

# The Proofs of the Upper Bound for Optimal Knife-Replacement Period and the Lower Bound for Check Period

M N Meng-bin

(Suqian teaching training school, Suqian 223800)

**Abstract** As to the question (1) of problem A in CMC - 99, this article at first uses the objective function to obtain a sufficient condition under which the optimal solution to knife-replacement period  $T$  is less than  $\mu$  and the lower bound for optimal check period under general circumstances, and then proves that the optimal solution to the knife-replacement period in question (1) is less than 551, while the one to check period is greater than 7.

**Keywords** knife-replacement period; check period; optimal solution

## 煤矸石堆积经费问题的几点讨论

王如云, 朱永忠, 丁根宏

(河海大学数理系, 南京 210098)

**摘要:** 本文讨论了土地征用策略, 分别在不考虑银行存、贷款利率和考虑银行存、贷款利率时的分堆情况, 以及在考虑银行存、贷款利率时平均单位体积的矸石处理经费与安息角、出矸率的关系

**关键词:** 策略; 安息角; 出矸率

### 模型假设

1. 原煤年产量理解为包括矸石的产量
2. 年度征地方案理解为每年年初最多征地一次
3. 运矸车在上升过程中效率的降低是均匀的
4. 设运矸车在运行过程中所受的摩擦力和重力忽略不计, 只考虑运矸车内矸石的势能, 并且运矸车的运行是匀速的, 做的有效功全部转化为矸石的势能
5. 征地费于当时付出, 电费于当年内付出, 不可拖欠

### 1 几个基本量

在题图中  $A-SBOD$  是棱锥部分,  $A-BCD$  是圆锥部分, 由实际情况, 矸石堆要堆积稳

走, 其底面的外围应是光滑而连续的, 所以  $SD$ 、 $SB$  与园弧  $BCD$  相切, 故  $SOB$  是直角三角形 记角  $BSO$  为  $\theta$ ,  $p$  为矸石的容重(吨/米<sup>3</sup>),  $r$  为出矸率,  $e_1$  为银行存款利率,  $e_2$  为银行贷款利率,  $Q_t$  为第  $t$  年每亩土地征用费(元),  $b$  为地价每年的涨幅,  $C$  为每度电费(元/度).

$$\sin \theta = \frac{AO/\operatorname{tg} \alpha}{AO/\operatorname{tg} \beta}, AO = x \cdot \sin \beta, SO = x \cdot \cos \beta, BO = AO/\operatorname{tg} \alpha = x \cdot \sin \beta / \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2 - 1}$$

### 1. 占地面积

$$M(x) = 2S_{SOB} + 2 \cdot S_{\text{扇形} OCB} = \frac{x^2 \cdot \sin^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \left[ \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2 - 1} + \arcsin \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\pi}{2} \right] \\ \triangleq K(\alpha, \beta) \cdot x^2$$

其中

$$K(\alpha, \beta) = \frac{\sin^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \left[ \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2 - 1} + \arcsin \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\pi}{2} \right]$$

### 2. 矸石山的体积

$$V(x) = \frac{1}{3} M(x) \cdot AO = \frac{x^3}{3} \sin \beta \cdot K(\alpha, \beta)$$

### 3. 机械效率

由于坡道每延长一米, 效率与原来效率的百分比为  $\mu$ ,  $a$  为坡道每延长 10 米, 效率在原有基础上下降的百分比, 所以有

$$\mu^{10} = 1 - a, \quad \mu = (1 - a)^{1/10}$$

故坡道长为  $x$  时, 机械效率  $\eta(x) = 30\% \cdot \mu^x$

### 4. 机械能

$x$  处轨道伸长  $dx$  需要做的有效功为:

$$p \times 10^3 d(V(x)) \cdot g \cdot AO = pg \times 10^3 \cdot x^3 \cdot \sin^2 \beta \cdot K(\alpha, \beta) dx$$

所以轨道从  $S$  伸长到  $A$  时, 需要做的总功为:

$$W(x) = \int_0^x \frac{100}{30} \times 10^3 \cdot pgx^3 \sin^2 \beta \cdot \mu^{-x} \cdot K(\alpha, \beta) dx$$

### 5. 运矸车第 $t$ 年年底所需的总的轨道长度 $x(t)$

第  $t$  年年底总的出矸重量为:  $Gtr$ (吨), 则总的体积为:  $Gtr/p$ (米<sup>3</sup>)

所以有  $V(x(t)) = Gtr/p$ , 故  $x(t) = \left[ \frac{3Gtr}{p \sin \beta \cdot K(\alpha, \beta)} \right]^{1/3}$

### 6. $t$ 年所需的总电费

$$T(t) = \int_0^t \frac{C}{R_1} dW(x(t)) = \frac{C}{R_1} \cdot W(x(t)), R_1 = 3.6 \times 10^5 (\text{焦耳/度})$$

### 7. $t$ 年所需的总的征地费

$$D(t) = \int_0^t \frac{Q_{t-1}}{R_2} \cdot (1 + 10\%) \cdot dM(x(t)), R_2 = 666.67 (\text{米}^2/\text{亩})$$

### 8. 煤矿设计中 $t$ 年用于处理矸石所需的总经费

$$\Phi(t) = T(t) + D(t)$$

## 2 合理征用土地计划:

**定理** 当地价上涨幅度大于银行贷款利率时,分步购进土地不如一次全部买足,即一次应尽可能多地购买土地

当地价上涨幅度小于银行贷款利率时,当年土地应当年购买,且数量够用即可.

**证** 假设  $T$  年里共需征地  $D$  亩,分  $m$  次贷款买进,有关情况如下:

次 序	1	2	3	.....	$m$
时间间隔	$n_1$	$n_2$	$n_3$	.....	$n_m$
土地面积	$D_1$	$D_2$	$D_3$	.....	$D_m$
土地价格	$Q_0$	$Q_{n_1}$	$Q_{n_1+n_2}$	.....	$Q_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}}$

其中  $n_1$  表示第一次和第二次购买土地后时间间隔,余类推

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = T, D_1 + D_2 + \dots + D_m = D$$

则  $T$  年后共支付的购买土地款及利息为:

$$Q_0 D_1 (1 + e_2)^T + Q_{n_1} \cdot D_2 (1 + e_2)^{T - n_1} + \dots + Q_{n_1 + \dots + n_{m-1}} \cdot D_m (1 + e_2)^{T - (n_1 + \dots + n_{m-1})}$$

$$= Q_0 [D_1 (1 + e_2)^T + (1 + b)^{n_1} D_2 \cdot (1 + e_2)^{T - n_1} + \dots + (1 + b)^{n_1 + \dots + n_{m-1}} \cdot D_m (1 + e_2)^{T - (n_1 + \dots + n_{m-1})}]$$

当  $b > e_2$  时

上式  $> Q_0 [D_1 (1 + e_2)^T + D_2 \cdot (1 + e_2)^T + \dots + D_m (1 + e_2)^T] = Q_0 \cdot D \cdot (1 + e_2)^T$  此即为第一次全额贷款购足土地,  $T$  年后一次还本付息的数额,即分步买进,不如一次全部购足

在上式中,不妨设  $n_1 = 2$ , 其中第一年需购土地  $A_1$ , 第二年需购土地  $B_1$ , 即有:  $D_1 = A_1 + B_1$

$$Q_0 [A_1 \cdot (1 + e_2)^T + (1 + b) \cdot B_1 \cdot (1 + e_2)^{T-1} + (1 + b)^{n_1} \cdot D_2 (1 + e_2)^{T - n_1} + \dots]$$

$$= Q_0 \cdot [(A_1 + B_1 + A_1 e_2 + b \cdot B_1) \cdot (1 + e)^{T-1} + (1 + b)^{n_1} \cdot D_2 (1 + e_2)^{T - n_1} + \dots]$$

$$< Q_0 \cdot [(A_1 + B_1) (1 + e_2)^T + (1 + b)^{n_1} \cdot D_2 \cdot (1 + e_2)^{T - n_1} + \dots] \quad \text{因为 } (b < e_2)$$

$$= Q_0 \cdot [D_1 \cdot (1 + e_2)^T + (1 + b)^{n_1} D_2 \cdot (1 + e_2)^{T - n_1} + \dots]$$

即一次购足二年土地不如分为两年每年购足当年的土地

在本题中,  $b = 10\%$ ,  $e_2 = 5\%$ ,  $b > e_2$ , 所以应采用一次性贷款购足全部所需的土地 下面讨论问题都是针对这种策略

## 3 不考虑银行存、贷款利率

此时,  $D(t) = \frac{Q_0}{R_2} \cdot (1 + b) \cdot M(x(t))$ ,  $T(t) = \frac{C}{R_1} \cdot W(x(t))$ ,  $t$  年内用于处理矸石所需的总经费为  $\Phi(t) = T(t) + D(t)$ , 总体积为:  $V(x(t)) = Gtr/p$ , 则  $t$  年内平均单位体积矸石的处理经费为:  $Q(t) = \Phi(t)/V(x(t))$

利用题中的参数, 绘出  $Q(t)$  与  $t$  的图形如图 1.

由图可见  $Q(t)$  的变化形状为“U”形, 且当  $t = 16.0699$  年时,  $Q(t)$  取到最小值 4.46005 元/米<sup>3</sup>, 即若不考虑矿区寿命的限制, 则每隔 16.0699 年应更换一个堆

但在实际问题中, 矿区都是受寿命限制的. 针对于本题中其它参数, 若矿区寿命小于 16 年, 显然只需堆一个堆即可. 若寿命大于 16 年分不分堆则视情况而论, 因为由上图可知, 刚建堆时, 单位经费是很大的. 所以若新建的一个堆不太高, 还不如不建. 下面讨论寿命为多少时要分堆.

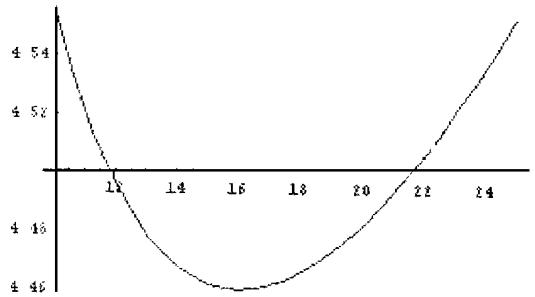


图 1  $Q(t)$  与  $t$  的关系

假设矿区寿命为  $N$  年, 在  $t$  年时另起一堆 ( $1 \leq t \leq N-1$ ). 则前  $t$  年的总经费为:

$T(t) + D(t)$ , 后  $(N-t)$  年的总经费为  $T(N-t) + D(N-t)$ , 则  $N$  年内总经费为:

$H(t) = T(t) + D(t) + T(N-t) + D(N-t)$ . 此时矸石总体积为  $V(x(N)) = GNr/p$ . 所以  $N$  年内平均单位体积矸石的处理经费为:  $E(t, N) = \frac{H(t)}{V(x(N))}$ .

给定  $N$ , 最佳分堆时间  $t$  应满足  $\min E(N, t)$ , 若  $\min E(N, t) < Q(N)$ , 则应分堆, 若  $\min E(N, t) > Q(N)$ , 则不宜分堆.

取  $N = 20, 21, 22, \dots, 26$  得计算数值如下:

$N$	20	21	22	23	24	25	26
$Q(N)$	4.482	4.49313	4.5097	4.52031	4.53599	4.55286	4.5708
$\min E$	4.55454	4.5365	4.52101	4.50779	4.49659	4.48722	4.47949
$t$	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13

所以当  $N = 22$  年时不宜分堆, 分  $N = 23$  年时, 则应分堆.

#### 4 考虑银行存、贷款利率

为了便于比较, 考虑银行存、贷款利率, 将所有电费全部折算成现值. 则:

$$x(t, r, \alpha, \beta) = \left[ \frac{3Gtr}{p \cdot \sin \beta \cdot K(\alpha, \beta)} \right]^{1/3}$$

电费为:

$$T(t, r, \alpha, \beta) = \frac{100}{30R_1} \times 10^3 \cdot p \cdot g \cdot \sin^2 \beta \cdot K(\alpha, \beta) \cdot C \int_0^{x(t, r, \alpha, \beta)} x^3 \cdot \mu^{-x} \cdot (1 + e_1)^{-t(x)} dx$$

$$\text{征地费为: } D(t, r, \alpha, \beta) = \frac{Q_0}{R_2} \cdot (1 + b) \cdot K(\alpha, \beta) \cdot x^2(t, r, \alpha, \beta)$$

$$\text{体积为: } V(t, r) = Gtr/p$$

$t$  年内用于处理矸石所需的总经费为:

$$\Phi(t, r, \alpha, \beta) = T(t, r, \alpha, \beta) + D(t, r, \alpha, \beta)$$

$t$  年内平均单位体积矸石的处理经费为:

$$Q(t, r, \alpha, \beta) = \Phi(t, r, \alpha, \beta) / V(t, r)$$

##### 1. 与 $(\alpha, r)$ 的关系

利用Math软件可得 $\Phi$ 与 $(\alpha, r)$ 的等高线图及 $\alpha=55$ 时, $\Phi$ 与 $t$ 的曲线图如图2和图3

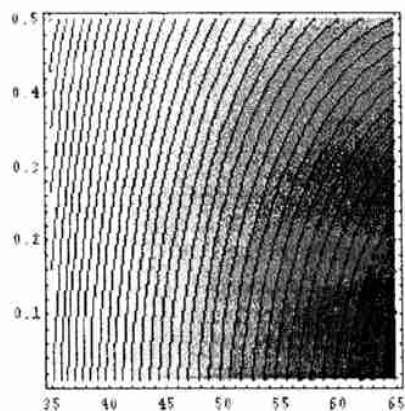


图2  $\Phi$ 与 $(\alpha, r)$ 的等高线图

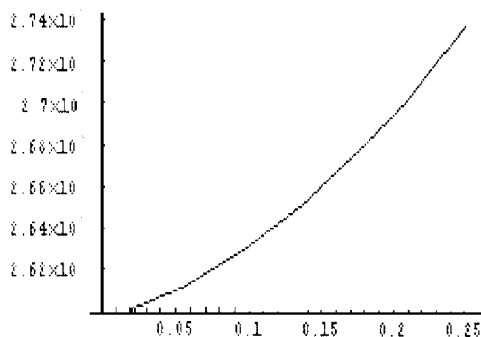


图3  $\alpha=55$ 时, $\Phi$ 与 $t$ 的关系

由图可知总费用与 $\alpha$ 呈单调减少的关系,与 $r$ 呈单调增加的关系.由此下面讨论问题时取 $\alpha=55^\circ, r=0.1$ (均为题中所给的最大值).

## 2. 堆数的讨论

由于与时间 $t$ 有关,所以针对于不同 $t$ 之间进行比较时,采用单位体积矸石的处理经费 $Q(t, r, \alpha, \beta)$ ,取 $\beta=25$ 时, $Q$ 与 $t$ 的函数关系图为图4

由图可知 $Q$ 呈单调下降趋势,即矿区若无寿命限制,应该只堆一堆.但当矿区有寿命限制时,同前讨论,设矿区寿命为 $N$ 年,在 $t$ 年时另起一堆( $1 \leq t \leq N-1$ ),则前 $t$ 年的总经费为 $T(t, r, \alpha, \beta) + D(t, r, \alpha, \beta)$ ,后 $(N-t)$ 年的总经费为 $(1+e_1)^{-t} \cdot T(N-t, r, \alpha, \beta) + D(N-t, r, \alpha, \beta)$ ,则 $N$ 年内平均单位体积矸石的处理经费为:

$$E(t, r, \alpha, \beta) = \frac{T(t, r, \alpha, \beta) + D(t, r, \alpha, \beta) + (1+e_1)^{-t} \cdot T(N-t, r, \alpha, \beta) + D(N-t, r, \alpha, \beta)}{(N+1)r/p}$$

当 $N$ 给定时, $E$ 与 $t$ 的关系为上拱形,(图5为 $N=20$ 时, $E$ 与 $t$ 的关系),可是分两堆的任何一种方案的单位矸石的处理经费都大于堆成一堆时的经费,所以此时宜堆一堆

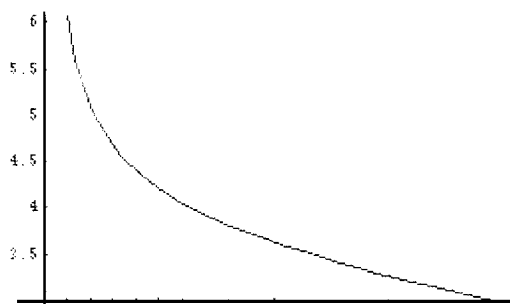


图4  $Q$ 与 $t$ 的关系

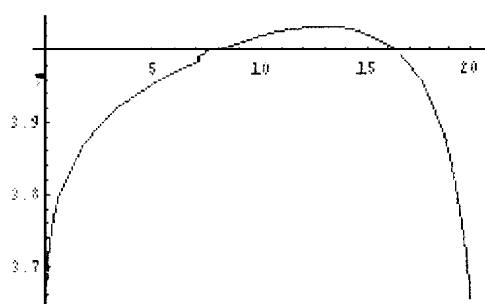


图5  $N=20$ 时分成两堆 $E$ 与分堆时间 $t$ 的关系

综上所述处理矸石经费问题是一个多因素的综合问题,在此仅讨论了其中的几个因素,还有很多其他的因素没有讨论,而且很值得讨论,比如利率问题,存款、贷款有利率差时的情况,以及改变坡道斜角 $\beta$ 等

## Some Discussion On the Expenses of Stone-Producing

WANG Ru-yun, ZHU Yong-zhong, DENG Geng-hong

(Department of Math. & Phys., Hohai University, Nanjing 210098)

**Abstract** The paper discusses the strategy on land requisition, the pile-division with and without the consideration of the interest rate of deposit and loan of the bank, and the relationship both between the expenses of stone disposal per unit volume and the angle at peace, and between the expenses of stone disposal per unit volume and the rate of stone-producing

**Keywords** strategy; angle at peace; rate of stone-producing

## 中国工业与应用数学学会第六次大会征文通知

中国工业与应用数学学会是国家一级学会, 是国际工业与应用数学学会成员。中国工业与应用数学学会第六次大会暨第三届学会理事会成立大会将于 2000 年 8 月 22 日至 26 日在浙江杭州举行, 欢迎国民经济和科学技术各领域的工作人员和数学工作者踊跃投稿。

大会内容广泛, 论文范围包括: 应用微分方程, 控制理论, 运筹优化, 数理统计及其应用, 计算方法和数值分析, 数学建模研究, 其他应用数学问题。

会议包括大会报告、分会报告和专题研讨会。现已确定的专题研讨会会有“工业数学”和“应用数学教学改革”。会议欢迎自荐和推荐大会报告, 并欢迎组织专题研讨会。专题研讨会的组织者要提交专题会议名称、内容及组织 4 篇以上的论文。

凡参加大会的论文, 都要提交至少 1000 字的摘要或论文全文(中、英文皆可), 一式二份。论文一律要求在其他杂志、期刊和会议未曾发表和宣读过的。每篇论文(包括仅提交论文摘要的)须交 50 元稿件审理费, 未交审理费的稿件恕不审理。稿件审理费的收据将随同稿件是否录用的通知书一并寄回。

本次大会将由清华大学出版社正式出版会议论文集, 入选论文要求按照科技文献出版标准自排版样, 要求采用 Microsoft Word 激光照排系统, 每页 1500 字, 版面限 5 页, 具体版样及有关事项将随录用通知寄出。征文截止日期: 2000 年 4 月 15 日(以当地邮戳为准)。

通知录用日期: 2000 年 5 月 1 日

来稿及 50 元稿件审理费请同时寄给中国工业与应用数学学会秘书处

通讯地址: 北京清华大学数学科学系郝秀荣 收

邮 编: 100084 传真: 62781785

邮汇地址: 北京清华大学应用数学系郝秀荣 收

银行汇款: 开户银行: 北京商行清华园支行 帐号: 6001201050346- 70

户 名: 中国工业与应用数学学会

中国工业与应用数学学会

1999 年 9 月