, 切合实际的。

例如: 对于问题二, 为计算奥运场馆的 20 个商区的人流量分布, 我们作了一些必要的假设, 使得人群在场馆的选择和交通工具的选择上贴近实际情况, (例如, 在公交北站下车的人都在国家体育场观看比赛), 且在人流量分布的计算过程中, 依照最小距离原则, 完全模拟真实的人流分布, 使得我们的人流方向最贴近实际情况, 从而真实的计算了 20 个商区的人流量分布, 所以我们认为人流量分布是贴近实际的。

而且在模型的设计过程中, 我们采用的算法是科学的, 因此我们得到的结果是贴切实际的。

## 7 模型的进一步讨论

● 对“人流量分布”的进一步讨论:

在问题二中, 我们根据题目对观众出行路径最短的要求, 合理地对观众的分布按照其出行方式进行了划分, 即考虑观众的出行是有目的、有计划的。在现实观看奥运会的观众和游客中, 总会存在一部分出行较盲目的人群, 他们的出行是随机的, 即到某个商区也是随机的, 此时, 观众的分布可直接近似为均匀分布, 这种情形是可能存在的。

● 对“消费权重”的进一步讨论:

在对问题三的合理假设中, 我们根据基于网络的 Huff 模型, 得到了顾客的购买欲望曲线, 提出了“消费权重”这一概念, 并发现, 顾客在位于入、出口处商区的消费权重要高于其他商区, 这一假设是合乎实际规律的。若对消费权重进一步细化, 那我们还可以按照观众的性别比例、年龄构成以及消费水平的不同而对其进行分类, 增加其约束的准确性。

但是, 对于奥运会这样的盛大而又特殊的场面, 观众在不同商区的消费权重区别不会很大, 在近似计算时, 可以看作近似相等, 此时可认为观众在各商区的消费符合均匀分布。

● 对“商圈”的进一步讨论:

“商圈”是指零售企业进行销售活动的空间范围覆盖范围。在问题三中, 由于仅需要对各商区的 MS 进行定量设计, 故我们仅在假设每个 MS 的商圈为半径 20 米的圆形区域的基础上, 将其作为一个计算商区内 MS 个数的限制条件, 而没有详细讨论 MS 的商圈之间的相互影响、相互竞争、相互制约的性质。若要对每个商区的 MS 的位置分布作出详细设计, 则必须考虑商圈的影响。同时, 在

进行 LMS 与 MS 的选择以及其对它们在商区的分布进行设计时，也要考虑商圈的影响。

8 模型检验

利用问题三中的算法，参照表 9 和表 10 结果，我们可以得到各个商区的 MS 的大致分布比例，参照雅典奥运会露天体育场的结构示意图 [5]，可以得到雅典奥运会体育场外各个商区的 MS 分布，我们发现比例大致相同，(图中红色折线为雅典奥运会露天体育场的 MS 分布比例，蓝色折线为我们的设计方案给出的分布比例，包括可行解和最优解)，故认为我们得到的设计方案是正确的。

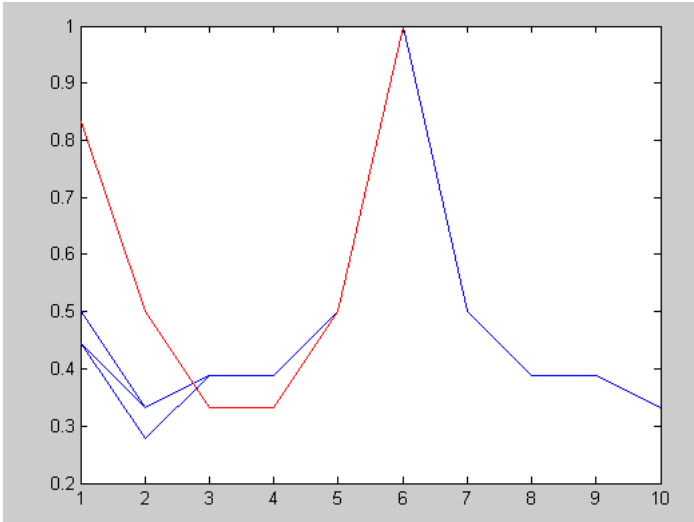


图 13: 各个商区 MS 比例分布曲线

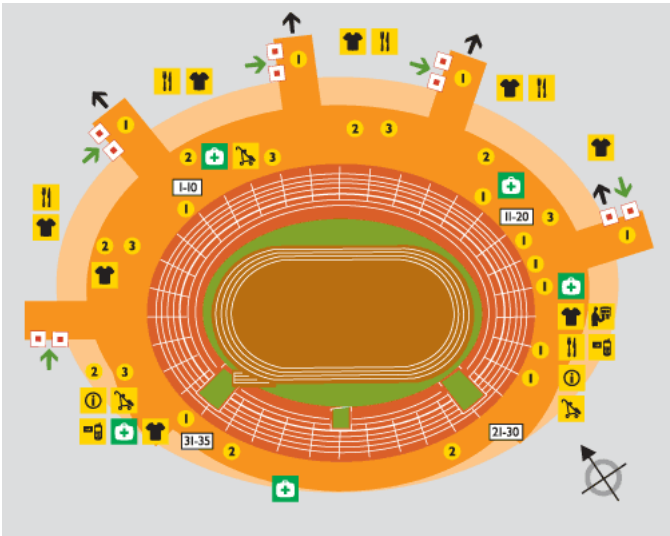


图 14: 雅典奥运会露天体育场的结构示意图

## 9 模型优缺点

- 优点:

1. 将所有数据公式化, 给出了判别设计方案好坏的指标, 从而当部分数据变动时, 便于计算, 具有一定的普适性。
2. 在计算人流量时, 完全追踪人流的实际情况, 使得人流的计算贴切实际。
3. MS 的分布结果能够较优的满足实际情况, 具有实际可行性。

- 缺点:

在考虑 LMS 和 MS 的分布时, 没有考虑商圈的制约因素。

## 10 附录

(略)

## 参考文献

- [1] 桂琳. 北京 2008 年奥运会场馆及设施总体规划[J]. 北京规划建设, 2001(2): 50~53.
- [2] 王德, 周宇. 上海市消费者对大型超市选择行为的特征分析[J]. 城市规划汇刊, 2002(4): 46~50.
- [3] 城市规划资料集[C]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002
- [4] 杨丽君, 朱华岚. 基于 GIS 的零售业商圈分析[J]. 遥感技术与应用, 2003(18): 144~148.
- [5] Olympic Stadium, [www.athens2004.com/en](http://www.athens2004.com/en), 2004.09.19.
- [6] 赫孝良等. 数学建模竞赛赛题简析与论文点评[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.6
- [7] 王沫然. Matlab与科学计算[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.9