第29卷 第1期 数学的实践与认识 Vol. 29 No. 1
1999年 1月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan., 1999

投资组合与模糊规划模型

王正方 赵文明 倪德娟
指导教师： 数学建模教练组
（杭州电子工业学院，杭州 310027）

编者按 本文能针对问题的要求通过分析，建立正确的数学模型，并用偏好系数加权法把双目标优化问题，化为单目标优化问题，计算得到正确的结果．作者还用模糊线性规划的方法来求解，进行比较．此外本文还分析讨论了头资额相对小的情形．

摘 要 本文讨论了投资的风险与收益的问题．首先我们给出了一个比较完整的模型，然后，考虑投资数额相当大时的一个近似处理模型，并分别用偏好系数加权法和模糊线性规划法进行了求解，接下来，我们又考虑了如何处理投资额相对较小的情况下的最优投资组合情况，引入了绝对收益率进行了较为有效的解决．

一、问题的提出（略）

二、基本假设（略）

三、符号说明

M：投资者拥有的全部资金； s_i：供投资者选择的资产；
r_i：资产 s_i 的平均收益率； p_i：购买资产 s_i 要付交易费费率；
q_i：购买资产 s_i 的风险损失率； r_0：同期银行利率；
w_i：投资于资金的比例．（其余符号在文中陆续引出）

四、问题的分析和模型的建立

设银行存款也是等价于市场上供投资者选择的资产之一．存银行记为 S_0，而它相应的风险损失率 q_0 和交易费 p_0 均为 0，经以上变换，存银行生息与投资市场上的资产可以统一处理．

设投资于第 i 种资产所付交易费为 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$，

$$A_i = p_i \times \max(Mw_i, u_i f(w_i)),$$

其中

$$f(w_i)=\begin{cases}0, & (w_i=0),\\ 1, & (w_i>0)\end{cases}$$

上式中，如不投资于 S_i，则 $w_i=0$，可得 $A_i=0$，如投资，则在 Mw_i 与 u_i 两者中取大的一个，然后再乘以相应的交易费率即为所付的交易费，这完全符合了实际要求．

投资总额 M 可分为两部分：一部分用来付交易费共为 $\sum_{i=0}^{n} A_i$．另一部分则可用来购买各种资产共为 $\sum_{i=0}^{n} A_i w_i$．显然有 $\sum_{i=0}^{n} A_i + \sum_{i=0}^{n} M w_i = M$．而投资 M 相应的净收益 $R=\sum_{i=0}^{n} r_i M w_i - \sum_{i=0}^{n} A_i =$

$\sum_{i=0}^{n}(r_i+1)Mw_i-M$. 总体风险大小为 $C=\max_{0\le i\le n}(q_iw_iM)$ 该式体现出了投资越分散，风险值越小，且用所投资的 s_i 中最大的一个风险来度量总体风险.

经以上分析，可建立如下双目标规划模型：

$$\max R=\sum_{i=0}^{n}(r_i+1)Mw_i-M,\qquad \min C=\max_{0\le i\le n}(q_i\times Mw_i)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}A_i+\sum_{i=0}^{n}Mw_i=M,\\ w_i\ge 0\end{cases}$$

其中 $A_i=p_i\times\max(Mw_i,u_i\times f(w_i))$, $f(w_i)=\begin{cases}0, & (w_i=0),\\ 1, & (w_i>0)\end{cases}$

五、模型的求解

由于题目给出的是一笔相当大数额的资金 M, 而在 M 相当大时，如对 S_i 有投资，可近似认为 Mw_i 均大于相应的 u_i. 于是模型的约束条件简化为：

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}w_i(1+p_i)=1,\\ w_i\ge 0,\end{cases}$$

于是原模型的求解等价为

$$\min R=M\left(\Sigma(r_i+1)w_i-1\right),\qquad \min C=M\left(\max_{0\le i\le n}q_iw_i\right),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)w_i=1,\\ w_i\ge 0,\end{cases}$$

该式中，第二个目标为非线性的，这为求解带来了很大的麻烦，我们设法把此非线性目标转化为线性，于是又得到以下模型：

$$\min R=M\left(\sum_{i=0}^{n}(r_i+1)w_i-1\right),\qquad \min C=M\times\lambda,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)w_i=1,\\ w_i\ge 0,\\ q_iw_i\le\lambda.\end{cases}$$

运用偏好系数加权法，将模型中的两个目标分别赋权重合并. 设 $1-\mu$ 和 μ 分别表示投资者赋于净收益和总体投资风险的权重数. 以上双目标规划就变为如下的单目标规划：

$$\min a=(1-\mu)\times\left(-\left(\sum(r_i+1)w_i-1\right)\right)+\mu\lambda,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)w_i=1,\\ w_i\ge 0,\\ q_iw_i\le\lambda.\end{cases}$$

其中 $\mu \in [0,1]$.

权重数 $1-\mu$ 与 μ 分别表示投资者对净收益大小和总体投资风险两者的重视程度. μ 的取值范围为 $[0,1]$. μ 数值越大, 表示投资者越重视总体风险的大小, 也即希望风险尽可能地小. 当 $\mu=1$ 时, 表示投资者极端厌恶风险, 此时如有无风险的所供资产存在, 则这种投资者会毫不犹豫地选取无风险资产进行投资, 如 μ 为 0, 则这种为无视投资风险, 一味追求期望净收益.

模型的解:

运用参数规划技术得到有效证券组合, 为投资决策提供定量的依据. 具体计算结果如下:

当 $0<\mu<0.0319$ 时有效证券组合为 $w_0=0, w_1=0.9909, w_2=0, w_3=0, w_4=0$, 净收益 $0.2673M$, 总体风险值为 2.475;

当 $0.0319<\mu<0.0411$ 时, 有效证券组合为 $w_0=0, w_1=0.369, w_2=0.615, w_3=0, w_4=0$, 净收益为 $0.2165M$, 总体风险值为 0.9225;

当 $0.0411<\mu<0.0448$ 时, 有效证券组合为 $w_0=0, w_1=0.3140, w_2=0.5233, w_3=0.1427, w_4=0$, 净收益为 $0.2106M$, 总体风险为 0.7850;

当 $0.0449<\mu<0.2036$ 时, 有效证券组合为 $w_0=0, w_1=0.2376, w_2=0.3960, w_3=0.1080, w_4=0.2284$, 净收益为 $0.2016M$, 总体风险为 0.5940;

当 $0.2036<\mu<1$ 时, 有效证券组合为 $w_0=1, w_1=w_2=w_3=w_4=0$, 净收益为 $0.05M$, 总体风险为 0;

当 $\mu=0.0319$ 时, 净收益为 $R=0.05+0.2553^*C$ 其中总体投资风险 $C\in[0,0.5940]$;

当 $\mu=0.0411$ 时, 净收益为 $R=(0.1737+0.0470^*C)M$, 其中总体风险 $C\in[0.5940,0.7850]$;

当 $\mu=0.0448$ 时, 净收益为 $R=(0.1770+0.0428^*C)M$ 其中总体风险 $C\in[0.7850,0.9225]$;

当 $\mu=0.2036$ 时, 净收益为 $R=(0.1863+0.0327^*C)M$ 其中投资风险 $C\in[0.9225,2.4753]$.

同样问题 2) 求得证券组合情况如表 1、2 所示:

表 1 偏好系数变化时相应的投资组合

u 区间	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
1、0.0429	1	0	0	0	0	0	0	0	0
—0.0395	0	0.0778	0.06048	0.05444	0.07777	0	0.08370	0.04803	0.09779
—0.0371	0	0.0845	0.06802	0.06121	0.08745	0	0.09417	0.05028	0.10997
—0.03369	0	0.1056	0.08213	0.07391	0.10559	0	0.11371	0.06522	0.13278
−0.0314	0	0	0.09205	0.08284	0.11835	0	0.12746	0.14883	0.09326
—0.0238	0	0	0.10603	0.09542	0.13632	0	0	0.08420	0.17142
—0.0130	0	0	0	0.10715	0.15306	0	0	0.09454	0.19248
−0.0063	0	0	0	0.12686	0	0	0	0.11193	0.22788
—0.0035	0	0	0	0.16581	0	0	0	0.14635	0
—0.0024	0	0	0	0.20512	0	0	0	0.18100	0
—0.00146	0	0	0	0.28286	0	0	0	0.24959	0
—0.00136	0	0	0	0.50207	0	0	0	0.143	0
—0	0	0	0	0.94340	0	0	0	0	0

w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	收益	风险值
0	0	0	0	0	0	0	$0.05M$	0
0.06128	0.08165	0.10536	0	0.071	0	0	$0.1964M$	3.26616
0.06891	0.09182	0	0	0.079845	0	0.15969	$0.21299M$	3.67287
0.08320	0.11087	0	0	0.096411	0	0	$0.24291M$	4.43491
0.09326	0.12427	0	0	0.10806	0	0	$0.26339M$	4.9708
0.10741	0.14313	0	0	0.124464	0	0	$0.2878M$	5.72536
0.12061	0.16072	0	0	0.13976	0	0	$0.30199M$	6.42878
0.14280	0.19028	0	0	0.165463	0	0	$0.320499M$	7.61129
0.18665	0.24872	0	0	0.216276	0	0	$0.33516M$	9.94872
0	.30770	0	0	0.267568	0	0	$0.343296M$	12.3081
0	0.42430	0	0	0	0	0	$0.354108M$	16.9719
0	0	0	0	0	0	0	$0.37339M$	30.124
0	0	0	0	0	0	0	$0.40943M$	56.6038

表　2　收益与风险的关系

偏好系数 (μ)	收益与风险关系	风险 (C)	M 最小应大于的值 (元)
0.0429	$R=0.05+0.04484C$	(0, 3.266)	7751
0.0395	$R=0.06373+0.04064C$	(3.266, 3.673)	6278
0.0371	$R=0.06884+0.03924C$	(3.673, 4.435)	5790
0.0337	$R=0.07334+0.03823C$	(4.435, 4.97)	5166
0.0314	$R=0.10256+0.032336C$	(4.97, 5.725)	4422
0.0238	$R=0.17234+0.02017C$	(5.725, 6.429)	3995
0.0130	$R=0.20136+0.01565C$	(6.429, 7.611)	3373
0.0063	$R=0.27276+0.00627C$	(7.611, 9.949)	2713
0.0035	$R=0.30085+0.00345C$	(9.949, 12.308)	2193
0.0024	$R=0.31476+0.002318C$	(12.308, 16.972)	811
0.0015	$R=0.32923+0.00147C$	(16.972, 30.124)	421
0.0013	$R=0.332194+0.00136C$	(30.124, 56.604)	2193

以上运用偏好系数加权法得出一系列最优投资组合，下面我们运用模糊线性规划来求解. 上述偏好系数加权法依赖于权重的建立，而模糊目标规划则应用模糊隶属函数的概念，首先引入一些符号与公式:

U_k 为第 k 理想目标达成的最高期望;　L_k 为第 k 理想目标达成的最低可接受值;

d_k 为第 k 理想目标的降低允许范围 (变动余地).

与每一个目标有关的是它的模糊隶属函数，它表示为:

$$\mu_k(x)=\begin{cases}0, & (Z_k\le L_k),\\ 0<u_k(x)<1, & (L_k<Z_k<U_k),\\ 1, & (Z_k\ge U_k),\end{cases}$$

也就是上式能反映一个现实目标的达成度 (若完全达成，取 1) 或 (完全未达成，取 0 值)，我们令模糊隶属函数:

$$\mu_k(x)=1-\left(\frac{U_k-Z_k}{d_k}\right).$$

对模糊模型的任何解来说，我们希望最大化 $\mu_k(x)$ 的最小值，也就是说希望最小化任一现实目标的最

坏未达成度，这可以用虚拟变量 η 来描述

$$\min Y = \eta, \qquad \text{s.t.} \geq \left(\frac{U_k - Z_k}{d_k}\right)$$

于是对本模型，我们可以得到如下模型：

$$\min Y = \eta, \qquad \eta \geq \frac{\max\left(\frac{r_i}{1+p_i}\right) - \sum_{i=0}^{n}(r_i w_i)}{\max\left(\frac{r_i}{1+p_i}\right) - r_0},$$

$$\eta \geq \frac{f \cdot}{\max(q_i w_i)}, \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{i=0}^{n} M w_i = M.$$

$$w_i \geq 0, \qquad f \geq q_i w_i.$$

上述分别对问题 1) 和 2) 得出的是一个有效解：

$(w_0 = 0, w_1 = 0.2778, w_2 = 0.4630, w_3 = 0.1263, w_4 = 0.1082)$ 相应的风险值为 0.7 与 $(w_0 = w_1 = w_2 = 0, w_3 = 0.2606, w_4 = w_5 = w_6 = 0, w_7 = 0.2300, w_{10} = 0.3980, w_{11} = w_{12} = 0, w_8 = w_9 = 0, w_{13} = 0.07645, w_{14} = w_{15} = 0)$ 相应的风险值为 15.6.

而对它的约束严格性进行松弛，可得到一系列的在不同的投资风险下的最优组合.

六、模型的进一步扩展 (略)

七、模型的优缺点分析 (略)

参 考 文 献

[1] J.P. 伊格尼齐奥 (美)，单目标和多目标系统线性规划，同济大学出版社，北京，1986.
[2] 李梦琳，证券市场与投资，浙江大学出版社，杭州，1993.
[3] 管梅谷，线性规划，山东科学技术出版社，济南，1990.
[4] 胡毓达，实用多目标最优化，上海科技出版社，上海，1990.