

# 露天矿生产的车辆安排

于俊泊, 肖 川, 楚玉强

指导教师: 韩铁民

(东北大学, 沈阳 110004)

**编者按:** 面对问题既要选择铲位, 又要考虑产量、品位限制, 及车辆不等待等诸多要求, 本文将问题分为几个阶段用不同方法处理, 达到了满意的效果。文章精炼, 论述清晰。

**摘 要:** 如何利用最小的资源消耗取得理想的产量要求, 是本文讨论的重点问题。文章采用两种方法——贪心法和线性规划建立模型, 针对两个目标进行安排。

第 1 阶段: 采用贪心法按距离、产量、品位等要求依次取得最优、次优……等若干较优的铲位, 获得一些铲位的组合方案。

第 2 阶段: 对这些组合进行线性规划: 以车次为变量, 根据不同目标建立目标函数, 根据产量等条件限制建立约束方程, 然后求整数解, 在这些解中取最优者。

第 3 阶段: 根据每条路线上的车次数再次利用贪心法进行具体的车辆安排。

**关键词:** 贪心法; 线性规划; 车次; 车辆安排

**分类号:** AMS(2000) 90C05      **中图分类号:** 0221. 1      **文献标识码:** A

## 1 问题的分析

变量说明

$M$      卡车总数(20 辆)

$V$      卡车行驶速度(28 公里)

$L$      卡车载重量(154 吨)

$T$      一个班次的总时间(8 小时)

$T_a$     电铲的平均装车时间(5 分钟)

$T_b$     卡车的平均卸车时间(3 分钟)

$i$      卸点编号(5 个, 分别为矿石漏、倒装场 I、倒装场 II、岩石漏、岩场, 前 3 个用于卸矿石, 后 2 个卸岩石)

$j$      铲位编号(10 个)

$D_{ij}$     卸点  $i$  与铲位  $j$  之间的距离

$N_i$     卸点  $i$  的产量要求

$Q_{aj}$     铲位  $j$  的矿石数量

$Q_{bj}$     铲位  $i$  的岩石数量

$P_j$      铲位  $j$  的矿石平均铁含量

$K_{ij}$     一辆卡车一个班次内在卸点  $i$  与铲位  $j$  之间可往返的次数

$X_{ij}$     卸点  $i$  与铲位  $j$  之间需要安排的车次数

如果直接从题意出发, 安排运输路线是比较困难的, 因为卡车的行驶路线可以改变可以通过求出每条路线的车次数达到解决问题的目的。

铲车的安排方法共有  $C_n^m$  ( $n$  为铲位数,  $m$  为铲车数) 种, 计算复杂度较大, 可用贪心法找出较优的若干位置, 确定较优的安排方案, 对这些安排方案, 有如下方法:

目标及各个产量要求、品位要求等均为每条路线上车次的一次函数，故可用线性规划求解。

由已知条件可以得到线性规划的目标函数、约束方程。

对贪心法筛选过的铲车安排方法分别求出其线性规划的最优解，然后在其中再选出最优者，可得最优的铲车安排和车次，依据车次安排每辆卡车。

## 2 模型的建立

### 过程一——铲车安排

基于分析，首先得到铲车安排方法共有  $C_{10}^7 = 120$  种，如果直接计算 120 种组合，耗时太多，通过分析，最优解只可能存在于一些较优的组合中，可以采用贪心法获得这些组合。

贪心法的思想是：每次选择当前最优的点，如不满足条件，再选择次优点，以此类推。通过分析知，卡车应先选择距离卸点最近的铲位，才能以最小的运量获得足够的产量，若此铲位不能满足产量要求，再取次近的铲位，若不能达到品位要求，还需要选择可以平衡品位的点。

如本题的实例，先选取距离矿石漏最近的铲位 9，铲位 9 可满足产量，但无法满足品位要求，再选择可均衡品位的最近的点——铲位 3。同理，选择距离倒装场 I 的较近铲位 2，铲位 4，距离倒装场 II 较近的铲位 10，平衡品位的铲位 1……确定 1, 2, 3, 4, 9, 10 六个最优点，再从剩下的四个点中选取一个即可，经过这种方法筛选后的铲车安排方法为 24 种。

对于筛选后的方法，用线性规划逐一建立模型求解，下面以将铲车安排在 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 铲位为例(非上文提到的较优组合，仅作举例说明)：

### 过程二——线性规划求解车次

#### 1. 针对目标 1 建立模型

目标函数

总运量

$$\min Z = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 L \cdot D_{ij} \cdot X_{ij}$$

约束方程：

1)各个卸点的产量要求：

$$\sum_{j=1}^7 L X_{ij} \geq N_i, (i=1,2,3,4,5)$$

2)各个卸点的品位要求：

$$\text{下限} \sum_{j=1}^7 L X_{ij} \cdot P_j \geq 28.5\% \sum_{j=1}^7 L X_{ij} (i=1,2,3) \quad (2)$$

$$\text{上限} \sum_{j=1}^7 L X_{ij} \cdot P_j \leq 30.5\% \sum_{j=1}^7 L X_{ij} (i=1,2,3) \quad (3)$$

3) 各个铲位的矿石（岩石）数量，即该铲位允许的最大矿石（岩石）开采量

$$\text{矿石} \quad \sum_{i=1}^3 L_{ij} X_{ij} \leq Q_{aj} (j=1,2,3,4,5,6,7) \quad (4)$$

$$\text{岩石} \quad \sum_{i=4}^5 L_{ij} X_{ij} \leq Q_{bj} (j=1,2,3,4,5,6,7) \quad (5)$$

4)由于铲车每次装载需  $T_a$  分钟，故一个班次内最多可装载  $T / T_a$ :  $480 / 5 = 96$  次:

$$\sum_{i=1}^5 X_{ij} \leq T / T_a (j=1,2,3,4,5,6,7) \quad (6)$$

5)同理，由于卸点每次卸载需  $T_b$  分钟，故一个班次内最多可卸载  $T / T_b = 480 / 3 = 160$  次

$$\sum_{j=1}^7 X_{ij} \leq T / T_b (j=1,2,3,4,5) \quad (7)$$

6)由于一辆卡车在卸点  $i$  与铲位  $j$  之间往返行驶一次需  $2D_{ij}/V$  分钟,装卸需  $T_a+T_b$  分钟,共需  $T_a+T_b+2D_{ij}/V$  分钟,这条线路上一辆卡车一个班次内可往返  $K_{ij} = [T / (T_a + T_b + 2D_{ij}/V)]$  次 ( $[]$  表示取整),则该线路需要卡车  $X_{ij} / K_{ij}$  辆,卡车总数最多不能超过  $M=20$  辆:

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 X_{ij} / K_{ij} \leq M \quad (8)$$

至此目标函数及约束方程构造完毕。由于车次数为整数，此题转化为对整数规划的求解。

题目中还要求在总运量最小的情况下出动最少的卡车，在解上述线性规划时，如果有多

组解满足总运量最小，需要取  $\min Z = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 X_{ij} / K_{ij}$ ，即卡车总数最少的解。

在对筛选过的安排方法进行线性规划后，取其中总运量最小的解，即为题目所求。

## 2. 针对目标 2 建立模型

目标 2 与目标 1 的主要区别是目标函数不同，其约束方程相同，只须改变目标函数即可。

目标函数

$$\text{产量} \quad \min Z = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 L_{ij} \cdot X_{ij}$$

约束方程：(同目标 1)

如有多组解满足最大产量，依题目要求取  $\min Z = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 L_{ij} \cdot X_{ij}$ ，即岩石产量优先果岩

石产量相同，依题取  $\min Z = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 L_{ij} \cdot D_{ij} \cdot X_{ij}$ ，即总运量最小的解。

## 过程三——车辆安排

选取最优解中每条路线的车次，即可为每辆卡车安排行驶路线及运输次数。由

$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 X_{ij} / K_{ij}$  可知共需要多少卡车。可再次采用贪心法，使每辆卡车发挥最大工效，先安

排国家路线的卡车，然后安排改变路线的卡车。以下面一组解为例，具体说明卡车的安排方法：

每条路线上的车次见表 1

表 1

	铲位 1	铲位 2	铲位 3	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
矿石漏	0	13	0	0	0	0	0	54	0	11
倒装场 I	0	42	0	43	0	0	0	0	0	0
岩 场	0	0	0	0	0	0	0	0	70	15
岩石漏	81	0	43	0	0	0	0	0	0	0
倒装场 II	0	13	2	0	0	0	0	0	0	70

由  $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 X_{ij} / K_{ij}$  求得需要 13 辆卡车

通过  $[X_{ij} / K_{ij}]$ ，使固定运行的卡车尽可能地往返于卸点和铲位之间，求出每条路线上固定运行的卡车数，见表 2

表 2

I j	路 线	卡车数
1—8	矿石漏—铲位 8	1
2—2	倒装场 I—铲位 2	1
2—4	倒装场 I—铲位 4	1
3—10	倒装场 II—铲位 10	1
4—1	岩石漏—铲位 1	1
4—3	岩石漏—铲位 3	1
5—9	岩场—铲位 9	1

固定运行的卡车共 7 辆，其它 6 辆车需要改变工作路线。此时每条线上剩余的车次见表 3

表 3

I j	路 线	卡车数
1—2	矿石漏—铲位 2	13
1—8	矿石漏—铲位 8	25
1—10	矿石漏—铲位 10	11
2—2	倒装场 I—铲位 2	3
2—4	倒装场 I—铲位 4	6
3—2	倒装场 II—铲位 2	13
3—3	倒装场 II—铲位 3	2
3—10	倒装场 II—铲位 10	23
4—1	岩石漏—铲位 1	37
4—3	岩石漏—铲位 3	8
5—9	岩场—铲位 9	32

5—10	岩场—铲位 10	15
------	----------	----

在改变路线的 6 辆车中：

第一辆：在 1-2 线路运输 3 次，剩余时间  $T-13(Ta+Tb+2D12/V)=87$  分钟，可以继续 在 1-8 线路运输  $87/(Ta+Tb+2D18/V)=5$  次。剩余时间极小，忽略，此时 1-8 线路剩余车次  $25-5=20$ 。

第二辆：在 1-8 线路运输 20 次，剩余时间  $T-20(Ta+Tb+2D18/V)=157$  分钟，可以继续 在 1-10 线路运输  $157/(Ta+Tb+2D110/V)=11$  次。剩余时间极小，忽略，此时 1-10 线路无剩余车次。

第三辆——第六辆的安排方法同上。

按上述方法，即贪心法计算剩余时间，即可得到具体的车辆安排，问题得解。

### 3、模型的计算

目标 1：

总运量 85628 吨公里  $\approx$  8.6 万吨公里 总产量 70378 吨  $\approx$  7.0 万吨

磁矩石产量 38192 吨  $\approx$  3.8 万吨 岩石产量 32186 吨  $\approx$  3.2 万吨

出动 7 台铲车，分别安排在 1，2，3，4，8，9，10 七个铲位。

出动 13 辆卡车，安排如表 4：

表 4

编号	路 线	运输次数
1	矿石漏—铲位 8	29
2	倒装场 I—铲位 2	39
3	倒装场 I—铲位 4	37
4	倒装场 II—铲位 10	47
5	岩石漏—铲位 1	44
6	岩石漏—铲位 3	35
7	岩场—铲位 9	38
8	矿石漏—铲位 2	13
	矿石漏—铲位 8	5
9	矿石漏—铲位 8	20
	矿石漏—铲位 10	11
10	倒装场 I—铲位 2	3
	倒装场 I—铲位 4	6
	倒装场 II—铲位 2	13
	倒装场 II—铲位 3	2
	倒装场 II—铲位 10	8
	倒装场 II—铲位 10	15
11	岩石漏—铲位 1	30
	岩石漏—铲位 1	7
12	岩石漏—铲位 3	8
	岩场—铲位 9	23
	岩场—铲位 9	9
13	岩场—铲位 9	9
	岩场—铲位 10	15

目标 2：

总产量 103488 吨≈10.3 万吨    总运量 146791 吨公里≈14.7 万吨公里  
 矿石产量 54308 吨≈5.4 万吨    岩石产量 49280 吨≈4.9 万吨  
 出动 7 台铲车，分别安排在 1，2，3，4，8，9，10 七个铲位。  
 出动 20 辆卡车，安排如表 5

表 5

编号	路 线	运输次数
1	矿石漏—铲位 3	18
2	矿石漏—铲位 3	18
3	倒装场 I—铲位 2	39
4	倒装场 I—铲位 4	37
5	倒装场 I—铲位 3	20
6	倒装场 II—铲位 8	32
7	岩石漏—铲位 1	44
8	岩场—铲位 9	38
9	岩场—铲位 9	38
10	岩场—铲位 10	45
11	矿石漏—铲位 8	28
	矿石漏—铲位 9	2
12	矿石漏—铲位 9	14
	倒装场 I—铲位 1	20
13	倒装场 I—铲位 1	4
	倒装场 I—铲位 2	29
	倒装场 I—铲位 4	4
14	倒装场 I—铲位 4	27
	倒装场 II—铲位 3	5
15	倒装场 II—铲位 3	3
	倒装场 II—铲位 8	25
	倒装场 II—铲位 10	3
16	倒装场 IO—铲位 10	24
	岩石漏—铲位 1	22
17	岩石漏—铲位 1	6
	岩石漏—铲位 2	26
18	岩石漏—铲位 2	2
	岩石漏—铲位 3	32
	岩石漏—铲位 4	1
19	岩石漏—铲位 4	27
	岩场—铲位 8	2
20	岩场—铲位 8	9
	岩场—铲位 9	4
	岩场—铲位 10	24

#### 4 模型的分析

运用贪心法,可迅速求得铲车的可能位置,确定可能取得最优解的若干组合,大大减少了线性规划的计算次数。确定铲车位置后,列出线性规划议程,用 **Lindo** 等工具求解,要迅速得到结果。对于一些特殊情况,如多数铲位的优劣程度很接近时,采用贪心法无法准确地确定较优的铲位,此时需要进行线性规划的铲车安排方案数会大大增加,求解的时间会较长。在解线性规划时,需要考虑多解的情况,即多种方案均可取得最优解,此时需要根据题目要求(岩石产量优先、总运量最小、卡车数最少)取得相应的最优解。

模型优点

使用贪心法,迅速确定铲车的可能位置;

采用线性规划的思想,化整为零,使模型简化,大大减少了计算的复杂度;

模型缺点:

对于一些情况,可能存在很多较优点,使用贪心法后不能有效的减少铲车的安排方式;解线性规划过程中存在误差,导致最后结果会有细小偏差。

#### 参考文献

- [1] 施光燕,董加礼.最优化方法[M].北京:高等教育出版社,1999
- [2] 陈挺.决策分析[M].北京:科学出版社,1987
- [3] Churchman W. Introduction to Operations Research [M] John Wiley & Son Inc, 1985
- [4] Thomas H Cormen ect. Tile Introductiont to Algorithms[M]. The MIT Press, 2001

## SARS 传播预测的数学模型

周义仓<sup>1</sup>, 唐云<sup>2</sup>

(1-西安交通大学数学系, 西安 710049; 2—清华大学数学科学系, 北京 100084)

**摘 要:** SARS 的传播是 2003 年全国大学生数学建模竞赛的赛题之一,这是一个完全开放、国内外一直在探索的问题。同学们提交的论文中建立了许多模型,对 SARS 的传播和预测进行研究。本文对竞赛情况和需要探讨的问题进行了简单的总结。

**关键词:** SARS; 传播; 数学模型; 预测

**分类号:** AMS(2000)34B08      **中图分类号:** 0241. 81      **文献标识码:** A

SARS(SevereAcuteRespiratorySyndrome, 严重呼吸道传染病)是 21 世纪第一个在世界范围内传播的传染病。SARS 从 2002 年 11 月份开始在我国和世界范围内流行,到 2003 年 6 月 23 日为止,据世界卫生组织(WHO)报道,SARS 患者已经达到了 8459 人,其中 802 人死亡[1]。此时中国的 SARS 患者已经为 5326 人,其中 347 人死亡[2],这给人民生活和国民经济的发展带来了很大的影响。

SARS 是由一种冠状病毒引起的传染性很强的呼吸道传染病,它主要通过近距离空气飞沫以及接触病人呼吸道分泌物和密切接触进行传播,也可能通过病人飞沫污染物(如通过手、衣物、食物、水或环境等途径)传播。SARS 潜伏期一般为 2—11 天。SARS 患者的主要症状有:发热头痛、全身酸痛和不适、乏力,部分病人在早期也会有轻度的呼吸道症状(如咳嗽、

咽痛等)[3, 4)

在全球抗击 SARS 的过程中,人们对 SARS 传播和发展趋势进行了大量的研究。如 Donnelly 等人对 SARS 的潜伏期、死亡率进行了估计[5], Lipsitch 和 Riley 等人研究了 SARS 传播中的再生数和传播趋势[6, 7]。Chowell 等人通过建立 SEIJR 模型,研究了 SARS 在加拿大、香港和新加坡的传播情况[8]。国内许多科研院所也有许多工作是利用模型对 SARS 传播的分析与预测作出了定量的研究,对 SARS 的防控起到了积极作用。已公开发表的论文有杨方廷、陈吉荣等人关于北京 SARS 传播过程的仿真、参数和数据处理[9, 10],方兆本等 SARS 流行规律的建模及预报[11],周义仓等建立的描述我国 SARS 传播与控制的离散 SEQU 模型[12],以及王稳地等人对北京 SARS 模型的模拟等[13]。

在 SARS 传播的过程中,我国政府和世界卫生组织每天发布疫情信息,这些数据为我们的建模和分析提供了良好的基础。

## 1 命题的想法

我国大学生数学建模竞赛已经进行了十几年,吸引了越来越多学生的兴趣,学校和社会逐步认识到竞赛对教学改革、对学生能力培养的重要作用。扩大受益面、提高竞赛水平是今后大学生数学建模竞赛的主要目的。选择社会关注的热点问题、增加赛题的灵活性和开放性是提高竞赛质量一个重要的途径。

SARS 的流行是一场突如其来的灾难,它波及到了我国绝大部分省、市、区。从 4 月起,北京一度成了 SARS 流行最为严重的一个城市,4 月下旬每天的 SARS 病人和疑似病人大幅度增加,北京周围的一些省区和全国也出现了较多的感染情况,对我国的人民生活和经济发展造成了严重的影响。从 4 月下旬起,全国各地都行动起来展开了一场抗击 SARS 的攻坚战。到 6 月下旬每天的新增病例下降到零,世界卫生组织就解除了对北京旅游警告,我国人民的日常生活和经济发展逐步恢复正常。数学建模对传染病传播过程的描述、分析、预报和控制能起到积极的作用。为了唤起社会对数学作用的认识,全国大学生数学建模竞赛组委会专家组就把 SARS 的传播这场密切联系到国民生活的重大事件提炼成赛题,作为今年的 A、C 题。

我们知道许多院校在竞赛培训过程中非常关注 SARS 的建模和预测,已把它作为校内竞赛题或训练题。这表明大家在自觉地应用数学建模的理论和方法来分析和解决社会急需探讨的问题,数学的应用意识在不断的加强和深化,这是多年来数学建模活动效果的反映。同时也给 SARS 建模的命题带来了困难,考虑到这一点,在“SARS 的传播”赛题中,除了建模、预测及分析对经济的影响外,增加了评论一篇早期发表的论文,及给报社写短文部分。

在命题讨论过程中我们也知道已经有不少 SARS 研究的资料,特别是在网上可以搜索到许多关于 SARS 建模和预测的文章,有可能导致过多的引用,甚至抄袭,给评判带来困难。但从另一方面看,SARS 建模和预测是一个十分复杂的问题,从传播机理、建模原则,到数据的收集、整理、模型的建立和模型参数的确定,都有一系列问题需要继续研究。网上和刊物中大量丰富的文献资料可以使学生更多、更深入地了解 SARS 的传播过程和建模预测方法,学习真正怎样将数学和计算机技术用来研究与解决人们所关注的实际问题。

竞赛题目的第一问是提供了一篇北京大学在早期对 SARS 进行建模和分析预测的文章,让参加竞赛的同学进行评价,目的是希望让学生了解别人对 SARS 传播建模和预测的处理方法。该模型在早期有它的应用价值,在 SARS 流行结束后再对它作出分析和评价,有利于学生找到更加实用的模型和方法。题目的第二问是提供了北京市 4 月 20 日到 6 月 12 日已确诊的 SARS 累计病例数、现有的疑似 SARS 病例数、累计死亡人数和累计治愈出院人数,希望



学生建立起自己的模型，以对北京等地 SARS 的感染情况进行研究，定量地描述，并分析控制措施对 SARS 传播的影响。特别是训练学生学习利用已给的数据确定模型中的参数，进行分析、计算和比较。题目的第三问让同学收集 SARS 对经济某个方面影响的数据，建立相应的数学模型并进行预测，由于担心学生资源的限制，题目中还提供了北京市从 1997 年 1 月到 2003 年 8 月接待的海外游客人数作为参考。题目的第四问是让学生给当地报刊写一篇通俗短文，说明建立传染病数学模型的重要性，当然也希望能将自己模型和预测结果简要地介绍给民众，使更多的人认识到数学建模和预测工作的重要意义。

把“SARS 的传播”作为赛题也是希望学生尽可能地发挥自己的特长，收集尽可能多的数据，在网络和刊物中搜索尽可能多的参考文献，建立数学模型解决问题。该题目没有(也不可能)有固定的模型和标准答案，这也促使各赛区的阅卷人员也深入钻研、思考问题，了解国内外 SARS 建模的研究现状，从学生的答卷中挑选出有特点的优秀论文。这道赛题后来全国组委会只给了评阅的要点供给各赛区参考，并且着重对 A 题的第二、第三问提出一些要求，包括以下几个方面：

1)学生答卷中应包含对传播机理和传播状况的叙述(如：传播途径、传播方式、潜伏期和传播地区等)，并且给出建模原理、方法、思路或框图。

2)模型中的人口至少有 3 类：易感者、患者和恢复(与死亡)者，仔细一些的可以再加入潜伏者、隔离者、疑似病人、确诊病人，治愈者和留观者等，要弄清楚他们之间的关系。

3)模型还应包含对于传染率、治愈率和死亡率等重要概念的清晰表述。模型分析和计算中要给出上述参数的估计方法和估计值，还可包括平均治愈天数、隔离率和潜伏期等。

4)模型的结果应该提供预测值(用数量或曲线来说明高峰期和持续时间)和隔离措施的效果(包括提前和推迟控制时间的影响，隔离人数多少的影响及遗漏病人的影响)。对于结果的分析应包括误差分析，及模型与方法的通用性分析(模型除北京外，是否还用于其它地区，如外地、香港、全国和全球等)。

5)关于对经济的影响，要求收集某方面的数据(除旅游业外，还有如餐饮业、航运等)，预测没有 SARS 时的变化趋势；与实际统计数据比较，用差距说明影响的大小；预测该领域恢复到正常发展水平的时间。

全国组委会还提供了一些网址和关于 SARS 传播模型的论文报告作为评阅时参考，包括北大金融数学系的模型、清华力学系的模型、超级传播模型、多伦多与香港的报告和模型、台湾模型、Anderson 模型、Murray 模型、Dye 模型、加拿大多伦多病例分析及疾病传播模型等。

## 2 解答综述

一些参赛队对上面要点中提到的几个方面都给出了很好的想法。具体情况如下

### 1)对已有模型的评价

对题目之中给出的“SARS 疫情分析及对北京疫情走势的预测”一文，每个队都对文章中的建模思路、模型、参数和预测进行了客观的评价。概括起来文章的优点有：模型简单明了地反映了疾病的传播过程，抓住了 SARS 传播过程中两个主要特征：传染期  $L$  和传染率  $K$ ， $I$  是指平均每个病人可以直接感染他人的时间， $K$  是指平均每病人每天可传染的人数，对其给出了估计方法。对北京、广东与香港的疫情进行了分析比较，预测值与实际统计较接近；模型特别简单、计算量小，容易理解和使用；模型的灵活性在于适当挑选初始值  $N_0$  和参数  $K$ 、 $L$  就可以描述不同地区、不同控制措施下的 SARS 传播情况。模型的不足在于对如何确定初始值  $N_0$  和参数  $K$  与  $L$  缺乏一般的原则或算法，这种指数变化的趋势作为长期预测不

合理。另外还需要指出的是不少论文还对模型进行了推导、计算和改进，例如分段确定参数或使用随时间变化的  $K$ ，这些使得模型的理论基础更加完备，实用性更加广泛。

## 2)SARS 建模和预测

大部分答卷都在叙述了 SARS 传播机理的基础上，作出类似于下面这些基本合理的假设：①单位时间内感染的人数与现有的感染者成比例；②单位时间内治愈人数与现有感染者成比例；③单位时间内死亡人数与现有的感染者成比例；④SARS 患者治愈恢复后不再被感染；⑤各类人口的自然死亡可以忽略；⑥忽略迁移的影响。这些比例系数可以是常数、时间的函数、时间和各类人口的函数、或分几段取常数。当然，还可以根据需要做其它假设。建立模型一般是利用房室(compartment)结构，将总人口分为易感者  $S$ 、患者  $I$ 、恢复者  $R$ ，再仔细一些的还有潜伏者  $E$ 、隔离者  $Q$ 、疑似病人  $U$  和确诊病人  $J$  等类型。叙述或作出各类人口之间流动的示意图，并根据传染病建模的一般原理建立起如 SIR、SEIR、SEQPIJR 等类模型。这些模型基本思路相同，差异在于人口分类的多少，关键在于参数的确定。例如最简单的 SIR 模型为

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) & S(t_0) &= S_0, \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\delta + \gamma)I(t), & I(t_0) &= I_0, \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t), & R(t_0) &= R_0 \end{aligned} \quad (1)$$

在模型(1)中， $S(t)$ 是  $t$  时刻易感者的数量，它等于总人口减去患者和恢复者的数量， $I(t)$ 是  $t$  时刻患者的数量， $R(t)$ 是  $t$  时刻恢复者的数量， $\beta S(t)$ 是单位时间内每个患者感染的人数， $\gamma$ 是患者的恢复率， $\delta$ 是患者的死亡率。由于隔离等控制措施的不断加强和治疗情况的变化， $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$ 也是随时间而变化的；另外，由于易感者的数量特别大，可以近似看作常数，且将常数合并到  $\beta$  中去。在实际应用中，我们最关心的是感染者数量的变化。取时间单位为天，将模型中的第 2 个方程离散化得递推关系为

$$\begin{aligned} I(t+1) &= I(t) + \beta(t)I(t) - (\delta(t) + \gamma(t))I(t) \\ I(0) &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

在离散化的模型(2)中  $\beta(t)$  的含义是每天每个 SARS 感染者传染的人数，是一个十分重要的参数，其确定的原则是：当天新增 SARS 病人人数除以当天 SARS 感染者人数，再进行曲线

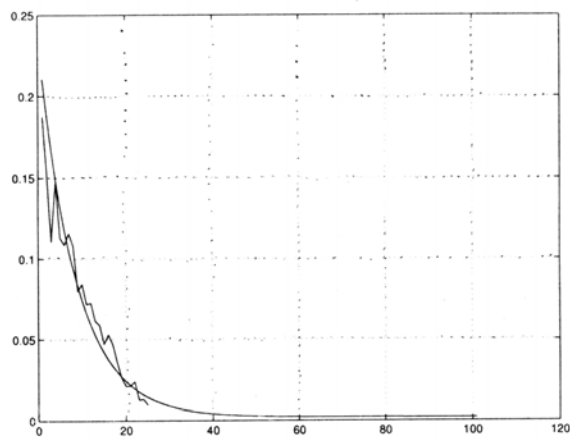


图1 每天每个 SARS 病人平均感染的人数，其中光滑曲线表示指数拟合的  $\beta(t)$  曲线，而折线表示实际计算结果

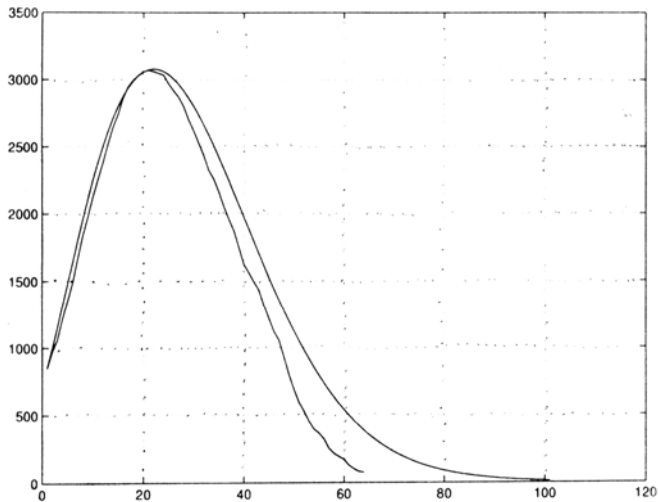


图2 每天 SARS 感染者随时间变化的关系。  
上面的光滑实线表示预测值，下面的曲线表示统计值。

拟合即可。 $\gamma(t)$ 和 $\delta(t)$ 是 SARS 患者每天治愈和死亡所占的比例,可以一起确定,其方法是当天 SARS 感染治愈和死亡人数除以当天 SARS 感染人数,再进行曲线拟合即可。例如,利用卫生部公布的 4 月 20 日至 5 月 15 日全国的数据 [14]进行计算,可以得到  $\beta(t)$  随时间变化的关系如图 1 中折线所示,用指数曲线  $\beta(t) = ae^{-bt}$  对其进行回归拟合得到  $\beta(t)$  的表达式,其曲线如图 1 中的光滑曲线所示。同理得到  $\delta(t) + \gamma(t)$  的表达式。将这些函数代入(2)进行递推计算得每天的 SARS 感染者人数(见图 2)。

从图 2 中可以看出,这个非常简单的模型、参数确定方法所预测的结果与实际的统计值比较一致。为了进一步检验模型和参数确定方法的合理性,我们分别利用北京、山西、内蒙、广州等地的数据替换全国的数据,进行同样的计算、预测和对比,发现结果都比较符合。注意:在这样的简单预测中仅用了 25 天的数据对模型中的参数进行估计和曲线拟合,从 5 月 15 日以后的预测值比实际统计值小,这是由于我国政府不断地加强隔离控制措施和改善治疗效果,这些因素在 5 月 25 日之前的数据中反映的不够。在实际应用中不断增加和更新数据进行短期的预测,预测的误差就会减少。

在竞赛答卷中,有许多不同的模型和方法来描述 SARS 的传播过程。其中最多的是上述房室结构,包括有隔离的 SQIR 模型,有潜伏(也有将潜伏作为时滞处理)的 SEIR 模型,考虑 SARS 诊断困难和我国实际做法的有疑似的 SPIR 模型,有区分自由流动病人和收治病人的 SIJR 模型,还有考虑医护人员感染的模型,涉及更多房室的模型等。从模型的形式看有常微分方程模型、偏微分方程模型、差分递推模型、控制反馈模型、小世界网络模型、神经网络模型、信息传输系统模型、基于复杂网络的概率演化模型、时间序列模型、混沌时间序列模型、自回归模型、非齐次泊松过程预测模型、Bezier 曲线模型、二阶 Logistic 回归模型和 Monte Carlo 法模拟模型等。在这些模型中所涉及的因素包括媒体宣传对心理和行为的影响、公共卫生水平、控制力度、平均气温、地区差异、人口流动、职业分布、年龄分布、医院内外的传播和超级传播者等。考虑到 SARS 病毒与一般传染病不同的是有着相当高的突变率,有的队还建立起 SARS 病毒的分子进化模型,对“毒王”现象做出合理的解释。

模型中的参数一般分为常量参数和变量参数,常量参数利用国家公布的数据或平均值确定,变量参数通过计算和回归的方法确定。优秀答卷都给出了北京市 SARS 传播的持续时间、高峰期、控制措施的影响等,也用所建立的模型对全国、山西、内蒙、香港和加拿大等地区的传播情况进行分析预测,与实际数据对比显示模型的适应情况。

在这些答卷中,不少参赛队把 SARS 的传播分为控制前和控制后两个阶段,分别进行建模、参数确定和预测,这样的处理方法对于研究控制措施实施迟早对 SARS 传播的影响十分方便。有一些队在传染率中引入一个因子,通过这个因子大小的调节,就可以分析控制措施的强弱对 SARS 传播的影响。考虑到心理压力对于免疫力下降的影响,有的队在赛期还利用 BBC 网上聊天系统对人们在 SARS 流行期间的心里恐慌程度进行调查,将结果引入模型参数中。在分析控制措施效果的基础上,还有一些队提出了自己的建议,如提高整个人口的抵抗能力,加强对与感染接触人员的监控等。在描述人口流动对 SARS 的影响时,有些队把实际区域抽象成二维网络,每个格子规定其地域特性,人口按一定的密度分布在不同的格子内,将人按年龄分为 4 类,不同年龄人群的活动范围不一样,规定他们的移动规则,再根据 SARS 的特点定义传播规则,根据控制措施定义隔离规则,再对北京市的 SARS 传播情况进行模拟和预测。

### 3)对经济的影响分析

SARS 对我国经济的影响是多方面的,在总体上对我国经济的正常运行有负面作用,但

它对国民经济不同部门的影响不同。**SARS** 的流行阻碍我国的旅游、交通运输和外商投资等方面的发展,另一方面,它促进了医药、汽车的销售和电子商务的发展。题目中给出的北京市海外游客的数据是一个典型的例子,绝大部分参赛队就是对这些数据进行分析,首先观察到在 **SARS** 流行前游客数量是随季节变化且不断增加的。结合这个特点建立模型预测不受 **SARS** 影响时北京市的外来旅游人数,再与 2003 年的实际数据比较,给出了同期减少的量,给出游客数量恢复的期望时间。在这一部分用到的模型或方法包括曲线回归模型、曲面拟合模型、灰色系统的  $GM(1, 1)$  预测模型、ARIMA 模型、三次指数平滑法、平均趋势预测法及消费乘数模型预测损失法等。

在这一部分也有少数参赛队收集到了其它数据分析 **SARS** 对经济发展的影响。有参赛队收集了我国民航系统从 1985 年以来的运营数据,建立模型对民航业的 3 大指标(总周转量,旅客运输量,货邮运输量)进行预测,通过无 **SARS** 情况下民航运营情况的预测和与 2003 年的分析对比,估计出了民航受 **SARS** 影响的经济损失,并对民航业的恢复期进行了预测。有参赛队在分析非典对经济的影响时着重讨论了受非典影响的旅游百货行业和医药行业的效益变化,考虑到股市作为国民经济的晴雨表,能很好地反映出各行各业经济效益的变化趋势,他们在每个行业中各选取了三十家品级较高的上市公司,找出它们业绩的变化特征,以此来反映整个行业的效益变化趋势,利用灰色预测模型对这两个行业的效益做出了预测;同时考虑到非典的影响,又对此模型进行了修正,加入了信心指数。利用修正后的模型,他们分别预测了 2003 年旅游百货行业和医药行业上半年业绩,与实际数据吻合较好,用此模型进一步分析得出,在十一长假期间,旅游百货行业会有强劲的反弹。也有参赛队考虑心理状态等影响旅游的因素,更关心旅游市场的恢复期预测。他们的出发点是大多数人的出游的决策受安全、收入、费用、时间等多因素的影响,不同的因素对于不同的人来说具有不同的影响力,各个因素的权重不同。但当象 **SARS** 这种对人身安全威胁极大的因素出现时,安全几乎成了人们考虑是否出游的决定因素。也就是说影响人们出游的各个因素的权重发生了很大的变化。而当 **SARS** 得到控制以后,虽然安全系数大大升高,但是安全顾虑仍然会持续一段时间,还是人们考虑出游的重要因素,直到人们对 **SARS** 的顾虑完全消除。因而建立模型时,采用了层次分析和数据拟合相结合的方法。首先通过层次分析法和一些合理的假设,归纳出一个带有参数的多项式。再根据该多项式的形式,结合已知数据表中部分合理的数据,作出了一条拟合曲线,由此曲线得到了对未来几个月游客数量的预测。

#### 4)给报社写短文

给报刊写短文就是要让群众认识到传染病的危害,认识到数学模型在研究传染病流行规律方面的重要作用。

传染病历来是危害人类健康的大敌,历史上传染病一次次的流行给人类生存和国计民生带来了巨大的灾难。20 世纪是人类征服传染病取得最辉煌成果的时期:肆虐了近千年的天花终于被消灭了;麻风病、脊髓灰质炎被彻底消灭的日子也为期不远了;白喉、麻疹、百日咳、破伤风等病已在许多国家得到遏制;多种抗生素的问世,使一度给人类造成巨大灾难的“瘟疫”不再危害人间。然而,人类要征服传染病,道路依然曲折漫长。随着国际贸易和交往的发展、生态环境的变化以及病原体 and 传播媒介抗药性的增强,原来已灭绝或被控制的许多传染病(如性病、结核病)等再次抬头并且不断蔓延。一些新近出现的传染病也来势凶猛(如艾滋病、**SARS**)。人类将长期面临着传染病的严峻威胁,对传染病发病机理、传染规律和防治策略研究的重要性日益突出,且已成为当今世界需要迫切解决的一个重大问题。正如世界卫生组织 WHO 发表的报告所述,传染病依然是人类的第一杀手。

疾病的传播问题是有一定规律，可以预测。早在 1760 年 D. Bernoulli 就曾用数学研究过天花的传播；1906 年 Hamer 为了理解麻疹的反复流行，构造并研究了一个离散时间模型；1911 年公共卫生医生 Ross 博士利用微分方程模型对疟疾在蚊子与人群之间传播的动态行为进行了研究，其结果表明，如果将蚊子的数量减少到一个临界值以下，那么疟疾的流行将会得以控制。Ross 的这项研究使他获得了 Nobel 医学奖。1926 年 Kermack 与 McKendrick 研究了 1665—1666 年黑死病在伦敦的流行规律以及 1906 年瘟疫在孟买的流行规律。传染病动力学的建模与研究于 20 世纪叶开始蓬勃地发展[15, 16]。

传染病传播的数学模型可以用来描述疾病的发展变化过程，有效、经济、迅速、明确地给出疾病发生的数量规律，为人们的决策提供数量依据；并对各种检测、防治、治疗及控制措施进行评价和比较，以控制疾病的流行。2001 年伦敦大学帝国学院的流行病学家 Roy Anderson 等还为英国的口蹄疫爆发建立起数学模型，提供了大量的客观证据，促使英国首相托尼·布莱尔领导的政府下令大规模屠宰牲畜，阻止了疾病的蔓延，这就是一个成功的例子。

这次 A、C 题的参赛队大多能写出一篇较好的短文，说明数学建模在研究传染病流行规律方面的重要作用。简述自己的建模方法和所得到的结论，提出了对 SARS 传播进行控制的很好的建议。

给报刊写通俗短文还应考虑到读者面，应该用读者可接受的语言来说明建立传染病数学模型的重要性。这方面，有些参赛队做得是比较成功的，本文的附录就是一个范例。这里还应当指出，传染病的数学模型和预测只能为有关部门提供决策的数量参考，由于统计数据和传播机理等方面的限制，不可能预测得很精确，只能预测传播发展的趋势，尤其是在一个传染病传播的初期更是如此，不应将数学模型预测和分析的效果过分夸大。

### 3 对 SARS 建模和预测进一步的思考

SARS 在我国和世界范围内的流行已经结束，但人们仍然关心还会有下一次的 SARS 流行，别的传染病出现应该怎样应对，有关 SARS 和新发传染病的研究一直在继续。有一点是肯定的，除 SARS 外，今后还会有其它类型传染病在不同的范围内流行，所以，公共卫生体系需要不断加强，对传染病的研究工作不能停止。这次竞赛通过对 SARS 的建模、预测及其经济影响的分析，可以使得我们对 SARS 和其它传染病的传播机理有更深入的了解发现问题、积累经验。这些参赛学生中有一部分以后会在医疗卫生部门或政府机关工作，数学建模的训练和竞赛经历会使得他们在今后的工作中发挥作用，对防治工作起到帮助。

这次竞赛中经过三天的奋战，同学们经受了锻炼，对传染病建模有了初步的体会，取得了良好的成绩。但在答卷中也存在下面几个问题。

1)不少队在确定模型的参数时几乎用上了赛题中给出的所有数据，然后再代人模型中作预测，指出预测结果与实际统计值很接近，几乎没有误差。这反映出他们没有真正体会传染病建模和预测的思想。实际中最需要的是在一种疾病传播初期收集到少量数据的基础上建模预测以后的发展情况，当一个疾病流行结束后，所有数据都有了，预测就失去价值。所以应当只用一部分数据进行预测，而用其余数据作检验。

2)在疾病的传播过程中，对流行状况影响很大的是再生数，即一个病人在患病期间平均感染的人数，这在流行病传播中是个十分重要的参数。要将一个传染病控制住，实际上就是要通过各种措施使得再生数小于 1。答卷中提到再生数概念和对它作出估计的很少，也没有分析我国的控制措施对再生数的影响。

3)阅读的资料、收集的数据不足。许多队仅对北京的 SARS 传播情况进行了建模预测，没有涉及其它地区，经济的影响也是就题目之中给出的旅游数据进行了分析，没有收集其它

数据，没有看到 SARS 对某些行业带来的促进作用。

4) 尽管全国组委会特别要求参赛同学签名保证不抄袭别人的成果。如果引用公开的资料(包括网上查到的资料)，必须在正文和参考文献中明确列出。但仍有一些答卷明显地违背了他们的保证。全国组委会已经取消了这些队的全国评奖资格。

在这次数学建模竞赛过程中，同学们也遇到了不少困难，如传播机理和过程不是十分清楚，在确定参数时能得到的数据不足，缺乏患者被感染和感染给别人、确诊与治愈等的个案资料，而潜伏期的感染情况、超级传播者的传播链、流动人口的数据及流动人口中的感染情况等数据也明显不足。对于 SARS 及类似传染病的建模分析还有许多问题值得探讨，包括：

i) 如何从模型中能反映出对疾病的传播规律有重要影响的、但不能完全量化的因素或不易确定的因素。如全体人口都是易感者，但真正与 SARS 病人接触的仅是极少数；对潜伏期、就诊或隔离前以及治疗期的接触与传染率的估计；对于不同级别(如学校、单位和居民区半封闭状态)的隔离措施的描述和效果的评价；各个省、区之间人口流动的影响；少病例的省市和地区内疾病传播情况的描述；医院内部感染情况的描述；SARS 向农村、牧区扩散情况的描述；隐性感染者对疾病传播的影响等。

ii) 探讨在建立模型时如何对总人口进行分组以及对随机现象做出描述；如何根据流行病学的特征，以及年龄、行为、地域分布和流动等因素，研究影响传染病预测控制机制的人口分组分层问题；鉴于患病者传染力之间的差异、受体易感程度的差异、人口流动以及重疫区人口向周边地区和农村、牧区扩散的随机性、各地区间发病情况与预防控制强度的差异、统计数据的误差等，研究具有诸多随机因素的建模问题。

iii) SARS 及突发性传染病的数据挖掘问题。对于像"SARS"这类新的突发恶性传染病，在流行初期由于病因不清和经验不足，难以作出合理判断。我们需要研究如何从人类以往积累的大量传染病流行资料中提取类似的相关数据和信息进行模式识别，并建立实时自适应学习机制，用以不断完善数学模型。我们需要研究从仅有的少量数据和以前积累的相关传染病资料中提取信息，建立初步模型，估计疾病传播的流行病学参数和流行模式，探讨基于少量数据的理论和方法，发展一种对突发恶性传染病的快速反应决策技术。我们应当进一步完善已有的工作，在建模的基础上开发出一套实用的预测软件。

## 参考文献

- [1]WHO. <http://www.who.int/csr/sars/country/2003-06-23/en/>
- [2]Ministry Of Health P. R. China. <http://www.moh.gov.cn/was40/detail?record%2782&channelid%2734385>
- [3]B. S. Kamps, & C. Hoffmann, SARS Reference—05 / 2003, SARSreference. com, Flying Publisher May 2003
- [4]孟继鸿, 邱海波. SARS 基础与临床. 南京: 东南大学出版社, 2003
- [5]C A Donnelly et al. Epidemiological determinants of spread of severe acute respiratory syndrome in Hong Kong, The Lancet, Published online May 7, 2003, <http://image.thelancet.com/extras/03art4453web.pdf>
- [6]M Lipsitch, et al. Transmission dynamics and control of severe acute respiratory syndrome, Published On-line May 23, 2003; 10. 1126 / science. 1086616(ScienceExpressReports)
- [7]SRiley, et al. Transmission dynamics of the etiologic agent of SARS in Hong Kong: impact of public health interventions, Published online May 23, 2003; 10. 1126 / science. 1086478(Science

Express Reports)

- [8]G Chowell, P W Fenimore, M A Castillo Carsow, and C Castillo Chavez, SARS out break in Ontario, Hong Kong, and Singapore: the role of diagnosis and isolation as a control mechanism, *Journal Of Theoretical Biology*, 2003(224), 1—8,
- [9]杨方廷, 侯立华, 韩军等. 北京 SARS 疫情过程的仿真分析. *系统仿真学报*, 2003(15: 7), 991—994
- [10]陈吉荣, 杨方廷, 战守义. 北京 SARS 仿真模型的参数和初始值的处理. *系统仿真学报*, 2003(15:7), 995—998
- [11]方兆本, 李红星, 杨建萍. 基于公开数据的 SARS 流行规律的建模及预报. *数理统计与管理*, 2003(22: 5), 48—57
- [12]Zhou Yicang, Ma Zhien, Fred Brauer. A Discrete Epidemic Model for SARS Transmission and Control in China, *Mathematical and Computer Modeling*, 2003
- [13]Wang Wendi, Shigui Ruan. Simulating SARS Outbreak in Beijing with United data, *Journal Of Theoretical Biology*, 2004
- [14]Ministry Of Health P R China. <http://www.moh.gov.cn/was40/Outline?page=4&channelid=3485>
- [15]N T J Bailey. *The Mathematical theory of infectious disease*, 2nd ed., Hafner, New York, 1975
- [16]马知恩, 周义仓, 王稳地, 靳祯. *传染病动力学的数学建模与研究*. 北京: 科学出版社, 2004

## 考虑自愈的 SARS 的传播模型

李 贝, 徐海寰, 郭佳佳  
(大连理工大学, 大连 116024)

**编者按:** 本文根据 SARS 的传播规律, 将人群分成易感染者、潜伏期病人、未发现的病人、已发现的病人及治愈(或死亡)而具有免疫力的人五类。考虑自愈和控制(用参数表示)建立了微分方程模型和模拟模型, 研究了疫情随各参数(包括自愈率)变化的规律, 为控制疫情提供了具有一定参考价值的意见, 作者如能通过对前期数据的分析去确定参数, 则模型还能发挥一定的后期预测功能。本刊已发表文章的主要部分。

**摘 要:** 本文根据对 SARS 传播的分析, 把人群分为 5 类: 易感类、潜伏期类、患病未被发现类、患病已被发现类和治愈及死亡组成的免疫类, 并考虑自愈因素, 提出了两个模型: 微分方程模型和基于 Small-World Network 的模拟模型。对微分方程模型, 以香港为例讨论了自愈的影响, 在一定意义下说明自愈现象在 SARS 传播中是普遍存在的。模拟模型利用 Small-World Network<sup>[1]</sup>模拟现实中人们之间的接触; 借鉴 Sznajd 模型<sup>[2]</sup>观念传播的基本思想“考察区域内每个成员如何影响与其有联系的其他成员”, 用影响类比传染, 从患病者去传染与其有接触的健康人的角度, 模拟 SARS 的传播过程; 然后吸收元胞自动机模型<sup>[3]</sup>同步更新的思想, 最终建立了一个患病者传染邻居, 且一个成员同时受所有邻居影响的基于 Small-World Network 的模拟模型。对此模型, 我们讨论了一些主要参数及接种疫苗的影响, 最后拟合北京数据, 讨论了提前或推迟 5 天采取措施的影响。

**关键词:** SARS; 自愈; 微分方程; Small-World Network; Sznajd 模型; 元胞自动机模型; 模拟

**分类号:** AMS(2000)34B08      **中图分类号:** 0241. 81      **文献标识码:** A

## 1 基本假设与符号

### 1.1 基本假设

- (1)假设 SARS 的传播方式为接触性传播，不与患病者接触就不会被感染；
- (2)假设人们被感染后需先进入潜伏期，在潜伏期内不具备传染性；
- (3)假设 SARS 患者被发现后就立即被隔离，被隔离者不具备传染性，SARS 患者只在被发现前可以传染他人；
- (4)假设 SARS 康复者不会被再次感染，并且不具备传染性；
- (5)不考虑在 SARS 传播期间人口的自然出生和自然死亡；
- (6)所研究地区的人口总量一定，不考虑该段时间内人口的迁入迁出；

### 1.2 符号说明

$N$ ——我们所研究区域的人口总数；

$S$ ——易感类，该类成员没有染上 SARS，也没有免疫能力，可以被传染上 SARS；

$E$ ——潜伏期类，该类成员已经感染了 SARS 病毒，但尚处于潜伏期，还不是 SARS 患者，不能把病毒传染给  $S$  类成员；

$I_u$ ：——患病未被发现类，该类成员已经成为真正的 SARS 患者，能够把病毒传染给  $S$  类成员；

$I_i$ ——患病已被发现类，该类成员虽然是 SARS 患者，但由于发现后立即被严格隔离，不能传染给  $S$  类成员； $R$ ——免疫类，该类成员为 SARS 康复者或因患 SARS 死亡，已经具有免疫力，不再对其它成员产生任何影响；

$H$ ——潜伏期天数； $L$ ——传染期天数；

$P$  SWN 模型中每条连接边“断键重连”的概率；

$J$ ——SWN 模型中每个节点被选中进行再次“断键重连”的选中概率；

$Q$ —— $S$  类成员接触 / 。类成员后被感染 SARS 的概：

## 2 微分方程模型

### 2.1 模型建立

我们把一个封闭区域内的人群完备的分成 5 类： $S$  类、 $E$  类、 $I_u$  类、 $I_i$  类和  $R$  类，设第  $t$  天时五类成员的人数分别为  $S(t)$ 、

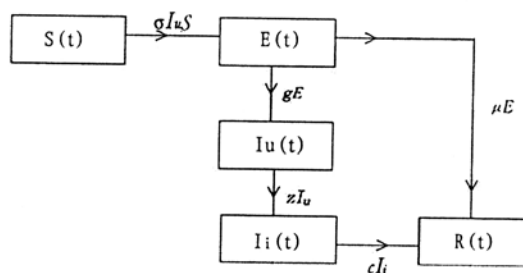
$E(t)$ 、 $I_u(t)$ 、 $I_i(t)$ 、 $R(t)$ ，该地区总人口为  $N$ 。考虑自愈因素，则各类成员之间的流动情况如下图所示：

其中： $g$ ，是患病人群每天接触并传染易感人群的比例系数；

$g$  是 SARS 感染者的日发病率， $\mu$  是 SARS 感染者的日自愈率；

$z$  是患病人群每天被隔离的比率， $c$  是免疫率；

借鉴以往微分方程建立传染病模型的思想<sup>[4-6]</sup>，我们得到如下的关于 SARS 传播的  $SEI_u I_i R$  微分方程模型：





$$\begin{cases} S' = -\sigma I_u S \\ E' = \sigma I_u S - gE - \mu E \\ I'_u = gE - zI_u \\ I'_i = zI_u - cI_i \\ R' = cI_i + \mu E \end{cases} \quad \text{其中,} \begin{cases} S+E+I_u+I_i+R=N \\ S \geq 0, E \geq 0, I_u \geq 0, I_i \geq 0, R \geq 0 \\ g + \mu = \frac{1}{H} \\ 0 \leq g, z, c \leq 1 \end{cases}$$

## 2. 2 模型求解及结果分析

### 2. 2. 1 参数意义及确定

(1)  $\sigma$  是患病人群每天接触并传染易感人群的比例系数

易知  $\sigma = \lambda q$ 。其中， $\lambda$  为一天内一个患病者与他人的接触率，

$\lambda = \frac{\text{每人每天平均接触人数}}{\text{总人口}}$ ,  $q$  为一个易感者接触一个患病者后被感染的概率。

(2)  $g$  是 SARS 感染者的日发病率， $\mu$  是 SARS 感染者的日自愈率

假定每个 SARS 感染者的实际潜伏期天数服从区间  $[1, H]$  上的均匀分布。也就是说，SARS 感染者以均等的概率在这  $H$  天之中的任何一天发病或者自愈。（ $H$  为潜伏期天数上限）

容易得到： $g + \mu = \frac{1}{H}$

(3)  $z$  是患病人群每天被隔离的比率，反映了社会的警觉程度及政府措施的力度。

(4)  $c$  是免疫率，也就是患病人群每天病死率和治愈率之和。

易知： $\frac{\text{每天治愈和病死的人数}}{\text{当前隔离人数}}$  可以根据实际数据得到。（由每天数据计算出当天  $c$

值，其平均值即为所求）

### 2.2.2 模型求解及结果分析

我们先做出公布的实际数据与时间的函数图象，然后调用 Matlab 软件中的 ode45 函数得到方程的解。对比这两组图，可以发现实际和理论存在着一定的差异。所以，我们必须通过不断调整非确定性参数（ $\sigma, g, \mu, z$ ）来使实际图象和理论图象趋于一致。需要注意的是，公布的 SARS 日累计患病人数是  $I_i(t) + R(t) - \mu E(t)$  的值，不包括未被发现的 SARS 患病者  $I_u(t)$  的值。

(1) 与公布数据的比较

我们以香港数据为例。查得香港总人口为 670 万，把  $N = 6.7 \times 10^6$  代入微分方程组约

束条件，并取初值  $I_u(0) = 1, S(0) = N - 1, E(0) = I_i(0) = R(0) = 0$ （即认为起初有一个人突然得病）。根据实际数据计算  $c = 0.014$ 。根据相关资料取  $H = 10$ 。在香港这样一个大都市中，平均每人每天接触约几百人，而总人口为 670 万，且根据概率的定义  $q$  值应该在 0 到 1 之间，故  $\sigma$  的数量级应为  $10^{-5}$ 。调整参数得到如图 1 结果。

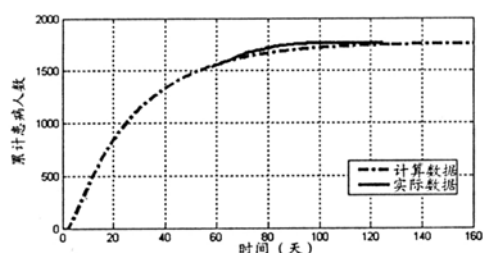


图1 对香港疫情的分析(实际数据从4月25日开始)

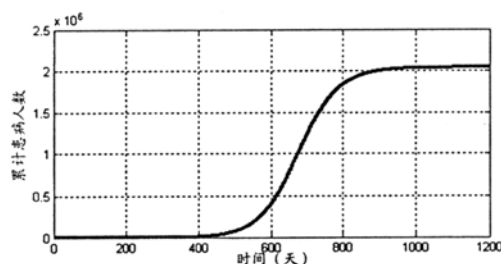


图2 假设不存在自愈对结果的影响

可以看出方程的解较好的符合了实际数据。此时各参数的值为： $\sigma = 0.0000382, g = 0.0001, \mu = 0.0999, z = 0.4, c = 0.014$ 。 $\sigma$ 值基本符合我们的估计，结果是合理的。同时得到  $g \ll \mu$ ，也就是说绝大多数 SARS 感染者是自愈的，只有一小部分 SARS 感染者病发成为真正的 SARS 患者，这与钟南山院士最新的研究成果也是一致的<sup>[7]</sup>；

(2)自愈现象对结果的影响

如果不考虑自愈的情况，即  $\mu = 0$ (此时  $g = 0.1$ )，仍以香港为例( $c=0.014$ )。我们采取极其严厉的措施，取  $z$ : 100%(此时基本上每个 SARS 感染者一旦发病就立即被隔离)。在这种最不利于 SARS 传播的情况下调整  $\sigma$  值，在  $\sigma$  的意义允许的范围，即使将其调到非常小 ( $\sigma = 0.0000002$ ，仍然得到如图 2 所示结果。即：如果不存在自愈，则 SARS 流行时间的跨度成倍增加，起初疫情发展缓慢，后来突然爆发，患病人数激增至  $2.1 \times 10^6$ ，也就是说，在如此严厉的隔离措施作用下，最终仍然有三分之一的成员都染上了 SARS。这一结果显然是与实际不符的，这正说明了自愈现象是确实存在的，而且对结果影响相当大。

### (3)对其他地区数据的拟合

我们利用对香港的分析方法对其他城市的 SARS 传播进行分析。以台湾为例(台湾人口为 2270 万)，得到以下结果，此时参数取值为  $\sigma = 0.000001128, g = 0.00001, \mu = 0.09999, z = 0.4, c = 0.045$ 。(图略)

从图中可以看出我们的模型不仅适合香港的情况也可以很好的描述台湾的疫情传播。对于不同地区，只要选取合适的参数都可以用该模型来分析。

## 3 基于 Small—WorldNetwork 的模拟模型

鉴于微分方程模型只能得到一个总量上的宏观描述，我们考虑人群内部的具体接触情况，从模拟 SARS 具体传播过程的角度出发，提出了一个新的模型：即基于 Small-WorldNet-work，并吸收 Sznajd 和元胞自动机(cellularautomation)模型思想的模拟模型。

### 3.1 模型建立及算法设计

#### 3.1.1 人群接触情况的描述

用 Small-World Network 模型模拟现代社会网络<sup>[8-11]</sup>，把社会中的人们看成网络的节点，把人们之间的接触关系表示为节点间的连接边，在流行病预测、及防范、控制策略等的研究<sup>[12-15]</sup>上取得了不少成果。

我们从一个含  $N$  个节点的环状规则网络开始，每个节点向与它最邻近的  $K$  个节点连出  $K$  条边。对于每一个节点，都使它沿顺时针方向的  $K/2$  个邻居节点以概率  $p$ “断键重连”(即断开与原邻居节点的连接，而与另一个随机挑选的非邻居节点连接)，并且保证没有重复的

边出现。这是对人群接触的静态描述。

在已经构造好的 SWN 网络基础上，每隔一段时间后，使所有节点都以概率  $J$  被选中，让选中的节点仍以概率  $P$  进行再次“断键重连”。注意不能与处于隔离期和免疫期(死亡者无法接触，而病愈者人们则会自动疏远)的节点相连。这是对人群接触的动态描述， $J$  度量了网络内部节点间的流动程度。

### 3. 1. 2 模型建立

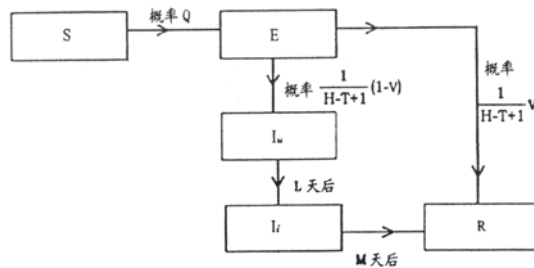
设潜伏期上限为  $H$  天，假定 SARS 感染者等可能的在这  $H$  天中的任一天发病或自愈，根据概率知识计算得到，处于潜伏期第  $T$  天的 SARS 感染者转变的概率为  $\frac{1}{H-T+1}$ ，设每天转变的 SARS 感染者中自愈的概率为  $V$ ，自然的，发病的概率为  $1-V$ 。

设第  $t$  天时五类成员的人数分别为  $S(t)$ 、 $E(t)$ 、 $I_u(t)$ 、 $I_i(t)$ 、 $R(t)$ ，该地区总人口为  $N$ 。一个易感者接触一个患病者后被感染的概率为  $Q$ ，SARS 患者从发病到被发现所经历的平均时间，也就是传染期天数为  $L$ ，SARS 患者从被发现到最终治愈或死亡所需要的平均天数为  $M$ ，则各类成员之间的流动情况如右图所示：

### 3. 1. 3 算法

根据对 SARS 传播的具体分析，我们按照以下步骤建立 SARS 传播的模拟模型：

第一步，构建一个总节点数为  $N$ ，每个节点的度为  $K$ ，节点断键重连的概率为  $P$ ，流动程度为  $J$  的 SWN 网络；



第二步，初始化所有节点的状态{STATE, EFT, IFT, TRT}，随机地选一个节点为  $I_u$ 。

类，其他节点均为  $S$  类；(STATE 为节点的状态；EFT、IFT、TRT 分别为潜伏、传染、治疗时间，即为节点变成  $E$ 、 $I_u$ 、 $I_i$  类后经历的时间)

第三步，在当前时刻  $t$  下遍历所有节点：

1)如果节点为  $I_u$  类，则

a)遍历该  $I_u$  类节点所有的邻居节点，若邻居节点为  $S$  类，则这个  $S$  类节点以概率  $Q$  转变成正类，同时 EFT 变为 1；

b) IFT 变成 IFT+1，若此时 IFT>L，则该节点转变成  $I_i$  类，同时 TRT 变为 1；

2)如果节点为正类，则

a)该节点以概率  $\frac{1}{H-EFT+1}$  被选中，选中的节点以概率  $V$  转变成  $R$  类，否则转变成  $I_u$  类（同时 IFT 变成 1）；

b)EFT 变成 EFT + 1

3)如果节点为  $I_i$  类，则 TRT 变成 TRT+1，若此时 TRT>M，则该节点转变成  $R$  类；

4)在此遍历过程中， $S$ 、 $E$ 、 $I_u$  类节点均以概率  $J$  被选中，选中的节点以概率  $P$  断键重连；

5)当前时刻  $t$  变成  $t+1$ ；

6)回到第三步，或结束程序；

### 3. 2 结果及分析

#### 3. 2. 1 对参数 $Q$ 、 $L$ 的讨论

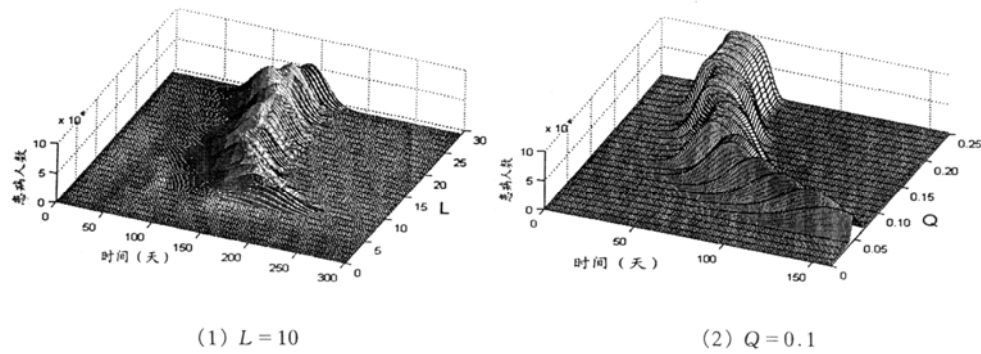


图3 SARS 的实际传播率  $Q$ 、传染期天数  $L$  对疫情的影响

#### (1) $Q$ 、 $L$ 对结果的影响

根据<sup>[1]</sup>中对构建 SWN 网络的要求:  $N \square K \square I_n(N) \square 1$ , 我们取  $N = 10^5$ ,  $K = 20$ 。

取  $P=0.02$ ,  $M=30$ ,  $H=10$ , 将 SARS 的实际传染率  $Q$ 、传染期天数  $L$ 、区域内人们的流程度  $J$ 、SARS 感染者的自愈率  $V$  作为可调参数。用当前实际患病人数  $I_u(t) + I_i(t)$  来表示 SARS 传播的实际情况。

取  $J=0$ ,  $V=0$  (即暂不考虑人员流动性及自愈), 固定  $Q$ 、 $L$  中的一个, 讨论另一个取不同值时对结果的影响。图 4(1)、(2)为分别改变  $Q$ 、 $L$  的情形。

从图 3(1)可以看出, 当  $L$  一定的时候, 随着  $Q$  的增加, 患病高峰期逐渐提前, 患病人数的峰值逐渐增大。也就是说, 如果病毒实际传播性较强,  $Q$  值较大, 该区域内一旦有人患病, 病毒很快地就传播开来。值得注意的是,  $Q$  有一个阈值  $Q_c$ , 只有  $Q > Q_c$ , 时该传染病才会在该区域内开始流行, 否则该传染病就不能流行。如图, 在  $L = 10$  时, 我们得到  $Q=0.04$ 。

从图 3(2)可以看出, 当  $Q$  一定的时候, 随着  $L$  的增加, 患病人数的峰值缓慢增大。也就是说, SARS 患者传染期  $L$  的增加将加剧 SARS 的传播。我们发现  $L$  也有一个阈值  $L_c$ , 如果  $L > L_c$ , 则 SARS 将大规模流行, 否则就不能流行。如图, 当  $Q=0.1$  时,  $L_c=7$ 。

综上所述可得:

- ①患病人数的峰值随着  $Q$  的增大而迅速增大, 而随着  $L$  的增大, 患病人数峰值并没有非常明显的改变。也就是说, 患病人数峰值对  $Q$  的改变比对  $L$  的改变更加敏感;
- ② $Q$  的减小将使高峰期推迟, 而  $L$  对高峰期影响不大;
- ③ $Q$ 、 $L$  都存在一个阈值, 当其值小于阈值时, SARS 不会大范围传播, 当大于阈值时将大规模流行;

#### (2) 在迭代过程中 $Q$ 、 $L$ 变化对结果的影响

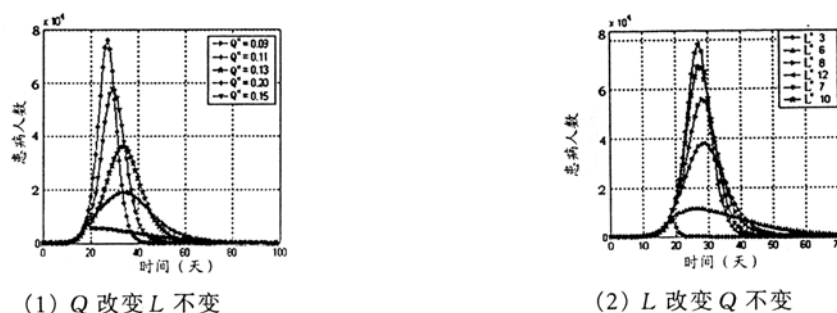


图4 一段时间后采取措施对疫情的影响

初期人们对 SARS 并没有任何防范,  $Q$  和  $L$  的值都很大, 一段时间后采取措施使得  $Q$  和  $L$  减小。 $Q$  和  $L$  的值减小的越多, 代表相应的措施力度越大。我们仍取  $J=0$ ,  $V=0$ : 取  $L=12$ , ,

分别取 0.09、0.11、0.13、0.15，保留=0.2 的曲线作为对比，不同的对应的曲线见图 4(1)；取  $Q=0.2$ ，分别取 3、6、7、8、10，保留=12 的曲线作为对比，不同的对应的曲线见图 4(2)；从图 4(1)中可以看出， $L$  不变  $Q$  减小时，在  $Q^*=0.1$  附近出现突变： $Q^*<0.1$  时患病人数在采取相应措施后立刻减少，并很快减到 0；而  $Q^*>0.1$  时患病人数在采取措施后仍然继续增加，只是上升的速度有所减缓，患病人数峰值有所减小，且高峰期推迟出现。从图 4(2)中可以看出， $Q$  不变  $I$  减小时，在  $L^*=5$  附近出现突变， $L^*>5$  时采取相应措施能使患病人数峰值有所减小，但对高峰期影响不大。

### 3. 2. 2 对参数 $J$ 的讨论

#### (1)参数 $J$ 对结果的影响

取  $Q=0.1$ ， $L=12$ ， $V=0$ ，改变  $J$  的值，得到如图 5 结果。可以看出，区域内人口流动性越强，病毒蔓延得越快，传染的人越多，疫情越严重。

#### (2)在迭代过程中改变 $J$ 对结果的影响

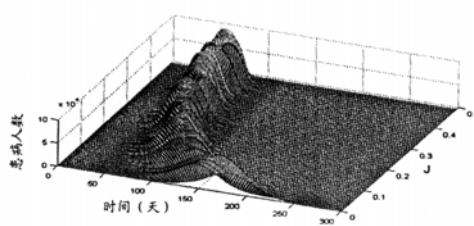


图 5 区域内人们的流动程度  $J$  对疫情的影响

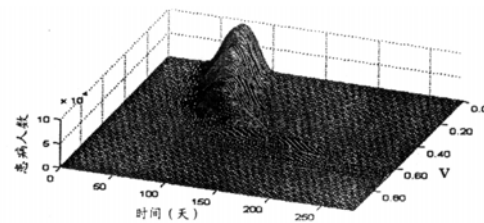


图 6 自愈率  $V$  对疫情的影响

取  $Q=0.1$ ， $L=12$ ， $V=0$ ， $t=18$  前  $J=0.2$ ，因为时间原因，这里仅给出  $t=18$  后  $J=0.2$  和  $J=0.1$  的患病人数峰值： $M_{ax}[I_u(t)+I_i(t)]J=0.2=8.6104$   $M_{ax}[I_u(t)+I_i(t)]J=0.1=0.48104$

可以看出，区域内人们流动程度  $J$  的减小也使患病人数大大减少，疫情得以缓解。

### 3. 2. 3 对参数 $V$ 的讨论

取  $Q=0.2$ ， $L=10$ ， $J=0$ ，改变自愈率  $y$  的值，得到如图 6 结果。从图中可以看出自愈率很小时，SARS 将大规模传播。随着自愈率  $V$  的增大，患病人数减少，高峰期推迟超过一个值  $V_c$  后，SARS 不能传播开。如图得  $V_c=0.78$ 。

### 3. 2. 4 接种疫苗的作用

在初始人群中以一定的比率引入已接种疫苗的成员，将这个比率称为疫苗接种率  $W$ 。

这些已接种疫苗的成员既不能被别人传染，更不能传染别人，实际上是  $R$  类成员。按照与我们原模型相同的规则，只是在初始化时赋以  $R$  类成员初值  $WN$  即可。取  $Q=0.1$ ， $L=10$ ， $J=0.1$ ， $V=0$ ，改变  $W$  值，可得到不同的  $W$  对 SARS 传播情况的影响。

如图 7 所示，在不同的疫苗接种率  $W$  下，SARS 传播的规模相差很大，疫苗接种率  $W$  每提高 5 个百分点，相应的患病人数峰值就有大幅度的下降，高峰期也延迟相当一段时间。值得注意的是，当  $W$  为 20% 时，患病人数非常少，SARS 病毒根本不能够大范围的传播开来。这一结果说明接种疫苗不仅仅是使单个成员免于病毒的感染，更是切断了病毒进一步传播的途径，因而能够出现 SARS 病毒从一开始就不能传播开的情况。所以说接种疫苗能够从根本上杜绝 SARS 的大范围传播。

从图 7 我们观察到  $W$  有一个临界值，当超过该值时，患病人数基本为零。下面我们讨论不同流动性的区域对这一临界  $W$  值的要求。仍取  $Q=0.1$ ， $I=10$ ， $V=0$ ，仅改变  $J$ ，对于每组参数组合，都有相应的临界  $W$  值，当大于该值时患病人数非常少(我们取患病人数峰值小于 50 为标准)。结果如图 8 所示。也就是说，要想完全杜绝病毒的传播，流动性越强的区域所要求人群的疫苗接种率越高。越是经济发达的大城市，越是需要大范围接种疫苗。

### 3. 3 对北京疫情的分析

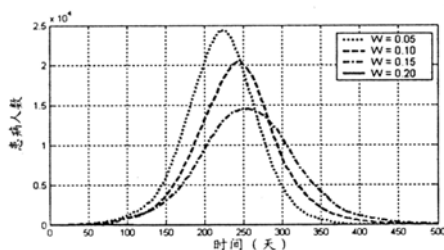


图 7 引入接种疫苗人群对疫情的影响

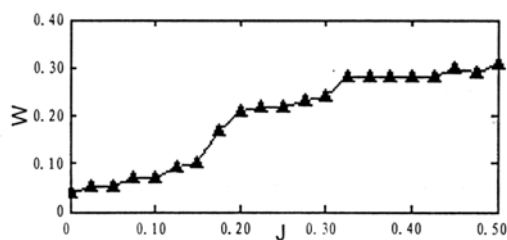


图 8 区域成员间流动性  $J$  与疫苗接种率  $W$  的关系

#### 3. 3. 1 对实际数据的拟合

综合以上提到的所有因素,下面拟合北京的疫情发展情况。取  $N=10^7$ ,  $K=20$ ,  $P=0.02$ ,  $M=30$ ,  $H=10$ 。北京市第一例 SARS 出现在 3 月 1 日,以此为坐标起点。政府自 4 月 25 日起公布数据,近似认为从此时( $t=56$ )开始采取措施,用  $I_i(t)$  的累计值拟合公布数字(从采取措施起参数发生变化,未采取前采用  $I_0(t)+I_i(t)$  的值拟合公布数字)。调整参数拟合实际数据,我们取  $J=0.1$ ,  $V=0.6$ , 得到图 9 结果。

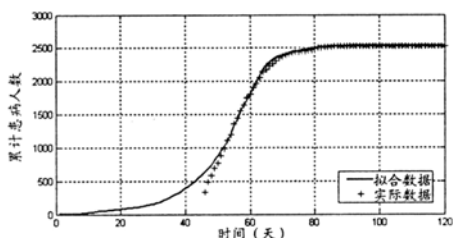


图 9 对北京疫情的分析(实际数据从 4 月 25 日开始)

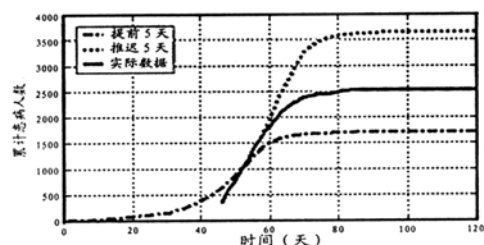


图 10 提前或延迟采取措施的影响

#### 3. 3. 2 提前和推迟采取措施对结果的影响

保持上述参数不变,仅使起点除外的所有分段点时间统一减(加)5,即可得到提前(推迟)5 天采取措施的结果(如图 10)。可以看出,仅仅推迟 5 天采取措施,就会使患病人数峰值从 2523 增加到 3642,疫情最终得以控制的时间(即曲线开始趋于水平的时间)往后推迟。而提前 5 天采取措施则能使患病人数峰值减至 1702,疫情得到控制的时间有所提前。也就是说,采取措施的及时程度对 SARS 疫情的影响很大,政府部门能否尽早认识到问题的严重性,尽早采取果断措施对 SARS 疫情的发展起到了至关重要的作用。

### 3. 4 模型评价及改进

#### 3. 4. 1 模型评价

(1)本模型首先采用 SWN 模型构建区域结构,较好的模拟了现实中人们之间接触情况,为问题的进一步的解决建立了较为合理的基础;

(2)本模型在模拟 SARS 的实际传播过程时,同时吸收了 Sznaid 和元胞自动机模型中的合理之处,摒弃了其中不符合本题实际问题的成分。做到了既从每个成员影响他人的角度考虑问题,又能实现同步更新,认为一个成员下一时刻的状态是受到当前与其接触的多个成员影响累加的结果,这些都是非常符合现实情况的;

#### 3. 4. 2 模型改进

(1)可以采用 Scale-freeNetwork 模型<sup>[16]</sup>,它更能反映现实中人们之间联系的先取连接性(PreferentialConnectivity),也就是说,实际中每个节点的度并不都是相同的,而是存在一些关键节点,和它们相连的节点数比其他节点多。可以对这些关键节点进行研究,比如,这些关键节点如果患病或者接种疫苗会对结果产生什么影响;

(2)在运用 SWN 模型时,对于和一个节点相连的  $2K$  个节点,到该节点的路径权值应

该是不相同的，即和某成员有联系的  $2K$  个成员有亲密疏远的差别，他们被传染上 SARS 的概率是不同的。我们可以使节点与其原邻居节点之间的路径权值取  $d_0$ ，与非原邻居节点之间的路径权值取  $d_c$ ，自然的， $d_0 > d_c$ ；

#### 参考文献

- [1]Watts, D.J. and Strogatz, S.H, CollectivedynamicsOf'small-world'networks[J], Nature 393(1998),440-442
- [2]DietrichStauffe, Sociophysics: the Sznaid model and its applications[J], ComputerPhysicsConmmnicatlons 146(2002), 93-98
- [3]G. Ch. Sirakoulis, I. Karafyllidis, A. Thanailakis, A cellular automation modeltionmovementandvaccinationOnepidemicpropagation[J], EcologicalModeling
- [4]唐焕文贺明峰, 数学模型引论(第二版)[M], 北京: 高等教育出版社, 2001
- [5]姜启源数学模型(第二版)[M], 北京: 高等教育出版社, 1993
- [6]JanMedloek, MarkKot, Spreading disease: integro-differentialequationsOld and new[J], Mathematical Biosciences, 184(2003), 201—222
- [7]<http://news.sma.com/en/o/2003-09-14/1200748765s.shtml>[EB/OL]
- [8]Francesc Comellas, Michael Sampels, Deterministic small-world networks [J], Physica A 309(2002)231-235 2002
- [9]Barrat and Weigt, On the properties Of small-world network models[J], Europhysics Journal B, 13 (2000), 547-560,
- [10]L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthe, le'my, and H. E. Stanley Classes O{small-world netwOrks[J], PNAS, vol. 97 no. 21(2000), 11149-11152
- [11]M. E. J. Newman and D. J. Watts, Scaling and percolation in the small-world network modelIJ, Phys. Rev. E, 60(1999), 7332-7342
- [12]Jonathan M. Read, Matt J.Keeling, Disease evolution On networks: the role Of contact Proc. R. Soc. Lond. B, 270(2003), 699-708
- [13]H. Andersson, T. Britton, Epidemics: Stochastic models and their statistical analysis[J], Springer Lecture Notes in Statistics, V01. 151(2000), Springer, NewYork
- [14]Damian H. Zanette\*, Marcelo Kuperman, Effects of immunization in small-world epidemics[J], Physi-ca A 309(2002), 445-452
- [15]Octavi Miramontes, Bartolo Luque, Dynamical small-world behavior in an epidemical model of mobile individuals[J], Physica D, 168-169(2002): 379-385
- [16]Romualdo Pastor-Satorras and ALESSANDRO Vespignani, Epidemic Spreading in Scale-Free Networks[J], Physical ReviewE, 86(2001), 3200-3203