

基于遗传算法与射影几何理论的数码相机定位模型

摘要

在数码相机定位领域中,对特征点匹配和系统标定的研究存在着巨大的理论与现实意义。

针对问题一,利用空间坐标变换理论,得到含参的物平面到像平面的映射关系,提取特征点进行匹配,建立以偏差最小为目标函数的规划模型,用遗传算法进行优化搜索,确定参数得到最优映射关系,从而求解圆心对应的像坐标。

针对问题二,首先对图像进行数字化处理,提取图像轮廓的坐标矩阵,改变模型一的目标函数再次建立规划模型,用 *Matlab* 编写遗传算法进行求解,得 5 个圆心的像坐标为: $A'(324,201)$, $B'(418,203)$, $C'(632,209)$, $D'(587,498)$, $E'(290,499)$ 。对结果进行分析,得出结论圆度比越大的类椭圆对应的圆心像坐标越精确。

针对问题三,引入差异度作为检验模型的标准,给出模型检验方法,并对差异度因子的精度和稳定性进行了讨论。分析后得知该检验方法精度与数码相机分辨率成正比相关,而其稳定性在面对非对称图形时较高。

针对问题四,运用射影几何理论,在相机主光轴平行放置和非平行放置两种情况下,分别建立了以实际圆心距和理论圆心距的误差最小为目标的规划模型。在模型讨论中还进一步引入径向畸变,使模型更加贴近实际情况。

在模型推广中,重新设计了一种标靶。根据射影变换理论,引入共线性作为模型检验因子,并给出了检验原理和方法,是第三问的另一个有益的研究方向。

关键词: 空间坐标变换 遗传算法 差异度检验 射影几何理论

一、 问题重述

数码相机定位有着广泛的应用，最常用的定位方法是双目定位，即用两部相机来定位。对物体上一个特征点，用两部固定的相机拍摄可以获得该点在像平面上的坐标，只要知道两部相机精确的相对位置，就可通过几何方法确定特征点的位置，这一过程称为系统标定。标定的做法是在一块平板上画出若干个圆，同时用这两部相机照相得到像平面上的像点，利用这两个像点的几何关系就可以得到这两部相机的相对位置。然而，无论在物平面或像平面上我们都无法直接得到没有几何尺寸的“点”，所以一般可以在物平面上画若干个圆（称为靶标），它们的像一般会变形，如果把靶标上的这些圆的像中心的像精确地找到，标定就可以实现。

有人设计了一个靶标并用一位置固定的数码相机拍摄其像。试根据靶标示意图和靶标的像，回答以下问题：

1. 建立数学模型和算法以确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标，这里坐标系原点取在该相机的光学中心， $x-y$ 平面平行于像平面。
2. 对靶标及其像，计算靶标上圆的圆心在像平面上的像坐标，该相机的像距是 1577 个像素单位（1 毫米约为 3.78 个像素单位），相机分辨率 1024×768 。
3. 建立用此靶标给出两部固定相机相对位置的数学模型和方法。

二、 模型假设

基于问题实际，本文做出如下合理假设：

1. 假设数码相机获得的图像数据都是真实可靠的，没有除系统误差以外的误差。
2. 假设双目定位用的两个数码相机在同一平面内，即两个相机的光轴在同一平面上。
3. 在第一问中，假设成像过程中径向畸变较小，对于映射关系的影响不大。

三、 符号说明

本文中将经常采用以下符号，在此先行说明：

1. R 、 R' ：旋转矩阵。
2. T 、 T' ：平移矩阵。
3. M ：缩放矩阵。
4. f ：光学中心到像平面的距离。
5. r ：靶平面中圆的半径。

四、 问题一：基于遗传算法的特征点定位模型

4.1 问题分析

问题一需要确定靶标上的圆的圆心在像平面上的像坐标，通过观察靶标的像，发现靶标上原始的圆形的边缘经过投影后形成了一个类似椭圆的二次曲线。考虑到难以确定这个二次曲线究竟是否为椭圆，而在这个二次曲线不为椭圆或为变形的椭圆时其中心也难以确定，我们认为应该寻找一种靶标上各点到像平面上对应点之间的一种映射关系，而后通过该映射关系就可确定圆心映射到像平面后的像坐标。由立体几何相关知识可知，靶平面上的圆经过一次或多次的旋转、平移和变比步骤后就能得到对应的像平面上的像；通过度量圆和近似椭圆的匹配关系，可以对空间坐标变换的各个参数进行调整，进而求出最佳匹配下的参数，最终对圆心的坐标进行求解。

下面，将根据这一思路建立具体的模型并设计算法进行求解。

4.2 模型建立

在建模之前，我们先来说明一下空间中一点在进行旋转、平移和变比变化时其坐标的变化情况。需要说明的是，此处的坐标的变化均针对同一坐标系。

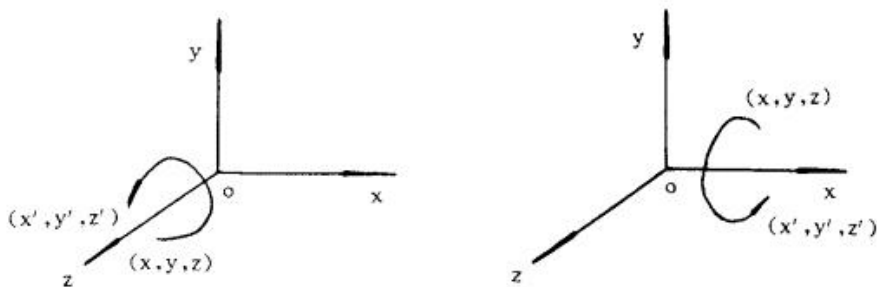
第一是平移变化。设 (T_x, T_y, T_z) 是物体在三个坐标方向上的移动量， (x, y, z) 为变化前的坐标， (x', y', z') 为变化后的坐标，则有公式：

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \\ z' = z + T_z \end{cases}$$

其矩阵运算表达为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

第二是旋转变换。具体来说，旋转分为三种基本旋转：绕 z 轴旋转，绕 x 轴旋转，绕 y 轴旋转。在下述旋转变换公式中，设旋转的参考点在所绕的轴上，绕轴转 θ 角，方向是从轴所指处往原点看的逆时针方向(如下图所示)。



1. 绕 z 轴旋转的公式为：

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$$

其矩阵运算的表达式为：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 绕 x 轴旋转的公式为：

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \theta - z \sin \theta \\ z' = y \sin \theta + z \cos \theta \end{cases}$$

其矩阵运算的表达式为：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3. 绕 y 轴旋转的公式为：

$$\begin{cases} x' = z \sin \theta + x \cos \theta \\ y' = y \\ z' = z \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$

其矩阵运算表达式为：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

第三是变比。设 (s_x, s_y, s_z) 是物体在三个方向的比例变化量，则有公式：

$$\begin{cases} x' = s_x \cdot x \\ y' = s_y \cdot y \\ z' = s_z \cdot z \end{cases}$$

其矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$$

下面，我们开始建立模型。

首先，我们给出靶标平面上一点投射到实际像纸的变换的矩阵表达式。

如下图所示，以照相机的光学中心 O 为世界坐标系 $O_w X_w Y_w Z_w$ 的原点，主光轴所在直线为 Z 轴。

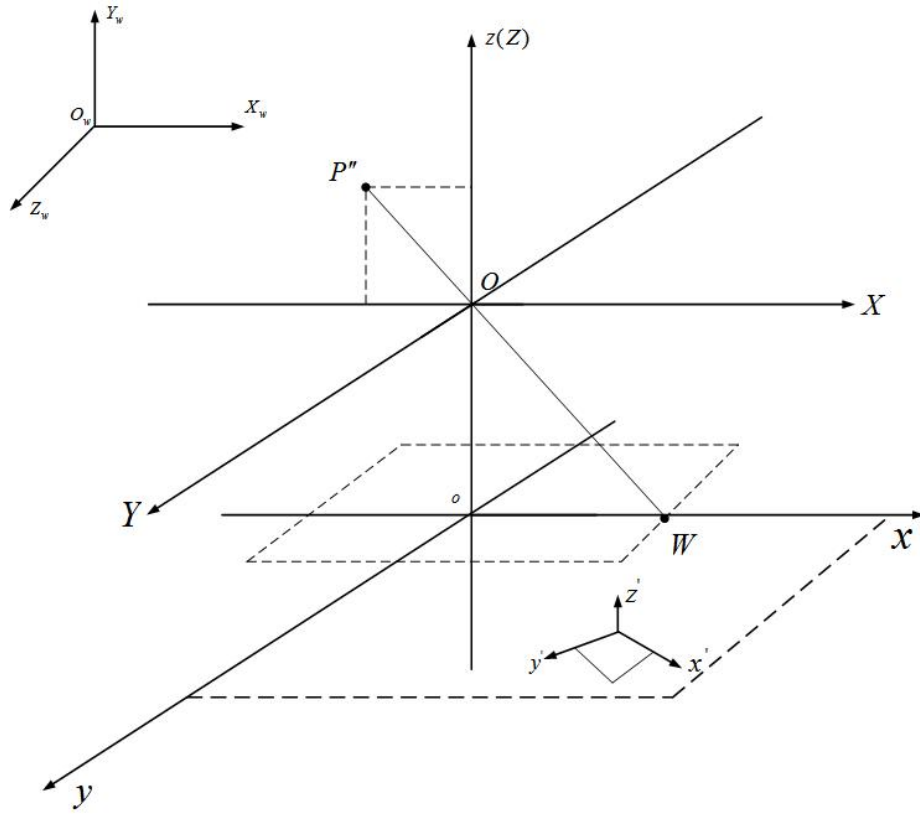


图 1

设有靶标平面上的任意一点 $P(x, y, z)$ ，其首先经过三次旋转，分别为绕 X 轴、 Y 轴、 Z 轴，夹角为 α 、 β 、 γ ，则可以得到变换后的坐标 $P'(x', y', z')$ 的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

记 R 为旋转矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么可以简记为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

然后对于 $P'(x', y', z')$ 进行平移变换，得到坐标点 $P''(x'', y'', z'')$ 。有以下公式：

$$\begin{cases} x'' = x' + T_x \\ y'' = y' + T_y \\ z'' = z' + T_z \end{cases}$$

记平移矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}'$$

则有：

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + T = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + T$$

最后对于坐标点 $P''(x'', y'', z'')$ 变比而得到其在像平面上的对应点 $W(x_u, y_u, z_u)$ 。根据图 1，由小孔成像的基本原理及相似三角形的知识可以得到如下的关系：

$$\begin{cases} x_u = \frac{f}{z} x'' \\ y_u = \frac{f}{z} y'' \\ z_u = 0 \end{cases}$$

其中 f 为光学中心到像纸的距离，上述等式可以用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{z''} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{z''} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

又记变比矩阵为：

$$M = \begin{bmatrix} \frac{f}{z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么通过变换把靶标平面上任意一点 $P(x, y, z)$ 变换到像平面上对应点 $W(x_u, y_u, z_u)$ 的总的步骤可用下式表示：

$$\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} = M \left(R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + T \right)$$

值得注意的是，此时的 $W(x_u, y_u, z_u)$ 其坐标是相对于图 1 中的 $oxyz$ 坐标系而言的，而我们实际得到的图像的坐标系可能为 $o'x'y'z'$ 。两者并不完全一致，但其 xoy 平面相同且 z 轴相互平行。因此，我们还需要对点 $W(x_u, y_u, z_u)$ 进行一次绕 z 轴的旋转和 xoy 平面上的平移。

设绕 z 轴旋转的角度为 θ ，平移矩阵 T' 为 $[T'_x \ T'_y \ 0]'$ ，则旋转与平移过程可表示为：

$$\begin{bmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T'_x \\ T'_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

又设 R' 为绕 z 轴旋转的旋转矩阵, 则整个把靶标平面上任意一点 $P(x, y, z)$ 变换到实际像纸上对应点 $W'(x'_u, y'_u, z'_u)$ 的过程可表示为:

$$\begin{bmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{bmatrix} = R' \left(M \left(R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + T \right) \right) + T'$$

找到上述转换关系以后, 我们再来考虑衡量匹配程度大小的函数。

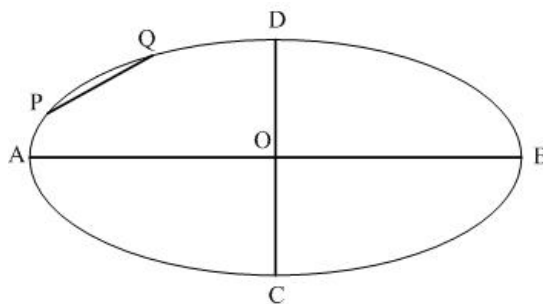


图 2

设上图中的二次曲线截自像纸之上。在大多数情况下, 这种由变形的圆得到的二次曲线类似于椭圆。而对于一个椭圆, 当其长轴与短轴确定时, 其形状也就唯一确定了。下面, 我们将尝试得到该二次曲线的长轴与短轴端点的坐标。从这个曲线上任意的截取两点, 设为 M 与 N , 则 M 与 N 之间的距离 d_{MN} 可以求出。当 d_{MN} 取得最大值时, 其即为上图中的 A 与 B , 也即为该二次曲线的长轴的两端点, 我们记 A 与 B 为 P_1 和 P_2 。然后, 我们再次在这个曲线上任意的截取两点, 依旧记为 M 与 N , 则 d_{MN} 的最小值可以求出。当 d_{MN} 取得最小时, 其即为上图中的 C 与 D , 也即为近似的该二次曲线的短轴的两端点, 我们记 C 与 D 为 P_3 和 P_4 。

但需要说明的是, 在选取短轴时, 为了防止 M 与 N 取得二次曲线上十分相近的两点 (如本图中的 P 与 Q) 导致得到“虚假”的短轴, 我们还需规定线段 MN 的中点与线段 AB 的中点的距离不超过一个常数 l 。

另一方面, 依据上文的叙述, 通过坐标变换我们可以把靶标平面上一个圆的轮廓影射到像纸上的一个类似于椭圆的二次曲线。这样, 我们也可以定出这个投影过来的二次曲线的长轴端点与短轴端点, 设其为 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 与 Q_4 。由于影射的椭圆和像纸上实际得到的椭圆是一一对应的, 也就是说影射椭圆长轴端点对应实际椭圆长轴端点, 影射椭圆短轴端点对应实际椭圆短轴端点, 则要使影射椭圆和实际椭圆吻合地比较好, 就是要使四个对应端点的偏差尽量小。我们假设这种偏差为 σ , 则其可以表示为:

$$\sigma = \sum_{i=1}^4 d_{P_i Q_i}$$

这样，上式即为我们衡量匹配程度大小的函数。而我们的整个模型也可以表达为如下的规划模型形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma = \sum_{i=1}^4 d_{P_i Q_i} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \begin{bmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{bmatrix} = R' \left(M \left(R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + T \right) \right) + T' \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \end{cases} \end{aligned}$$

其中第一个限制条件代表像纸上每一个点都是经由靶标上的对应点经过同一变化得到的；第二个限制条件代表靶标上的每一个点都是一个球上的一个切面上的一点。

求解这个模型，实际上就是确定旋转矩阵 R 与 R' 、缩放矩阵 M 、平移矩阵 T 与 T' ；也就是确定旋转参数 α 、 β 、 γ 、 θ ，平移参数 T_x 、 T_y 、 T_z 、 T'_x 、 T'_y 以及焦距 f ，使得 σ 的取值最小。在求解完成后，我们即可得到这些参数，再给出靶标上正圆的圆心坐标 (x_c, y_c, z_c) ，经过如下的矩阵计算即可得到像纸上与圆形对应的点的坐标 (x'_c, y'_c, z'_c) 。

$$\begin{bmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{bmatrix} = R' \left(M \left(R \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} + T \right) \right) + T'$$

这样，题中的问题即被成功的解决。

4.3 求解算法

本模型中求解的关键在于确定各个旋转参数、平移参数以及光学中心到像纸的距离。传统优化方法如牛顿法、梯度下降法和共轭梯度法等为解决这类问题时需要设置适当的初始值。如果初始值的设置不恰当会导致优化过程的收敛性差或易于陷入局部最优解。特别是对于本题中的多参数问题，随着局部最优点的增多，寻找全局最优点的难度会增大。遗传算法是解决摄像机标定这类多参数、非线性优化问题的一种可行方法，其理论也较为成熟。在查阅相关文献后，我们还发现遗传算法在摄像机标定方面已取得一定成效。综合上述各因素，我们认为应该采用遗传算法作为求解算法，通过其不停的调整参数，使目标函数最小时得到的参数即为所求。

五、 问题二：问题一中模型的一个实践

5.1 图像数字化处理

图像的数字化的过程中，图像被划分为称作图像元素的小区域，图像元素简称为像素。在每个像素点的位置，如果灰度值区别很大，则图像可以作为二值图像处理。在二值图像中，黑色区域中的像素点的灰度值为 0，白色区域中的像素的灰度值设为 1。由于靶标的像的图像灰度值区别很大且其分辨率为 1024×768 ，则图像数字化后生成一个

768 行 1024 列的数组，数组中的每个元素表示一个像素。设该数组为 $A[768][1024]$ ，则其中：

$$A[i][j] = \begin{cases} 1, & i \text{ 行 } j \text{ 列对应像素的灰度值为 } 0 \\ 0, & i \text{ 行 } j \text{ 列对应像素的灰度值为 } 1 \end{cases}$$

在将题目所给的图形的数据存储到数组 A 中之后，还需要进一步提取出每一个二次曲线的轮廓。类似于上面所述的情况，靶标的像的图像对应一个边缘轮廓数组 $B[768][1024]$ 。其中，如果第 i 行第 j 列对应的像素在边缘轮廓上，则 $B[i][j]$ 取值为 1，否则为 0。由于边缘轮廓上的像素点的特征是它左边像素点和右边像素点的灰度值相异，所以边缘轮廓数组中的元素 $B[i][j]$ 的表达式为 $B[i][j] = A[i-1][j] \oplus A[i+1][j]$ 。当然，这样处理会忽略掉曲线的边缘部分最高和最低的几个像素点，但由于这种像素点数目很少，故其不会产生巨大影响。

至此，图像的数字化处理完成。

5.2 模型建立

在第一问中，我们建立了单个圆的射影椭圆长短轴端点和实际椭圆长短轴端点的偏差为 σ ，可以表示为：

$$\sigma = \sum_{i=1}^4 d_{P_i Q_i}$$

第二问中，有 5 个圆和对应的射影椭圆。那么可以设 5 个圆的总偏差为 σ ，则有：

$$\sigma = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 d_{P_{i,j} Q_{i,j}}$$

此时约束条件和第一问中模型的约束条件非常类似，且数目依旧为 2。

第一个约束条件：设物平面上的第 i 个圆上的第 j 个点为 $P_{i,j}(x_{i,j}, y_{i,j})$ ，第 i 个圆的圆心为 (x_i^0, y_i^0, z_i^0) ，半径为 r_i 。则任取 j 应满足以下方程：

$$(x_{i,j} - x_i^0)^2 + (y_{i,j} - y_i^0)^2 + (z_{i,j} - z_i^0)^2 = (r_i)^2$$

第二个约束条件：靶标上任意一个点 $P_{i,j}(x_{i,j}, y_{i,j})$ 到其对应于像纸上的点 $W(x'_{i,j}, y'_{i,j}, z'_{i,j})$ 的变换满足同一个关系式：

$$\begin{bmatrix} x'_{i,j} \\ y'_{i,j} \\ z'_{i,j} \end{bmatrix} = R' \left(M \left(R \begin{bmatrix} x_{i,j} \\ y_{i,j} \\ z_{i,j} \end{bmatrix} + T \right) \right) + T'$$

于是问题二的模型为：

$$\min \sigma = \sum_{i=1}^4 d_{P_i Q_i}$$

$$s.t. \begin{cases} \begin{bmatrix} x'_{i,j} \\ y'_{i,j} \\ z'_{i,j} \end{bmatrix} = R' \left(M \left(R \begin{bmatrix} x_{i,j} \\ y_{i,j} \\ z_{i,j} \end{bmatrix} + T \right) \right) + T' \\ (x_{i,j} - x_i^0)^2 + (y_{i,j} - y_i^0)^2 + (z_{i,j} - z_i^0)^2 = (r_i)^2 \end{cases}$$

其中旋转矩阵 R 与 R' 、缩放矩阵 M 、平移矩阵 T 与 T' 与问题一中的含义相同。

求解出上述矩阵之后，设第 i 个圆的圆心为 (x_i^0, y_i^0, z_i^0) ，则其在像纸上的坐标可以按照下式得出：

$$\begin{bmatrix} x_i^{0'} \\ y_i^{0'} \\ z_i^{0'} \end{bmatrix} = R' \left(M \left(R \begin{bmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \\ z_i^0 \end{bmatrix} + T \right) \right) + T'$$

5.3 模型求解

利用问题一的算法，修改目标函数为问题二模型的目标函数，用遗传算法进行优化搜索求解得到旋转矩阵 R 与 R' 、缩放矩阵 M 、平移矩阵 T 与 T' ，进而得到各个圆的圆心的像坐标。

设以像平面左上角为坐标原点，向右为 X 轴，向下为 Y 轴，求解结果如下表所示：

表格 1：各个圆的圆心在像纸上的坐标（单位为像素）

	圆 A	圆 B	圆 C	圆 D	圆 E
x	324	418	632	587	290
y	201	203	209	498	499

求解结果的图示如下：

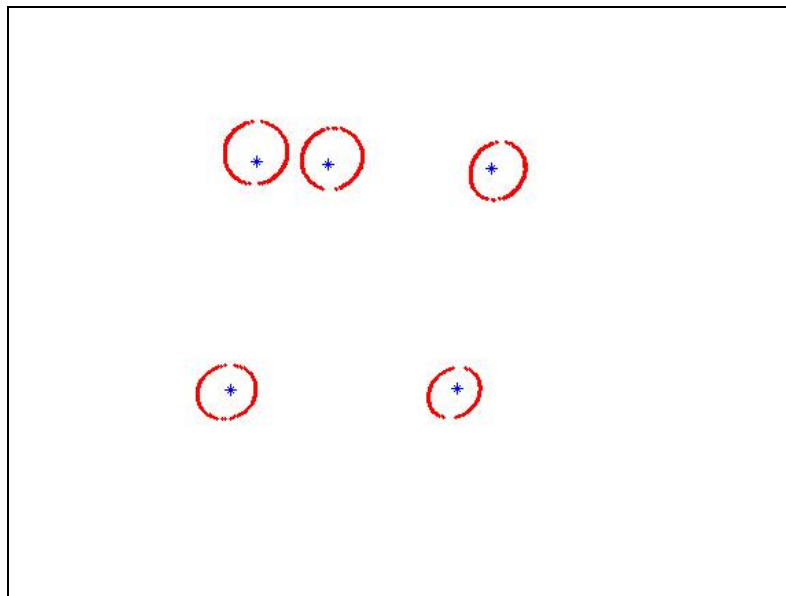


图 3：求解结果图示

5.4 结果分析

由于靶标在像平面上的图像非常类似一个椭圆，故靶标上圆的圆心在像平面中的坐标和类椭圆的中心相差不会太大。对类椭圆进行一个椭圆曲线拟合，可以得出五个椭圆曲线的中心点坐标，结果如下。

	A	B	C	D	E
X	322.89	423.0	639.8	582.7	284.65
Y	189.5	197.0	213.5	503.0	502.0

若定义偏差为 $s = (x - x')^2 + (y - y')^2$ ，则有：

	A	B	C	D	E
σ	135.7921	65.96	89.33	45.46	31.7925

定义圆度比=类椭圆的长轴长/短轴长，发现圆度比越大的类椭圆对应的圆心像坐标与类椭圆中心偏差越小。这说明对于圆度比较大的类椭圆求出的结果较精确，而圆度比较小的类椭圆求出的结果偏差较大。

另一方面，由于靶标图中 A, B, C 三个圆的圆心处在同一直线上，根据射影几何学知识，无论相机从什么方向拍摄，其圆心对应的像平面中的像仍然在同一直线上。设根据 A, B, C 三圆的圆心求得的像平面上的点为 A', B', C' ，计算 $A'B'$ 的斜率为 $k_1 = 0.0749$ ， $B'C'$ 的斜率为 $k_2 = 0.0761$ ，由于斜率不相等，说明 A', B', C' 不在同一条直线上。由于 $|k_2 - k_1| = 0.0012$ ，相差并不是太大，基本符合三点共线，因此其从另一个方面证明了我们得出的结果的正确性。

六、 问题三：基于差异度检验的模型检验方法

6.1 差异度检验的提出

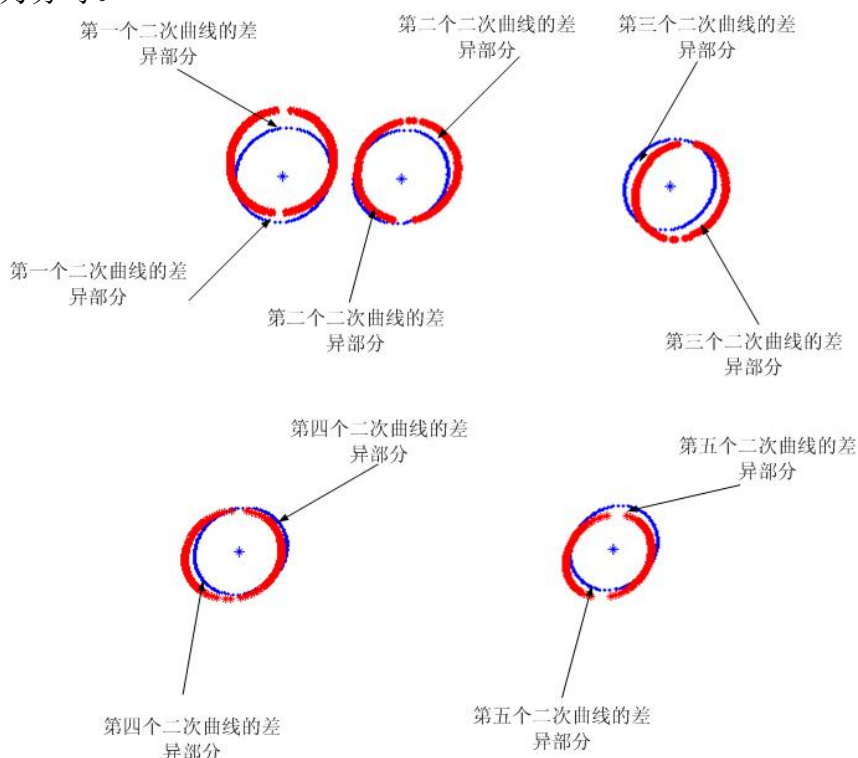
在第一问的模型中我们通过寻找一种映射关系使得投影出来的二次曲线和像平面上的封闭二次曲线尽可能打的“匹配”，这种匹配的好坏是以四个点的投影坐标与像坐标的差别的大小来衡量的。应该注意到，由于仅仅使用了四个特殊点的坐标，这种评判方式实际浪费了大量的信息，而也正是因为这些信息的浪费才使得最终的定位不够精确。在对模型的评价之中，我们必须找到一种能够更加充分的利用这些信息的方法。经过对资料的查阅以及自身的思考，我们认为投影出来的二次曲线和像平面上的二次曲线的差异程度的大小是一个对模型的很好的评判标准。

定义投影出来的二次曲线和像平面上的二次曲线的不重合部分的面积与像平面上的二次曲线自身的面积的比值为差异度，其表达式如下所示：

$$\text{差异度} = \frac{\text{投影出的二次曲线与像平面上的二次曲线的不重合部分的面积}}{\text{像平面上二次曲线的面积}}$$

利用差异度来对我们的模型进行检验，称为差异度检验。

下面，我们结合第二问的求解结果对差异度检验给出一个实例。下图中将每对二次曲线的差异部分的面积进行了标示。针对每一个二次曲线，这些面积即是差异度的表达式中的分子部分。而该二次曲线在像纸上的实际的面积(线形较粗的为像纸上的实际的二次曲线)即为分母。



直观的看，差异度越低表示两二次曲线重合地越好，也就表明寻找的映射关系能够比较好的吻合射出来的二次曲线和像平面上的二次曲线，从而就能比较好的映射出圆心的像坐标，也表明了模型的效果比较好；反之，则说明模型的效果不好。

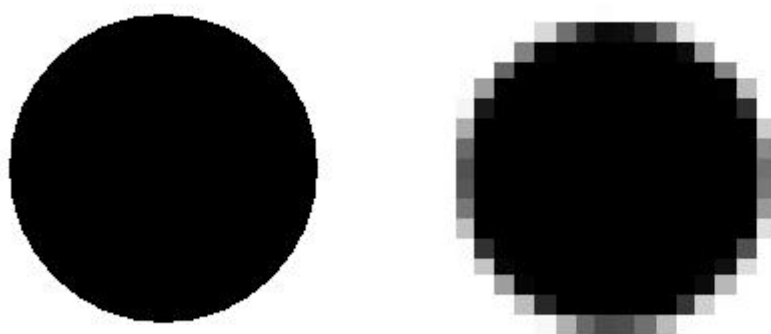
经过计算，5个二次曲线的差异度的值均在20%以下。这个结果表明，我们的模型的求解效果还是较好的。

以下，我们将对差异度检验的精度以及稳定性进行讨论。

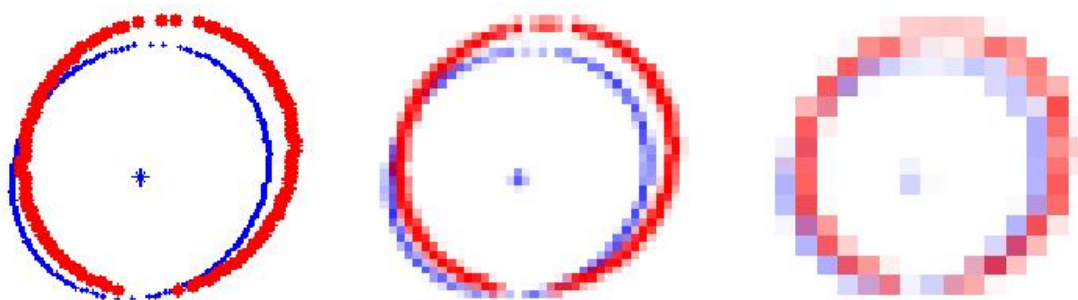
6.2 差异度检验的精度讨论

差异度检验的精度直接与能否精确的度量差异部分的面积相关，这是显然的。而差异部分的面积的度量精度与图像的分辨率有着直接的、而且是正相关的关系，下面我们将着力说明这一点。

图像的分辨率代表垂直及水平显示的每英寸的点的数量；分辨率越高，图像则愈清晰，反之则越模糊。图像分辨率的降低将导致图像所携带的信息的丢失，并且使图像的失真加剧。例如下图所示，右边和左边尝试反映的是同样一个圆，而右侧图像的分辨率为左侧图像的十分之一。通过比对，我们可以明显的体会到左图比右图要精细、准确许多。



以上说明了单个物体的图像在分辨率下降时的失真现象。如果我们将单个物体拓展为两个外形相似的物体，例如上面提到的由靶标投射的二次曲线和像纸上与其对应的二次曲线。可以预见，这种失真现象仍会发生，而且这种失真必然会导致差异部分的面积度量的精度下降。例如下图，最左边的为原图，中间的为分辨率为原始的 25% 下的结果，右侧的为分辨率为原始的 10% 下的结果。在原图中，左下侧与右上侧的差异面积十分明显；当分辨率下降为 25% 时，左下侧的差异面积基本消失或无法度量；而当分辨率下降为 10% 时，右上侧的差异面积也基本消失或无法度量。此时，两个在真实世界中有明显差异的二次曲线竟然变得近似于重合，这显然将使得我们无法依靠差异度检测对模型是否有效、两个二次曲线匹配是否良好做出合理、有效的判断。



至此，我们已经说明了差异度检测中差异部分的面积的度量精度与图像的分辨率有着正相关的关系，再结合差异度检验的精度直接与能否精确的度量差异部分的面积相关这一结论，我们不难知道差异度检测的精度与用于拍摄的设备分辨率有着正相关的关系，也即相机的分辨率越高，差异度检测的精度越高，反之则差异度检测的精度越低。

6.3 差异度检测的稳定性的讨论

所谓差异度检测的稳定性是指的该检测能否在面对各种不同的情况时仍然能够对模型的有效性和正确性做出良好的判断。

在对问题一中的模型进行检测时，考虑投影生成的二次曲线与像纸上的二次曲线均为圆心在光轴上的圆的情况，可以发现此时差异度检测可能存在巨大的误差。这种误差

表现在当投影生成的二次曲线绕光轴旋转时，其所对应的原始靶标在不断变化，而根据差异度检测，这不断变化的靶标均为合理的原始靶标。这显然是错误的，产生这种错误的根本原因即在于圆这种图形具有高度的对称性，例如其在绕过其圆心的法矢量进行旋转的过程中，其和任意图形的差异性检测的结果始终不变。其实，不仅仅对圆这种具有高度对称性的图形，对于椭圆、等边三角形等具有一定对称性的物体，差异度检测的效果同样可能得出错误的结论。因此，差异度检测在被检测图形具有较高的对称性时并不稳定，而对于对称性很低的图形则具有良好的检测效果。

七、 问题四：相机定位模型

7.1 平行放置的相机定位模型

7.1.1 问题分析

靶标上各个圆的圆心已知，任意两个圆心之间的距离也已知，定义为实际圆心距 $d_{i,j}$ 。设两个相机光学中心之间的相对距离为 s ，通过对两个相机像平面上特征点与物平面上圆心的几何关系，可以把物平面上圆心的坐标用距离 s 和像平面上特征点的坐标表示，从而也可以得到含有参数的圆心距，定义为理论圆心距 $D_{i,j}$ 。

设误差为 σ ，其表达式为：

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (d_{i,j} - D_{i,j})^2$$

这样，通过求误差的最小值就可以求出相机的相对距离 s 。

7.1.2 模型建立

单个坐标点用相机距离 s 表示

这种情况下的双目成像问题可以参考图 4 来分析。

两个相机分别对于物平面上第 i 个点 $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 成像后，在各自像平面坐标系中的坐标分别为 $Q_{i,1}(x_{i,1}, y_{i,1})$ ， $Q_{i,2}(x_{i,2}, y_{i,2})$ 。相机的光学中心到像平面的距离为 f ，两相机的相对距离为 s 。

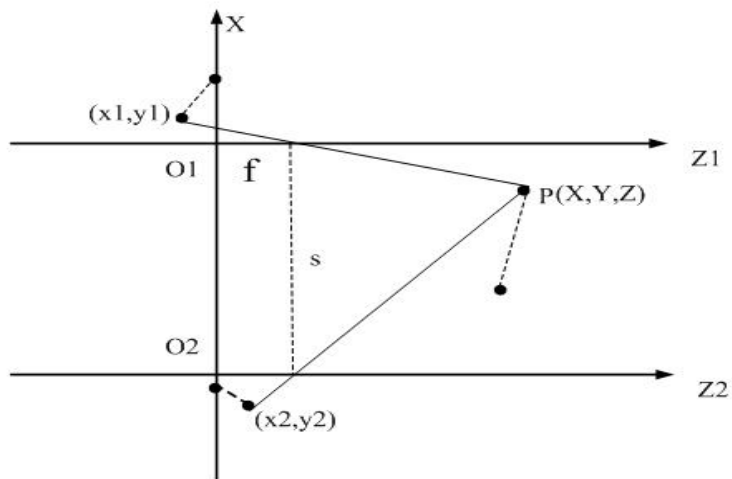


图 4

设相机主光轴为 Z 轴，两镜头所在平面为 XZ 平面。将第一个相机叠加到现实世界坐标系上，由三角形相似定理可以得到 P 点 X 坐标为：

$$X_{i,1} = \frac{x_{i,1}}{f}(f - Z_{i,1}) \quad (4-1)$$

上式中 $X_{i,1}$ 和 $Z_{i,1}$ 表示第一个相机移到了世界坐标系的原点，而第二个相机和 P_i 点在保持图所示相对几何关系的条件下也会跟着移到。如果将第二个相机移到世界坐标系的原点，同样由三角形相似定理可以得到 P 点 X 坐标为：

$$X_{i,2} = \frac{x_{i,2}}{f}(f - Z_{i,2}) \quad (4-2)$$

因两个相机之间的相对距离长度为 s ，而且 P_i 点对于两个相机坐标系是一样的，所以有：

$$|X_{i,1}| + |X_{i,2}| = s \quad (4-3)$$

为了计算方便，在这里假设 $x_{i,1} > 0, x_{i,2} > 0$ ，将上面三个式子整理消去 $X_{i,1}, X_{i,2}$ 后，得到：

$$Z_i = \frac{x_{i,1} + x_{i,2} + s}{x_{i,1} + x_{i,2}} f \quad (4-4)$$

将式(4-4)代入(4-1)得到 P_i 点 X_i 坐标为：

$$X_i = -\frac{x_{i,1}}{x_{i,1} + x_{i,2}} s$$

P_i 点 Y_i 坐标为：

$$Y_i = \frac{Z_i - f}{f} y_{i,1} = \frac{y_{i,1}}{x_{i,1} + x_{i,2}} s$$

这样我们就可以用 $s, x_{i,1}, x_{i,2}, y_{i,1}, y_{i,2}$ 表示出 $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ ，其中只有 s 为未知要求的量。

其中：

$$X_i = -\frac{x_{i,1}}{x_{i,1} + x_{i,2}}s, \quad Y_i = \frac{y_{i,1}}{x_{i,1} + x_{i,2}}s, \quad Z_i = \frac{x_{i,1} + x_{i,2} + s}{x_{i,1} + x_{i,2}}f$$

多个坐标点的相机距离 s 求解

通过上一节，可以通过物平面上一点在两个相机的像平面投影的对应点的坐标和相机距离 s 表示出这一点。下面，将通过物平面上点的关系来求解相机的相对距离 s 。

具体的求解将以下图 5 中的圆 A 和圆 B 的圆心 $P_A(X_1, Y_1, Z_1)$ ， $P_B(X_2, Y_2, Z_2)$ 为例。

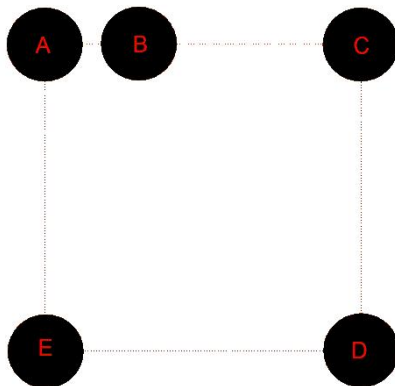


图 5

上图为设计的靶标，圆 A 和圆 B 的中心距离为已知，设为 d_{AB} ，是实际圆心距。

那么由 $D_{i,j} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}$ 可以算出相机相对距离 s 的值，为理论圆心距。

那么实际圆心距和理论圆心距的误差为：

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (d_{i,j} - D_{i,j})^2$$

于是就可以建立如下模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (d_{i,j} - D_{i,j})^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} X_i = -\frac{x_{i,1}}{x_{i,1} + x_{i,2}}s, Y_i = \frac{y_{i,1}}{x_{i,1} + x_{i,2}}s, Z_i = \frac{x_{i,1} + x_{i,2} + s}{x_{i,1} + x_{i,2}}f \\ D_{i,j} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} \end{cases} \end{aligned}$$

用 Lingo 编程便可以求解以上模型。

7.2 非平行放置的相机定位模型

7.2.1 问题分析

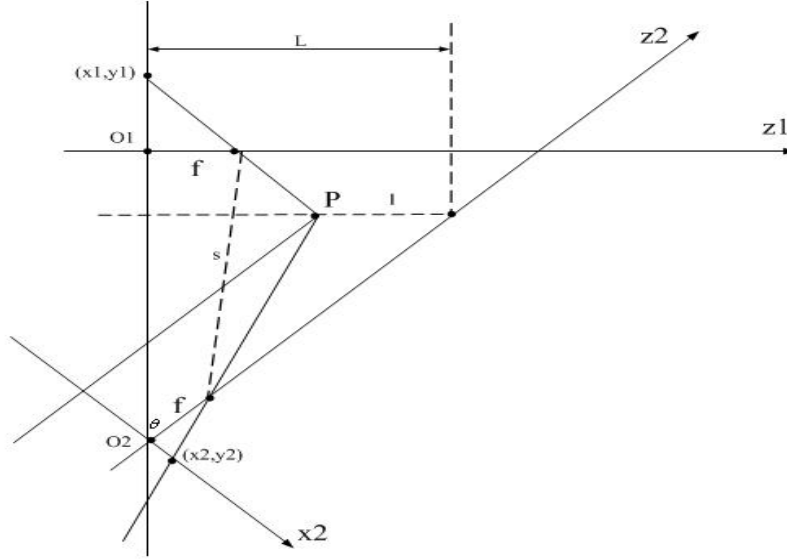
非平行放置的相机与平行放置的相机的区别在于两个相机的坐标系不能简单的通过平移得到，而是会有一个旋转角 θ 。参照平行放置模型，非平行放置模型的理论的圆心坐标可以用参数 s ， θ 和像平面的特征点坐标表示，同样也可以表示出理论圆心距 $D_{i,j}$ 。设误差为 $\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (d_{i,j} - D_{i,j})^2$ ，通过求误差的最小值就可以求出相机的相对距离 s 。

7.2.2 模型建立

单个坐标点的相机距离 s 表示

两个相机分别对于物平面上第 i 个点 $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 成像后，在各自像平面坐标系中的坐标分别为 $Q_{i,1}(x_{i,1}, y_{i,1})$ ， $Q_{i,2}(x_{i,2}, y_{i,2})$ 。相机的光学中心到像平面的距离为 f ，两相机的相对距离为 s 。

设相机主光轴为 Z 轴，两主光轴所在平面为 XZ 平面。将第一个相机叠加到现实世界坐标系统上，第二个相机的主光轴与 Z 轴的夹角为 θ 。



在第一个相机的坐标系中，由三角形相似定理可以得到 P_i 点 X_i 坐标为：

$$X_i = X_{i,1} = \frac{x_{i,1}}{f}(f - Z_{i,1}) \quad (4-1)$$

Y_i 坐标为：

$$Y_{i,1} = \frac{y_{i,1}}{f}(f - Z_{i,1})$$

上式中 $X_{i,1}$ 和 $Z_{i,1}$ 表示第一个相机移到了世界坐标系统的原点，而第二个相机和 P_i 点在保持图所示相对几何关系的条件下也会跟着移动。如果将第二个相机移到世界坐标系统的原点，同样由三角形相似定理可以得到 P_i 点 X_i 坐标为：

$$X_{i,2} = \frac{x_{i,2}}{f}(f - Z_{i,2}) \quad (4-2)$$

Y_i 坐标为：

$$Y_{i,2} = \frac{y_{i,2}}{f}(f - Z_{i,2})$$

由几何关系，可以得到 P_i 在世界坐标系中 Z_i 的值：

$$Z_i = Z_{i,1} = L - l = (s - X_{i,1}) \tan \theta - \frac{X_{i,2}}{\cos \theta} \quad (4-3)$$

$X_{i,2}$ 和 $Z_{i,2}$ 也存在几何约束：

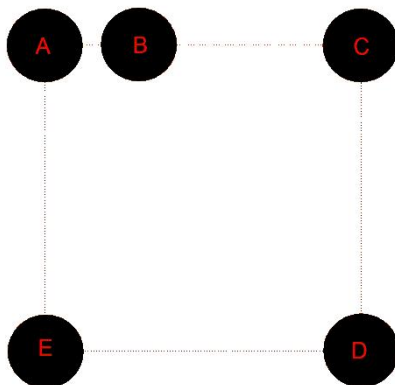
$$Z_{i,2} = \frac{s - X_{i,1}}{\cos \theta} - X_{i,2} \tan \theta$$

通过上面的几何约束，可以把 $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 的各个坐标值用 $s, \theta, x_{i,1}, x_{i,2}, y_{i,1}, y_{i,2}$ 表示出来，其中 s, θ 为未知参数。

多个坐标点的距离 s 求解

通过上一节，可以把 $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 的各个坐标值用 s, θ 表示。下面，将通过物平面上点的关系来求解相机的相对距离 s 。

具体的求解同样将以下图中的圆 A 和圆 B 的圆心 $P_A(X_1, Y_1, Z_1)$ ， $P_B(X_2, Y_2, Z_2)$ 为例。



上图为设计的靶标，圆 A 和圆 B 的中心距离为已知，设为 d_{AB} ，是实际圆心距。

那么由 $D_{i,j} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}$ 可以算出相机相对距离 s 的值，为理论圆心距。

那么实际圆心距和理论圆心距的误差为 $\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (d_{i,j} - D_{i,j})^2$ 。

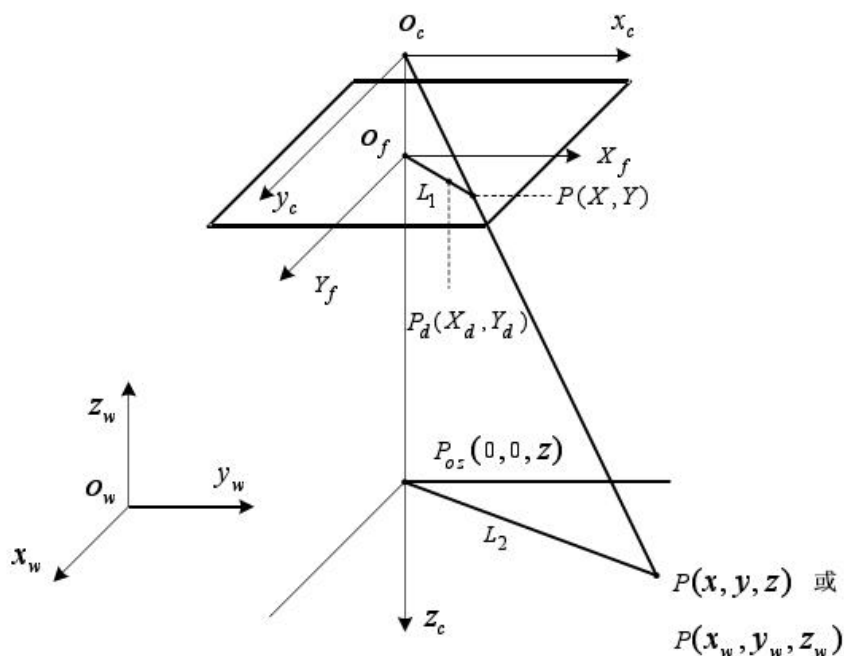
于是就可以建立如下模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (d_{i,j} - D_{i,j})^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} X_i = X_{i,1} = \frac{x_{i,1}}{f} (f - Z_{i,1}) \\ Y_i = Y_{i,1} = \frac{y_{i,1}}{f} (f - Z_{i,1}) \\ Z_i = Z_{i,1} = L - l = (s - X_{i,1}) \tan \theta - \frac{X_{i,2}}{\cos \theta} \\ Z_{i,2} = \frac{s - X_{i,1}}{\cos \theta} - X_{i,2} \tan \theta \\ X_{i,2} = \frac{x_{i,2}}{f} (f - Z_{i,2}) \\ D_{i,j} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} \end{cases} \end{aligned}$$

用 Lingo 编程便可以求解以上模型。

7.3 模型的进一步讨论

以上模型的建立是以照相机没有畸变的情况下建立的，而实际中在远离镜头中心边缘有较大的畸变。畸变分为：径向畸变和切向畸变。通常只考虑径向畸变。下图是带有径向畸变的小孔照相机模型，设 (x_w, y_w, z_w) 是世界坐标中物相中点 P 的坐标， (x, y, z) 是同一点 P 在照相机坐标系中的三维坐标。 (X, Y) 表示理想情况下不存在畸变的图像坐标； (X_d, Y_d) 表示存在径向畸变的实际图像的图像点坐标。



照相机的畸变模型可以简单的表示为：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_d \\ Y_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_r \\ \Delta Y_r \end{bmatrix}$$

式中， $[\Delta X_r \ \Delta Y_r]^T$ 表示径向畸变引起的误差。

径向畸变都可以表示成一组无限级数的形式，则有：

$$\Delta X_r = X_d (k_1 \rho_d + k_2 \rho_d^2 + k_3 \rho_d^3 + \dots)$$

$$\Delta Y_r = Y_d (k_1 \rho_d + k_2 \rho_d^2 + k_3 \rho_d^3 + \dots)$$

式中， $\rho_d = \sqrt{X_d^2 + Y_d^2}$ 。可得：

$$\Delta r = \frac{1}{\rho_d} (\Delta X_r^2 + \Delta Y_r^2)$$

$$= k_1 \rho_d^2 + k_2 \rho_d^4 + k_3 \rho_d^6 + \dots$$

$$\approx k_1 \rho_d^2$$

也就是说图像中某一点的总的径向畸变 Δr 正比于该点到图像中心的距离的平方 ρ_d^2 。这样一来，就可以给出带有径向畸变的相机定位模型，然后用上几节的内容进行求解，会得到更为精确的结果。

八、 模型评价

8.1 问题一中模型的评价

把照相机成像的过程转化为空间坐标变换，即一个图形通过平移，旋转和变比等转化为另一个图形。在转换过程中采用了较严格的理论推导，得到了物平面上一点和相平面上一点的映射关系。并且利用图像的特征点匹配，找到了这个映射关系，从而求得圆心的像坐标。模型的建立有着严格的理论支持，思路清晰，理论效果比较好。

然而，像平面图形的特征提取以及和物平面对应点的匹配关系的寻找是一个难题。没有考虑成像过程中的畸变问题，用椭圆的长短轴的端点进行匹配，精度受到限制，成为模型一的瓶颈。

8.2 问题四中模型的评价

平行放置和非平行放置相机定位模型，都是运用严格的几何关系推导，把物平面上圆心坐标用两相机的距离 s 和其它参数表示出来，再利用几个圆心的相对位置关系来求距离。在求解的过程中省去了很多中间的坐标变换等过程，并考虑到图形坐标测量中的误差，建立了规划模型，使得结果更加的准确、可靠。

在模型的进一步讨论中，我们引入径向畸变，并得到径向畸变 Δr 近似正比于该点到图像中心的距离的平方 ρ_d^2 ，这样会使得模型的求解更加的精确。

但是，模型并没有考虑到相机主光轴不在同一平面的情况。而且模型求解依赖于相平面上圆心的定位精度，而定位精度也是一个难题。

九、 模型推广

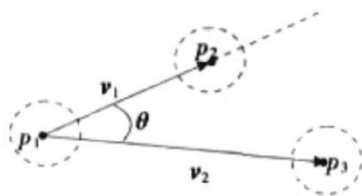
对于第三问的模型检验的方法，可以重新设计一种靶标，从而用共线性指数来对模型进行检验。

照相机对物体进行投影变换，使物体的长度、面积以及距离等量因距离照相机远近而变化，但这个变换过程中仍然存在不变量，依据这些不变量可以确定靶标圆之间的拓扑关系。共线性就是一个这样的量，多个共线点在投影变换后仍然具有共线性。

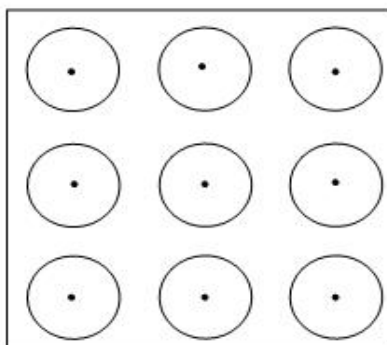
定义三个特征点 p_1, p_2 和 p_3 的共线性 CL 为：

$$CL = \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|} \right)^2}$$

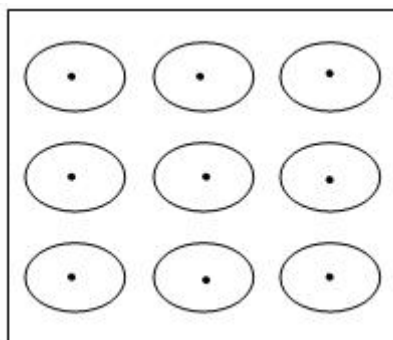
其中 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 是三个点组成的两个矢量， $\|\mathbf{v}\|$ 是矢量求模符号。 CL 的范围为 $[0,1]$ ，越接近 0 表示三点越具有共线性；反之，越接近 1，越不共线。在实际应用中，由于镜头畸变和圆中心提取偏差会对共线性产生微量影响，所以在共线性量化判断时，需要设定一个较小的阈值 CL_t （如 $CL_t = \sin 3^\circ$ ）。



新型靶标是由一组圆形阵列组成，圆心是靶标的特征点，并且圆心之间的间距已知。
如下图：



照相机对靶标成像后，在像平面得到如下图像：



用问题一的模型，可以分别求出圆心在像平面的坐标 $p_i(x_i, y_i)$ ，于是对于像平面上的三点就可以用共线性指标 CL 来检验模型了， CL 越小表示模型越好，反之模型误差越大。

十、 参考文献

- [1] 姜启源 谢金星，数学模型，北京：高等教育出版社，2003。
- [2] 张可 许斌 等，基于改进遗传算法的立体视觉系统标定，计算机工程与应用，2006 年 1 月卷：1—4，2006。
- [3] 张效栋 孙长库，新型方向性平面靶标及拓扑定位算法，计算机工程与应用，44(11)：104—106，2008。