

# 公交方案的优化问题

## 摘要：

本文给出了针对公交方案优化问题的具有普遍适用性的模型和算法。我们将该问题定位为多目标优化问题，即乘车时间最少，乘车费用最低，换乘次数最少；同时我们将问题拆成两部分求解，即先找出所有可行方案，然后按照不同目标对方案进行筛选，这样做使问题大大简化，而且求解思路清晰。对于问题一我们采用**多权重动态有向图**模型对问题进行描述，每边权重包括相邻两站点间的时间，费用，换乘标记，所属线路四个参量，并且基于模型给出了计算一种公交方案的总时间，总费用和换乘次数的方法，然后在假设换乘不超过两次（生活经验）的前提下利用递归的思想编程求解，找出所有可行方案后进行筛选，结果示例：

S3359——>S1828		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L436 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下
	时间	67 分钟	67 分钟	104 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次

问题二中，我们将地铁看成一条特殊的公汽线路，并做了相应的假设和处理，然后沿用了问题一的模型和算法对问题二进行求解，并且对这个模型和算法进行了清晰而详细的评价；问题三中，我们将步行看成一条覆盖所有站点、行驶线路不固定、无行驶费用的特殊公交线路，依然沿用了问题一的模型对问题进行描述。本文最大特色：1）多目标优化的确定，给予查询者充分的选择自由度；2）将问题拆成独立的两部分分别求解，使求解难度降低；2）建立了一种具有普遍适用性的模型，在改动不大的情况下很好的解决了三个问题。

**关键字：** 公交方案优化   多目标优化   多权重动态有向图

## 问题的提出

经过分析，我们对本题目需要解决的问题归纳概括如下：在已知各条公交（地铁）线路上站点位置，站点之间的平均行驶时间，线路间换乘时间及乘车费用的基础上，我们需要从实际情况出发，运用数学建模的思想和方法给出任意两站点间的公交线路选择方案（多目标），以满足不同查询者的不同需求，同时利用题目中给出的例子进行测试，评价该模型的优劣。

## 符号约定和模型假设

### 符号约定

$A_i$ ——第  $i$  种乘车方案， $A_i = \{ T_i, E_i, C_i, Path_i \}$

$T_i$ ——第  $i$  种乘车方案从起始站到终点站的总时间

$E_i$ ——第  $i$  种乘车方案从起始站到终点站的总费用

$C_i$ ——第  $i$  种乘车方案从起始站到终点站的换乘次数

$Path_i$ ——第  $i$  种乘车方案从起始站到终点站通过的站点记录，

$$Path_i = \{ S_1, S_2 \dots S_{n-1}, S_n \}$$

$S_i$ ——第  $i$  个站点（包括公汽和地铁）

$w_{ij}(t, e, c, k)$ ——第  $i$  个站点到第  $j$  个站点的有向边的权重，其中  $t$  为行驶时间，

$e$  为乘车费用， $c$  为换乘标记（ $c=1$  时表示  $S_i, S_j$  之间有换乘）， $k$

为  $i, j$  两个站点所属的线路号

$Q_i$ ——第  $i$  号线路的标志， $Q_i = 0$  表示不分段计价， $Q_i = 1$  表示分段计价

### 模型假设

- 1) 各公汽（地铁）行驶速度相同，故两点间的距离可以用时间代替
- 2) 行驶和换乘时间以平均时间计算
- 3) 环线公汽（地铁）也分为上行和下行两个方向（附件中顺序为上行，反过来为下行）
- 4) 在起点站等公汽的时间为 3 分钟，等地铁的时间为 2 分钟（由题目中数据算出  $3=5-2$ ； $2=4-2$ ）
- 5) 根据生活经验，我们假定乘客能够接受的换乘次数不超过 2 次
- 6) 假设同一地铁站对应的任意两个公汽车站之间可以通过地铁站换乘（无需支付地铁费）

- 7) 问题三中, a. 假设行人从某点出发可以步行到达其余任意站点, 不必沿着公交行驶方向行走, 但只能沿着公交线路; b. 假设行人步行的最多站数不超过 2 站; c. 相邻两站点的步行时间以平均时间计算

## 问题的分析

**关于优化目标:** 我们通过查阅相关资料以及对网上现有的公交查询系统的使用和测试, 得知查询者的基本要求包括: 换乘次数, 行驶距离, 乘车费用。而两相邻站点间的距离题目中并未给出, 但如果假设各种公车(地铁)的行驶速度相同, 则可以用两个站点间的平均行驶时间来代替行驶距离。所以, 我们将公交方案的优化目标定为换乘次数, 行驶时间, 乘车费用。考虑到查询者的不同需求, 我们对三个目标进行了独立的优化, 并分别给出多组方案以供参考选择, 而不是加权综合考虑后给出唯一的最优方案, 这样查询者可以根据自己的需求做出适合自己的选择。

**关于线路处理:** 1) 对于环线, 我们将它拆成上行, 下行两条线路, 分别处理。2) 对于地铁, 根据北京的实际情况, T1 号线有上行, 下行两条线路, T2 号环线则为双向循环, 我们将地铁当作两条公车线路看待, 只是相应的票价和换乘费用不同, 这样问题二可以沿用问题一的模型。

**关于求解方法:** 根据我们对网上现有的查询系统的使用和生活经验, 我们认为一个人能够接受的换乘次数不超过两次(包括地铁)。同时, 鉴于本题数据量非常大, 很难通过边搜索边优化的方法得到最优解, 所以我们将问题的求解分成两步, 先通过搜索找出所有换乘不超过两次的方案, 并对每个方案的信息(乘车总费用, 总时间, 换乘次数, 换乘的地点和换乘的线路)进行详细的记录, 然后按照不同的目标从中筛选出最优的方案, 这样使得问题的求解简化许多。

## 问题一的模型建立与求解

### 1 模型的建立

鉴于各站点的相关性, 我们考虑采用**多权重动态有向图**模型来描述问题, 图中的每个节点表示一个站点, 如果两个站点  $S_i, S_j$  可以乘公交一站到达, 则用一条多权重的有向边将二者联系起来, 权重为  $w_{ij}(t, e, c, k)$ , 其中  $t$  为从  $S_i$  到  $S_j$  的行驶时间,  $e$  为乘车费用,  $c=1$  表示  $S_i, S_j$  之间有换乘,  $c=0$  表示未换乘,  $k$  为  $i, j$  两个站点所属的线路号。每条边权重是动态变化的, 当它属于不同乘车方案的路径  $Path$  时, 它的权重不同。现在假设起点为  $S_1$ , 终点为  $S_2$ , 共有  $n$  种可行方案  $A_1, A_2 \cdots A_n$ , 对于其中一种乘车方案  $A$ , 我们对其路径  $Path$  上的边权赋值方法如下:(以类 C 语言表示)

$K$  表示当前行驶线路(初值为  $S_1$  所在线路),  $N$  表示当前线路上连续行驶的站点数(初

值 0)。

设  $S_i, S_j$  为 Path 上的相邻两点，其边权重  $w_{ij}(t, e, c, k)$  的确定方法如下：

If  $w_{ij}(k) == K$  即  $S_i, S_j$  在当前线路上无需换乘

$w_{ij}(t) = \text{相邻两站的平均行驶时间 3 分钟} \& (S_i \neq S_j) + (\text{起始等车时间 3 分钟} + \text{相邻两站的平均行驶时间 3 分钟}) \& (S_i == S_j);$

$N = N + 1;$

$w_{ij}(e) = 0;$

假定下车时车费才被计算

$w_{ij}(c) = 0;$

换乘标记为 0

Else

$w_{ij}(t) = \text{公交换公交平均时间 5 分钟} + \text{站间的平均行驶时间 3 分钟};$

$w_{ij}(e) = (Q_k == 0) \& 1 + (Q_k == 1) \& [(N \leq 20) \& 1 + (20 < N \leq 40) \& 2 + (N > 40) \& 3];$

$N = 1;$

当前线路的连续行驶站点数重新置 1

$w_{ij}(c) = 1;$

$K = w_{ij}(k);$

将  $S_i, S_j$  所在路线设为当前路线

End

通过上面的分析我们可以得到每种方案的所有信息，即总时间  $T$ ，总费用  $E$  和换乘次数  $C$ 。在此基础上，我们按照不同目标建立了三个最优化模型：

1) 总时间最少

$$\text{Min } \{T_1, T_2 \dots T_{n-1}, T_n\} \quad (\text{共 } n \text{ 种方案})$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} T_m = \sum_{i,j} w_{ij}(t) & S_i, S_j \text{ 相联, 且在 Path}_m \text{ 上} & m = 1, 2, \dots, n \\ E_m = \sum_{i,j} w_{ij}(e) & S_i, S_j \text{ 相联, 且在 Path}_m \text{ 上} & m = 1, 2, \dots, n \\ C_m = \sum_{i,j} w_{ij}(c) \leq 2 & S_i, S_j \text{ 相联, 且在 Path}_m \text{ 上} & m = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

其中  $C_m = \sum_{i,j} w_{ij}(c) \leq 2$  表示换成次数不超过 2 次。

2) 总费用最少

$$\text{Min } \{E_1, E_2 \dots E_{n-1}, E_n\} \quad (\text{共}n\text{种方案})$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} E_m = \sum_{i,j} w_{ij}(e) & S_i, S_j \text{相联, 且在 Path}_m \text{上} \quad m=1,2\dots n \\ T_m = \sum_{i,j} w_{ij}(t) & S_i, S_j \text{相联, 且在 Path}_m \text{上} \quad m=1,2\dots n \\ C_m = \sum_{i,j} w_{ij}(c) \leq 2 & S_i, S_j \text{相联, 且在 Path}_m \text{上} \quad m=1,2\dots n \end{cases}$$

3) 换乘次数最少

$$\text{Min } \{C_1, C_2 \dots C_{n-1}, C_n\} \quad (\text{共}n\text{种方案})$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} C_m = \sum_{i,j} w_{ij}(c) & S_i, S_j \text{相联, 且在 Path}_m \text{上} \quad m=1,2\dots n \\ T_m = \sum_{i,j} w_{ij}(t) & S_i, S_j \text{相联, 且在 Path}_m \text{上} \quad m=1,2\dots n \\ E_m = \sum_{i,j} w_{ij}(e) & S_i, S_j \text{相联, 且在 Path}_m \text{上} \quad m=1,2\dots n \end{cases}$$

在对单目标进行优化时，可能出现很多个方案具有相同的目标值的情况，我们考虑对三个目标进行等级划分，优先度递减，这样可以更有效的对方案进行筛选。  
等级划分：

	一级目标	二级目标	三级目标
时间最少方案	时间	换乘	费用
费用最少方案	费用	时间	换乘
换乘最少方案	换乘	时间	费用

## 2 模型的求解

### 2.1 第一阶段求解

模型求解第一阶段的任务是搜索出所有换乘不超过 2 次的乘车方案，我们运用递归的思想编程求解，基本算法如下：

1) **0 次换乘**：对于给定的起点  $S_1$  与终点  $S_2$ ，遍历每条通过  $S_1$  的线路，若该线路也通过  $S_2$  并且满足行驶方向，则记录该线路；

2) **1 次换乘**：对于给定的起点  $S_1$  与终点  $S_2$ ，遍历  $S_1$  所在的每条线路上  $S_1$  行驶方

向之后的站点 $S_i$ ，采用**0次换乘**的方法判断从 $S_i$ 是否可以无换乘的到达 $S_2$ ，若是，则记录该线路；

3) **2次换乘**：对于给定的起点 $S_1$ 与终点 $S_2$ ，取出 $S_1$ 所在线路上 $S_1$ 行驶方向之后的某一站点 $S_i$ ，采用**1次换乘**的方法判断从 $S_i$ 是否可以换乘一次后到达 $S_2$ ，若是，则记录该线路；

对与找出的每条路径计算它的总时间 $T$ ，总费用 $E$ ，换乘次数 $C$ ，并加以记录。

## 2. 2 第二阶段求解

在 1. 2. 1 中已经找出所有的换乘不超过两次的乘车方案，下面通过单目标排序，我们按照时间最少，费用最少，换乘最少分别对六个用例给出乘车方案，方案信息包括：路线，时间，费用，换乘次数。由于篇幅有限，我们仅给出排名前几位的方案，而在实际当中可以给出充分多的方案，查询者根据自己的需求可以在诸多方案中做出适合自己的选择。

### 1) 用例一

S3359——>S1828		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L436 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下
	时间	67 分钟	67 分钟	104 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次
方案二	路线	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L217 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L217 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L436 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L217 路公汽,到 S1828 站下
	时间	67 分钟	67 分钟	104 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次
方案三	路线	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L027 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L027 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L436 路公汽,到 S1241 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下
	时间	67 分钟	67 分钟	104 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次

		S1828 站下	S1828 站下	
	时间	76 分钟	76 分钟	110 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次

## 2) 用例二

S1557——>S0481		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S3186 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S3186 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S3186 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下
	时间	109 分钟	109 分钟	109 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次
方案二	路线	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S1402 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S1402 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S1402 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下
	时间	115 分钟	115 分钟	115 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次
方案三	路线	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L417 路公汽,到 S2424 站下; 乘 L254 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L417 路公汽,到 S2424 站下; 乘 L254 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L417 路公汽,到 S2424 站下; 乘 L254 路公汽,到 S0481 站下
	时间	115 分钟	115 分钟	115 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次

## 3) 用例三

S0971——>S0485		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S0971 乘 L013 路公汽,到 S2517 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2159 站下; 乘	S0971 乘 L013 路公汽,到 S2517 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2159 站下; 乘	S0971 乘 L013 路公汽,到 S2184 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下

		L469 路公汽,到 S0485 站下	L469 路公汽,到 S0485 站下	
	时间	106 分钟	106 分钟	131 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次
方案二	路线	S0971 乘 L013 路公 汽,到 S2517 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2480 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公 汽,到 S2517 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2480 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公 汽,到 S0992 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下
	时间	109 分钟	109 分钟	134 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次
方案三	路线	S0971 乘 L013 路公 汽,到 S1609 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公 汽,到 S1609 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公 汽,到 S1770 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下
	时间	109 分钟	109 分钟	137 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次

#### 4) 用例四

S0008——>S0073		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S0008 乘 L198 路公 汽,到 S1383 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2184 站下; 乘 L345 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公 汽,到 S0400 站下; 通过地铁站 D13 走 到 S2633; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站 下	S0008 乘 L159 路公 汽,到 S0400 站下; 通过地铁站 D13 走 到 S2633; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站 下
	时间	70 分钟	83 分钟	83 分钟
	费用	3 元	2 元	2 元
	换乘	2 次	1 次	1 次
方案二	路线	S0008 乘 L198 路公 汽,到 S1383 站下; 乘 L296 路公汽,到 S2184 站下; 乘 L345 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公 汽,到 S0400 站下; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公 汽,到 S0400 站下; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站下
	时间	70 分钟	86 分钟	86 分钟
	费用	3 元	2 元	2 元



	换乘	2 次	1 次	1 次
方案三	路线	S0008 乘 L198 路公汽,到 S1728 站下; 乘 L199 路公汽,到 S2083 站下; 乘 L057 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公汽,到 S2633 站下; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公汽,到 S0491 站下; 乘 L058 路公汽,到 S0073 站下
	时间	76 分钟	86 分钟	86 分钟
	费用	3 元	2 元	2 元
	换乘	2 次	1 次	1 次

### 5) 用例五

S0148——>S0485		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L378 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L378 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L378 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下
	时间	124 分钟	124 分钟	124 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次
方案二	路线	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L427 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L427 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L427 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下
	时间	124 分钟	124 分钟	124 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次
方案三	路线	S0148 乘 L024 路公汽,到 S0345 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S0345 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S0345 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下
	时间	124 分钟	124 分钟	124 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次

### 6) 用例六

S0087——>S3676		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S0087 乘 L021 路公汽,到 S0088 站下; 乘 L231 路公汽,到 S0427 站下; 乘 L097 路公汽,到 S3676 站下	S0087 乘 L454 路公汽,到 S3496 站下; 乘 L209 路公汽,到 S3676 站下	S0087 乘 L454 路公汽,到 S3496 站下; 乘 L209 路公汽,到 S3676 站下
	时间	49 分钟	68 分钟	68 分钟
	费用	3 元	2 元	2 元
	换乘	2 次	1 次	1 次
方案二	路线	S0087 乘 L021 路公汽,到 S0088 站下; 乘 L231 路公汽,到 S0427 站下; 乘 L462 路公汽,到 S3676 站下	S0087 乘 L454 路公汽,到 S1893 站下; 乘 L209 路公汽,到 S3676 站下	S0087 乘 L454 路公汽,到 S1893 站下; 乘 L209 路公汽,到 S3676 站下
	时间	49 分钟	74 分钟	74 分钟
	费用	3 元	2 元	2 元
	换乘	2 次	1 次	1 次
方案三	路线	S0087 乘 L021 路公汽,到 S0088 站下; 乘 L381 路公汽,到 S0427 站下; 乘 L462 路公汽,到 S3676 站下	S0087 乘 L021 路公汽,到 S0088 站下; 乘 L231 路公汽,到 S0427 站下; 乘 L097 路公汽,到 S3676 站下	S0087 乘 L021 路公汽,到 S0088 站下; 乘 L231 路公汽,到 S0427 站下; 乘 L097 路公汽,到 S3676 站下
	时间	49 分钟	49 分钟	49 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次

## 问题二的模型建立与求解

### 1 模型的建立

我们仍然采用**多权重动态有向图**模型对问题二进行描述,对公交线路的描述与问题一相同,而对于地铁,我们将 T1 和 T2 号线看成两条特殊的公交线路,其上的站点同样用 S 表示,线路编号分别为 L521, L522。对于可以通过地铁站免费换乘的公交站,我们把与某地铁站直接相通的所有公交站,连同该地铁站一起,看成一个免费的小环线,从 L523 开始往后编号。假设起点为  $S_1$ , 终点为  $S_2$ , 共有 n 种可行方案  $A_1, A_2 \cdots A_n$ , 对于其中一种乘车方案 A, 我们对其路径 Path 上的边权赋值方法如下: (以类 C 语言描述)

K 表示当前行驶线路(初值为  $S_1$  所在线路), N 表示当前线路上连续行驶的站点数(初值 0)。

设  $S_i, S_j$  为 Path 上的相邻两点, 其边权重  $w_{ij}(t, e, c, k)$  的确定方法如下:

If  $w_{ij}(k) == K$  即  $S_i, S_j$  在当前线路上无需换乘

If  $S_i, S_j$  在公汽线上

$w_{ij}(t) = \text{相邻两公汽站的平均行驶时间 3 分钟} \& (S_i \neq S_1) + (\text{起始等车时间 3 分钟} + \text{相邻两公汽站的平均行驶时间 3 分钟}) \& (S_i = S_1);$

Else

$w_{ij}(t) = \text{相邻两地铁站的平均行驶时间 2.5 分钟} \& (S_i \neq S_1) + (\text{起始等地铁时间 2 分钟} + \text{相邻两地铁站的平均行驶时间 2.5 分钟}) \& (S_i = S_1);$

End

$N = N + 1;$

$w_{ij}(e) = 0;$  假定下车时车费才被计算

$w_{ij}(c) = 0;$

Else

Case  $S_i, S_j$  在公汽线上

$w_{ij}(t) = \text{公汽换公汽时间 5 分钟} + \text{站间的平均行驶时间 3 分钟}$

$w_{ij}(e) = (Q_k == 0) \& 1 + (Q_k == 1) \& [(N \leq 20) \& 1 + (20 < N \leq 40) \& 2 + (N > 40) \& 3];$

$w_{ij}(c) = 1;$

$N = 1;$  当前线路的连续行驶站点数重新置 1

$K = w_{ij}(k);$  将  $S_i, S_j$  所在路线设为当前路线

Case  $S_i$  在公汽线上,  $S_j$  在地铁线上

$w_{ij}(t) = \text{公汽换地铁平均时间 6 分钟};$

$w_{ij}(e) = (Q_k == 0) \& 1 + (Q_k == 1) \& [(N \leq 20) \& 1 + (20 < N \leq 40) \& 2 + (N > 40) \& 3];$

$$w_{ij}(c)=1;$$

$$N=0;$$

$$K=w_{ij}(k);$$

Case  $S_i$  在地铁线上,  $S_j$  在公汽线上

$$w_{ij}(t)=\text{地铁换公汽平均时间 } 7 \text{ 分钟};$$

$$w_{ij}(e)=\text{地铁费用 } 3;$$

$$w_{ij}(c)=1;$$

$$N=0;$$

$$K=w_{ij}(k);$$

Case  $S_i, S_j$  在地铁线上, 且一个在 T1 号线, 另一个在 T2 号线

$$w_{ij}(t)=\text{地铁换地铁平均时间 } 4 \text{ 分钟} + \text{两地铁站间平均行驶时间 } 2.5 \text{ 分钟};$$

$$w_{ij}(e)=0;$$

$$w_{ij}(c)=1;$$

$$N=N+1;$$

$$K=w_{ij}(k);$$

End

基于上面的分析, 我们得到和问题一完全相同的三个最优化模型, 在这里不再重述。

## 2 模型的求解

### 2.1 第一阶段求解

由于我们将地铁看成特殊的公汽路线, 所以模型描述上问题一和二非常类似, 这样我们可以沿用问题一的求解方法对问题二进行求解。找出换乘不超过两次的方案后, 计算它的总时间  $T$ , 总费用  $E$ , 换乘次数  $C$ , 并加以记录。

### 2.2 第二阶段求解

同问题一, 我们仅给出经过分级筛选后排名前几位的方案。

#### 1) 用例一

S3359——>S1828	总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
---------------	-------	-------	--------

方案一	路线	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L436 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下
	时间	67 分钟	67 分钟	104 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次
方案二	路线	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L217 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L485 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L217 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L436 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L217 路公汽,到 S1828 站下
	时间	67 分钟	67 分钟	104 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次
方案三	路线	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L027 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L015 路公汽,到 S2903 站下; 乘 L027 路公汽,到 S1784 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下	S3359 乘 L436 路公汽,到 S1241 站下; 乘 L167 路公汽,到 S1828 站下
	时间	76 分钟	76 分钟	110 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次

## 2) 用例二

S1557——>S0481		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S3186 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S3186 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S3186 站下; 乘 L460 路公汽,到 S0481 站下
	时间	109 分钟	109 分钟	109 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次
方案二	路线	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S1402 站下; 乘	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S1402 站下; 乘	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L189 路公汽,到 S1402 站下; 乘

		L460 路公汽,到 S0481 站下	L460 路公汽,到 S0481 站下	L460 路公汽,到 S0481 站下
	时间	115 分钟	115 分钟	115 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次
方案三	路线	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L417 路公汽,到 S2424 站下; 乘 L254 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L417 路公汽,到 S2424 站下; 乘 L254 路公汽,到 S0481 站下	S1557 乘 L084 路公汽,到 S1919 站下; 乘 L417 路公汽,到 S2424 站下; 乘 L254 路公汽,到 S0481 站下
	时间	115 分钟	115 分钟	115 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次

### 3) 用例三

S0971——>S0485		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S0971 乘 L013 路公汽,到 S2517 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2159 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公汽,到 S2517 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2159 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公汽,到 S2184 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下
	时间	106 分钟	106 分钟	131 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次
方案二	路线	S0971 乘 L013 路公汽,到 S2517 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2480 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公汽,到 S2517 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2480 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公汽,到 S0992 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下
	时间	109 分钟	109 分钟	134 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	1 次
方案三	路线	S0971 乘 L013 路公汽,到 S1609 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公汽,到 S1609 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0971 乘 L013 路公汽,到 S1770 站下; 乘 L417 路公汽,到 S0485 站下
	时间	109 分钟	109 分钟	137 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元

	换乘	2 次	2 次	1 次
--	----	-----	-----	-----

#### 4) 用例四

S0008——>S0073		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S0008 乘 L198 路公汽,到 S1383 站下; 乘 L290 路公汽,到 S2184 站下; 乘 L345 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公汽,到 S0400 站下; 通过地铁站 D13 走到 S2633; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公汽,到 S0400 站下; 通过地铁站 D13 走到 S2633; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站下
	时间	70 分钟	83 分钟	83 分钟
	费用	3 元	2 元	2 元
	换乘	2 次	1 次	1 次
方案二	路线	S0008 乘 L198 路公汽,到 S1383 站下; 乘 L296 路公汽,到 S2184 站下; 乘 L345 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公汽,到 S0400 站下; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公汽,到 S0400 站下; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站下
	时间	70 分钟	86 分钟	86 分钟
	费用	3 元	2 元	2 元
	换乘	2 次	1 次	1 次
方案三	路线	S0008 乘 L198 路公汽,到 S1728 站下; 乘 L199 路公汽,到 S2083 站下; 乘 L057 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公汽,到 S2633 站下; 乘 L474 路公汽,到 S0073 站下	S0008 乘 L159 路公汽,到 S0491 站下; 乘 L058 路公汽,到 S0073 站下
	时间	76 分钟	86 分钟	86 分钟
	费用	3 元	2 元	2 元
	换乘	2 次	1 次	1 次

#### 5) 用例五

S0148——>S0485		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L378 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L378 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L378 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下
	时间	124 分钟	124 分钟	124 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次

方案二	路线	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L427 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L427 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S1487 站下; 乘 L427 路公汽,到 S2027 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下
	时间	124 分钟	124 分钟	124 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次
方案三	路线	S0148 乘 L024 路公汽,到 S0345 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S0345 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下	S0148 乘 L024 路公汽,到 S0345 站下; 乘 L140 路公汽,到 S2654 站下; 乘 L469 路公汽,到 S0485 站下
	时间	124 分钟	124 分钟	124 分钟
	费用	3 元	3 元	3 元
	换乘	2 次	2 次	2 次

## 6) 用例六

S0087——>S3676		总时间最少	总费用最少	换乘次数最少
方案一	路线	S0087 走到 D27 地铁站; 乘 T2 地铁下行,到 D36 地铁站下; 通过地铁站 D36 走到 S3676	S0087 通过 D27 地铁站走到 S0088 公汽站; 乘 L231 环路公汽上行到 S0427 公汽站; 通过地铁站 D36 走到 S3676	S0087 走到 D27 地铁站; 乘 T2 地铁下行,到 D36 地铁站下; 通过地铁站 D36 走到 S3676
	时间	30 分钟	37 分钟	30 分钟
	费用	3 元	1 元	3 元
	换乘	0 次	0 次	0 次
方案二	路线	S0087 走到 D27 地铁站; 乘 T2 地铁上行,到 D36 地铁站下; 通过地铁站 D36 走到 S3676	S0087 乘 L021 路公汽,到 S0088 站下; 乘 L231 环路公汽上行,到 S0427 站下; 通过地铁站 D36 走到 S3676	S0087 走到 D27 地铁站; 乘 T2 地铁上行,到 D36 地铁站下; 通过地铁站 D36 走到 S3676
	时间	35 分钟	43 分钟	35 分钟
	费用	3 元	2 元	3 元
	换乘	0 次	1 次	0 次
方案三	路线	S0087 通过 D27 地铁站走到 S0088 公汽站; 乘 L231 路公汽到 S0427 公汽站; 通过	S0087 乘 L021 路公汽,到 S0088 站下; 乘 L381 环路公汽上行,到 S0427 站下;	S0087 通过 D27 地铁站走到 S0088 公汽站; 乘 L231 路公汽到 S0427 公汽站; 通过



		地 铁 站 D36 走到 S3676	通过地 铁 站 D36 走到 S3676	地 铁 站 D36 走到 S3676
	时间	37 分钟	52 分钟	37 分钟
	费用	1 元	2 元	1 元
	换乘	0 次	1 次	0 次

## 模型的评价

由于问题一，二的整个建模和求解过程几乎相同，所以我们将二者放到一起进行评价。

**整体思路：**我们将公交方案的优化目标定为乘车时间，乘车费用和换乘次数。通过对网上现有的公交查询系统的调查，我们认为优化目标的选择是合理而恰当的，对于每种方案，我们都给出了乘车线路，时间，费用，换乘次数等相关信息以供查询者参考。这样做不仅满足了查询者的不同需求，提高了选择的自由度，同时避免了各指标加权后进行单目标优化带来的局限性。对于问题的求解，我们将问题拆成两部分，先找出所有换乘不超过两次的方案（我们认为这符合一般人的习惯），再对方案按照不同的目标进行筛选，这样大大降低了求解算法的复杂度，在较短时间内即可得到结果。关于结果的给出，我们对三个目标进行等级划分，这样可以更有效的对方案进行筛选，使得结果更符合实际。

**关于假设：**我们假定用平均时间来反映各站点间的行驶情况和换乘情况，然而现实生活中，需要考虑更多因素，例如站点间距离，交通拥挤，天气等。还有一条假设是换乘次数不超过两次，这是根据一般生活经验得到的，符合情理。这些关键性的假设对问题求解起到了一定的简化作用，但又不失合理性。

**关于模型：**我们使用**多权重动态有向图**模型对问题进行描述，用时间  $t$ ，费用  $e$ ，换乘标志  $c$ ，所属线路  $k$  四个参数来表示某条边的权重，这样描述使得抽象的问题变得具体化，而且只需要根据题意确定每个方案中的乘车路径上的各边权重，就可以建立起相应的优化模型。同时问题一，问题二，还有接下来研究的问题三中我们都采用了相同的模型，这说明我们的模型具有很强的拓展性和普遍性。

**关于求解：**我们运用递归的思想编写程序，将一次换乘转化为不换乘，将两次换乘转化为一次换乘，使得程序的编写思路更清晰简洁。同时我们采用了一些处理技巧，例如对线路的规定和对于已经访问过的线路和站点的处理，使得求解效率进一步提高。

## 问题三的模型建立与求解

### 1 问题的分析

由于行人可以步行到达任一站点，所以使得公交方案的选择变得更加灵活和多样。我们认为行人选择步行的原因有以下几种：

- 1) 起点与终点的距离较近，如果乘公交，可能无法直达或者绕路；
- 2) 直接从起点乘公交到终点需要多次换乘，通过步行选择更优的上车和下车站点，以减少换乘次数；
- 3) 直接从起点乘公交到终点时间过长，通过步行选择更优的上车和下车站点，以减少时间；
- 4) 直接从起点乘公交到终点票价过高，通过步行选择更优的上车和下车站点，以降低费用；

如果从实际出发，考虑步行时体力的消耗以及时间的浪费（相邻两站步行时间大于公车行驶时间），我们假定步行站数不超过两站。基于上面的分析，在换乘不超过两次的前提下，我们得到了“步行+公交”混合乘车方案的 4 种基本情形：

- 1) 起点→ 步行→ 终点 （不乘公交）
- 2) 起点→ 步行→ 公交→ 步行→ 终点 （0 次换乘）
- 3) 起点→ 步行→ 公交→ 步行→ 公交→ 步行→ 终点 （1 次换乘）
- 4) 起点→ 步行→ 公交→ 步行→ 公交→ 步行→ 公交→ 步行→ 终点 （2 次换乘）

其中，步行时间=0 表示直接乘公车，步行时间>0 表示乘车前步行一段路程。为了处理方便，我们将步行（覆盖整个公交网）看成一条行驶路线不固定（在某点可以随意选择路线，不受约束），无乘车费用的特殊线路。

具体规定如下：

- 1) 行驶路线不固定，某点处可以随机选择行驶方向；
- 2) 线路站点包括公交网中的所有站点；
- 3) 行驶费用为 0；
- 4) 相邻两站点间的平均步行时间分为：公汽站—公汽站，地铁站—地铁站，公汽站—地铁站；
- 5) 步行换公汽平均时间 3 分钟，即等公汽的平均时间；
- 6) 步行换地铁平均时间 2 分钟，即等地铁的平均时间；

这样规定后，我们可以继续使用前两问中的**多权重动态有向图**模型对问题进行描述。

## 2 模型的建立

我们将步行编号为 L523 线路。现在假设起点为  $S_1$ ，终点为  $S_2$ ，共有  $n$  种可行方案  $A_1, A_2 \dots A_n$ ，对于其中一种乘车方案  $A$ ，我们对其路径  $Path$  上的边权赋值方法如下：（以类 C 语言描述）

$K$  表示当前行驶线路（初值为  $S_1$  所在线路）， $N$  表示当前线路上连续行驶的站点数（初值 0）。

设  $S_i, S_j$  为  $Path$  上的相邻两点，其边权重  $w_{ij}(t, e, c, k)$  的确定方法如下：

（我们仅给出涉及到步行线路的边权赋值方法，公汽和地铁的情况问题一、二中已作详细讨论，不再重述）

If  $w_{ij}(k) == K$  即  $S_i, S_j$  在当前线路上无需换乘

Case  $S_i, S_j$  在步行线上 （公汽线和地铁线的情况略）

$w_{ij}(t)$  = 相邻两站的平均步行时间；

End

$N=N+1$ ;

$w_{ij}(e)=0$ ; 假定下车时车费才被计算

$w_{ij}(c)=0$ ;

Else

Case  $S_i$  在公汽线上,  $S_j$  在步行线上（下车情形）

$w_{ij}(t)$  = 相邻两公汽站的平均步行时间 & ( $S_j$  为公汽车站) + 相邻公汽和地铁站的平均步行时间 & ( $S_j$  为地铁站);

$w_{ij}(e) = (Q_k == 0) \& 1 + (Q_k == 1) \& [(N \leq 20) \& 1 + (20 < N \leq 40) \& 2 + (N > 40) \& 3]$ ;

$w_{ij}(c)=0$ ; 换乘在下一次上车时标记

$N=0$ ;

$K = w_{ij}(k)$ ;

Case  $S_i$  在地铁线上,  $S_j$  在步行线上

$w_{ij}(t)$  = 相邻两地铁站的平均步行时间 & ( $S_j$  为地铁站) + 相邻地铁和公汽站的平均步行时间 & ( $S_j$  为公汽车站);

$w_{ij}(e)$  = 地铁费用 3;

$w_{ij}(c)=0$ ;

$N=0$ ;

$K = w_{ij}(k)$ ;

Case  $S_i$  在步行线上,  $S_j$  在公汽线或地铁线上 （上车情形）

（此时  $S_i, S_j$  必然要么都是公汽车站，要么都是地铁站）

$w_{ij}(t)$  = (等待公汽的平均时间 3 分钟 + 相邻两公汽站的平均行驶时间 3 分钟) & ( $S_j$  为公汽站点) + (等待地铁的平均时间 2 分钟 + 相邻两地铁站



