

全国数学建模竞赛优秀论文集

2007 年

前 言

数学建模是指利用数学方法和数学软件解决实际问题的过程，从 1994 年开始由教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办数学建模竞赛，每年一次。是目前我国规模最大的一项课外科技活动之一，其目的是培养学生的综合素质、创新意识和实践能力等。我校 2003 年首次组织本科生参加全国大学生数学建模竞赛，得到训练部教务处的全力扶持和学员旅、护理系的大力支持，发展至今，已建立了一个以科室主任为领导核心的数学建模指导教师团队，营造了领导关心数学建模、教师支持数学建模、学生喜欢参与数学建模的良好氛围。

2007 年我校共有 29 队参赛，11 个队参加甲组比赛，获全国一等奖 2 项、全国二等奖 1 项、重庆市一等奖 6 项；18 个队参加乙组比赛，获全国一等奖 3 项、重庆市一等奖 5 项、重庆市二等奖 6 项。我校获得全国奖的比例高出全国平均水平 11.37 个百分点。我校参赛队数占重庆市高校参赛队数的 5.66%，获全国一等奖队数的比例却高达 35.71%，彰显我校实力，为我校争得荣誉。

本册子收录了五篇在 2007 年全国大学生数学建模竞赛中获全国奖的优秀论文，都是在校大学生在三天之内完成的，问题来源于实际，文章思路清晰，方法多样，表述准确流畅，具有严密的逻辑性，具有一定的独到之处。可供参与数学建模竞赛的指导教师和学生参考。

数学与生物数学教研室

2008. 4. 10

目 录

2007 年获全国甲组一等奖	
中国人口增长的预测模型.....	李阳等 (4)
2007 年获全国甲组一等奖	
最佳公交线路的选择模型.....	胡小刚等 (22)
2007 年获全国乙组一等奖	
手机“套餐”优惠几何.....	龚科等 (40)
2007 年获全国乙组一等奖	
手机“套餐”优惠几何.....	李江华等 (60)
2007 年获全国甲组二等奖	
关于我国人口增长问题的研究.....	弓毅等 (84)

中国人口增长的预测模型

李阳、罗虎、陈道森

指导教师：罗万春

摘要：

本文研究的是根据中国实际情况，结合近年中国人口发展出现的新特点（老龄化加速、出生人口性别比持续升高以及乡村人口城镇化等），对中国人口的增长趋势做出中短期及长期预测的问题。首先，我们扩充了中国历年的总人口数据，建立了 BP 神经网络模型，对中国短、中、长期的人口增长分别做了简单预测；其次借用 Logistic 人口增长模型，将各种影响人口发展的因素归结到环境的容量因素中，建立了符合中国实际情况的人口增长模型，并编程求解。之后，我们对宋健人口模型进行了改进，建立了一阶偏微分方程模型，并借用高斯-赛德尔迭代法的思想将已预测出的数据加以迭代来预测下一年的数据，使该模型具有更好的时效性，利用 Excel 对所给数据进行统计和筛选，并用 Matlab6.5 编程实现，对中国人口发展进行了预测。最后我们以改进的宋健模型为基础，将农村人口城镇化的因素纳入考虑范围，提出了人口城镇化影响因子，从而建立了人口城镇化进程中的人口增长模型四。

四种模型均用 Matlab6.5 编程求解。从四个模型的结果中可以看出：短期预测时，Logistic 人口模型预测结果准确，而中长期预测时，偏微分方程更加优越。在 2045 年左右，中国人口达到峰值约 14.6 亿，之后在一个较小的范围内波动。而城镇人口增长模型和乡村人口增长模型更是从图像上直观地反映出未来中国人口发展的趋势，先是缓慢上升，到 2040 年左右人口达到一个最大值 14.5 亿，之后人口缓慢下降，到 2080 年时，中国人口约为 11.1 亿。模型四最能刻画我国人口发展趋势的特点。

本文的四种模型相互印证，相互补充，其中改进后的微分方程模型能推广用于多因素影响的预测问题。而模型四更是很好的描述了中国在城市化进程中的人口发展趋势，该模型不仅适用于中国，也同时适用与所有处于城市化阶段的发展中国家，有一定的创新。

关键词：人口预测 神经网络 Logistic 人口增长模型 宋健人口模型 偏微分方程 人口城镇化

1 问题重述（略）

2 模型假设

- (1) 将出生人口数、死亡人口数、老龄化、人口迁移以及性别比作为衡量人口状态变化的全部因素，不再考虑其他方面对人口状态的影响；
- (2) 所有表征和影响人口变化的因素都是在整个社会人口的平均意义下确定的；
- (3) 人口死亡率函数只依赖于各个年龄段，而与时间的流逝无关，即针对同一年龄段，假设人口死亡率在各个年份是相同的。

3 符号说明

- (1) $N(t)$: 时刻该地区的人口总数；
- (2) r_m : 人的最长寿命；
- (3) $F(r, t)$: 人口函数，表示该地区在 t 时刻时一切年龄小于 r 的人口总数；
- (4) $p(r, t)$: 人口年龄分布密度函数，表示在 t 时刻年龄为 r 的人口数，

$$p(r, t) = \frac{\partial F}{\partial r};$$

- (5) $\mu(r, t)$: 人口死亡率，表示在 t 时刻年龄为 r 的人口的死亡率；
- (6) $p_0(r)$: 初始时刻的人口密度， $p_0(r) = p(r, 0)$ ；
- (7) $f(t)$: 婴儿出生率， $p(0, t) = f(t)$ ；
- (8) $k(r, t)$: 女性性别比函数，表示时刻 t 年龄在 $[r, r + dr)$ 内的女性人数为 $k(r, t)p(r, t)dr$ ；
- (9) $\beta(t)$: 总和生育率，表示平均每个女性一生的总和生育数；
- (10) $h(r, t)$: 生育率分布函数，描述的是女性在各个年龄段生育率的高低；
- (11) σ : 人口迁移造成的妇女生育率改变的增长系数。

4 问题分析

对于我国这样的人口大国来说，人口问题始终是制约我们经济、文化等各方面发展的重要因素。如何准确地用数学语言和较为符合中国国情的实际因素来刻画人口的增长状况，为人口的预测提供一个较好的参考，是关系到国计民生的重要问题，也是本文的战略性的目标。

由于近年来中国的人口发展出现了一些新的特点，比如说老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，特别是计划生育政策的实施，都从不同程度影响着人口的增长，而这些因素是以前的人口预测中很难估料的。为此，如何综合考虑各方面的因素，较为准确地刻画出人口增长趋势，是本文要解决的重要问题。

关于人口预测方面，中外大批的科学家进行了长期艰苦的探索，为我们积累了丰富的经验。比如阻滞增长模型（Logistic 模型）、神经网络等，它们均是总人口随时间变化的规律的预测，不能很好刻画中国人口发展的新特点，即多因素影响，而偏微分方程能够很好的描述这些因素对人口增长的影响，因此可以利用偏微分方程对人口增长作预测并与神经网络和 Logistic 模型作比较。

5 模型的建立与求解

5.1 BP 神经网络模型

BP（Back propagation 反向传播）模型是一种用于前向多层神经网络的误差反向传播学习算法，它采用的是并行网络结构，包括输入层、隐含层和输出层，经作用函数后，再把隐节点的输出信号传递到输出节点，最后给出输出结果。该算法的学习过程由信息的前向传播和误差的反向传播组成。在前向传播的过程中，输入信息从输入层经隐含层逐层处理，并传向输出层。第一层的神经元状态只影响下一层神经元的状态。如果在输出层得到不同期望的输出结果，则转入反向传播，将误差信号（目标值与网络输出之差）沿原来的连接通道返回，通过修改各层神经元权值，使得误差均方最小^[1]。

由于 BP 神经网络法在预测模型中运用广泛，因此我们首先考虑到运用这一方法对近些年来中国的人口数据进行学习和培训，从而得到一段时间内的人口预测数据；同时，为了提高预测精度，我们采用回归预测的方法，将输出层的数据反馈到输入层作为已知数据，继续培训。比如我们有 N 组数据，我们可以利用回归 BP 神经网络法，通过软件 Matlab6.5 预测出第 $N+1$ 个数据，之后，我们将第 $N+1$ 个数据添加到前面 N 组数据中，构成 $N+1$ 个数据组，将这 $N+1$ 个数据作为已知数据，利用同样的方法再去预测第 $N+2$ 组数据，如此循环。我们将其用图形表示为：

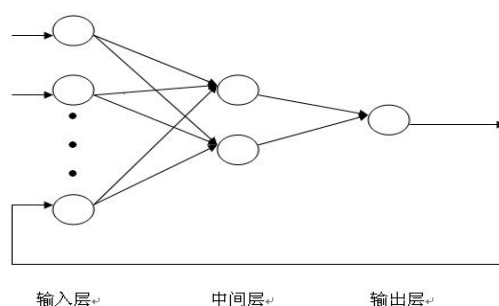


图 1 BP 网络模型图示

于是，我们得到第一个模型：

模型一：

$$\begin{cases} P(n+1) = T(P(1), P(2), \dots, P(n)) \\ P(n+2) = T(P(1), P(2), \dots, P(n+1)) \\ \dots\dots\dots \\ P(n+t) = T(P(1), P(2), \dots, P(n+t-1)) \end{cases}$$

模型说明： $P(n+1)$ 代表第 $n+1$ 年的人口总数， T 是 BP 神经网络的内部函数， $P(n+1) = T(P(1), P(2), \dots, P(n))$ 表示第 $n+1$ 年的人口数是前 n 年人口数的函数，依次类推。

另外，由于题目所给的人口数据只限于 5 年之内，且部分数据与实际情况相差较大。对于 BP 神经网络法来说，数据太少，预测的效果往往很差，因此，我们通过查阅相关资料^[2]扩充数据，得到 1978~2005 年我国的总人口数如表 1 所示：

表 1 我国 1978~2005 年人口数及构成

年 份	年底总人口 (万)	按 性 别 分				按 城 乡 分			
		男		女		城镇总人口		乡村总人口	
		人口数	比重 (%)	人口数	比重 (%)	人口数	比重 (%)	人口数	比重 (%)
1978	96259	49567	51.49	46692	48.51	17245	17.92	79014	82.08
1980	98705	50785	51.45	47920	48.55	19140	19.39	79565	80.61
1985	105851	54725	51.70	51126	48.30	25094	23.71	80757	76.29
1989	112704	58099	51.55	54605	48.45	29540	26.21	83164	73.79
1990	114333	58904	51.52	55429	48.48	30195	26.41	84138	73.59
1991	115823	59466	51.34	56357	48.66	31203	26.94	84620	73.06
1992	117171	59811	51.05	57360	48.95	32175	27.46	84996	72.54
1993	118517	60472	51.02	58045	48.98	33173	27.99	85344	72.01
1994	119850	61246	51.10	58604	48.90	34169	28.51	85681	71.49
1995	121121	61808	51.03	59313	48.97	35174	29.04	85947	70.96
1996	122389	62200	50.82	60189	49.18	37304	30.48	85085	69.52
1997	123626	63131	51.07	60495	48.93	39449	31.91	84177	68.09
1998	124761	63940	51.25	60821	48.75	41608	33.35	83153	66.65
1999	125786	64692	51.43	61094	48.57	43748	34.78	82038	65.22
2000	126743	65437	51.63	61306	48.37	45906	36.22	80837	63.78
2001	127627	65672	51.46	61955	48.54	48064	37.66	79563	62.34
2002	128453	66115	51.47	62338	48.53	50212	39.09	78241	60.91
2003	129227	66556	51.50	62671	48.50	52376	40.53	76851	59.47
2004	129988	66976	51.52	63012	48.48	54283	41.76	75705	58.24
2005	130756	67375	51.53	63381	48.47	56212	42.99	74544	57.01

数据来源：中华人民共和国国家统计局年度数据。

5.1.1 短期人口预测

以 1978—2005 年的人口数作为训练样本集，预测 2006—2010 年的人口数。利用 Matlab6.5 编程求解（程序见附录 1），为了便于对比，我们同时采用了 RBF 径向基神经网络法对近期人口发展进行了预测，得到如图 2 所示效果图：

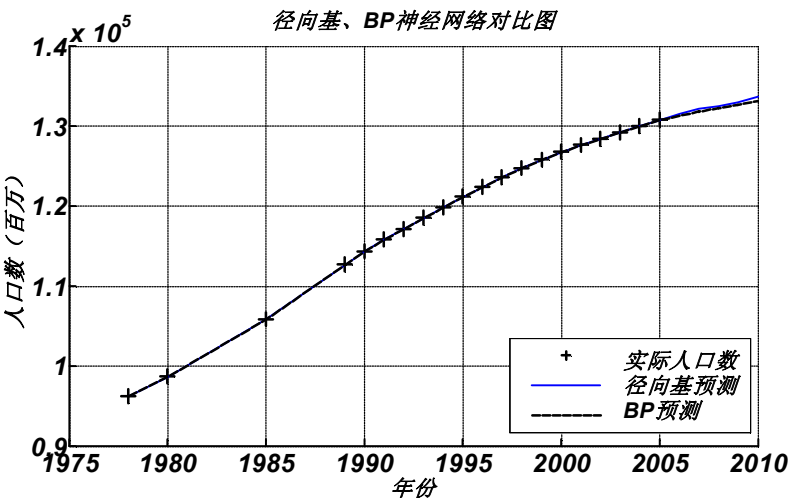


图 2 神经网络模型对人口进行短期预测

同时得到 2006—2010 年短期内的人口预测数据，所得结果如表 2 所示：

表 2 2006—2010 年人口预测数据

年份	实际值 (万人)	径向基神经网络		BP 神经网络	
		预测值	相对误差%	预测值	相对误差%
2003	129227	129293	0.05	129212	0.01
2004	129988	130034	0.03	129926	0.04
2005	130756	130995	0.18	130596	0.01
2006		131524		131298	
2007		132193		131797	
2008		132559		132268	
2009		132979		132677	
2010		134274		133148	

由图 2 和表 2 可知：

两种神经网络法模拟的结果说明，在 2006—2010 年内，中国人口有继续上涨的趋势，但是涨幅逐年有所减小，最终将会达到一个最大值。通过误差分析，我们可以看出，两种方法中，BP 神经网络法相对误差较小，预测更加准确。

5.1.2 中、长期人口预测

根据模型一，我们先以 2001 年到 2005 年的人口数据作为训练样本来预测 2006 年的人口数，再将 2006 年的人口数加入训练样本来预测 2007 年的人口数，逐年递推。利用 Matlab6.5 编程（程序见附录 1）求解，对未来中国的人口发展做中长期预测，结果见图 3 所示：

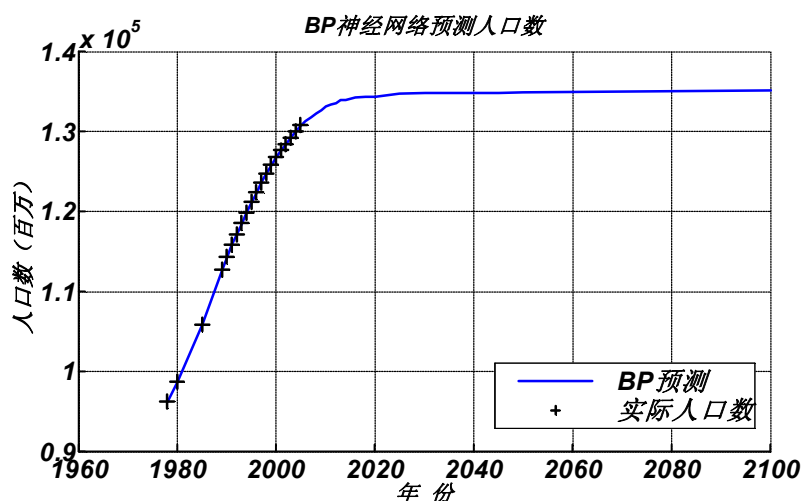


图 3 BP 神经网络模型对我国人口进行中长期预测

图形说明：

从图 3 可以看出，在 2045 年前后，中国人口将达到峰值 13.5 亿。之后，中国的人口将保持稳定，而这显然不符合实际情况，由于中国人口受多方面因素影响，总人口不会长期稳定不变。

5.2 Logistic 模型

5.2.1 模型阐述

BP 神经网络模型单纯地从历年的人口总数去模拟未来中国人口的发展趋势，研究的是数据的整体变化，没有考虑到影响人口数据变化的内部因素。为了从根本原因上反映人口增长的规律，我们借用经典 Logistic 模型对未来人口的发展趋势做一个简单的预测。

Logistic 模型^[3]说明：

阻滞增长模型（Logistic 模型）是在马尔萨斯的指数模型基础上的改进，马尔萨斯的人口增长指数模型为：

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \dots\dots (1)$$

即人口的增长率是一个常数。

而 Logistic 模型建立在一个最根本的假设之上，那就是人口的增长率不是一个常数，而是关于人口数量的递减函数。

变量含义：

$$\begin{cases} r(x) & \text{人口增长率，为 } x \text{ 的递减函数， } r(x) = r - sx \\ x_m & \text{环境所能容纳的最大人口数， } r_m = 0 \\ r & \text{固有人口增长率， } r(0) = r \end{cases}$$

由以上关系易得到：

$$r(x) = r \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \quad \dots\dots (2)$$

将(2)式代入人口增长的指数模型(1)中，得到：

模型二：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r(1 - \frac{x}{x_m})x \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad \dots\dots (3)$$

由（3）可以解得：

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-rt}} \quad \dots\dots (4)$$

5.2.2 模型求解

5.2.2.1 短期人口预测

以 1978 到 2005 年的人口数据拟合求出模型二的参数 x_m 和 r ，用 matlab6.5 编程求解（程序见附录 2），得到 $x_m = 15.447 \times 10^8$ ， $r = 0.045681$ ，则（4）式为

$$x(t) = \frac{15.447 \times 10^8}{1 + (\frac{15.447 \times 10^8}{9.6259 \times 10^8} - 1)e^{-0.045681t}} \quad \dots\dots (5)$$

在短期内（2006—2010 年）的人口预测结果见图 4 和表 3：

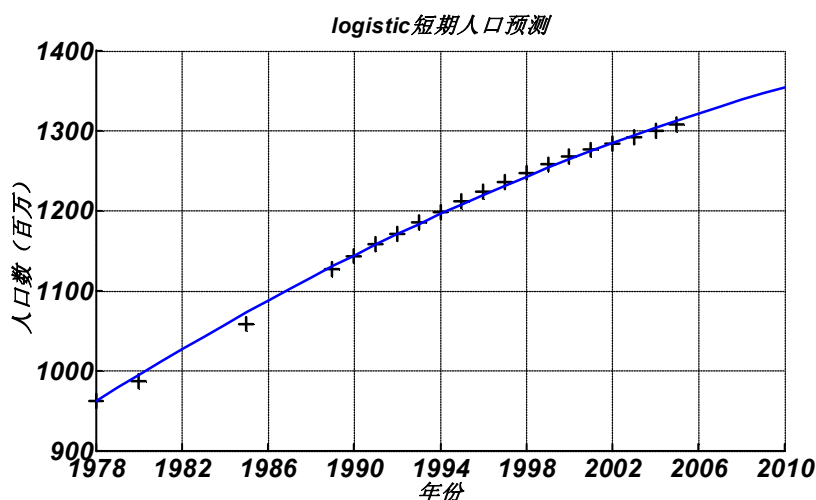


图 4 logistic 模型对人口进行短期预测

表 3 2006—2010 年人口预测数据 单位：万人

年 份	实际人口	Logistic 预测	偏差	相对误差(%)
2000	126743	126470	273	0.215397
2001	127627	127500	127	0.099509
2002	128453	128510	57	0.0443742
2003	129227	129480	253	0.1957795
2004	129988	130420	432	0.3323384
2005	130756	131330	574	0.4389856
2006		132220		
2007		133070		
2008		133900		
2009		134700		
2010		135480		

从图 4 和表 2、表 3 可以看出，在 2000—2005 年中，利用 logistic 模型得到的预测值与实际值符合得较好，平均偏差不超过 0.22%。所以，利用此模型对中国人口进行短期预测是可行的。同时，从 2006—2010 年的人口增长情况来看，未来几年内中国的人口将继续增加，但是增长速率主要呈逐年减少的趋势。

5.2.2.2 中、长期人口预测

运用同短期预测一样的方法，扩大预测时间段，对未来中国的人口发展做中、长期预测，由（5）可得中国人口发展趋势，见图 5 和表 4 所示：

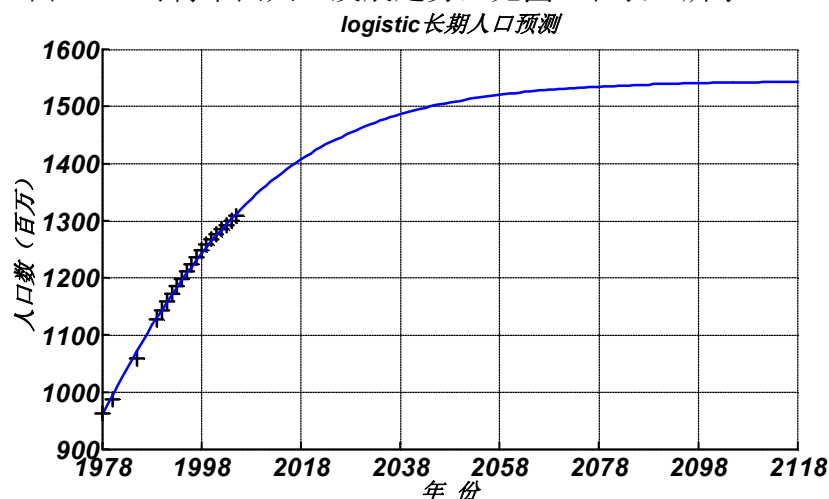


图 5 logistic 模型对人口进行长期预测

表 4 Logistic 模型对人口做中、长期预测的结果

年份	人数 (万)	年份	人数 (万)	年份	人数 (万)	年份	人数 (万)
2018	136224	2048	149387	2078	153145	2108	154130
2023	139591	2053	150397	2083	153413	2113	154199
2028	142391	2058	151211	2088	153628	2118	154254
2038	146594	2068	152389	2098	153935		
2043	148136	2073	152809	2103	154043		

综合图 5 和表 4, 我们可以看出未来中国人口发展的总趋势: 在一定时期内, 人口将继续增长, 但是增长率逐渐减小, 人口将于 2050 年达到 15 亿, 最终人口将趋于一个稳定值 15.4 亿。

5.3 改进的宋健人口模型

BP 神经网络模型和 Logistic 模型都没有具体分析影响人口发展的内在因素, 只是从外部数据进行预测, 要具体分析近年来中国人口发展涌现出来的新特点对人口增长的影响, 微分方程不可或缺。

早在上个世纪 80 年代, 针对我国复杂的人口特点, 中国科学家宋健等人就人口发展提出了新的人口模型, 该模型通过详细的推导, 得到一个偏微分方程, 并由此衍生出了著名的“人口控制论”。宋健人口模型在人口预测和人口控制中起着重要的作用, 但是由于近年来中国人口发展出现的各种新特点, 在用宋健模型的同时难免顾此失彼, 带来一定程度的误差, 因此, 我们考虑在宋健模型的基础上做一定的改进。

5.3.1 宋健人口模型介绍:

宋健的人口模型^[4]基于以下三个基本假设:

1. 把研究的社会人口当作一个整体, 当作一个完整的系统来考虑;
2. 所有表征和影响人口变化的因素都是在整个社会人口平均意义下确定的;
3. 把时间的流逝、婴儿的出生、人口的死亡和居民的迁移看成是影响人口发展的全部因素。

以下是宋健人口模型的推导过程:

为研究任意时刻不同年龄的人口数量, 引入人口的分布函数和密度函数, 时刻 t 年龄小于 r 的人口总数称为人口分布函数, 记作 $F(r, t), t, r \geq 0$ 且均为连续变量, 设 F 是连续可微的, 时刻 t 的人口总数记为 $N(t)$, 最高年龄记为 r_m , 理论推导时设 $r_m \rightarrow \infty$, 于是对于非负函数 $F(r, t)$ 有:

$$F(0, t) = 0, F(r_m, t) = N(t) \quad \dots \dots (1)$$

人口密度函数定义为

$$p(r, t) = \frac{\partial F}{\partial r} \quad \dots \dots (2)$$

$p(r, t)dr$ 表示时刻 t 时年龄在 $[r, r + dr]$ 内的人口数。

记 $\mu(r, t)$ 为时刻 t , 年龄为 r 的人口的死亡率。其含义为, $\mu(r, t)p(r, t)dr$ 表示时刻 t 年龄在 $[r, r + dr]$ 内单位时间死亡的人数。

为了得到 $p(r, t)$ 满足的方程, 考察时刻 t 年龄在 $[r, r + dr]$ 内的人到时刻 $t + dt$ 的情况, 他们活着的那一部分人的年龄变为 $[r + dr_1, r + dr + dr_1]$, 这里 $dr_1 = dt$ 。

而在 dt 这段时间内死亡的人数为 $\mu(r,t)p(r,t)drdt$ ，于是：

$$p(r,t)dr - p(r+dr,t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt \quad \dots \dots (3)$$

上式可以写成：

$$[p(r+dr_1,t+dt) - p(r,t+dt)] + [p(r,t+dt) - p(r,t)]drdt = -\mu(r,t)p(r,t)drdt$$

由于 $dr_1 = dt$ ，我们得到：

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t) \quad \dots \dots (4)$$

这是人口密度函数 $p(r,t)$ 的一阶偏微分方程，其中死亡率 $\mu(r,t)$ 为已知函数。

方程（4）有两个定解条件：

初始密度函数记作 $p(r,0) = p_0(r)$ ；单位时间内出生的婴儿数记作

$p(0,t) = f(t)$ ，称为婴儿出生率。前者可以查到，于是得到宋健人口模型：

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t), t, r > 0 \\ p(r,0) = p_0(r) \\ p(0,t) = f(t) \end{cases} \quad \dots \dots (5)$$

这个连续型人口发展模型描述了人口的演变过程，从这个方程确定出密度函数 $p(r,t)$ 后，就可以得到各个年龄的人口数，即人口分布函数：

$$F(r,t) = \int_0^r p(s,t)ds \quad \dots \dots (6)$$

假设死亡率不依赖于时间 t ，我们得到通式(5)的解为：

$$p(r,t) = \begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s)ds} & , 0 \leq t \leq r \\ f(t-r)e^{-\int_0^r \mu(s)ds} & , t > r \end{cases}$$

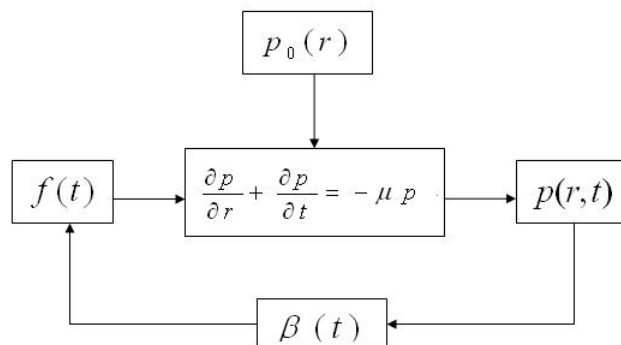


图 6 人口正反馈控制系统示意图

在图 6 所示的人口系统中， $p(r,t)$ 为状态变量，而新生人口 $f(t)$ 为控制变量状态，状态变量通 $p(r,t)$ 过总和生育率 $\beta(t)$ 形成反馈增益。

5.3.2 模型的改进

由于宋健人口模型根据初始年份的人口分布 $p_0(r)$ 来预测未来各个年份人口的发展状况，已经预测出来的数据没有得到充分利用。而我们却希望利用已经预测出来的数据来预测下一年的人口数。以 2006 年为例，2006 年的人口数可分为两部分，一部分是从 2005 年过渡而来的，另一部分则是新生人口。在不考虑人口迁移的情况下，前一部分可以利用 2005 年的各个年龄段的人口数，结合此年龄段的死亡率预测出 2006 年各个年龄段的人口数；后一部分（2006 年的新生人口数）可以结合 2005 年育龄妇女数及其生育率来预测，具体过程如下：

首先将中国人口分为三部分：城市人口（S）、镇人口（Z）、乡人口（X）。三类人群的相对死亡率、男女比例、育龄妇女生育率和人口年龄结构各不相同，所以有必要分别处理。

通过对 2001-2005 年的人口统计数据（附件 2）的分析，发现上述同一类人群每年的死亡率与年龄的关系大致相同（如图 7 所示），所以可以假定各类人群的每年死亡率随年龄的分布是相同的。通过对各年的死亡率求均值并拟合，可以得到各类人群的死亡率函数 $\mu(r)$ 。

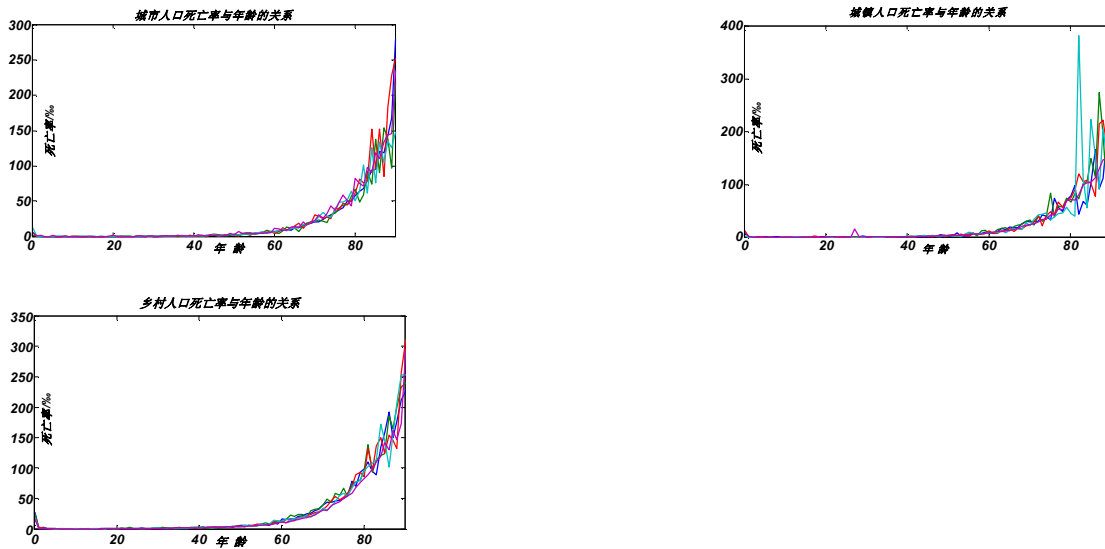


图 7 市、镇、乡人口死亡率与年龄关系图

又分别对三类人群的性别比分析，发现同一类人群中每年各年龄段的男女比例也大致相同（如图 8 所示），所以又可以假定各类人群每年各年龄段的男女比例是相同的。由此可得各类人群的女性比例函数 $k(i)$ 。

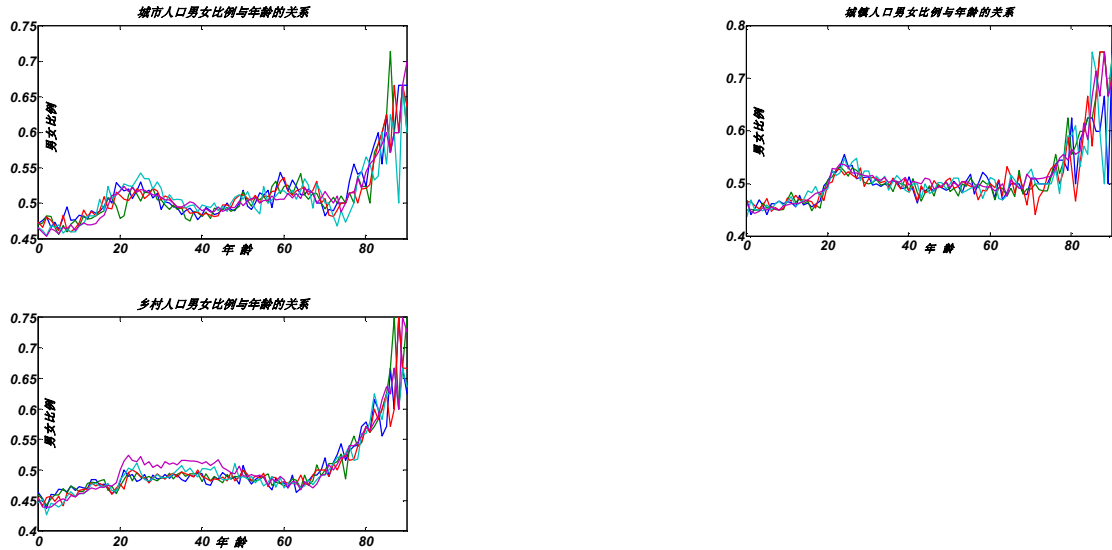


图 8 市、镇、乡人口各个年龄段女性人口比例图

通过分析市、镇、乡育龄妇女各年龄的生育率（分布如图 9 所示），可以分别拟合得到三类人群妇女的生育率分布函数 $h(r)$ 。

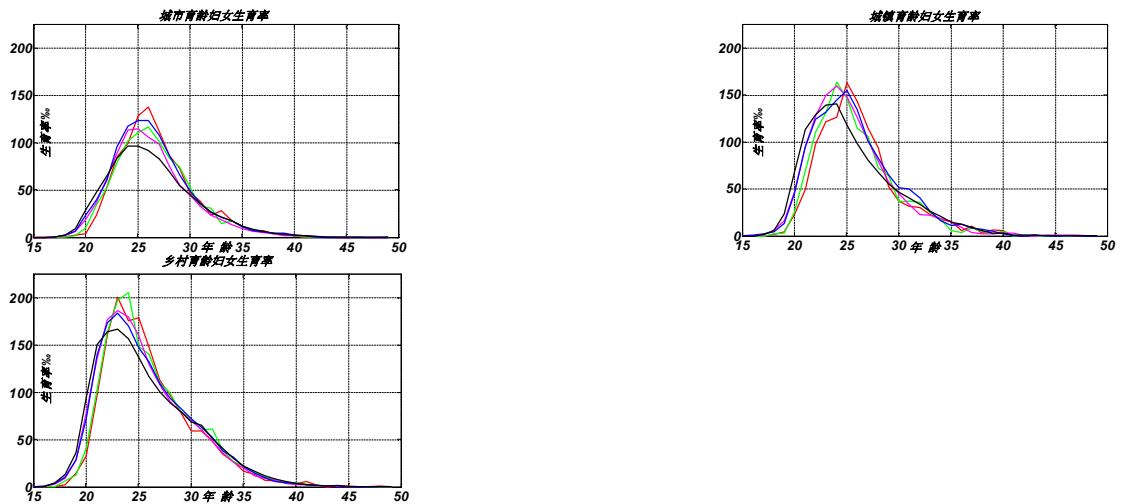


图 9 市、镇、乡育龄妇女生育率在各个年龄段的分布图

第 t 年年龄为 r 的人口数即为第 $t-1$ 年年龄为 $r-1$ 的人口数乘上存活系数

$e^{-\int_{r-1}^r \mu(\rho) d\rho}$ （简化起见我们可以写成 $e^{-\frac{\mu(r-1) + \mu(r)}{2}}$ ），即

$$p(r, t) = p(r-1, t-1) e^{-\frac{\mu(r-1) + \mu(r)}{2}} \dots\dots (7)$$

而第 t 年出生的人口与当年的育龄妇女(15-49 岁)数量及其生育率决定 $h(r)$ ，而当年的育龄妇女数量又可以由第 $t-1$ 年 14-48 岁的女性数量及其死亡率通过(7)式算得。至于各年龄的生育率 $h(r)$ 则有赖于人们的生育观念和计划生育措施的执行力度。在此我们通过对所给的五年数据作统计分析（图 9），发现近年来我国育龄妇女的生育率逐年下降并且生育年龄有所推迟，而且总和生育率也不断下

降。

所以第 t 年出生的人口即为各年龄段的育龄妇女数 $k(r)p(r,t)$ 乘以各自的生育率 $h(r)$ 以及总和生育率 $\beta(t)$ 。

由以上的过程我们便可算出各年各年龄段的人口数矩阵 $p(r,t)$ ，得到宋健人口预测模型的改进模型：

模型三：

$$N(t) = \sum_{r=0}^{r_m} p(r,t)$$

$$p(r,t) = \begin{cases} \beta(t) \sum_{i=14}^{48} k(i)h(i)p(i,t-1) & r=1 \\ p(r-1,t-1)e^{-\frac{\mu(r-1)+\mu(r)}{2}} & r>1 \end{cases}$$

$N(t)$ 为第 t 年的人口数。

5.3.3 模型求解

首先利用 EXCEL 进行数据统计，大致统计出性别比 $k(r)$ 和死亡率 $\mu(r)$ 的值，然后利用 Matlab6.5 编程实现（程序见附录 3），得到预测结果如图 10 和表 5 所示：

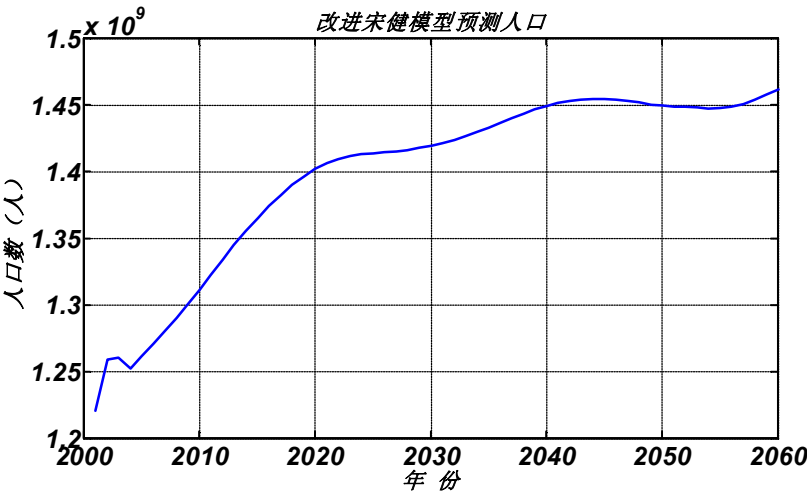


图 10 改进的宋健模型对人口的预测

表 5 改进的宋健模型对人口的预测

年份	预测人口 数 (亿)	年份	预测人口 数 (亿)	年份	预测人口 数 (亿)	年份	预测人口 数 (亿)
2001	12.2082	2021	14.0622	2041	14.5145	2061	14.6666

2002	12.5908	2022	14.0949	2042	14.5324	2062	14.7223
2003	12.6042	2023	14.1172	2043	14.5425	2063	14.7828
2004	12.5279	2024	14.1304	2044	14.5475	2064	14.8476
2005	12.6155	2025	14.1390	2045	14.5449	2065	14.9144
2006	12.7100	2026	14.1466	2046	14.5392	2066	14.9843
2007	12.8045	2027	14.1544	2047	14.5303	2067	15.0530
2008	12.9023	2028	14.1645	2048	14.5176	2068	15.1230
2009	13.0047	2029	14.1772	2049	14.5058	2069	15.1895
2010	13.1138	2030	14.1948	2050	14.4987	2070	15.2548
2011	13.2267	2031	14.2150	2051	14.4912	2071	15.3200
2012	13.3396	2032	14.2392	2052	14.4892	2072	15.3838
2013	13.4507	2033	14.2674	2053	14.4813	2073	15.4463
2014	13.5565	2034	14.2989	2054	14.4729	2074	15.5126
2015	13.6549	2035	14.3320	2055	14.4766	2075	15.5801
2016	13.7464	2036	14.3674	2056	14.4894	2076	15.6490
2017	13.8291	2037	14.4018	2057	14.5105	2077	15.7171
2018	13.9026	2038	14.4350	2058	14.5427	2078	15.7863
2019	13.9660	2039	14.4662	2059	14.5759	2079	15.8623
2020	14.3684	2040	14.4921	2060	14.6190	2080	15.9432

通过对表 5 和图 10 的观察，我们可以得到如下结论：中国在未来的一段时间内人口总数将继续增加，在 2020 年左右突破 14 亿，2065 年左右突破 15 亿，通过图 10 还可以看出，人口增长的速率逐年减少，到了 2045 年以后，中国的总人口会保持在一个稳定的值（14.6 亿）附近做上下波动。

5.4 考虑城市化影响的改进型宋健人口模型

5.4.1 模型分析与建立

模型三虽然考虑了性别比、育龄妇女生育率以及死亡率对人口的影响，但并未考虑到我国乡村人口城镇化的对人口发展的抑制作用。而从附件 2 所给数据中，我们统计得到了 2001—2005 年市、镇、乡育龄妇女的生育率状况。具体情形如下图：

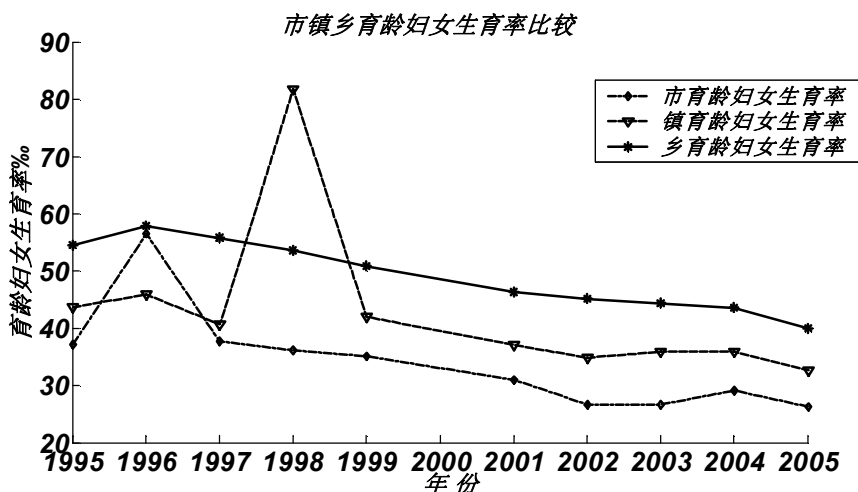


图 11 市、镇、乡历年妇女生育率比较

从图 11 可以看出，整体上说，乡育龄妇女的生育率最高，镇育龄妇女次之，市育龄妇女最低。而随着乡村人口城镇化，人口大量迁移，必将引起育龄妇女生育率降低，从而抑制人口的增长。每年有大量农村人口转化为城镇人口，其人口数据难以统计导致预测十分困难，在此我们分析农村人口城镇化对生育率的整体影响。

通过统计发现，在城市化进程中，向城镇转移的人口大部分在 20 岁~40 岁之间，而这些人群正处于生育旺盛年龄，该类人群的转移将导致乡村人口的生育率有所下降，而农村育龄妇女的生育率远高于城镇妇女，而在农村人口转化为城镇人口后将导致城镇妇女的生育率有所上升。对此我们将 21 世纪中国的城市化过程分为三个阶段：

第一阶段为 2001~2025 年，此阶段为城市化预热阶段，城市化速度不断上升，农村人口向城镇的转移率不断增加；

第二阶段为 2026~2050 年，此阶段为全速城市化阶段，中国正以最快的速度进行着城市化进程；

第三阶段为 2051 年后，中国步入中等发达国家水平，城市化基本完成，城乡人口比例趋于稳定。

经过以上分析，并以改进的宋健模型（模型三）为基础，我们得到城市化进程中城、镇、乡的人口发展模型：

模型四：

对城镇：

第一阶段由于农村人口的加入使得城镇的生育率上升，设由于此影响该阶段的总和生育率随时间不断增大即 $\beta(t) = \beta_0 + t\sigma$ ，其中 σ 为人口城镇化对城镇生育率的影响系数。所以第一阶段的人口分布矩阵为

$$p(r, t) = \begin{cases} (\beta_0 + t\sigma) \sum_{i=14}^{48} k(i)h(i) + p(i, t-1) & r = 1 \\ p(r-1, t-1)e^{-\frac{\mu(r-1) + \mu(r)}{2}} & r > 1 \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 25$$

第二阶段城镇化对生育率的影响达到最大并保持稳定

$$p(r,t) = \begin{cases} (\beta_0 + 25\sigma) \sum_{i=14}^{48} k(i)h(i) + p(i,t-1) & r=1 \\ p(r-1,t-1)e^{\frac{\mu(r-1)+\mu(r)}{2}} & r>1 \end{cases} \quad 25 < t \leq 50$$

第三阶段城镇化完成后生育率随时间变化慢慢下降即：

$$\beta(t) = \beta_0 + 25\sigma - (t-50)\sigma$$

$$p(r,t) = \begin{cases} (\beta_0 + 25\sigma - (t-50)\sigma) \sum_{i=14}^{48} k(i)h(i) + p(i,t-1) & r=1 \\ p(r-1,t-1)e^{\frac{\mu(r-1)+\mu(r)}{2}} & r>1 \end{cases} \quad t > 50$$

对于农村，过程恰好相反在此就不再赘述。

5.4.2 模型求解

首先求解城市化对生育率的影响系数 σ ，由2001到2005年的数据（附表1）利用Excel统计可以得出五年间农村育龄妇女的生育率由46.30%下降到39.92%，平均每年下降1.595%，所以可以用这五年的平均下降量来近似代替影响系数 σ ，即取 $\sigma = 1.595\%$

针对上述过程对城、镇、乡的人口分别编程模拟（程序见附录4），得到预测结果如图12和表6所示：

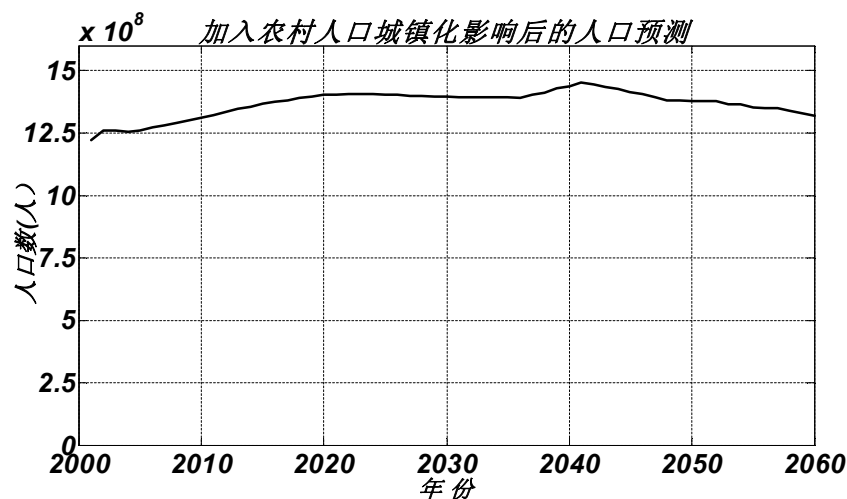


图12 考虑城市化影响后对人口的预测

表 6 考虑城市化影响后对人口的预测

年份	预测人口 数（亿）	年份	预测人口 数（亿）	年份	预测人口 数（亿）	年份	预测人口 数（亿）
2001	12.2082	2021	14.0384	2041	14.5304	2061	13.1055
2002	12.5908	2022	14.0487	2042	14.4456	2062	13.1146
2003	12.6042	2023	14.0495	2043	14.3520	2063	13.2247
2004	12.5279	2024	14.0419	2044	14.2538	2064	13.2361
2005	12.6155	2025	14.0293	2045	14.1483	2065	13.0476
2006	12.7100	2026	14.0148	2046	14.0410	2066	12.8610
2007	12.8045	2027	13.9991	2047	13.9313	2067	12.7721
2008	12.9023	2028	13.9840	2048	13.8173	2068	12.6849
2009	13.0047	2029	13.9698	2049	13.8038	2069	12.5938
2010	13.1138	2030	13.9585	2050	13.7946	2070	12.3015
2011	13.2267	2031	13.9477	2051	13.7823	2071	12.2096
2012	13.3396	2032	13.9391	2052	13.7737	2072	12.0153
2013	13.4507	2033	13.9326	2053	13.6541	2073	11.9185
2014	13.5565	2034	13.9275	2054	13.6282	2074	11.7255
2015	13.6549	2035	13.9225	2055	13.5120	2075	11.6329
2016	13.7464	2036	13.9185	2056	13.5019	2076	11.5395
2017	13.8291	2037	14.0127	2057	13.4966	2077	11.4423
2018	13.9026	2038	14.1048	2058	13.3987	2078	11.3431
2019	13.9660	2039	14.2942	2059	13.2964	2079	11.1479
2020	14.0199	2040	14.3778	2060	13.2007	2080	11.0540

从图 12 和表 6 可以发现：考虑到人口迁移后建立的模型所预测的人口数比模型三所预测的要小，在而且在本世纪后期阶段人口还会有所下降，可见城市化对总人口的增长是有抑制作用。

6 模型的评价及推广

6.1 模型优点

- 1) 模型一采用回归型 BP 神经网络法，将输出数据反馈到输入数据中，循环预测，减小了预测的误差；
- 2) 模型二借用了 Logistic 人口增长模型，将各种影响人口的因素笼统归纳到环境限制中，从外部数据着手，避免了批量数据处理，简单易行；
- 3) 模型三是对宋健人口模型的改进，采用循环迭代的方法，充分利用预测得来的数据，并且结合中国人口发展的新特点和实际情况，贴近实际，较为准确地完成了对未来 60 年内中国人口发展状况的预测。
- 4) 模型四将农村人口城镇化纳入影响人口增长的考虑范围内，分别对未来城镇人口的发展和未来乡村人口的发展进行分析，能更好的反映出中国人口在城镇化过程中的发展趋势，具有较高的实际应用价值。
- 5) 所有模型均可编程实现，可以进行大规模的预测。

6.2 模型缺点

- 1) BP 神经网络模型预测出中国未来人口将于 2040 年左右达到最大值 13.5 亿，之后保持稳定，这个结果不大符合现实，这是由 BP 神经

网络法不宜做长期预测决定的；

- 2) 而模型二我们借用经典 Logistic 人口增长模型，将影响人口发展的各个因素都归结在环境限制里面，过于笼统，未能很好地与中国的实际情况相结合；
- 3) 模型三建立在宋健人口模型的基础上，虽然结合了实际，但是由于时间的限制，未能完全考虑到符合中国国情的影响人口结构发展的各个因素。

6.3 模型推广

利用 BP 神经网络法进行数据的短期预测可以用于生活中的很多方面，诸如虫情预报、股市预测、交通能力预测等。而阻滞增长模型一直被认为是理论上的佼佼者，而实际应用却捉襟见肘，但是事实上用于短期预测在效果上仍然占据很大优势。改进的宋健模型可以顾及到实际情况的多方面因素的影响，用于长期预测效果较其他模型来说相对要好，在实际生活中值得推广。而模型四更是很好的描述了中国在城市化进程中的人口发展趋势，该模型不仅适用于中国，也同时适用与所有处于城市化阶段的发展中国家。

参考文献

- [1] 飞思科技产品研发中心，《神经网络理论与 MATLAB 7 实现》，北京：电子工业出版社，2005 年版。(100 页)
- [2] 中华人民共和国国家统计局之年度数据
<http://www.stats.gov.cn/tjsj/ndsj/index.htm> 2007 年 9 月 21 日
- [3] 中国科大数学建模 《人口模型讲义》
<http://mcm.ustc.edu.cn/download.htm> 2007 年 9 月 21 日
- [4] 姜起源、谢金星、叶俊，《数学模型》(第三版)，北京：高等教育出版社 2003 年版 (163 页—166 页)
- [5] 刘来福、曾文艺，《数学模型与数学建模》，北京：北京师范大学出版社，1997 年版。
- [6] 傅鹏、龚劬、刘琼荪、何中市，《数学实验》，北京：科学出版社，2000 年版。

最佳公交线路的选择模型

胡小刚 刘科 陈泽林

指导教师：樊爱军

摘要

本文研究的是乘客出行乘车的最佳公交线路选择问题。根据公交网络相互连通、数据结构复杂等特点，我们给出了一种区别于 Dijkstra 等经典最短路径算法的公交线路最短路径算法，并用 MATLAB6.5 处理数据，建立站点数据库和线路数据库，大大提升数据搜索速度，使问题迎刃而解。具体如下：

对问题一，先用票价函数将票价转化为时间，再以总出行时间最小建立单目标规划模型，综合考虑乘车总票价对乘客满意度的影响，结合给出的公交线路最短路径算法，利用 MATLAB6.5 编程求解，分别得到换乘 1 次、2 次的最佳线路及最终的最佳线路（见表 1，表 2，表 3），其对应的实际最短花费时间依次为：73 分钟，106 分钟，128 分钟，70 分钟，106 分钟，46 分钟。

对问题二，在问题一的公交线路中增加地铁线路，于是就增加了地铁票价转化时间，公交与地铁、地铁与地铁之间换乘的时间和地铁线路上所花时间等因素，仍采用问题一的算法，得出最佳线路（见表 4），其对应的实际最短花费时间依次为：73 分钟，91.5 分钟，96 分钟，55 分钟，87.5 分钟，52 分钟。

对问题三，若已知所有站点之间的步行时间后，我们首先给出了只步行或只乘公交的最佳线路的选择模型（模型(3)）。然后，为了更符合实际，我们在步行与公交之间换乘问题上，改良算法，得到模型(4)。在考虑到换乘次数对乘客满意度影响的情况下，对模型(4)中各部分时间赋权，着重考虑换乘次数对总出行时间的影响，得到步行与公交之间换乘的最佳线路的选择模型（模型(5)），而且对许多突发事件引起的时间耽搁，如汽车故障、交通事故引起线路堵塞等，具有一定的现实指导意义。最后，综合考虑步行、公交、地铁三者所有可能的换乘组合，得到更具一般性的最佳线路的选择模型（模型(6)）。

关键词：公交线路最短路径算法、票价函数、单目标规划、乘客满意度

问题重述（略）

模型假设

- 1、不考虑不同公汽舒适度与公交种类的不同对乘客满意度的影响；
- 2、相邻两公汽站点间路程相等，每辆公汽的行驶速度相等；
- 3、公汽之间只能在公汽线路相交站点换乘；
- 4、乘客上下车的时间忽略不计；

符号说明

d_a : $a=1,2$ 分别表示同一公汽线路和同一地铁线路上相邻站点间的平均行使时间；

d_{ab} : 表示由 a ($a=1,2$) 类公交车换乘 b ($b=1,2$) 类公交车所花时间(1 代表公汽, 2 代表地铁)；

m_{ab} : 表示由 a ($a=1,2$) 类公交车换乘 b ($b=1,2$) 类公交车的次数；

g_{aj} : 由起始点到目的点所选第 j 条 a ($a=1,2$) 类公交车线路上经过站点的总个数(包括该线路上的换乘点)；

e_i : $i=1,2,3$ 分别表示公汽单一票价，公汽分段计价和地铁票价；

O_i : $i=1,2,3$ 分别表示公汽单一票价，公汽分段计价和地铁票价所对应的票价转化时间；

h_i : $i=1,2,3$ 分别表示乘坐单一票价、分段计价公汽和地铁所对应的次数；

R_{ij} : 从 i 站点步行到 j 站点所需最短时间。

问题分析

考虑到公交网络的主要特点：

1) 连通性：在某个站点可能有若干条公交线路经过，如果在该站点可以换乘，则这些交通线路是连通的，而且换车存在换乘消耗，包括时间与费用的消耗；

2) 数据结构复杂性：公交线路繁多，而且交通线路结构复杂，公交车的往返路线除相同的外，大多为不相同的环行与单行线路。

用经典的最短路径算法（Dijkstra 算法、Floyd 算法等）建立的公交线路网络图的数据结构就会非常复杂，要把复杂抽象的交通网络图变为简洁的网络拓扑

图，程序量将非常大，并且运算速度难以令人接受。

因此，对问题一，我们认为交通线路的查询不能直接用经典的求最短路径的算法，而需要一种新的公交线路最短路径算法，以减少程序量，加快运行速度。再结合票价函数^[1]将票价转化为时间，利用新的最短路径算法，以总时间最小为目标函数，即可得出最佳公交线路。

对问题二，同时考虑公汽与地铁线路，则构成了一个新的公交网络，增加了新票价转化时间，公汽与地铁、地铁与地铁之间换乘的时间和地铁线路上所花时间，一定程度上加大了求解难度，但基本算法仍同问题一，以总出行时间最小为目标函数，查找出最佳公交线路。

对问题三，在已知所有站点之间的步行时间后，我们可以在每两站点之间加入步行边(方向为双向)，又构成新的交通网络，并可以将步行看做一种交通方式，若乘客从坐公交车改为步行，即为换乘。则最终选择的线路中，换乘次数会相应增加，进而必须考虑换乘次数对乘客满意度的影响。我们可以将换乘次数也转化为时间，最后以总出行时间最小为目标函数，即能求得令乘客比较满意的公交线路。

模型建立与求解

一、问题一

1、公交线路的最短路径算法：

由于考虑到乘客对乘车的满意度，一个好的公交系统，任意两站点间乘车过程中，换乘次数不宜过多。因此，我们假设乘客选择公交路线时最多换乘两次^[2]，此时则可以不考虑换乘次数对乘客的满意度的影响。

假设某乘客从 A 站乘公汽去 B 站。首先，看 A 站是否有车直接到 B 站，如果存在，则记下这些公汽，并从中选择所需总出行时间最小的公汽，如图 1(a)。如果没有，则看经过 A 站的公汽和经过 B 站的公汽有没有交叉点，若有交叉点 E，则可经交叉点 E 转车到达 B 站，并从中选择所需总出行时间最小的公汽，如图 1(b)。如果经过 A 站的公汽和经过 B 站的公汽没有交叉点，则先乘经过 A 站的某一路公汽到达某站 E，看经过 E 站的公汽与经过 B 站的公汽有没有交叉点 D，若有，则可经 D 站转车到达 B 站，并从中选择所需总出行时间最小的公汽，如图 1(c)。若经过 E 站的公汽与经过 B 站的公汽没有交叉点，则说明经过两次换乘还不能从 A 站到 B 站，由假设则停止搜索^[3]。

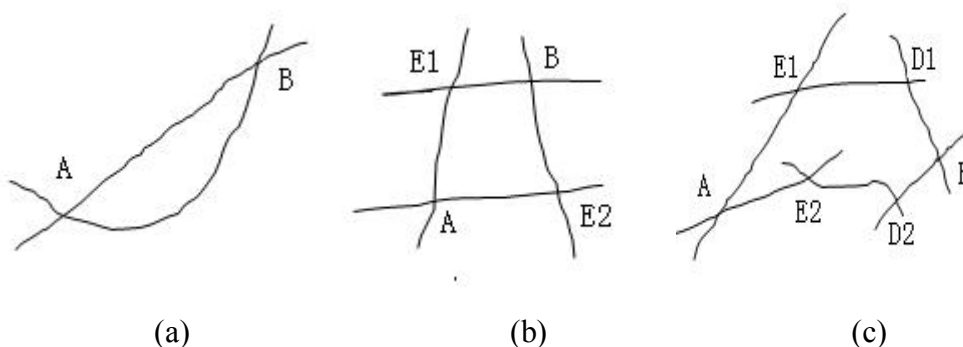


图 1

具体算法步骤如下：

1) 输入起始站点 A 和目的站点 B；

- 2) 在公汽站点数据库中查找经过站点 A 的公汽线路 $L(i)$ ($i=1,2,\dots,m$; m 为正整数), 及经过站点 B 的公汽线路 $S(j)$ ($j=1,2,\dots,n$; n 为正整数);
- 3) 判断是否有 $L(i)=S(j)$, 若只有一条线路满足要求, 则该线路即为最优线路, 输出结果; 若不只一条线路满足要求, 则从中选取所需总时间最少 (即所经站点最少) 的线路即为最优线路, 输出结果; 继续;
- 4) 从公汽线路数据库中查找出经过站点 A 的公汽线路 $L(i)$ 上的站点 $E(i,g)$ ($i=1,2,\dots,m$; $g=1,2,\dots,n$; m,n 为正整数), 以及经过站点 B 的公汽线路 $S(j)$ 上的站点 $F(j,h)$ ($j=1,2,\dots,p$; $h=1,2,\dots,q$; p,q 为正整数);
- 5) 判断是否有 $E(i,g)=F(j,h)$, 若有一个站点 E 满足要求, 该站点即为一次换乘的站点, 线路则为从 A 站点出发, 在该站点换乘到达 B 站点, 输出结果; 若不只一个站点满足要求, 则从中选取所需总时间最少的线路即为最优线路, 输出结果; 继续;
- 6) 从公汽站点数据库中查找出经过 $E(i,g)$ 的公汽线路 $T(k)$ ($k=1,2,\dots,m$; m 为正整数), 并从公汽线路数据库中查找出线路 $T(k)$ 上的站点 $G(k,w)$ ($k=1,2,\dots,m$; $w=1,2,\dots,n$; m,n 为正整数);
- 7) 判断是否有 $G(k,w)=F(j,h)$, 若有一个站点 D 满足要求, 则站点 D 为第二个换乘站点, 线路则为从 A 站点出发, 在 E 站点一次换乘, 可到达 D 站点, 再从 D 站点可以第二次换乘到达站点 B, 按照步骤 4)、5)、6) 的方法可求出从起始站点 A 到站点 D 的一次换乘最优线路, 按照步骤 2)、3) 的方法可求出从站点 D 到目的点 B 的最优线路, 两段最优线路即组成了从站点 A 到站点 B 的最优线路, 输出结果; 若不只一个站点满足要求, 则分别求出在各站点进行第二次换乘的最优线路, 选取所需总时间最少的线路即为最优线路, 输出结果;
- 8) 若上述三种情况均存在, 则将三种输出结果比较, 选出所需总时间最少的线路即为最优线路, 输出结果;
- 9) 如果上述步骤没有找到合适的公汽线路, 则找不到换乘次数不超过两次的公汽线路, 结束运算。

算法的流程如图 2 所示:

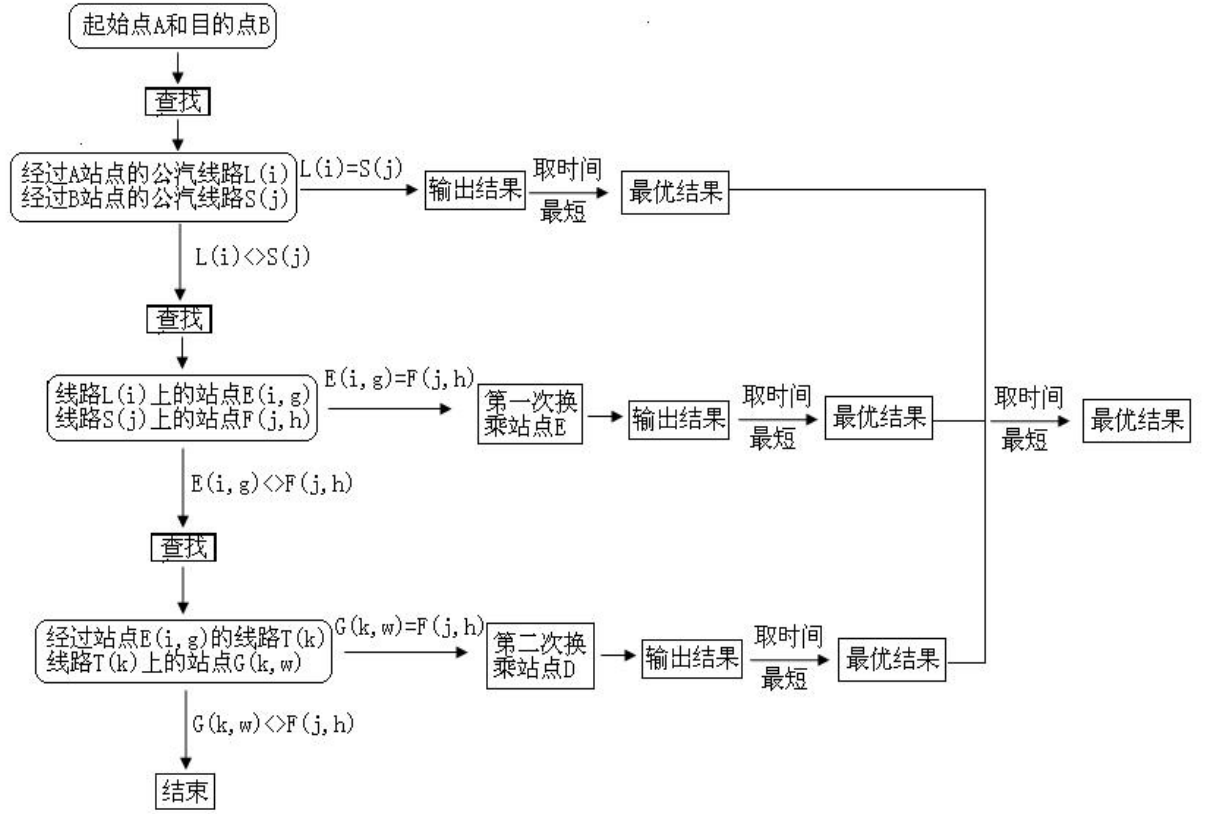


图 2

2、公交车计价情况

单一票价公汽计价： $e_1 = 1$

分段计价公汽的计价表达式如下：

$$e_2 = \begin{cases} 1 & 1 \leq g_{1j} \leq 20 \\ 2 & 20 < g_{1j} \leq 40 \\ 3 & g_{1j} \geq 41 \end{cases}$$

其中， g_{1j} 表示由起始点到目的点所选第 j 条公汽线路上经过站点的总个数；

地铁票价： $e_3 = 3$

3、票价时间的转化：

利用票价函数可以将票价转化为时间值：

$$O_i = \frac{480pe_i}{n}$$

其中 p 表示年平均工作日, n 表示居民人平均年收入 (北京为 19978 元)^[4], e_i 表示票价。

4、从起始点到终点的总时间的计算：

总时间包括三部分：票价转化时间，换乘耗费时间和各线路上行驶的总时间（后两者合称为实际行程花费时间）。

- 1) 票价转化时间 X ，等于乘坐某类票价公汽的次数 h_i 与对应的单位票价转化时间 O_i 的乘积之和：

$$X = \sum_{i=1}^2 h_i O_i$$

- 2) 换乘耗费时间 Y ，等于公汽换乘公汽的次数 m_{11} 与单位换乘耗费的时间 d_{11} 的乘积：

$$Y = m_{11} d_{11} \quad (\text{已知: } d_{11} = 5\text{min})$$

- 3) 各线路上行驶的总时间 Q ，等于从起始点到终点所经过的站点数 $\sum g_{1j}$ （包括终点在内）与相邻站点间的行驶时间 d_1 的乘积：

$$Q = \sum g_{1j} d_1$$

综上，得到总时间 Z 的表达式为：

$$Z = X + Y + Q$$

5. 对选择的各条不同线路中取其中总时间最短的一条，即为最优线路，建立模型(1)：

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= X + Y + Q \\ \text{st. } \begin{cases} X = \sum_{i=1}^2 h_i O_i \\ Y = m_{11} d_{11} \\ Q = \sum g_{1j} d_1 \\ O_i = \frac{480 p e_i}{n} \quad (i = 1, 2) \end{cases} & \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

结合上述给出的算法，运用 MATLAB6.5 编程(程序见附录)求解，先得到换乘 1 次的最佳线路如下表 1：

表 1

起始站→终到站	最佳线路	实际最短花费时间(min)	换乘次数	所需车费(元)	最短总时间(min)
S3359→S1828	(1) L436 下行: S3359 → S1784 转 L167 下行: S1784 → S1828 (2) L436 下行: S3359 → S1784 转 L217 下行: S1784 → S1828	101	1	3	119.74
S1557→S0481	—	—	1	—	—
S0971→S0485	L13 下行: S0971 → S2184 转 L417 下行: S2184 → S0485	128	1	3	146.74
S0008→S0073	(1) L159 下行: S0008 → S0291 转 L058 上行: S0291 → S0073 (2) L159 下行: S0008 → S0491 转 L058 上行: S0491 → S0073 (3) L159 下行: S0008 → S2683 转 L058 上行: S2683 → S0073 (4) L159 下行: S0008 → S3614 转 L058 上行: S3614 → S0073 (5) L463 下行: S0008 → S2083 转 L057 上行: S2083 → S0073	83	1	2	95.49
S0148→S0485	—	—	1	—	—
S0087→S3676	L454 上行: S0087 → S3496 转 L209 下行: S3496 → S3676	65	1	2	77.49

为方便理解, 特此举例说明。以 S3559→S1828 这一线路为例, 由表 1 可知: 从站点 S3559 换乘 1 次到站点 S1828 的最佳线路有 2 条, 其中第 (1) 条线路为: 从始发站 S3559 所在的线路 L436 乘坐公共汽车下行, 至站点 S1784 换乘, 选择线路 L167, 下行直达终点站 S1828。在此期间实际最短花费时间为 101 分钟, 最短总时间为 119.74 分钟, 则票价转化时间为 $119.74-101=18.74$ 分钟, 缴纳车费共计 3 元, 仅需转 1 次车。

换乘 2 次的最佳线路如下表 2:

表 2

起始站→终到站	最佳线路	实际最短花费时间(min)	换乘次数	所需车费(元)	最短总时间(min)
S3359→S1828	L123 上行: S3359 → S2903 转 L201 双向: S2903 → S0458 转 L41 上行: S0458 → S1828	73	2	3	91.74
S1557→S0481	(1) L363 下行: S1557 → S1919 转 L189 环行: S1919 → S3186 转 L460 下行: S3186 → S0481 (2) L84 下行: S1557 → S1919 转 L189 环行: S1919 → S3186 转 L460 下行: S3186 → S0481	106	2	3	124.74

S0971→S0485	—	—	2	3	—
S0008→S0073	L198 上行: S0008→S1691 转 L476 上行 S1691→S2083 转 L57 下行 S2083→S0073	70	2	3	88.74
S0148→S0485	(1) L308 上行: S0148→S0036 转 L156 下行: S0036→S2210 转 L417 上行: S2210→S0485 (2) L308 上行: S0148→S0036 转 L156 下行: S0036→S3332 转 L417 上行: S3332→S0485 (3) L308 上行: S0148→S0036 转 L156 下行: S0036→S3351 转 L417 上行: S3351→S0485	106	2	3	124.74
S0087→S3676	L21 下行: S0087→S0088 转 L231 下行 S0088→S0427 转 L462 上行: S0427→S3676	46	2	3	64.74

(备注: 由于有的站点间换 2 次求出的最优线路较多时, 只在此例举一条, 具体参见附录一)

再根据算法, 结合表 1、表 2, 取出总时间最短的线路即为最优线路, 如下表 3 所示:

表 3

起始站→终到站	最佳线路	实际最短花费时间(min)	换乘次数	所需车费(元)	最短总时间(min)
S3359→S1828	L123 上行: S3359→S2903 转 L201 双向: S2903→S0458 转 L41 上行: S0458→S1828	73	2	3	91.74
S1557→S0481	(1) L363 下行: S1557→S1919 转 L189 环行: S1919→S3186 转 L460 下行: S3186→S0481 (2) L84 下行: S1557→S1919 转 L189 环行: S1919→S3186 转 L460 下行: S3186→S0481	106	2	3	124.74
S0971→S0485	L13 下行: S0971→S2184 转 L417 下行: S2184→S0485	128	1	3	146.74
S0008→S0073	L198 上行: S0008→S1691 转 L476 上行 S1691→S2083 转 L57 下行 S2083→S0073	70	2	3	88.74
S0148→S0485	(1) L308 上行: S0148→S0036 转 L156 下行: S0036→S2210 转 L417 上行: S2210→S0485 (2) L308 上行: S0148→S0036 转 L156 下行: S0036→S3332	106	2	3	124.74

	转 L417 上行: S3332 → S0485 (3) L308 上行: S0148 → S0036 转 L156 下行: S0036 → S3351 转 L417 上行: S3351 → S0485				
S0087→S3676	L21 下行: S0087 → S0088 转 L231 下行 S0088 → S0427 转 L462 上行: S0427 → S3676	46	2	3	64.74

(备注: 由于有的站点间换 2 次求出的最优线路较多时, 只在此例举一条, 具体参见附录一)

二、问题二

同时考虑公汽与地铁线路, 即在问题一的公汽交通网基础上增加了地铁线路。在新生成的公交网络中, 利用问题一的公交线路选择算法进行选择, 而后通过下面的模型择优。

总时间仍包括三部分: 票价转化总时间, 换乘耗费时间和各线路上行驶的总时间。

- 1) 票价转化总时间 X , 等于乘坐某类票价公交车的次数 h_i 与对应的单位票价转化时间 O_i 的乘积之和, 又由于地铁线路换乘不需另外票价, 因此得到 X 的表达式为:

$$X = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3$$

- 2) 换乘耗费时间 Y , 等于公汽与公汽、地铁与地铁、公汽与地铁间相互换乘次数 m_{ab} 与对应单位换乘所耗费时间 d_{ab} 的乘积:

$$Y = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 m_{ab} d_{ab}$$

(已知: $d_{11}=5\text{min}$, $d_{12}=6\text{min}$, $d_{21}=7\text{min}$, $d_{22}=4\text{min}$)

- 3) 各线路上行驶的总时间 Q , 等于从起始点到终点所经过的公汽站点总数 $\sum g_{1j}$ (包括终点在内) 与相邻站点间的行驶时间 d_1 的乘积, 再加上从起始点到终点所经过的地铁站点数 $\sum g_{2j}$ (包括终点在内) 与相邻站点间的行驶时间 d_2 的乘积:

$$Q = \sum_{a=1}^2 \sum g_{aj} d_a$$

综上，得到总时间 Z 的表达式为：

$$Z=X+Y+Q$$

对选择的各条不同线路中取其中总时间最短的一条，即为最优线路，建立模型(2)：

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= X + Y + Q \\ \text{st. } \begin{cases} X = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3 \\ Y = \sum_{b=1}^2 \sum_{a=1}^2 m_{ab} d_{ab} \\ Q = \sum_{a=1}^2 \sum g_{aj} d_a \\ O_i = \frac{480 p e_i}{n} \quad (i=1,2,3) \end{cases} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

据算法，运用 MATLAB6.5 编程(程序见附录)求解，得到最佳线路如下表 4：

表 4

起始站→终到站	最佳线路	实际最短花费时间(min)	换乘次数	所需车费(元)	最短总时间(min)
S3359→S1828	L123 上行：S3359→S2903 转 L201 环行：S2903→S0458 转 L41 上行：S0458→S1828	73	2	3	91.74
S1557→S0481	L363 下行：S1557→S1919 转 T1：S1919→D20→D03 D03 转 L481 环行： D03→S0303→S0481	91.5	2	5	122.73
S0971→S0485	L94 上行：S0971→S0567 转 T1：S0567→D01→D21 D21 转 L469 下行： D21→S0464→S0485	96	2	5	127.23
S0008→S0073	L150 双向：S0008→S3874 转 T2：S3874→D30→D25 D25 转 L103 双向： D01→S0525→S0481	55	2	5	86.23
S0148→S0485	L24 双向：S0148→S1487 转 T1：S1487→D02→D21 D21 转 L469 环行： D21→S0464→S0485	87.5	2	5	118.73
S0087→S3676	L454 上行：S0087→S0541 转 T2：S0541→D31→S0540 转 L462 上行：S0540→S3676	52	2	2	64.49

(备注：由于有的站点间求出的最优线路较多时，只在此例举一条，具体参见附

录二)

三、问题三

1、不考虑步行与公交之间换乘的情况

知道所有站点间的步行时间后，即已知了任意两点间步行所需的最短时间。若乘客只考虑步行或是乘坐公交，则我们只需将从起始点到目的点步行所需的最短时间和乘公交所需的最短时间作比较，选取其中用时最少的一条线路，即为最佳线路。

简要流程如图 3 所示：

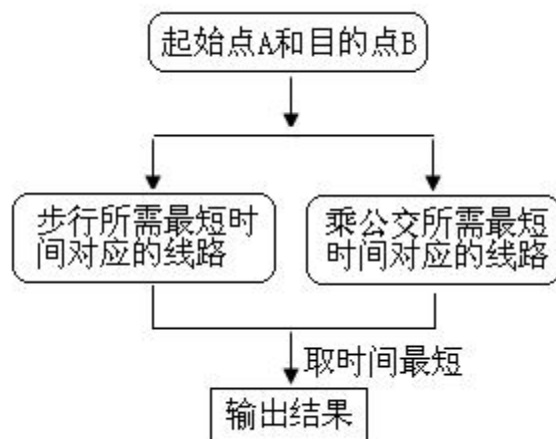


图 3

其中起始点到目的点的步行所需的时间已知，线路确定；乘公交所需的最短时间及其对应线路可由问题二的模型与算法得到。

令 $U_1 = \text{Min}Z$ ：表示从起始点乘公交到目的点所需的最短总时间；

$U_2 = R_{AB}$ ：表示从起始点 A 步行到目的点 B 所需最短时间，则求总时间最短的最优线路的模型(3)为：

$$\begin{aligned}
 & \text{Min}(U_1, U_2) \\
 & \begin{cases} U_1 = \text{Min}Z & U_2 = R_{AB} \\ Z = X + Y + Q \\ X = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3 \\ \text{st. } Y = \sum_{b=1}^2 \sum_{a=1}^2 m_{ab} d_{ab} \\ Q = \sum_{a=1}^2 \sum g_{aj} d_a \\ O_i = \frac{480 p e_i}{n} \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

2、考虑步行与公交之间换乘的情况

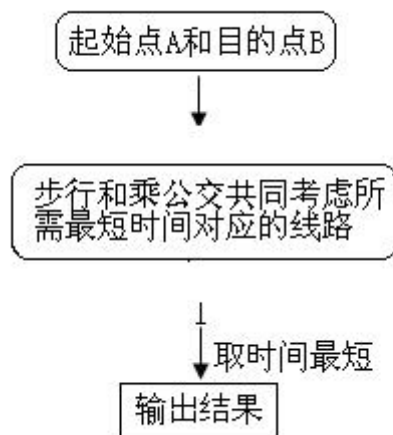


图 4

(1) 求解步行和乘公交共同考虑所需要的最短时间对应的线路的算法：

对于图 4 中的步行和公交共同考虑所需要的最短时间对应的线路这一目标，在这种情况下必然有步行路段和公交路段。我们先改进问题一中的公交线路的最短路径算法：在原算法中加入步行边，构成新的交通网络。具体算法如下：

- 1) 选定起始站 A 和终点站 B；
- 2) 查找从起始站 A 到终点站 B 的线路。先考虑换乘仅 1 次的情况：分步行换乘公交或公交换步行两种。将得到的换乘 1 次的所有情况取其总时间（包括票价转化时间在内）最小，即能得到此种情况下的最优线路，输出结果；
- 3) 考虑换乘 2 次的情况：分由起始站 A 先乘公交，后换步行，再换乘公交到达终点站 B；先乘公交，后换乘一次公交，再换步行到达终点站 B；先步行，后换乘公交，再换步行和先步行，后换乘公交，再换乘一次公交到达终点站 B 四种。由此得到换乘 2 次的所有线路，并取其总时间最小的线路，即为最优线路，输出结果；
- 4) 以此类推，分别得到换路线 3 次，4 次，5 次, ..., n 次的最优线路，输出结果；
- 5) 最后将换路线 1 次，2 次，..., n 次的最优线路再取总时间最小，即

得到从起始站 A 到终点站 B 的最终的最优线路，输出结果；

算法的具体流程如图 5 所示：

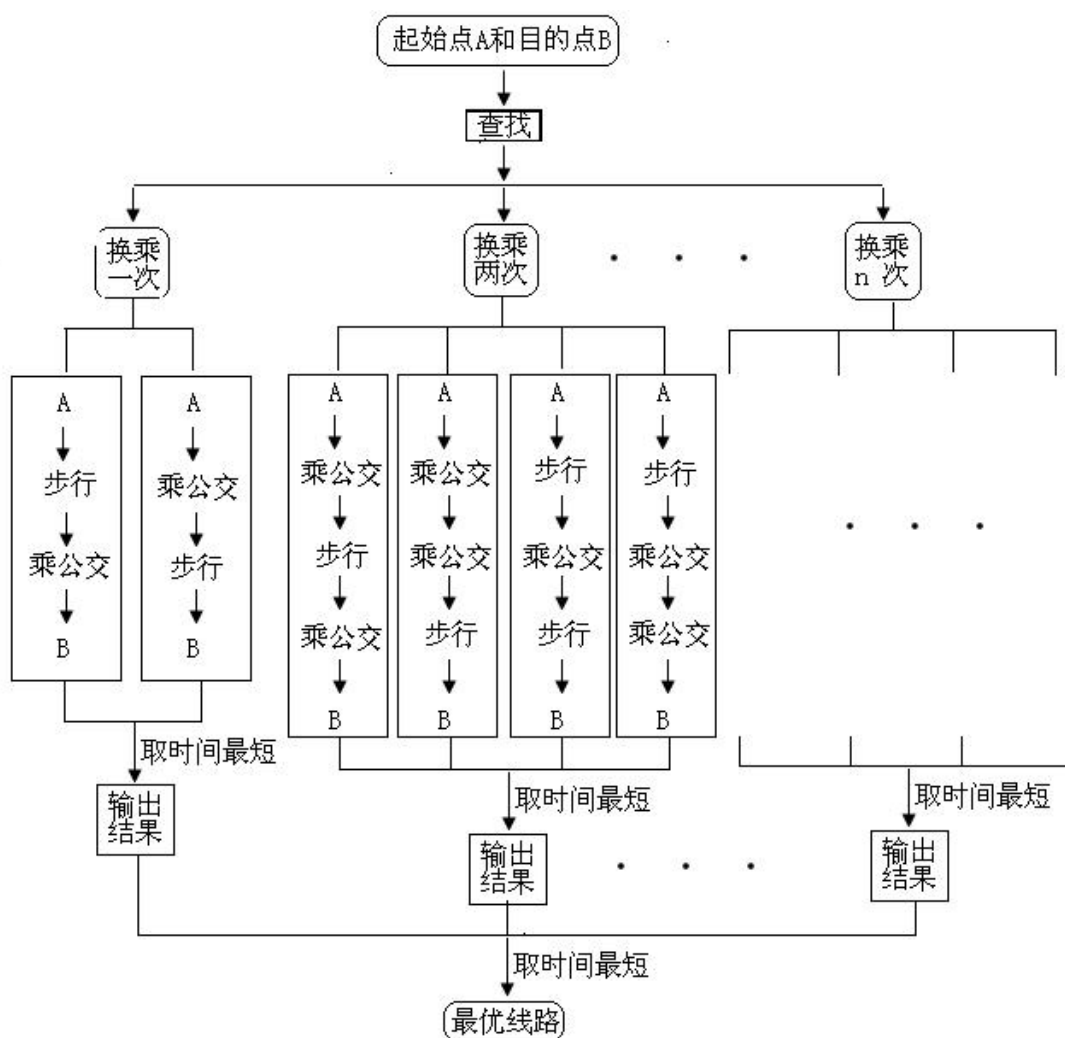


图 5

(2) 从起始点到终点的总时间的计算:

总时间包括: 票价转化总时间, 换乘耗费总时间, 各公交线路行驶的总时间和步行总时间。

其中票价转化总时间, 换乘耗费时间, 各公交线路行驶的总时间的计算同问题二:

$$\text{票价转化总时间: } X_2 = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3$$

$$\text{换乘耗费时间: } Y_2 = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 m_{ab} d_{ab}$$

$$\text{各公交线路行驶的总时间: } Q_2 = \sum_{a=1}^2 \sum g_{aj} d_a$$

$$\text{对于步行总时间 } V, \text{ 等于步行的路段的时间总和: } V = \sum R_{ij}$$

综上, 从起始点到终点的总时间为:

$$Z_2 = X_2 + Y_2 + Q_2 + V$$

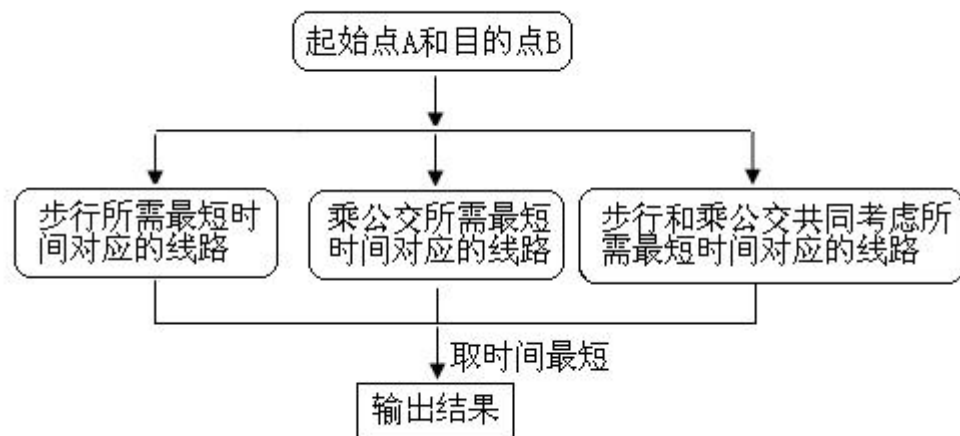
对其求最优，得到**模型(4)**：

$$\begin{aligned} \text{Min } Z_2 &= X_2 + Y_2 + Q_2 + V \\ \text{st. } \begin{cases} X_2 = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3 \\ Y_2 = \sum_{b=1}^2 \sum_{a=1}^2 m_{ab} d_{ab} \\ Q_2 = \sum_{a=1}^2 \sum_{aj} g_{aj} d_a \\ V = \sum R_{ij} \end{cases} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

但是考虑到换乘次数过多会影响到乘客的满意度，于是我们考虑对上述模型中的各部分所需的时间赋权：换乘耗费时间赋权值为 λ_X ，对其他部分时间赋权值为 λ_{YQV} 。由于乘次数为乘客的满意度影响的主要因素，且乘客的不满意度会随换乘次数的增多而增大，故换乘耗费时间所占权重应远大于其他部分时间所占权重，即 λ_X 远大于 λ_{YQV} 。由此我们就得到考虑不同乘客满意度的择优**模型(5)**：

$$\begin{aligned} \text{Min } Z_2 &= \lambda_X X_2 + \lambda_{YQV} (Y_2 + Q_2 + V) \\ \text{st. } \begin{cases} X_2 = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3 \\ Y_2 = \sum_{b=1}^2 \sum_{a=1}^2 m_{ab} d_{ab} \\ Q_2 = \sum_{a=1}^2 \sum_{aj} g_{aj} d_a \\ V = \sum R_{ij} \\ \lambda_{YQV} < \lambda_X \\ \lambda_{YQV} + \lambda_X = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5)$$

3、综合上述三部分：我们取三部分中的总时间最小的线路，即可得到所有情况（包括只步行，只乘公交，和步行交叉乘公交）的最优线路。



令 $U_1 = \text{Min}Z_1$: 表示从起始点乘公交到目的点所需的最短总时间

$U_2 = R_{AB}$: 表示从起始点 A 步行到目的点 B 所需最短时间

$U_3 = \text{Min}Z_2$: 表示从起始站步行交叉乘公交到目的站所需最短时间

则建立总的一般模型(6):

$$\begin{aligned}
& \text{Min}(U_1, U_2, U_3) \\
& \left. \begin{aligned}
& U_1 = \text{Min}Z_1 \left\{ \begin{aligned}
& Z_1 = X_1 + Y_1 + Q_1 \\
& X_1 = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3 \\
& Y_1 = \sum_{b=1}^2 \sum_{a=1}^2 m_{ab} d_{ab} \\
& Q_1 = \sum_{a=1}^2 \sum g_{aj} d_a
\end{aligned} \right. \\
& U_2 = R_{AB} \\
& U_3 = \text{Min}Z_2 \left\{ \begin{aligned}
& Z_2 = \lambda_X X_2 + \lambda_{YQV} (Y_2 + Q_2 + V) \\
& X_2 = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3 \\
& Y_2 = \sum_{b=1}^2 \sum_{a=1}^2 m_{ab} d_{ab} \\
& Q_2 = \sum_{a=1}^2 \sum g_{aj} d_a \\
& V = \sum R_{ij} \\
& \lambda_{YQV} < \lambda_X \\
& \lambda_{YQV} + \lambda_X = 1
\end{aligned} \right. \\
& O_i = \frac{480 pe_i}{n} \quad (i=1,2,3)
\end{aligned} \right\} \text{st.} \quad \dots\dots\dots(6)
\end{aligned}$$

最终求得的结果则为从起始站到终点站的最小总时间，所对应的线路即为最佳线路。

模型评价与推广

1、本模型成功解决了最佳公交线路的选择。在模型中我们将票价转化为了票价时间，把多目标转化为了单目标，综合考虑乘车总票价对乘客满意度的影响，以乘车总时间最短为目标给出了较为满意的选择线路。其中，给出的公交线路最短路径算法，大大减少了运算量，提高了运行速度，并克服了 Dijkstra 算法等经典的最短路径算法遇到的一系列困难；

2、本算法在用程序实现时建立了站点数据库和线路数据库，大大提升了数据搜索的速度，而且通过编程求解能够得到任意两站点间的所有最佳线路（在附录一中我们即给出了问题中所求站点间的所有最优线路），乘客可以根据当时的交通状况做出适当选择；

3、问题三得到的最终模型充分考虑到了乘客的满意度，使得求出的最佳线

路换乘次数有所限制,比较符合实际;而且还可以解决很多突发事件引起的交通耽搁,如公交车故障、交通事故引起线路堵塞等,乘客可以根据查询选其耗时最少的线路步行至某站点,再坐公交到达目的地。

4、本问题一模型和算法忽略了换乘三次以上的情况,但从另一方面看,假如某城市的公交车网中换乘了两次都还未到达目的地,说明这个城市的交通网设计还不够完善,还需要改进;因此使用我们的模型和算法一定程度上还可以用来检测某城市的交通网的健全程度如何。

5、本模型和算法还可以用于大数据量的处理或运算,比如某个地区物资的有向运输。

模型改进方向

在处理一、二问时,我们限定了乘客选择公交路线时最多换乘两次,没有考虑换乘次数对乘客的满意度的影响。因此最终得出的最佳线路有一定的局限,有待改进,具体改进方法同问题三图4的第三部分:

对模型(1)、模型(2)中的各部分所需时间赋权重:换乘耗费时间赋权值为 λ_x ,对其他部分时间赋权值为 λ_{yQ} 。由于乘次数为乘客的满意度影响的主要因素,且乘客的不满意度会随换乘次数的增多而增大,故换乘耗费时间所占权重应远大于其他部分时间所占权重,即 λ_x 远大于 λ_{yQ} ,且 λ_x 值随乘客的不同而不同。

得到问题一的改进模型(7):

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \lambda_x X + \lambda_{yQ} (Y + Q) \\ \text{st. } \begin{cases} X = \sum_{i=1}^2 h_i O_i \\ Y = m_{11} d_{11} \\ Q = \sum g_{1j} d_{1j} \\ O_i = \frac{480 p e_i}{n} \quad (i=1,2) \\ \lambda_{yQ} \ll \lambda_x \\ \lambda_x + \lambda_{yQ} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(7)$$

问题二的改进模型(8):

$$\begin{aligned}
& \text{Min } Z = \lambda_X X + \lambda_{YQ} (Y + Q) \\
& \text{st. } \begin{cases} X = \sum_{i=1}^2 h_i O_i + O_3 \\ Y = \sum_{b=1}^2 \sum_{a=1}^2 m_{ab} d_{ab} \\ Q = \sum_{a=1}^2 \sum_{aj} g_{aj} d_a \\ O_i = \frac{480 pe_i}{n} \quad (i=1,2,3) \\ \lambda_{YQ} < \lambda_X \\ \lambda_X + \lambda_{YQ} = 1 \end{cases} \dots\dots\dots(8)
\end{aligned}$$

则最终得出的最佳线路应转车几次将取决于乘客的满意度标准，即 λ_X 值。

参考文献

- [1] 何胜学，范炳全，严凌，公交网路最优路径的一种改进求解算法，上海理工大学学报，第 28 卷第 1 期：65，2006。
- [2] 陈箫枫，蔡秀云，唐德强，最短路径算法分析及其在公交查询的应用，工程图学学报，第 3 期：22-23，2001。
- [3] 陆忠，钱翔东，张登荣，基于最短路径查询的城市公交网络拓扑建模研究[J]，遥感信息，11-14，2002。
- [4] 吴景彦，去年北京居民人均年收入近 2 万元，
<http://finance.qq.com/a/20070125/000116.htm>，2007 年 9 月 22 日。

C 题：手机“套餐”优惠几何

龚科 甘霞光 王冬生

指导教师：罗明奎

摘要

本题是一个对移动公司现有“套餐”方案作出评价，并设计出新“套餐”方案的问题。

问题一、根据收费标准，以主叫通话量为自变量，月通话费用为因变量，得到各个方案资费的计算式。将两种“套餐”的不同资费方案分别与没有办理套餐的资费相比较，确定出哪种“套餐”方案适应哪种通话量的用户。

问题二、从移动公司的效益考虑，提出效益度评判准则。分别计算不办理“套餐”与办理不同的“套餐”所对应的移动公司的收益，作出比较，得到公司的效益度。从消费者的通话量考虑，提出适用度评判准则。消费钱数不变，分别计算不办理“套餐”与办理不同的“套餐”所对应的消费者的通话分钟数，作出比较，得到消费者的适用度。依次分别评判各种资费。最后将效益度与适用度分别付权重综合评定。

问题三、用问题二提出的评价准则与方法，评定该“套餐”的好坏。

问题四、设计出了两种新套餐方案。第一种新“套餐”设计是根据“99套餐”中用户比例在方案一中过大，而在方案 3、4 中过小，通过将方案 1 细分，同时去除方案 3、4，得到一个新“套餐”，利用效益度和适用度评价，结果较好。第二种新“套餐”是从“套餐”资费的免费主叫分钟数、“17951 国内 IP 长途”的细化和重配以及免费增值业务三方面综合考虑，设计出来的，最后利用效益度和适用度评价，结果设计出的“套餐”效果较好。

关键词：“套餐” 效益度 适用度 满意度 抱怨系数

一、问题重述（略）

二、问题假设

- (1)用户的主叫和被叫时间是相等的。
- (2) 用户的通话时间是以平均值为期望符合正态分布的。
- (3)全球通用户的通话情况和移动通信所有用户的通话情况一致。
- (4) 在问题二中认为本地通话量即为该用户的通话量，忽略长途的影响。

三、符号说明

\bar{x}_1 未推出“套餐”时的人均月通话时间

\bar{x}_2 推出“套餐”时的人均月通话时间

Q 移动通信的消费人群基数

m “套餐”方案中的 GPRS 流量

t IP 国内长途通话时间

α_i 第 i 种“套餐”的效益度

β_i 第 i 种“套餐”的适用度

y_{ij} 第 i 种“套餐”第 j 种方案的通话资费

a_{ij} 第 i 种“套餐”第 j 种方案的月基本费

b_{ij} 第 i 种“套餐”第 j 种方案的超出基本通话时间后的本地主叫资费

c_{ij} 第 i 种“套餐”第 j 种方案的月基本通话时间

p_{ij} 第 i 种“套餐”第 j 种方案的消费者人群比例

四、问题分析

问题一：本题需要求出两种“套餐”资费的计算方法，并根据求出的计算方法进行分析比较，讨论出通话量与资费的关系，以此来分析说明哪种“套餐”方案更适应于哪种的用户。其中还涉及到 GPRS 流量、IP 国内长途资费以及彩信等业务，但问题中只要求讨论通话时间对资费的影响，对于这些额外的业务并不需要考虑。

根据附录 2 中给出的两种“套餐”资费不同方案的收费标准，可以很容易得到各个方案的资费计算方法。

对于哪种“套餐”方案更适合哪种通话量的用户，可以考虑为，每种方案都有自己的基本通话时间，如果超出基本通话时间就要额外收费，若前一种方案的月基本费与额外收费之和超过了下一种方案的月基本费，而总的通话时间还未达

到下一种方案的基本通话时间,就应该考虑选择下一种方案。以此分析讨论说明哪种“套餐”方案适用于哪种通话量的用户。

问题二: 本题要求我们提出对各种资费方案的评价准则和方法, 并据此对北京、上海推出的“套餐”方案与现行的资费标准作分析比较, 并作出评价。

要对各种资费方案做出评价, 就要从移动公司和消费者这两方面来考虑比较全面地评价。可以引入反映移动公司的对套餐收益大小的“效益度”和“套餐”对消费者的吸引力的“适用度”这两个评判准则。其中“效益度”判准则就是分别计算不办理“套餐”与办理不同的“套餐”所对应的移动公司的收益, 作出的比较值; “适用度”就是以消费钱数不变, 分别计算不办理“套餐”与办理不同的“套餐”所对应的消费者的通话分钟数, 作出的比较值。

针对人群在各通话量段的比例, 分别讨论出“套餐”与现行资费标准各自适用的人群的比例, 从而得到了“套餐”的适用度。综合将效益度与适用度分别付权重综合评定。

问题三: 本题要求我们对新推出的这个“套餐”方案进行评价, 对于这个新的“套餐”的评价, 主要结合的是我们提出的“适用度”等, 进行分析讨论与评价。

问题四: 要求我们设计出新的“套餐”方案。我们主要从细化原有方案和增值业务两个角度分别设计出两种“套餐”方案。

第一种新套餐方案: 根据前面对两个套餐的研究结果, 从中发现“畅听 99 套餐”方案中有 95.7284%的消费者将会选择第一档消费, 即方案一; 在“全球通 68 套餐”方案中有 89.2512%的消费者也将选择第一档消费。而有的方案里几乎就没有消费者人群, 这些都说明“套餐”的分档比较粗糙, 最主要的是对消费者来说, 通话量没有达到包含通话时间与达到包含通话时间交的费用却相等, 这样就有一定的不公平性, 就不能很好地满足不同层次的消费者的要求, 所以我们准备在原有的基础上进一步把第一档细化, 来设计出新的套餐方案。

为确切的表示不公平性的大小, 引入了抱怨系数这一概念, 即: 通话时间极差越大, 不公平性就越大, 抱怨程度就越大。所以要在原有的基础上进一步把第一档细化, 降低抱怨程度, 提高套餐的吸引力。计算新设计“套餐”的效益度、适用度, 评价“套餐”, 要比以前的“套餐”要好。

第二种新套餐方案: 对于我们设计的新“套餐”在求解过程中只强调主动通话时间, 而不计被动通话时间, 最后再与前面全部通话时间做比较。

首先, 假设主叫时间和总通话时间一样都服从正态分布只是平均值和标准差都同时减小了一半。根据各个方案的覆盖率确定区间点。将新“套餐”方案划分的免费通话时间设定在其正态分布返回值附近, 从而保证了每一方案都有其合理的覆盖率, 然后利用问题二相似的计算方法, 计算出新“套餐”的效益度。

然后, 从“17951 国内 IP 长途”方面, 计算知客户对其需求量较小, 所以采取允许将“17951 国内 IP 长途”以一定比例更换为相应的免费主叫时间, 通过查阅资料确定了全球通用户“17951 国内 IP 长途”的主叫通话时间分钟数的分布情况, 依然根据问题二中相似的计算方法, 计算出新“套餐”的效益度。

最后, 在新老“套餐”免费送出的增值业务的比较上, 将增值业务设计成可以选择的方式, 由各方案免费增值业务的价值和覆盖率的情况, 得到新老“套餐”的适用度, 再计算出新“套餐”的效益度。比较可以说明新“套餐”较好

五、模型的建立与求解

问题一：

根据附件 2 中给出的北京移动公司全球通“畅听 99 套餐”方案和上海移动公司“全球通 68 套餐”方案这两个方案，分析两方案之后发现：第一种“套餐”包含了一定的本地主叫免费分钟数，被叫是全免费的；而第二种“套餐”包含了一定的本地通话免费分钟数的，超出这个本地通话免费分钟数，被叫是免费的。这样在被叫上，两种套餐所采用的优惠方式并不相等，所以在计算中要将主叫与被叫区分开来，根据假设一个消费者的主叫与被叫时间是相等的。下面分别讨论两种套餐各方案的资费计算方法。

(1)北京移动公司全球通“畅听 99 套餐”方案：

该套餐中资费主要由本地主叫资费、GPRS 流量资费和 IP 国内长途资费 3 部分构成，根据其给出的收费标准：

北京移动公司全球通“畅听 99 套餐”方案

方案	月基本费（元）	本地主叫(min)	超出后本地主叫（元/min）	本地被叫（元/min）	包含数据业务	IP 长途（元/min）
方案①	99	280	0.35	0	10M GPRS 流量	0.1
方案②	139	560	0.25	0	10M GPRS 流量 + 25 条彩信	0.1
方案③	199	1000	0.2	0	50M GPRS 流量	0.1
方案④	299	2000	0.15	0	50M GPRS 流量	0.1

其资费计算式为月基本费、超出后本地主叫费用、数据业务费用以及 IP 长途费用之和。可以得到四种方案的资费计算式为：

$$y_1 = \begin{cases} 99 + \left(\frac{x}{2} - 280\right) * 0.35 + (m - 10) * 30.72 + 0.1t & x \geq 280, x \geq t, m \geq 10 \quad \text{①} \\ 139 + \left(\frac{x}{2} - 560\right) * 0.25 + (m - 10) * 30.72 + 0.1t & x \geq 560, x \geq t, m \geq 10 \quad \text{②} \\ 199 + \left(\frac{x}{2} - 1000\right) * 0.2 + (m - 50) * 30.72 + 0.1t & x \geq 1000, x \geq t, m \geq 50 \quad \text{③} \\ 299 + \left(\frac{x}{2} - 2000\right) * 0.15 + (m - 50) * 30.72 + 0.1t & x \geq 2000, x \geq t, m \geq 50 \quad \text{④} \end{cases}$$

其中 x 表示的是通话时间（包含主叫与被叫）

根据题目的要求，要针对不同通话量需求的用户选择哪一种方案比较好，说明哪种方案适用于哪种用户，这就要分析讨论出通话与资费的关系。为了更好的比较，对上面的资费计算式进行简化，单纯考虑资费与通话的关系，得到新的资费计算式为：

$$y_1 = \begin{cases} 99 + (\frac{x}{2} - 280) * 0.35 + 0.1t & x \geq 280 & \textcircled{1} \\ 139 + (\frac{x}{2} - 560) * 0.25 + 0.1t & x \geq 560 & \textcircled{2} \\ 199 + (\frac{x}{2} - 1000) * 0.2 + 0.1t & x \geq 1000 & \textcircled{3} \\ 299 + (\frac{x}{2} - 2000) * 0.15 + 0.1t & x \geq 2000 & \textcircled{4} \end{cases}$$

同理，根据“全球通 68 套餐”方案的收费标准：

月基本费 (元)	本地通话 (min)	超出后本地资费(元/min)	
		主叫通话	被叫通话
68	360	0.18	0
128	800	0.16	0
188	1200	0.13	0

可以得到四种方案的资费计算式为：

$$y_2 = \begin{cases} 68 + (x - 360) * 0.18 & x \geq 360 & \textcircled{1} \\ 128 + (x - 800) * 0.16 & x \geq 800 & \textcircled{2} \\ 188 + (x - 1200) * 0.13 & x \geq 1200 & \textcircled{3} \end{cases}$$

利用以上的各方案资费的计算式，我们建立一个比较模型就能够得到各种套餐方案的适用通话量。如果前一种方案的月基本费与额外收费之和超过了下一种方案的月基本费，而总的通话时间还未达到下一种方案的基本通话时间，就选择下一种方案。于是得到我们的比较模型为：

$$\text{模型一：} \quad y_{ij} \leq a_{i(j+1)}$$

下面我们运用以上模型求解：

(1) “畅听 99 套餐” 方案

I、比较方案①和②

$$\textcircled{1} y_{11} \leq 139, \text{ 则: } 0.175x + 0.1t \leq 138$$

这样计算通话时间上就可以取出两个极限，一个就是不打国内 IP 长途，另一个就是整个计费都用于打国内的 IP 长途，计算出两个极限。

$$\text{若 } x = t, \text{ 则有: } x \leq 614$$

$$\text{若 } t = 0, \text{ 则有: } x \leq 790$$

所以若不打国内长途，主叫通话时间在 $614/2=307\text{min}$ 内，或若打国内长途，主叫通话时间上限对应应在 307~395 之间时宜选用方案①；反之选择方案②。

II、比较方案②和③

② $y_{12} \leq 199$ ，则： $0.125x + 0.1t \leq 200$

根据上面的一样，还是取两个极限来计算。

若 $x = t$ ，则有： $x \leq 1144$

若 $t = 0$ ，则有： $x \leq 1600$

所以若不打国内长途，主叫通话时间在 $1600/2=800\text{min}$ 内，或若打国内长途，主叫通话时间上限对应应在 572~800 之间时宜选用方案②；反之选择方案③。

III、比较方案③和④

③ $y_{13} \leq 299$ ，则： $0.1x + 0.1t \leq 300$

若 $x = t$ ，则有： $x \leq 2000$

若 $t = 0$ ，则有： $x \leq 3000$

所以若不打国内长途，主叫通话时间在 $3000/2=1500\text{min}$ 内，或若打国内长途，主叫通话时间上限对应应在 1000~1500 之间时宜选用方案③；反之选择方案④。

综合以上分析，得出结论为：

对于不常打国内长途的用户

选用“套餐” “方案”	通话时间(min)
方案一	$x \leq 790$
方案二	$790 \leq x \leq 1600$
方案三	$1600 \leq x \leq 3000$
方案四	$3000 \leq x$

ii 对于经常打国内长途的用户

选用“套餐” “方案”	通话时间(min)
方案一	$x \leq 614$
方案二	$614 \leq x \leq 1144$
方案三	$1144 \leq x \leq 2000$
方案四	$2000 \leq x$

(2) 上海移动公司“全球通 68 套餐”方案：

同样根据上面的讨论计算方法，得到结论为：

选用“套餐”方案	通话时间 (min)
方案一	$x \leq 694$
方案二	$694 \leq x \leq 1175$
方案三	$1175 \leq x$

问题二：

题目中要求对移动全球通用户现行的各种资费标准建立评判准则与方法，并作分析、比较，进行相应的评判。对于评判准则，我们主要从两个方面来考虑，一个是移动公司的收益也就是效益度，一个是消费者的适用度。这样使用“套餐”的效益度和适用度就能很好的反映移动公司的收益程度和消费者的需求和满意程度。

根据计算“套餐”的效益度和适用度来评价“套餐”的优劣。在消费人群的基础上，移动公司通过“套餐”带来的收益与现行的资费标准带来的收益作比较，

得到套餐的效益度。通过计算更适合使用“套餐”的人群与更适合使用现行资费标准的适用人群作比较，得到“套餐”的适用度。具体如下：

(1)消费人群的建立：

不管是效益度还是适用度，都离不开消费人群，所以要首先要建立一个科学的消费人群。对“套餐”的影响力进行分析，公司推出套餐的目地就是为了吸引更多的消费者，增加通话量。这样就简化的认为通话量的增长是由套餐带动的，在未推出套餐以前人群的通话量停留在 2006 年的基础上，而推出套餐之后，通话量即按照现有的增长趋势达到增长后的 2007 年的总通话时间。人群的基数不变，从而简化确定出不同方案的平均通话时间。

“套餐”能够带动消费，能够带动通话量，现行通话资费方案的消费人群的平均通话时间可以用 2006 年的消费人群平均通话时间来算。根据附录 1 中所给数据，2006 年的移动消费者为 4 亿人，年总本地通话时间为 15882.7 亿分钟，所以简化计算出未推出套餐时的人均月本地通话时间 \bar{x}_1 为：

$$\bar{x}_1 = \frac{\text{年总通话时间}}{\text{消费者人数} * \text{月份}} = \frac{15882.7}{4 * 12} \text{min} = 331 \text{min}$$

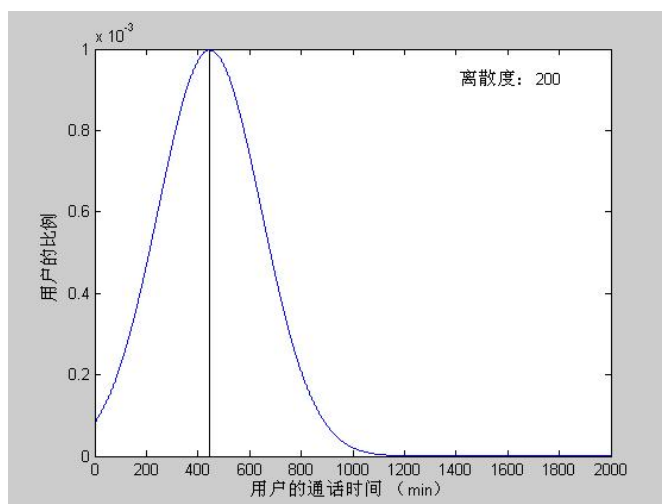
推出“套餐”以后，各“套餐”方案的消费人群的平均通话时间以 2006 年增长后的 2007 年的消费人群的预计平均通话时间来算，增长趋势仍以 2006 年的 34.7%来计，则使用套餐时的人均月本地通话时间 \bar{x}_2 为：

$$\bar{x}_2 = \frac{\text{年总通话量} * \text{增长率}}{\text{消费者人数} * \text{月份}} = \frac{15882.7 * 134.7\%}{4 * 12} \text{min} = 446 \text{min}$$

根据人均月通话时间，进一步考虑人群的通话时间量的分布，建立出消费人群。通话时间量作为一个随机事件，是符合一个正态分布的。所以据此建立一个通话时间符合正态分布的消费人群，从而得到套餐各个方案适用人群的比例以及不使用“套餐”的人群比例。

根据正态分布的相关知识，移动用户的通话时间量是以 \bar{x}_2 这个平均通话时间为对称轴服从于正态分布的关系，即：

$$\mu = \bar{x}_2 = 446 \text{min}$$



正态曲线下横轴上一定区间的面积反映该区间的例数占总例数的百分比。不同 (X_1, X_2) 范围内正态曲线下的面积为:

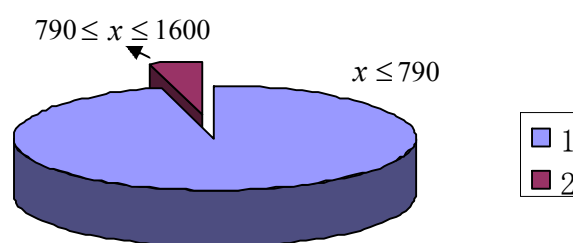
$$D = \int_{X_1}^{X_2} f(x)dx = \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$

$$\text{其中, } u_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}, \quad u_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma}。$$

根据所查得的一些相关的资料,得到大部分人的通话量基本都是在平通话时间上下约三个小时波动的,故可以将 σ 定位为 200min,这样根据正态分布的函数关系,确定出不同“套餐”中不同方案的覆盖人群的比例,计算得到的值为:

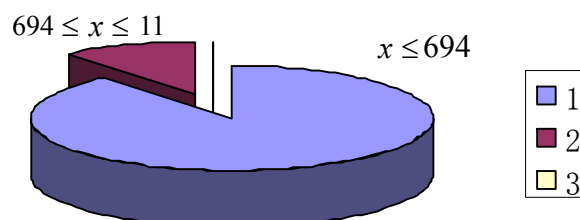
对于“畅听 99 套餐”方案

通话时间 (min)	‘套餐’人群的 覆盖率 (%)
$x \leq 790$	95.7284
$790 \leq x \leq 1600$	4.27
$1600 \leq x \leq 3000$	0
$3000 \leq x$	0



对于“全球通 68 套餐”方案

通话时间 (min)	‘套餐’人群的 覆盖率 (%)
$x \leq 694$	89.2512
$694 \leq x \leq 1175$	10.74
$1175 \leq x$	0.014



(2) “套餐”效益度模型的建立:

要体现“套餐”的效益度,就必须把“套餐”的收益与现行资费标准的收益作比较,必须分别计算出各种方案的收益。为了便于计算,以本地通话量看作整

个通话量。下面就“套餐”和现行收费标准所带来的收益分别进行计算。

I、现行资费标准的月收益：

其中主叫和被叫的收费都是 0.4 元/分，将没有推出“套餐”时的平均本地通话时间代入计算，得到现行资费标准下移动公司的月收益 W_0 为：

月收益 = (每分钟的话费 * 通话时间 + 月基本费) * 消费者的量

$$W_0 = (0.4\bar{x}_1 + 50) * Q = (0.4 * 331 + 50) * Q = 182.4Q \text{ 亿元}$$

II、“畅听 99 套餐”的月收益：

根据建立的消费人群，结合上面计算出的使用该套餐各种方案的人群比例，以及对应给出的各个方案的计费标准，同时认为处于各方案的消费者平均通话时间为该方案中适用通话时间的平均值，建立套餐的月收益模型：

$$\text{模型二:} \quad W_i = \sum_{j=1}^4 \left[a_{ij} + \left(\frac{x_{ij} - c_{ij}}{2} \right) * b_{ij} \right] * p_{ij} * Q$$

这里 i 是 1 也就是“畅听 99 套餐”； a_{1j} 第 j 种方案的月基本费； x_{1j} 第 j 种方案月平均通话时间； c_{1j} 第 j 种方案月基本通话时间，也就是包含的主叫分钟数的两倍； b_{1j} 第 j 种方案超出“套餐”部分本地主叫资费； p_{1j} 第 j 种方案消费人群比例； Q 移动消费人群基数。

带入具体的数值计算出 $W_1 = 104.574Q$

III、“全球通 68 套餐”的月收益：

计算方法同“畅听 99 套餐”基本一样，就可以得到该套餐的月收益 W_2 为：

$$W_i = \sum_{j=1}^3 \left[a_{ij} + \left(\frac{x_{ij} - c_{ij}}{2} \right) * b_{ij} \right] * p_{ij} * Q$$

这里 i 是 2 也就是“全球通 68 套餐”； a_{2j} 第 j 种方案的月基本费； x_{2j} 第 j 种方案月平均通话时间； c_{2j} 第 j 种方案月基本通话时间，不一定是主叫分钟数的两倍； b_{2j} 第 j 种方案超出“套餐”部分本地主叫资费。

带入具体的数值计算出 $W_2 = 89.175Q$

IV、“套餐”效益度模型：

根据上面的各个的“套餐”月收益值，即可建立效益度函数得到各种套餐的效益度，其方法为办理“套餐”的收益与不办理“套餐”收费标准收益作比较，建立效益度模型如下：

模型三：

$$\alpha_i = \frac{W_i}{W_0} \times 100\% \quad i = 1, 2$$

代入以上结果得到： $\alpha_1 = 57.33\%$ $\alpha_2 = 48.89\%$

以上结果显示第一种“套餐”的效益度为 57.33%，第二种套餐的效益度为 48.89%，其效益度都不好，说明两种“套餐”的经济效应都不及不办理“套餐”资费标准所带来的经济效应，移动公司收入将会分别比以前减少 42.67%和 51.11%。但两种“套餐”相比之下，第一种“套餐”在收益上要比第二种“套餐”高，相对于移动公司来说更好一点。

V、“套餐”适用度模型：

“套餐”的适用度即为使用各套餐的人数在总的消费人数中的比例。从消费者省钱的角度出发，以“套餐”是否能够为消费者省钱作为消费人群选择“套餐”的标准，来求解各个“套餐”适用人群的比例。

为简化计算只考虑本地通话，先以现行资费标准的收费方式来计，当用户的通话支出费用达到“畅听 99 套餐”方案中的最低月基本费用 99 元时，其通话分钟数为：

$$50 + 0.4x_0 \leq 99 \quad \Rightarrow x_0 \leq 123 \text{ min}$$

与套餐中所给的免费包含通话时间比较，其中“套餐”的本地主叫为 280 分钟，远远多于 123 分钟，而且被叫是免费的，超出本地主叫时间后也只是以 0.35 元/min 来计，比没有办理“套餐”的要优惠得多，所以认为每月通话量在 123min 以内才没有必要办理“套餐”的业务，反之则选择办理该“套餐”业务。

同理计算“全球通 68 套餐”方案中的最低月基本费用 68 元的情况下，其通话分钟数为：

$$50 + 0.4x_0 \leq 68 \quad \Rightarrow x_0 \leq 45$$

而套餐的本地通话时间为 360 分钟，远多于 45 分钟，所以认为只有每月通话量在 45 分钟以内的才没有必要办理套餐的业务，反之则选择办理该套餐业务。

根据建立的正态分布的消费人群，计算出的结果如下：

通话时间	消费人群比例
$x_0 \leq 123$	5.316%
$x_0 \leq 45$	2.248%

相应的使用“畅听 99 套餐”的人群比例为：94.684%；使用“全球通 68 套餐”的人群比例为 97.752%。这两个比例即为两种套餐的适用度。

结论为：“畅听 99 套餐”的适用度 β_1 为 94.684%，“全球通 68 套餐”的适用度 β_2 为 97.752%

可以看出两种“套餐”的适用度都很高，能够适用于绝大部分人群，并且第二种套餐的适用度要比第一种更高。

VI、综合评定:

根据效益度与适用度的计算结果,可以说从总体上看两种套餐的使用度都较好,但是效益度却不容乐观。其中“畅听 99 套餐”的效益度比“全球通 68 套餐”的效益度要好,但适用度却恰恰相反。这也是符合实际情况的,因为适用度和效应度本来两个相互矛盾的指标,公司要追求更高的利润,必然就会降低适用度;但是产品对于消费者越优惠,公司的盈利也就必然降低。根据两个指标之间的这种关系,我们可以将两个指标各赋予 0.5 的权重,给出一个综合的评定模型:

模型四:
$$U_i = 0.5\alpha_i + 0.5\beta_i \quad i = 1, 2$$

求解得到“畅听 99 套餐”的综合评价为: $U_1 = 76.007\%$

“全球通 68 套餐”的综合评价为: $U_2 = 73.321\%$

问题三:

本题中移动又推出了“被叫全免费计划”方案,即只需交纳月租 50 元,本地被叫全免费,其它项目资费均同现行的资费标准,但要求用户至少在网一年。对这个方案的评价,主要考虑一年之内消费者对这种“套餐”的适用度。以不考虑由“套餐”带来的通话时间的改变来计算。假设用户年没有办理该“套餐”时在线天数 d 与年通话时间 $12x$ 分钟呈正比关系,比例系数为 k 。即 $d = k * 12 * x$ 。

(1)消费者的费用:

由附录中停机保号 20 元 / 月, 按天计算为 $20 / 31 \times$ 停机天数。月租日收 $= 50 \text{ 元} \times 12 / 365 \times$ 当月在网天数, 所以计算不办理“被叫全免费计划”的情况下, 消费者的费用:

$$\text{停机保号的费用: } \frac{20}{31}(365 - d) = 235.48 - 0.64k * 12 * x$$

$$\text{在网的月租费用: } \frac{50 * 12}{365} * d = 1.64k * 12 * x$$

$$\text{全年通话费用为: } 0.4 * 12 * x$$

这样消费者一年的支出 $12y_0$ 为:

$$\begin{aligned} 12y_0 &= \frac{20}{31}(365 - d) + \frac{50 * 12}{365}d + 0.4 * 12 * x \\ &= 235.48 - 0.64k * 12 * x + 1.64k * 12 * x + 0.4 * 12 * x \\ &= (1 + k) * 12 * x + 235.48 \end{aligned}$$

(2)办理“被叫全免费计划”的消费者一年的支出为:

$$12y_3 = 50 * 12 + 0.4 * 0.5 * 12 * x$$

判定: 当 $y_0 < y_3$ 时, 消费者情愿选择不办理“被叫全免费计划”。

当 $y_0 = y_3$ 时, 原则上消费者办理或不办理“被叫全免费计划”都是一样的, 但是提倡消费者办理此方案, 这样消费者的免费被叫通话时间可以增

加。

当 $y_0 > y_3$ 时，消费者应该选择办理“被叫全免费计划”。

求解：

当 $y_0 < y_3$ 时：

$$12y_0 = (1+k) * 12 * x + 235.48 < 50 * 12 + 0.4 * 0.5 * 12 * x = 12y_3$$
$$12x < \frac{364.12}{0.2+k}$$

根据上面的式子可以知道，当 k 取不同的值的时候，要使 $y_0 \leq y_3$ 则相应的通话时间取的值也不相同。

K 取不同值的时候相应的年通话时间

K 值	0.001	0.005	0.010	0.015	0.020
年通话时间 (min)	1811.5	1776.2	1733.9	1693.6	1655.1
K 值	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045
年通话时间 (min)	1618.3	1583.1	1549.4	1517.2	1486.2

从上面的表中可以看到每一个 k 所对应的通话时间 $12x$ 并不相同，这样就任意取其中的一个 k 值来作方案的评价，随机的选取 $k=0.020$ ，那么通话时间在 1655.1min，如果通话时间小于 1655.1min 的话，那么 $y_0 \leq y_3$

也就是说消费者不用办理“被叫全免计划”的“套餐”，如果通话时间大于等于 1655.1min 的话，消费者办理“被叫全免计划”则向对的较为便宜。

而评价这项业务的优越性也就是要考察办理这种套餐的人群覆盖率，有多少人愿意办理这项业务，如果这项业务有很多的消费者需要办理的话，那么可以说这项业务对于消费者来说是好的，是个好的方案。

根据问题二中对于消费者群体的通话时间的量是在符合正态分布的即：

$$D = \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$

其中在这里使用的 μ 值为 331min 为，也就是第一年的平均通话时间，而 σ 代表的是 200，也就是说以 330min 为中值，在其上下波动 200min 的用户占有 66.8%。

根据正态分布的规律来计算到底有多少的消费者是处于这个“套餐”的覆盖之上的，由年通话时间为 1655.1min，知道它的月平均通话时间为 1655.1/12min，带入正态分布的模型计算，其中不办理“套餐”业务的人群的比例为 16.72%，办理“套餐”业务的人群的比例为 83.28%。

(3) “套餐”的评价：

由以上的结果可以看出，移动公司推出的“被叫全免费计划”方案，以通话时间计算，办理“套餐”业务的人群的比例为 83.28%。同时本套餐的前提是要求用户在网，这样就避免了用户为减少通话费用而离网。也会相对的吸引更多的

用户。对于移动公司来说，虽然降低了对单个消费者的利润，但是却能让更多的消费者选择此方案，从而从数量上弥补利润的损失甚至带来更多利润。

问题四：

本题要求我们设计一个全球通手机的资费方案，而在设计方案的时候会考虑哪些因素？根据我们的研究结果和北京、上海的实际情况，用数学建模方法设计出我们认为合理的“套餐”方案。根据实际的情况我们设计出如下两种“套餐”方案。

套餐一：

根据对问题的分析，为了使套餐更好地满足不同层次人群的需求，将套餐中人群比较集中的分档细分，具体将其分为两档，以提高套餐的公平性，降低消费者的抱怨度，更进一步显示套餐的魅力。

(1)引入抱怨系数：

在实际生活中，消费者在某一方案中过于集中将引发这样的现象：针对不同通话量的消费者，他们选择了同样的套餐方案，而他们的通话分钟数都未超过套餐所给的基本通话分钟数，所以他们应付的资费都是相同的，但由于他们通话量不同，相对而言通话量大的用户就会比通话量小的用户得到的优惠要多，如果通话量越少，其优惠程度就越多，所以其产生的抱怨心理就越大。

于是引入一个评判其是否公平的标准，在同一“套餐”方案中，在未达到基本通话量的情况下，消费者通话量越少，剩余免费分钟数就越多，该方案对其就越不公平，可以认为消费者的抱怨程度是与其未使用的剩余通话量成正比的。

其次在“套餐”方案中消费者所缴纳的月基本费用越多，该用户消费的通话量就越大，该用户就越不在乎剩余通话量，所以消费者的抱怨程度又是与其在该“套餐”中档次是成反比，所以得到一个抱怨系数 τ 来评判套餐分档的公平性，建立公平性评定模型：

模型五：

$$\tau = \frac{\int_{X_1}^{X_2} (X_2 - x)f(x)dx}{a_{ij}}$$

其中 X_1, X_2 分别为该套餐档次的通话量的上下限， x 为通话量， $f(x)$ 为消费者人群的通话量正态分布函数， a_{ij} 为套餐中第 j 档次的月基本费用。

通过引入的抱怨系数，就能对“套餐”所分档次的好坏进行评价并能很好地说明“套餐”档次的不公平的程度。在现给的两个“套餐”中，因为消费人群都主要集中在第一方案中，所以只需要对第一方案进行细分，得到设计的“套餐”。

(2)新套餐的建立：

通过对原有套餐各个方案的资费进行分析，发现档次越高，平均通话资费就越便宜，而且超时通话的单价也越低，其超出“套餐”部分主叫资费很接近于月基本费与包含本地主叫分钟数之商，据此可以将原有的方案细分。对“畅听 99 套餐”的第一个方案进行细分具体过程如下：

原来的第一方案的月基本费用为 99 元，月基本主叫时间为 280 分钟，超时主叫单价为 0.35 元/分。计算可知其月基本主叫的单价为 0.354 元/分，所以近似认为超时主叫与基本主叫的单价是相同的。而超时主叫单价是根据档次的升高而

逐渐递减的。

根据对原有套餐的分析，可以设定新分档的超时主叫单价为 0.4 元/分，基本通话时间为 t 分钟，则月基本主叫单价为 $0.4 \pm \rho$ 元/分（其中 ρ 为数值很小的一个数，月基本费用为 $\frac{(0.4 \pm \rho)t}{2}$ 元，因为 ρ 很小，所以月基本费用可以简化为 $(0.2 \pm \rho)t$ ，所得该档次的资费计算式为：

$$y = (0.2 \pm \rho)t + \frac{x-t}{2} \times 0.4 \quad t \leq x \leq 560 \text{ min}$$

推出了计算式就可以把新分档方案和原有的方案进行比较，可以得到新方案适合的人群。所以当 $y \leq 99$ 时，将 ρ 忽略不计，就可以得到： $x \leq 495$

所以当消费者的通话量在 495 分钟时，将选择新分档方案。则根据建立的消费者人群，可以得到新分档方案的人群比例为：59.6772%，相应的原有第一档方案的人群比例变为：36.0512%

那么如何确定新分档的月基本通话时间 t 呢？这就需要为套餐方案运营商的收入考虑，使其收入较现有“套餐”方案降低不超过 10%。由于新分档后套餐的收入并不会对后面几档造成影响，所以只对原套餐的第一档的收入进行计算比较。

套餐的每个档次方案计算公式为：

$$w_{ij} = (a_{ij} + \frac{x_{ij} - c_{ij}}{2} * b_{ij}) * p_{ij} * Q$$

代入数据得到原有套餐第一档的收入为： $w_1 = 98.6390$

分档后新套餐第一、二档的收入为： $w_2 = (0.1t + 49.5) \times 0.596772$

$$w_3 = 38.868$$

根据约束条件可知： $\frac{w_1 - w_2 - w_3}{w_1} \leq 10\%$

最后求解得到： $t \geq 331.3$

故可知道： $331.3 \leq t \leq 495$

所以只要运营商将月基本主叫时间设在 305 分钟以上时，就能保证其收入较现有“套餐”方案降低不超过 10%，为使收入不正好降低 10%，能够稍微扩大利润，在基于原套餐的月基本主叫时间，为了使其保持一定的协调性，我们可以将 t 取值为 360，则相应的月基本主叫时间为 180 分钟，月基本资费为 72 元。

由于原有的套餐的 3、4 方案的适用人群几乎为零，所以我们可以考虑将其从原有套餐中除去，所以得到我们新套餐方案为：

月基本 费（元）	本地主 叫(min)	超出后本地 主叫(元/min)	本地被叫 (元/min)	包含数据业务	IP 长途 (元/min)
72	180	0.40	0	10M GPRS 流量	0.1

99	280	0.35	0	10M GPRS 流量	0.1
139	560	0.25	0	10M GPRS 流量+ 25 条彩信	0.1

(3)新套餐的评价:

I、对新套餐的效益进行评价,借用套餐效益度模型,将新套餐的资费标准代入模型,得到该套餐的总收益为: $W_3 = 95.83Q$ 亿元

所以该套餐的效益度为: $\omega_3 = 52.54\%$, 比原套餐的效益度降低了 4.79 个百分点。

将其与原套餐的收益相比较: $\frac{W_1 - W_3}{W_1} \times 100\% = 8.36\%$

所以新套餐较“畅听 99 套餐”方案运营商的收入降低 8.36%,符合题目所给的条件。

II、适用度评价,在对前两个套餐评价中用到了适用度模型,这里以同样的方法借用该模型来对新套餐的适用程度进行评价。

将新套餐同现行资费标准的收费方式作比较,当用户的通话支出费用达到新套餐方案中的最低月基本费用 72 元时,其通话分钟数为:

$$50 + 0.4x \leq 72 \quad x \leq 55$$

根据通话量为正态分布的消费人群,其中通话量在 55 分钟内的人群比例为: 2.529%,所以新套餐的适用度即为: 97.471%。

该适用度比原“畅听 99 套餐”的适用度 94.684%要大,说明新套餐的适用度更好。

III、满意度评价,设计的该新套餐的目的在于提高消费者对“套餐”的满意度,以提升移动全球通在通信领域里的竞争力,这也是为什么运营商宁愿收入少一点,也要推出新套餐的目的。

通过已经建立的抱怨系数对套餐公平性的评判体系,现在要运用该体系对新套餐和原“99 套餐”的消费者的满意度进行评判,以评判所建立的模型在公平性和吸引力上的是否具有优越性。所说的“套餐”的抱怨系数越小满意度就越高。

根据抱怨系数计算式,用 MATLAB 软件求解得到:

原“畅听 99 套餐”的抱怨系数为: $\tau_1 = 1.2292$

新套餐的抱怨系数为: $\tau_2 = 0.518$

比较两个抱怨系数,发现新套餐的抱怨系数要比原“畅听 99 套餐”的抱怨系数小得多,也就是说消费者对新套餐的满意程度要比原“畅听 99 套餐”的满意程度高得多,所以新套餐的公平性和吸引力要比原套餐强。这也很好地满足了运营商的目的。

“套餐”二:

题目要求新“套餐”设计的标准不能让现有“套餐”方案运营商的收入降低

不超过 10%，也就是新“套餐”在表面上损害了现有“套餐”方案运营商的收入，但是由于新“套餐”更为吸引顾客，更适合消费者的胃口，所以带来更多的新客户，从而为运营商带来更大的利润。

对于该问题的解决，从现有“套餐”的资费改进、添加新业务和“大礼包”的形式来吸引消费者。同时从附录 2 中可以看出“国内 IP 长途”在通信消费中也占有很大的比重，所以可以认为“17951 国内 IP 长途”资费在全球通用户中的存在是必不可少的。也可以以此入手对其修改，使其更符合全球通新老客户。

从问题二的结果可以看出来，老“套餐”在通话时间的跨度上很大，最便宜的“套餐”方案的适用度即覆盖率都达到了 90%以上，人群分布不理想，对于通话时间较短的客户老“套餐”给他们带来的利益也不大。所以按通话时间不同再细分收费，改变“17951 国内 IP 长途”的资费标准，从而更能满足客户利益。同时确保移动公司的收入降低不超过 10%。

首先利用问题一的假设主叫通话分钟数呈正态分布且满足 $N(223,100^2)$ ，从其中选取几个关键点返回正太分布区间点得到下面结果：

返回给定概率的正态分布区间点

给定概率	25%	50%	75%	95%	99%
区间点(min)	155	223	290	388	456

从表中很明显的可以看出各通话时间段所对应的客户构成比：

客户构成比	25%	25%	25%	20%	4%	1%
通话时间段 (min)	~155	155~223	223~290	290~388	388~456	456~

从上表的比例中可以看出，整体主叫通话时间并不大，而老“畅听 99 套餐”最低免费的主叫分钟数就是 280 分钟，甚至超过了主叫通话的平均值。根据查到的信息，2006~2007 年北京人均每月通讯费约 70.23 元，但是老“畅听 99 套餐”只有 99 元、139 元、199 元、299 元四种方案，多数人的手机费不超过 99 元，也就很好的享受如上任何一种方案，足见其不合理性。针对这些现象，我们给出了一个全新的套餐方案：

全球通“大众套餐”

月基本 费（元）	包含免费主叫通话量 (min)		超出后资费		叠加优惠	
	本地通 话量 (min)	拨 17951 国内 IP 长 途通话分 钟数	本地通 话资费 (元 /min)	拨 17951 国内 IP 长 途 (元 /min)	本地被 叫资费 (元 /min)	免费增值服 务，价值 10 元(选 1 种)
68	150	5	0.40	0.30	0	1. 10MGPRS 流量 2、100 条网内短信 3、彩铃+5M GPRS 流量
78	220	5	0.35			
88	290	10	0.30			
100	390	15	0.25			
108	460	20	0.20			

注：“本地拨 17951 国内 IP 长途”的免费主叫通话分钟数没有拨完者，可以在当月 20 日之前将其转为本地通话分钟数，其它用户注意事项见附录。

方案的求解：

在解答过程中，题目给出了在较现有“套餐”方案运营商的收入降低不超过 10%的条件求解的限制。所以我们将“畅听 99 套餐”与其做一个比较

(1)基本通话费的比较：

将两个方案在整个消费者人群中的利润做一比较。

在第一问求解中得到“畅听 99 套餐”方案的月收益为：104.574Q 亿元，套餐的效益度为 57.33%，移动公司收入将为此比以前减少 42.67%的收益额。但是没有把 17951 国内 IP 长话和数据业务的优惠和损失计算进去，在下面的我们单独比较。

我们的“套餐”中给出了分别占用户不同比例的各个方案，为了便于计算将国内 IP 长途免费通话分钟数（ t ）转化为本地免费主叫通话时间（ h ）计算（按照注意事项提到可以互相转换，对方案的选择作比较得到结果为：

比较方案①和②：

如果方案①比方案②优，即方案①花的钱较少则：

$$68 + (h - 150 - 15) \times 0.40 + 0.3t_1 \leq 78$$

假设 $t_1 = 0$ ，则有： $h \leq 190_{\min}$ ，再将 h 与 t 之间的转换带入得 $\beta \geq 175$ ；

同理我们计算出方案②、③、④和⑤的结果为：

选用“套餐”方案	最大主叫通话时间 (min)	最大通话时间均值(min)
方案一	$175 \leq h \leq 190$	182.5
方案二	$248.6 \leq h \leq 268.6$	258.6
方案三	$330 \leq h \leq 360$	345
方案四	$422 \leq h \leq 457$	439.5
方案五	$457 \leq h$	532

对于方案五中最大通话平均时间 532 分钟，按照其为小概率事件 $P=0.01$ 的临界点，即大于 532 分钟的通话，认为其概率太小对结果影响不大，所以忽略。根据上面的方案选定结果，可以得到每个方案的覆盖率为：

套餐方案	方案一	方案二	方案三	方案四	方案五
通话时间段 (min)	~182.5	182.5~ 258.6	258.6~ 345	345~ 439.5	439.5~
覆盖率 (%)	34.3	29.6	25.0	9.6	1.4

取其平均值计算同第二问中的方法计算得：

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{i=1}^5 [a_{ij} + (h - c_{ij}) \times b_{ij}] \times p_{ij} \times Q \\
 &= (27.783 + 27.087 + 26.125 + 10.555 + 1.664) \times Q \\
 &= 93.214Q \text{ 亿元}
 \end{aligned}$$

h 指的是本地免费主叫通话时间，相比之下，给出的方案从本地通话时间上

较原有套餐收入降低了 23%，但是方案中在拨打 17951 国内 IP 长途费用上却高于原有套餐，弥补损失，过程如下：

(2)拨打 17951 国内 IP 长途费用的比较：

对于“畅听 99 套餐”方案，17951 国内 IP 长途资费为 0.1 元/分钟，但是设计的“大众套餐”对于 17951 国内 IP 长途资费在超出免费主叫通话时间后，其收费为 0.3 元/分钟，对于这个改进做了如下比较。

由附录 1 中给出的关于移动电话年通话量的相关数据为“本地通话时长 15882.7 亿分钟，增长 34.7%；国内长途通话时长 977.8 亿分钟，增长 37.0%”和“移动电话用户总数突破 4 亿户”可以看出，国内长途通话时长几乎等于本地通话的 6%，国内长途电话在电信收益上占有很大的比重。而资料显示中国移动公司占有 67% 的中国市场，所以在国内长途通话时间每户平均的情况下，中国移动公司的年国内长途总通话时间为 655.13 亿分钟。移动手机加拨 17951 打长途后，自动转换为 17951 国内 IP 长途，又由于 17951 国内 IP 长途通话的标准资费小于国内长途通话的资费标准，所以假设移动拨打国内长途通话全为加拨 17951 国内 IP 长途通话。

资料显示，全球通虽然在全国的移动品牌中占有率并不固定，但其对国内长途的需求却均高于神州行与动感地带的需求。所以假设全球通在移动公司国内长途通话时间中占有率为 60%，且其通话时间量同样符合正态分布。据中国移动公司官方网站报导 2007 年该公司手机用户国内总数达 3.32 亿户，然而由于全球通用户在国内分布并无规律，所以设全球通在中国移动用户占有率为 1/3，可推出全球通用户大约为 1.1 亿户。

根据全球通总的国内长途通话时间和总用户之间的比值确定平均值，所以我们假设长途通话时间都是由移动电话平均带来的，而中国移动公司国内长途假设全为 17951 国内 IP 长途，则全球通用户每年拨打国内 IP 通话为 $655.13 \times 60\% / 1.1 = 357.4 \text{ min}$ ，则平均每月每户主叫通话时间为 15 min。

设离散程度 $\sigma = 5$ ，可以得到正态分布曲线 $N(15, 5^2)$ ，根据设计的“大众套餐”

分布的几个区间点 5、10、15、20。得到其相应的概率表：

区间段	$t < 5$	$5 \leq t < 10$	$10 \leq t \leq 15$	$15 \leq t \leq 20$	$t > 20$
概率	0.023	0.136	0.342	0.341	0.159

依然以人群基数 Q 计算，在没有“套餐”的时候 17951 国内 IP 长途的主叫应该

是符合正态分布的，通过积分得时间总和为 $15Q$ 。在有了套餐后，人们可得到优

惠，优惠的 17951 国内 IP 长途的概率是发生在一段区间内的，所以取该区间平均值为代表计算，所以得到优惠的 17951 国内 IP 长途主叫通话分钟数方程：

$$\begin{aligned}
 B &= B_1 + \sum_{j=2}^5 B_j = 0.0575Q + \sum_{j=2}^5 \left(\frac{t_{j-1} + t_j}{2} \right) s_j Q \\
 &= (0.0575 + 1.02 + 4.275 + 5.9675)Q \\
 &= 11.32Q
 \end{aligned}$$

“大众套餐”未优惠的 17951 国内 IP 长途主叫通话分钟数

$$0.3 \times (15Q - B) = 1.104Q$$

“畅听 99 套餐”的 17951 国内 IP 长途主叫通话分钟数 $0.1 \times 15Q = 1.5Q$

“大众套餐”较“畅听 99 套餐”在 17951 国内 IP 长途上优惠了 $0.386Q$

其中： j ($j=2、3、4、5$) 代表第 j 个方案， B_1 代表第一个方案优惠时间， B_j 代表第 j 个方案优惠的通话时间， t_j 代表第 j 个方案的最大优惠时间， s_j 代表第 j 个方案的概率。

(3) 免费增值业务的比较：

“畅听 99 套餐”中，全球通根据不同的方案选择不同的优惠，而优惠也从 10M GPRS 流量（价值 10 元）到 50M GPRS 流量（价值 50 元）不等。而“大众套餐”给出的是所有方案享受一样的价值 10 元的免费增值业务，但可以选择，适合自己的增值业务，给客户带来更多方便。从消费水平来看，推出的“大众套餐”远小于“畅听 99 套餐”，按照覆盖率可以求得其之间的差值。

“畅听 99 套餐”方案一覆盖率为 95.73%，其支出费用为 $9.573Q$

方案二覆盖率为 4.27%，

其支出费用为 $(10 + 2.5 \times 3) \times 0.0427Q = 0.747Q$

“大众套餐”虽然各方案覆盖率不一样，但是免费增值业务费却是相同的，所以得到支出费用为 $10Q$ 。

比较得出“大众套餐”的支出费用比“畅听 99 套餐”少 $0.32Q$ ，外观上两者之间差异不大，但是两者之间的潜在却有很大差异，同时“大众套餐”推出的可选择增值业务从不同层面满足了不同需要的人，所以必定会比“畅听 99 套餐”带来更多的新增客户。推出的“大众套餐”有三种同等价值不同的增值业务，假设三种业务对消费者的吸引度是一样的，则在增值业务上吸引的新客户人数即为“畅听 99 套餐”吸引客户人数的 3 倍，带来的增值也同样是其 3 倍。这样收益非常可观。假设“畅听 99 套餐”的吸引度为 0.2，则“大众套餐”的吸引度就为 0.6。当面临人群基数为 Q 时，可得到：

“畅听 99 套餐”新增客户数量为 $0.2Q$

“大众套餐”新增客户数量为 $0.6Q$

以最低基本消费为新增客户的消费标准，则可以得到：

“畅听 99 套餐”带来新增收入为 $0.2 \times 99Q = 19.8Q$

“大众套餐”带来新增收入为 $0.6 \times 68Q = 40.8Q$

得出，“大众套餐”带来的实际和表面价值比“畅听 99 套餐”多：

$$(40.8 - 19.8 + 0.23)Q = 21.23Q$$

(4) 综上所述结论为：

(1) 本地通话费上“大众套餐”的收入费用较“畅听 99 套餐”少 27.1632Q

(2) 17951 国内 IP 长途上“大众套餐”的收入费用较“畅听 99 套餐”少 0.386Q

(3) 免费增值业务上“大众套餐”的收入费用较“畅听 99 套餐”多 21.23Q

合计 (1)、(2)、(3) 中的收入，“大众套餐”的收入费用较“畅听 99 套餐”少 6.3195Q，较原有“畅听 99 套餐”低了 5.25%

六、模型评价及推广

模型的优点：

1、模型的建立过程中适时作出合理大胆的假设，省去不必要的考虑因素，使模型简化，操作性强，而且更加的易懂。

2、在建立评价体系时，恰到好处的引入适用度以及效益度这两个概念，从企业与消费者双方来考虑，使评价更为完善。

3、模型的改进中适时引入抱怨系数，使消费者的满意程度有了量上的说明，增加了科学性和说服力。

模型的缺点：由于时间有限，资料有限，在模型计算中有的方面不得不使用一些相关的参数代替，虽然可以说明问题，但是不是很确切。

模型的推广：本题建立的“套餐”方案的评价体系结合了实际，确实可以用于对移动公司推出的“套餐”方案进行评价，实用性强。而且最后设计的“套餐”方案也是结合实际，可以真正的用于实际。

七、参考文献：

【1】 <http://number.cnki.net/> (2007.09.23)

【2】 熊仕平，王雷，李勇. 《一种新的电信业务套餐价值评估模型》
<http://blog.chinaunix.net/upfile/070922105736.pdf> (2007.09.23)

【3】 王家文，王皓，刘海. MATLAB7.0 编程基础. 北京：机械工业出版社，2005

【4】 赵静，但琦. 数学建模与数学实验. 北京：高等教育出版社，2002

手机“套餐”优惠几何

李江华、叶钊、范校周

指导教师：雷玉洁

摘要

本文是针对现在通信市场上的热门话题——手机“套餐”进行研究。在处理问题一、二时，我们采取从简单到复杂的思路对其逐步深入分析。

在问题一中，对于“畅听 99”，我们对用户进行分类时，发现三个因素（主叫时间、GRPS 流量和彩信）对不同用户选择套餐时都有一定影响。我们先从最简单的一元线性函数角度出发，只考虑通话主叫时间对用户月资费的影响，对用户进行了一个大致的分类，并用 0-1 整数变量简化我们的模型；然后，综合考虑上述三个因素对不同用户选择套餐时的影响，我们以分段函数和二维图的形式对各种“套餐”方案适用于什么样的用户作出了定量说明。对于“全球通 68”方案，我们定义了一个比例系数（主叫通话时间/被叫通话时间），只需考虑此系数和主叫通话时间对用户选择套餐的影响。

在问题二中，我们制定了一个完整的评价体系：一方面提出通话实惠率和套餐优惠率对各种资费方案的优惠程度进行评价；另一方面，我们基于线性规划的思想，将主叫时间分为国内长途主叫时间和当地主叫时间，建立线性规划图模型并作图，对于用户在某一区间选择何种套餐进行了直观说明。据此对北京、上海推出的“套餐”方案进行分析比较，并给出评价。

在问题三中，我们运用在问题二中制定的评价体系对“被叫全免费计划”方案进行了较为客观的评价。在问题四中，我们考虑了众多因素后，设计出了“66 顺”套餐方案，并与“全球通 68”套餐方案进行对比分析作出评价。

关键词：0-1 整数变量 通话实惠率 套餐优惠率 线性规划图模型

一、 问题重述（略）

二、 模型假设

1. 为了简化计算,对于通话时间不足一分钟的按一分钟计算,流量不足 1MB 的按 1MB 计算
2. 在问题二中,我们假设一个用户通话主叫时间和被叫时间相等
3. 对于拨打国内长途的用户都会选 IP 电话(合理性:因为在一分钟内 $0.3/0.07 \times 6 < 30$,很少有人打电话时间小于 30 秒;对于大于一分钟的情况,例如取一分零五秒,则按现行标准需 $0.4 \times 2 + 0.07 \times 11 = 1.57$,而按 IP 拨打,只需 $2 \times 0.7 = 1.4$,且可以通话两分钟。考虑到夜间优惠时间段拨打的问题,只有在一段很小的区间上才会有现行标准小于拨打 IP 电话)
4. 假设客户在使用套餐时不打国际长途电话(由附件一得国际长途时间远小于本地通话时间(4.2 亿分钟 \ll 15882.7 亿分钟))
5. 不考虑客户在每日晚 23:00 至次日凌晨 7:00 使用套餐所享受的优惠

三、 符号说明

Y :表示手机用户的月资费(元)

T :表示手机用户的主叫时间(分钟)

K :表示手机用户所用的彩信条数

Q :表示手机用户所用的 GPRS 流量(MB)

M :表示在两种方案进行比较时相同资费(如漫游费,短信费,国际长途费用等)的总和

t_i ($i = 1, 2, 3, 4$): 分别表示当地主叫时间,当地被叫时间,未漫游时国内长途的主叫时间,未漫游时国内长途的被叫时间

α : 比例系数,表示主叫通话时间/被叫通话时间

C_{ij} : 表示套餐 i 对 j ($j = 1$ 为主叫时间, $j = 2$ 为 GPRS 流量, $j = 3$ 为彩信条数)的 0-1 整数变量

C_i :表示 0-1 整数变量,其中 $i = 1, 2, 3$ ($C_i = 1$ 表示选第 i 种套餐, $C_i = 0$ 表示不选第 i 种套餐)

A_i :表示客户使用完套餐包含分钟后额外主叫时间收费标准

T_i : 表示客户使用完套餐包含分钟后额外主叫时间,其中 $i = 1, 2, 3$

w : 通话实惠率,即套餐中每分钟的费用和基本资费标准中每分钟费用的比值

f : 用基本资费方法计算出的享受套餐服务时每月所付的费用

b ：套餐优惠率， f 和购买套餐后每月所付费用的差值与 f 的百分比

四、 问题分析

针对问题一，由于影响手机资费的因素较多，而且各种套餐提供的服务种类和数量也不完全相同，于是我们从最简单的一元线性函数入手，即只考虑主叫时间对用户月资费的影响，据此对用户进行一个大致的分类。采用修正，同时引入 0-1 整数变量简化模型。在考虑多个变量时，对变量的某些区间无法用控制变量法分阶段对其进行定量分析，于是我们运用图形对其进行直观说明。在对上海的“全球通 68”套餐方案进行分析时，我们先引入了一个比例系数 α 衡量主叫通话时间和被叫通话时间的关系，通过对 α 和 T 进行研究，确定用户的分类方法。在问题二中，为了建立一个客观的评价体系，我们引入通话实惠率和套餐优惠率，然后用简单的数据分析和图形给出了什么样的用户，应选择何种套餐。问题三采用了问题二的评价体系对“被叫全免费计划”方案进行客观评价。问题四，要求我们为移动公司设计一个全球通手机的资费方案，经过问题一、二中对北京“畅听 99”套餐方案和 上海“全球通 68”套餐方案的研究分析，我们认为对资费方案优劣有重要影响的因素有：双赢原则、有效区隔、协调平衡、注重品牌等[1]，给出了我们设计的“66 顺”套餐方案，并给出评价。

五、 模型的建立与求解

问题一

消费者面对各种套餐选择，为使其结合自身实际作出最佳选择，我们首先针对北京移动公司全球通“畅听 99 套餐”方案，提出模型一。

模型一

对问题一，我们通过网上调查，发现使用手机上网的人数并不是很多(因为手机上网计价单位为 0.03 元/KB，即 30.72 元/MB，价格远远高于宽带上网)。于是我们以主叫时间 T 为自变量，用户月资费 Y 为因变量建立一元线性函数模型。又由于在计费中，“长途话费=市话基本费+长途资费”，而在“畅听 99 套餐”方案中，各套餐的长途资费均相同，因此，我们将国内长途话费中的长途资费以及各套餐中都相同的其它资费（如漫游费，短信费，国际长途费用等）合计为 M ，市话基本费按照不同套餐中的市话计费标准进行计费。于是可以得到各套餐的计费模型：

表 1 北京移动公司全球通“畅听 99 套餐”方案计费模型

	模型	约束条件
套餐 1	$Y = 99 + (T - 280) \times 0.35C_1 + M$	$T > 280$ 时 $C_1 = 1$ 否则 $C_1 = 0$
套餐 2	$Y = 139 + (T - 560) \times 0.25C_2 + M$	$T > 560$ 时 $C_2 = 1$ 否则 $C_2 = 0$
套餐 3	$Y = 199 + (T - 1000) \times 0.2C_3 + M$	$T > 1000$ 时 $C_3 = 1$ 否则 $C_3 = 0$
套餐 4	$Y = 299 + (T - 2000) \times 0.15C_4 + M$	$T > 2000$ 时 $C_4 = 1$ 否则 $C_4 = 0$

各模型用图表示如下（程序见程序一）：

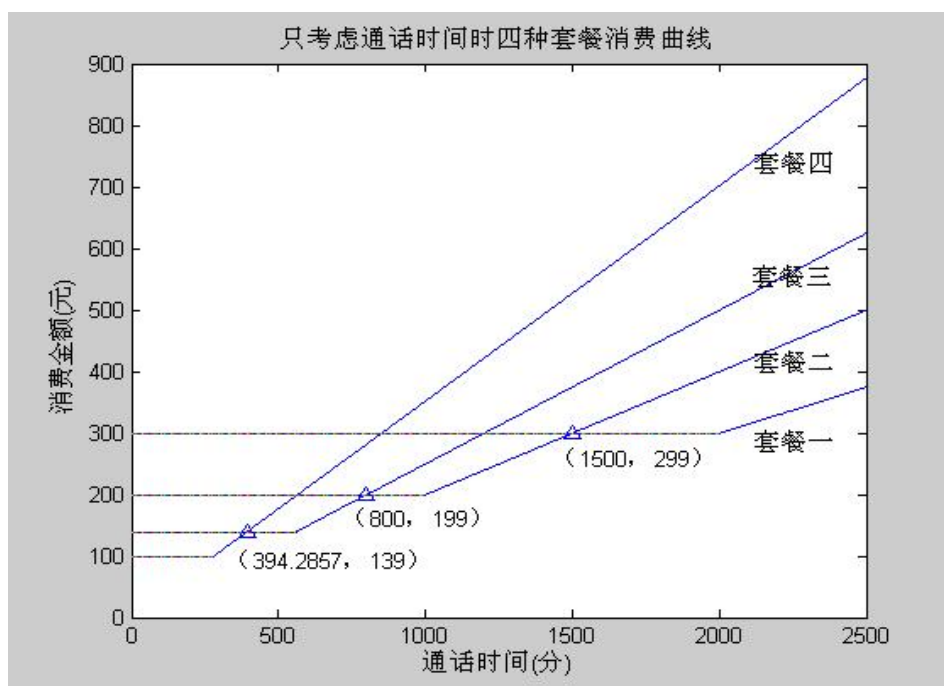


图 1

在每条曲线中，其水平部分表示：使用某一套餐总主叫时间（含长话）未超过其套餐时间时应付的资费（不含 M ，因为 M 在各套餐中均相同）。斜线部分表示使用某一套餐总主叫时间（含长话）超过其套餐时间时应付的资费（不含 M ）。不同的曲线表示不同的套餐。

对模型和图的分析如下：

1. 当 $T \leq 280$ 时，显然选套餐 1；

2. 当 $280 < T \leq 560$ 时，消费者面对两种套餐选择，为使其结合自身实际作出最佳选择，我们分析如下：

令套餐 1 和套餐 2 的资费相同即 $99 + (T - 280) \times 0.35 + M = 139 + M$ ，

则有 $T = 394.2857$ 。

所以当 $280 < T \leq 394$ 时，选套餐 1，

当 $394 < T \leq 560$ 时，选套餐 2；

3. 当 $560 < T \leq 1000$ 时，

令套餐 2 和套餐 3 的资费相同即 $139 + (T - 560) \times 0.25 + M = 199 + M$ ，

则有 $T = 800$ 。

所以当 $560 < T \leq 800$ 时，选套餐 2，

当 $800 < T \leq 1000$ 时，选套餐 3；

4. 当 $1000 < T \leq 2000$ 时，令套餐 3 和套餐 4 的资费相同即

$199 + (T - 1000) \times 0.2 + M = 299 + M$ ，则 $T = 1500$ 。

所以当 $1000 < T \leq 1500$ 时，选套餐 3，

当 $T > 1500$ 时，选套餐 4；

5. 当 $T > 2000$ 时，显然选套餐 4。

综上所述：

套餐 1 适用于总主叫时间（包含长话时间） $T \leq 394$ 的用户；

套餐 2 适用于总主叫时间（包含长话时间） $394 < T \leq 800$ 的用户；

套餐 3 适用于总主叫时间（包含长话时间） $800 < T \leq 1500$ 的用户；

套餐 4 适用于总主叫时间（包含长话时间） $T \geq 1500$ 的用户。

考虑到实际生活中一部分人（如学生）娱乐的需要，如：互发彩信，手机上网，手机 QQ 等。我们在模型一的基础之上引进数据业务建立模型二。

模型二 —— 分段分析与线性规划图模型

以主叫时间 T ，GPRS 流量 Q ，彩信条数 K 为自变量，用户月资费 Y 为因变量，同模型一将国内长途话费中的长途资费以及各套餐中都相同的其它资费（如漫游费，短信费，国际长途费用等）合计为 M ，市话基本费按照不同套餐中的市话计费标准进行计费，同时上网查得：GPRS 流量收费为 0.03 元/KB，彩信 0.5 元/条。于是可以得到各套餐的计费模型：

表 2 北京移动公司全球通“畅听 99 套餐”方案

	套餐 1
模型	$Y = 99 + (T - 280) \times 0.35C_{11} + (Q - 10) \times 0.03 \times 1024C_{12} + 0.5K + M$
限制条件	$T > 280$ 时， $C_{11} = 1$ 否则 $C_{11} = 0$ ； $Q > 10$ 时， $C_{12} = 1$ 否则 $C_{12} = 0$
	套餐 2
模型	$Y = 139 + (T - 560) \times 0.25C_{21} + (Q - 10) \times 0.03 \times 1024C_{22} + (K - 25) \times 0.5C_{23} + M$
限制条件	$T > 560$ 时， $C_{21} = 1$ 否则 $C_{21} = 0$ ； $Q > 10$ 时， $C_{22} = 1$ 否则 $C_{22} = 0$ ； $K > 25$ 时， $C_{23} = 1$ 否则 $C_{23} = 0$
	套餐 3
模型	$Y = 199 + (T - 1000) \times 0.2C_{31} + (Q - 50) \times 0.03 \times 1024C_{32} + 0.5K + M$

限制条件	$T > 1000$ 时, $C_{31}=1$ 否则 $C_{31}=0$; $Q > 50$ 时, $C_{32}=1$ 否则 $C_{32}=0$
	套餐 4
模型	$Y = 299 + (T - 2000) \times 0.15C_{41} + (Q - 50) \times 0.03 \times 1024C_{42} + 0.5K + M$
限制条件	$T > 2000$ 时, $C_{41}=1$ 否则 $C_{41}=0$; $Q > 50$ 时, $C_{42}=1$ 否则 $C_{42}=0$

对模型分析如下:

因为手机上网 GPRS 计价单位为:0.03 元/KB 即 30.72 元/MB, 对 Y 影响比较大, 所以先考虑流量对月消费的影响。

1. 在流量 $Q \leq 10$ 的情况下, 有:

- 1) 当 $T \leq 280$ 时, 显然选套餐 1;
- 2) 当 $280 < T \leq 560$ 时,

因为数据流量 Q 对套餐 1 和套餐 2 的影响相同, 可将其并入 M 。现考虑彩信条数对套餐选择方案的影响。

①令 $K \geq 25$

由于彩信条数 $K > 25$ 对套餐 1 和套餐 2 的影响与彩信条数 $K = 25$ 对套餐 1 和套餐 2 的影响相同 (因为超过 25 条彩信, 两种套餐都要计费), 所以只需取 $K = 25$ 。

令套餐 1 和套餐 2 的资费相同即 $99 + (T - 280) \times 0.35 + 25 \times 0.5 + M = 139 + M$,

得 $T = 358.5714$ 。所以当 $280 < T \leq 358$, K 取任何值时, 都选套餐 1 (因为 $K < 25$ 时, 随着 K 值减小, 等式左边减小);

②令 $K = 0$

令套餐 1 和套餐 2 的资费相同即 $99 + (T - 280) \times 0.35 + M = 139 + M$, 得

$T = 394.2857$ 。所以当 $395 \leq T < 560$, K 取任何值时选套餐 2 (因为 $K > 0$ 时, 随着 K 值增加, 等式左边增加);

③对于 $0 < K \leq 25$, $358 < T < 395$ 时, 有两个变量 K 和 T , 用分段函数对他们进行定量分析比较麻烦, 此处我们用线性规划图模型的方法做出直观表述 (比较作图时, 不考虑 M)。

如下图 (程序见程序二中①):

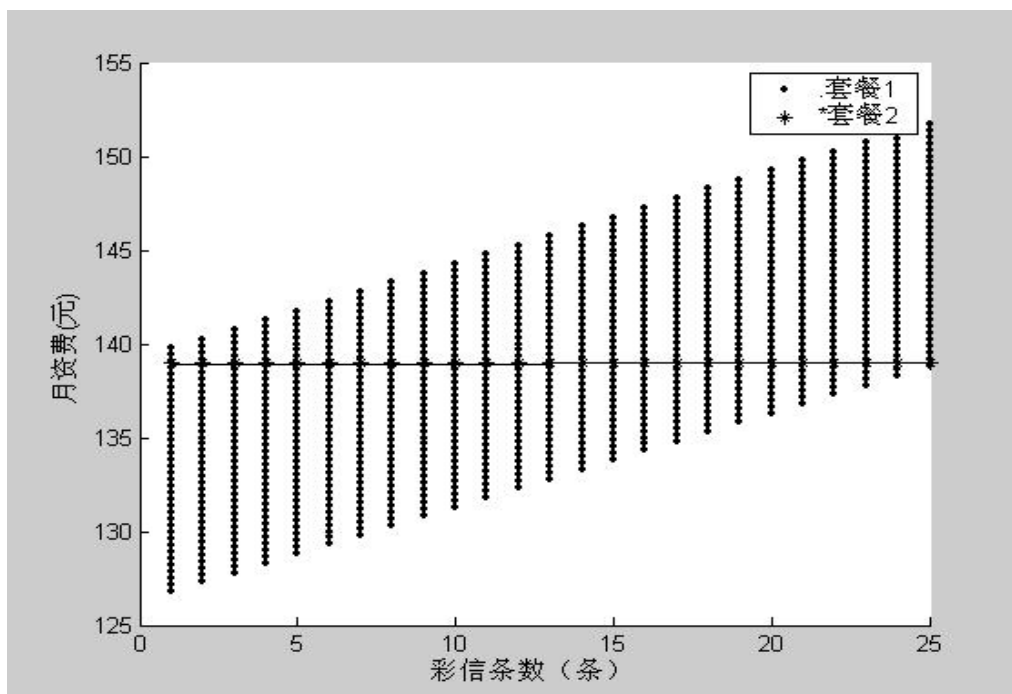


图 2

图中水平直线表示采用套餐 2 时，月资费不随主叫时间 T 的变化而改变，恒等于套餐 2 月基本费 139。当用户彩信条数一定时，每条竖线表示月资费随主叫时间 T ($358 < T < 395$) 的变化趋势。水平直线以上，表示选套餐 2；水平直线以下，表示选套餐 1。

3) 当 $560 < T \leq 1000$ 时，

因为在 $Q \leq 10$ 的前提下数据流量 Q 对套餐 2 和套餐 3 的影响相同，可将其并入 M ，利用与 2 相同的处理方法。

①. 假设 $K \geq 25$

当 $850 \leq T \leq 1000$ 时，选套餐 3；

②. 假设 $K = 0$

当 $560 < T \leq 800$ 时选套餐 2；

③. 对于 $0 < K < 25$, $800 < T < 850$ 时，我们同样会得到下图（程序见程序二中②）：

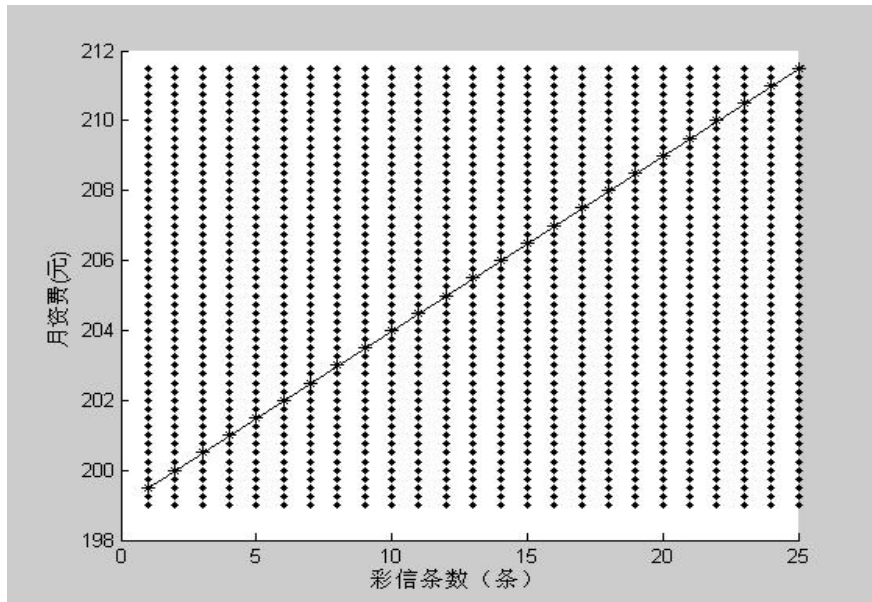


图 3

图中斜线表示采用套餐 3 时，月资费随主叫时间 T ($800 < T < 850$) 的变化趋势。当用户彩信条数一定时，每条竖线表示月资费随主叫时间 T ($800 < T < 850$) 的变化趋势。斜线左上，表示选套餐 3；斜线右下，表示选套餐 2。

4) 当 $1000 < T \leq 2000$ 时

因为数据流量 Q ，彩信条数 K 对套餐 3 和套餐 4 的影响均相同，可将其并入 M 。

令 $199 + (T - 560) \times 0.25 + M = 299 + M$ 得 $T = 1500$

所以当 $1000 < T \leq 1500$ 时选套餐 3，

当 $1500 \leq T \leq 2000$ 时选套餐 4；

5) 当 $T > 2000$ 时，显然选套餐 4。

综上所述：

当 $T \leq 358$ 时选套餐 1，即套餐 1 适用于总主叫时间（包含长话时间） $T \leq 358$ 的用户；

当 $395 < T \leq 800$ 时选套餐 2，即套餐 2 适用于总主叫时间（包含长话时间） $395 < T \leq 800$ 的用户；

当 $850 < T \leq 1500$ 时选套餐 3，即套餐 3 适用于总主叫时间（包含长话时间） $850 < T \leq 1500$ 的用户；

当 $T \geq 1500$ 时选套餐 4，即套餐 4 适用于总主叫时间（包含长话时间） $T > 1500$ 的用户。

2. 考虑经常上网人群，即 $Q > 10$ 的情况

此处只需比较套餐 1 与套餐 3，套餐 2 与套餐 3。基于 $Q \leq 10$ 的情况分析讨论如下：

1) 比较套餐 1 与套餐 3

当 $T \leq 358$ 时

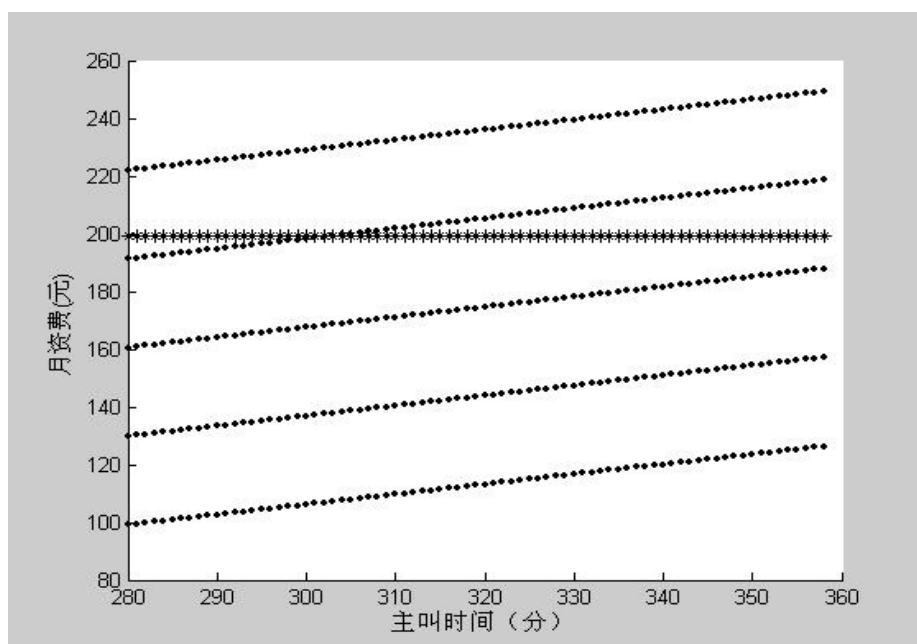
假设 $T \leq 280$ 彩信条数 K 对套餐 1 和套餐 3 的影响均相同, 可将其并入 M ,

$$99 + 0.03 \times 1024 \times (Q - 10) + M = 199 + M \quad \text{得 } Q = 13.2552$$

所以 $Q \geq 13.2552$ 时选套餐 3 (因为 $T > 280$ 时, 随着 T 值增涨, 等式左边增加; 当 Q 增加时, 等式左边也增加。故选套餐 3 的最小范围 $Q \geq 13.2552$ 对任何 T 值均成立)

对于 $10 < Q < 13.2552, 280 < T < 358$ 时, 有两个变量 T 和 Q 对他们定性分析比较麻烦, 采用两套餐方案也没太大区别, 此处我们同样用作图的方法只做直观描述 (比较作图时, 不考虑 M)

如下图 (程序见程序二中③)



图中水平直线表示采用套餐 3 时, 月资费不随主叫时间 T 的变化而改变, 恒等于套餐 3 月基本费 199。当用户 GPRS 流量一定时, 每条斜线表示月资费随主叫时间 T ($280 < T < 358$) 的变化趋势。水平直线以上, 表示选套餐 3; 水平直线以下, 表示选套餐 1。

2) 套餐 2 与套餐 3

当 $358 < T \leq 800$ 时

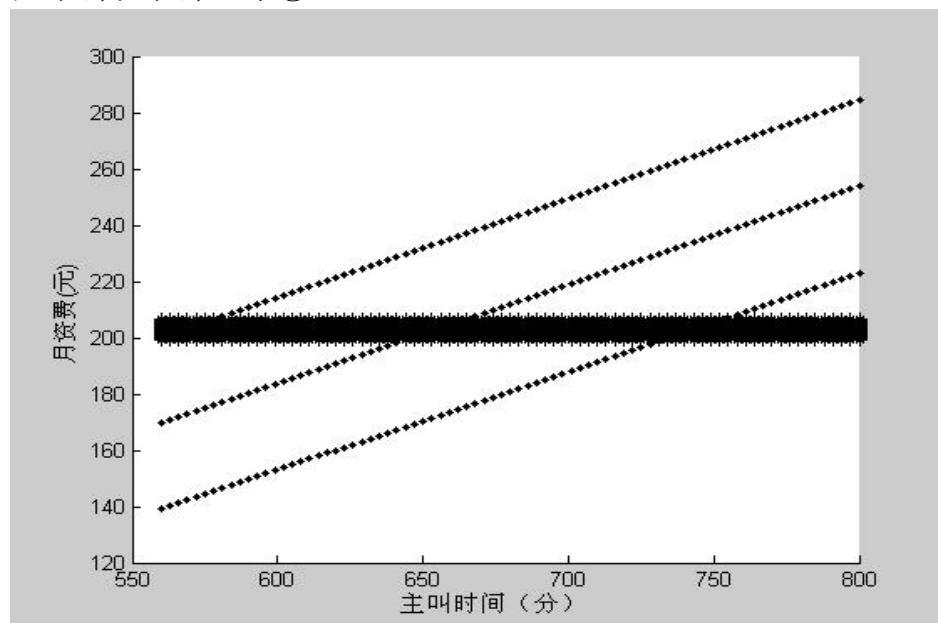
令 $K \geq 25, T \leq 560$ 由于彩信条数 $K > 25$ 对套餐 2 和套餐 3 的影响与彩信条数 $K=25$ 对套餐 2 和套餐 3 的影响相同, 所以只需取 $K=25, T \leq 560$, 有

$$139 + 0.03 \times 1024 \times (Q - 10) + M = 199 + 25 \times 0.5 + M \quad \text{得 } Q = 12.3600$$

所以 $Q \geq 12.3600$ 时选套餐 3 (原因同 1)。

对于 $10 < Q < 12.3600$, $560 < T < 800$, $0 < K < 25$ 时, 有三个变量 T, Q, K 对他们定性分析比较麻烦, 此处我们同样用作图的方法只做直观描述(比较作图时, 不考虑 M)

如下图(程序见程序二中④)



图中水平粗直线由 25 条 ‘*’ 点所在水平直线融合而成, 表示采用套餐 3 时, 月资费随彩信条数的变化情况。当用户 GPRS 流量一定时, 每条斜线表示月资费随主叫时间 T ($560 < T < 800$) 的变化趋势。水平粗直线中每条直线以上, 表示选套餐 3; 水平直线以下, 表示选套餐 2。

对用户进行分类时, 用户只需将自己的具体情况划为相应的点, 从图中即可知道自己需购买何种套餐。

对于上海移动公司“全球通 68 套餐”方案, 由于与北京移动公司全球通“畅听 99 套餐”方案优惠服务不同, 于是我们提出模型三。

模型三

对问题一中上海移动公司“全球通 68 套餐”方案, 套餐内包含的本地通话分钟数用于本地双向通话, 当客户使用完套餐包含分钟后, 才可享受本地被叫免费的优惠。此处我们引入一比例系数 $\alpha = \frac{\text{主叫通话时间}}{\text{被叫通话时间}}$ 来区分不同用户, 建立模型三。

$\alpha = \frac{\text{主叫通话时间}}{\text{被叫通话时间}}$

型三。

C_i : 表示 0-1 整数变量, 其中 $i = 1, 2, 3$ ($C_i = 1$ 表示选第 i 种套餐; $C_i = 0$ 表示没选第 i 种套餐)

A_i : 表示客户使用完套餐包含分钟后额外主叫时间收费标准

T_i : 表示客户使用完套餐包含分钟后额外主叫时间, 其中 $i = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} Y = \sum_{i=1}^3 ((8 + 60i) + T_i \times A_i) \times C_i \\ \sum_{i=1}^3 C_i = 1 \end{cases}$$

分析讨论：

此处只需比较套餐 1 与套餐 2，套餐 2 与套餐 3。

①套餐 1 与套餐 2

$$(800 - 360) \times \frac{\alpha}{\alpha + 1} \times 0.18 \leq 128 - 68 \quad \text{解得：} \alpha \leq 3.125 \quad \text{即}$$

$$T \leq 800 \times \frac{\alpha}{\alpha + 1} \leq 605.8667 \quad (\text{因为 } f_{(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \text{ 在区间 } (0, +\infty) \text{ 是增函数})$$

②套餐 2 与套餐 3

$$(1200 - 800) \times \frac{\alpha}{\alpha + 1} \times 0.16 \leq 188 - 128 \quad \text{解得：} \alpha \leq 15 \quad \text{即 } T \leq 1200 \times \frac{\alpha}{\alpha + 1} \leq 1125$$

综上所述，我们给出了上海移动公司“全球通 68 套餐”用户的分类标准：

套餐 1 适用于比例系数 $\alpha \leq 3.125$ 且 $T \leq 605.8667$ 的用户

套餐 2 适用于比例系数 $3.125 \leq \alpha \leq 15$ 且 $605.8667 \leq T \leq 1125$ 的用户

套餐 3 适用于比例系数 $\alpha > 15$ 且 $T \geq 1125$ 的用户

问题二：

为对各种资费方案作出公平统一的评价，站在消费者角度上，我们提出“通话实惠率”和“套餐优惠率”作为对各种资费方案的评价准则。分别以北京移动公司全球通“畅听 99”和上海移动公司“全球通 68”两种套餐方案中各自的套餐一（即北京移动公司全球通“畅听 99”中月基本费为 99 元和上海移动公司“全球通 68”套餐中月基本费为 68 元的两款套餐）为例说明。（为简化问题，我们假设客户不使用漫游服务）

1. 通话实惠率的提出和计算方法

对于广大移动通信用户来说，最关心和最直接观察到的是一种套餐单位时间本地通话所付费用，而移动公司提供的三种服务（全球通、神州行、动感地带）的现行基本资费标准是不一样的，如果只是简单地将三种服务的各种套餐单位本地通话时间所付费用相比较，对一些基本资费相对比较高的套餐不公平。于是我们提出“通话实惠率”作为对各种资费标准的一个评价标准，对各种套餐在各自所属的服务现行基本资费标准基础上算

其通话实惠率，这样既可以对各种套餐作出评价，又相对公平。计算方法：

$$\text{通话实惠率 } w = \frac{\text{套餐月基本费} / \text{套餐赠送本地通话时间}}{\text{基本资费本地通话单位时间费用}}$$

说明：因为通话实惠率实际为套餐中每分钟的费用和基本资费标准中每分钟费用的比值，故通话实惠率越小，对购买套餐的用户越有利

现以北京移动公司全球通“畅听 99”中月基本费为 99 的套餐为例：

$$\text{通话实惠率}w1 = \frac{99/(280 \times 2)}{0.4} = 44.2\%$$

以上海移动公司“全球通 68”中月基本费为 68 的套餐为例：

$$\text{通话实惠率}w2 = \frac{68/360}{0.4} = 47.22\%$$

这样，对于其他套餐，也可用此法计算其通话实惠率，计算后得下表。

表 3 两种套餐方案中各种套餐的通话实惠率

套餐方案	“畅听 99”				“全球通 68”		
套餐种类	99 元	139 元	199 元	299 元	68 元	128 元	188 元
基本资费 单位时间 话费（元 /min）	0.4						
使用套餐 单位时间 话费（元 /min）	0.1768	0.1241	0.0995	0.0747	0.1889	0.1600	0.1567
通话优惠 率	44.20%	31.03%	24.88%	18.69%	47.22%	40.00%	39.17%

从上表分析可得：

① 通过购买套餐，可以使单位时间话费远小于 0.4 元/s，使客户得到优惠，因此我们建议客户购买套餐。

② 不管购买哪种套餐，客户都能得到优惠，并且优惠度比较大，单位时间话费均小于基本资费单位时间话费的半价，通话优惠率均小于 50%。

③ 在所付月基本费基本相同的情况下，购买“畅听 99”中的套餐普遍比购买“全球通 68”实惠。

④ 以上方法计算各套餐通话优惠率时并未考虑基本资费条件下的基本月租，如果考虑基本资费条件下的基本月租，当上海用户每月本地通话时间大于 45min 时，我们就建议客户购买“全球通 68”套餐；当北京用户每月本地通话时间大于 122.5min 时，我们即建议客户购买“畅听 99”套餐。

⑤ 就“畅听 99”和“全球通 68”两种套餐而言，综合比较，前者比后者相对更实惠，一方面，前者的通话实惠率普遍低于后者；另一方面，前者提供的业务比后者丰富。

2. 套餐优惠率的提出和计算方法

虽然通话实惠率在一定程度上能对一款套餐起到评价作用并对消费者选购套餐有一定的指导意义，但对一款服务周全业务较多的套餐而言，仍不能全面系统地评价。为此，我们在“通话实惠率”的基础上提出“套餐优惠率”作为补充，其具体算法如下（模型 I～模型 III 均不考虑各种服务使用超量的情况）：

模型 I 只考虑本地通话时间

用基本资费方法计算出享受套餐服务时每月所付的费用 f ， f 和购买套餐后每月所付费用的差值与 f 的百分比 b 即为该种套餐的“套餐优惠率”（套餐优惠率越大, 购买套餐越划算）；本地通话时间包括主叫时间和被叫时间。
以北京移动公司全球通“畅听 99”中月基本费为 99 的那款套餐（套餐一）为例：

$$b = \frac{(280 + 280) \times 0.4 + 50 - 99}{(280 + 280) \times 0.4 + 50} \times 100\% = 63.87\%$$

其中，(280+280)是因为假设中“用户打电话主叫和被叫时间相等”，在套餐中被叫免费，而在基本资费中，被叫也要付费。套餐优惠率为 63.78% 表示在只考虑本地通话时间时，因为买套餐而节省的金额达到不买套餐时所付费用的 63.78%。

以上海移动公司“全球通 68”中月基本费为 68 的套餐（套餐一）为例：

$$b = \frac{360 \times 0.4 + 50 - 68}{360 \times 0.4 + 50} \times 100\% = 64.95\%$$

其中，本地通话时间为 360min 是因为“套餐内包含的本地通话分钟数用于本地双向通话”[2]，套餐优惠率为 64.95% 表示在只考虑本地通话时间时，因为买套餐而节省的费用达到不买套餐时所付费用的 64.95%。

模型 II 考虑本地通话时间、彩信费用和 GPRS 流量

按照模型 I 的思路，我们进一步完善模型，考虑客户使用彩信和 GPRS 时的情况。

考虑彩信费用和 GPRS 流量后，只是在模型 I 的 f 中加入享受 GPRS 服务和彩信服务以标准资费计算所付费用。而在上海移动公司“全球通 68”套餐中不包括 GPRS 流量服务和彩信服务，因此在计算其“套餐优惠率”时不考虑 GPRS 流量和彩信费用。

对于彩信服务，北京全球通、动感地带客户在国内发送网内彩信时，通信费 0.5 元/条，开通与中国联通公司客户的网间彩信互发业务，发送按 0.6 元/条标准收费，不计入各品牌彩信套餐包含的彩信数量中而且接收彩信免费。为简化模型，我们假设所有客户使用彩信都只使用国内网内彩信，即计费为 0.5 元/条[3]。

对于 GPRS 服务，若按 0.03 元/KB 计算，则用户每个月仅为 10MB 的 GPRS 流量就需多付出 307.2 元，已远远超过本地通话所用费用，消费者为寻求实惠，定会选择优惠策略加以调控，他们可以在不选择“畅听 99”和“全球通 68”套餐的条件下选择其它专门针对 GPRS 流量制定的套餐，如下两表所示：

表 4 北京移动公司对 GPRS 流量的收费标准[4]

套餐类型	月租费 (元)	赠送的免费 流量数 (MB)	超过赠送流量 后的费用 (元 /KB)	封顶值 (元) (不含国际流量费 用)
标准资费	0	0	0.03	500
5 元套餐	5	10	0.01	500
20 元套餐	20	50	0.01	500
100 元套餐	100	800	0.01	500
200 元套餐	200	2000	0.01	500

备注：每日晚 23:00 至次日凌晨 7: 00 半价优惠，小数部分按四舍五入处理。

表 5 为上海移动公司对 GPRS 流量的收费标准

资费	月租费（元）	包含流量(MB)	超过赠送流量后的计费标准(元/KB)
标准资费	0	0	0.03
20 元套餐	20	50	0.01
5 元套餐	5	10	0.01

以北京移动公司全球通“畅听 99”中月基本费为 99 的那款套餐（套餐一）为例：由于套餐没有提供彩信服务，计算“套餐优惠率”时，不考虑彩信费用，只考虑 GPRS 费用，客户享受的 GPRS 流量为 10M，客户可以选择标准资费即 0.03 元/KB，也可选择 5 元套餐，这就存在客户对 GPRS 流量套餐的选择问题。经计算得，当客户所用流量小于 166.7072KB 时，小于 1MB，由模型假设 1 我们可认为客户若使用 GPRS 服务就一定选用 5 元套餐。同理，套餐二中客户也选择 5 元套餐，套餐三和套餐四中客户选择 20 元套餐。此时，套餐一的套餐优惠率

$$b = \frac{50 + 280 \times 2 \times 0.4 + 5 - 99}{50 + 280 \times 2 \times 0.4 + 5} \times 100\% = 64.52\%$$

由此方法可计算得北京移动公司全球通“畅听 99”和上海移动公司“全球通 68”套餐方案中各套餐的套餐优惠率如下表：

表 6 “畅听 99”和“全球通 68”套餐方案中各套餐的套餐优惠率

	套餐一	套餐二	套餐三	套餐四
“畅听 99”方案	64.52%	73.04%	77.13%	82.10%
“全球通 68”方案	64.95%	65.41%	64.53%	

分析上表可得：

① 总的来看，当购买套餐时，客户都会享受很大份额的优惠，两种套餐方案中各种套餐的套餐优惠率均大于 64%。

② 就“畅听 99”套餐一而言，考虑彩信费用和 GPRS 流量后，套餐优惠率比模型 I 中所得优惠率高，符合实际，消费一定的资金享受服务越多越实惠。

③ 对于“畅听 99”的各项套餐，套餐优惠率随着套餐档次提高而升高，也符合实际。

④ “全球通 68”各套餐的套餐优惠率并不完全随着套餐档次提高而升高，出现异常，说明“全球通 68”套餐方案的套餐价格区间设置不合理，出现“掉档”现象，即客户的平均消费介于套餐二和套餐三之间时，由于套餐二的套餐优惠率高于套餐三，客户可能放弃更高档的套餐三而选择相对低档的套餐二，对运营商提高利润不利。

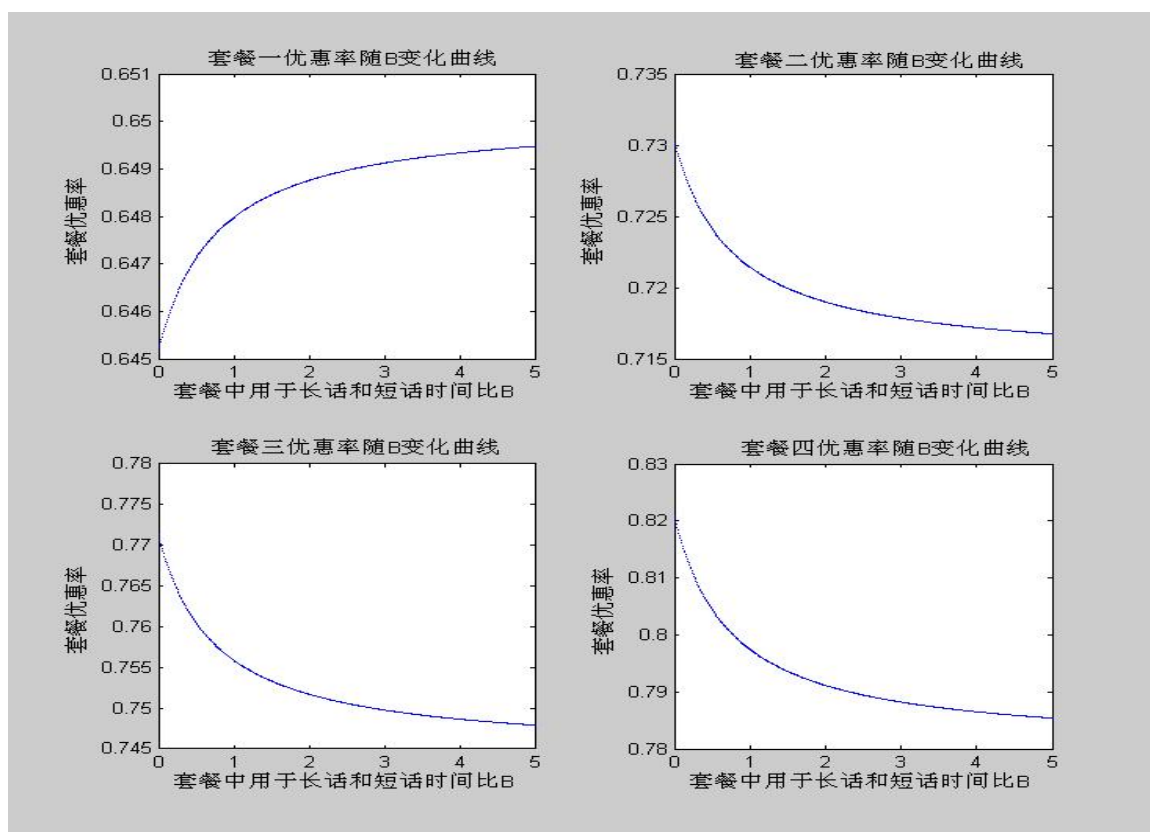
模型Ⅲ 考虑本地通话时间、GPRS 流量、彩信费用和长途通话费用

在上海移动公司“全球通 68”套餐中不包括长途优惠服务，因此在计算其“套餐优惠率”时仍不考虑长途电话费用。

考虑长途通话后，“畅听 99”套餐所包含的本地主叫通话是指北京全球通客户在北京地区的所有基本通话和所有长途/IP 长途电话的基本通话部分，由于长途通话要占用套餐中赠送通话时间的一部分，因而我们提出参数 β ，令

套餐一	$\frac{236\beta + 180}{363\beta + 279} \times 100\%$	64.52%	65.01%
套餐二	$\frac{977\beta + 753}{1367\beta + 1031} \times 100\%$	71.47%	73.04%
套餐三	$\frac{871\beta + 671}{1170\beta + 870} \times 100\%$	74.44%	77.13%
套餐四	$\frac{1771\beta + 1371}{2270\beta + 1670} \times 100\%$	78.02%	82.10%

为了更直观地观察套餐优惠率 b 随 β 变化情况，我们通过 Matlab 6.5 编程，得到四种套餐各自的套餐优惠率 b 随 β 变化曲线图如下（程序见程序四）：



由上表和图结合模型Ⅱ综合分析可得：

① “畅听 99”套餐方案中，长途通话时间在套餐赠送的通话时间中所占比例越大，套餐一的套餐优惠率越高，套餐二、三、四越低。

② 在四种套餐中随着 β 增大，套餐优惠率 b 的波动范围依次是 0.49%、1.57%、2.69%、4.08%，依次增大；同时，各套餐的优惠率上下限相应升高且不会出现交集，符合实际；说明随着套餐档次升高，长途通话时间所占比例对套餐优惠率的影响程度也增大。

③ 以上结果也验证了以“通话实惠率”为评价标准时得出的结论，购买套餐的确会给客户带来实惠；在经济条件允许的条件下购买套餐档次越高，享受优惠越大；在消费金额相同时，购买“畅听 99”比购买“全球通 68”实惠。

模型Ⅳ 考虑本地通话时间、GPRS 流量、彩信费用和长途通话四种服务存在超量时的费用

“全球通 68”各套餐的价格优势还体现在超出后的本地通话主叫价格相对较低上。如果考虑本地通话时间、GPRS 流量、彩信费用和长途通话四种服务存在超量时的费用，我们需要像问题一中一样引入 0—1 变量，由于时间原因，我们仅提出想法以供参考。

上述的评价标准与方法给出了各种资费的评价标准，但是，没有解决针对具体的用户是否选择某一套餐。于是，我们利用线性规划图模型对北京“畅听 99”和现行资费标准进行比较。

1. 不考虑流量的情况下，

现行资费标准为

$$Y_2 = 50 + 0.4 \times (t_1 + t_2 + t_3) + (0.4 + 0.3) \times t_4 + M, \text{ 又因为 } t_1 = t_2, t_3 = t_4,$$

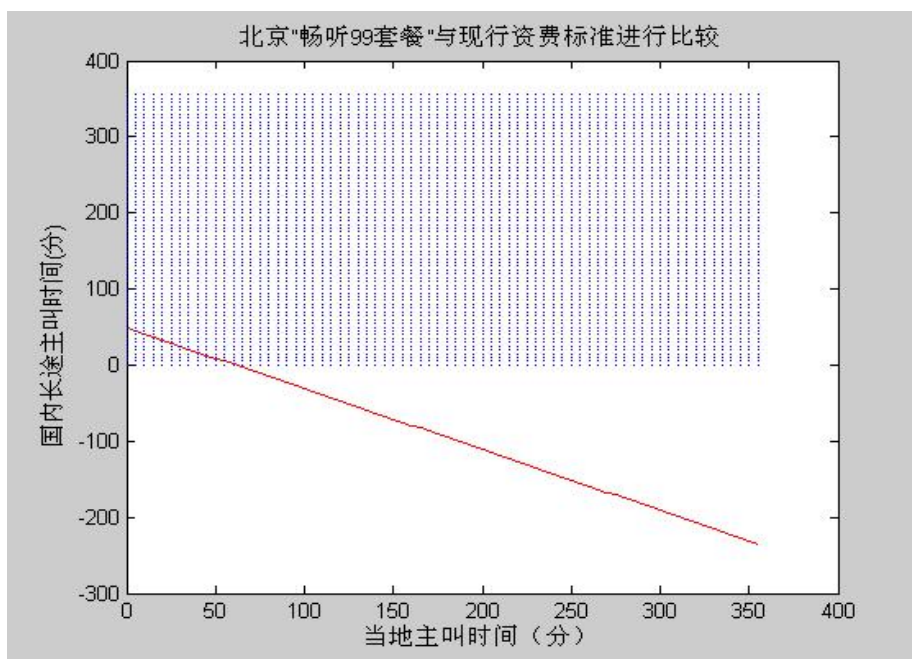
故对其简化有 $Y_2 = 50 + 0.8 \times t_1 + 1.1 \times t_3 + M$;

当 $t_1 + t_3 \leq 358$ 时，由问题一的求解知套餐一为四种套餐中最便宜的一种，有月消费为

$$Y_1 = 99 + 0.35 \times (t_1 + t_3 - 280) \times C_1 + 0.1 \times t_3 + M ;$$

当 $C_1 = 0$ 即 $t_1 + t_3 \leq 280$ 时，令 $Y_1 > Y_2$ ，有 $0.8 \times t_1 + t_3 < 49$,

以直线 $0.8 \times t_1 + t_3 = 49$ 作图（程序见附录五，相邻点与点之间的距离为 5 分钟）



我们发现只有小一部分点位于直线以下，当 (t_1, t_3) 所对应的点在直线左下区

域，现行标准比套餐一更优。从直线两边点构成的面积比（右上/左下）看，我们也可有结论：面积比越大，优惠幅度越大。

当 $C_1 = 1$ 即 $t_1 + t_3 > 280$ 时，令 $Y_1 = Y_2$ ，有 $0.45 \times t_1 + 0.65 \times t_3 = -49$ ；而这是不可能发生的，故在这种情况下，套餐一始终比现行标准好。

其他套餐种类和现行标准用同样的方法进行处理，我们发现后三种套餐都比现行标准划算。

2. 考虑到套餐对流量的优惠问题，由于 1MB 的 GPRS 流量为 30.72 元，当用户使用 2MB 流量时，已经有月租费和流量费之和（ $50 + 30.72 \times 2$ ）超过了套餐的月基本费（99），当用户使用 1MB 流量时，要使现行标准比套餐划算，那么， t_1 、 t_3 的

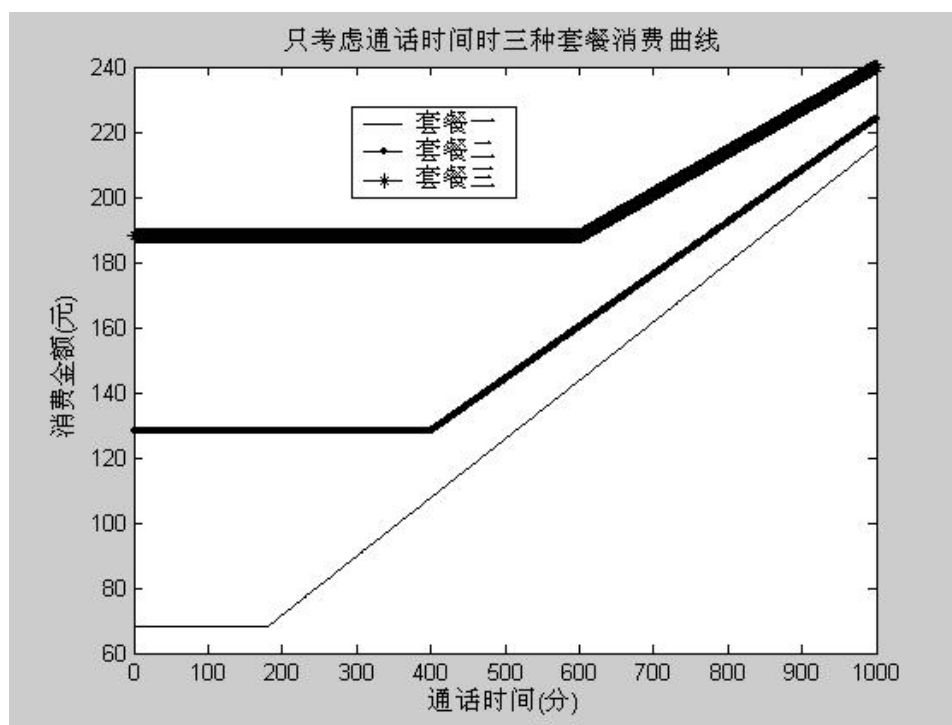
量将会局限在一个更小的范围，故使用手机上网时，使用套餐会更划算。

3. 以上两点都没有考虑到彩信的影响，对于套餐二，没有考虑彩信时已经优于现行资费标准，可认为彩信是运营商推出的额外优惠。

上海“全球通 68 套餐”与现行资费标准的比较，有

由上面的讨论知现行资费标准为 $Y_2 = 50 + 0.8 \times t_1 + 1.1 \times t_3 + M$ ，

当 $\alpha = 1$ 时，我们以主叫时间 T 为自变量，用户月资费 Y 作图（程序见程序六），有

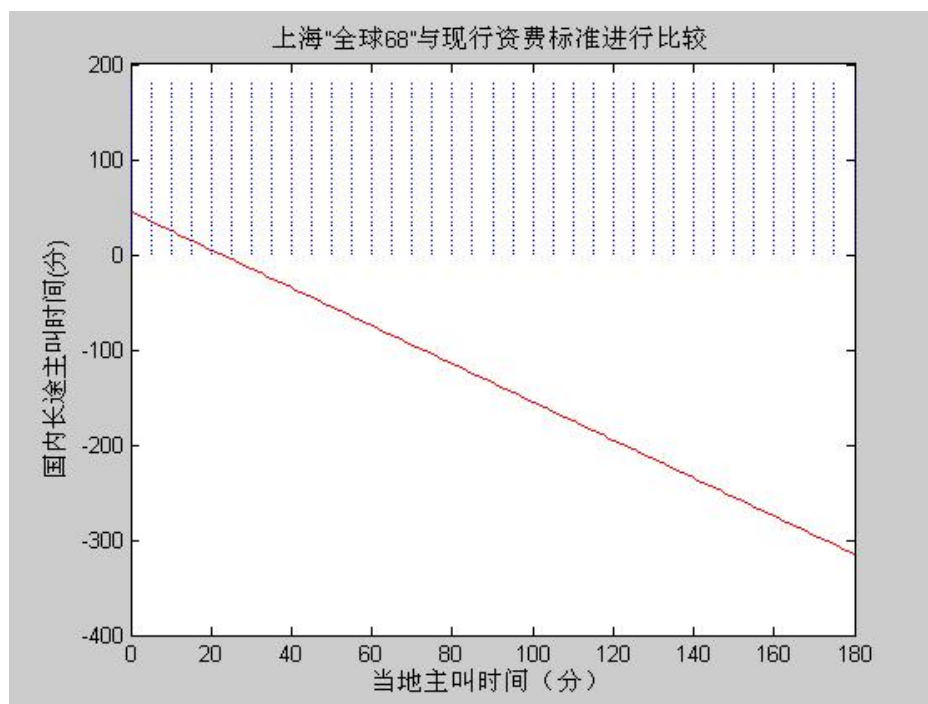


由图中可看出，当 $t_1 + t_3 < 180$ 的条件下，第一种套餐也是三种中最便宜的，于是有上海“全球通 68 套餐”的资费为：

$$Y_3 = 68 + (t_1 - 180) \times 0.18 \times C_2 + 0.7 \times t_3 + M$$

当 $C_1 = 0$ 即 $t_1 + t_3 \leq 180$ 时，令 $Y_3 > Y_2$ ，有 $0.8 \times t_1 + 0.4 \times t_3 < 18$ ，

以直线 $0.8 \times t_1 + 0.4 \times t_3 = 18$ 作图（程序见程序七，相邻点与点之间的距离为 5 分钟）



从以上讨论中，我们发现套餐服务对大多数人是有好处的。

同理，我们发现只有小一部分点位于直线以下，当 (t_1, t_3) 所对应的点在直线左下区域，现行标准比套餐一更优。

当 $C_2 = 1$ 即 $t_1 + t_3 > 180$ 时，令 $Y_1 = Y_2$ ，有 $0.64 \times t_1 + 0.4 \times t_3 = -14.4$ ；而这也是不可能发生的，故在这种情况下，套餐一始终比现行标准好。当其余套餐优于套餐一时， $t_1 + t_3 \gg 180$ ，故套餐还是比现行标准划算。

事实上，对于任何一种合理的套餐方案，越高档的套餐形式当然会比现行资费标准更为划算。

对于一个具体的用户，我们总可以从统计的角度求出主叫时间和被叫时间的比值，我们可以采用同样的方法对其进行研究，由于时间和题目提供的数据所限，我们未为给出一般的情况。

问题三

我们利用问题二中制定的评价体系来评价全球通“被叫全免费计划”。

方法一

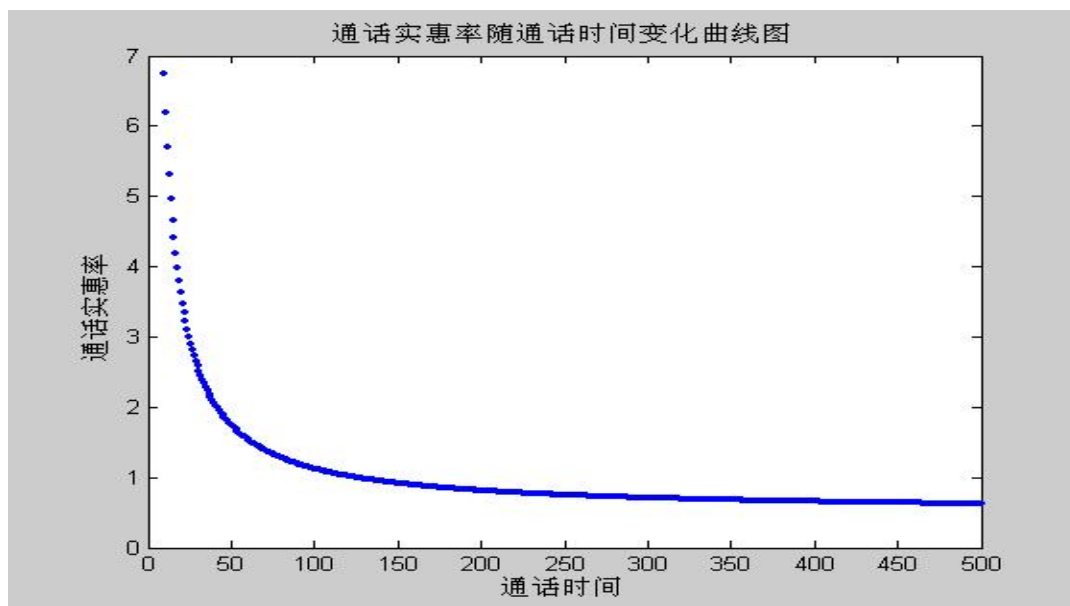
1. 从“通话实惠率”的角度评价

全球通“被叫全免费计划”方案，具体收费为月租 50 元，本地被叫免费，其他项目资费均同现行的资费标准，还要求用户至少在网一年，并没有赠送一定时间的免费通

话时间，因此我们令通话时间为 T ，则该方案的通话实惠率为

$$w = \frac{(50 + 0.4 \times T)/2T}{0.4} = \frac{125 + T}{2T} \times 100\%$$

我们通过编程计算可得通话实惠率随通话时间变化曲线图（程序见附录八）如下：



由上图可得：在不考虑标准资费的月租时， w 的值随 T 增大趋近于 0.5，当 $w=1$ 时， $T=125$ ，即通话时间小于 125min 时，购买该方案并不能享受优惠；考虑标准资费的月租时， w 为定值 0.5，仍大于“畅听 99”方案中各种套餐的通话实惠率，客户为寻求实

惠定会选择“畅听 99”而放弃“被叫全免费计划”。

2. 从“套餐优惠率”的角度评价

全球通“被叫全免费计划”方案，实行本地被叫免费，却强行要求客户至少在网一年，且并未对 GPRS 计费方式作出优惠。客户在选择“被叫全免费计划”后要在 GPRS 服务上享受优惠，必然会选择针对 GPRS 流量制定的套餐（如问题二所证），因此仅以 5 元套餐为例来说明，此时套餐优惠率为

$$b = \frac{(50 + 2T \times 0.4 + 5) - (50 + 0.4T)}{50 + 2T \times 0.4 + 5} \times 100\% = \frac{0.4T + 5}{0.8T + 55} \times 100\%$$

用问题二中方法分析得：

套餐优惠率 b 的变化范围为[9.09% 50%], 单调递增。优势在于，优惠率变化范围广，反映出选择“被叫全免费计划”方案享受的优惠在通话时间上的分布广。

不足之处在于，纵然如此，套餐优惠率 b 还是远小于“畅听 99”方案中各种套餐的套餐优惠率，优惠程度还是不如“畅听 99”方案，容易导致客户流失。

方法二

我们将北京“畅听 99”与全球通“被叫全免费计划”进行比较

1. 不考虑在网至少一年的约束条件，则问题二中的

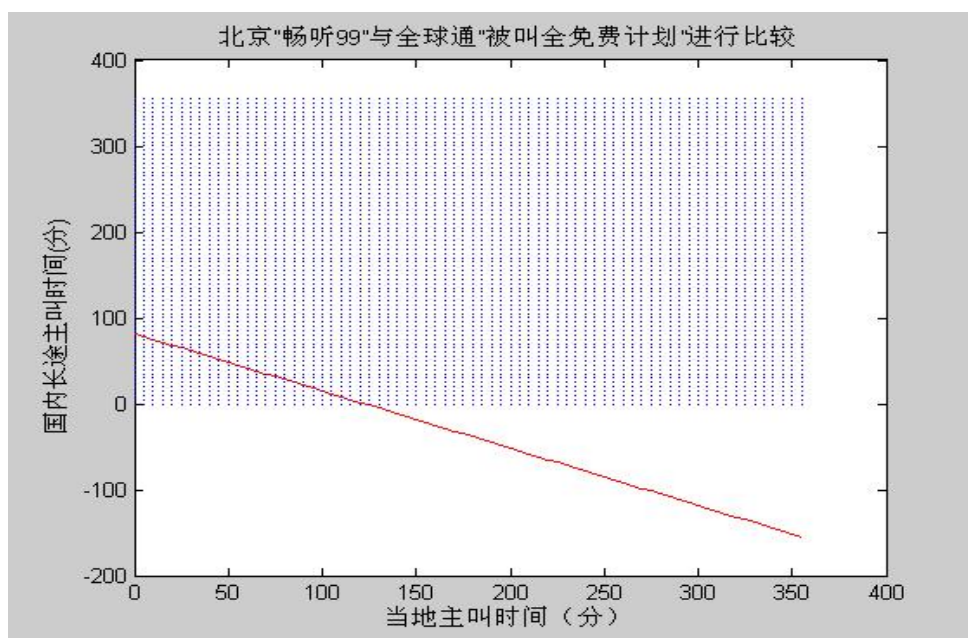
“被叫全免费计划”的资费为 $Y_4 = 50 + 0.4 \times t_1 + 0.7 \times t_3 + M$ ，

当 $t_1 + t_3 \leq 358$ 时，由问题一的求解知套餐一为四种套餐中最便宜的一种，有月消

费为

$$Y_1 = 99 + 0.35 \times (t_1 + t_3 - 280) \times C_1 + 0.1 \times t_3 + M$$

当 $C_1 = 0$ 即 $t_1 + t_3 \leq 280$ 时, 令 $Y_1 > Y_4$, 有 $0.4 \times t_1 + 0.6 \times t_3 < 49$, 以 $0.4 \times t_1 + 0.6 \times t_3 = 49$ 作图 (程序见附录九, 相邻点与点之间的距离为 5 分钟), 有



发现只有小一部分点位于直线以下, 当 (t_1, t_3) 所对应的点在直线左下区域, 这说明“被叫全免费计划”比套餐一更划算。

当 $C_1 = 1$ 即 $t_1 + t_3 > 280$ 时, 令 $Y_1 = Y_4$, 有 $0.05 \times t_1 + 0.25 \times t_3 = -49$; 而这是不可能发生的, 即就是说, 在这种情况下, 套餐一始终比“被叫全免费计划”实惠。
2. 我们接着考虑到在网至少一年的约束条件, 基于 1 中问题的解决, 我们发现“被叫全免费计划”比之“畅听 99”有以下两点不足:

1) 优惠区间远小于“畅听 99”优惠区间。

2) 将用户在一年内绑定在此项服务上, 当推出新的优惠方案时, “被叫全免费计划”的用户需等待更长的时间才可享受到优惠, 否则需付出更大的成本。故考虑到在网至少一年的约束条件, 此方案的缺点会更多。

在问题二和三中, 我们没有将全球通与神州行、动感地带进行比较, 这是由于题目中始终说的为全球通的资费问题。另外, 没有将北京和上海进行比较, 是因为地域不同, 我们认为没有进行比较的必要。

四) 问题四

在设计套餐的过程中, 我们考虑的因素[1]有:

1. 双赢原则

一个成功的手机套餐一定是用户与运营商双赢的套餐，在让用户获得优惠的同时，运营商也能够从套餐活动中增加业务收入或者提高用户忠诚度。

2. 有效区隔原则

首先是目标市场的有效隔离。在市场细分的基础上，要确定能够享受业务套餐的条件，以达到有效区隔目标用户的目的；其次不同档次、不同性质套餐的隔离。按照“高套餐高优惠”和“多组合元素多优惠”的原则，让用户选择适合自己的套餐，从而有效隔离不同档次的用户。应避免高端用户选择低端套餐的“掉档”行为给运营商带来业务收入下滑的风险；第三是闲时套餐与普通套餐的隔离。鼓励用户在闲时拨打长途电话，能够优化运营商的网络资源，提高业务收入。

3. 协调平衡

首先各类业务套餐的设计要相互平衡，业务套餐的设计虽然是针对用户需求和充分的市场细分而进行的，但要考虑到套餐内容之间的相互平衡，不能让用户觉得自己受到了不平等待遇或是歧视；其次要考虑网络的负载能力业务套餐可能会造成用户集中在某一时段毫无顾忌地使用移动网络的情况，超出网络的负载，对整个通信网络质量造成影响。

因此，在业务套餐的设计过程中，网络负载能力也是一个不容忽视的方面。

4. “品牌优化”的原则

市场上各个运营商都在推出自己的套餐，但是用户不可能同时去理解和接受许多套餐，这就要求套餐必须方便用户的记忆和理解。比如：北京移动推出的“99”套餐就是非常成功的案例，用户能够在复杂混乱的可选择套餐中迅速理解并记住套餐，以便在必要的时候作出比较和选择。业务套餐与品牌相结合，不仅有利于用户找准自己的位置，选择适合自己的价格方案，而且也有利于企业提升品牌价值并促进长期发展。我们设计的方案如下：

表 8 “66 顺”套餐方案

月基本 费 (元)	包含免费通话分钟		超出后资费			可供选择的附加业务
	本地通 话分钟 数	在本地拨 打 17951 IP 国内长途 通话分钟 数	本地通话资费（元/分钟）		在本地拨 打 17951 IP 国内 长途费 （元/分 钟）	
			忙时 (23:00-7:00)	闲时 (7:00-23:00)		
66	280	66	0.4	0.25	0.4	A-C
116	680	66	0.35	0.2		A-E
186	1180	66	0.3	0.15		A-G

- A. 彩铃、来电显示功能费：10 元/月
- B. 畅听无阻包：10 元/月（超出免费通话分钟后接听免费）
- C. 手机漫游套餐：基本费 5 元/月，通话资费标准为 0.5 元/分钟
- D. 天涯咫尺包（限一个网内用户）：500 分钟 10 元/月
- E. 拇指王(短信套餐)：200 条网内短信 5 元/月，可重复购买
- F. 手机网遨游套餐：10MB GPRS 流量 5 元/月；50MB GPRS 流量 20 元/月
- G. 娱乐彩信包：25 条彩信 5 元/月

对该套餐方案的评价：

优点：

1. 该方案在设计上，简约但不单一，即：基本套餐简单，附加套餐丰富。其中主套餐是必选项，主要是本地通话和国内长途通话，根据生活中用户的消费行为，分成三个有代表性的档次加以不同的包月费；附加套餐是参选项，能满足用户个性化需求，同时由用户自由选择，增加了用户的自主选择性。主要包括接听免费、长途优惠、漫游优惠、通话时间和短信数量的加包、彩铃、手机上网等 SP 业务，各种附加套餐也都会对应一个包月费。

2. 针对全球通用户多为白领商务人士，用于公事的话费比例较大。他们的价格敏感度最低而对网络品质的要求最高，价格弹性最小，因此套餐的种类应分级明显。因为很多全球通用户经常在外地工作，希望能在几个特定地区（如出差频率较高的某些区域内）给予漫游优惠。但短期内套餐很难实现全国统一，此方案为其提供了很好的附加套餐。

3. 合理分割三项套餐，消除了用户掉档的可能（即在用户主叫和接听时间一致的前提下，当用户月资费 Y 满足：66<Y<126 或 126<Y<196 时，该区间内必有一通话时间，使得用户选择套餐 1 与套餐 2 或套餐 2 与套餐 3 的月资费相同。而上海移动公司“全球通 68 套餐”方案却有用户掉档的可能）。

不足：

因为由题中条件无法得知手机运营商的成本费（网上搜索也没查到）。无法对该方案较现有“套餐”方案运营商的收入降低是否不超过 10%，给出直接的结果。于是我们简单以各类套餐折算的平均资费标准降低不超过 10%来大致比较该套餐的降价程度。

此方案与上海移动公司“全球通 68 套餐”方案的大致比较如下：

表 9 “全球通 68”套餐方案与“66 顺”套餐方案对比

	“全球通 68”套餐方案	“66 顺”套餐方案	下降百分比
套餐 1 资费标准	0.2072 元/分钟	0.1908 元/分钟	7.92%
套餐 2 资费标准	0.1682 元/分钟	0.1555 元/分钟	7.55%
套餐 3 资费标准	0.1622 元/分钟	0.1493 元/分钟	7.95%

表中数据解释：以套餐 1 为例

$$(68 + 66 \times 0.1) / 360 = 0.2072$$

$$66/(280+66)=0.1908$$

$$(0.2072-0.1908)/0.2072 \times 100\% = 7.92\%$$

由上表可以看出,“66 顺套餐”方案相对现有套餐方案更加优惠,且幅度适中。虽然运营商从单个用户身上获得的利润减小,但此方案必然会吸引更多新用户,因此总利润下降率必然小于 10%,薄利多销还有可能使运营商的利润上涨。

六、 模型的评价与改进

我们的模型对问题进行层层深入的分析,数据分析简单易懂,图形(用二维图表示了多个量的关系)直观形象;在处理数据过程中引入 0-1 整数变量,表达形式更加简洁;定义的優惠率很有特色;具有较好的推广性和通用性;对于模型中不能用明确的计算公式描述的某些阶段,我们用图形直观说明。

我们的模型稍加修改就可以推广到多个变量影响单个变量的领域,如税收方案设计、旅游线路安排和邮资计费标准的制定等,对优惠率的定义方法也可用于其他类似的比率。

不足之处在于:为了使计算方便,我们的假设比较多,不能完全考虑现实问题,对于一般情形,我们也可以进行处理,只是由于时间所限,我们没有给出所有结果;另外,对于问题四,我们只是从单位时间的收益进行描述,这是因为我们无从得知移动通信运营商的成本费和“66 顺”套餐推出后客户量的具体情况,故而考虑比较简略。

模型的改进:使题目中涉及到的变量(如被叫时间和主叫时间的比例等)一般化,将题中涉及的多个变量用多维图进行表述。

七、 参考文献

- [1] 李萍,齐佳音,舒华英 移动通信业务套餐设计原则探讨《世界电信》No.7 -18-21 -2004
- [2] 全球通68套餐_上海移动
<http://www.sh.chinamobile.com/brand/gotone/tariff/tczf/userobjectlail633.html> 2007.9.22
- [3] 新业务 彩信
<http://gotone.bj.chinamobile.com/index/operation/vas/60139/>
 2007.9.22
- [4] 新业务 GPRS套餐
<http://gotone.bj.chinamobile.com/index/operation/vas/60048/#4>
 2007.9.22

关于我国人口增长问题的研究

弓毅 张琦 尹怡

指导教师：罗明奎

摘要：

本文研究的是我国人口增长的预测问题，关键在于确定近年来我国人口发展新特点是如何影响未来人口增长的。我们将全国人口分为城镇人口子系统和农村人口子系统，分别建立相应的离散型人口发展方程，并借助年龄——迁移率函数用于刻画城镇、农村间人口迁移量，从而将农村人口城镇化作为影响因素加入离散型人口发展方程；而该方程本身又隐含了老龄化、性别比对人口增长的影响，因此采用上述多系统离散型人口发展方程综合考虑了人口发展新特点对人口增长的影响。

对于发展方程中的未知参数我们采用等维灰数递补模型进行预测，之后，利用 MATLAB6.5 编程对 2006~2050 年的全国人口总数进行预测，结果显示中短期内人口总数持续上升；长期人口总数基本不变（详见图 5.3）。具体在 2010 年时，我国人口总数约为 13.431 亿；2020 年，人口总数约为 14.523 亿；2033 年达到峰值 15.185 亿（详见表 5—1）。

关键词：离散型人口发展方程 等维灰数递补模型 年龄-迁移率函数

一. 问题的提出（略）

二. 问题的分析

关于人口增长的问题可以用微分方程进行描述,但本问题的关键在于如何将我国人口发展的新特点:老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高以及农村人口城镇化等因素做为影响因子加入人口增长模型。

八十年代由宋健等人提出的“人口发展方程”^[1]已含有“性别比”、“迁移量”这两个影响因子,所以我们在此基础上进行改进:由于模型中要体现农村人口城镇化对人口增长产生的影响,因此将方程中原本用于表示国内与境外间迁移量创造性的用于表示城乡间的人口迁移,由此自然想到将全国人口系统分作城镇和农村两个子系统进行研究。

此外,人口发展方程还隐含了老龄化加剧对人口数量增长产生的影响:由于社会年龄结构老龄化,任意年龄 r 对应的人口数增加,在死亡率基本不变的情况下,必然导致次年年龄为 $r+1$ 的人口数增加,可以参看离散化人口发展方程(详见式 5.4)。

人口发展方程中含有的参数“性别比”是指年龄为 r 的育龄女性人数总和与处于该年龄的总人数之比,容易将其转化为“出生人口性别比”的形式: $100 \times \text{男性/女性}$,若假定各年龄死亡率与性别无关,可认为“出生人口性别比”与人口发展方程中“性别比”转化后的结果近似相等。因此,可以认为“人口发展方程”通过参数“性别比”间接引入了“出生人口性别比”对人口数目的影响。

人口发展方程中含有的参数包括死亡率、男女性别比、迁移率等。我们拟定采用等维灰数递补模型进行参数预测,进而预测人口总数。

三. 模型的假设

对于本模型我们做如下基本假设:

- 1、模型求解过程中的女性总和生育率定为 1.8,且生育峰值在预测过程中不变;
- 2、每一个年龄段人口对应的迁移率随时间不会有显著变化;
- 3、城市向农村的人口迁移量与农村向城市的人口迁移量相比可以忽略;
- 4、不考虑境外人口的流入和人口向境外的流出;
- 5、在预测过程中不考虑发生大的自然灾害,爆发战争等意外事件;

四. 定义与符号说明

- r : 人口年龄, 取值为 $[0, 1, 2, \dots, 90]$;
 r_m : 人口最大存活年龄;
 r_{\max} : 女性生育峰值年龄;
 t : 代表年份, 取值为 $[2001, 2002, 2003, \dots]$;
 $\beta(t)$: t 年代时的总和生育率, 即一个妇女一生所生育的孩子数目;
 $N(t)$: t 年代时全国人口总数;
 $N_1(t)$: t 年代时城镇人口总数;
 $N_2(t)$: t 年代时农村人口总数;
 $\alpha_j(t)$: 表示年代 t 时地区 j 的人口占全国人口的比列;
 $\eta(r)$: 年龄为 r 的人口对应的迁移率;
 $p_i(r, t)$: 城镇($i=1$, 下同)或农村($i=2$, 下同) t 年代时年龄为 r 的人口分布密度函数,
 $\mu_i(r, t)$: 城镇或农村在 t 年代时年龄为 r 的人口死亡率;
 $k_i(r, t)$: 城镇或农村在 t 年代时年龄为 r 的女性占该年龄段总人数的比率;
 $f_i(r, t)$: 在 t 年代时年龄为 r 的人口迁移到城镇或农村的数量;
 $h_i(r, t)$: 城镇或农村在 t 年代时年龄为 r 的女性的生育模式,
 即表示一个女性在 r 岁时的生育概率, 满足归一化条件:

$$\sum_{r=r_1}^{r_2} h_i(r, t) = 1;$$
 $x_i(r, t)$: t 年代时年龄为 r 的城镇或农村人口总和;
 $x_{jk}(r, t)$: 地区 j (j 取1表示城市, 取2表示乡镇, 取3表示农村, 下同)在年代 t 时年龄 r 的男性($k=1$, 下同)人数或女性($k=2$, 下同)人数;
 $c_{jk}(r, t)$: 地区 j 在年代 t 时某一年龄 r 的男性比例或女性比例;

五. 模型的建立与求解

人口的发展变化过程是由诸多因素决定的, 为了定量研究社会人口状态变化及发展过程, 寻求人口总数随时间的变化规律, 我们采用改进后的人口发展方程预测未来我国人口总数。根据问题分析, 我们将全国人口分为城镇和农村人口两个系统, 然后分别对各系统建立人口发展方程, 其中农村和城镇间的人口迁移量是二者联系的纽带。

5.1 人口发展方程的建立^[1]

以下用 $i=1$ 表示城镇, $i=2$ 表示农村;

1. 城镇或农村在 t 时刻年龄为 r 的人口分布密度函数: $p_i(r, t)$;
 2. t 时刻城镇或农村中年龄在 $[r, r + \Delta r]$ 之间的人口数: $p_i(r, t)\Delta r$;
 3. 年龄为 r 的城镇或农村人口在 t 时刻的死亡率: $\mu_i(r, t)$;
 4. Δt 时间后, $p_i(r, t)\Delta r$ 中的死亡人数: $\mu_i(r, t)p_i(r, t)\Delta r\Delta t$;
 5. $p_i(r, t)\Delta r$ 中存活到了 $t + \Delta t$ 时刻的人, 年龄相应增加了 $\Delta r'$ (显然 $\Delta r' = \Delta t$), 此时他们的年龄处于区间 $[r + \Delta r', r + \Delta r + \Delta r']$;
 6. $t + \Delta t$ 时刻, 年龄在 $[r + \Delta r', r + \Delta r + \Delta r']$ 之间的人口数: $p_i(r + \Delta r', t + \Delta t)\Delta r$;
- 由上述显然: $p_i(r, t)\Delta r - p_i(r + \Delta r', t + \Delta t)\Delta r = \mu_i(r, t)p_i(r, t)\Delta r\Delta t$ (5.0)

对上式进行恒等变换并取极限可得：

$$\frac{\partial p_i(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial p_i(r,t)}{\partial t} = -\mu_i(r,t)p_i(r,t) \quad (5.1)$$

用 $p_0(r)$ 表示初始时刻城镇或农村人口密度函数，有初始条件：

$$p_i(r,0) = p_0(r) \quad (5.2)$$

t 年代时一个妇女一生所生育的孩子数目： $\beta(t)$ ；

t 年代时一个妇女在 r 岁时的生育概率： $h_i(r,t)$ ；

t 年代时年龄为 r 的女性人口数占同龄人口总数的比例： $k_i(r,t)$ ；

t 年代时一个妇女在 r 岁时的生育数： $\beta(t)h_i(r,t)$ ；

t 年代时年龄为 r 的女性数目： $k_i(r,t)p_i(r,t)$ ；

t 年代时 r 岁育龄女性带来的新生人口数： $\beta(t)h_i(r,t)k_i(r,t)p_i(r,t)$ ；

t 年代时处于育龄区 $[r_1, r_2]$ 的女性带来的新生人口数： $\int_{r_1}^{r_2} \beta(t)h_i(r,t)k_i(r,t)p_i(r,t)dr$

用 $p_i(0,t)$ 表示年代 t 时城镇或农村新生人口数，有边界条件：

$$p_i(0,t) = \int_{r_1}^{r_2} \beta(t)h_i(r,t)k_i(r,t)p_i(r,t)dr \quad (5.3)$$

综合(5.1)、(5.2)、(5.3)式，可以列出如下连续型人口发展方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial p_i(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial p_i(r,t)}{\partial t} = -\mu_i(r,t)p_i(r,t) \\ p_i(r,0) = p_0(r) \\ p_i(0,t) = \int_{r_1}^{r_2} \beta(t)h_i(r,t)k_i(r,t)p_i(r,t)dr \end{cases} \quad (5.4)$$

5.2 人口发展方程的离散化^[2]

(5.4)式所表示的人口发展方程是连续型偏微分方程，我们分别对其中的自变量 t 和 r 进行离散化，前者表示年份，后者表示年龄， t 和 r 均取整数值，从而将连续型人口发展偏微分方程变成差分方程组。

城镇或农村在 t 年代年龄为 r 的人口总数： $\int_r^{r+1} p_i(r,t)dr$ ，记作 $x_i(r,t)$ ；

对(5.0)式 $p_i(r,t)\Delta r - p_i(r+\Delta r',t+\Delta t)\Delta r = \mu_i(r,t)p_i(r,t)\Delta r\Delta t$ 进行离散化，即令 $\Delta r = \Delta t = \Delta r' = 1$ ，可得下式：

$$x_i(r+1,t+1) = x_i(r,t) - \mu_i(r,t)x_i(r,t) \quad (5.5)$$

(5.3)式 $p_i(0,t) = \int_{r_1}^{r_2} \beta(t)h_i(r,t)k_i(r,t)p_i(r,t)dr$ 对应的离散化形式为：

$$\varphi(t) = \sum_{r=r_1}^{r_2} \beta(t) h_i(r, t) k_i(r, t) x_i(r, t) \quad (5.6)$$

其中 $\varphi(t)$ 表示对于 t 年代时新生人口总数，与 $x_i(0, t)$ 的区别在于：后者是新生人口总数($\varphi(t)$)中除去死亡个数的净新生人口数。

综合(5.5)、(5.6)式，我们得到人口发展方程的离散化形式：

$$\begin{cases} \varphi(t) = \sum_{r=r_1}^{r_2} \beta(t) h_i(r, t) k_i(r, t) x_i(r, t) \\ x_i(0, t) = (1 - \mu_i(r, t)) \varphi(t) \\ x_i(r, t+1) = (1 - \mu_i(r-1, t)) x_i(r-1, t) \quad r = 1, 2, 3, \dots, r_{m-1} \end{cases} \quad (5.7)$$

由于城镇和农村系统之间存在人口迁移，所以我们又加入人口迁移函数 $f_i(r, t)$ ，表示对于各子系统在 t 年时迁入($f_i(r, t) > 0$)或迁出($f_i(r, t) < 0$)年龄为 r 的人口数，最终得到针对各个子系统的人口发展方程：

(注：当 $i=1$ 时，下述方程组对应城镇人口子系统模型， $i=2$ 时对应农村人口子系统模型)

$$\begin{cases} \varphi(t) = \beta(t) \sum_{r=r_1}^{r_2} k_i(r, t) h_i(r, t) x_i(r, t) \\ x_i(0, t) = (1 - \mu_i(r, t)) \varphi(t) \\ x_i(1, t+1) = (1 - \mu_i(0, t)) x_i(0, t) + f_i(0, t) \\ x_i(2, t+1) = (1 - \mu_i(1, t)) x_i(1, t) + f_i(1, t) \\ \dots \\ x_i(r_m, t+1) = (1 - \mu_i(r_{m-1}, t)) x_i(r_{m-1}, t) + f_i(r_{m-1}, t) \end{cases} \quad (5.8)$$

人口总数为：

$$N_1(t) = \sum_{r=0}^{r_m} x_1(r, t) \quad (5.9)$$

$$N_2(t) = \sum_{r=0}^{r_m} x_2(r, t) \quad (5.10)$$

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \quad (5.11)$$

5.3 人口发展方程中预测参数的确定

将人口发展方程离散化后，我们得到离散型人口发展方程组(5.8)，其中包含以下参数：性别比 $k_i(r, t)$ 、死亡率 $\mu_i(r, t)$ 、人口迁移量 $f_i(r, t)$ 、总和生育率 $\beta(t)$ 、生育模式函数 $h_i(r, t)$ 。下面我们将具体阐述如何确定上述各个参数。

5.3.1 2001 至 2005 年城镇、农村的人口性别比、死亡率

首先我们通过处理附录 A2007App2.xls 中提供的数据，求出 2001 至 2005 每一年的性别比、死亡率，为下一步运用灰色理论预测以后第 t 年的性别比及死亡率等参数水平提供数据准备。

这里所指的性别比是指在某一特定区域(城镇或者农村)、某一年龄段内女性人数占此区域该年龄段总人口的比率。性别比可以通过附表中的抽样调查数据直

接计算出来，方法如下：

用 $x_{jk}(r, t)$ (其中 $j = 1, 2, 3; k = 1, 2$) 表示地区 j ($j = 1, 2, 3$ 分别代表城、镇、村) 在年代 t 时年龄 r 的男性 ($k = 1$) 人数或女性 ($k = 2$) 人数；

用 $c_{jk}(r, t)$ (其中 $j = 1, 2, 3; k = 1, 2$) 表示地区 j 在年代 t 时某一年龄 r 的男性 ($k = 1$) 比例或女性 ($k = 2$) 比例；

用 $\alpha_j(t)$ (其中 $j = 1, 2, 3$) 表示在年代 t 时地区 j 的人口抽样数据占城、镇、村三个地区总的人口抽样数据的比例；

用 $N(t)$ 表示年代 t 时的人口总数；

例如，在年代 t 时年龄 r 的城市男性的数量 = 年代 t 时全国人口数 \times 年代 t 时城市人口占全国人口的比例 \times 年代 t 时城市中年龄为 r 的男性的比例，数学表达式如下：

$$x_{11}(r, t) = N(t)\alpha_1(t)c_{11}(r, t)$$

现将 $x_{jk}(r, t)$ 总结如下：

城市男： $x_{11}(r, t) = N(t)\alpha_1(t)c_{11}(r, t)$

城市女： $x_{12}(r, t) = N(t)\alpha_1(t)c_{12}(r, t)$

乡镇男： $x_{21}(r, t) = N(t)\alpha_2(t)c_{21}(r, t)$

乡镇女： $x_{22}(r, t) = N(t)\alpha_2(t)c_{22}(r, t)$

农村男： $x_{31}(r, t) = N(t)\alpha_3(t)c_{31}(r, t)$

农村女： $x_{32}(r, t) = N(t)\alpha_3(t)c_{32}(r, t)$

(注：上述“城市男”表示年代 t 时城市人口中年龄 r 的男性总数，其它类推)

年代 t 时年龄为 r 的城、镇人口总和由年代 t 时年龄为 r 的城市男 $x_{11}(r, t)$ 、城市女 $x_{12}(r, t)$ 、乡镇男 $x_{21}(r, t)$ 和乡镇女 $x_{22}(r, t)$ 的总和构成：

$$x_1(r, t) = x_{11}(r, t) + x_{12}(r, t) + x_{21}(r, t) + x_{22}(r, t) \quad (5.6)$$

年代 t 时年龄为 r 的农村人口总和由年代 t 时年龄为 r 的农村男 $x_{31}(r, t)$ 和农村女 $x_{32}(r, t)$ 构成：

$$x_2(r, t) = x_{31}(r, t) + x_{32}(r, t) \quad (5.7)$$

根据我们建模时的基本思想：将全国人口看作两个系统：城镇和农村，因此人口发展方程中需要的性别比 $k_i(r, t)$ 也分城镇与农村两种情况讨论：

年代 t 时年龄为 r 的城镇女性与城镇人口的比值也即城镇人口性别比：

$$k_1(r, t) = \frac{x_{12}(r, t) + x_{22}(r, t)}{x_1(r, t)} \quad (5.8)$$

注：城镇女性由城市女性和乡镇女性构成。

年代 t 时年龄为 r 的农村女性与农村人口的比值也即农村人口性别比：

$$k_2(r, t) = \frac{x_{32}(r, t)}{x_2(r, t)} \quad (5.9)$$

死亡率按照类似的流程处理，如下：

用 $Cd_{jk}(r, t)$ (其中 $j = 1, 2, 3; k = 1, 2$) 表示地区 j ($j = 1, 2, 3$ 分别代表城、镇、村)

在年代 t 时年龄 r 的情况下,

$$\text{城镇人口死亡率} = \frac{\text{城市男性死亡人数} + \text{城市女性死亡人数} + \text{乡镇男性死亡人数} + \text{乡镇女性死亡人数}}{\text{城市、乡镇的人口总和}}$$

$$\text{农村人口死亡率} = \frac{\text{农村男性死亡人数} + \text{农村女性死亡人数}}{\text{农村人口}}$$

数学表达式分别为:

$$\mu_1(r, t) = \frac{\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 x_{jk}(r, t) Cd_{jk}(r, t)}{x_1(r, t)} \quad (5.10)$$

$$\mu_2(r, t) = \frac{x_{31}(r, t) Cd_{31}(r, t) + x_{32}(r, t) Cd_{32}(r, t)}{x_2(r, t)} \quad (5.11)$$

根据(5.8)、(5.9)、(5.10)、(5.11)式计算 2001—2005 年人口性别比与死亡率, 结果见附录【1】。

5.3.2 2006 年及以后城镇、乡村人口性别比、死亡率的预测

预测方法有多种, 如回归预测模型, 人工神经网络模型, 灰色预测模型等。回归预测模型需要被预测量的变化具有明显的规律性, 人工神经网络预测需要较大的数据量, 而灰色预测具有所需信息少、方法简单的特点^[4]。鉴于题目只提供了 5 年的中国人口变化情况, 数据量偏小, 而且数据变化规律不显著, 因此我们选用灰色预测模型进行性别比和死亡率的预测。

由于在灰色预测中随着时间的推移, 老的数据越来越不适应新的情况。而等维灰数递补模型在原数据的基础上每预测一个新数据时, 就去掉一个老数据, 因此这种改进型灰色预测模型可以提高预测精度。

其间采用灰色预测模型中的后验差检验方法对预测值进行检验, 得到性别比和死亡率的预测结果(见附录【1】)。

5.3.3 人口迁移量的处理

广义上人口迁移主要是相对进出境人口而言, 由于我国人口基数巨大, 这种进出境迁移量相对而言要小得多, 依据假设 4: 不考虑境外人口的流入和人口向境外的流出, 因此实际建模中我们忽略了该因素。但本文是以城镇和农村两个系统为基础建立人口发展方程, 即是一个两区域人口系统模型, 所以对每个单独的系统而言, 人口的迁入或者迁出必须予以考虑。

假设人口由农村向城市流动为 T , 由城市向农村流动为 T' 。以中国现在的国情来看, 在相当长的时间内 $T' \ll T$ 。而且, 在假设 2(每一个年龄段人口对应的迁移率随时间不会有显著变化)的基础上, 人口的迁移量对于年龄的分布函数随时间的变化可以忽略, 即认为人口迁移率不随时间推移发生变化。因此 $f_i(r, t)$ 的形式可简化为 $f_i(r)$, 即单纯考虑处于不同年龄阶段的人口迁移量变化情况。

实际建模过程中, 我们采用了计量人口学家 Rogers 提出的年龄—迁移率理论模型^[3]: 把迁移率作为因变量, 年龄 r 作为自变量, 两者之间的关系可以用下面的双指数函数表示:

$$\eta(r) = a_0 + a_1 e^{-b_1 r} + a_2 e^{-b_2(r-c_2) - e^{-d_2(r-c_2)}} + a_3 e^{-b_3(r-c_3) - e^{-d_3(r-c_3)}} \quad (5.12)$$

其中 $\eta(r)$ 为 r 岁人口的迁移率,

将以上结论与中国具体国情相结合, 可以得到一个具体的函数关系式^[3]:

$$f(r) = N(t)(1.881 + 4.529e^{-0.3249r} + 20.5985e^{-0.1162(r-17.1817)} - e^{-0.4203(r-17.1871)}) \quad (5.13)$$

$N_2(t)$ 是年代 t 时中国的农村总人口。

由上式可以求出年龄为 r 的人口迁移数量 $f(r)$ 。利用(5.13)式绘出转移率—年龄函数曲线如图 5.2 所示:

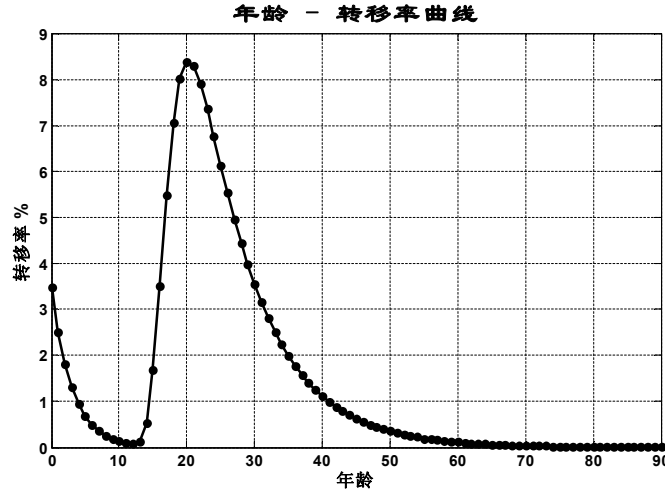


图 5.2 转移率随年龄变化的函数曲线

5.3.4 生育模式函数及其参数确定

对于生育模式函数 $h_i(r, t)$ 的确定有多种方法, 主要分为对数正态分布、Weibull 分布、 χ^2 概率分布等。我们采用的是 χ^2 概率分布函数对生育模式函数 $h_i(r, t)$ 进行描述^[2]:

$$h_i(r, t) = \begin{cases} \frac{(r - r_1)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{r-r_1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(n/2)} & r \geq r_1 \\ 0 & r < r_1 \end{cases} \quad (5.14)$$

其中, $n = r_{\max} - r_1 + 2$, r_{\max} 为女性生育峰值年龄, r_1 为女性生育起始年龄。

从给定的附表 A2007App2.xls 中查得 2005 年时女性的生育峰值 $r_{\max} = 25$, 根据假设 1, 在预测的过程中女性生育峰值维持不变, 但是考虑到我国持续推行计划生育国策, 以及晚婚晚育观念的逐步深入, 女性生育峰值年龄会有推迟, 实际中我们取 $r_{\max} = 28$; 根据目前我国相关政策规定生育起始年龄 r_1 取值 20, 在预测过程中 r_1 的取值也视为定植。

将这些参数代入(5.2)式——生育模式函数 $h_i(r, t)$ 即可得到具体的表达式:

$$h_i(r, t) = \begin{cases} \frac{(r - r_1)^3 e^{-\frac{r-20}{2}}}{16\Gamma(4)} & r \geq 20 \\ 0 & r < 20 \end{cases} \quad (5.14)$$

5.3.5 总和生育率的确定

根据附表 A2007App1.doc 给出的参考信息以及假设 1 中提到的：女性的总和生育率 $\beta(t)=1.8$ ，此值在预测过程中基本维持恒定。

5.4 最终预测结果

到目前为止，人口发展方程的离散化形式(5.3)所需的所有未知参数都以完成预测，我们将预测参数的数值带入(5.3)式，利用 MATLAB6.5 编程(程序代码见【附录 2.3 与附录 2.4】)完成对年代 t 时年龄 r 的人口数预测值 $x_i(r,t)$ ，之后利用

$$(5.4) \text{式 } N(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{r=0}^{r_m} x_i(r,t) \text{ 求得总人口数，具体结果见表 5-1。}$$

表 5—1 2006~2050 年的人口预测结果

单位：10 亿									
年份	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	
人口数×10 ⁹	1.3142	1.3212	1.3282	1.3355	1.3431	1.3513	1.3604	1.3704	
2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
1.3813	1.3930	1.4051	1.4174	1.4293	1.4410	1.4523	1.4624	1.4721	1.4806
2024	2025	2031	1.4992	2026	2027	2028	2029	2030	2031
1.4881	1.4945	1.4998	1.5044	1.5083	1.5111	1.5137	1.5157	1.5172	1.5180
2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041
1.5185	1.5180	1.5169	1.5149	1.5117	1.5091	1.5052	1.5014	1.4979	1.4925
2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049	2050	...
1.4880	1.4825	1.4773	1.4718	1.4638	1.4530	1.4431	1.4880	1.4825	...

将人口预测结果绘制成图形，可以更直观的看出 2006~2050 年我国总人口及城镇、农村人口的发展变化(见图 5.3)。

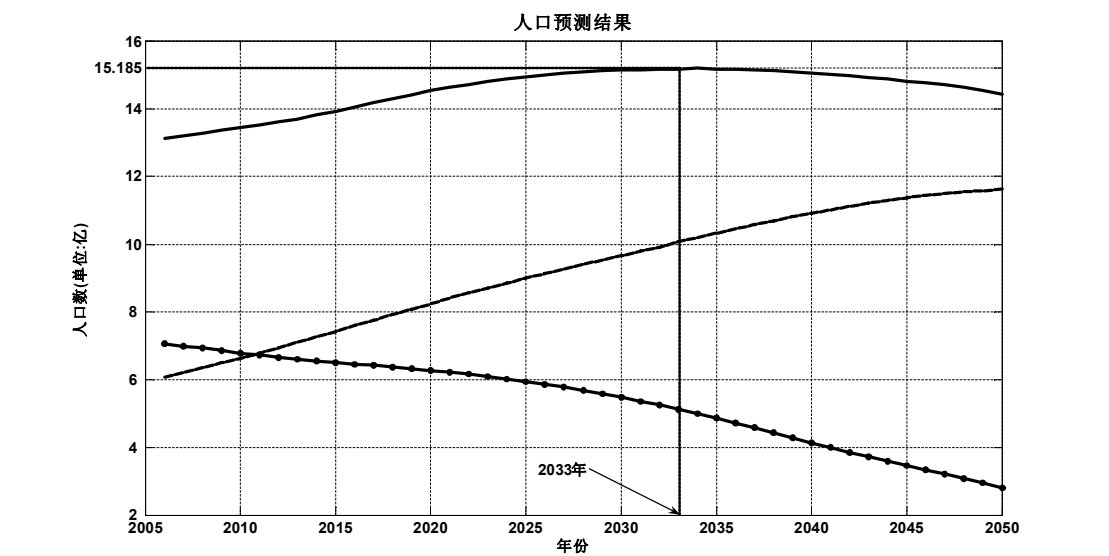


图 5.3 2006-2050 年全国人口及城镇、农村人口预测效果图

从图 5.3 可以直观看出,我国人口在 2030 年之前持续上升,直至 2030 年达到峰值 15.185 亿人,之后人口总数开始下滑,到 2050 年时的全国总人口为 14.825 亿人。

六. 模型的进一步分析

6.1 老龄化程度的预测

上述模型的研究过程,充分考虑了死亡率、性别比、迁移率、女性生育起始年龄与峰值年龄等参数对我国人口增长产生的影响,而人口老龄化程度的影响已经隐含在人口发展方程中(前面已经详细阐述原因),但从现有求解结果并不能直观反应出我国人口老龄化趋势,我们从老龄化人口占总人口的比重角度出发(附录 A2007App1.doc 中给出年龄在 60 或 65 岁以上为老龄人口),绘制出在预测年份期间老龄化程度:

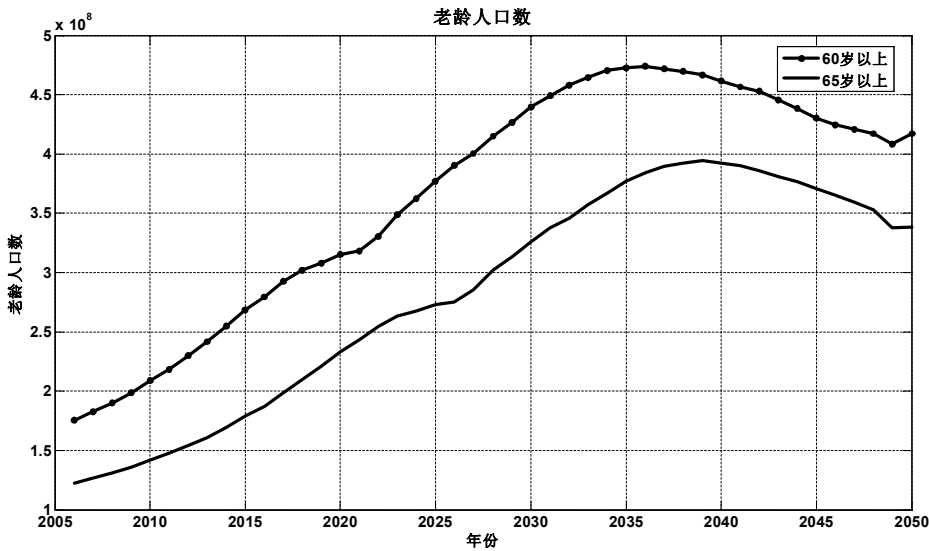


图 5.4 老龄人口总数预测结果

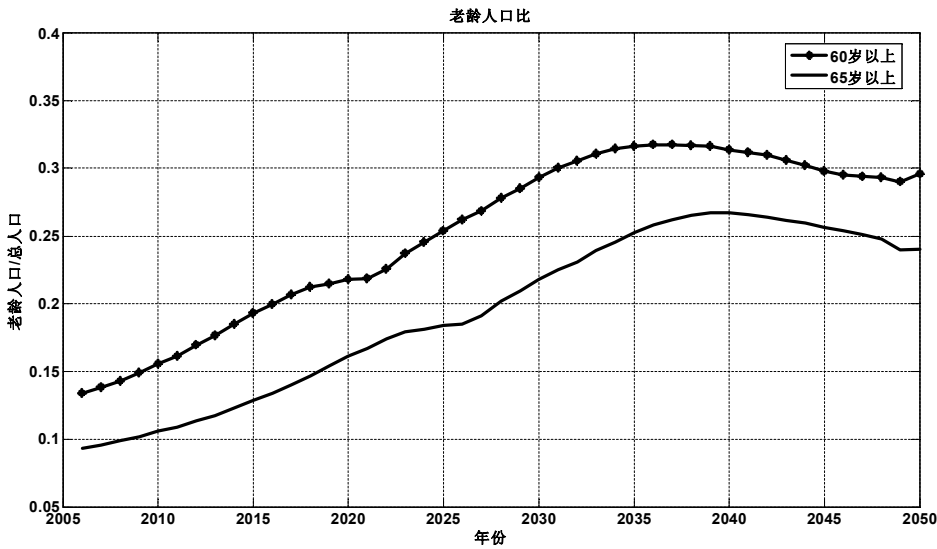


图 5.5 老龄人口数占人口总数比重的预测

从图 5.4 和图 5.5 可以看出，我国人口老龄化高峰在 2040 年左右达到，比重占到 30%，在 2040 年前老龄化人口总数持续上升，2040 年之后开始有所下降。

6.2 模型灵敏度分析

6.2.1 人口迁移率 $\eta(r)$ 的灵敏度分析

我们首先固定离散型人口发展方程中的其他预测参数，仅改变人口迁移率 $\eta(r)$ ，进而观察 $\eta(r)$ 对人口总数预测产生的影响，分析结果见图 5.6：

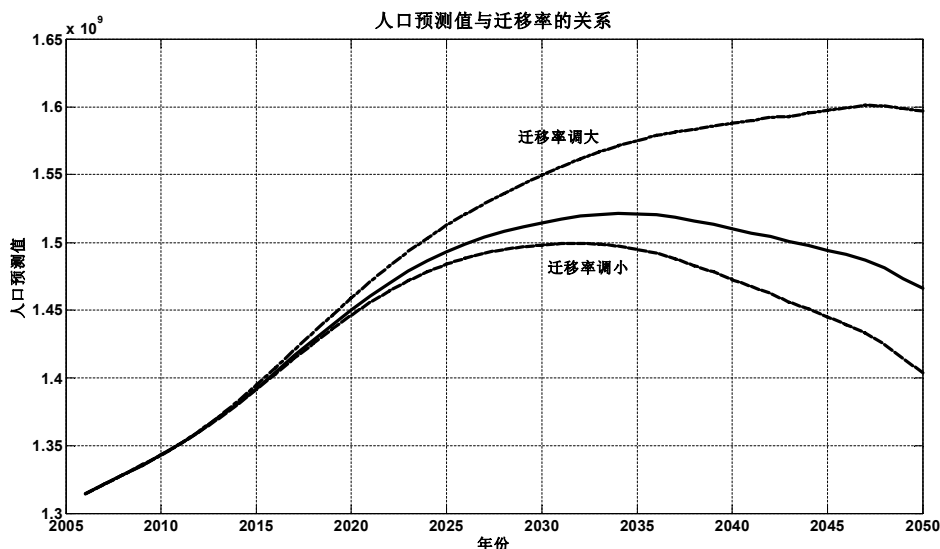


图 5.6 人口迁移率的改变对人口总数的影响

从上图可以看出，人口迁移率的改变对人口总数的影响在 2025 年前并不显著，在这之后，对人口总数的影响明显增大。而且，人口总数 $N(t)$ 随着迁移率 $\eta(r)$ 的增加有所上升。

6.2.2 总和生育率的 $\beta(t)$ 灵敏度分析

固定模型中其他参数，仅改变总和生育率的 $\beta(t)$ ，使其取 3 个值分别是 $\beta(t)=1.7$ ， $\beta(t)=1.8$ ， $\beta(t)=1.9$ ，得到 $\beta(t)$ 为上述 3 个不同值时总人口数的变化。我们可以观察出 $\beta(t)$ 的不同值对人口预测产生的影响。

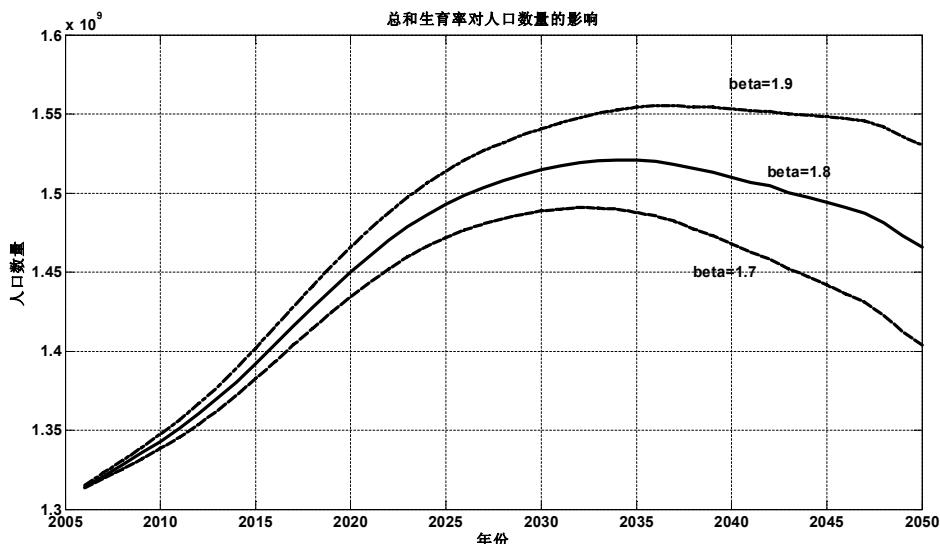


图 5.7 总和生育率灵敏度分析图

由图可以看出，在其他条件相同情况下， $\beta(t)$ 越大，人口总数也越大，并且随着年代的推移，差距会越来越大，以至于 2050 年两两之间的预测值的差距达到 6 千万左右。由此可见，模型中 $\beta(t)$ 是一个对结果产生较大影响的参数， $\beta(t)$ 只要变化 5% $\beta(t)$ ，相应的人口预测值要相应地改变 4% $N(t)$ 。

6.3 其他相关指标的对比研究

人口问题研究的范畴很广，不只是对人口数量的预测，还包括诸如劳动年龄人口数量，抚养比等参数的研究。《国家人口发展战略研究报告》(下简称《报告》)给出了劳动年龄人口数量，抚养比等随时间变化的变化关系(函数图像)。由本模型的数据，只要通过一些简单的运算处理，就能够得到这些相应的指标。

①劳动年龄人口数量：

根据《报告》，劳动年龄人口数量定义为 15-59 岁人口(定义 1)或 15-64 岁人口(定义 2)，相应的，我们做出了 2 种情况下的劳动年龄人口数量随时间的变化情况，并且以图形的方式直观表示出来(见图 6.3.1)，从图中可以直观看出劳动人口数在 2005 至 2050 年期间基本保持不变，总体略有下滑。

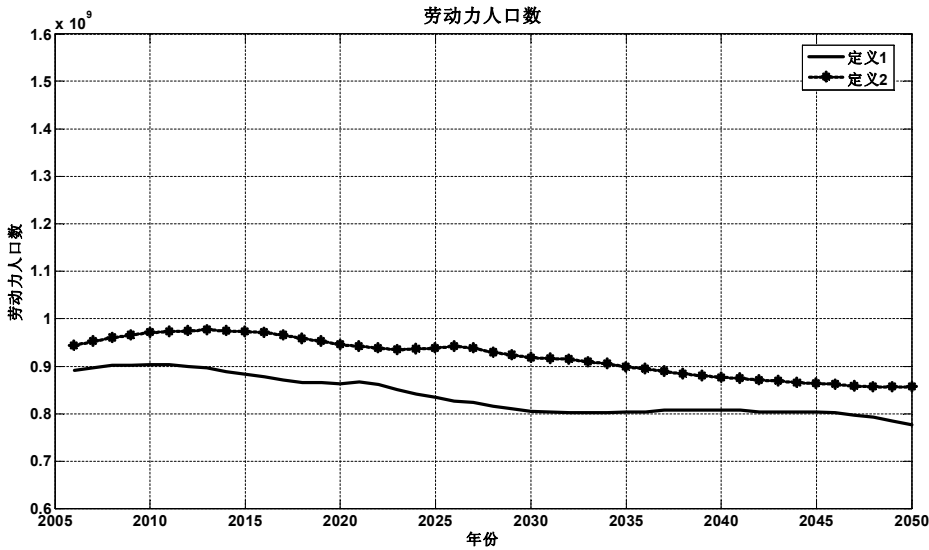


图 6.3.1 本模型预测的劳动力人口数

②人口抚养比：人口总体中非劳动年龄人口数与劳动年龄人口数之比。通常用百分比表示。说明每 100 名劳动年龄人口大致要负担多少名非劳动年龄人口。详见图 6.3.2，可以看出人口抚养比在 2006 至 2030 年期间呈稳步上升的态势，在 2030 年以后略有下降并趋于平稳。

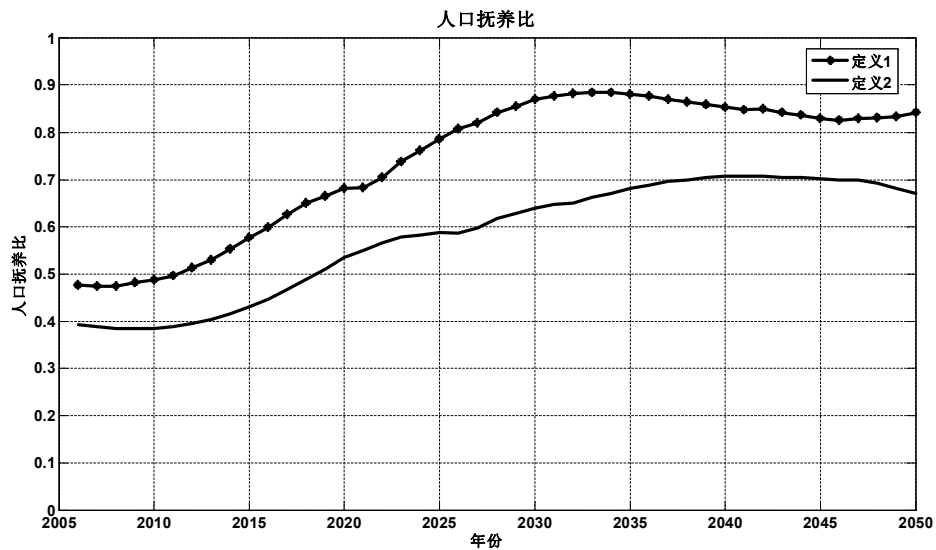


图 6.3.2 本模型预测的人口抚养比

生育旺盛期育龄妇女数量在 2006 年至 2015 年、2029 至 2041 年成上升趋势并相继达到局部最大值，育龄妇女人数对时间的变化也呈现波动的态势，先从 2006 年至 2013 年有短暂的上升，2013 年至 2026 年育龄妇女数量下滑至低谷，随后围绕 3.4 亿波动变化

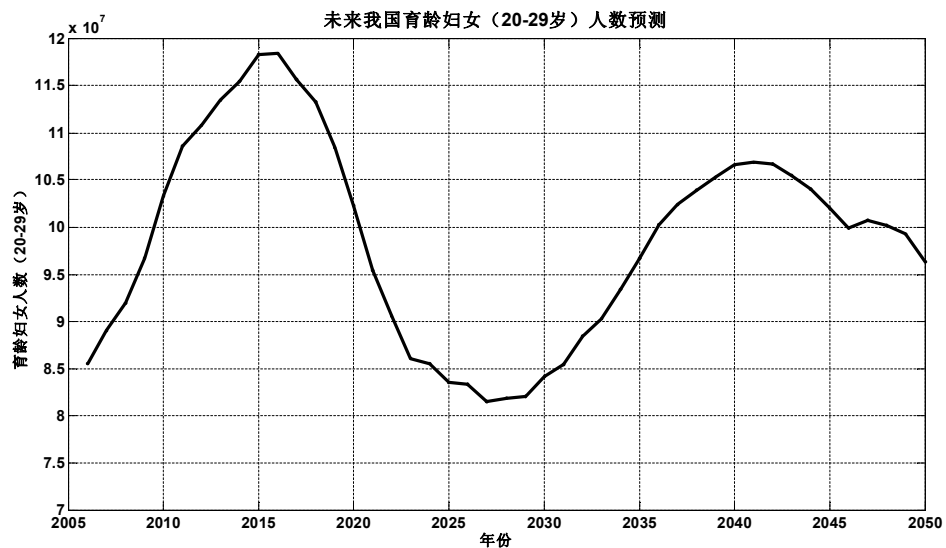


图 6.3.3 本模型预测的生育旺盛期育龄妇女数量

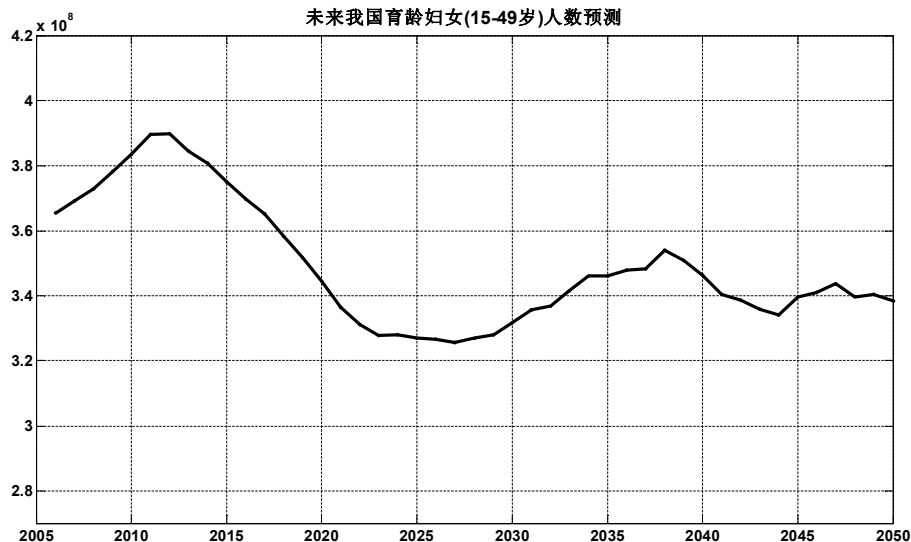


图 6.3.4 本模型预测的育龄妇女人数

七. 模型的评价与推广

7.1 模型的优缺点及改进方向

7.1.1 模型的优点:

- 1、本模型的基础——宋健人口发展方程自身隐含包括了“性别比”和“老龄化”对人口总数的影响，因此最终模型考虑了社会年龄结构老龄化和出生人口性别比对人口总数的影响
- 2、本模型灵活地运用宋健人口发展方程于城镇和农村两个子系统中，考虑了农村人口城镇化对这两个系统人口总数；
- 3、本模型采用了预测精度较高的等维递补灰色模型进行参数预测，具有较高的可靠性；

7.1.2 模型的缺点:

- 1、由于缺少历年城镇与农村之间各年龄段人口迁移数据，我们只有假定在一定时间内人口迁移率不会发生大的变化，这与实际有一些出入；
- 2、该模型预测时间大约为 50 年，随着预测时间的继续推移，模型预测的人口总数与实际情况误差将增大。

7.2 改进方向

- 1、多进行数据的调查，精确而丰富的数据是高预测精度与大预测范围的重要保证；
- 2、综合考虑城市、乡镇和农村三个系统间的人口转移，而不单只是考虑城镇（城市和镇）与农村间的人口转移关系。