基于双向广度优先搜索的公交线路优化模型

摘　　要

对于公交线路的优化模型，要求从实际情况出发，根据查询者的不同需求，给出相应的最优模型。在建模时，首先应考虑到乘客转乘车的次数问题，同时也是关于时间、费用的多目标动态规划问题。由于在考虑因素的多少上是逐渐增加的，所以我们用三个模型来回答题目中所提到的三个问题。

对于问题一，利用图论的方法，建立了多目标优化模型，利用双向广度优先搜索的算法，通过 C 语言编程，求出题目要求六组起始站与终到站的最佳线路，其中，花费的时间与费用如下表：

组号	1	2	3		4	5	6	
时间	63	106	128	106	83	106	65	46
费用	3	3	2	3	2	3	2	3

对于问题二，在问题一的基础上，增加了地铁因素，其模型与模型一类似，同样利用图论方法，与问题一中的区别只是将与地铁相连的站点当作一个新的大站点，在原来的算法上稍做修改，得到经过地铁的六组起始站与终到站的最佳线路，其中，花费的时间与费用如下表：

组号	1	2	3			4		5		6	
时间	63	106	128	106	96	83	65.5	106	87.5	65	25
费用	3	3	2	3	5	2	5	3	5	2	3

对于问题三， 在模型二的基础上，增加了乘客步行的因素。考虑到步行的目的是为了减少换乘车的次数，同样有时间、费用两个目标，建立了如下的数学模型：

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \min_i \{f(P_i)\} \\
F_2 &= \min_i \{t(P_i)\}
\end{aligned}.
$$

关键词：双向广度优先搜索　最佳路径　多目标动态规划 最优化模型

刘建平 廖慧 潘恩伦，指导教师：韩志斌

1 问题分析

1.1 目标分析

本题中，有公交线路 520 余条，地铁线路 2 条，总共有 522 条线路。对于任意两个站点，如何合理的选择线路，使得乘客能够根据自己的需求或偏好达到自身的效用最大化。在本题中，将现实情况合理的简化，忽略掉一些突发的意外事件（比如堵车、道路维修的问题），采用与乘客联系最紧密的量（如费用、耗时等）来衡量乘客的效用。

1.2 与乘客的效用相关的三个量

1 费用

一般而言,费用是与乘客的效用联系相当紧密的。但公交是一个相当经济、大众化的交通工具,每次乘公交车，所花费的费用也并不是很多。

2 耗时

“时间就是金钱,时间就是效率”。在当今社会，时间越来越被看重，时间的价值也在不断升值。因此，若能够多花费少许公交费用而节约相对更多的时间，一般而言,人们都是愿意的。

3 换车次数

对于一个公交网络，若任意两站点，不能在换乘三趟或四趟车之内达到，则该网络并不算得上是一个优化了的网络，这是因为：

3.1 对于一般乘客而言,换乘四趟车五趟车以上到达目的地是难以忍受的；

3.2 具体就此题而言,通过对近 4000 个公汽站点的随机抽样,随机找出 20 对起始站点、终到站点,由 C 语言编程,计算得如下图数据,可论证：这 20 对点能够以接近 100%的概率在换乘三趟或少于三趟车内到达预定终到站，其数据如下:(只考虑可达性,而不考虑时间费用等问题,若能够直达就不考虑转一次可达;若转一次可达,就不考虑转两次可达）

起始站	终止站	乘一趟车	乘两趟车	乘三趟车
S3885	S1994			L001-L267-L004
S1430	S3776			L004-L131-L021
S3533	S3740	L010		
S2622	S0808	L223		
S3407	S2901		L042-L090	
S1235	S0071		L058-L050	
S2847	S3862			L012-L080-L044
S1383	S0362			L002-L474-L175
S0063	S1968		L054-L002	
S0820	S0188		L223-L239	
S2840	S1241		L030-L011	

S0441	S1000			L274-L328-L020
S2101	S2327		L072-L271	
S3645	S1100		L020-L038	
S3388	S3658			L179-L304-L353
S2520	S1967	L032		
S1327	S1827		L002-L272	
S1392	S0641		L423-L030	
S3593	S1797			L007-L123-L035
S1402	S3807			L042-L348-L266

因此,在以后的分析中,我们只考虑任意两点在三趟车以内可达的情况。

2 基本假设

1) 假设在其它条件相同的情况下，只有转乘车辆的次数、耗费的时间、费用影响乘客的乘车路线；
2) 如问题分析中论证，公交网中任意两站点在转两次或少于两次车的情况下，能够到达，即不考虑转三次或三次以上车的情况；
3) 假设同一地铁站对应的任意两个公汽站之间可以通过地铁站换乘(无需支付地铁费).

3 符号说明与定义

符号	意义	单位
S	出发站点	
T	终点站点	
$Q_S^{(i)}$	从出发站点换乘 i 次可乘搭的线路集合	
$V_S^{(i)}$	从出发站点换乘 i 次可到达的站点集合	
$Q_T^{(i)}$	换乘 i 次可到达终点站点的线路	
$V_T^{(i)}$	换乘 i 次可到达终点站点的站点	
P_i	第 i 个可行线路	
F_1	最少车资	元
F_2	最短时间	分钟
V’	从当前站点到某站点的步行时间小于乘车的最小时间的集合	
V’’	从某站点到当前站点的步行时间小于乘车的最小时间的集合	
$l_{i,j}$	从出发站点换乘 i 次可乘搭的线路	
$k_{i,j}$	换乘 i 次可到达终点站点的线路	
f	车资函数	
t	时间函数	

4 模型的建立与求解

4.1 问题一的模型建立与求解

4.1.1 模型的建立

在一个公交线路自主查询系统中，使用者给出了起点公交站以及终点公交站的名称（代号），查询系统可以根据使用者不同的需求，选出一些符合需求的最佳路线，提供给使用者作参考。

不难看出，在公交线路自主查询系统中，最佳公交线路的选择是至关重要的。因此必须建立一个合适的最佳公交线路选择模型。模型的主要任务是在已知的所有公交线路中，针对给定的起点公交站和终点公交站，根据使用者的不同需求来求出最佳路径。

现在来具体讨论如何求出可行的公交线路。这里，我们采用双向广度优先搜索的方式，也就是分别从起点和终点进行线路搜索。

设从出发站公交站S到终点公交站T，这里定义：

- $Q_S^{(1)}$为所有经过S的公交线路集合。
- $\mathrm{V}_S^{(1)}$为$Q_S^{(1)}$中公交线路经过的站点集合。
- $Q_T^{(1)}$为所有经过T的公交线路集合。
- $\mathrm{V}_T^{(1)}$为$Q_T^{(1)}$中公交线路经过的站点集合。

如果$Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(1)} \neq \varnothing$，则表示有公交线路可以从$S$直达$T$。反之，则表示没有公交线路可以从$S$直达$T$。

然而，考虑到有时候增加转乘次数可能会得到更优的线路，所以我们进一步去考虑转乘线路。与上面的定义类似，这里定义：

- $Q_S^{(2)}$为所有经过$\mathrm{V}_S^{(1)}$的公交线路集合。
- $V_S^{(2)}$为$Q_S^{(2)}$中公交线路经过的站点的集合。
- $Q_T^{(2)}$为所有经过$\mathrm{V}_T^{(1)}$的公交线路集合。
- $V_{\mathrm{T}}^{(2)}$为$Q_T^{(2)}$中公交线路经过的站点的集合。

现在分别考察$Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(2)}, Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(1)}, Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(2)}$的不同情况。

不难发现$Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(2)}$与$Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(1)}$的结果是相同的，如果非空则表示有转乘一次从S到达T的线路。反之，就表示没有线路可以从S转乘一次到达T。

另外，$Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(2)}$非空表示有转乘两次从S到达T的线路，反之则表示没有线路可以从S转乘两次到达T。

如此做下去就可以得到一系列$\{Q_S^{(i)}\}$和$\{Q_T^{(j)}\}$，一般地，若

$$Q_S^{(i)} \cap Q_T^{(j)} \neq \varnothing$$

表示存在一条需要转乘$i+j-2$次方能从S到达T的线路。

假设$Q_S^{(1)}$、$\mathrm{V}_S^{(1)}$、$Q_T^{(1)}$和$\mathrm{V}_T^{(1)}$的定义如上，为了便于表示，将它们改写为$Q_1(\mathrm{S})$、$\mathrm{V}_1(\mathrm{S})$、

$Q_1(\mathrm{T})$ 和 $\mathrm{V}_1(\mathrm{T})$，则定义：

- $$Q_i(\mathrm{S})=\bigcup_{s\in V_{i-1}(\mathrm{S})}\bigcup_{s\in L}Q_1(s)$$
- $$V_i(\mathrm{S})=\bigcup_{Q_i(\mathrm{S})}\bigcup_{s\in Q_i(\mathrm{S})}Q_1(s)$$
- $$Q_i(\mathrm{T})=\bigcup_{t\in V_{i-1}(\mathrm{T})}\bigcup_{t\in L}Q_1(t)$$
- $$V_i(\mathrm{T})=\bigcup_{Q_i(\mathrm{T})}\bigcup_{t\in Q_i(\mathrm{T})}Q_1(t)$$

其中 L 为所有的公交线路，$i>1$。

因此，我们可以得到从 S 到 T 的不同转乘次数的线路。实际当中，我们可以限制转乘次数。一般上，乘客搭乘公交都会考虑到两样：时间和车次。所以从我们得到的几条可行线路中，就得分别对它们根据时间和车资来进行评价。

设 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\cdots,\mathrm{P}_i$ 为求出的可行线路，$f(\cdot)$ 和 $t(\cdot)$ 分别为车资函数和时间函数，用于计算可行线路·所需的车资和时间。因此我们的目标函数为

$$F_1=\min_i\{f(P_i)\}$$
$$F_2=\min_i\{t(P_i)\}$$

令同时满足时间最短与车资最少的线路为最优解，向查询者推荐。若无最优解，则向查询者推荐满足其需求（时间最短或车次最少之一）的最优解。

4.1.2 算法的实现

根据问题一的模型，我们在此建立了两个算法。

a) 基于点的遍历公交线路算法

为了达到搜索所有可行线路的目的，这里根据有向树的基本观念，分别在起点站和终点站广度搜索站点，直到找到一些相同的节点为止。根据假设，我们只在转乘两次以内进行搜索。由此建立了一个直观有效的算法，步骤如下：

(1). 给定起点站 S 与终点站 T；

(2). 搜索经过 S 的公交线路的所有后继站点 $V_S^{(1)}$；

(3). 若 $T\in V_1$，则 S 可直达 T，输出线路信息；

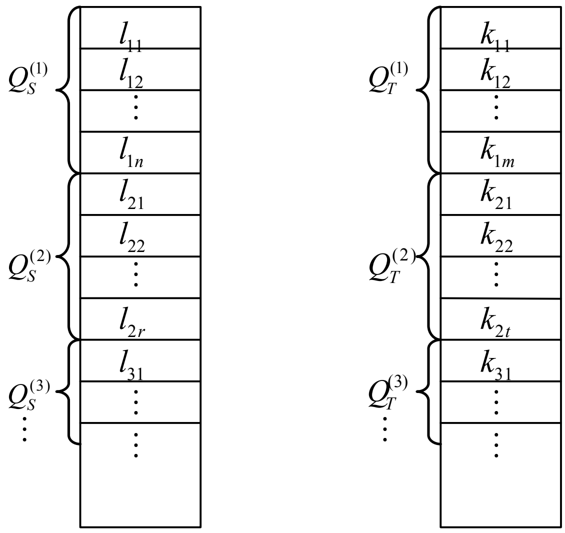
(4). 搜索经过 E 的公交线路的所有前驱站点 $V_T^{(1)}$；

(5). 若 $V_S^{(1)}\cap V_T^{(1)}\neq\varnothing$，找出所有转乘一次就可以从 S 可到达 T 的公交线路，输出线路信息；

(6). 若 $\exists x\in V_S^{(1)},\exists y\in V_T^{(1)}$，且 x 为 y 的前驱站点，找出所有转乘两次就可以从 S 可到达 T 的公交线路，输出线路信息；

b) 基于线的遍历公交线路任意次转乘算法

图表 1 起点 终点关联数组



对于线路的搜索，这里根据线路的特性，给出了一个较为方便的方式。对给定的起点站 S 与终点站 T，我们可以分别求出关联数组 $Q_S^{(1)}$ 和 $Q_T^{(1)}$. 其中 $Q_S^{(1)}$ 为经过 S 的公交线路集合，即 $\forall l_1 \in Q_S^{(1)}$，有 $S \in l_1$ 。同理， $Q_S^{(2)}$ 为经过 $Q_S^{(1)}$ 中站点的公交线路集合，即 $\forall l_2 \in Q_S^{(2)}, \exists x \in l_2 且 x \in l_1$；其余依次递推。

由关联数组进行搜索，可以给出以下的几种情况：

一、直达车线路　：$w = Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(1)}$

二、转乘一次线路：$w = (Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(2)}) \cup (Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(1)})$

三、转乘二次线路：$w = Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(2)}$

以上的两个算法都可以求出乘车线路，但是算法二用公交线路来代替该线路上每一个点，即用线搜索代替点搜索，这样大大减少了时间复杂度，同时算法也更简洁。

对以上存在的线路中，可分别挑选出其中车次最少和时间最短的线路，若两种线路有交集，则交集元素为所求的最佳线路。交为空时也可列出各自的最优线路供乘客选择.

4.1.3　模型的求解

根据以上算法思想,可编程求出如下结果:

表格 1

站点	转车次数	时间	费用	线路
S3359 $\to$ S1828	1	101	3	S3359 $\xrightarrow{L436}$ S1784 $\xrightarrow{L217}$ S1828
	2	64	3	S3359 $\xrightarrow{L015}$ S2903 $\xrightarrow{L201}$ S1783 $\xrightarrow{L041}$ S1828
S1557 $\to$ S0481	2	106	3	S1557 $\xrightarrow{L084}$ S1919 $\xrightarrow{L189}$ S3186 $\xrightarrow{L480}$ S0481

				S1557 $\xrightarrow{\text{L363}}$ S1919 $\xrightarrow{\text{L189}}$ S3186 $\xrightarrow{\text{L460}}$ S0481
S0971 $\to$ S0485	1	128	2	S0791 $\xrightarrow{\text{L013}}$ S2184 $\xrightarrow{\text{L417}}$ S0485
	2	106	3	S0971 $\xrightarrow{\text{L013}}$ S1609 $\xrightarrow{\text{L140}}$ S2654 $\xrightarrow{\text{L469}}$ S0485 S0971 $\xrightarrow{\text{L013}}$ S2517 $\xrightarrow{\text{L296}}$ S2480 $\xrightarrow{\text{L417}}$ S0485
S0008 $\to$ S0073	1	83	2	S0008 $\xrightarrow{\text{L159}}$ S0400 $\xrightarrow{\text{L474}}$ S0073 S0008 $\xrightarrow{\text{L355}}$ S2263 $\xrightarrow{\text{L345}}$ S0073
S0148 $\to$ S0485	2	106	3	S0148 $\xrightarrow{\text{L308}}$ S0036 $\xrightarrow{\text{L156}}$ S2210 $\xrightarrow{\text{L417}}$ S0485 S0148 $\xrightarrow{\text{L308}}$ S0036 $\xrightarrow{\text{L156}}$ S3332 $\xrightarrow{\text{L417}}$ S0485
S0087 $\to$ S3676	1	65	2	S0087 $\xrightarrow{\text{L454}}$ S3496 $\xrightarrow{\text{L209}}$ S3676
	2	46	3	S0087 $\xrightarrow{\text{L021}}$ S0088 $\xrightarrow{\text{L231}}$ S0427 $\xrightarrow{\text{L97}}$ S3676 S0087 $\xrightarrow{\text{L206}}$ S0088 $\xrightarrow{\text{L231}}$ S0427 $\xrightarrow{\text{L462}}$ S3676

4.1.4 模型评价及改进

用双向广度优先搜索方法，其优点在于：

1) 模型比较简单、易理解，且该算法的复杂度与传统的广度优先搜索方法的复杂度相比，大大较低；

2) 在时间、费用均等的情形下，提供出了几条可供选择的路线，可供乘客根据一些特殊的要求（比如：想途经某某景点,避开繁忙站点）进行选择，而不是提供单一的线路；

在基于以上优点的同时，模型也有不少缺陷，比如说，虽然对于同等费用同等耗时的情形，本文提供了多条路线可供选择，但在模型中忽略了路途中可能出现的如某些路段繁忙等问题，而使得与实际不符，并且也应该适当考虑某些站点的繁忙程度。

4.2 问题二的模型建立与求解

4.2.1 模型的建立

问题二在问题一的的基础之上，又考虑了地铁线路。因此，我们可以修改问题一的模型来使之适应问题二。

有一点值得注意：当我们所在的公交站是处于地铁站附近的时候，若我们在此出发或者转乘，也可以考虑通过地铁站到达其它临近的公交站。为此，只要修改问题一的模型中 $Q_S^{(1)}$ 、 $V_S^{(1)}$ 、 $Q_T^{(1)}$ 和 $V_T^{(1)}$ 的定义即可。

设从出发站公交站S到终点公交站T，这里定义：

- $Q_S^{(1)}$为所有经过S的公交线路集合，若S邻近于地铁站则将该地铁线路和邻近于该地铁站的公交站的公交线路集合。
- $\mathrm{V}_S^{(1)}$为$Q_S^{(1)}$中线路经过的站点集合。
- $Q_T^{(1)}$为所有经过T的公交线路集合，若S邻近于地铁站则将该地铁线路和邻近于该地铁站的公交站的公交线路集合。
- $\mathrm{V}_T^{(1)}$为$Q_T^{(1)}$中线路经过的站点集合。

如果$Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(1)} \neq \varnothing$，则表示有公交线路可以从$S$直达$T$。反之，则表示没有公交线路可以从$S$直达$T$。

然而，考虑到有时候增加转乘次数可能会得到更优的线路，所以我们进一步去考虑转乘线路。与上面的定义类似，这里定义：

- $Q_S^{(2)}$为所有经过$\mathrm{V}_S^{(1)}$的公交线路集合，若$\mathrm{V}_S^{(1)}$邻近于地铁站则将 该地铁线路和邻近于该地铁站的公交站的公交线路集合。
- $V_S^{(2)}$为$Q_S^{(2)}$中线路经过的站点的集合。
- $Q_T^{(2)}$为所有经过$\mathrm{V}_T^{(1)}$的公交线路集合，若$\mathrm{V}_T^{(1)}$邻近于地铁站则将该地铁线路和邻近于该地铁站的公交站的公交线路集合。
- $V_{\mathrm{T}}^{(2)}$为$Q_T^{(2)}$中线路经过的站点的集合。

现在分别考察$Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(2)}, Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(1)}, Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(2)}$的不同情况。

不难发现$Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(2)}$与$Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(1)}$的结果是相同的，如果非空则表示有转乘一次从S到达T的线路。反之，就表示没有线路可以从S转乘一次到达T。

另外，$Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(2)}$非空表示有转乘两次从S到达T的线路，反之则表示没有线路可以从S转乘两次到达T。

如此做下去就可以得到一系列$\{Q_S^{(i)}\}$和$\{Q_T^{(j)}\}$，一般地，若

$$Q_S^{(i)} \cap Q_T^{(j)} \neq \varnothing$$

表示存在一条需要转乘$i+j-2$次方能从S到达T的线路。

因此，我们可以得到从S到T的不同转乘次数的线路。实际当中，我们可以限制转乘次数。一般的，乘客搭乘公交都会考虑到两样：时间和车资。所以从我们得到的几条可行线路中，就得分别对它们根据时间和车资来进行评价。

设$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_\mathrm{i}$为求出的可行线路，$\mathrm{f}(\cdot)$和$\mathrm{t}(\cdot)$分别为车资函数和时间函数，用于计算可行线路$\cdot$所需的车资和时间。因此我们的目标函数为

$$\mathrm{F}_1 = \min_{\mathrm{i}} \{\mathrm{f}(\mathrm{P}_\mathrm{i})\}$$
$$\mathrm{F}_2 = \min_{\mathrm{i}} \{\mathrm{t}(\mathrm{P}_\mathrm{i})\}$$

令同时满足时间最短与车资最少的线路为最优解，向查询者推荐。若无最优解，则

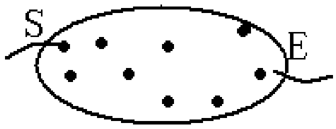
向查询者推荐满足其需求（时间最短或车资最少之一）的最优解

4.2.2 算法的实现

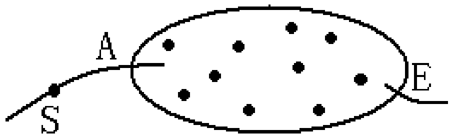
有地铁加入后,乘车线路分成两种:

1. 线路中不含地铁站及与地铁站有关联的公交站;
2. 线路中有地铁站或与地铁站关联的公交站;

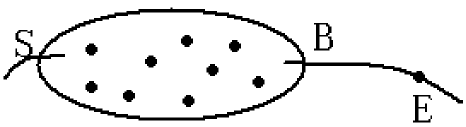
对第一种情况我们在第一问中已有模型与求解方法,因此这里仅考虑第二种乘车线路.在第二种乘车路线中我们可以再具体的将线路分为以下四种情况(圈内点为直接可转乘的公交站点):



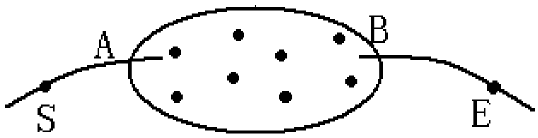
(a)



(b)



(c)



(d)

其中

(a)为直接经地铁可达;

(b)为由起点站乘公交再转地铁;

(c)为由起点站乘地铁再转公交;

(d)为由起点站乘公交转地铁再转公交;

这里我们仅给出(d)情况的算法(已知与地铁关联的公交站点任意两两可达):

(1). 初始化公交关联站点集T,设定起点站S与终点站E;

(2). $\forall t_1 \in T$,若t_1为S的后继站点,$T_1 = T_1 \cup \{t_1\}$;

(3). $\forall t_2 \in T$,若t_2为E的前驱站点,$T_2 = T_2 \cup \{t_2\}$;

(4). 输出乘车路线信息$S \to t_1 \to t_2 \to E\left(t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\right)$

从输出的路线中我们可以挑出满足要求的优化路线.

4.2.3 模型的求解

根据以上的算法,可编程求出经过地铁站点的线路:

表格 2

站点	时间(分)	费用	线路
$S3359 \to S1828$	106	5	$S3359 \xrightarrow{L015} S3068$---$D08 \to D34$---$S578 \xrightarrow{L167} S1828$

S1557 $\to$ S0481	115.5	5	S1557 $\xrightarrow{L084}$ S1919---D20 $\to$ D24---S537 $\xrightarrow{L516}$ S481
S0971 $\to$ S0485	96	5	S0971 $\xrightarrow{L094}$ S567---D01 $\to$ D21---S466 $\xrightarrow{L051}$ S485 S0971 $\xrightarrow{L094}$ S567---D01 $\to$ D21---S464 $\xrightarrow{L104}$ S485 S0971 $\xrightarrow{L119}$ S567---D01 $\to$ D21---S464 $\xrightarrow{L395}$ S485
S0008 $\to$ S0073	65.5	5	S0008 $\xrightarrow{L200}$ S2534---D15 $\to$ D12---S609 $\xrightarrow{L057}$ S73
S0148 $\to$ S0485	87.5	5	S0148 $\xrightarrow{L024}$ S1487---D02 $\to$ D21---S464 $\xrightarrow{L104}$ S0485 S0148 $\xrightarrow{L024}$ S1487---D02 $\to$ D21---S464 $\xrightarrow{L469}$ S0485 S0148 $\xrightarrow{L024}$ S1487---D02 $\to$ D21---S466 $\xrightarrow{L450}$ S0485
S0087 $\to$ S3676	25	3	S0087---D27 $\to$ D36---S3676

将上述表格中结果与表一比较综合,可对乘客的不同需求选择出最优线路.在乘客以时间最少为首要目标而较少的考虑花费时, 可将表中后四个站点由原来的公交线路改为过地铁的乘车路线,这样可以用较少的金钱来换取时间,对于繁忙的都市人这点还是比较划算的了.

4.2.4 模型的评价及改进

1) 能够相当巧妙的将地铁线与其附近的公交站点视为一体，当成一个新的站点，充分的利用问题一中的算法，稍作修改即可，大大的减化了问题；
2) 当然，模型二中仍然没有对站点的繁忙度进行考虑，这一点是一个不小的遗憾。

4.3 问题的模型建立与求解

4.3.1 模型的建立

问题三在问题二的的基础之上，又考虑了步行。因此，我们可以修改问题二的模型来使之适应问题三。

有一点值得注意：当我们处在公交站准备出发或者转乘时，除了考虑到问题二的情况之外，还可以考虑步行到另一个公交站或地铁站。为此，只要修改问题二的模型中$Q_S^{(1)}$、$V_S^{(1)}$、$Q_T^{(1)}$和$V_T^{(1)}$的定义即可。

设从出发站公交站S到终点公交站T，这里定义：

- V'为从当前站点到某站点的步行时间小于乘车的最小时间的集合。
- V''为从某站点到当前站点的步行时间小于乘车的最小时间的集合。
- $Q_S^{(1)}$为所有经过S的公交线路集合，若S邻近于地铁站则将该地铁线路和邻近于该地铁站的公交站的公交线路再并上V'的集合。
- $V_S^{(1)}$为$Q_S^{(1)}$中线路经过的站点集合。

- $Q_T^{(1)}$ 为所有经过 T 的公交线路集合，若 S 邻近于地铁站则将该地铁线路和邻近于该地铁站的公交站的公交线路再并上 V'' 的集合。
- $\mathrm{V}_T^{(1)}$ 为 $Q_T^{(1)}$ 中线路经过的站点集合。

如果 $Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(1)} \neq \varnothing$，则表示有公交线路可以从 S 直达 T。反之，则表示没有公交线路可以从 S 直达 T。

然而，考虑到有时候增加转乘次数可能会得到更优的线路，所以我们进一步去考虑转乘线路。与上面的定义类似，这里定义：

- V' 为从当前站点到某站点的步行时间小于乘车的最小时间的集合。
- V'' 为从某站点到当前站点的步行时间小于乘车的最小时间的集合。
- $Q_S^{(2)}$ 为所有经过 $\mathrm{V}_S^{(1)}$ 的公交线路集合，若 $\mathrm{V}_S^{(1)}$ 邻近于地铁站则将该地铁线路和邻近于该地铁站的公交站的公交线路再并上 V' 的集合。
- $V_S^{(2)}$ 为 $Q_S^{(2)}$ 中线路经过的站点的集合。
- $Q_T^{(2)}$ 为所有经过 $\mathrm{V}_T^{(1)}$ 的公交线路集合，若 $\mathrm{V}_T^{(1)}$ 邻近于地铁站则将该地铁线路和邻近于该地铁站的公交站的公交线路再并上 V'' 的集合。
- $V_{\mathrm{T}}^{(2)}$ 为 $Q_T^{(2)}$ 中线路经过的站点的集合。

现在分别考察 $Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(2)}, Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(1)}, Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(2)}$ 的不同情况。

不难发现 $Q_S^{(1)} \cap Q_T^{(2)}$ 与 $Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(1)}$ 的结果是相同的，如果非空则表示有转乘一次从 S 到达 T 的线路。反之，就表示没有线路可以从 S 转乘一次到达 T。

另外，$Q_S^{(2)} \cap Q_T^{(2)}$ 非空表示有转乘两次从 S 到达 T 的线路，反之则表示没有线路可以从 S 转乘两次到达 T。

如此做下去就可以得到一系列 $\{Q_S^{(i)}\}$ 和 $\{Q_T^{(j)}\}$，一般地，若

$$Q_S^{(i)} \cap Q_T^{(j)} \neq \varnothing$$

表示存在一条需要转乘 $i+j-2$ 次方能从 S 到达 T 的线路。

因此，我们可以得到从 S 到 T 的不同转乘次数的线路。实际当中，我们可以限制转乘次数。一般上，乘客搭乘公交都会考虑到两样：时间和车资。所以从我们得到的几条可行线路中，就得分别对它们根据时间和车资来进行评价。

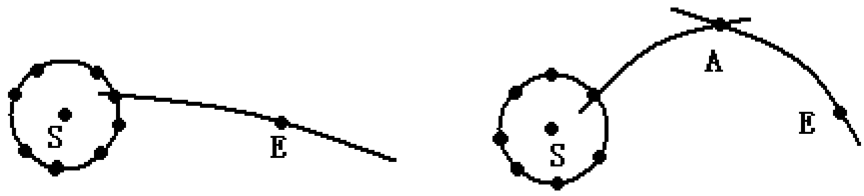
设 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_\mathrm{i}$ 为求出的可行线路，$\mathrm{f}(\cdot)$ 和 $\mathrm{t}(\cdot)$ 分别为车资函数和时间函数，用于计算可行线路·所需的车资和时间。因此我们的目标函数为

$$\mathrm{F}_1 = \min_{\mathrm{i}} \{\mathrm{f}(\mathrm{P}_\mathrm{i})\}$$
$$\mathrm{F}_2 = \min_{\mathrm{i}} \{\mathrm{t}(\mathrm{P}_\mathrm{i})\}$$

令同时满足时间最短与车资最少的线路为最优解，向查询者推荐。若无最优解，则向查询者推荐满足其需求（时间最短或车费最少之一）的最优解

4.3.2 简化模型的算法示意图

以下仅考虑从起点步行转乘一次以下的情况:



直达(a)　　　转一次车(b)

其中 S 周围为步行所达站点 v;
以 v 为起点, E 为终点利用模型一的算法可找出乘车线路;

5　对公交线路的一点建议

由模型二与模型一中的数据进行比较得知：在加入了地铁这一交通工具后，在如题目要求的几条较优路线中，在费用只少许增加几元的情况下，耗时大大的减少了，正好符合了当今繁忙而紧张的社会对时间的要求。因此，对于像北京这样的大都市而言，我们建议：建设几条东西、南北方向的地铁，同时，再建设几条环城地铁，这样，能够大大的缩减人们交通出行时间。

参考文献

[1] 姜启源，数学模型，北京：高等教育出版社，2001
[2] 唐焕文 贺明峰，数学模型引论，北京：高等教育出版社，2002
[3] 严蔚敏 吴伟民，数据结构，北京：清华大学出版社，2003
[4] 李旭华，公交线路网络分析关键技术研究，http://202.114.9.5/kns50/detail. aspx?QueryID=&CurRec=7 ,2007 9 22