

即: 当出矸率小于 11% 时, 每年 100 万元是够用的; 当出矸率为 11% 时, 年度最低经费为 100 404 万元!

5 模型的分析与评价

此模型首先确定了总费用对出矸率和堆数的函数关系, 通过三维图形的比较确定了最优堆积煤矸石的堆数和征地方式. 此模型经过多次选择, 最优方案的准确性较高, 计算较简单, 较为完满地解决了原始问题; 缺点是实际中存贷款利率并不相等, 地价的增长率, 出矸率也并非恒定, 此模型未将这些因素考虑进去, 在实际应用中会受到一定的限制

参考文献:

- [1] 姜启源. 数学模型(第二版). 高等教育出版社, 北京, 1993
- [2] 张韵华. Mathematica 符号计算系统实用教程. 中国科学技术大学出版社, 合肥, 1998
- [3] 同济大学数学教研室. 高等数学(第四版). 高等教育出版社, 北京, 1996

Mathematical Model of heaped-up Gangue

ZHAO Yi-rong, CHEN Wei, SUN Dong-jie

(Jimei University, Xiamen 361021)

Synopsis: This paper discusses the expenditure of heaping up gangue in coalfield and analyzes different land-purchase ways and the heaping-up number, from which it comes to a conclusion as follows: The least expenditure is needed only in the case that all land are purchased once at the beginning of coal extraction, and that all the gangue metals are piled in one heap. Also, for the different gangue production rate, a mathematical way of figuring out the total expenditure mentioned above is given. Last but not least, based on the different gangue production rate, a formula of working out the lowest annual average expenditure is accordingly provided.

煤矸石堆积问题的解答及引出的思考

贾晓峰¹, 唐 云²

(1. 太原理工大学应用数学系, 太原 030024)

(2. 清华大学数学科学系, 北京 100084)

摘要: 本文首先给出煤矸石堆积问题的参考答案, 其次介绍学生答卷中由于对出矸率及征地方式的理解不同而导出的不同解答, 最后从学生答卷中发现到的缺点和错误提出一些在数学建模教学中值得思考的问题和建议

今年是第一次在全国大学生数学建模竞赛中设置专供大专院校学生做的C、D题 由贾晓峰提供的“煤矸石堆积”问题被全国组委会选为C题 这题比较切合大专院校学生的水准:所要求的基础知识和方法并不多,学生只要掌握中学的求面积和体积公式以及一些微积分的初步知识就应能做出

煤矸石堆积问题是有它的实际背景的,在平原地区一些煤矿常采用征地的方式来堆放矸石,所给出的数据也是根据实测作出的估计. 本题是问给定的年度经费是否够用,并对费用做出适当的讨论. 一个重要问题是如何建立合理的模型,有相当一部分答卷是由于对问题的理解的不同,作出的假设不同,答案也不尽一致. 下面我们先给出这个问题的参考解答,然后针对学生答案中由于对出矸率及征地方式理解不同而导出的不同解答进行分析,最后从学生答卷中的缺点及错误提出一些在数学建模教学中值得思考的问题和建议

1 模型的建立和参考解答

1.1 模型假设:

除了题中已给的数据外还作以下假设:

- (1) 原煤年产量理解为去掉矸石的净煤产量;
- (2) 年度征地方案理解为最多于每年初征地一次;
- (3) 煤矿用于处理矸石的经费 100 万元/年 理解为每年初一次拨出;
- (4) 银行利息为复利,煤矿使用银行资金存贷自由;
- (5) 征地费于当时付出,电费于当年内付出,不可拖欠;
- (6) 20 年只堆积一个矸石山(参看最后的附图).

由于本问题要求的经费包括征地费和电费两部分,因此,下面针对这两方面来建立模型并给出参考解答

1.2 矸石山的底面积和征地费

1. 矸石山的底面积、体积与高度的关系

在题图中 $A-SBOD$ 是棱锥部分, $A-BCD$ 是圆锥部分, SOB 是直角三角形. 记矸石山高 $h=A0$, $\angle OSB = \gamma$, 可得

$$\sin \gamma = \frac{h/\tan \alpha}{h/\tan \beta} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \Rightarrow \gamma = 19^\circ$$

矸石山的底面积为 SOB 、 SOD 与扇形 $OB CD$ 面积之和, 得

$$\tilde{S} = h^2 \left(\frac{\cos \gamma}{\tan \beta \tan \alpha} + \frac{\gamma + \pi/2}{\tan^2 \alpha} \right) = 2.345h^2 (\text{m}^2) \quad (1)$$

征地面积至少为

$$S(h) = 1.1\tilde{S} = 2.587h^2 (\text{m}^2) \quad (2)$$

矸石山的体积为

$$V(h) = \tilde{S}h/3 = 0.784h^3 (\text{m}^3) \quad (3)$$

2. 征地面积与采煤出矸率的关系

设出矸率为 p , 记 $q = p/(1-p)$, 则年均出矸量为 $300q (\times 10^7 \text{kg})$, 按矸石容重 $c = 2 (\times 10^3 \text{kg/m}^3)$ 换算成体积为 $1.5q (\times 10^6 \text{m}^3)$, 于是 t 年后矸石山的体积为

$$V(t) = 1.5qt (\times 10^6 \text{m}^3) \quad (4)$$

由 (3)、(4) 式可得矸石山高度与的关系

$$h(t)=124\,1(q t)^{1/3}(\mathrm{m})$$

(5)

(5) 代入 (2) 得 t 年后占地面积为

$$S(T)=59\,77(q t)^{2/3}(\text{亩})$$

(6)

这样, 可得 20 年后矸石山高度与占地面积分别为

$$h(20)=337\,1 q^{1/3}(\mathrm{m}), \quad S(20)=440\,4 q^{2/3}(\text{亩}).$$

特别, 当 $p=0.1$ 时, $h(20)=162(\mathrm{m}), \quad s(20)=102(\text{亩}).$

3. 征地计划

因为地价年涨幅 10% 高于贷款利率 5%, 所以应在开始时一次性将用地全部购入, 所缺经费向银行贷款

当 $p=0.1$ 时, 征地费为 $Q=8 \times 102=816(\text{万元}).$

1.3 堆积矸石的电费

1. 运矸车机械效率

设运矸车坡道行程为 $l, \quad l=x / \sin \beta(x$ 为高度), 则运矸车机械效率为

$$\eta(x)=0.3(1-0.02)^{1/10}=0.3 \times 0.98^{x / 10 \sin \beta}=0.3 e^{-0.00478 x}$$

(7)

2. 运矸车机械功

堆积到高度的机械功为

$$J(h)=\int_0^h \frac{c x g}{\eta(x)} d V(x)$$

(8)

以 (3)、(7) 和 $g=9.8(\mathrm{m} / \mathrm{s}^2)$ 代入, 得

$$J(h)=1.537 \int_0^h x^3 e^{0.00478 x} d x\left(\times 10^5 \text { 焦耳 }\right)$$

(9)

(9) 式右端的积分可以算出:

$$\int_0^h x^3 e^{b x} d x=\left[\left(h^3 b^3-3 h^2 b^2+6 h b-6\right) e^{b h}+b\right] / b^4$$

(10)

3 电费

按照 1 度(电)= 3.6×10^6 焦耳和 0.5 元/度, 可以由 (10)、(5) 算出从开始到 t 年的电费 当 $p=0.1$ 时, $t=1$ 到 $t=20$ 年的分年度电费 $k(t)$ 如下(万元):

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k(t)$	8.50	14.25	18.00	21.09	23.82	26.32	28.64	30.83	32.92	34.93
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$k(t)$	36.86	38.73	40.55	42.33	44.07	45.77	47.44	49.08	50.69	52.28

为了与所给经费比较, 将它们都按利率 5% 折合成现值 20 年总电费 K 和总经费投入 S 分别为

$$K=\sum_{t=1}^{20} \frac{K(t)}{1.05^{t-1}}=404(\text{万元}), \quad S=100 \sum_{t=1}^{20} \frac{1}{1.05^{t-1}}=1269(\text{万元})$$

(11)

总电费 K 与征地费 Q 之和为 1220(万元), 未超过总经费 S .

4 结论

开始时按 10% 的出矸率为 20 年堆积矸石征地 102 亩, 不足经费向银行贷款, 以后每年

用当年经费缴电费并还贷, 20 年经费刚好够用

若出矸率高于 10%, 如 11% 时, 上述结果表明, 经费已不足

需要指出的是, 上面的计算是基于 20 年只堆积一个矸石山的假设. 若堆积多个矸石山, 显然征地费将增加, 而电费将减少. 例如: 若堆积两个矸石山, 每个 10 年, 不难算出, 征地费为 $513 \times 2 = 1026$ (万元), 电费为 $185 \times 2 = 370$ (万元), 总费用 1396 (万元), 大于上面的 1220 (万元). 由此不难验证, 堆积一个矸石山是正确的

2 对题目的不同理解引出的解答

1. 对出矸率的不同理解

如果将参考答案中的模型假设(3)改为“原煤包含煤矸石”, 则对应参考答案会有 $p = q$, 以 $p = 10\%$ 算出的出矸量会比参考答案中少 10%, 这样, 征地费用和电费都将相应减少.

2. 对征地方式的不同理解

由题目条件, 容易得出应于开始时一次性征用全部堆矸用地的结论. 但部分答卷参照我国《土地法》的有关规定: 征入后闲置二年以上的土地将被收回. 如果将暂时未能堆积矸石的土地理解为“闲置”, 就会导出“每年征购当年及次年用地”的征地方式. 由于地价涨幅远高于银行利率, 这种方式会大大增加征地费用, 因而造成出矸率较高时总费用不够的结论. 我们认为, 这种不拘泥于问题本身而考虑到国情的解答是有创造性的.

3. 关于堆积多个矸石山的考虑

由参考答案最后的简单讨论, 容易理解二十年只堆积一个矸石山是正确的结论. 但值得注意的是, 有少数答卷在解决“二十年堆几个矸石山费用最小”的问题时, 颇有创造性地提出一种图论解法:

(1) 给出 v_0, v_1, \dots, v_{20} , 共 21 个顶点, 并在这些顶点间依下面的规则加边: 从下标为 i 到下标为 $j = \min\{i + k, 20\}$ ($i = 0, 1, \dots, 19; k = 1, 2, \dots, 20$) 的顶点间添加有向边 $v_i v_j$;

(2) 给上述每一条有向边赋权 W_{ij} , 令 $W_{ij} =$ 从第 i 年初开始至第 j 年末堆积一座矸石山的总费用 (应为折现值);

(3) 求出上述赋权有向图中从 v_0 至 v_{20} 的最短路, 该最短路就对应了应堆积几座矸石山及在哪些年应开始堆积新矸石山的正确结论

另外, 还有一些答卷采用线性规划方法讨论这一问题, 也可得出正确结论

4. 其他

有些答卷采用不同的计算方式, 如在求面积时将底面扇形近似地看成半圆, 或在求电费时用分段求和代替积分等, 其结果与参考答案略有差异. 但有些答卷对安息角的讨论过细, 除 550 外还讨论 540 和 530 等, 这就有些累赘了.

3 由竞赛答卷看数学建模培训中应注意的问题

数学建模竞赛是对学生数学应用能力的测试, 综合性很强, 因而要求数学建模的教学和培训也应特别注意对学生综合能力的培养. 但我们发现竞赛答卷中存在一些有一定典型性的问题, 反映出教师在数学建模教学中的一些片面性和不足. 这里将其中的一些主要问题列出如下, 供教师在有关的教学中参考改进.

1. 关于假设、公式和叙述的简明性问题

数学建模的假设是否合理是全文清晰叙述的基础, 所以一定要经过反复斟酌、挑选, 将最重要、最基本的概念, 用清晰而严格的语言给以界定或描述。但不少论文中假设太多, 如本题答卷中有的论文模型假设条目达二十余条。还有些所作假设含义或界限不清, 这就使整篇论文不可能成为层次分明、叙述清楚的好文章。

数学建模论文应规范化, 符号、公式和文字说明都要求简练而又能说明问题。有些文章使用数学记号达二十多个, 而且符号前后也不统一。还有些论文中公式推导或表述则过于繁冗, 使人难以判断其正确性。如本题中矸石堆形状可理想化为棱锥与部分圆锥的嵌合, 有的答卷在其体积公式表述中就出现这样的项:

$$c^3 \sin^2 \beta \cos \beta \operatorname{ctg} \alpha \cos [\arcsin (\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha)]$$

类似的问题并不少见。事实上, 数学建模问题中常出现一些来源于实测的、带有一定误差的量, 通过代入其量值或设出新的变量简化公式常常是必要的。这样做不但会使文章显得简洁, 而且其数学规律也会更加突出。

有些文章, 所给出的数学模型只是一些数学表达式的罗列而缺乏必要的文字说明, 基本步骤和主要的推导过程不清楚, 使人难以理解。有的答卷还将一些重要的计算结果放在附录中, 若去掉附录, 文章也就失去了完整性。特别值得注意的是, 部分答卷中对数学模型的文字描述是用程序形式表达的, 有的竟然是从计算机语言“翻译”过来的。这当然使文章表述的清晰程度大打折扣, 因为对于一个算法表述重要的是说明算法的思想, 这和罗列计算机程序是根本不同的。这些都是不规范的, 是在数学建模教学中应注意的问题。

2. 关于数学建模论文中的“形式套用”问题

本题中的“年度征地计划”问题, 本来通过很简单的推导即可得出正确结论, 但不少答卷中却引进“目标函数”、“约束条件”等概念, 套用线性规划方法进行推导, 占去文章大量篇幅。类似的从形式上套用优化方法等模式来讨论问题的情形并不少见。出现这类问题的原因可能是数学建模教学中过于强调一些常见的优化方法所致, 但这样做与提倡建模的创造性显然是背道而驰的, 因为建立一个数学模型的核心是其解决问题的思想而不是形式。

还有的文章滥用定义、定理等形式, 将一些简单易明的概念冠以“定义”名目, 或将显然的结论用“定理”形式给出。有些所谓定理还有表达含混的问题。这些都需要教师在数学建模教学中加以注意, 避免引起误导。

3. 关于摘要能力问题

摘要能力是科学研究的重要能力, 所以国家标准 GB 7713-87 中对科学论文摘要提出很高的要求, 兹摘述如下: “摘要是论文内容不加注释和评论的简短陈述。…摘要应具有独立性和自含性, 即只阅读摘要, 不阅读论文全文, 就能获得必要的信息。摘要中要有数据, 有结论, 是一篇完整的短文, 可以独立使用, 可以引用, 可以用于工艺推广。摘要的内容应包含与论文同等量的主要信息, 可供读者确定有无必要阅读全文, 也可供文摘等二次文献选用。摘要一般应说明研究工作的目的、实验方法、结果和最终结论等, 重点是结果和结论。”

对于大学生数学建模竞赛来讲, 由于是对同一个问题给出的解答, 为了使评阅人较快弄清作者的思路, 我们认为摘要还是尽可能详细一些为好。特别是应写清条件、结论、基本过程、关键步骤、要领、所采用的方法以及有些什么特色等。

但本题目答卷中几乎见不到令人满意的摘要, 表明数学建模教学中对这一能力的培养是不够的。当然, 要写好一篇论文摘要也是困难的, 因而更需要教师及早加以注意和培养。

Answers to the Question on Piling of Gangue and Introduced Reflection

JIA Xiao-feng¹, TANG Yun²

(1. Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024)

(2. Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract In this paper first a reference answer to the question on piling of gangue is provided. Then various answers derived by students from their different understanding of the ratio of gangue to the raw coal and of the way to rent the land are introduced. Finally based on the analyses of shortage and mistakes discovered from the answers of students some suggestion and problems to be considered in the education of mathematical modeling are proposed.

Keywords Piling of gangue; Mathematical modeling

简 讯

“第7届全国数学建模教学和应用会议”的预通知

经初步商定,中国工业与应用数学学会数学模型专业委员会、教育委员会和全国大学生数学建模竞赛组委会组织召开的“第7届全国数学建模教学和应用会议”将于2000年8月中旬在河南郑州和信阳鸡公山举行,由解放军信息工程大学(郑州)承办。会议的主要内容为:

- * 大学数学建模教学活动和大学数学教育改革;
- * 中学数学建模教学活动和中学数学教育改革;
- * 数学建模案例及数学实验教学的交流;
- * 近年中、美大学生数学建模竞赛题目及优秀论文介绍;
- * 历届中学生数学知识应用竞赛题和高考应用题分析;
- * 国外数学建模教学活动和数学教育改革有关信息介绍

这次会议将为2001年8月在北京举行的“第10届国际数学建模教学和应用会议”(ICTMA 10)作准备。会议将邀请有关专家作专题报告,并提供如下资料:

- * 《大学生数学建模竞赛辅导教材》(四),湖南教育出版社,2000;
- * 《中学数学建模》,湖南教育出版社,1998;
- * 数学译林, V. 19 (2000), No. 1, 有关工业数学、中学数学教育改革的文章

会议第一次正式通知将于2000年3月发出,热诚欢迎对会议提出各种建议。有关信息可上网查阅:

csiam.edu.cn

联系人: 100084 北京清华大学数学科学系郝秀荣

电话及传真: (010) 62781785