第 29 卷 第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 29 No. 1
1999 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan., 1999

灾情巡视的最佳路线

丁颂康

(上海海运学院, 上海 200135)

摘 要 今年夏季, 我国长江、松花江流域的广大地区遭受了特大水灾. 作为 1998 年全国大学生数学建模竞赛 B 题的"灾情巡视路线"问题就是在这样的背景下构思而成的. 本文中, 我们将结合答卷评阅情况, 简单介绍一些有关该题解答的要点.

一、关于问题的数学模型

本题给出了某县的道路交通网络图, 要求的是在不同条件下, 灾情巡视的最佳分组方案和路线. 这是一类图上的点的行遍性问题, 也就是要用若干条闭链复盖图上所有的顶点, 并使某些指标达到最优.

点的行遍性问题在图论和组合最优化中分别称为哈密尔顿问题和旅行商问题. 所谓哈密尔顿问题, 就是研究图中是否存在经过所有顶点恰好一次的圈或路, 这种圈或路 (如果存在) 分别称为哈密尔顿圈和哈密尔顿路, 简称为 $H-$ 圈和 $H-$ 路. 而旅行商问题通常是指在赋权图上经过所有顶点至少一次, 且使总长度 (即边权之和) 达到最小的闭链. 而本题所求的分组巡视的最佳路线, 则与多旅行商问题 (MTSP) 类似, 也就是 m 条经过同一点并复盖所有其它顶点又使边权之和达到最小的闭链.

求解非完全图的多旅行商问题, 通常所用的方法可分为两步. 首先是利用任意两点间的最短路长度作为该两点间边的权构造一个完全图. 这一点对于原图中没有边相连的点对尤为重要. 容易证明, 在如此构造出来的完全图中, 各边的权将自然满足三角不等式, 即任意三点间, 两边权之和不小于第三边的权; 并且该完全图中的最优哈密尔顿圈与原图上的最优旅行商路线等价. 第二步, 以一点 v 为起终点 (本题中的县城 O) 的多旅行商问题, 可以采用将该点视作若干点 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ (k 为旅行商人数), 并令 $w(u, v_j) = w(u, v)$ (对所有的点 $u \neq v$) 及 $w(v_i, v_j) = \infty (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, k)$ 的方法, 再将前述的完全图拓展成增广完全图. 然后, 在该增广完全图上求最优哈密尔顿圈. 通常情况下, 这个最优哈密尔顿圈将经过 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 各一次, 而这些点在圈上又不相邻. 因此, 它们将把这个圈分解成恰好 k 段. 这 k 段形成以 v 作为起终点的闭链, 分别对应 k 个旅行商的旅行路线. 并且这些旅行路线对于总长度最短的目标来说一定是最优的.

在拓展完全图上求解最优哈密尔顿圈 C^*, 可以表达成下述线性规划 (更确切地讲是 $0-1$ 规划) 的形式:

$$
\begin{aligned}
\min\ & \sum_i \sum_j w_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.}\ & \sum_j x_{ij} = 1, \qquad \forall i \\
& \sum_i x_{ij} = 1, \qquad \forall j \\
& \sum_{i \in S, j \in \overline{S}} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset V, \text{且} S \neq \emptyset \\
& x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1
\end{aligned}
\tag{*}
$$

其中 w_{ij} 就是点 i 和 j 间边的权. V 是图的点集. 而条件 $\sum_{i\in S,j\in\overline{S}} x_{ij} \geq 1$ 是为了保证取 $x_{ij}=1$ 的边不形成小的圈、这里 S 是点集 V 任意的非空真子集. $(*)$ 式的最优解中 $x_{ij}=1$ 的边 (i,j) 将构成最优哈密尔顿圈 C^*.

值得注意的是, 用 $(*)$ 式求得增广完全图上的最优解, (也就是多旅行商问题的最优解), 能使 k 条旅行路线的总路程达到最小, 但是这 k 条路线的均衡性可能相当差. 因此, 当要求均衡性较好的解还需要做大量的调整工作. 此外, 哈密尔顿问题和旅行商问题都属 $NP-$ 完全类, 也就是说, $(*)$ 式问题的求解没有多项式时间的算法. 对于本题的规模 (包括县城共有 53 个点, 再加上构造增广完全图时添加的 $k-1$ 个点), 要想求得真正的最优解是不现实的. 为此只能采用启发式算法, 求得近似最优解.

单旅行商问题的近似算法, 有如分枝定界、最小插入、最小生成树、对换调优、最近邻点, 以及神经网络、模拟退火、遗传算法等方法. 容易证明, 单旅行商的最优路线长度, 必定是多旅行商最优路线总长度的下界. 已知的一条原图的单旅行商最优路线的近似解为: $O-P-29-R-31-33-A-34-35-32-30-Q-28-27-26-N-24-23-21-K-22-17-16-I-15-I-18-J-19-L-20-25-M-6-7-E-11-G-13-14-H-12-F-10-F-9-E-8-4-D-5-2-3-C-B-1-O$. 其长度为 514 公里.

在求本题的解之前, 对原问题所给条件作一些适当的假设还是必要的. 例如, 公路不考虑等级差别, 也不受灾情或交通情况的影响, 各条公路段上汽车行驶速度可以认为是均匀的: 各巡视组巡视的乡 (镇)、村不受行政区划的影响, 即某乡 (镇) 与隶属于它的村不一定要分在同一组内; 各巡视组保持统一行动, 即不允许一个巡视组再分成若干小组等等.

二、关于问题的求解

本题的第一问, 要求设计分三组巡视时使总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线.

这里有两个目标. 若记三组的巡视路线长度从小到大分别为 C_1,C_2,C_3, 则该两目标的数学表达式为:

$$\min(C_1+C_2+C_3)$$

以及

$$\min(C_3-C_1)$$

但是这两个目标又是相互矛盾的, 也就是不可能同时达到最小. 因此具体求解时, 应两者兼顾, 用多目标的方法处理. 为简单起见, 根据实际问题灾情巡视的背景, 一种较为合理的考虑是转换成一个目标函数, 即

$$\min \quad C_3.$$

根据前面分析, 分组巡视路线的最优解, 应当采用增广完全图上的单旅行商路线分段的方法求得. 但是根据原题图的规模以及边的稀疏性, 用这种方法处理反而将使问题变得更为复杂. 而且考虑到均衡性要求需做的调整工作也将是大量的. 因此, 可以采用先适当进行点的分组, 分别求出各组的单旅行商路线, 然后在组间进行适当调整的方法求得近似解.

对于巡视组的划分, 我们可以利用原图的最小生成树 (所选择的都是权最小边). 从县城出发的最短路生成树, 或者原图的单旅行商路线等等子图作为依据, 因为它们都是在某种指标下的最优解, 而这类指标与原题的要求又相当接近. 当然, 也可以直接利用地理位置, 射线扫描, 对边界进行合理划分后向内扩展等直观方法作近似处理.

分组以后，由于规模较小，最优巡视路线的设计就变得较为简单．一般可借助现成软件求出精确解来．既便没有这类软件，采用近似算法或者直接搜索也都能较容易地找出很好的近似最优解．

这里提供两种近似最优解的参考答案．前者的总路程较短但均衡性较差．后者的均衡性相当好但总里程稍长．假如以 $\min C_3$ 的目标来衡量，后者是已知的最好答案．

第一种方案：

第一组：$O-C-B-34-35-32-30-Q-28-Q-29-R-31-33-A-1-O$. 总里程为 153.1km.

第二组：$O-P-26-27-26-N-24-23-21-K-22-17-16-I-15-I-18-J-19-L-20-25-M-O$. 总里程 210.5km.

第三组：$O-2-3-D-4-8-E-9-F-10-F-12-H-14-13-G-11-E-7-6-5-2-O$. 总里程 210.5km.

第二种方案：

第一组：$O-1-B-34-35-32-31-33-A-R-29-Q-30-Q-28-27-24-23-N-26-P-O$. 总里程 197.6km.

第二组：$O-M-25-20-21-K-22-17-16-I-13-G-11-E-8-4-D-3-C-O$. 总里程 200.4km.

第三组：$O-2-5-6-L-19-J-18-I-15-14-H-12-F-10-F-9-E-7-6-5-2-O$. 总里程 203.5km.

综观参赛队的答卷，三组巡视总路程和各组路程的极差大体有以下关系：总路程约在 540–550 公里时，极差将达到 100 公里；总路程在 570 公里左右时，极差约为 50 公里；而极差在 10 公里以内时，总路程将略超过 600 公里．

三、有时间约束的最佳路线

本题的第二问是添加了巡视组停留时间 $T=2$ 小时，$t=1$ 小时以及汽车行驶速度 V=35 公里／小时的条件后，要求在 24 小时内完成巡视的最少分组数以及相应的最佳巡视路线．第三问则是在上述时间参数条件下，尽可能在最短时间内完成巡视所需的最少组数以及相应的巡视方案．尽管两问形式雷同，但却蕴含着不同的数学内涵．

在前文中我们曾经提到，原图的单旅行商路线长度是分组巡视总路程的下界．而已知的单旅行商路线长度均在 500 公里以上．因此各组花在汽车行驶上的时间之和将超过 14 小时 $(35\times 14=490<500)$. 加上在各乡（镇）、村的停留时间 $m\cdot T+n\cdot t=17\times 2+35\times 1=69$(小时). (其中 m 为乡（镇）数，n 为村数). 各组所需时间之和将大于 83 小时．若分成三组，就不可能在 24 小时内完成巡视．于是，所求的最小分组数为 4.

若记 C_j 为第 j 组的巡视路线长度，m_j0、n_j 分别为该组停留的乡（镇）和村数 $(j=1,2,3,4)$，则各组所花费的时间 h_j 为：

$$h_j=2m_j+n_j+C_j/V,\qquad (j=1,2,3,4).$$

和第一问的情况类似，所谓最佳的要求仍然是两目标的．即要求

$$\min(h_1+h_2+h_3+h_4)$$

以及

$$\min\{\max_j h_j\}$$

假若我们仍然以后者作为主要目标来考虑，那么，乡村数的均衡性和各组路程的均衡性就依然是分组的主要依据．参照第一问解答的方法和所得的结果，并对各组的交界作适当的调整，用计算机搜索的方法容易得到较好的解．一个比较好的分组方案为：

第一组：$O-C-3-D-4-8-E-9-F-10-(F-9-E)-7-6-5-2-O.$ 总路程 $C_1=158.8$ 公里，$m_1=4, n_1=9$; 总巡视时间为 $h_1=21.54$ 小时．

第二组：$O-(2-5-6)-L-19-J-13-14-H-12-G-11-(J-19)-20-25-M-O.$ $C_2=176.3km, m_2=5, n_2=7; h_2=22.04$ 小时．

第三组：$O-(P)-28-27-24-23-22-17-16-I-15-(I)-18-K-21-(23)-N-26-(P)-O.$ $C_3=180.3km, m_3=3, n_3=11; h_3=22.15$ 小时．

第四组：$O-1-B-34-35-32-30-Q-29-R-31-33-A-(1-O)-P-O.$ $C_4=146.1$km, $m_4=5, n_4=8; h_4=22.17$ 小时．

(以上各组巡视路线中括号的点为只经过不停留的点)．各组的巡视时间均在 22 小时左右．极差仅 0.23 小时．以 $\min\{\max h_j\}$ 为标准而言，是已知的最好方案之一．一般来说，较好的参赛文章都能得到分四组，且四组巡视时间总和在 87—88 小时之间．偏差又较小的方案．

问题的第三问是在上述时间参数假设下，如果有足够多的巡视人员，要求出完成巡视的最短时间，并给出在最短时间限制下的最佳巡视路线．

事实上，完成巡视的最短时间受到单独巡视离县城最远的乡 (镇) 所需时间的制约．采用图上求最短路经的 Dijkstra 算法，可以求得从县城到各点的距离．离县城最远的乡为 H 点，距离为 77.5 公里．因此，单独巡视该乡所需时间为 $h_H=\frac{77.5\times2}{35}+2=6.43$ 小时． (离县城最远的村为 14, 若单独巡视所需时间要小得多)．即使人员足够多，分组再细，完成巡视至少需要 6.43 小时．于是，问题便成为在 6.43 小时内完成巡视所需的最少分组数和巡视方案．

容易验证，要在 6.43 小时内完成巡视，有些点 (如 I, J, H) 只能单独作为一组，时间不允许在别的乡村停留．而绝大部分乡村可以和其它乡村分在同一组内，并在限定时间内完成巡视．

我们把能够放在同一组内巡视的乡村称为一个可行集．这种可行集是原图点集 V 的一个子集．显然，原题所求的最少分组数便是点集的可行集最小复盖问题．同旅行商问题一样，子集复盖问题也属 $NP-$ 完全类．因此，求该问题的最优解也是在短时间内做不到的．采用计算机作近似搜索仍不失为较常用的办法．关于该问题的研究，本刊同期发表的华东理工大学俞文鲫教授的文章有详细讨论．他的文章还证明了本题的最小复盖数为 22.

参照点在图中从县城出发的最短路树上的位置，采用就近归组的搜索方法，容易得到最优解 22 组的分组方法及相应的巡视路线．这里不一一列举了．

在阅卷中发现，有个别的参赛队，找到了一种分成 21 个组的方案，并且指明尽管其中有两组的巡视时间超过了最短时间的要求，但因为超出时间不长 (小于 0.1 小时)，考虑到问题的实际背景，用两个小组几分钟时间的代价换取了节省一个组的人力物力的效果．我们认为，就数学建模竞赛的本意而言，这些同学的构思是可取的．

四、关于 T 、 t 、 V 的讨论

本题第四问要求在巡视组数已定的情况下尽快完成巡视，讨论参数 $T.t$ 和 V 的改变对最佳巡视路线的影响．

前面我们已经提到，要尽快完成巡视，即要求各组巡视时间的最大值也要最小．用数学式子

表示就是:

$$\min\{\max_j h_j\} = \min\left\{\max_{1\le j\le k}\left(m_j \times T + n_j \times t + \frac{C_j}{V}\right)\right\}$$

这里 k 是给定的分组数. m_j, n_j 分别是第 j 组停留的乡 (镇) 数和村数, C_j 是第 j 组巡视路线的长度. $(j = 1, 2, \cdots, k)$.

在上述 h_j 的表达式中, 由于 T 和 t 的作用完全相仿, 所以为简化讨论起见, 对于任意给定的 T 和 t, 不妨记 $p = T/t$, 即 $T = pt$. 这里 h_j 可简记为:

$$h_j = (p \cdot m_j + n_j) \cdot t + \frac{C_j}{V}.$$

它是 t 和 $\frac{1}{V}$ 的线性函数, 将随着 t 和 $\frac{1}{V}$ 的增大 (即 V 的减小) 而增大. 于是我们容易得到以下结论:

1° 若 t 增大而 V 不变. 为了使 h_j 的最大值尽可能小, 就要求 $pm_j + n_j$ 的最大值尽可能小. 但是当 T 和 t 的关系确定后, $\sum_j (pm_j + n_j)$ 是定值 $(= p \cdot m + n$, 其中 m 是全县的乡 (镇) 数 17, n 是全县的村数 35.) 上述要求就成为各组停留乡村数 (加权以后之和) 尽可能均匀. 用数学式子表示即为:

$$\left\lfloor \frac{pm + n}{k} \right\rfloor \le pm_j + n_j \le \left\lceil \frac{pm + n}{k} \right\rceil$$

这里 $\lfloor a \rfloor$ 和 $\lceil a \rceil$ 分别表示数 a 的下整数和上整数. 当然, 在调整各组停留的乡村数使之达到均衡时, 自然会给各组的路线及其长度带来影响. 这时应当考虑进行适当调整.

2° 若 t 不变而 V 增大. 这种情况下, 在 h_j 中可能导致 C_j/V 起主导作用. 那么, 和 1° 的结论类似, 我们更应使 C_j 即各组的巡视路线尽可能均衡. 诚然, 因为 $\sum C_j$ 不是常数, 而且 C_j 的均衡性会带来 $\sum C_j$ 的增大, 这对于尽快完成巡视会带来负面影响. 所以对具体情况应作具体分析, 比如可以考虑 h_j 的前半部份 $(pm_j + n_j) \cdot t$ 对均衡性的修正, 对路程较长的组尽量考虑停留较少乡村.

至于, t 和 V 的交互作用, 对于这样一个原本很难得到最优解的离散最优化问题来说, 将变得更为复杂. 这里就不再进一步讨论了.

The Optimal Routes for the Disaster Inspection

DING SONG-KANG

(*Shanghai Maritime University, Shanghai* 200135)