

# 高校学费合理性研究

## 摘要

教育是关系到国计民生和国家发展的重大问题，而学费对教育事业的发展和社会稳定发展有重要影响。本文探讨了影响高等教育学费标准制定的问题，依分析的出发点和侧重点不同，我们建立了如下两个模型，确定出最合理的学费数额。

学费标准的好坏体现在家庭负担和教育质量两个方面。通过研究发现，学费与家庭负担和教育质量这两个因素紧密相连并且这两个因素相互制约，使学费稳定在一个范围内。在模型一中，通过查阅相关资料和建模分析，确定出学费和家庭负担以及学费和教学质量之间存在的函数关系，并选取了适当的曲线进行拟合。然后将这两条曲线按一定的权重加权综合，得到了综合满意度和学费间的关系。通过求出综合满意度的最高点从而确定出最合适的学费值。

模型二中采用工业中投入—产出模型里常用的 Cobb-Douglas 生产函数，将各个参量赋予新的含义后移植到了教育系统中。特别地，我们还参照体现教育收益的 Mincer 收益率定义了教学效率这一参量并代入到模型里。之后我们对 1998~2007 年全国相关数据进行最小二乘回归估计，得到了几个具体参数的值，从而完全确定了教育的“生产函数”。再收集了三所高校（一所重点本科，一所普通本科和一所大学专科）学费等相关信息后，代入到函数中，得出了它们的教学质量系数，再由模型一里的学费和教学质量间的公式确定出它们最合适的学费值。从而为它们学费的调整提出了建议。

模型三采用了数据分析法对影响学费的各方面因素进行了详尽的分析，定出了学费的上下界。并且能够对将来的学费走向进行预测，具有很好的指导意义。

然后，我们对模型一里的综合满意度加权因子  $p$  的取值进行了灵敏度分析，发现  $p$  的取值对结果的影响不大。从而证实我们得出结论的可靠性。

在模型扩展里对模型一进行了分学校专业的讨论，对三种不同类型的专业（人文类、理工类和艺术类）给出了参考的学费值和综合满意度系数。

最后，我们把建模分析得到的结果结合实际国情思考进行总结，给相关部门写了一份报告，提出了我们对学费标准的一些建议。

**关键词：**曲线拟合 Douglas 生产函数 Mincer 收益率

## 一、问题重述

高等教育事关国家发展，高素质人才培养等国家大计，因此一直受到政府以及社会各方面的高度重视和广泛关注。而要确保有良好的高等教育质量，必须有相应的经费保障。

高等教育的经费由政府拨款，社会筹集，学费收入等几部分组成。如果学费过低会导致学校财力不足无法保证学生培养质量，而过高的学费又会加重家庭的负担，是一个敏感而复杂的问题。因此有必要在学校教学质量和学生家庭负担之间找到一个平衡点。

本题就学费和教学的各方面经费在权威网站和书籍上搜集了大量真实可信的资料，并以这些资料为据，找到了影响学费的各方面因素，最终确定了合适的学费数额。

## 二、问题分析

本题中涉及学费对学校教学质量和家庭负担两方面的影响。题目十分开放，没有给出固定的影响因素和数据。在查阅资料后我们决定采用如下几个主要影响因素。

学费，国家拨款等资金方面的因素和科研水平，教职工人数等科研方面的因素以及学校本身的运转效率共同决定教学质量。在理想化情况，学校尽一切可能施教，且教学过程和学生态度都不出问题，那么学校的教学质量就只与资金投入有关。

学费以及家庭收入、贫困生的助学金助学贷款决定学生家庭负担。家庭负担就可以由学费里除去助学金和助学贷款后学费占收入的比重来衡量。

将教学质量和家庭负担用归一化处理后的参量来表示，最后再把两者适当加权得出综合的满意度函数，找出使该函数最大的学费值，定为最合适学费。

## 三、模型建立：

### 3.1 模型一：满意度曲线拟合模型

#### 3.1.1 模型假设：

1. 学校方面全力施教，即学校所得资金除了必要的花销以外，全部用于对学生的教学投入，以提高教学质量。
2. 学生都勤奋好学：只要学校提供良好的教学环境和资源，自身都会努力学习保证教学质量的提高。
3. 把学生分为贫困生和非贫困生，对每类里的学生的条件视为完全相同：收入，贷款取人均值。
4. 对学校 and 个人的资金来源和去向，只取数额和影响最大的几项，其余收支忽略不计。

#### 3.1.2 符号约定：

$S$ : 综合满意程度

$S_1$ : 家庭对学费的满意度

$S_2$ : 教学质量满意度

$f_1(x)$ : 贫困家庭对学费的满意度函数

$f_2(x)$ : 非贫困家庭对学费的满意度函数

$g(x)$ : 学费与教学质量之间的函数

#### 3.1.3 模型建立：

综合满意程度  $S$  是由家庭对学费的满意度  $S_1$  和教学质量满意度  $S_2$  两部分构成。而  $S_1$  又可分为非贫困家庭和贫困家庭对学费的满意度，由满意度曲线  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  决定； $S_2$  由生均培养费用（包括学费，国家财政拨款，学校自筹资金和社会捐赠）决定。再将两者指数加权后就能得到综合满意度  $S$ 。之后就能通过  $S$  找到合适的学费。

##### 1. 家庭对学费的满意度：

我们把家庭满意度系数  $S_1$  定界处理，取值范围为  $[0,1]$ 。当学费为 0 时，家庭无负担，仅从家庭负担角度来看，是最令人满意的，此时满意度为 1。当学费多到一定程度时，家庭负担过大，无法接受这样的学费，家庭极度不满意，所以满意度为 0。

经过调查以及查找相关资料，我们发现当学费为家庭年人均收入的 4 倍以上时，家庭会因不堪重负而不能接受，此时  $S_1$  为 0，学费大于此数时满意度一律为 0。而学费为家庭人均收入的 80% 时，这是人心理满意的临界点，多于此数满意度会急剧下降，而到达它之前满意度变化相对平缓。我们称此点为阈值点  $a$ ，并

考虑到实际情况，把这点的满意度赋值为 0.9。

从以上分析可以看出满意度曲线是这样一条曲线：当学费从 0 到达阈值点  $a$  之前，满意度由 1 平缓下降到 0.9。之后则迅速下降直至 0。这非常符合指数函数的特性，借鉴二极管的电压与电流的函数关系<sup>[7]</sup>，我们设此函数为这样的形式：

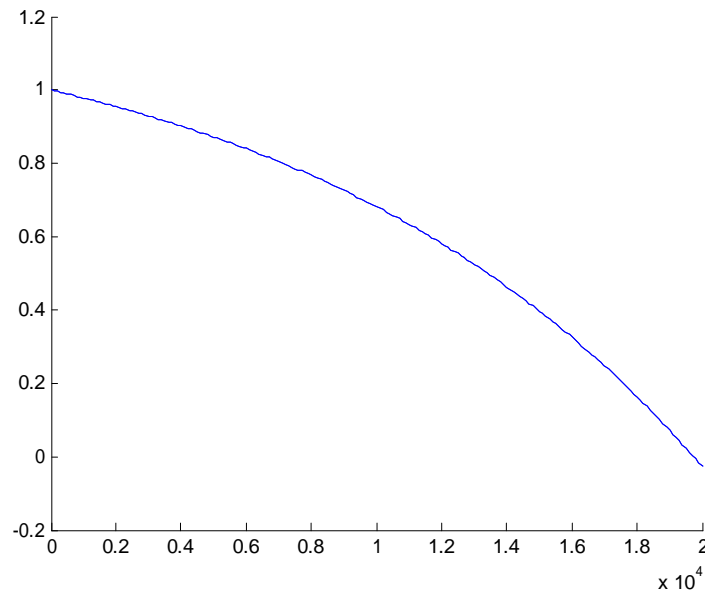
$$f(x) = \begin{cases} 1 + a - a * e^{bx} & 0 < x \leq \ln[(1+a)/a]/b \\ 0 & x > \ln[(1+a)/a]/b \end{cases}$$

由于贫困和非贫困家庭的收入差别明显，其对学费承受能力的满意度区别也很明显，而且贫困家庭还涉及助学贷款和学费减免等优惠。我们对两者分别进行了曲线拟合。

#### 1) 贫困家庭的学费的满意度曲线拟合。

国统局的数据显示近几年贫困家庭的人均收入为 5000 元左右<sup>[4]</sup>，它的 80% 为 4000 元，此时  $a$  为 (4000, 0.9)。考虑到助学贷款和学费减免因素，根据国统局的数据算出贫困家庭生均助学贷款数为 167.8 元<sup>[6]</sup>，由几所学校的统计数据看，学费减免所占的数额大致为助学贷款的 1/5 33.7 元，那么贫困学生能得到的补助数总共约为 200 元。因此家庭满意度曲线  $s_1$  上的阈值点  $a$  的横坐标应该右移 200，变为 (4200, 0.9)，曲线在  $4 \times 5000 = 20000$  处递减至 0，学费再多一律视为极度不满意不会接受。

用 matlab7.0 拟合出的曲线结果为：



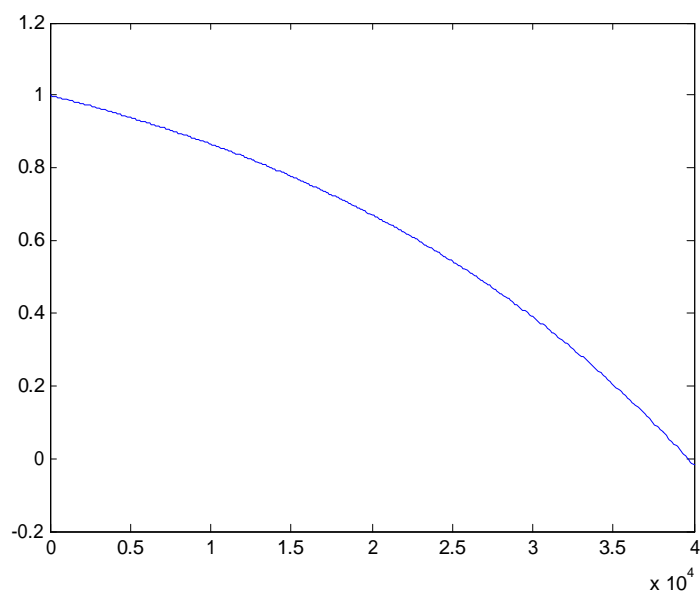
拟合函数为：

$$f_1(x) = \begin{cases} 1.26 - 0.26e^{0.00008x} & 0 < x \leq 20000 \\ 0 & x > 20000 \end{cases}$$

#### 2) 非贫困家庭的学费的满意度曲线拟合。

在国统局的网站上查得近几年非贫困家庭的人均收入在 10000 元左右<sup>[4]</sup>，所以阈值点  $a$  的坐标大致为 (8000, 0.9)，该曲线在 40000 时满意度递减至趋于 0。

用 matlab7.0 进行拟合得到的曲线为：



拟合函数为：

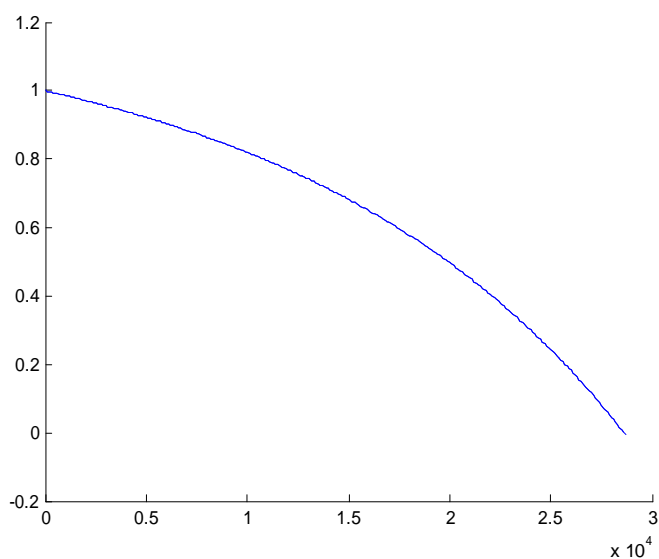
$$f_2(x) = \begin{cases} 1.3 - 0.3e^{0.000037x} & 0 < x \leq 40000 \\ 0 & x > 40000 \end{cases}$$

3) 综合的学费的满意度曲线。

根据网上查找到的数据，一个学校里来自贫困家庭的学生所占比例为 25%<sup>[6]</sup>，所以总的学费满意度曲线函数为：

$$f(x) = 0.25f_1(x) + 0.75f_2(x) = \begin{cases} 1.29 - 0.065e^{0.00008x} - 0.225e^{0.000037x} & 0 < x \leq 28600 \\ 0 & x > 28600 \end{cases}$$

其图像为：



## 2. 学校教学质量模型

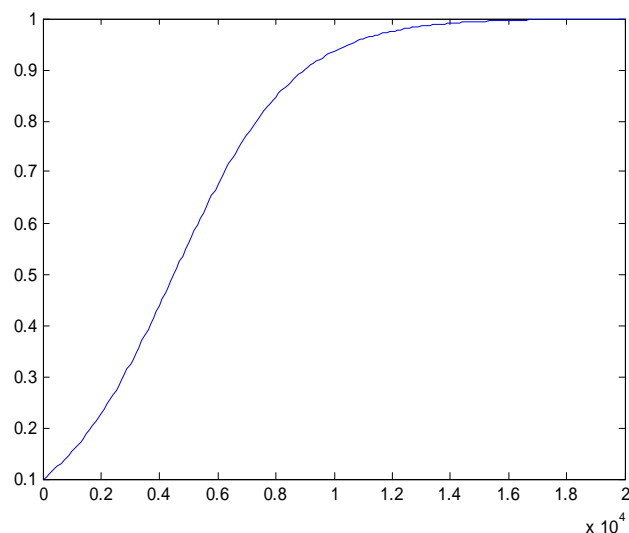
在学校全力施教，学生尽力学习的假设下。教学质量满意度仅和学校对学生的投入有联系：政府拨款，社会筹集，学费收入等。由于各项资金所占比例基本恒定，所以可以单独以学费作为教学质量的影响因素。根据搜集的资料，建立教学质量  $S_2$  和学费间的函数关系

类似学费满意度，教学质量  $S_2$  的取值也进行定界处理，范围为  $[0,1]$ 。 $S_2$  为 0 时看为没有学费投入； $S_2$  为 1 时视作教学资金无限充裕，教学质量最高。

当学费为 0 时，没有教学资金的投入，几乎无教学质量可言，此时  $S_2$  会维持在一个很低的水平，取为 0.1；而当学费足够大以后，可以看作资金足够任何教学使用，教学质量趋于最好，接近 1。但资金再多，教学质量也不可能超过 1，因此曲线趋于平缓。依据近几年的国家统计数据显示，高校的平均学费为 4500 元<sup>[5]</sup>。多于这个费用的学校一般是重点大学，教学质量会很好，而低于它的学校则大都质量不达标。可见，这个学费点是变化率最快的一点。考虑到教学质量函数符合以上内容，我们选择了能够很好地满足了上述所有要求的 logistic 曲线<sup>[1]</sup>。根据具体条件，变化最快的点就是  $(4500, 0.5)$ 。所以，教学质量函数为：

$$g(x) = \frac{1}{1 + 9 * e^{-0.0004883 * x}}$$

曲线为：



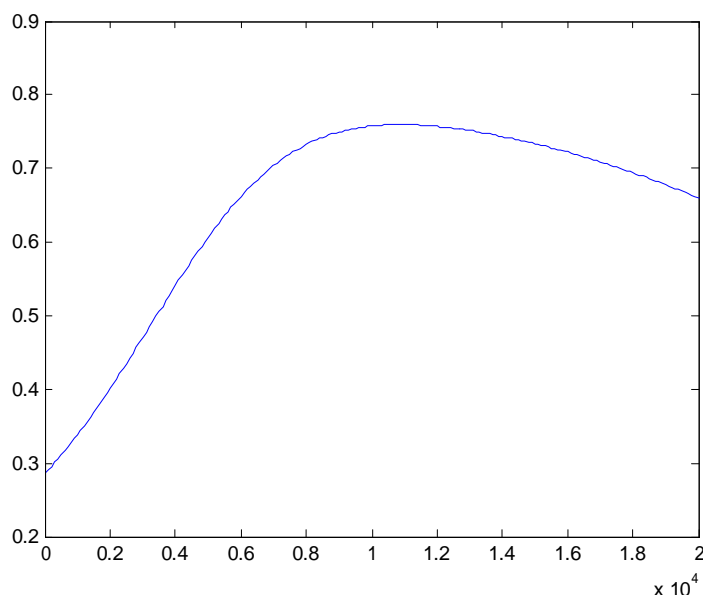
## 3. 综合满意度模型

$S$  应通过学费满意度  $S_1$  和教学质量  $S_2$  加权得到。考虑到当  $S_1$  极小，家庭根本无法承受学费极不合理； $S_2$  极小，教学质量极差无法接受时总的合理程度  $S$

都会极低。只有当两者相对都很高时  $S$  才会高，所以采用如下相乘加权：

$$S = S_1^p S_2^q \quad (p+q=1)$$

考虑到教学质量影响的是一个学生的一生，而学费只是影响一个家庭 4 年，所以我们取  $p=0.4$ ， $q=0.6$ 。由此得到以下曲线：



当学费达到 8170 元时，综合满意度最高，达到 0.7595

综合以上结果可以得出，现阶段的学费虽然比较高，但在保证在学费适度增高后教学质量也能有显著增长的前提下，应该适当提高学费，以保证获得更高的教学质量，使学生家庭和社会更加满意。

## 3.2 模型二：投入—产出模型

### 3.2.1 模型分析：

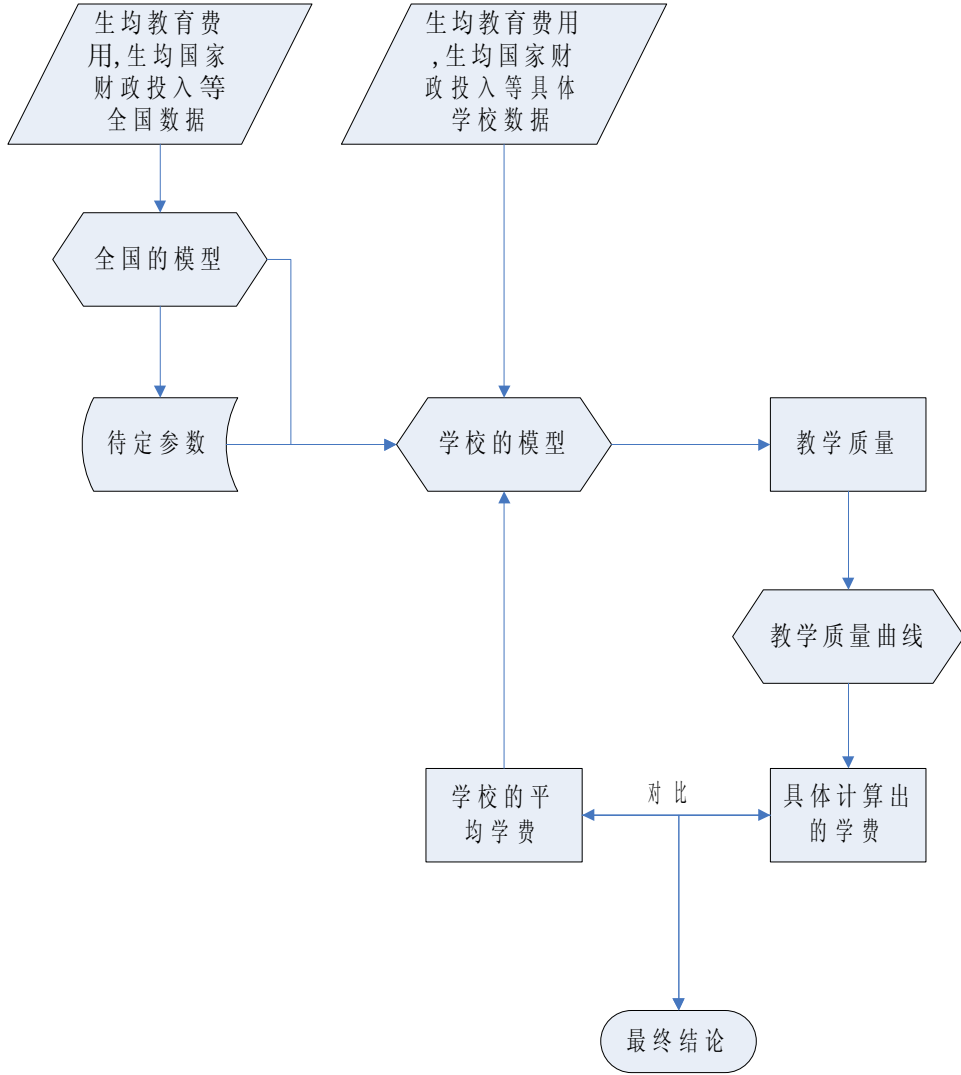
模型一的教学质量只是跟学费有关，但其实还有很多因素都影响着教学质量。透过这众多因素，我们发现教育系统其实跟工业上的投入—产出系统有着极大的相似度，这一点从美国教育学者 Schultz 的论文中得到印证：“教育就是基于人的投资方式”<sup>[9]</sup>。我们对教育投入了人力、物力、财力，收获的是人才，这一点跟工业投资一致，说明我们有理由把教育系统用投入—产出模型来刻画。

### 3.2.2 模型假设：

1. 模型所采用的数据均真实可信。
2. 学校依各自水平全力施教，学生勤奋好学且学习能力相差不多。
3. 各高校的模型服从于全国模型，且参数相同。

### 3.2.3 模型建立：

下面的流程图反映了我们的模型建立过程：



这里，我们采用了工业上投入—产出模型里常用 Cobb-Douglas 生产函数构建模型<sup>[8]</sup>，有：

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta} e^{\varepsilon}$$

其中  $Q$  为产出， $A$  为生产效率， $K$  为资本投入， $L$  为劳力投入， $\alpha$  和  $\beta$  分别为资本和劳力的产出弹性， $\varepsilon$  是随机扰动项，表示出了资本和劳动外的因素对生产的影响。

为了把这个模型应用到教育系统中，我们对模型进行改进，并给相关参量赋予了新的定义：

$$Q = AK^{\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2} L^{\beta_0 + \beta_1 X_1} e^{\varepsilon}$$

这里  $Q$  为教育系统的产出，即人才，由于这个生产函数是对整个中国的高等教育系统而言的，所以我们把高校在校生以及具有同等学历的人占总人口的比例作为教育系统的产出  $Q$ 。 $A$  表示教育的“生产效率”，这点在接下来会有详细说明。 $K$  则表示教育的资金投入。 $L$  表示教育的劳力投入，这里，我们用高校教职



工总数代表它。 $X_1$ ,  $X_2$  是资金投入里面比例最大两项的比例, 分别代表国家财政投入和学费收入占总投入的比例。 $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_0$  分别代表国家财政投入和学费收入 (即  $X_1$  和  $X_2$ ) 对资本的弹性影响系数以及其他费用对资本的弹性影响系数。 $Y_1$  表示教职工中专任教师所占比例, 体现了教职工的“质量”。 $\beta_1$  和  $\beta_0$  分别表示了专任教师比例 (即  $Y_1$ ) 对劳力的弹性影响和其他因素对劳力的影响,  $\varepsilon$  仍为随机扰动项。

这里, 我们着重介绍教育的“生产效率”系数  $A$  的计算方法。为此先要说明一个用于衡量国家教育收益的量: Mincer 收益率。

Mincer 收益率的定义是平均每多接受一年教育对将来工资额上涨的比例<sup>[10]</sup>, 其中  $C_0$  表示在接受某项教育前的工资,  $C$  表示接受这项教育后的工资,  $t$  表示这项教育年限。那么这项教育的 Mincer 收益率就是  $\frac{C-C_0}{t}$ , 间接表示了这项教育的“效率”。

现在, 我们定义  $R_0$  为高中毕业生的平均工资,  $R$  为经历高等教育后的平均工资,  $Y$  为高等教育年限。那么, 高等教育的 Mincer 收益率就是  $\frac{R-R_0}{Y}$ 。我们考虑到除了 Mincer 收益率外, 学生的投入 (学费) 也是反映教育

“效率”的重要因素, 因此, 我们得到以下公式:

$$A = \frac{R-R_0}{KX_1Y}, \text{ 其中 } KX_1 \text{ 代表学费。} A \text{ 为教学的效率}$$

之后我们将 1996-2007 年的高校生比例、生均教育费用 (万元)、生均国家财政投入占生均教育费用的比例、学费占教育费用比例、生均高校教职工数、专任教师占教职工总数比例、高校生毕业平均工资等相关统计数据, 即将  $Q$ 、 $K$ 、

$X_1$ 、 $X_2$ 、 $L$ 、 $Y_1$ 、 $R$  等的观测值代入模型中进行最小二乘法的回归估计。数据来源于 1996~2007 年《中国统计年鉴》,《中国教育经费统计年鉴》及《全国教育事业发展统计公告》等。

### 3.2.4 模型计算:

将等式两边取对数, 变形为:

$$\ln Q = \ln A + (\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \ln K + (\beta_0 + \beta_1 Y_1) \ln L + \varepsilon$$

整理后得到

$$\ln Q = \ln A + \ln K \times \alpha_0 + X_1 \ln K \times \alpha_1 + X_2 \ln K \times \alpha_2 + \ln L \times \beta_0 + Y_1 \ln L \times \beta_1 + \varepsilon$$

这是一个多元线性回归问题，运用 MATLAB 对数据进行处理（取显著性水平  $\alpha=0.05$ ）后<sup>[2]</sup>，得到：

$$Q = AK^{0.3X_1+0.9X_2}L^{0.03+0.11X_1}$$

统计系数  $R^2 = 0.995$ ， $F = 473.35$ ， $S^2 = 1.17$

以上是我们使用全国的统计数字推导出的公式，下面我们把数据具体到各个学校。

我们收集三所高校  $M$ ， $N$ ， $L$  的相关数据进行进一步分析。其中  $M$  是一所重点大学， $N$  是一所普通大学，而  $L$  是一所大专院校。收集到的数据如下<sup>[3][5]</sup>：

学 校 项 目	M	N	L
生均教育费用（元）	31082	12544	8755
生均国家财政投入（元）	20672	3726	2531
平均学费（元）	6000	5000	4000
生均教职工数（人）	0.3	0.132	0.063
专职教师占教职工总数比例	0.631	0.542	0.426
毕业生平均工资（元）	2989	2391	1800

同时，我们把教育投入—产出公式作了细微修改，我们赋予  $Q$  新的含义为学校教学质量，并令全国平均教学质量为  $\bar{Q}$ 。则每所大学的教学质量就为：

$$Q = \frac{AK^{0.3X_1+0.4X_2}L^{0.03+0.11X_1}}{\bar{Q}}$$

其中  $A$ 、 $K$ 、 $X_1$ 、 $X_2$ 、 $L$ 、 $X_1$  的含义不变， $Q$  的含义改变为大学的教学质量。将以上数据代入，我们算得三所高校  $M$ ， $N$ ， $L$  的教学质量  $Q$  分别为：0.7087，0.4114 和 0.2291。

之后，我们根据模型一里教学质量与学费的关系曲线算出它们相对应的学费：重点院校 6300 元，普通高校 3800 元和专科学校 2000 元。

### 3.2.5 模型结论：

这个结果说明了高校  $M$ （重点本科）的学费与它培养出的学生质量相符合，学费很合理。而高校  $N$ （普通本科）和高校  $L$ （大学专科）的收费就与养出的学生质量不符合，学费严重偏高，应该对它们的学费进行下调处理，或者促使它们提高各自的教学质量。

### 3.3 模型三：学费具体定价模型

上面的两个模型都没有对关乎到学费具体定价的高校教育费用和家庭收入这两方面的内容进行具体分析和计算，而这个模型正好补充了这方面。

### 3.3.1 模型分析：

在长期内, 大学学费受大学教育服务成本及家庭在教育方面的可支付能力。过高的学费会使很多学生无力支付, 过低的学费又使学校财力不足而无法保证教学质量。由此, 我们认为从家庭的角度出发, 大学学费的定价一定存在一个上限  $f_1$ , 然而从高等学校的角度出发, 大学学费的定价一定存在一个下限  $f_2$ 。当学费达到上限时, 平均家庭结余 (不支出学费时)  $F_1$  恰好能支付学费; 当学费达到下限时, 高等学校学费刚好能够填补高等学校的生均需款 (不收取学费时)  $F_2$ 。也就是说高等学校收费存在一个合理区间。

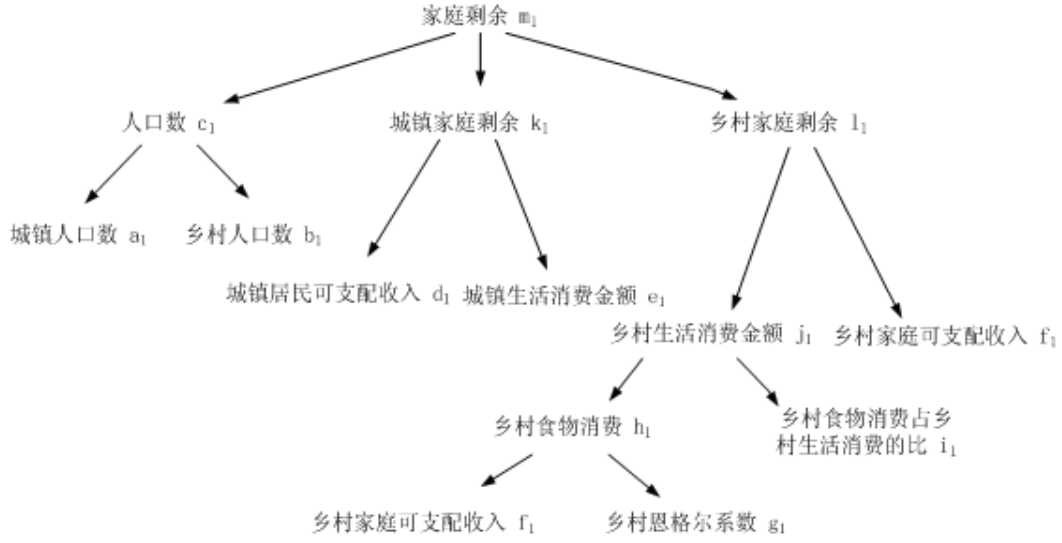
### 3.3.2 符号约定：

$a_1$ : 城镇人口数;  
 $b_1$ : 乡村人口数;  
 $c_1$ : 全国人口数;  
 $d_1$ : 城镇居民家庭可支配收入;  
 $e_1$ : 城镇的生活消费金额;  
 $f_1$ : 乡村居民家庭可支配收入;  
 $g_1$ : 乡村的恩格尔系数;  
 $h_1$ : 乡村家庭食物支出金额;  
 $i_1$ : 乡村食品支出占乡村生活消费的百分比;  
 $j_1$ : 乡村家庭生活消费金额;  
 $k_1$ : 城镇家庭剩余;  
 $l_1$ : 乡村家庭剩余;  
 $m_1$ : 全国家庭剩余;  
 $a_2$ : 生均预算内事业性经费拨款  
 $b_2$ : 生均教育附加拨款  
 $c_2$ : 生均基建拨款  
 $d_2$ : 生均社会捐赠  
 $e_2$ : 生均学校自筹  
 $f_2$ : 生均事业费收入 (非学杂费)  
 $g_2$ : 生均其他收入  
 $h_2$ : 生均国家拨款  
 $i_2$ : 学校生均收入 (非学杂费)  
 $j_2$ : 生均培养费用  
 $k_2$ : 学校生均需款

### 3.3.3 模型建立：

#### 3.3.3.1 从家庭角度考虑, 建立模型求解高等教育学费的上限值 $f_1$

1. 建立家庭剩余  $m_1$  模型，城镇家庭剩余  $k_1$  模型，乡村家庭剩余  $l_1$  模型  
由简单的统计知识可得



需要说明的是图中箭头的意思是由箭头所指向的几个因素可以求得箭头源因素。

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = a_1 + b_1 \\ k_1 = d_1 - e_1 \\ h_1 = f_1 * g_1 \\ j_1 = h_1 / i_1 \\ l_1 = f_1 - g_1 \\ m_1 = (k_1 * a_1 + l_1 * b_1) / c_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k_1 = d_1 - e_1 \\ l_1 = f_1 - f_1 * g_1 / i_1 \\ m_1 = (a_1 * (d_1 - e_1) + b_1 * (f_1 - f_1 * g_1 / i_1)) / c_1 \end{array}$$

上式中  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, i_1$  为可查统计量，可从文献<sup>[3]</sup>中获得。

即国家家庭剩余  $m_1$  模型、城镇家庭剩余  $k_1$  模型和乡村家庭剩余  $l_1$  模型为：

$$\begin{array}{l} k_1 = d_1 - e_1 \\ l_1 = f_1 - f_1 * g_1 / i_1 \\ m_1 = (a_1 * (d_1 - e_1) + b_1 * (f_1 - f_1 * g_1 / i_1)) / c_1 \end{array}$$

2. 利用国家家庭剩余  $m_1$  模型、城镇家庭剩余  $k_1$  模型和乡村家庭剩余  $l_1$  模型求  $m_1, k_1, l_1$  和高等教育学费的上限值  $f_1$ ：

- 1) 在文献<sup>[2]</sup>中找到 1996-2007 年的可查统计量数据如下：

可查统计量	城镇人口数 $a_1$ (万)	乡村人口数 $b$ (万)	全国人口数 $c_1$ (万)	城镇居民家庭可支配收入 $d_1$ (元)	城镇的生活消费金额 $e_1$ (元)	乡村居民家庭可支配收入 $f_1$ (元)	乡村的恩格尔系数 $g_1$ (%)	乡村食品支出占乡村生活消费的百分比 $i_1$ (%)
年份								
1996	37304	85085	122389	14516.7	11758.41	5778.3	48.76	56.33
1997	39449	84177	123626	15480.9	12556.92	6270.3	46.60	55.05
1998	41608	83153	124761	16275.3	12994.83	6486	44.66	53.43
1999	43748	82038	125786	17562.06	13847.73	6630.9	42.07	52.56
2000	45906	80837	126743	18840	14994	6760.2	39.44	49.13
2001	48064	79563	127627	20578.8	15927.03	7099.2	38.20	47.71
2002	50212	78241	128453	23108.4	18089.64	7426.8	37.68	46.25
2003	52376	76851	129227	25416.6	19532.82	7866.6	37.1	45.59
2004	54283	75705	129988	28264.8	21546.3	8809.2	37.7	47.23
2005	56212	74544	130756	31479	23828.64	9764.7	36.7	45.48
2006	57706	73742	131448	35278.5	26089.65	10761	35.8	43.02

2) 利用国家家庭剩余  $m_1$  模型、城镇家庭剩余  $k_1$  模型、乡村家庭剩余  $l_1$  模型和上述数据求出 1996-2007 年的  $m_1$ 、 $k_1$  和  $l_1$

年份	城镇家庭剩余 $k_1$ (元)	乡村家庭剩余 $l_1$ (元)	国家家庭剩余 $m_1$ (元)
1996	2758.29	3.08	842.86
1997	2923.98	-5.70	929.16
1998	3280.47	3.64	1096.47
1999	3714.33	-5.05	1288.54
2000	3846.00	4.13	1395.64
2001	4651.77	1.49	1752.77
2002	5018.76	8.03	1966.71
2003	5883.78	-1.73	2383.68
2004	6718.50	5.60	2808.91
2005	7650.36	-4.29	3286.44
2006	9188.85	5.00	4036.74

3) 对上述 1996-2007 年的家庭剩余  $m_1$ 、城镇家庭剩余  $k_1$  和乡村家庭剩余  $l_1$  分析，  
我们考虑极限情况，当家庭把全部剩余投入到高等教育支出上时，刚好能够维持正常生活，此时家庭教育支出即为高等教育合理收费的上限值  $f_1$ 。

从数据中可以看出，农村的家庭年剩余在 0 附近上下波动，说明农村发展极

其落后，城乡发展极不平衡，农村家庭工作一年几乎没有净收入，进而反映了农民普遍没有能力支付高等教育的收费（不考虑家庭有存款情况），现实的情况是很多农村大学生依靠国家助学贷款等其他资助方式支付高等教育支出。而农村人口众多，占全国人口的比例大，因此对国家家庭剩余  $m_1$  影响很大。

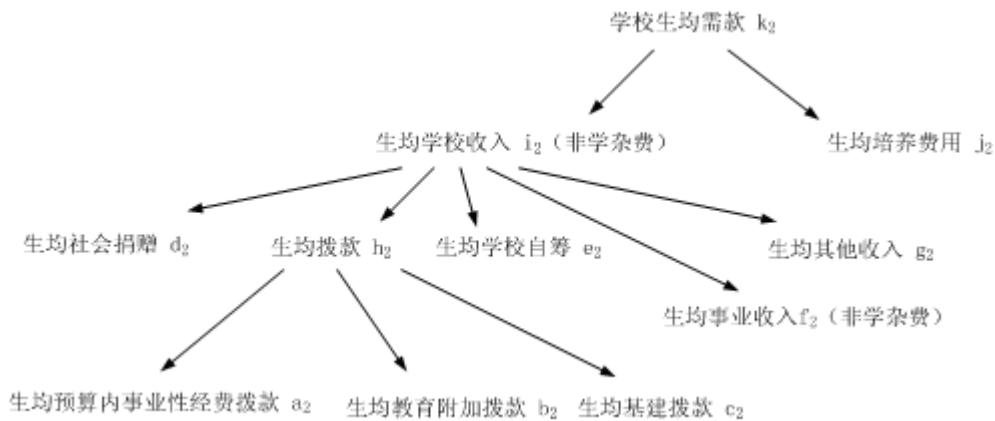
虽然国家在 2002 年实施了减轻农民负担的相应措施，但是由于农村发展的惯性，导致农村发展呈现滞后现象，因此农村不能在短时期内改变落后的现状。

鉴于这种情况，我们不能把国家家庭剩余  $m_1$  作为高等教育合理收费的上限值。但是我们可以确定高等教育上限值一定不会超过城镇家庭剩余  $k_1$ ，因而我们近似认为城镇家庭剩余  $k_1$  可以作为高等教育收费的一个上限，即  $f_1 = d_1 - e_1$ 。而

由于农村经济落后的影响，高等教育合理收费的上限值  $f_1$  一定小于城镇家庭剩余  $k_1$ ，且大于家庭剩余  $m_1$ 。我们需要特别指出的是必须加大对农村大学生的扶持力度，比如助学贷款等。

### 3.3.3.2 从学校角度考虑，建立模型求解高等教育学费的下限值 $f_2$

1. 由简单的统计知识可得



需要说明的是图中箭头的意思是由箭头所指向的几个因素可以求得箭头源因素。

$$\left. \begin{array}{l} h_2 = a_2 + b_2 + c_2 \\ i_2 = d_2 + e_2 + f_2 + g_2 + h_2 \\ k_2 = j_2 - i_2 \end{array} \right\} \Rightarrow k_2 = j_2 - (a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2 + f_2 + g_2)$$

上式中  $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, i_2, j_2$  为可查统计量，可从文献<sup>[2]</sup>中获得。

即学校生均需款模型  $k_2$  为：

$$k_2 = j_2 - (a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2 + f_2 + g_2)$$

2. 利用学校生均需款模型求高等教育学费的下限值  $f_2$

1) 在文献<sup>[3]</sup>中找到 1998-2006 年的可统计量数据如下（单位：元）：

统计 量 年份	生均预算 内事业性 经费拨款 $a_2$	生均教 育附加 拨款 $b_2$	生均基建拨 款 $c_2$	生均社会捐 赠 $d_2$	生均学校自 筹 $e_2$
1998	7923.2	218.9	1905.8	336.3	329.7
1999	8414.8	167.1	1808.0	391.1	300.0
2000	7786.5	149.1	1284.1	273.0	290.4
2001	7442.6	100.4	985.5	240.3	226.8
2002	7155.0	94.8	863.0	308.0	183.1
2003	6790.9	101.5	785.3	313.5	165.5
2004	6303.3	90.2	678.2	161.6	165.0
2005	6162.5	77.2	574.5	127.3	163.3
2006	6432.4	78.9	512.0	111.2	151.2

生均事业收入 $f_2$ (非学杂费)	生均其他收入 $g_2$	生均拨款 $h_2$	生均培养费用 $j_2$
2100.7	1022.0	10047.9	13990.8
2180.0	852.4	10390.0	15231.2
2182.6	834.4	9219.7	15586.4
2123.7	878.1	8528.5	15445.2
2311.9	774.2	8112.8	15119.6
1946.3	741.1	7677.7	14962.8
1813.5	930.5	7071.7	14928.9
1866.3	1113.8	6814.1	15025.5
2000.3	1137.0	7023.3	14899.6

2) 利用学校生均需款模型和上述数据求出 2000–2006 年的学校生均需款  $k_2$

年份	全国学校生均需款 $k_2$ (元)
2000	2786.25
2001	3447.91
2002	3429.61
2003	4118.70
2004	4786.73
2005	4940.69
2006	4476.70

3) 分学科讨论生均需款

由假设 6，将我国高校专业可以按以下文科、工科、农科、理科、医学、艺术六类分类，并且各类学科间的人均培养费用为为常数且成一定比例。

由文献<sup>[3]</sup>，得到我国各学科在校生人数占全部高等学校人数比例如下表：

年份	理学生占 在校生比 o	文学生占 在校生比 p	工学生占 在校生比 q	医学生占 在校生比 r	艺术学生 占在校 生比 s	农学生占 在校生比 t
2000	9.65	40.84	38.63	7.60	0.01	3.27
2001	9.96	44.70	34.64	7.36	0.75	2.59
2002	9.43	46.14	34.15	7.27	0.62	2.39
2003	9.06	48.02	33.32	7.35	0.01	2.25
2004	8.67	44.20	32.82	7.32	4.89	2.10
2005	6.20	44.29	35.07	7.25	5.22	1.97
2006	6.03	43.83	35.33	7.30	5.61	1.91

由文献<sup>[3]</sup>得到，文科类（含文学、哲学、法学、教育学、经济学、管理学）学科费用系数为 1；工科、农科类学科费用系数为 1.4；理科类学科费用系数为 1.6；医科、艺术类学科费用系数为 1.8。按照假设（6）和此结论，我们设文科类学生人均费用为  $w$ （元/每人每年），那么工科、农科学生人均费用为  $1.4w$ （元/每人每年），理科类学生人均费用为  $1.6w$ （元/每人每年），医科、艺术类学生人均费用为  $1.8w$ （元/每人每年）。

那么，我们得到这样一个式子：

$$k_2 = o \cdot 1.6w + p \cdot w + q \cdot 1.4w + r \cdot 1.8w + s \cdot 1.8w + t \cdot 1.4w$$

于是我们得到下表（单位：元）：

年份	理科每生每 年培养费用	文科每生每 年培养费用	工、农科每生 每年培养费 用	医科、艺术类 每生每年培养 费用	生均学校收 入 $i_2$
2000	19386.52	12116.58	16963.21	21809.84	13836.48695
2001	19404.21	12127.63	16978.69	21829.74	14113.43614
2002	19110.60	11944.13	16721.78	21499.43	12800.14853
2003	19069.08	11918.17	16685.44	21452.71	11997.31984
2004	18525.74	11578.59	16210.02	20841.46	11689.95284
2005	18707.43	11692.15	16369.00	21045.86	10844.06828
2006	18503.46	11564.66	16190.53	20816.39	10142.18988

由于生均需款=生均培养费用-生均教育经费支出，得到下表（单位：元）

年份	文科生均 需款	工、农科生均 需款	理科生均 需款	医科、艺术类生 均需款	全国学校生均 需款 $k_2$
2000	-683.572	4163.058	6586.373	9009.688	2786.25
2001	130.3127	4981.366	7406.892	9832.419	3447.91
2002	254.1752	5031.826	7420.652	9809.478	3429.61
2003	1074.105	5841.374	8225.008	10608.64	4118.70
2004	1436.397	6067.832	8383.55	10699.27	4786.73
2005	1607.366	6284.224	8622.653	10961.08	4940.69
2006	1141.767	5767.632	8080.564	10393.5	4476.70



在极限情况下，我们考虑极限情况，当学费恰好低到能弥补生均需款时，刚好能够维持学校正常教学，此时生均拨款即为高等教育合理收费的下限值  $f_2$ ，即  $f_2 = j_2 - (a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2 + f_2 + g_2)$ 。

观察上表中数据，我们发现 2000 年文科生均需款为负值，而且文科生均需款和工、农类相比，相差十分悬殊，理科的生均需款和工科的生均需款相差也十分明显，但近几年的理、工科生均需款相差不多，文科比理、工略小。因此，我们有理由相信文献<sup>[1]</sup>中各学科的比例系数不是十分合理。于是，我们对全国 2007 年 637 所高校中，随即收取出 10 所高校，应用点估计法，估计出文科类、理、工科类、农学类、医学类、艺术类的生均培养比例为 1: 1.3: 1.3: 1.08: 1.21: 1.96。经过我们的检验合理有效。于是我们运用这些数据 and 同样的方法得到下表(单位：元)：

我们在以后的叙述中生均需拨款都用高等学校所需收的最低学费来表示。

年份	文科高等学校所需最低学费	理、工科高等学校所需最低学费	农科高等学校所需最低学费	医科高等学校所需最低学费	艺术类高等学校所需最低学费
2000	596.50	2605.99	1668.23	3409.79	13457.27
2001	1334.63	3334.43	2401.19	4134.35	14133.31
2002	1413.44	3378.94	2461.71	4165.15	13992.69
2003	2230.74	4191.96	3276.72	4976.45	14782.55
2004	2419.69	4303.98	3424.64	5057.69	14479.10
2005	2534.30	4427.16	3543.82	5184.30	14648.61
2006	2047.61	3918.19	3045.25	4666.42	14019.30

上表的数据基本符合现在的情况，理、工科的学费相差不多，文科、农科学费比理、工学费略少，艺术类和其余学科相比相差较多，符合现阶段各学科实践成本等因素的差别。

### 3.3.3.4 模型求解和结果分析

由上面的模型得到：

$$\text{高等教育学费上限 } f_1 = d_1 - e_1$$

$$\text{高等教育学费下限 } f_2 = j_2 - (a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2 + f_2 + g_2)$$

结果和数据：

统 计 量	城镇学费上限 $f_1$	乡村学费上限 $f_1$	国家学费上限 $f_1$		
年份					
2000	3846	4.13	1395.644		
2001	4651.77	1.49	1752.772		
2002	5018.76	8.03	1966.713		
2003	5883.78	-1.73	2383.683		
2004	6718.5	5.60	2808.905		
2005	7650.36	-4.29	3286.441		
2006	9188.85	5.00	4036.735		
文科高等学校学费下限 $f_2$	理、工科高等学校学费下限 $f_2$	农科高等学校学费下限 $f_2$	医科高等学校学费下限 $f_2$	艺术类高等学校学费下限 $f_2$	全国学校学费下限 $f_2$
596.50	2605.99	1668.23	3409.79	13457.27	2786.25
1334.63	3334.43	2401.19	4134.35	14133.31	3447.91
1413.44	3378.94	2461.71	4165.15	13992.69	3429.61
2230.74	4191.96	3276.72	4976.45	14782.55	4118.70
2419.69	4303.98	3424.64	5057.69	14479.10	4786.73
2534.30	4427.16	3543.82	5184.30	14648.61	4940.69
2047.61	3918.19	3045.25	4666.42	14019.30	4476.70

结论:

由于城乡经济发展极不平衡, 现行的对于城乡大学生执行相同的高等教育收费标准显然欠缺合理性。建议加大农村大学生的贷款扶植力度。对于不同学科的专业由于培养费用的不同, 执行不同的收费标准是合理的。

### 3.3.3.5 短期高等教育学费定价合理区间的预测

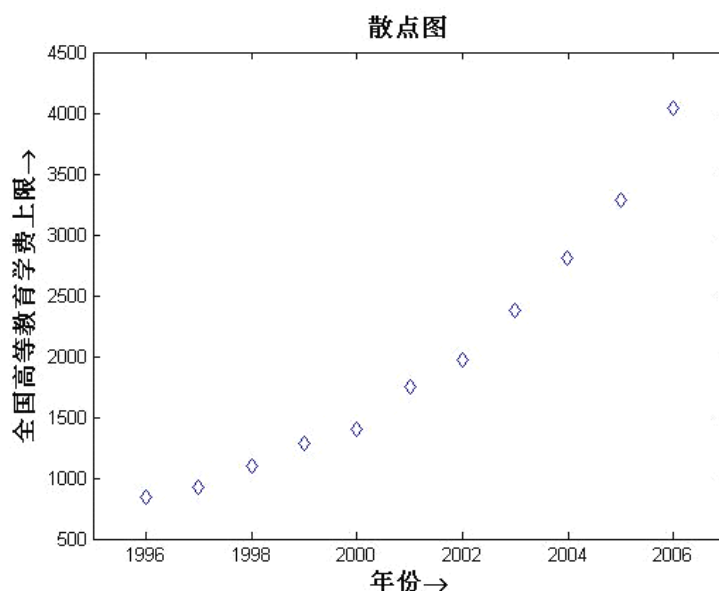
由于在以上建模的过程中, 得到了高等学校学费合理区间定价的上下限的时间序列, 于是我们想知道高等学费合理区间定价的上下限在短期内能保持原有趋势, 于是我们对高等学校学费合理区间定价的上下限进行了时间序列分析。

#### 1. 对于高等教育学费定价上限的预测

近几年的数据：

年份	学费定价 上限（元）
1996	842.86
1997	929.16
1998	1096.47
1999	1288.54
2000	1395.64
2001	1752.77
2002	1966.71
2003	2383.68
2004	2808.91
2005	3286.44
2006	4036.74

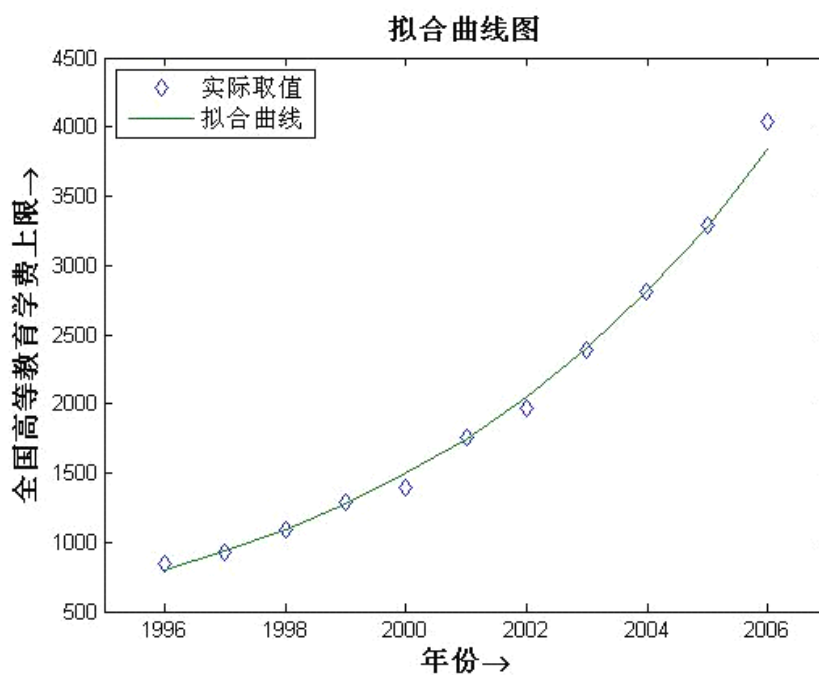
对这组数据我们利用 MATLAB 绘制了全国高等教育学费上限和年份的散点图。



从散点图的走向来看，大致符合指数模型，于是对全国高等教育学费上限取自然对数，然后利用 spss 对年份和全国高等教育学费上限的自然对数作了相关分析，得到如下数据  $R=0.998$ ， $\text{Std.Error of the Estimate}=0.03666$ ， $F=2019.507$ ， $\text{Sig}=0.000$ ，全国高等教育学费上限与年份的曲线拟合判定系数  $R^2=0.996$ ，这说明全国高等教育学费上限与年份存在这样的曲线关系。通过曲线估计，我们发现二者的相关关系非常显著，其中因变量全国高等教育学费上限中有 99.6% 是由自变量时间  $t$  引起的；在消除了自变量以及样本量的大小对全国高等教育学费上限的影响后，得到调整后的判定系数 (Adjusted R Square)  $=0.995$ ，接近于 1，这也从另一个侧面表明全国高等教育学费上限与年份的指数曲线拟合比较理想。其回归方程表达式如下：

$$F = e^{0.157t - 306.88}$$

拟合图形如下：



利用以上模型预测 2007 ， 2008 的高等教育学费定价上限为：

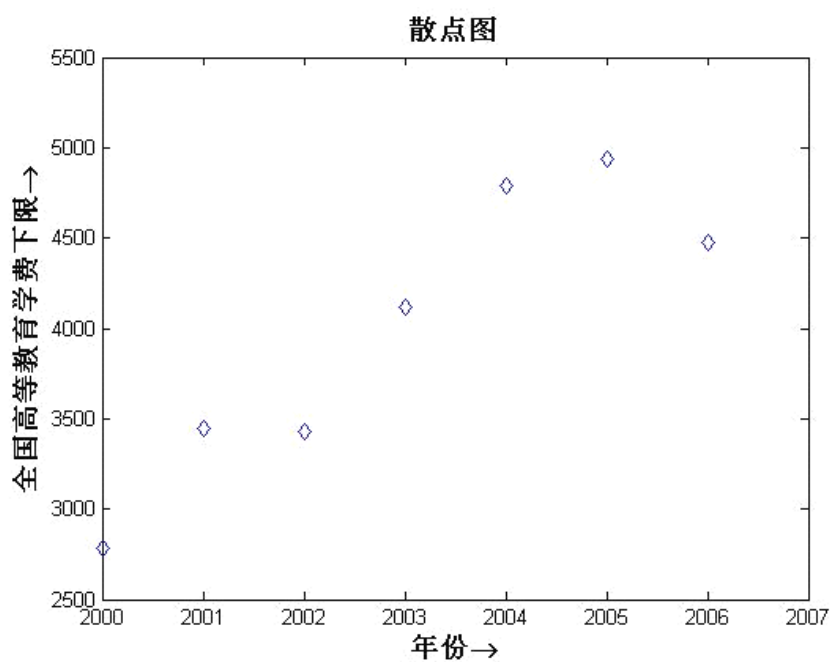
4492. 71 元                      5256. 96 元

2. 对于高等教育学费定价下限的预测

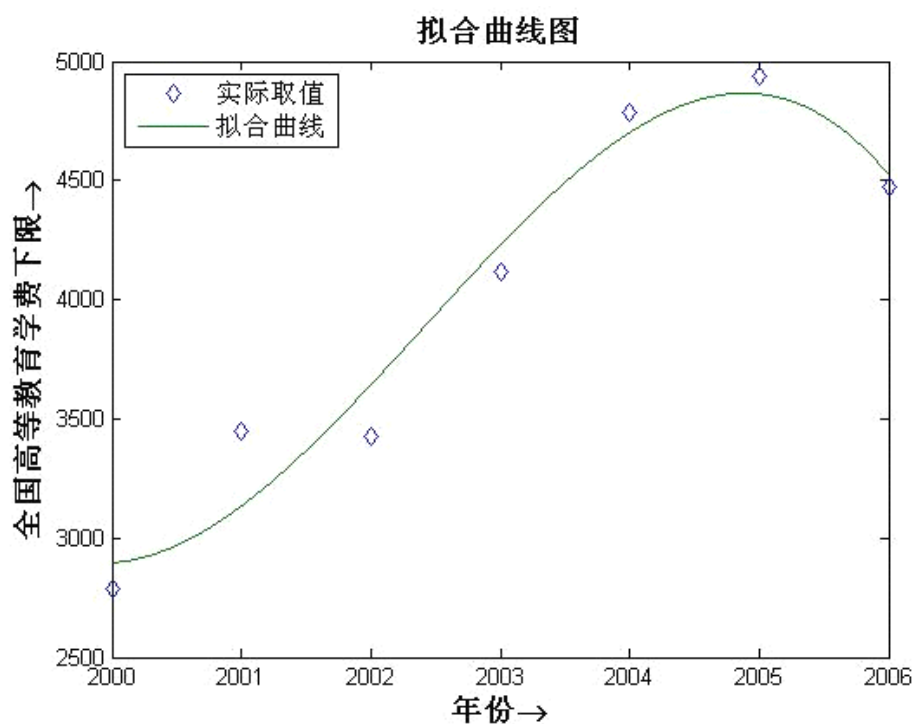
近几年的数据：

年份	学费定价下限（元）
2000	2786. 25
2001	3447. 91
2002	3429. 61
2003	4118. 70
2004	4786. 73
2005	4940. 69
2006	4476. 70

同样利用数据画出散点图， 如下：



对这组数据进行 3 次拟合，拟合结果如下：



$$F = -32.21x^3 + 193474.25x^2 - 387413697.56x + 258585903175.817$$

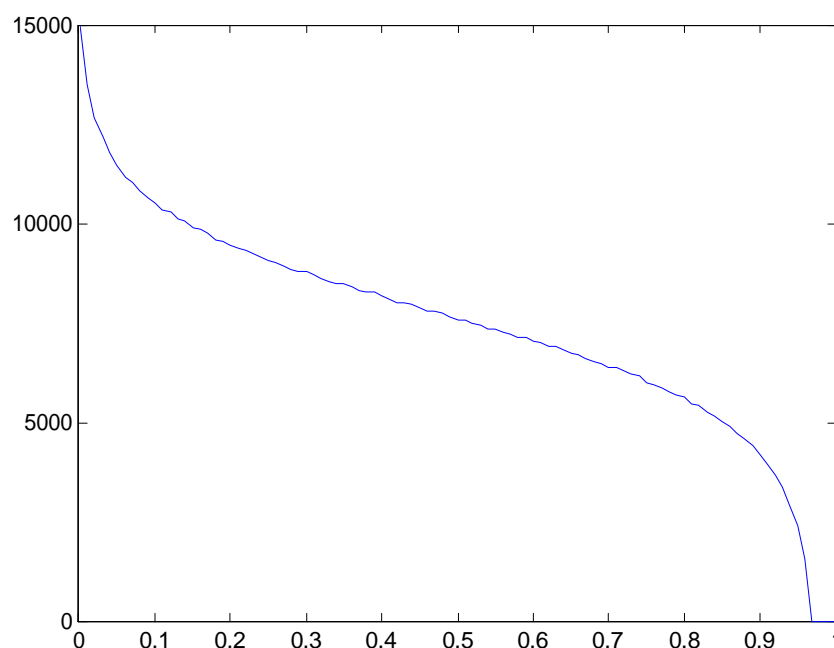
残差平方和为 428.9，比较小，基本可以用来预测短期。

利用以上模型预测 2007 的高等教育学费定价下限为 3496.49 元

#### 四、灵敏度分析

在模型一中，最后的综合满意度为： $S = S_1^p S_2^q$ ，（ $p+q=1$ ）。我们只是根据教学质量关乎到一个人的一生所以权重 $q$ 应大于 $p$ 。然而，当 $p$ 和 $q$ 取不同值时，情况又怎么样呢？

为此，我们绘制了当 $p$ 从0变化到1时的曲线如图：



从图中可以看出，当权重 $p$ 在区间 $[0.2, 0.8]$ 之间缓慢变化。然而当 $p$ 一旦超出这个范围，某一因素（家庭满意度或者教学质量）就会占据绝对的主导地位，导致学费值迅速下降或上涨。我们确定的 $p$ 为0.4时，学费为8170。当 $p$ 在这附近变化学费变化不是很大，因此我们的模型结果不会因 $p$ 的改变而产生太大变化。

## 五、模型评价

### 1. 模型优点：

- 1) 模型一考虑比较全面，同时考虑到学费在教学质量与家庭负担两个方面的影响。
- 2) 模型二成功的把工业上投入产出的模型推广到了教学系统上，并且相关参量相互对应。方法新颖，并且可以把这一模型推广到其他系统里解决相关问题。
- 3) 模型中包含了大量的曲线拟合，选用的拟合曲线所得结果与实际情况基

本吻合，具有合理性。

4) 模型三以学费为主体进行了详尽分析，结果详细并可做预测。

2. 模型缺点：

1) 模型一进行曲线拟合时，一些点的数值是自己定义的，权威度不够高；并且没有对不同学校不同专业进行区分。

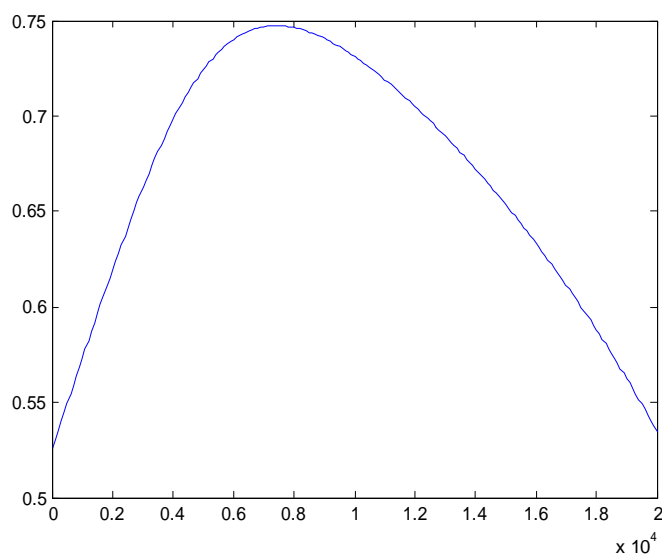
2) 模型二采用回归分析法，采用数据不是很多，结果可能不够准确。

3) 模型三采用大量数据分析法，理论依据不够充分。

## 六、模型拓展

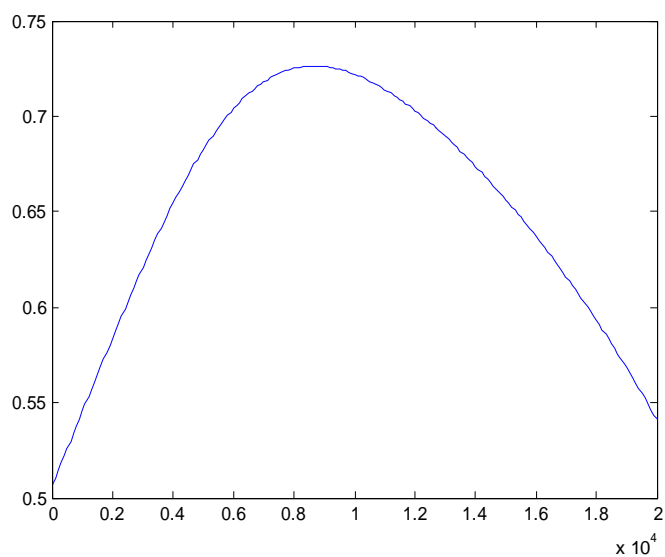
针对模型一中没有考虑不同学校专业的学费有显著不同，会对教学质量和家庭满意度产生影响。我们把模型一进行扩展，对不同类别学校专业进行考虑。调查显示，艺术类学校的平均学费为 10000 元，普通理工科为 5000 元，人文类为 4000 元<sup>[5]</sup>。分别以他们的学费值为基准构建教学质量和家庭负担拟合曲线，再把两者综合加权得到的综合满意度曲线为：

### 1. 人文类



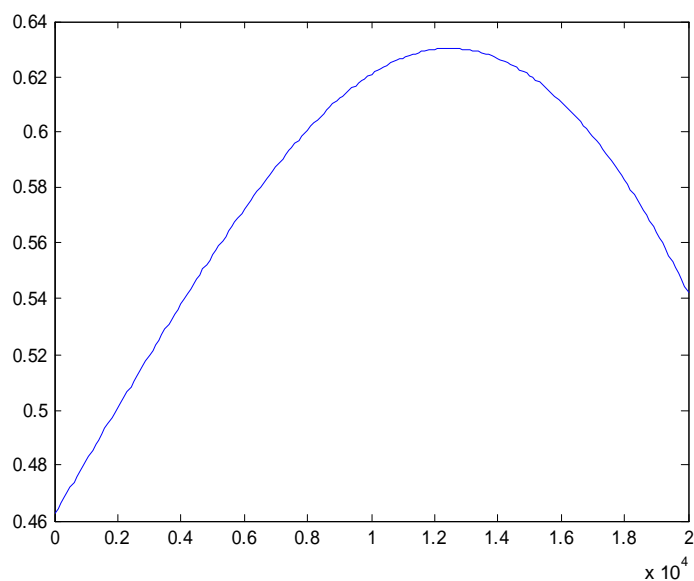
当学费达到 7407 元时，综合满意度最高，达到 0.7475。

### 2. 理工类



当学费达到 8667 元时，综合满意度最高，达到 0.7264。

### 3. 艺术类



当学费达到 12593 元时，综合满意度最高，达到 0.6302。

结论：

由此我们可以看出：由于三类专业的平均学费不同，因此教育质量函数曲线不一致，所以最后的综合满意度曲线也不同，从图中我们可以看出随着平均学费逐渐增高，三类专业达到综合满意度最高点的学费值也随之增加。并且由于家庭满意度“跳水”似的减少，所以综合满意度也降的很厉害，尤其是艺术类专业，最高点的综合满意度都只有 0.6302。

## 七、给高等教育相关部门的报告



随着社会主义市场经济的建立和高等教育投资体制改革的深入,我国高等教育事业持续健康发展,高校形成了多元化的筹资渠道,收费收入成为高校办学经费的重要来源之一。在高校收费总量急剧增加的同时,收费管理中存在的问题也逐步显现出来。1999年开始的扩招使得学生接受高等教育的几率大大提高,这有利于教育公平的实现。然而近几年来高校的收费标准有些混乱,各个省市不同,各个大学不同,各个专业学费也差别很大。

在论文中我们对学费标准的制定进行了讨论,并从多角度建模分析,得出结论是学费标准定在中等略为偏高的水平更为合理,同时适当地提高学生获得奖学金的金额和几率,为学生提供更多获得助学收入的机会。这就需要国家提高教育拨款,并且这与近几年来政策也是相吻合的。只有搞好教育,才能有更多高素质的人才为国家做贡献,促进经济的发展,从而有更充足的资金投入教育,从而形成良性循环。我们通过数据分析得出我国的Mincer教育受益率仅为8%~9%,而发达国家的指标为11%~12%,由此可见,我国的高校教育普遍存在效率偏低的问题。根据以上分析,我们认为对高校的资金调度进行大幅度的改革势在必行。

高校的运转经费,来自以下几个主要渠道:国家拨款、学校自筹资金、社会捐赠和学费收入等。在前面的模型显示,在现有教学质量下大部分高校收费过高,并且家庭负担相当大。因此需要国家加大教育投入力度改善教学质量,同时也能减轻学费从而减轻家庭负担。并且权威数据表明,教育经费相对于国内生产总值的比重,世界平均水平为4.9%,而我国的实际投入只有只有2.9%,在教育资金投入方面国家做的还远远不够。同时如何管理资金的筹集和分配,将对学校的教学质量和长远发展产生很大的影响。根据建模得出的结果,我们提议略微提高各高校的收费,同时增加助学金、助学贷款等,对缴纳学费困难的学生给予更多经济支持。对校内某些可以由学生完成的工作,可设为助学岗位。同时加强对各大高校费用支出的监管力度。在社会筹资方面,倡议更多的公司单位为学生提供假期实习的机会。

除了以上改善学费管理的措施,我们提议对高校的收费体制进行改革:制定高额的学费标准。学生在校期间无须交纳任何学费,但与校方建立借贷关系。学生毕业后收入达到某一额定值后,须全额交还学费。若收入一直维持低水准状态,只需缴付部分学费。这样不仅学校能够获得足够的学费收入,也能监督学校提高教学质量,为国家培养高素质的人才。同时提高了社会满意度,不会有学生困难以缴纳学费而影响学业。然而任何一项大幅度的改革都会对整个体系带来短期内的冲击,需要逐渐积累经验,在稳定和谐中逐步改进。所以我们的方案中在改革的初期,学生在校期间必须缴纳部分学费,对剩余部分采用新的制度,以免学校短期内资金短缺。

## 八、参考文献

- [1] 姜启源,数学模型(第三版)[M],北京:高等教育出版社,2003。
- [2] 薛定宇等,高等应用数学问题的MATLAB求解,北京:清华大学出版社,2004。

- [3] 数学中国,《中国教育经费统计年鉴 1996-2007》,  
<http://www.madio.cn/mcm/thread-16808-1-1.html>, 2008 年 9 月 19 日。
- [4] 中华人民共和国国家统计局,《中国统计年鉴(1996-2007)》,  
<http://www.stats.gov.cn/tjsj/nds/j/2007/indexch.htm>, 2008 年 9 月 19 日。
- [5] 新华网 2007 年高校本科学费一览  
[http://news.xinhuanet.com/edu/2007-05/12/content\\_6085469.htm](http://news.xinhuanet.com/edu/2007-05/12/content_6085469.htm), 2008 年 9 月 19 日。
- [6] 全国学生贷款管理中心 教育部高校贫困家庭学生资助工作简报  
<http://www.moe.edu.cn/edoas/website18/30/info21030.htm>, 2008 年 9 月 19 日。
- [7] 刘宝玲等, 电子电路基础, 北京: 高等教育出版社, 2006。
- [8] 汪长江, 高等教育投入产出效益基于经济学的分析与思考, 浙江海洋学院学报, 第 24 卷第 2 期: 112~113 页, 2008。
- [9] 袁连生等, 高等学校学生培养成本计量的案例研究, 教育研究杂志, 第 29 卷第 7 期: 133 页, 2005。
- [10] 张锦等, 教育投入与我国经济增长关系的实证研究, 石家庄铁道学院学报, 第 2 卷第 2 期: 29 页, 2008。