第19卷 建模专辑
2002年02月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol.19 Supp.
Feb. 2002

文章编号:1005-3085(2002)05-0128-07

"基金使用计划"模型和评述

陈恩水， 孙志忠
(东南大学应用数学系，南京 210096)

摘 要:本文首先给出基金使用计划最优方案的参考答案，并从命题人和评阅人的角度，对参赛队在求解这道题目中出现的一些问题作了评述，指出了同学们的论文中的优点及不足之处。

关键词:投资;数学建模;非线性规划问题
分类号:AMS(2000) 91B28 **中图分类号**:O224 **文献标识码**:A

1 引言

2001年全国大学生数学建模竞赛组委会选用了我们提供的"基金使用计划"问题作为C题。该题的目标是针对不同的投资方式，寻求最佳的投资方案。本文我们先给出了该问题的参考答案，并结合阅卷情况，对参赛论文作一些评述。

2 基本假设及分析

问题的本身尚有一些不确定的因素，比如说基金到位的时间，每年奖金发放的日期，银行利率的变动情况等。为使问题简化，我们给出如下假设:

1) 该笔基金于年底前一次性到位，自下年起每年年底一次性发放奖金，每年发放的奖金额为固定的，记为 y_n。

2) 仅考虑购买二年、三年、五年期国库券的情况，假设三种期限的国库券每年至少发行一次，且只要想买，就一定能买到。

3) 银行存款利率和国库券的利率执行现行利率标准，且在 n 年内不发生变化。

4) 国库券提前支取，按同期银行存款利率记息，且收取2‰的手续费。

3 数学建模

3.1 单纯存款模型

设将一元钱存入银行 k 年(包括中途转存)，到期时本息和最多可达 r_k 元，则假如第 k 年有 M_k 元的存款到期，到期时取出，本息和最大可达 r_kM_k。现将 M 元分成 n 份，分别记为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$。将 M_k 存入银行 k 年，到期时取出，将本息和作为第 k 年的奖金(第 n 年本息和除作奖金外，还要留下原始本金 M)，则应有

$$r_kM_k = y_n \qquad k = 1,2,\cdots,n-1 \tag{1}$$

$$r_n M_n = y_n + M \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = M \tag{3}$$

记 $S_i = 1/r_i \qquad i = 1,2,\cdots,n$

由(1) ~ (3) 得到

$$y_n = (1 - S_n)M/\sum_{i=1}^{n} S_i \tag{4}$$

$$M_k = (1 - S_n)M/r_k \sum_{i=1}^{n} S_i \tag{5}$$

$$M_n = M(1 + \sum_{i=1}^{n-1} S_i)/r_n \sum_{i=1}^{n} S_i \tag{6}$$

记 $\eta_n = y_n/M$

则 $$\eta_n = (1 - S_n)/\sum_{i=1}^{n} S_i \tag{7}$$

上式给出了 n 年内每年的奖金额 y_n 与 M 的比值。该式的关键在于如何求出 $r_k, k = 1,2,\cdots,n$。下面我们给出 r_k 的算法。

设将 1 元钱存入银行 k 年，k 年存期中有 x_1 个一年期，x_2 个二年期，x_3 个三年期，x_5 个五年期，记 $A_k(x_1,x_2,x_3,x_5)$ 为其本息和，则

$$r_k = \max A_k(x_1,x_2,x_3,x_5) \tag{8}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 = k, \quad x_1,x_2,x_3,x_5 \text{ 为非负整数} \tag{9}$$

$$A_k(x_1,x_2,x_3,x_5) = \beta_1^{x_1}\beta_2^{x_2}\beta_3^{x_3}\beta_5^{x_5} \tag{10}$$

容易看出，任意交换 2 个存期的次序不改变本息和。例如，先存一年期后存三年期与先存三年期后存一年期，到期时本息和是一样的。不仅如此，经计算可知以下五式成立

$$\beta_1^2 < \beta_2 \tag{11}$$

$$\beta_1\beta_2 < \beta_3 \tag{12}$$

$$\beta_2^2 < \beta_1\beta_3 \tag{13}$$

$$\beta_2\beta_3 < \beta_5 \tag{14}$$

$$\beta_3^2 < \beta_1\beta_5 \tag{15}$$

上面各式中，(11) 式表示存 2 个一年期不如一次存 1 个二年期，(12) 式表示存 1 个一年期再转存 1 个二年期不如一次存 1 个三年期，以此类推，(15) 式表示存 2 个三年期不如先存 1 个一年期再转存 1 个五年期。

根据(11) ~ (15) 式，我们得到如下定理

定理 1　假如 $A_k(x_1,x_2,x_3,x_5)$ 在$(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_5^*)$点取得最大，则下列条件必成立

$$x_1^* \leqslant 1, x_2^* \leqslant 1, x_3^* \leqslant 1; \tag{16}$$

$$x_1^* + x_2^* \leqslant 1, x_2^* + x_3^* \leqslant 1; \tag{17}$$

$$x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* \leqslant 4; \tag{18}$$

定理的证明是比较简单的，(16) 式中可由(11) 式、(13) 式和(15) 式得出，(17) 式由(12) 式及(14) 式得出，(18 式) 由(16) 式及(17) 式推出。

将(9) 式两边除以 5，得

$$\frac{1}{5}(x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^*) + x_5^* = \frac{k}{5}$$

于是根据定理 1 得

$$x_5^* = [\frac{k}{5}]$$

设 $k = 5m + l, 0 \leqslant l \leqslant 4, m$ 为非负整数,则有

$$x_5^* = m, x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* = l \tag{19}$$

再据(11)~(13)式得,当 $l = 0$ 时,$x_3^* = 0, x_2^* = 0, x_1^* = 0$;当 $l = 1$ 时,$x_3^* = 0, x_2^* = 0, x_1^* = 1$;当 $l = 2$ 时,$x_3^* = 0, x_2^* = 1, x_1^* = 0$;当 $l = 3$ 时,$x_3^* = 1, x_2^* = 0, x_1^* = 0$;当 $l = 4$ 时,$x_3^* = 1, x_2^* = 0, x_1^* = 1$;综上我们可得如下定理

定理 2 假如 $A_k(x_1, x_2, x_3, x_5)$ 在 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_5^*)$ 点取得最大值,则 $x_5^* = [\frac{k}{5}]$,$x_3^* = [\frac{k - 5x_5^*}{3}], x_2^* = [\frac{k - 5x_5^* - 3x_3^*}{2}], x_1^* = k - 5x_5^* - 3x_3^* - 2x_2^*$。

由定理 2 得到

$$r_k = \beta_1^{x_1^*}\beta_2^{x_2^*}\beta_3^{x_3^*}\beta_5^{x_5^*} \tag{20}$$

将 1 元钱存入银行 k 年,到期后获得最大利息的存法及 r_k 值见表 1。

表 1 最大利息存款方案

k	存法	r_k
$5m$	m 个五年期	β_5^m
$5m+1$	1 个一年期,m 个五年期	$\beta_1\beta_5^m$
$5m+2$	1 个二年期,m 个五年期	$\beta_2\beta_1\beta_5^m$
$5m+3$	1 个三年期,m 个五年期	$\beta_3\beta_5^m$
$5m+4$	1 个一年期,1 个三年期,m 个五年期	$\beta_1\beta_3\beta_5^m$

根据(7)式及表 1 给出的 r_k 值,经计算得

当 $n = 5m$ 时,

$$\eta_{5m} = (1 - \mu_5)/(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_1\mu_3) = \eta^{-1} \tag{21}$$

其中 $\mu_i = 1/\beta_i$,$\eta = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_1\mu_3)/(1 - \mu_5)$

当 $n = 5m + 1$ 时,

$$\eta_{5m+1} = (1 - \mu_1\mu_5^m)/[\eta(1 - \mu_5^m) + \mu_1\mu_5^m], m = 0,1,2,\cdots \tag{22}$$

当 $n = 5m + 2$ 时,

$$\eta_{5m+2} = (1 - \mu_2\mu_5^m)/[\eta(1 - \mu_5^m) + (\mu_1 + \mu_2)\mu_5^m], m = 0,1,2,\cdots \tag{23}$$

当 $n = 5m + 3$ 时,

$$\eta_{5m+3} = (1 - \mu_3\mu_5^m)/[\eta(1 - \mu_5^m) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_5^m], m = 0,1,2,\cdots \tag{24}$$

当 $n = 5m + 4$ 时,

$$\eta_{5m+4} = (1 - \mu_3\mu_1\mu_5^m)/[\eta(1 - \mu_5^m) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_1\mu_3)\mu_5^m], m = 0,1,2,\cdots \tag{25}$$

可以证明由(22)~(25)式定义的 4 个序列(它们均为 $y_n, n = 0,1,2,\cdots$ 的子序列),均是单调上升的,且以 η^{-1} 为极限,容易算得 $\eta^{-1} = 0.021963$。

即

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n = \eta^{-1} = 0.021963 \tag{26}$$

上式表明，在银行存款利率不变的条件下，每年奖金占资金总额的比例存在一个上限 2.1963%，且当 n 为 5 的倍数时可达到浙一上限。

3.2 可存款可购国库券模型

仍将 M 分成 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 共 n 份，M_k 可作存款或购买国库券用，其本息和用作第 k 年的奖金，最后一笔除奖金外，还应留下基金本金 M。

由于国库券在一年内不定期发行，为保证有国库券时能即时买到，可以考虑将这笔钱以半年定期存入银行，若在上半年发行国库券，以活期利息提前支出，购买国库券，当国库券到期时取出，再存一个半年定期，到期时取出，剩余时间再存活期；若在下半年发行国库券，到期取出，再续存活期，国库券发行时，立即取出购买国库券，国库券到期时，再取出存活期。购买国库券之前及到期取出之后的两段时间之和为一年，因此购买一个 k 年期的国库券实际需要 $k+1$ 年，据此，下面考虑购买国库券的情况。

1） 3 年时使用，如果考虑购买二年期国库券，则在三年内可获得半年活期、半年定期及 1 个二年期国库券的利息，3 年结束时单位资金增长系数

$$\overline{\beta}_3 = (1 + 2\overline{\alpha}_2)\beta_0\beta_h = 1.0639 < \beta_3 = 1.0648$$

上式表明存三年定期是首选的方案。

2） 4 年时使用，如果购买三年期国库券，则 4 年结束时单位资金增长系数

$$\overline{\beta}_4 = (1 + 3\overline{\alpha}_3)\beta_0\beta_h = 1.10008 > \beta_3\beta_1 = 1.08397$$

上式表明，购买三年期国库券获得的利息大于存 1 个三年定期，再续存 1 个一年定期的利息，因而购买国库券是首选方案。

3） 5 年时使用，如果考虑购买三年期国库券，加半年定期，半年活期及一年定期，5 年结束时的单位资金增长系数

$$\overline{\beta}_5 = (1 + 3\overline{\alpha}_3)\beta_0\beta_h\beta_1 = 1.1198 > \beta_2\beta_3 = 1.1152$$

应首选购买国库券。

4） 6 年进使用，如果购买五年期国库券，6 年结束时的单位资金增长系数

$$\overline{\beta}_6 = (1 + 5\overline{\alpha}_5)\beta_0\beta_h = 1.17125 > \beta_5\beta_1$$

应首选购买国库券。

从以上分析得出，要获得最大的资金增值，应选择一年定期、二年定期、三年定期及三年期国库券和五年期国库券，而不应选择二年期国库券和五年定期存款。为了叙述方便，把买三年期国库券加半年定期及半年活期存款看成一个四年期存款，到期时资金增长系数为 $\overline{\beta}_4$，把买三年期国库券、加半年定期，半年活期及一年定期存款看成一个五年期存款，到期时资金资长系数为 $\overline{\beta}_5$，$\overline{\beta}_5 = \overline{\beta}_4 \cdot \beta_1$，把买五年期国库券加半年定期及半年活期存款看成一个六年期存款，到期时资金增长系数为 $\overline{\beta}_6$。设将 M_k 的本息和用作第 k 年的奖金，k 年中有 x_1 个一年期，x_2 个二年期，x_3 个三年期，x_4 个四年期，x_6 个六年期，则到期时资金增长系数为

$$B_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6) = \beta_1^{x_1}\beta_2^{x_2}\beta_3^{x_3}\overline{\beta}_4^{x_4}\overline{\beta}_6^{x_6} \tag{27}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_6 = k$$

类似于单纯存款模型的分析，要使 $B_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6)$ 取最大值，只需取

$$x_6 = [\frac{k}{6}], x_4 = [\frac{k-6x_6}{4}], x_3 = [\frac{k-6x_6-4x_4}{3}], x_2 = [\frac{k-6x_6-4x_4-3x_3}{2}],$$

$$x_1 = k - 6x_6 - 4x_4 - 3x_3 - 2x_2 \tag{29}$$

根据(29)式得到获得最大利息的方案及 r_k 值见表2。

表2 最大利息存购方案

k	存法	r_k
$6m$	m 个五年期国库券	$\bar{\beta}_6^m$
$6m+1$	1个一年期存款，m 个五年期国库券	$\beta_1\bar{\beta}_6^m$
$6m+2$	1个二年期存款，m 个五年期国库券	$\beta_2\bar{\beta}_6^m$
$6m+3$	1个三年期存款，m 个五年期国库券	$\beta_3\bar{\beta}_6^m$
$6m+4$	1个三年期国库券，m 个五年期国库券	$\bar{\beta}_4\bar{\beta}_6^m$
$6m+5$	1个一年期存款，1个三年期国库券，m 个五年期国库券	$\beta_1\bar{\beta}_4\bar{\beta}_6^m$

根据(7)式及表2给出的值，经计算得：

当 $n=6m$ 时；

$$\eta_{6m}=(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_1\mu_4+\mu_6)/(1-\mu_6),\ m=1,2,3,\cdots \tag{30}$$

记 $\bar{\eta}=(1-\mu_6)/(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_1\mu_4+\mu_6)$

其中：$\mu_1=1/\beta_1,\mu_2=1/\beta_2,\mu_3=1/\beta_3,\mu_4=1/\bar{\beta}_4,\mu_6=1/\bar{\beta}_6$

当 $n=6m+1$ 时：

$$\eta_{6m+1}=(1-\mu_1\mu_6^m)/[\bar{\eta}(1-\mu_6^m)+\mu_1\mu_6^m],\ m=0,1,2,\cdots \tag{31}$$

当 $n=6m+2$ 时：

$$\eta_{6m+2}=(1-\mu_2\mu_6^m)/[\bar{\eta}(1-\mu_6^m)+(\mu_1+\mu_2)\mu_6^m],\ m=0,1,2,\cdots \tag{32}$$

当 $n=6m+3$ 时：

$$\eta_{6m+3}=(1-\mu_3\mu_6^m)/[\bar{\eta}(1-\mu_6^m)+(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\mu_6^m],\ m=0,1,2,\cdots \tag{33}$$

当 $n=6m+4$ 时：

$$\eta_{6m+4}=(1-\mu_4\mu_6^m)/[\bar{\eta}(1-\mu_6^m)+(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)\mu_6^m],\ m=0,1,2,\cdots \tag{34}$$

当 $n=6m+5$ 时：

$$\eta_{6m+5}=(1-\mu_1\mu_4\mu_6^m)/[\bar{\eta}(1-\mu_6^m)+(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_1\mu_4)\mu_6^m],\ m=0,1,2,\cdots \tag{35}$$

可以证明由(31)～(35)式定义的5个序列均是单调上升的，且以 $\bar{\eta}^{-1}$ 为极限，容易算得 $\bar{\eta}^{-1}=2.6392\%$

即 $$\lim_{n\to\infty}\eta_n=\bar{\eta}^{-1}=0.026392 \tag{36}$$

上式表明，无论这笔基金用于多长年份的奖教金，在现行银行存款利率及现行国库券利率水平下，每年奖金的总额不超过基金总额的2.6392%。

3.3 基于百年校庆的最佳投资模型

如果学校希望将校庆年度的奖金在上一年度的基础上提高 γ，那么需要对问题1及问题2的模型作一些修正。

用 y'_n 表示第一年发的奖金额，其它仍采用3.1节的记号及处理方法，则应有

$$\begin{cases} r_kM_k=y'_n & k=1,2,\cdots,n-1,n\neq 3 \\ r_3M_3=(1+\gamma)y'_n \end{cases} \tag{1$'$}$$

$$r_nM_n=y'_n+M \tag{2$'$}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = M \tag{3)'$$

由(1)′～(3)′式得到

$$y'_n = y_n / T_n \tag{4)'$$

其中
$$T_n = 1 + \gamma S_3 / \sum_{i=1}^{n} S_i \tag{4)''$$

$$\begin{cases} M_k = S_k y'_n & k = 1,2,\cdots,n-1, k \neq 3 \\ M_3 = S_3(1+\gamma) y'_n \end{cases} \tag{5)'$$

$$M_n = S_n(1 + S_3\gamma + \sum_{i=1}^{n-1} S_i) M / (S_3\gamma + \sum_{i=1}^{n} S_i) \tag{6)'$$

记

$$\eta'_n = y'_n / M = \eta_n / T_n$$

易证
$$\lim_{n\to\infty} T_n = 1 + \gamma S_3 \lim_{n\to\infty} \eta_n \tag{7)'$$

根据 n 取值的不同，可得到与(21)～(25)式及(31)～(35)式类似的公式，不过此时已无周期可言。

利用模型一至三对 $n = 10$，我们获得了表3所给的最佳存购方案。对于表3中的模型三，A 表示只考虑存款方式，B 表示可存款可购国库券方式。

表 3　最佳投资 M_k 分配表(单位:万元 精确到0.1万元，$\gamma = 0.2$)

M_K \ k		1	2	3	4	5	6	7	8	9
模型一		107.9	105.7	103.1	101.3	98.5	96.7	94.8	92.5	90.8
模型二		125.3	122.7	119.8	115.9	113.9	108.9	107.0	104.8	102.2
模型三	A	105.6	103.5	121.2	99.2	96.5	94.7	92.8	90.6	88.9
	B	122.6	120.2	140.7	113.5	111.5	106.6	104.7	102.6	100.1

3.4　结果分析

我们给出的是最保守的最佳基金使用方案。对于问题2，国库券放行时间的不确定性，对方案有一定的影响，进一步的分析，可以看出，这一影响是比较小的，如果考虑一定的风险承受能力，这一方案还可做得更好一些。

4　参赛论文评述

总的来说，参赛队在三天的时间里，都能按照本题要求完成任务，结果是令人满意的，下面对参赛论文作一简单评述。

4.1　关于假设

绝大多数参赛队对此问题都给出了较为合理的假设，并对假设作了必要的验证。对于假设过程出现的下面几个问题，我们做了相应处理：

1)　有几个参赛队根据财政部2001年5月8日颁布的关于国库券提前支取的相关规定，对问题2，假设国库券可以提前支取，但忽略了提前支取需要支付2‰手续费的事实。

2)　有少数队假设每年的奖金分上、下半年两次发放。

3)　部分参赛队，假设各年奖金的期望值相等。

4) 有少数参赛队假设每年国库券定时发行(例如7月1日等)。

5) 极个别的队,银行利息计复利,或者给出所谓的4年存款的平均利率。

对于1) ~ 3),评卷时做了放宽处理,只要模型正确,论文仍被认为是较好的,有的可能还被选为优秀论文。对于4)、5),评卷时,我们认为是不合理的假设。

4.2 关于模型求解

在合理假设下,建立的数学模型,参赛队给出了下述几种主要数学解法。

1) 用穷举法,找出最佳的基金使用计划具有周期性,并用归纳法证明了该结论。

2) 用非线性规划(或线性规划)方法,证明最佳使用计划具有周期性。

3) 用图方法找出最佳使用计划的周期性,并用归纳法证明该结论。

4) 对于第2问,比较了一年里国库券发行时间对结果的影响。

5) 只给出 n 年存购的一般模型,没有利用题目所给出的数据简化模型,但却用 Mathematica 或 Matlab 直接给出最优解。

评卷时,我们认为1) ~ 4)的解法都是较好的方法,5)虽然也能给出最优结果,但模型太一般化,没有特点。

6) 对于第3问,少数队仍将此问题看作周期存购问题,其解法是不正确的。

参考文献:

[1] 姜启源.数学模型[M].北京:高等教育出版社,1998

[2] 朱道元.数学模型精品案例[M].南京:东南大学出版社,1999

The Comments and Models of Found Investment

CHEN En-shui, SUN Zhi-zhong

(Department of Applied Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract: In this paper, we give a refrence answers to the found investment. Some excellent methods and defects proposed by the students participating in the contest for answer to this problem are introduced and reviewed.

Key words: investment; mathematical modeling; nonlinear programming problem