

# 全国数学建模竞赛优秀论文集

2006 年

生物医学工程与医学影像学院·数学与生物数学教研室

## 前 言

数学建模是指利用数学方法和数学软件解决实际问题的过程，从 1994 年开始由教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办数学建模竞赛，每年一次。是目前我国规模最大的一项课外科技活动之一，其目的是培养学生的综合素质、创新意识和实践能力等。我校 2003 年首次组织本科生参加全国大学生数学建模竞赛，得到训练部教务处的全力扶持和学员旅、护理系的大力支持，发展至今，已建立了一个以科室主任为领导核心的数学建模指导教师团队，营造了领导关心数学建模、教师支持数学建模、学生喜欢参与数学建模的良好氛围。

2006 年我校共组织 19 个队参赛，获得全国一等奖 4 项、全国二等奖 1 项、重庆市一等奖 9 项、二等奖 1 项。从获奖比例来看，我校全国一等奖的获奖比例（21%）（全国获奖比例为 2.5%）位居重庆高校**第 1 位**，高出第 2 名西南大学 9.2%；全国奖比例（26.3%）（全国获奖比例为 9.53%）位居重庆高校**第 1 位**，与重庆工商大学并列，总获奖面为 78.9%，列重庆市高校**第 1 位**。由于成绩突出，重庆市教委特别指出，要求重庆赛区颁奖大会在我校召开，重庆市组委会还特邀我校 2 名学生代表参加了在北京举行的全国颁奖大会盛典（重庆市仅 3 名）。

本册子收录了五篇在 2006 年全国大学生数学建模竞赛中获全国奖的优秀论文，都是在校大学生在三天之内完成的，问题来源于实际，文章思路清晰，方法多样，表述准确流畅，具有严密的逻辑性，具有一定的独到之处。可供参与数学建模竞赛的指导教师和学生参考。

数学与生物数学教研室

2007. 4. 10

## 目 录

2006 年获全国甲组一等奖	
艾滋病疗法的评价及疗效的预测模型·····	潘强等 (4)
2006 年获全国乙组一等奖	
易拉罐形状和尺寸的最优设计方案·····	李华君等 (22)
2006 年获全国乙组一等奖	
煤矿爆炸数学模型分析·····	桂 霄等 (43)
2006 年获全国乙组一等奖	
易拉罐形状和尺寸的最优设计·····	朱玖实等 (61)
2006 年获全国乙组二等奖	
煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制·····	王洪林等 (74)

# 艾滋病疗法的评价及疗效的预测模型

潘强，江帆，童大力

指导教师：王开发

## 摘要

艾滋病是当前世界公认的医学难题，是人类社会面临的严重瘟疫。本文针对不同情况下艾滋病的药物治疗建立多组应用模型，作出了单因素疗法效果发展趋势的预测，圆满地解决了四种疗法的药效评价，给出了考虑治疗费用情形下的最优治疗方案。

在问题 1 中，我们先采用了径向基函数 RBF 神经网络模型，用 MATLAB6.5 解出 CD4 细胞数量峰值均值为 1003.4，并适时建议患者停药；其次建立了三角函数拟合模型，预测其不规则变动后为规则的周期性波动，并参照药物动力学效应选取合适的周期函数进行非线性曲线拟合，得出了以 CD4 细胞数量和 HIV 数量为参考对象下第一次停药的时间，大约为 23 周；最后我们建立了微分方程模型，借助相关参数用 MATLAB6.5 模拟出较好的周期波动现象，和题目所给数据的规律相符。

在问题 2 中，我们首先利用 SPSS11.0 进行了方差分析，分别从协方差分析和多因素方差分析两个角度证实了患者年龄对治疗方案的效果具有显著影响和四种疗法下 CD4 均值之间差异显著，确定出第四种疗法为最佳治疗方法；然后我们又建立了多项式拟合模型，通过对散点图及其拟合曲线的分析，证明其周期性波动趋势较为显著。

在第 3 问中，我们依据题意建立了多目标 0-1 规划模型，再通过引入偏好度  $a$  将多目标 0-1 规划转换为单目标规划，最后利用图解法给出了优化方案。当  $a < 0.1185$  时，我们选择疗法 1，当  $0.1185 \leq a < 0.1678$  时，选择疗法 2，当  $a \geq 0.1678$  时，选择疗法 4。

本模型还可推广至其他诸多领域，如传染病控制预测，临床筛选用药，生态指数估计等等。

**关键词：**径向基函数 RBF 神经网络；微分方程模型；方差分析；药物动力学；HIV

## 一、 问题重述（略）

## 二、 基本假设

1. 假设除有一组明显笔误的数据外题目提供的所有数据真实有效，可以采用；
2. 在测试期间，不考虑患者的死亡对测试数据的影响；
3. 出现数据缺失情况的原因不看作是死亡引起的，去掉或保留少数此类患者残余数据不对计算结果造成重大影响；
4. 不考虑药物对身体的副作用；
5. 问题一中不考虑三种药物的药量的比例关系，即认为在所有测试患者中的用药情况一样且一定；
6. 不考虑患者耐药性的变化对测试数据的影响；
7. 抗病毒药物主要作用在病毒复制增殖时期，当考虑间歇用药时，最佳用药时间应选在病毒增殖速度最快的时刻，最佳停药时间应选在病毒增殖最慢的时刻<sup>[1]</sup>。

## 三、 符号规定

$C_{ipw}$ ：表示编号为  $p$  的患者在用药后第  $w$  周后的 CD4 的含量，

$w = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ；

$p = 23424, 23425, 23426, 23427, \dots, 23777, 23780, 23990$ ；

$H_{hpw}$ ：表示编号为  $p$  的患者在用药后第  $w$  周后的 HIV 的含量；

$w = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ；

$p = 23424, 23425, 23426, 23427, \dots, 23777, 23780, 23990$ ；

$x(t)$ ：表示微分方程模型中在  $t$  时刻患者体内正常目标细胞的数量；

$y(t)$ ：表示微分方程模型中在  $t$  时刻患者体内已被感染的细胞数量；

$v(t)$ ：表示微分方程模型中在  $t$  时刻患者体内的游离病毒数量；

$A_i$ ：表示在第三问中病人的日平均花费， $i$  为所选治疗方法， $i = 1, 2, 3, 4$ ；

$B_i$ ：表示在第三问中使用第  $i$  种疗法的病人的 CD4 细胞数量的均值，

$i = 1, 2, 3, 4$ 。

## 四、 问题分析

本题是一道综合性和实践性很强的建模问题，首先需要对数据进行处理，运用适合的数学方法对需要的数据进行统计或预测，再根据得到的数据对药物的药效进行分析。由于这一种较典型的抗病毒药物治疗的数学模型，我们考虑利用一个当前在该领域应用较广的微分方程模型来改进得到本文的微分方程模型，然后从理论上证明该模型的可行性，并进一步用数值模拟求解进行验证。抗病毒药物治疗的微分方程模型比较成熟，有较好的通用性。

### 问题一

本问要求根据附件 1 的数据，预测继续治疗的效果，或确定最佳治疗终止时间。我们先对单个人的治疗效果进行分析，然后通过数据统计来说明治疗的效果。分析附件 1 中的数据可知，总共有 356 名患者参与测试，每人测试次数多在 4 次以上，但也有些患者测试次数少于 4 次，所得数据也较少，所以在建立模型 1 的时候我们将只有少量数据的患者排除，保留有 4 组数据以上的患者。

在评价该药物对某患者是否有效时，我们分别应用了两个指标：1、在测试时间内的 5 周（41-45 周）的 CD4 细胞数量的均值和预测得到较长时间后的 5 周（101-105 周）的 CD4 细胞数量的均值是否高于阈值。查得当 CD4 细胞数量低于  $200/mm^3$  即可确诊为 AIDS 的患者<sup>[2]</sup>，故这里的阈值取  $200/mm^3$ 。2、在测试时间内患者的 CD4 细胞数量是否出现峰值或 HIV 数量是否出现谷值。CD4 细胞数量与患者身体状况直接相关，故将其作为主要指标，而 HIV 的数量又直接影响 CD4 细胞的量，所以在预测时将 HIV 的数量作为 CD4 细胞数量的影响因子。考虑到题目数据特点和多个因子的影响，我们采用了径向基函数网络（RBF 网络）来实现。

由于单个患者所对应的数据太少，使得数据的插值和预测等都难以做到非常准确，对此我们又建立了另一个模型。通过求均值的方式将所有患者的数据整合到一起，看作是一个患者的数据（见图 1）。从图 1 可以发现数据可能具有比较明显的周期波动性，这与我们的微分方程模型结果一致。由于题目中所给数据的限制和微分方程模型的非线性性，我们不能明确求出波动方程的解析表达式，在图 2 中我们给出一个非常简化的利用三角函数的拟合曲线结果。

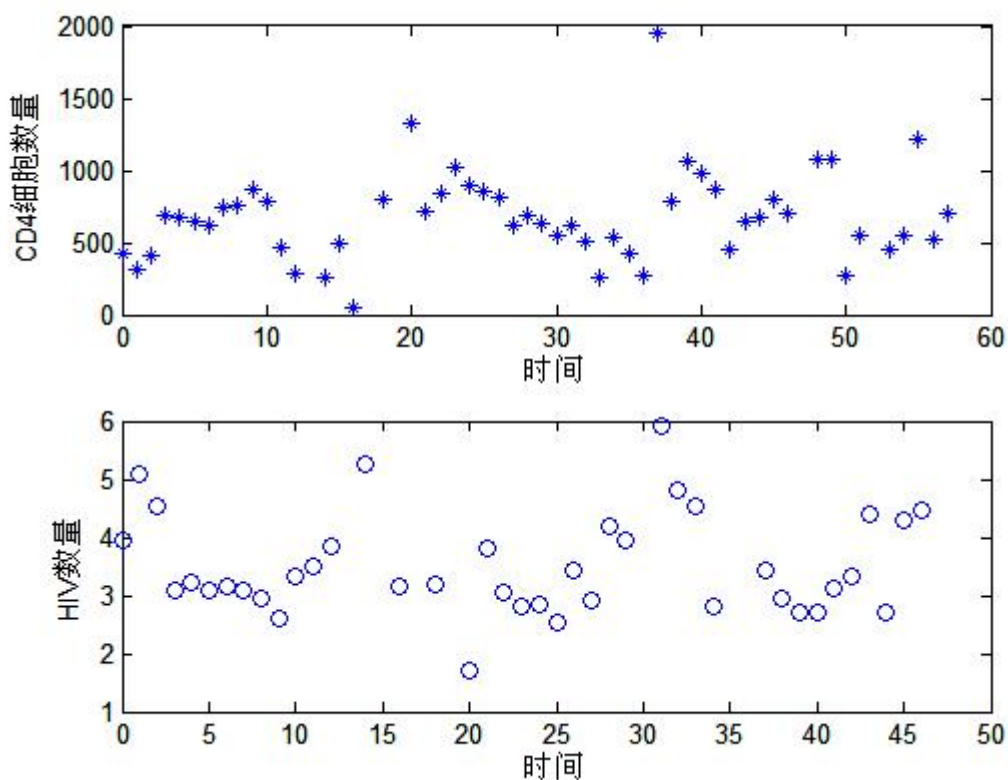


图 1 CD4 细胞平均数和 HIV 病毒平均数的散点分布图

## 问题二

本问在问题一的基础上发生了变动，即按用药种类分成了 4 种治疗方案，时间表述比较准确，且由于资金问题没有测量 HIV 的含量。根据附录 2，我们以时间（天）为横坐标，CD4 细胞数量（/ul）为纵坐标，分别作出了使用四种药物的患者的散点分布图（见图 2），结果也发现具有波动性。现在我们首先需要解决的问题是，在四种用药方法中，哪种方法的治疗效果最好。

我们仍然应先确定一个判断药物疗效的指标，想到数据中人数较多，各组人都是随机分配，我们考虑用相应疗法所有 CD4 细胞数量的均值作为判断药物疗效的指标。该问题就变为多组数据的比较问题，较易想到应用 SPSS 进行统计分析。问题二的数据比问题一的数据多了一组患者的年龄，可以猜想 4 组药物的疗效可能与患者的年龄有关，在统计的时候应加入该因素。由于患者较多，可将患者的年龄归入其相应的年龄段内，再将年龄段作为一个影响因子。

然后，根据模型 3 对数据进行三角函数的非线性拟合，发现结果并不理想，但比线性拟合要好。据微分方程模型可知，CD4 细胞数量的波动性很难只用简单的三角函数来描述，但又不能完整地根据现有数据确定所建立微分方程模型中的各参数。为较好地描述其周期性，我们对数据进行了多项式拟合，效果较好。

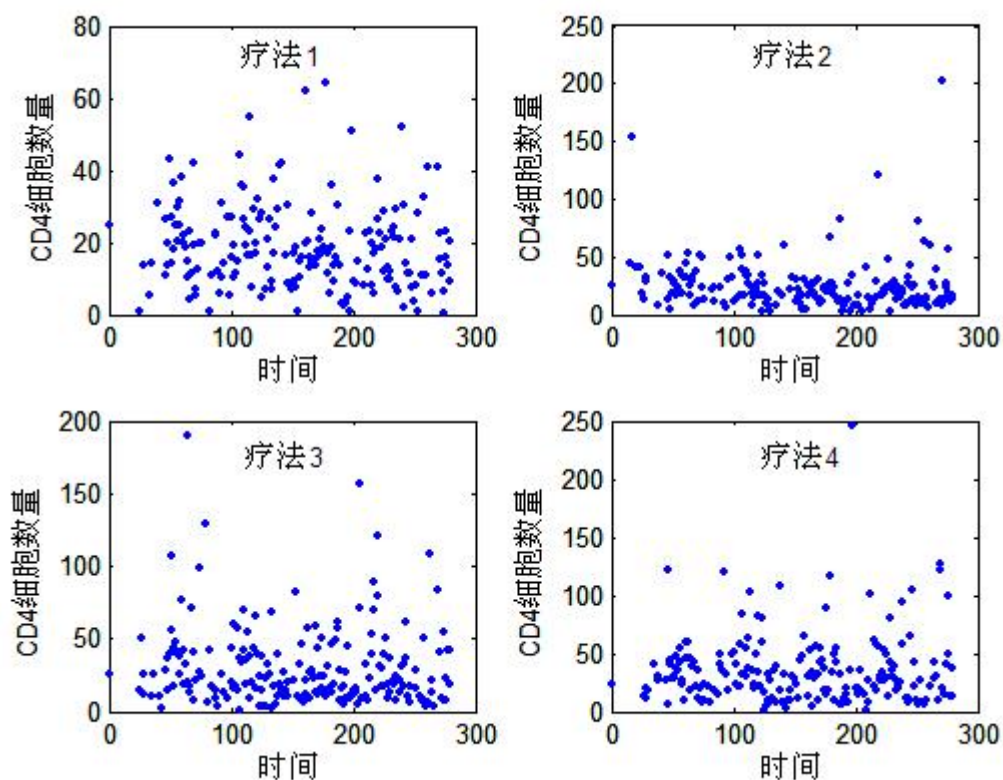


图 2 使用四种药物的患者的 CD4 含量散点分布图

### 问题三

本问要求在考虑四种治疗方法费用的情况下，对问题二中的评价和预测有什么改变。

在给出了药价的情况下，作为一个患者来讲，当然是希望能以比较便宜的价格买到效果好的药品，所以此问为一优化问题，且是一个多目标规划，需同时考虑价格和药效，但是本问又缺乏约束条件，所以我们在此考虑了一典型算法，即引入一常量  $a$  表示偏好度，表示病人对疗效和费用的偏好程度，根据经验公式  $M = \max(aB_i - (1-a)A_i)$ ，并结合图形分析法求出最优治疗方案。

## 五、模型的建立与求解

### 问题一

#### 模型 1、径向基神经网络模型

第一步：本问首先要对一些未知数据进行预测，根据问题分析中对附录 1 中数据的分析，在附录 1 中的有的患者的测量次数过少，对预测的准确性具有很大的负面影响，所以我们运用 MATLAB6.5 对这些数据进行了处理，剔除了测量次数仅有 1 次，2 次和 3 次的患者，最终剩于患者数量为 316，并将只测量了 CD4 的数据作为无效数据处理。由于本问存在数据量比较少且要求的预测数据明显多于实测数据的情况，所以要达到较好的效果须谨慎地选择预测方法。在这里，我



们选取了建立径向基函数 RBF 神经网络模型（简称径向基网络）来预测患者的 CD4 含量  $C_{tpw}$  和 HIV 含量  $H_{hpw}$ ，它是具有单隐层的三层潜馈网络，并已证明径向基网络能以任意精度逼近任意连续函数<sup>[3]</sup>。

第二步：在第一步获得的实测数据的基础上，建立径向基函数，预测第 41-45 周及 101-105 周每位患者的 CD4 细胞数量的均值。其基本思想是：

径向基函数网络是由输入层、隐含层和输出层构成的三层前向网络（以单个输出神经元为例），隐含层采用径向基函数作为激励函数，该径向基函数一般为高斯函数。隐层每个神经元与输入层相连的权值向量  $W1_i$  和输入矢量  $X^q$ （表示第  $q$  个输入向量），之间的距离乘上阈值  $b1_i$  作为本身的输入。

由此可得隐含层的第  $i$  个神经元的输入为：

$$k_i^q = \sqrt{\sum_j (w1_{ji} - x_j^q)^2} \times b1_i$$

输出为：

$$r_i^q = \exp(-(k_i^q)^2) = \exp(-\sqrt{\sum_j (w1_{ji} - x_j^q)^2} \times b1_i) = \exp(-(\|w1_i - X^q\| \times b1_i)^2)$$

径向基函数的阈值  $b1$  可以调节函数的灵敏度，但实际工作中更常用另一参数  $C$ （称为扩展常数）。 $b1$  和  $C$  的关系有多种确定方法，在 MATLAB 神经网络工具箱中， $b1$  和  $C$  的关系为  $b1_i = 0.8326 / C_i$ ，此时隐含层神经元的输出变为：

$$g_i^q = \exp\left(\frac{\sqrt{\sum_j (w1_{ji} - x_j^q)^2} \times 0.8326}{C_i}\right) = \exp(-0.8326^2 \times (\frac{\|w1_i - X^q\|}{C_i})^2)$$

由此可见， $C$  值的大小实际上反映了输出对输入的响应宽度。 $C$  值越大，隐含层神经元对输入矢量的响应范围将越大，且神经元间的平滑度也越好。

输出层的输入为个隐含层神经元输出的加权求和。由于激励函数为纯线性函数，因此输出为：

$$y^q = \sum_{i=1}^n r_i \times w2_i$$

RBF 网络的训练过程分为两步：第一步为无教师式学习，确定训练输入层与隐含层间的权值  $w1$ ；第二步为有教师式学习，确定训练隐含层与输出层间的权值  $w2$ 。在训练以前，需要提供输入矢量  $X$ 、对应的目标矢量  $T$  与径向基函数的扩展常数  $C$ 。训练的目的在于求取两层的最终权值  $w1$ 、 $w2$  和阈值  $b1$ 、 $b2$ （当隐含层单元数等于输入矢量数时，取  $b2 = 0$ ）。

在 RBF 网络训练中，隐含层神经元数量的确定是一个关键问题，传统的做法是使其与输入向量的元素相等。显然，在输入矢量很多时，过多的隐含层单元数是难以让人接受的。为此，我们提出了改进方法，基本原理是从 0 个神经元开始训练，通过检查输入误差使网络自动增加神经元。每次循环使用，使网络产生

的最大误差所对应的输入向量作为权值向量  $w1_i$ ，产生一个新的隐含层神经元，然后检查新网络的误差，重复此过程直到达到误差要求或最大隐含层神经元数为止。由此可见，径向基函数网络具有结构自适应确定、输出与初始权值无关等特点。

第三步：以 CD4 细胞数量  $200/\mu l$  为阈值，对药物是否有效进行判定。

根据 MATLAB6.5 编程(见附录 程序 1)实施以上步骤可得结果（表 1）：

表 1 药物效果判定表

时间	41-45 周	101-105 周	41-45 周和 101-105 周
CD4 量高于 $200/\mu l$ 的患者数(人)	226	208	202
CD4 平均值 ( $/\mu l$ )	603.38	503.54	553.46

对表中的数据进行分析，有 202 个人的 CD4 细胞的数量在用药较长一段时间后高于  $200/\mu l$ ，占总人数的 63.92%。且 CD4 含量的平均值为  $550/\mu l$ ，明显大于  $200/\mu l$ ，说明这样用药有明显的治疗效果。

第四步：考虑使用药物后，能够使 CD4 细胞数量和 HIV 数量在一定时间内增多或减少则表示药物有一定效果，故将使用药物一段时间（50 周）内 CD4 细胞数量上升达到峰值然后下降或 HIV 数量下降达到最低后回升，视为相对有效。

在得到的 1-49 周的 CD4 细胞数量中取最大值，若其大于第 0 周和第 50 周的 CD4 细胞数量，则认为 CD4 细胞数量在 0-50 周内出现峰值。同理 1-49 周的 HIV 数量中取最小值，若其小于第 0 周和第 50 周的 HIV 数量，则认为 HIV 数量在 0-50 周内出现谷值。

我们以第一种情况进行分析，得到符合的人数为：243，占 76.9%。

若出现峰值，则从 0-50 周的预测值中取最大值，再取步长为 0.05 进行插值，再从所得数据中搜索最大值即为峰值。运用 MATLAB6.5 编程求解（见附录 程序 2）得到（表 2）：

表 2 CD4 含量峰值和 HIV 含量最低值

CD4 细胞数量峰值均值为	1003.4
此时 HIV 数量	30.684
HIV 数量最低值	11.86
此时 CD4 细胞数量	900.13

在建议患者停药时，本模型以表 2 种 CD4 细胞数量或 HIV 数量为参照标准，即当 CD4 细胞数量达到  $1003.4/\mu l$  或 HIV 数量达到 11.86 时，建议患者可以停药。本模型虽解出了峰值的大小，但无法确定何时为峰值，即停药时间无法确定，所以我们又建立了模型 2。

## 模型 2、三角函数拟合模型

将所有病人的数据按时间进行组合，重叠时间的数据取其均值，得到 CD4 细胞数量和 HIV 数量两组数据（见图 1）。

因为抗病毒药物的作用原理是抑制病毒的复制<sup>[4]</sup>，所以在病人使用初期时可能会和机体内病毒发生竞争，至使用药前期的 CD4 细胞数量和 HIV 病毒数会出现无规律性的波动。根据药物动力学理论，药物随给药次数的增加，浓度不断增加。在每个给药周期内，药物浓度的波动范围不同，但它的变化曲线是相似的，且都有一个峰点<sup>[5]</sup>。所以我们在运用函数进行周期性模拟时舍去前几周的数据从第 5 周算起。

本题由于没有给出药物动力学相关数据，所以我们这里选取最简单的三角函数对其药物动力学效应进行模拟。利用文献[6]，我们选取如下公式描述：

$$p(t) = \beta_0 + \beta_1 \cos(\lambda t - \varphi)$$

运用题中所给数据对上述方程进行非线性曲线拟合，可以确定参数  $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\lambda$ 、 $\varphi$  的值。由 MATLAB6.5 计算（见附录 程序 3）得到：

$$\text{CD4: } C(t) = 665.74 + 108.07 \cos(0.3134t - 19.894)$$

$$\text{HIV: } H(t) = 3.5007 + -0.60653 \cos(0.39789t - 21.773)$$

经验证，有较好的拟合效果（见图 3）。

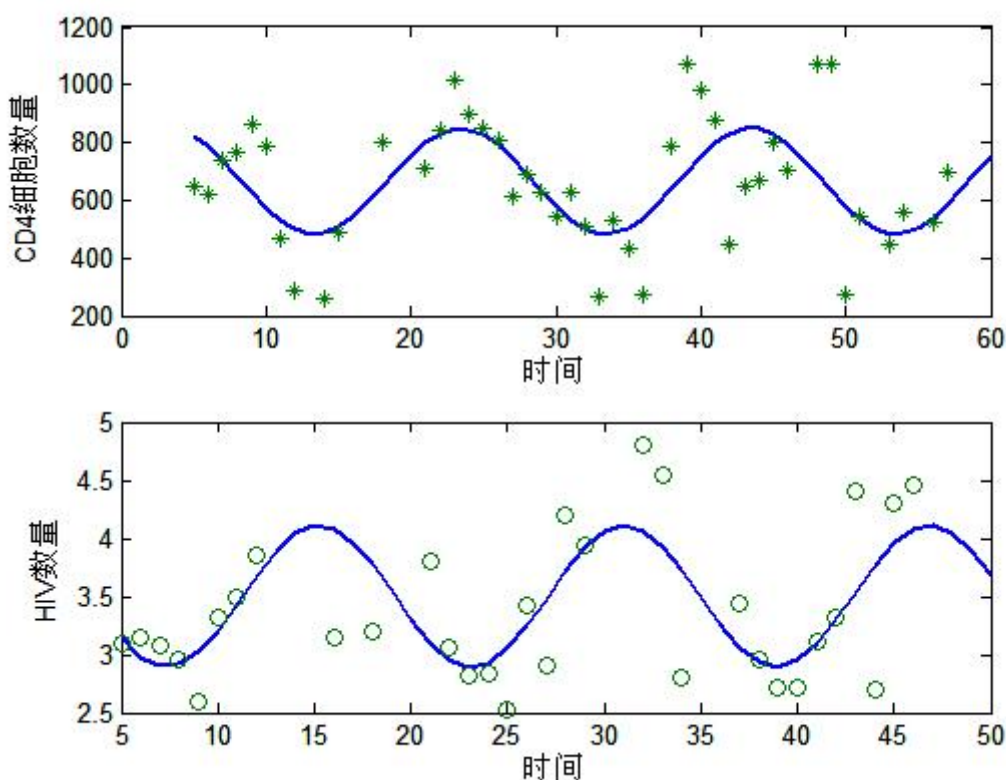


图 3 CD4 细胞平均数和 HIV 病毒平均数的三角函数拟合曲线图

从得到的函数可以得到：CD4 细胞数量最大可达  $773.81/\mu l$ ，最小可达  $557.67/\mu l > 200/\mu l$ ，故可得出该药物疗效较好的结论，与模型 1 的结论相同。

计算得到患者体中 CD4 含量达到高峰时的周期为 20.05 周，HIV 含量达到低谷的周期为 15.79 周。CD4 含量达到第一个高峰的时间为 23.3811 周，HIV 含量达到第一个最低值的时间为 7.3474 周。综合图形考虑，停药时间若以 CD4 作为参考对象，则应选择以 20 周左右为周期间接性给药。通过图形和计算可以发现：CD4 含量达到第一个高峰的时间为 23.3811 周，而 HIV 含量达到第二个最低值的时间为 23.1374 周。故在第 23 周左右的时候停药有最佳效果。

### 模型 3、微分方程模型

为了定量地分析在没有外在干预的情况下体内病毒感染的过程，针对为感染目标细胞（ $x$ ）、被感染细胞（ $y$ ）和游离病毒（ $v$ ）三者的相互作用生态关系，广泛采用如下微分方程模型<sup>[8]</sup>来进行描述：

$$\begin{cases} x' = \delta - \alpha x + p(1 - \frac{x}{x_{\max}})x - kxv, \\ y' = kxv - \beta y, \\ v' = N\beta y - \gamma v - kxv, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\delta$  表示未感染细胞生成的常数速率， $\alpha x$  表示未感染细胞的死亡率， $kxv$  表示未感染细胞的感染速率，也是被感染细胞的生成速率和游离病毒的消耗速率，其中  $k$  为描述感染过程的常速率，相当于未感染细胞与游离病毒的接触率。 $\beta y$  为被感染细胞的死亡速率， $N\beta y$  表示游离病毒的生成速率，游离病毒的生成来源主要是被感染细胞的死亡裂解， $\gamma v$  表示病毒被清除的速率。

在（1）式的基础上，考虑到本问题是药物治疗下的情形，而药物动力学的规律是经多次给药后药物的稳态浓度是一周期波动情况<sup>[5]</sup>，我们加入了周期函数  $\eta(t)$ ， $\varepsilon(t)$  对模型（1）进行校正，以建立更贴近本题抗病毒治疗情形下的病毒感染模型：

$$\begin{cases} x' = \delta - \alpha x + p(1 - \frac{x}{x_{\max}})x - (1 - \eta(t))kxv, \\ y' = (1 - \eta(t))kxv - \beta y, \\ v' = (1 - \varepsilon(t))N\beta y - \gamma v - (1 - \eta(t))kxv, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\eta(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  为周期函数, 分别表示药物阻碍 HIV 和未感染 CD4 接触的效率 and 抑制感染 CD4 死亡裂解而释放 HIV 的效率。参考文献<sup>[6]</sup>在进行数值模拟时, 我们取  $\eta(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  为如下形式:

$$\eta(t) = p_0 + p_1 \cos(\omega_1 t + q_1)$$

$$\varepsilon(t) = q_0 + q_1 \cos(\omega_2 t + q_2)$$

在本微分方程模型 (2) 中有大量的参数需要确定, 但由于题中所给数据的限制, 我们不能从本题中直接提取。通过查阅相关资料<sup>[6, 7]</sup>, 我们确定了以下参数的取值:

表 3 模型 (2) 中的参数取值

参数名	$\delta$	$\alpha$	$p$	$x_{\max}$	$\beta$	$\gamma$	$k$	$N$
取值	10 $day^{-1}mm^{-3}$	0.02 $day^{-1}$	3 $day^{-1}$	1000 $mm^{-3}$	0.24 $day^{-1}$	2.4 $day^{-1}$	0.0027 $mm^3 day^{-1}$	10
数名	$p_0$	$p_1$	$\omega_1$	$\varphi_1$	$q_0$	$q_1$	$\omega_2$	$\varphi_2$
取值	0.5	0.3	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	0.4	0.1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$

利用表 3 的参数值, 我们对模型 (2) 进行了数值模拟 (见附录 程序 4), 由附件 1 的数据, 模型 (2) 中初始值  $x(0) = 430, y(0) = 10, v(0) = 5$ , 结果如图 4 表示。由图 4 可以看出, 在经过一段无规律振荡后, 模型的值表现为周期波动, 这与题目的数据规律相符。进一步我们指出对模型 (2), 按照文献<sup>[6]</sup>的方法, 我们可能能够得到模型 (2) 在某些参数的不同范围内可表现为周期波动, 发生分支并导致混沌的结果, 但由于知识水平及时间的限制, 我们没能对此进一步深入讨论。

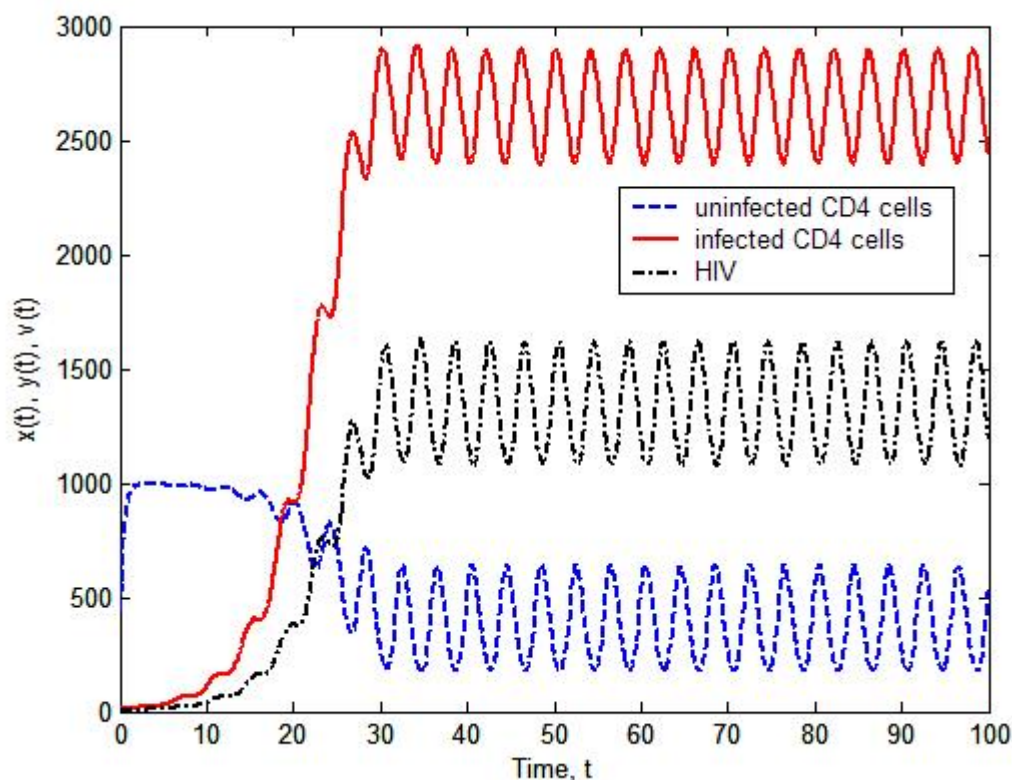


图4 模型（2）的数值模拟结果

## 问题二

该问分为两部分，一个是比较四种疗法的优劣，另一个是对较优的疗法预测继续治疗的效果。我们分别针对这两个部分，建立了两个不同的数学模型进行解答。

### 模型 1、SPSS 协方差分析模型

在问题 2 中，由于题目和附录 2 中均未给出 HIV 的浓度，我们只能根据 CD4T 细胞的浓度分布来预测继续治疗的效果，或者确定最佳治疗终止时间。具体细化，我们运用 SPSS11.0 软件将四种疗法在 8 周后测得的 CD4T 细胞的浓度分别取平均值和进行相关数值检验分析，若满足检验且均值越大，则说明经治疗后 CD4T 细胞增长较多，效果也较好；反之亦然。

首先，因为本问数据中给出了患者的年龄，这是否暗示患者的年龄可能影响治疗方案的效果呢？因此，在本问中考虑年龄和疗法种类两个自变量，CD4T 细胞的浓度为一个因变量，我们用 SPSS11.0 方差分析进行计算和检验。此时，我们可选择协方差分析<sup>[8]</sup> 和多因素方差分析<sup>[8]</sup>。协方差分析是把直线回归与方差分析结合起来应用的一种方法。它利用回归的关系消除自变量不等的影响后，再进行方差分析。同时我们根据协方差分析将某些很难控制的因素作为协变量，在排除协变量影响的条件下，分析控制变量对观察变量的影响，从而更加准确地进行评价。多因素方差分析是综合考虑多个因素及其之间共作效应对观察变量的影

响。

我们首先用 MATLAB6.5 做出散点图，然后再进行线性拟合得到图 5：

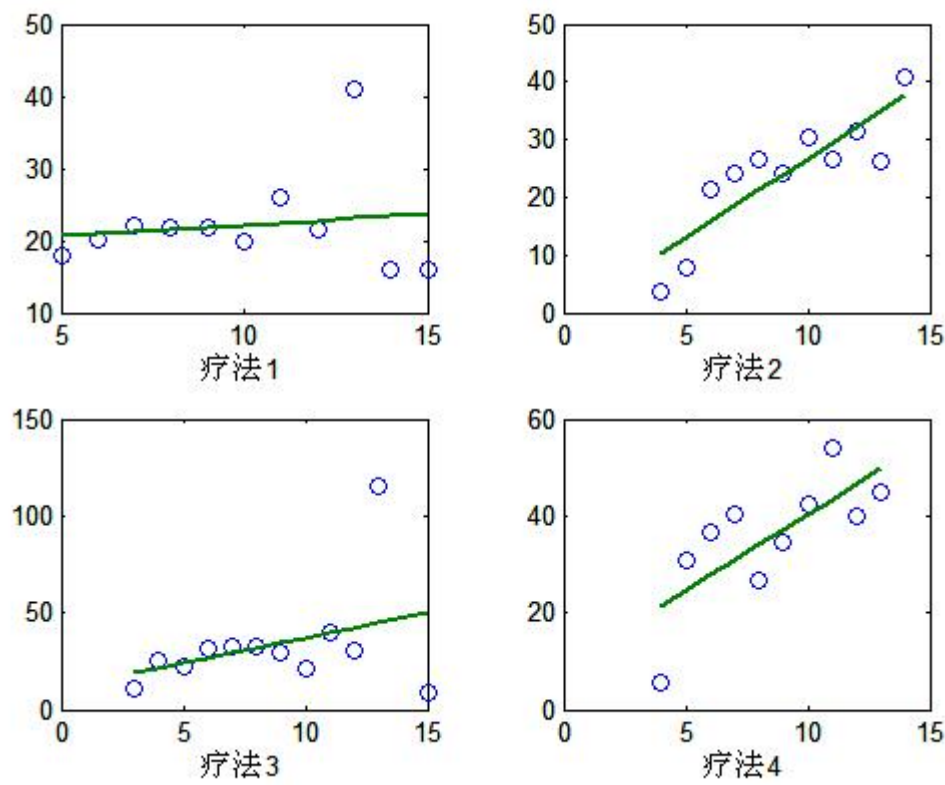


图 5

由图 5 可以看出，4 种治疗方案下年龄与 CD4 含量都具有比较明显的直线关系，因此我们可作协方差分析，将年龄设为协变量，经 SPSS11.0 软件统计得出（表 4，表 5）：

**Tests of Between-Subjects Effects**

表4 Dependent Variable: CD4浓度

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	178977.806	4	44744.451	34.224	.000
Intercept	93136.232	1	93136.232	71.238	.000
年龄	12064.182	1	12064.182	9.228	.002
疗法	165397.459	3	55132.486	42.169	.000
Error	6577543.576	5031	1307.403		
Total	10908712.786	5036			
Corrected	6756521.38	5035			

Total	2				
-------	---	--	--	--	--

a R Squared = .026 (Adjusted R Squared = .026)

表 4 中协变量作用部分，年龄变量的 F 值和相伴概率分别为 9.228 和  $0.002 < 0.01$ ，这表明协变量（年龄）对观察结果（CD4）造成了显著影响。再看表 4 中控制变量（治疗方案）对观察变量（CD4）的独立作用部分，对应的 F 值和相伴概率分别为 34.224 和  $0.000 < 0.01$ ，这说明在排除了协变量（年龄）的影响下，不同的治疗方案对病人的 CD4 数量也造成了显著影响。

进一步，我们利用多因素方差分析来检验治疗方案下 CD4 数量差异的显著性，结果如表 6 所示，说明各个治疗方案下的 CD4 数量两两之间都差异显著。再从表 5 中的数据可以看出，治疗方案 4 的 CD4 均值最大，意味着其疗效越好；方案 3 其次，方案 2 再其次，方案 1 的疗效相对最差。

## Descriptive Statistics

表5 Dependent Variable: CD4浓度

疗法	Mean	Std. Deviation	N
1.00	21.7502	20.71378	1239
2.00	25.0983	25.93270	1251
3.00	30.8600	38.16639	1254
4.00	36.8107	51.26281	1292
Total	28.7141	36.63210	5036

表6 Multiple Comparisons

	(I) 疗法	(J) 疗法	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
Tamhane	1.00	2.00	-3.3481(*)	.94014	.002	-5.8237	-.8725
		3.00	-9.1098(*)	1.22797	.000	-12.3440	-5.8757
		4.00	-15.0605(*)	1.54281	.000	-19.1244	-10.9966
	2.00	1.00	3.3481(*)	.94014	.002	.8725	5.8237
		3.00	-5.7617(*)	1.30353	.000	-9.1944	-2.3290
		4.00	-11.7124(*)	1.60360	.000	-15.9359	-7.4889
	3.00	1.00	9.1098(*)	1.22797	.000	5.8757	12.3440
		2.00	5.7617(*)	1.30353	.000	2.3290	9.1944
		4.00	-5.9507(*)	1.78762	.005	-10.6579	-1.2435
	4.00	1.00	15.0605(*)	1.54281	.000	10.9966	19.1244
		2.00	11.7124(*)	1.60360	.000	7.4889	15.9359
		3.00	5.9507(*)	1.78762	.005	1.2435	10.6579

## 模型 2、多项式拟合模型

要说明四种疗法继续治疗的效果，即讨论 CD4 细胞数量随着药时间波动性。首先根据问题一模型 2，对四种疗法的四组数据进行三角函数非线性拟合，



发现其效果不是很好（见图 6）。

然后我们利用多项式线性拟合，来近似表现患者用药后 CD4 细胞数量的波动性。通过 MATLAB6.5 编程（见附录 程序 5）拟合得到的效果比三角函数稍好（见图 7），并且仍呈现出明显的波动性。所以可以再根据问题一模型 3，对四种疗法继续治疗的效果进行粗略的预测，说明 CD4 细胞数量随治疗时间的波动性近似于问题一模型 3 的数值模拟的波动性（见图 3）。

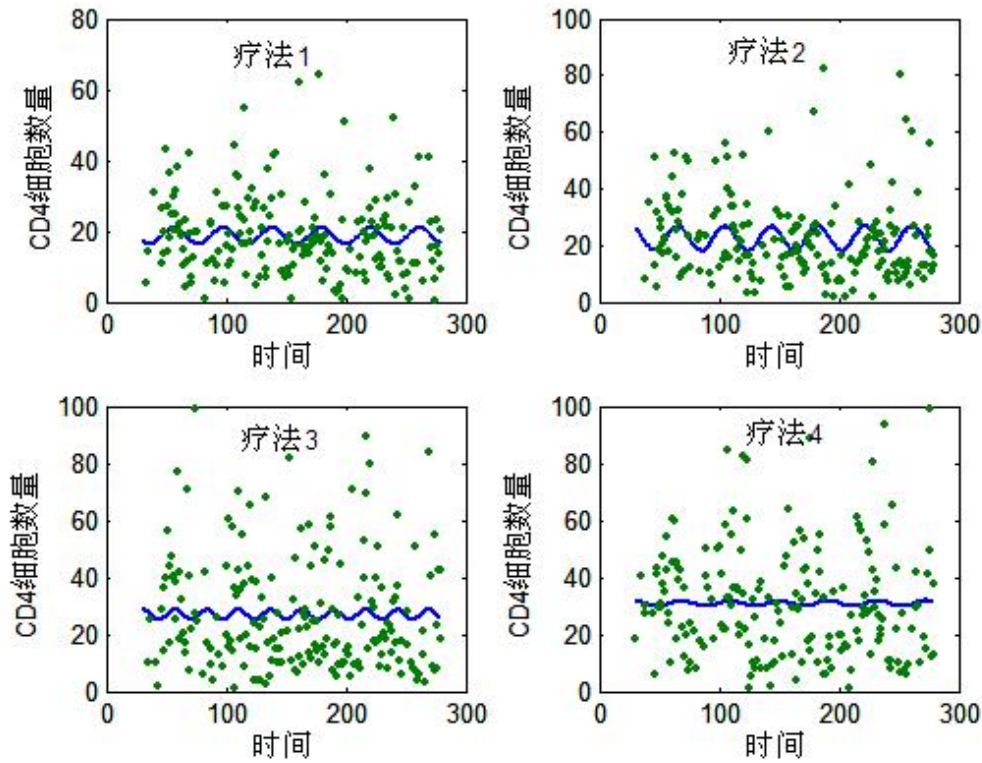


图 6

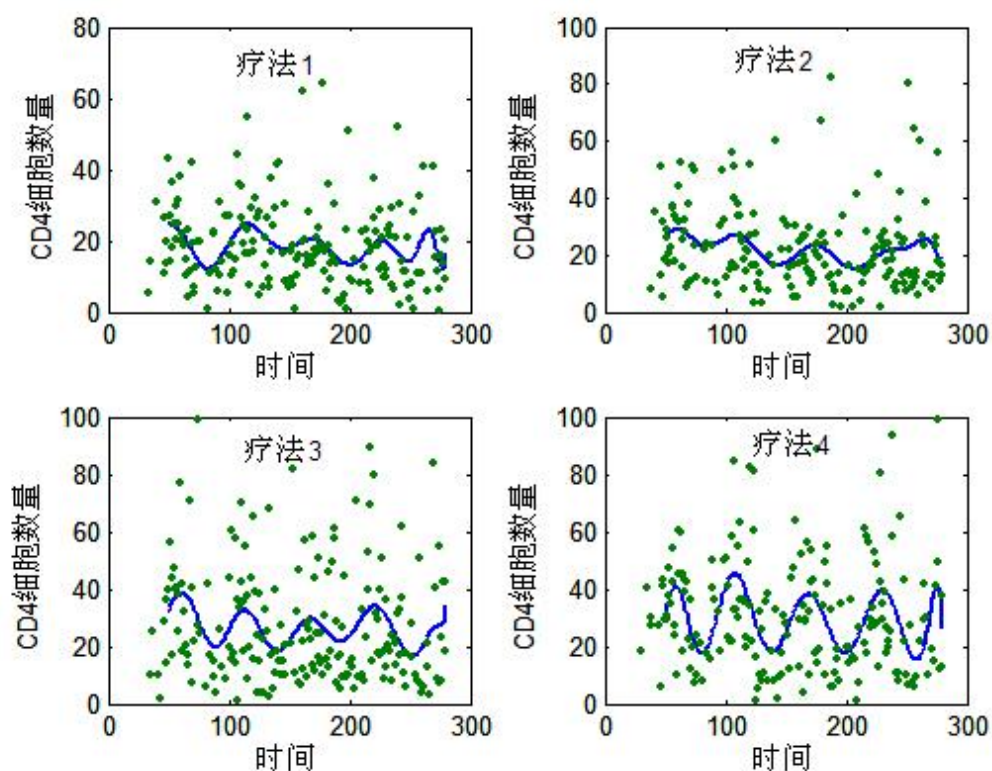


图 7

### 问题三

#### 模型 1、考虑偏好度的图解模型

首先，求出各种疗法的治疗费用和治疗效果。

将  $A_i$ ， $B_i$  的数据统计如下表（表 7）：

表 7

	疗法 1	疗法 2	疗法 3	疗法 4
$A_i$ (\$/d)	1.225	3.45	2.45	3.65
$B_i$ (/ul)	21.7502	25.0983	30.8600	36.8107

本题要求选择一种疗法使  $B_i$  尽可能大，同时使  $A_i$  尽可能小，即为一个多目标的规划问题。可建立多目标 0—1 规划模型如下：

目标函数：

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad f(x) = \sum_{i=1}^4 B_i x_i \\ \min \quad g(x) = \sum_{i=1}^4 A_i x_i \\ s.t. \\ \sum_{i=1}^4 x_i = 1 \\ x_i \text{ 等于0或1} \end{array} \right.$$

为解决该问题，我们引入一个常量  $a$  ( $0 \leq a \leq 1$ )，用以表示病人对治疗效果的偏好度，将多目标规划问题转换成了单目标规划问题。其中  $a=1$  时表示病人只在乎治疗效果， $a=0$  时表示病人只在乎治疗费用。

这样我们可以确定病人对 4 种疗法的选择标准，原模型目标函数变为：

$$\max \quad M(x_i) = \sum_{i=1}^4 (aB_i - (1-a)A_i)x_i$$

则被患者选中的疗法必须满足：

$$M = \max(aB_i - (1-a)A_i),$$

即

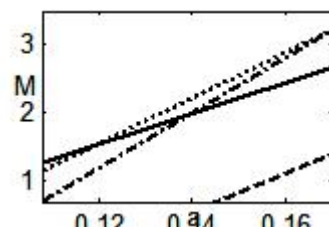
$$M = \max((B_i + A_i)a - A_i),$$

这里我们假设病人已选择了第  $i$  种疗法，则有：

$$M = (B_i + A_i)a - A_i$$

此时  $A_i$  及  $B_i$  为常数。我们跟据不同病人的  $a$  值不同可以通过 MATLAB6.5 编程

(见附录 程序 6) 作出  $M$  与  $a$  的关系图 (图 8)：



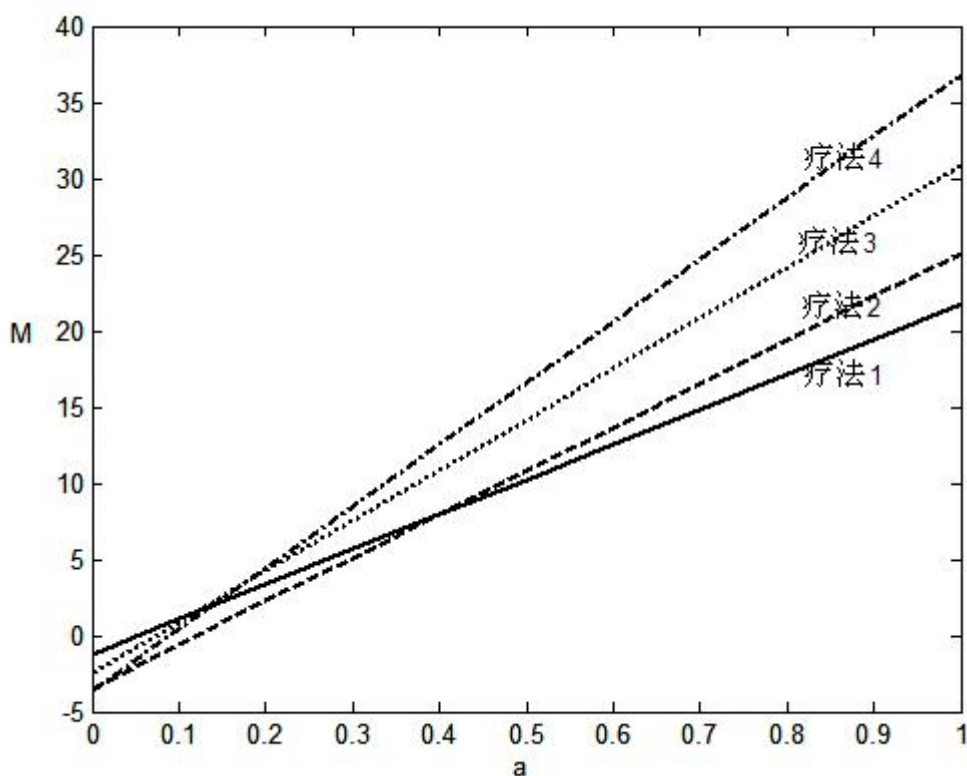


图 8

由图 8 可知值  $M$  关于  $a$  的图形为一折线，由疗法 1、3、4 对应的直线的一部分组成。

设疗法 1 的直线与疗法 3 的直线交点处  $a = a_1$ ，疗法 3 的曲线与疗法 4 的直线交点处  $a = a_2$ 。经过计算得到： $a_1 = 0.1185$ ， $a_2 = 0.1678$ 。故当  $a < 0.1185$  时，病人应选择疗法 1；当  $0.1185 \leq a < 0.1678$  时，病人应选择疗法 3；当  $a \geq 0.1678$  时病人应选择疗法 4。

## 六、 模型评价

本文所建模型能在较大范围内模拟 HIV 和 CD4 细胞随病程的发展趋势，可以广泛应用于艾滋病的药物治疗评价与预测，有助于疾病的实际预防与控制。它的具体优点主要体现在：

1. 参考了国际讨论热点的艾滋病微分方程模型和实测参数，运用相关软件拟合病毒 RNA 和 CD4 细胞的周期性波动曲线，适时指导临床用药；
2. 建立 RBF 神经网络模型对大面积数据作了药效预测，有利于后续的推理工作；
3. 对个别模型进行方差检验，确定其具有统计学意义以佐证所得结果的正确性；
4. 将药代动力学等生物学理论结合考虑，使模型更符合实际情况和试验阶

段筛选针对药物；

然而，由于计算量大，题目所给数据有限，并且时间有限，我们未能具体求出微分方程模型中的各个参数值，只是利用了文献<sup>[6-8]</sup>中的参数值进行了数值模拟，如果能找出各参数的预测方法及其数值，那么我们利用该模型对治疗后期的效果及给药方案的评判将更加容易和可靠。

## 七、模型推广与改进

### 1. 模型的推广：

(1) 本模型可扩展至传染病病情预测和流行病学调查研究：及时掌握传染病传播的广度与深度，以便预测未来的患病比例和发展趋势，有效控制疾病蔓延；还可以对流行病进行动态分析，了解疾病的变化规律，更好地保证身体的健康；

(2) 可用于生态系统平衡和生物增殖数量的预测，因为食物链的存在和环境作用的影响，某些生物的种群数量变化符合周期性消长或是稳态的过程。因此，对方程相关系数进行调配，可使模型应用得更加广泛；

(3) 还可应用于药品效应长期或短期的评价判定，特别是在药品的单位定量上合适取舍，达到最良好的治病效果。

### 2. 模型的改进：

依据相关生物学资料，病毒在与药物竞争生长时随时间的迁移会出现耐药性，并不是简单的负相关关系。因此为全面考虑本题，可设定耐药因子（有可能随竞争过程作相应变化），查阅数据，对模型进行完善和更为系统的分析；

## 参考文献

- [1] 刘士敬，乙肝用药的“四项原则”，  
<http://www.gengls.org/Article/know/hbv/200604/20060429144541.htm>，2006.9.15。
- [2] 王欣，名词解释：CD4细胞，  
<http://www.people.com.cn/GB/shehui/8217/41281/41300/3023256.html>，2006.9.15。
- [3] 飞思科技产品研发中心，神经网络理论与MATLAB7实现，北京海淀区万寿路173信箱：电子工业出版社，2005.7，116-121。
- [4] 邓然，防艾新药令世界兴奋 动物试验已证明有效，  
<http://health.sohu.com/20060329/n242524532.shtml>，2006.9.16。
- [5] 刘昌孝、刘定运，药物动力学概论，北京朝阳门内大街137号：中国学术出版社，1984.6，157-160。
- [6] Kaifa Wang, Wendi Wang, Xianning Liu, Viral infection model with periodic lytic immune response, <http://www.elsevier.com/locate/chaos>, 2006.9.16。
- [7] Patrick De Leenheer And Hal L.Smith Verus Danamics:A Global Anasysis, Siam J.Appl.math.Vol.63.No.4.pp.1313-1327。
- [8] 余建英、何旭宏，数据统计分析与SPSS应用，北京市崇文区夕照寺街14号：人民邮电出版社，2003.4，158-161，148-157。

# 易拉罐形状和尺寸的最优设计方案

李华君 黄英辉 何婷

指导教师：罗万春

**摘要：**本文讨论的是在体积一定的情况下，满足成本最低即用料最省的易拉罐形状和尺寸的最优设计方案。

问题一，我们对十种常见饮料的易拉罐的罐体直径、圆台直径、罐体高度等八项指标进行了实际测量，得到了比较精确的数据。

问题二，将易拉罐分为各处壁厚相同、壁厚不同以及兼顾不同壁厚与焊接长度三种情形；分别建立了以易拉罐表面积、材料体积以及材料体积和焊缝长度为目标函数，容积一定为约束条件的非线性规划模型。通过理论推导(拉格朗日乘数法)求得  $h$  与  $r$  关系的解析解分别为  $\frac{h}{r} = 2$ 、 $\frac{h}{r} = \frac{a+d}{c}$ 、

$r = \frac{(1.5 + 0.5c - \omega_1 c)h - \omega_2}{\omega_1(a+d)}$ ，并用实测数据进行验证，实测数据与理论结果吻合

效果较好。

问题三，类似于问题二，我们也分上述三种情形分别建立非线性规划模型，再用拉格朗日乘数法求得解析解之后，用 Matlab 6.5 编程求得结果，并用配对样本  $t$  检验，说明实测数据与理论结果基本相符。

问题四，在问题三的基础上，我们引入黄金分割点，综合考虑压强、环保，同时兼顾材料最省，设计了一种兼顾各种优点的新型易拉罐，各项指标见正文表 6。

问题五，根据数学建模的经历阐述了数学建模的含义、关键之处和难点。

本文对易拉罐形状和尺寸的最优设计综合考虑了多方面的影响因素，并巧妙应用拉格朗日乘数法求出了最优解析解，具有较强的实用性和推广性。

**关键词：**非线性规划、拉格朗日乘数法、配对样本  $t$  检验

## 一、问题重述（略）

## 二、模型假设

1. 各种易拉罐的上面的拉环生产成本固定，不受易拉罐形状和尺寸的影响；
2. 易拉罐的容积是一定的；
3. 易拉罐所有材料的密度都相同，材料的价格与其体积成正比；
4. 易拉罐圆台部分顶盖到侧面间的坡度为  $0.3^{[1]}$ 。

## 三、符号说明

$M$ ：规划的目标函数；  
 $S$ ：易拉罐的表面积；  
 $V$ ：易拉罐的体积；  
 $r$ ：正圆柱体形易拉罐底面的半径；  
 $r_1$ ：圆台上表面的半径；  
 $r_2$ ：圆台下表面的半径；  
 $h$ ：易拉罐侧面的高度；  
 $a$ ：易拉罐上顶的厚度；  
 $b$ ：易拉罐圆台部的厚度；  
 $c$ ：易拉罐侧面的厚度；  
 $d$ ：易拉罐底面的厚度；  
 $l$ ：圆台的母线长度；  
 $Z$ ：易拉罐焊缝的长度；  
 $Y$ ：易拉罐所材料量；  
 $\omega_i$ ：为各部分的系数( $i = 1, 2, 3, \dots$ )；  
 $\delta_i$ ：为各部分的系数( $i = 1, 2, 3, \dots$ )；  
 $\eta_i$ ：为各部分的系数( $i = 1, 2, 3, \dots$ )；  
 $P_j$ ：易拉罐的各种压强( $j = 1, 2, 3, 4$ )；  
 $P$ ：易拉罐底的弧面面积；  
 $\theta$ ：易拉罐底的搭接角；  
 $m$ ：圆台的高；  
 $\varepsilon$ ：易拉罐的美观度；  
 $\beta$ ：易拉罐底面的圆弧角

## 四、模型分析

### 问题一：

可以借助物理仪器，如游标卡尺、螺旋测微仪测量易拉罐的高度、直径、顶面、底面、圆台侧面、圆柱侧面的厚度

### 问题二：

对于一个体积给定的正圆柱体，最优设计应该考虑材料最省，可以分为易拉罐各点罐壁厚度相同和各点罐壁厚度不同这两种情况。因此，最优设计可以通过建立以用料最省、焊缝最短为目标函数，以体积一定为约束条件的规划模型予以解决。

具体地可以按以下步骤求解其最优设计：

首先，考虑最简单的情况：易拉罐各点罐壁厚度相同。将表面积的大小作为目标函数，建立非线性规划模型一，求解该正圆柱体的表面积最小时所对应的尺寸（半径和高的比值）；

然后，考虑易拉罐各点罐壁厚度不同。以用料最少作为目标函数，建立模型二，通过拉格朗日乘数法求解易拉罐的最优尺寸；

再进一步考虑易拉罐焊缝增加的工作量。我们将焊缝的长短也作为目标函数之一，在模型二的基础上建立模型三，同样通过拉格朗日乘数法求解最优尺寸；

最后，为了验证模型求解的结果是否准确，我们考虑把问题一所得的数据代入进行检验，看理论值与实际值是否吻合，把它作为衡量模型求解结果好坏以及实际值是否合理的标准。

### 问题三：

易拉罐的纵断面上部是圆台，下部是正圆柱体，对于这一设计，同样按照问题二的分析方法，逐步求解易拉罐的最优尺寸，依次建立模型四、五、六，同样通过拉格朗日乘数法求解。

为验证求解结果是否正确，把实际数据代入模型进行检验。

### 问题四：

日常生活中，面对同样的饮料，消费者更青睐于美观大方、安全方便的产品。因此，在满足用料最省的前提下，我们引入黄金分割和压强，在兼顾二者的前提下建立优化模型。

具体地，我们可以从以下几个方面来考虑：

（一）增加美观度，引入黄金分割点来判断，使得易拉罐的外形达到最优。

（二）考虑压强变化所引起的底面弧度变化，一方面使得用料最省，另一方面对于不同种类饮料，作出不同类的易拉罐设计。

（三）考虑改变易拉罐的材料，例如可以使用纸质材料，使得更环保，更安全。

最终作出新型易拉罐的设计图。

### 问题五：

根据学习和实践数学建模的亲身体验，写一篇短文阐述建模的含义，以及它的关键步骤和难点。



## 五、模型建立

### 1. 问题二：正圆柱形易拉罐尺寸的最优设计模型

#### (1) 易拉罐各点罐壁厚度相同的情形

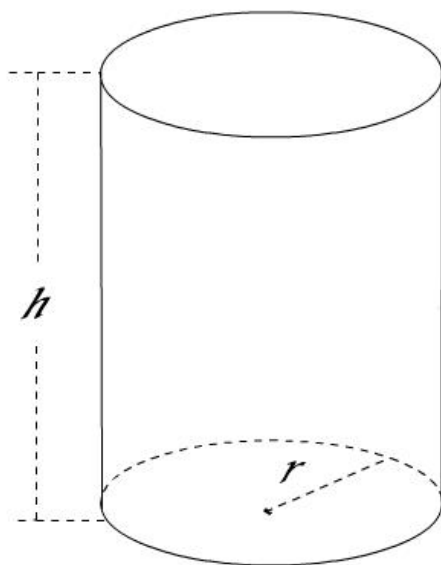


图 1 各点罐壁厚度相同的圆柱形易拉罐

由图 1 可知：

易拉罐的容积为  $V = \pi r^2 h$  .

易拉罐的表面积为  $M = S = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi(r^2 + rh)$

因此，建立以表面积最小为目标函数，以体积一定作为约束条件的非线性规划模型，即

模型一：

$$\begin{aligned} \min S &= 2\pi(r^2 + rh) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} V = \pi r^2 h \\ r, h > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

#### (2) 易拉罐有不同罐壁厚度的情形

易拉罐上、下底面，侧面的厚度不同，导致用料量也不相同。根据材料的用量与其体积成正比，那么在容积一定时，所用材料的体积最小时的尺寸即易拉罐的最优尺寸。

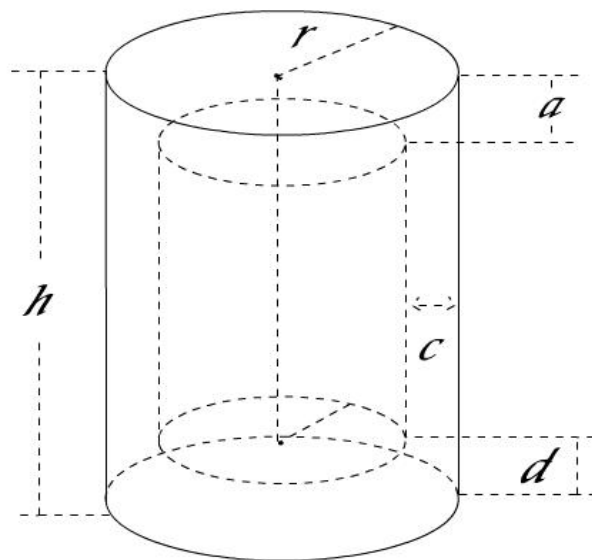


图2 有不同罐壁厚度的圆柱形易拉罐

如图2所示，做一个易拉罐所需要的材料为：

$$Y = \pi r^2 h - \pi(r-c)^2(h-a-d)$$

应使 $Y$ 取得最小值。

由此可得，

**模型二：**

$$\min M = Y = \pi r^2 h - \pi(r-c)^2(h-a-d)$$

$$s.t. \begin{cases} V = \pi(r-c)^2(h-a-d) \\ a, c, d > 0 \end{cases}$$

(3) 易拉罐有不同罐壁厚度并考虑焊缝长度<sup>[4]</sup>的情形

在模型二的基础上，考虑工作量（焊缝长度）的不同工作量有影响，因此，综合考虑这两方面因素，使得易拉罐的材料用量最省的同时，焊缝长度也尽量取到最小。

根据模型分析，可得

焊缝长度：

$$Z = 2\pi r$$

将焊缝的长度为 $Z$ 时的工作量转化为同等的材料体积，从而可以将二者直接相加。

由此可以得到

**模型三：**

$$\min M = \omega_1 Y + \omega_2 Z = \omega_1 (\pi r^2 h - \pi(r-c)^2(h-a-d)) + \omega_2 2\pi r$$

$$s.t. \begin{cases} V = \pi(r-c)^2(h-a-d) \\ \omega_1, \omega_2 > 0 \end{cases}$$

此模型即为求解问题二的完善模型。

## 2. 问题三：圆柱体加圆台形易拉罐尺寸的最优设计模型

(1) 易拉罐各点罐壁厚度相同的情形

此时，以易拉罐表面积的大小来衡量尺寸的优劣。

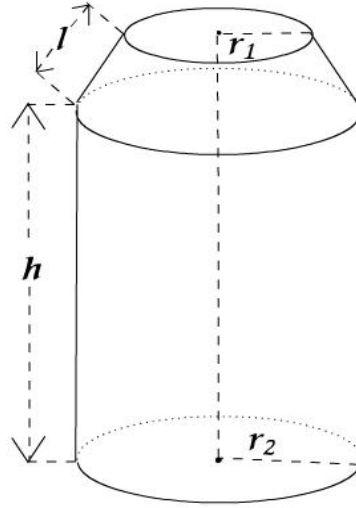


图 3 各点罐壁厚度相同的含圆台易拉罐

由图 3，得

圆台的上面、侧面的面积为  $S_1 = \pi(r_1(l + r_1) + r_2l) = \pi r_1^2 + \pi l(r_1 + r_2)$

圆柱侧面的面积为  $S_2 = 2\pi r_2 h$

圆柱底面的面积为  $S_3 = \pi r_2^2$

此时易拉罐的表面积为：

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \pi r_1^2 + \pi l(r_1 + r_2) + 2\pi r_2 h + \pi r_2^2$$

由于圆台的斜率为一定值  $0.3^{[1]}$ ，因此

$$m = 0.2873l$$

得到

模型四：

$$\begin{aligned} \min M = S &= \pi r_1^2 + \pi l(r_1 + r_2) + 2\pi r_2 h + \pi r_2^2 \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} V = \pi r_2^2 h + \frac{\pi}{3} m(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \\ m = 0.2873l \\ r_1, r_2, l, h > 0 \\ r_2 > r_1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(2) 易拉罐有不同罐壁厚度的情形

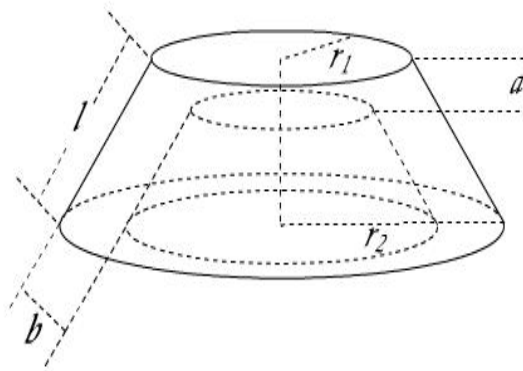


图 4 有不同罐壁厚度易拉罐的圆台

如图 4 所示，易拉罐所需材料量为：

$$Y = \pi r_2^2 h + \frac{\pi}{3} m(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) - \pi(r_2 - c)^2(h - d) - \frac{\pi}{3}(m - a)((r_1 - b)^2 + (r_2 - c)^2 + (r_1 - b)(r_2 - c))$$

由此可得

**模型五：**

$$\begin{aligned} \min M = Y &= \pi r_2^2 h + \frac{\pi}{3} m(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) - \pi(r_2 - c)^2(h - d) \\ &\quad - \frac{\pi}{3}(m - a)((r_1 - b)^2 + (r_2 - c)^2 + (r_1 - b)(r_2 - c)) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} V = \pi(r_2 - c)^2(h - d) + \frac{\pi}{3}(m - a)((r_1 - b)^2 + (r_2 - c)^2 + (r_1 - b)(r_2 - c)) \\ m = 0.2873l \\ r_1, r_2, l, h > 0 \\ r_2 > r_1 \\ a, b, c, d > 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(3) 易拉罐有不同罐壁厚度并考虑焊缝长度的情形

综合考虑两方面因素，使得易拉罐用料最少时，焊缝长度也尽量取到最小。

焊缝长度:

$$Z = 2\pi r_1$$

由此可得

模型六:

$$\begin{aligned} \min M = \delta_1 Y + \delta_2 Z = \delta_1 & \left( \pi r_2^2 h + \frac{\pi}{3} m (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) - \pi (r_2 - c)^2 (h - d) \right) \\ & + \delta_1 \left( -\frac{\pi}{3} (m - a) ((r_1 - b)^2 + (r_2 - c)^2 + (r_1 - b)(r_2 - c)) \right) + \delta_2 2\pi r_1 \\ s.t. & \begin{cases} V = \pi (r_2 - c)^2 (h - d) + \frac{\pi}{3} (m - a) ((r_1 - b)^2 + (r_2 - c)^2 + (r_1 - b)(r_2 - c)) \\ m = 0.2873l \\ r_1, r_2, l, h > 0 \\ r_2 > r_1 \\ \delta_1, \delta_2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

模型六为求解问题三的完善模型。

### 3. 问题四：自己设计的易拉罐最优形状和尺寸模型

(1) 考虑美观度的情形

在模型六的基础上引入美观度来描述易拉罐的外形是否美观, 考虑易拉罐的直径和高度之比趋向于黄金分割点, 即:  $\varepsilon = \left| \frac{d}{h} - 0.618 \right|$ ,  $\varepsilon$  取得最小值时即为最优解。

由此可得

模型七:

$$\begin{aligned} \min M = \eta_1 Y + \eta_2 Z + \eta_3 \varepsilon = \eta_1 & \left( \pi r_2^2 h + \frac{\pi}{3} m (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) - \pi (r_2 - c)^2 (h - d) \right) \\ & + \eta_1 \left( -\frac{\pi}{3} (m - a) ((r_1 - b)^2 + (r_2 - c)^2 + (r_1 - b)(r_2 - c)) \right) + \eta_2 2\pi r_1 \\ & + \eta_3 \left| \frac{d}{h} - 0.618 \right| \end{aligned}$$

$$s.t. \begin{cases} V = \pi(r_2 - c)^2(h - d) + \frac{\pi}{3}(m - a)((r_1 - b)^2 + (r_2 - c)^2 + (r_1 - b)(r_2 - c)) \\ m = 0.2873l \\ r_1, r_2, l, h > 0 \\ r_2 > r_1 \\ \eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0 \end{cases}$$

## (2) 考虑压强引起的底面弧度变化的情形

目前市售的易拉罐不是正圆柱体,也不仅仅将顶部变为圆台,而是上拱的底面,顶盖实际上也不是平面的,略有上拱,这些要求也许保证了和饮料罐的薄的部分的焊接(粘合)很牢固、耐压.所有这些是物理、力学、工程或材料方面的要求,我们只做简单讨论。

对于上拱的底面,是为了耐压,从物理角度分析曲面下的压强,若液体表面为曲面,则表面张力有拉平液面的趋势,从而对液体产生附加压强。附加压强的方向由表面张力的方向确定,大小可以用液面内外的压强差来表示<sup>[3]</sup>。

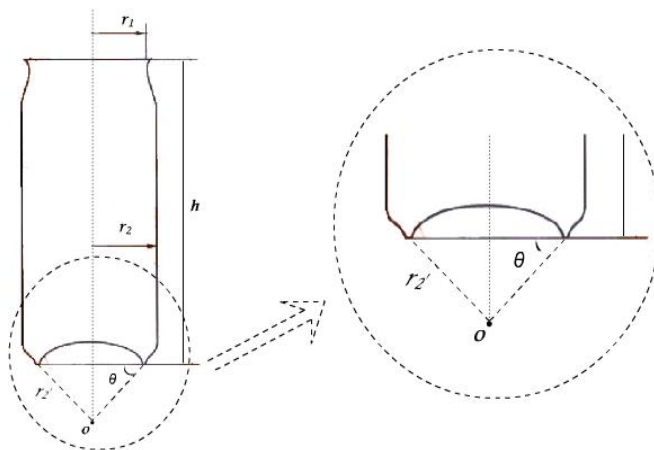


图 5 易拉罐的底面示意图

对于下表面而言,受到的压力包括三部分:第一部分是通过小液块的边线,作用在液块上的向上的表面张力;第二部分力是液体内外气体产生产生的作用于液块底面向下的压力;第三部分是液体本身向下的重力。

①设球形液面半径为  $r_3$ , 单位长度液体表面的张力为  $T$  (大小即为液体的表面张力系数  $\alpha$ ), 则小液块边线所具有的总张力向下分量为:

$$2\pi r_3 \sin \theta \times T \sin \theta = \alpha \times 2\pi r_3 \sin^2 \theta$$

用  $\Delta P$  表示液体内外压强差, 则小液块所受的向上的张力为:

$$\Delta P \times \pi r_3 \sin^2 \theta$$

这两部分力方向相反, 在平衡时大小相等, 所以

$$\alpha \times 2\pi r_3 \sin^2 \theta = \Delta P \times \pi r_3 \sin^2 \theta$$

$$\Delta P = \frac{2\alpha}{r_3} = \frac{2\alpha \cdot \cos \theta}{r_2}$$

②液体重力作用产生的压强  $P_2 = \rho gh$ ;

③易拉罐内部气体压强为一定值  $P_3$ 。

因此，易拉罐下表面所受到的压强为

$$P_4 = P_1 + P_2 + P_3 = \rho gh - \frac{2\alpha \cdot \cos \theta}{r_2} + P_3$$

与此同时，底部的上拱必然会引起所用材料的增多

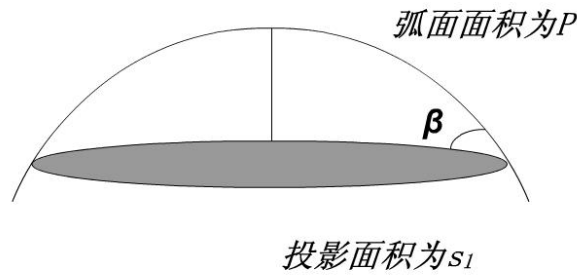


图 6 易拉罐的底面积示意图

易拉罐的底面积为:  $P = \frac{\pi r_2^2}{\cos \beta}$

此时所用材料量为:

$$\begin{aligned} Y = & \pi r_2^2 h + \frac{\pi}{3} m (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) - \pi (r_2 - c)^2 (h - d) \\ & - \frac{\pi}{3} (m - a) ((r_1 - b)^2 + (r_2 - c)^2 + (r_1 - b)(r_2 - c)) \\ & - \pi r_2^2 b + \frac{\pi r_2^2}{\cos \beta} b \end{aligned}$$

可得  
模型八:

$$\begin{aligned} \min M = & \eta_4 Y + \eta_5 Z + \eta_6 \varepsilon + \eta_7 P_4 \\ = & \eta_4 \left( \pi r_2^2 h + \frac{\pi}{3} m (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) - \pi (r_2 - c)^2 (h - d) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_4 \left( -\frac{\pi}{3} (m-a) \left( (r_1-b)^2 + (r_2-c)^2 + (r_1-b)(r_2-c) \right) \right) \\
& + \eta_4 \left( -b\pi_2^2 + \frac{\pi_2^2 b}{\cos \beta} \right) + \eta_5 2\pi_2 \\
& + \eta_6 \left| \frac{d}{h} - 0.618 \right| + \eta_7 \left( \rho gh - \frac{2\alpha \cdot \cos \theta}{r_2} + P_3 \right) \\
s.t. \quad & \left\{ \begin{aligned}
V &= \pi(r_2-c)^2(h-d) + \frac{\pi}{3}(m-a)\left((r_1-b)^2 + (r_2-c)^2 + (r_1-b)(r_2-c)\right) \\
m &= 0.2873l \\
r_1, r_2, l, h &> 0 \\
r_2 &> r_1 \\
\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7 &> 0 \\
\theta &< \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

## 六、模型求解

### 1. 问题一的求解

测量各种类易拉罐的高度、直径、顶面、圆台侧面、圆柱侧面、底面的厚度的数据

表 1 10 种 355ml 易拉罐饮料的相关测量数据

数 值 种 类	项 目	罐体 直径 (cm)	圆台口 直径 (cm)	罐体 高度 (cm)	整罐 高度 (cm)	顶盖 厚度 (cm)	侧面 厚度 (cm)	圆台 厚度 (cm)	罐底 厚度 (cm)
可口可乐		6.616	4.552	10.116	12.164	0.0471	0.0109	0.0318	6.616
雪碧		6.62	4.562	10.088	12.192	0.0448	0.011	0.0332	6.62
天府百柠		6.66	4.574	10.102	12.182	0.0462	0.0113	0.0322	6.66
百事可乐		6.618	4.554	10.114	12.174	0.0466	0.0108	0.0326	6.618
七喜劲柠		6.614	4.548	10.112	12.172	0.0462	0.0102	0.0316	6.614
美年达		6.616	4.536	10.116	12.162	0.047	0.0108	0.032	6.616
醒目		6.646	4.55	10.114	12.166	0.0473	0.0107	0.0318	6.646
轻怡		6.628	4.552	10.118	12.166	0.0468	0.0104	0.032	6.628
菠萝啤酒		6.62	4.548	10.108	12.158	0.0482	0.0113	0.0322	6.62
雪花啤酒		6.614	4.55	10.11	12.166	0.0475	0.0107	0.0324	6.614



表2 GB / T 9106—2001中规定的罐体主要尺寸(单位：毫米)<sup>[5]</sup>

名称	符号	公称尺寸					极限偏差
		250mL	275mL	300mL	335mL	500mL	
罐体高度	H	90.93	98.95	115.2	122.22	167.84	±0.38
罐体外径	D <sub>1</sub>	66.04					
缩颈内径	D <sub>2</sub>	57.40					±0.25
翻边宽度	B	2.22					±0.25

## 2. 问题二的求解

### (1) 易拉罐各点罐壁厚度相同的情形

根据模型一可知：函数  $S$  取最小值时，必定有  $S' = 0$ ，

$$\text{即} \quad 2\pi \left( 2r - \frac{V}{\pi r^2} \right) = \frac{2\pi}{r^2} \left( 2r^3 - \frac{V}{\pi} \right) = 0, \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

然后利用 *Matlab6.5* 编程，可得

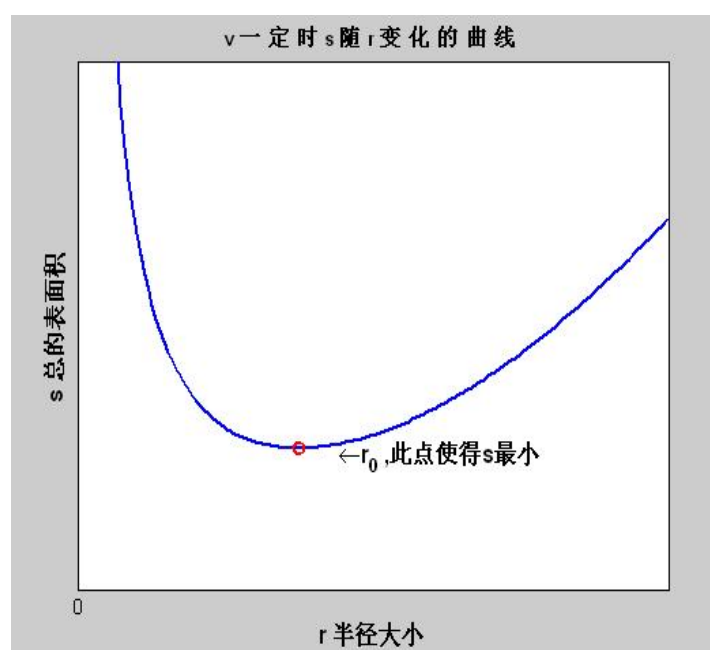


图 7 体积一定时  $S$  随  $r$  变化的曲线

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 V^3}{\pi^2 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = 2r$$

即易拉罐的高度为半径的二倍（等边圆柱形）时，所需材料最少。

### (2) 易拉罐有不同罐壁厚度的情形

根据模型二，用拉格朗日乘数法求解。

首先生成新的函数，

$$F = \pi r^2 h - \pi(r-c)^2(h-a-d) - \lambda(\pi(r-c)^2(h-a-d) - V)$$

然后分别对  $r$  ,  $\lambda$  ,  $h$  求偏导, 并令其为 0,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = 2\pi r h - 2\pi(r-c)(h-a-d) - \lambda 2\pi(r-c)(h-a-d) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial h} = 2\pi r^2 - 2\pi(r-c)^2 - \lambda 2\pi(r-c)^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \pi(r-c)^2(h-a-d) - V = 0 \end{cases}$$

解得:

$$\frac{h}{r} = \frac{a+d}{c}$$

即圆柱体的高与半径之比为 6 时为最优尺寸。

由 (1)、(2) 可知,

$$2 \leq \frac{h}{r} \leq 6$$

根据问题一中测得的实际数据可以得到:

表 3 检验数据表

	罐体 高度 (cm)	罐体 直径 (cm)	$\frac{h}{2r}$
雪碧	10.116	6.616	1.529
可口可乐	10.088	6.62	1.524
天府百柠	10.102	6.66	1.517
百事可乐	10.114	6.618	1.528
七喜劲柠	10.112	6.614	1.529
美年达	10.116	6.616	1.529
醒目	10.114	6.646	1.522
轻怡	10.118	6.628	1.527
菠萝啤酒	10.108	6.62	1.527
雪花啤酒	10.11	6.614	1.529

由表 3 可知: 所有  $h:2r$  均在此范围内, 在 1 与 3 之间必有一个最优值符合实际条件, 从结果可以大致得出此最优值应该在 1.5 附近。

因此, 实际值是合理的, 而  $\frac{h}{r}$  的比例关系式也符合实际情况。

(3) 易拉罐有不同罐壁厚度并考虑焊缝长度的情形

对模型三用拉格朗日乘数法按照（2）的求解步骤求解。

解得：

$$(\omega_4(a+d))r = (1.5 + 0.5c - \omega_1 c)h - \omega_2$$

即，

$$r = \frac{(1.5 + 0.5c - \omega_1 c)h - \omega_2}{\omega_1(a+d)}$$

此时的  $r$ ， $h$  关系即为最优设计尺寸。

### 3. 问题三的求解

(1) 易拉罐各点罐壁厚度相同的情形

根据模型四，通过 *matlab6.5* 编程求解，得到要使得表面积最小，只有  $l = 0$ ，

$$\text{即 } r_1 = r_2$$

即圆柱体没有顶部的圆台，这显然与已知不符，因此，我们考虑用易拉罐所用材料最少为目标函数来求解。

(2) 易拉罐有不同罐壁厚度的情形

根据模型五，用拉格朗日乘数法求解步骤求解，首先求偏导数，然后令偏导数为 0 解最小值

得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial r_1} = \frac{\pi}{3} m(2r_2 + r_1) - 2\pi(r_2 - c) + 2(r_2 - c) + (r_1 - b) - 2\pi\lambda r_2 h + \lambda \frac{\pi}{3} m(2r_1 + r_2) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial r_2} = b\pi l + 2ch + 2d\pi r_2 - \lambda \left( 2\pi r_2 h + \frac{\pi}{3} m\pi l(2r_2 + r_1) \right) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial l} = b\pi(r_1 + r_2) - \frac{\pi}{3} m\lambda\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial h} = 2c\pi r_2 - \lambda\pi r_2^2 = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \lambda} = -\pi r_2^2 h - \frac{\pi}{3} m\pi l(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = 0 \end{cases}$$

解之可得：

$$\frac{2a\pi r_1 + b\pi l}{\frac{\pi}{3} m\pi l(2r_1 + r_2)} = \frac{b\pi l + 2ch + 2d\pi r_2}{2\pi r_2 h + \frac{\pi}{3} m\pi l(2r_2 + r_1)} = \frac{b\pi(r_1 + r_2)}{\frac{\pi}{3} m\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)} = \frac{2c}{r_2}$$

化简可得：

$$\frac{2a\pi_1 + b\pi l}{\frac{\pi}{3}m\pi l(2r_1 + r_2)} = \frac{b\pi(r_1 + r_2)}{\frac{\pi}{3}m\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)}$$

从而可求得  $r_1$ ， $r_2$ ， $l$ ， $h$  四者之间的关系：

$$\frac{2ar_1 + bl}{l(2r_1 + r_2)} = \frac{b(r_1 + r_2)}{(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)}$$

$$\text{令 } \lambda_1 = \frac{2ar_1 + bl}{l(2r_1 + r_2)}, \quad \lambda_2 = \frac{b(r_1 + r_2)}{(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)}$$

代入表 1 的数值，结果见表 4

表 4  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  数据表

	$r_1$ (cm)	$r_2$ (cm)	$\lambda_1$	$\lambda_2$
雪碧	2.276	3.308	0.0407	0.0413
可口可乐	2.281	3.31	0.0408	0.0403
天府百柠	2.287	3.33	0.0409	0.0414
百事可乐	2.277	3.309	0.0408	0.0412
七喜劲柠	2.274	3.307	0.0407	0.0419
美年达	2.268	3.308	0.0406	0.0411
醒目	2.275	3.307	0.0407	0.0414
轻怡	2.276	3.314	0.0407	0.0409
菠萝啤酒	2.274	3.31	0.0407	0.041
雪花啤酒	2.275	3.323	0.0407	0.0403

对表 4 中  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  进行配对样本  $t$  检验<sup>[2]</sup>，结果如下：

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	X	.040730	10	.0000823	.0000260
	Y	.041080	10	.0004940	.0001562

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	X & Y	10	-.011	.976

Paired Samples Test

		Paired Differences				t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower Upper			
Pair 1	X - Y	-.00035	.0005017	.0001586	-.00071 .000009	-2.206	9	.055

由结果可知， $p = 0.055 > 0.05$ ，结果的差异性不显著，说明理论值与实际值相吻合。

因此，

$$\frac{2ar_1 + bl}{l(2r_1 + r_2)} = \frac{b(r_1 + r_2)}{(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)}$$

即  $r_1$ ， $r_2$ ， $l$  四者之间的关系满足上述表达式时，易拉罐的尺寸最优。

(2) 易拉罐有不同罐壁厚度并考虑焊缝长度的情形  
对模型六同样用拉格朗日乘数法得：

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial r_1} = \delta_1 \frac{\pi}{3} m(2r_2 + r_1) - 2\delta_1 \pi(r_2 - c) + 2\delta_1(r_2 - c) + \delta_1(r_1 - b) - 2\pi\lambda r_2 h + \lambda \frac{\pi}{3} m(2r_1 + r_2) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial r_2} = \delta_1(b\pi l + 2c\pi h) - \lambda \left( 2\pi r_2 h + \frac{\pi}{3} l(2r_2 + r_1) \right) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial l} = \delta_1 b\pi(r_1 + r_2) - \lambda \left( \frac{\pi}{3} r_1^2 + \frac{\pi}{3} r_2^2 + \frac{\pi}{3} r_1 r_2 \right) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial h} = \delta_1 \pi r_2^2 - \delta_1 \pi(r_2 - c)^2 - \lambda \pi r_2^2 = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \lambda} = -\pi r_2^2 h - \frac{\pi}{3} m(r_2^2 + r_1^2 + r_2 r_1) = 0 \end{cases}$$

此时解得：

$$\frac{\delta_4(2a\pi r_1 + b\pi l + 2d\pi r_1) + 2\delta_5\pi}{\frac{\pi}{3}l(2r + r_2)} = \frac{\delta_4(b\pi l + 2c\pi h)}{2\pi r_2 h + \frac{\pi}{3}l(2r_2 + r_1)} = \frac{\delta_4 b\pi(r_1 + r_2)}{\left(\frac{\pi}{3}r_1^2 + \frac{\pi}{3}r_2^2 + \frac{\pi}{3}r_1 r_2\right)} = \frac{2\delta_4 c}{r_2}$$

其余处理方法与（2）相同，同样可得关系表达式是易拉罐的尺寸最优的表达式：

$$\frac{\delta_4(2a\pi r_1 + b\pi l + 2d\pi r_1) + 2\delta_5\pi}{\frac{\pi}{3}l(2r + r_2)} = \frac{\delta_4 b\pi(r_1 + r_2)}{\left(\frac{\pi}{3}r_1^2 + \frac{\pi}{3}r_2^2 + \frac{\pi}{3}r_1 r_2\right)}$$

化简可得：

$$\frac{\delta_1(2ar_1 + bl + 2dr_1) + 2\delta_2}{l(2r + r_2)} = \frac{\delta_1 b(r_1 + r_2)}{(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)}$$

因此，当  $r_1$ ， $r_2$ ， $l$  之间的关系满足上述表达式时，易拉罐的尺寸最优。

#### 4. 问题四的求解

（1）考虑美观度的情形

对模型七用拉格朗日乘数法得：

$$\eta_1 b \pi^2 (r_1 + r_2) r_2^2 h^2 = (2\eta_1 c \pi r_2 h^2 - 2\eta_3 r_2)(V - \pi r_2^2 h)$$

即得到  $r_1$ ， $r_2$ ， $h$  的关系式，此时着重考虑  $2r_2 : h$  接近于 0.618，使易拉罐具有最大的美感，可以求出易拉罐的最优尺寸。

（2）考虑压强引起的底面弧度变化的情形

模型八用拉格朗日乘数法理论上可算出给定压强下的  $r_1$ ， $r_2$ ， $h$ ， $l$ ， $\theta$  之间的关系式。

根据模型解出新的搭接角度  $\theta$  为  $45^\circ$ ，而市售的罐底的搭接角度  $\theta$  为  $77^\circ \sim 90^\circ$ 。

事实上，比较小的搭接角度能将来自罐内碳酸饮料的气压分流掉大部分。对软饮料来说，罐内最大气压可达 90 磅/平方英寸，分流的气压，由罐底边缘承担，罐底边缘是整个罐强度最大的部位，由 5 层金属粘结而成。由于搭接角度小，所以生产超级底的圆合金片下料面积比原来减少 7%。另外，由于这种结构强度高，因此底的厚度可以从 0.0085 英寸减薄到 0.0082 英寸，这又可以节省约 3% 的用料。

（3）考虑环保的情形

表 5 铝易拉罐和纸易拉罐比较表

	铝易拉罐	纸易拉罐
投资生产线资金	1700 万	200 万
最小生产批量	2000 万	2 万
原材料	需进口	稻, 麦草纸浆

能耗	高能耗, 国家已禁止发展	工艺简单, 低能耗, 环保
成本	约 1 元/只	约 0.3~0.4 元/只
外观	外观精美	外观同样精美

由表 5 可知, 纸易拉罐由纸浆高压压铸成形, 造型美观同铝易拉罐, 不污染环境, 是国际推广的最优绿色包装, 它使用安全卫生, 生产工艺简单, 投资少, 尤其是成本低的特点最突出, 这样我们可以考虑使用纸作为易拉罐的材料推广使用。

最终, 我们得到新型易拉罐的设计图如下:

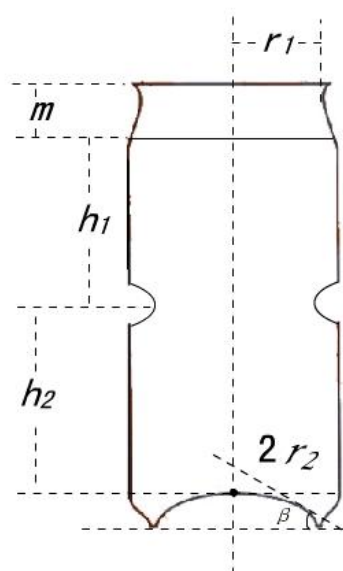


图 8 新型易拉罐剖面示意图

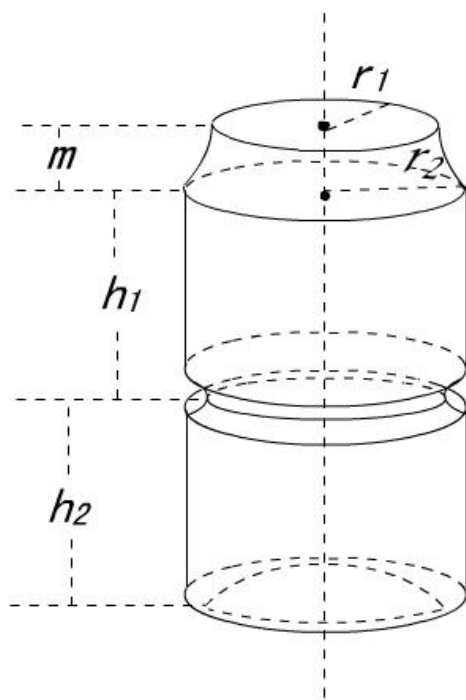


图 9 新型易拉罐的立体图

①既考虑美观又兼顾消费者的满意度，我们设计中部凹陷，可防滑，令

$$h_1 : h_2 = 0.618, \quad r_1 : r_2 = 0.618$$

②考虑节约材料，则

$$0.618 \leq \frac{2r_2}{h_1 + h_2} \leq 1$$

利用模型八，求出不同体积下易拉罐的最优尺寸，具体数值如下表：

表 6 各种体积下的最优尺寸

数 值 种 类	项 目	$r_1$ (cm)	$r_2$ (cm)	$h_1$ (cm)	$h_2$ (cm)	$m$ (cm)	$\beta$
180ml		1.755	2.84	2.68	4.34	0.3255	45°
250ml		1.96	3.17	2.99	4.845	0.363	45°
275ml		2.022	3.2725	3.09	5	0.3752	45°
300ml		2.08	3.37	3.18	5.15	0.387	45°
335ml		2.16	3.5	3.3	5.34	0.402	45°
345ml		2.18	3.53	3.34	5.4	0.405	45°
355ml		2.2	3.57	3.37	5.45	0.4	45°
500ml		2.47	4	3.78	6.11	0.459	45°

以上数据可作为实际设计的参考。

## 5. 问题五



## 数学建模 魅力无限

在科学领域中,数学凭借其难以抗拒的魅力成为研究者交流中使用最广泛的语言。我国著名数学家华罗庚曾说过:宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁,无处不用数学。当今世界,电子研究成果在实际生产中的不断普及,数学建模作为一条将数学与实际联系起来的纽带也随之应运而生。

流年似水,经过一年的学习我们认识到:数学模型,就是用数学语言模拟现实,即把事物所在的系统的主要特征、主要关系,用数学语言概括地、近似地表达成一种数学框架,它是对客观事物的空间形式和数量关系的反映或近似反映。而所谓的数学建模就是构造数学模型的过程,即用数学语言—公式、符号、图表等刻画和描述实际问题,再经过一系列的数学处理得到定量或定性的结果,以供人们作分析、预报、决策和控制。

实际生活中问题往往涉及众多因素,其中的数学奥妙不是摆在那里等着去解决,而是蕴涵于暗处等着去分析。因此,首先应结合实际作出合理化的假设,简化、提炼问题,然后用数学工具、方法建立数学模型,这是解决问题的关键,也是难点,而在数学模型的基础上,通常还要处理大量的数据才能解决模型问题,如何处理数据也是问题求解的难点。此时,计算机编程起到了重要作用,为解决实际问题开辟了广阔的道路。

然而,求解出模型并非就万事大吉了,因为数学模型只能近似地刻画和描述实际问题,所以模型是否贴近实际这就需要接受检验。否则,数学模型的建立与解答即使再正确也只能是空中楼阁而毫无实际意义。

恰似本文问题二的求解,在不同优化标准下的设计方案是丰富多彩的。亲身实践启示我们,只要多观察身边的事物,奇思妙想,就会发现各行各业和数学都保持着千丝万缕的联系。数学建模的精神一直在流淌,并且源远流长,渊远不息,滋润着一代又一代学子。数学并不是和枯燥无味的文字符号打交道的抽象演绎体系,相反,它凭借着应用的广泛性以及思维的挑战性而蕴藏着无限的魅力,等待着我們用自己的智慧去发现、去挖掘、去创造。

## 七、模型评价与推广

### 1. 模型的评价

本文我们逐步分析了表面积大小、用料多少、焊缝长短、是否美观等因素,综合考虑建立模型,因而模型具有较强的实用性。

在模型求解上,利用拉格朗日乘数法,用 *matlab6.5* 编程巧妙地求出函数的最优解,并利用已测量的数据对模型结果进行配对样本 *t* 检验,从而验证了实际值的合理性和模型的准确性。

在此基础上,我们又分析了底面对液体产生的附加压强以及易拉罐材料的种类,进一步对模型进行优化,并给出了不同体积易拉罐的最优设计尺寸,可供易拉罐生产商参考。

不足之处在于考虑的因素太多,使得求解模型时的计算复杂,耗费时间。

### 2. 模型的推广

本文所设计的易拉罐也可以应用于其它罐装食物,还可以推广到其他类似行业,例如:酒业中酒瓶的设计、日用品盛装容器的设计、食品包装的设计等等。

## 参考文献

- [1] 可口可乐罐头为什么是这种样子  
<http://www.mathsfj.com/jianmo/jianmocketi/200605/2180.html>
- [2] 李志辉 罗平, 配对样本 $t$ 检验, SPSS for windows 统计分析教程 (第2版), 2001年10月
- [3] 胡新珉, 液体的表面现象, 医学物理学第六版, 2004年
- [4] 周文国, 易拉罐的设计方案, 中学数学教学, 2002年第1期
- [5] 中国国家行业标准 GB/T9106-2001, 包装容器 铝易开盖两片罐

# 煤矿爆炸数学模型分析

桂霄 霍雨佳 吴黎雳

指导教师：雷玉洁

**[摘要]** 本文解决了煤矿瓦斯和煤尘浓度对煤矿安全的影响问题。根据题目所给的煤矿瓦斯和煤尘浓度及《煤矿安全规程》得出了一套判断煤矿类型（低瓦斯矿井或高瓦斯矿井）的判别方法。从几个角度分析了该煤矿在目前状况下发生爆炸事故的可能性以及不安全程度。最后得到为防止事故发生，调节各采煤工作面风量，并且使总通风量最优的方案。结果如下：

（1）用 Matlab7.1 对题目所给出的数据进行处理，求出总回风巷中绝对和相对瓦斯涌出量；又利用两个工作面不同时刻的瓦斯浓度的比例估计出两个工作面的日产煤量，由此分别求出两个工作面的绝对和相对瓦斯涌出量。将所求出的瓦斯涌出量与《煤矿安全规程》中第一百三十三条标准进行对照，可判断题目中给出的煤矿为 **高瓦斯煤矿**。

（2）建立矿井的爆炸可能性模型，利用 Matlab7.1 求解。对得到的结果进行分析讨论，并对模型进行改进。从不同的方面和情况考虑，先将整个矿井整体考虑然后再将 6 个监测点分开分析。建立由瓦斯与煤尘影响不安全度的模型，分别得出瓦斯和煤尘引起的不安全程度。最后又综合考虑分析，确定该煤矿发生爆炸的可能性  $\mu = 1.88\%$ ， $(\sigma = 1.24\%)$ 。

（3）分别考虑矿井中漏风、不漏风和各工作面的风速对瓦斯和煤尘的影响三种情况，建立非线性规划模型。综合运用 Matlab7.1、SPSS12.0 和 Lingo8.0 进行求解。得出不同情况下煤矿中不同位置的风量调节方法：

风量调节表

	不考虑漏风的情况下 风量(m <sup>3</sup> /min)	考虑漏风的情况下风量 (m <sup>3</sup> /min)	考虑各工作面的风速对瓦斯和煤尘的 影响不同下风量(m <sup>3</sup> /min)
进风口	1152.00	1197.00	720.35
工作面 I	355.20	355.20	227.83
工作面 II	355.20	355.20	264.16
局部通风机	400.00	400.00	150.00

**[关键词]** 绝对涌出量，相对涌出量，非线性规划，不安全程度

## 一、问题重述（略）

## 二、名词解释

- 1、低瓦斯矿井：矿井相对瓦斯涌出量小于或等于  $10\text{m}^3/\text{t}$  且矿井绝对瓦斯涌出量小于或等于  $40\text{m}^3/\text{min}$ [1];
- 2、高瓦斯矿井：矿井相对瓦斯涌出量大于  $10\text{m}^3/\text{t}$  或矿井绝对瓦斯涌出量大于  $40\text{m}^3/\text{min}$ [1];
- 3、瓦斯涌出量：在矿井建设和生产过程中从煤与岩石内涌出的瓦斯量[2];
- 4、绝对瓦斯涌出量：单位时间涌出的瓦斯体积，单位为  $\text{m}^3/\text{min}$ [2];
- 5、相对瓦斯涌出量：平均日产一吨煤的同时所涌出的瓦斯体积，单位是  $\text{m}^3/\text{t}$ [2]。

## 三、基本假设

- (1) 各个工作面的早、中、晚三班产量均衡;
- (2) 各个巷道的横截面积相等;
- (3) 风速在管道中均匀变化;
- (4) 在不同瓦斯浓度下的煤尘爆炸下限浓度是均匀分布的。

## 四、符号说明

$v_{ij}$ : 风速;

$v'$ : 改变后的风速;

$S$ : 横截面积;

$S_1$ : 主管道断面面积;

$S_2$ : 进风管断面面积;

$d$ : 风筒直径;

$Q_{ij}$ : 进风量;

$G_{ij}$ : 绝对涌出量;

$g_{ij}$ : 相对涌出量;

$c_{ij}$ : 瓦斯浓度;

$A_j$ : 矿井的日产量;

$\mu_{ij}$ : 发生事故的可能性;

$H_{ij}$ : 不安全程度;

$p$ : 风量的改变系数;

$R_{ij}$ : 煤尘的质量;

$r_{ij}$ : 煤尘的浓度;

$L_{ij}$ : 煤尘的爆炸下限;

$l_{ij}$ : 煤尘的浓度;

$g(v_{ij})$ : 风速对应瓦斯浓度的函数;

$f(v_{ij})$ : 风速对应煤尘浓度的函数。

## 五、问题分析

对于问题一,应根据题中已知,计算出总回风巷、两个采煤工作面的相对瓦斯涌出量与绝对涌出量,判断该煤矿是低瓦斯矿井还是高瓦斯矿井。

对于问题二,考虑不安全因素主要与瓦斯浓度与煤尘浓度两个因素有关,将其分为两个部分:由瓦斯浓度造成的不安全度与由煤尘浓度引起的不安全度。前者根据《煤矿安全规程》第一百六十八条规定的规定,划分为报警浓度以下、报警浓度与断电浓度之间和断电浓度以上3个部分讨论,对其进行评定;后者根据该瓦斯浓度下的煤尘爆炸最低极限,通过构建的不安全度模型进行评定。最后对二者进行综合评定即可得到结果。

对于第三问,将总的通风量分配给两个采煤工作面和一个掘进工作面,通过两个风量调节风门和一个局部通风机对各个工作面的供给风量进行分配,保证各个工作面的瓦斯浓度与煤尘浓度不会引发安全事故,求出最佳的总通风量。再考虑有漏风的情况下,风量在通道中发生改变,求出此时的最佳总通风量。

## 六、模型的建立与求解

### 一、问题一

#### 1、计算总回风巷的相对和绝对瓦斯涌出量

根据单位时间的通风量等于管道的横截面积与通风速度的乘积,可以表示出通风量  $Q = S \cdot v$ , 每分钟的通风量为  $Q = S \cdot v \cdot 60$ 。对应题目中给出的数据,可得到第  $i$  个监测点在第  $j$  天第  $k$  个时段的通风量为:

$$Q_{ijk} = S \cdot v_{ijk} \cdot 60 \quad (1)$$

根据公式  $G = Q \cdot c$  [2], 即, 绝对涌出量等于通风量与瓦斯浓度的乘积, 可以得到第  $i$  个监测点在第  $j$  天第  $k$  个时段的绝对瓦斯涌出量为:

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^3 Q_{ijk} \cdot c_{ijk} \quad (2)$$

再根据公式  $g = \frac{G}{A} \cdot 60 \cdot 24$  [2], 即, 相对涌出量等于绝对涌出量除以日产煤量, 就可以得到第  $i$  个监测点在第  $j$  天的相对瓦斯涌出量为:

$$g_{ij} = \frac{G_{ij}}{A_j} \cdot 60 \cdot 24 \quad (3)$$

利用以上建立的模型, 可以应用 Matlab7.1 软件得到 30 天在各处的绝对瓦斯涌出量 ( $\text{m}^3/\text{min}$ ) 和在总回风巷处的相对瓦斯涌出量 ( $\text{m}^3/\text{t}$ ) 为:

表 1 各工作面瓦斯涌出量

	工作面 I	工作面 II	掘进工作面	回风巷 I	回风巷 II	总回风巷	
						绝对	相对
1	3.8208	4.343	1.4926	3.7209	4.6536	8.0155	19.3338
2	3.6061	4.4759	1.2856	3.5817	4.7882	7.8616	18.8052
3	3.8872	4.6053	1.242	3.7843	4.9537	8.1013	18.2565
4	3.776	4.2636	1.2258	3.6636	4.4944	7.6887	17.9737
5	3.642	4.4394	1.3315	3.4776	4.6836	7.6593	18.081
6	3.8212	4.9796	1.1353	3.5383	5.2741	8.1662	19.9988
7	3.9603	4.2772	1.2042	3.7259	4.5551	7.7674	19.2182
8	3.7731	4.2336	1.3062	3.5712	4.5043	7.5955	18.0786
9	3.7493	4.343	0.9457	3.6518	4.6347	7.5906	18.6846
10	3.7571	4.3418	1.2761	3.6282	4.6494	7.7892	18.091
11	3.7917	4.1333	1.2478	3.6803	4.4254	7.6545	17.8937
12	3.6868	3.9585	1.0879	3.5842	4.2164	7.2193	17.0984
13	4.0004	4.4803	1.2856	3.9167	4.8203	8.1641	19.2095
14	3.7488	4.5594	1.2095	3.5898	4.881	7.8584	18.6734
15	3.8667	4.032	1.2204	3.7266	4.3554	7.4894	18.2174
16	3.8556	4.1562	1.3214	3.7392	4.4986	7.7672	18.3658
17	3.8002	4.9403	1.326	3.6383	5.2499	8.3419	19.8552
18	3.7632	4.5024	1.1804	3.6663	4.8242	7.8391	19.429
19	3.8783	4.116	1.2712	3.6667	4.3857	7.6128	17.7962
20	3.6639	4.2469	1.4645	3.6012	4.4856	7.7792	18.304
21	3.8321	4.5528	1.2254	3.6333	4.7921	7.828	18.7559

22	3.7352	4.5264	1.1524	3.6373	4.8053	7.7922	18.2154
23	3.9032	4.8353	1.2435	3.796	5.1712	8.2992	20.3246
24	3.671	4.4738	1.2422	3.5273	4.7133	7.6845	17.705
25	3.7719	4.6684	1.1078	3.5558	4.9229	7.728	18.6092
26	3.7547	4.1796	1.2015	3.6011	4.5085	7.6744	17.8821
27	3.9088	4.4324	1.2339	3.7546	4.7297	7.8641	18.3538
28	3.8161	4.4156	0.9399	3.6676	4.7104	7.5612	17.9968
29	3.9538	4.0992	1.4037	3.7325	4.4575	7.8208	19.2183
30	3.7194	4.4661	1.2283	3.6808	4.7201	7.9303	18.4188

可见，矿井的绝对瓦斯涌出量  $G_{ij} < 40$ ，而在总回风巷处的相对瓦斯涌出量

$g_{ij} > 10$ 。

## 2、计算两个采煤工作区的相对和绝对瓦斯涌出量

根据上述模型，根据瓦斯浓度和煤尘的产生量将煤的日产量分配到两个采煤工作面，进而可以使用 Matlab7.1 软件分别得到两个采煤工作面的相对瓦斯涌出量 ( $\text{m}^3/\text{t}$ ) 和绝对瓦斯涌出量 ( $\text{m}^3/\text{min}$ )：

表 2 采煤工作面的瓦斯涌出量

监测点 日期与班次	采煤工作面 I			采煤工作面 II		
	绝对瓦斯涌 出量	相对瓦斯涌 出量 (瓦斯)	相对瓦斯涌 出量 (煤尘)	绝对瓦斯涌 出量	相对瓦斯涌 出量 (瓦斯)	相对瓦斯涌 出量 (煤尘)
1	3.8208	21.3033	17.9253	4.343	18.4629	21.5608
2	3.6061	20.6388	17.1564	4.4759	18.3942	21.5324
3	3.8872	19.9644	17.3684	4.6053	18.4921	20.939
4	3.776	20.0815	17.3504	4.2636	17.784	20.2887
5	3.642	20.253	17.0201	4.4394	18.2105	21.1778
6	3.8212	22.8245	18.4174	4.9796	20.6694	24.7919
7	3.9603	22.0471	19.2299	4.2772	19.049	21.578
8	3.7731	20.1289	17.8501	4.2336	18.194	20.2795
9	3.7493	21.2731	18.1408	4.343	18.8826	21.7619
10	3.7571	19.9519	17.1943	4.3418	17.9229	20.4756
11	3.7917	19.6391	17.4471	4.1333	17.6104	19.6402
12	3.6868	19.2997	17.2778	3.9585	17.122	18.9549
13	4.0004	20.8025	18.797	4.4803	19.2537	21.1156
14	3.7488	21.2353	17.4329	4.5594	18.6632	22.1553
15	3.8667	20.6919	18.4738	4.032	17.9805	19.9796
16	3.8556	19.7384	18.1701	4.1562	18.2623	19.7234
17	3.8002	22.1892	17.7587	4.9403	19.8502	23.9644
18	3.7632	22.0803	18.2136	4.5024	19.3203	22.8713
19	3.8783	19.8487	17.826	4.116	17.712	19.5801
20	3.6639	19.7929	16.9871	4.2469	17.7035	20.2896
21	3.8321	21.3197	18.2802	4.5528	19.1604	21.9171

22	3.7352	20.3021	17.3099	4.5264	18.5662	21.3515
23	3.9032	22.8946	18.7171	4.8353	20.3294	24.2011
24	3.671	20.2641	16.468	4.4738	17.6923	21.192
25	3.7719	21.8541	17.9038	4.6684	19.2365	22.8168
26	3.7547	19.5972	17.2325	4.1796	17.5929	19.7821
27	3.9088	20.5477	17.9155	4.4324	18.6048	21.0774
28	3.8161	20.524	18.0805	4.4156	18.8534	21.1194
29	3.9538	21.4518	18.8083	4.0992	18.4123	20.8368
30	3.7194	20.2588	16.8643	4.4661	18.0842	21.2664

从列表中可以看出两个采煤工作面的绝对瓦斯涌出量均小于 40，而相对瓦斯涌出量均大于 10。

综合以上总回风巷与采煤工作面 I、II 的绝对与相对涌出量的计算结果，以及高、低瓦斯矿井的判断标准，获得结论：该矿井为高瓦斯矿井。

## 二、问题二

根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定，得到各处瓦斯的报警浓度与断电浓度，整理得到下表：

表 3 瓦斯的报警与断电浓度

	报警浓度(%CH <sub>4</sub> )	断电浓度(%CH <sub>4</sub> )
高瓦斯矿井采煤工作面	1.0	1.5
高瓦斯矿井回风巷	1.0	1.0
采煤机	1.0	1.5
掘进机	1.0	1.5
高瓦斯矿井采煤工作面回风流	1.5	1.5
高瓦斯矿井掘进工作面	1.0	1.5
高瓦斯矿井掘进工作面回风流	1.0	1.0

### 1、由引起报警点的个数计算爆炸事故可能性

#### 1) 由报警点个数直接计算

对应 6 个监测点，每个监测点在 30 天中每天都有 3 个班次，就相当于 6 个监测点各有 90 个监测数据。这样就可以得到 540 个数据点。

将发生报警在安全措施不完善的情况下即会发生爆炸，则在其中可以引起报警的数据点为各个监测点中瓦斯浓度大于或等于 1.0%的，在 540 个数据点中符合该条件的共有 25 个，可以得到发生爆炸事故的可能性为：

$$\mu = \frac{n}{N} = \frac{25}{540} = 0.04630$$

即，为 4.630%。

#### 2) 将 6 个监测点独立考虑

应用整个矿井的 540 个数据进行考虑较为粗略，为得到更为合理的结果，所以对其进行细化，将各个监测点进行独立考虑。

认为发生报警即看作会发生爆炸，且只要有一个点发生，就会影响整个煤矿，则可以将发生事故概率最大的监测点的事故可能性来作为整个矿井的事故可能



性，即：

$$\mu = \max(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)$$

仍然是每个监测点对应 90 组数据，统计各个监测点中可引起报警的数据点个数及发生事故的概率分别为：

表 4 事故概率统计

监测点	工作面 I	工作面 II	掘进工作面	回风巷 I	回风巷 II	总回风巷
报警个数	0	5	0	0	20	0
事故概率	0	5.6%	0	0	22.2%	0

那么，整个矿井的事故概率为：

$$\mu = \max(0, 5.6\%, 0, 0, 22.2\%, 0) = 22.2\%$$

上述直接计算方法是建立在报警即会发生爆炸的基础上，不够合理，所以，应当建立模型，用来全局考虑各个点发生爆炸的可能性。所以提出新的模型。

## 2、矿井的爆炸可能性模型

如果考虑矿井内由于煤（岩）与瓦斯突出等情况，会造成瓦斯与煤尘浓度突然大量增加，进而造成其浓度有可能达到爆炸极限而引起爆炸。

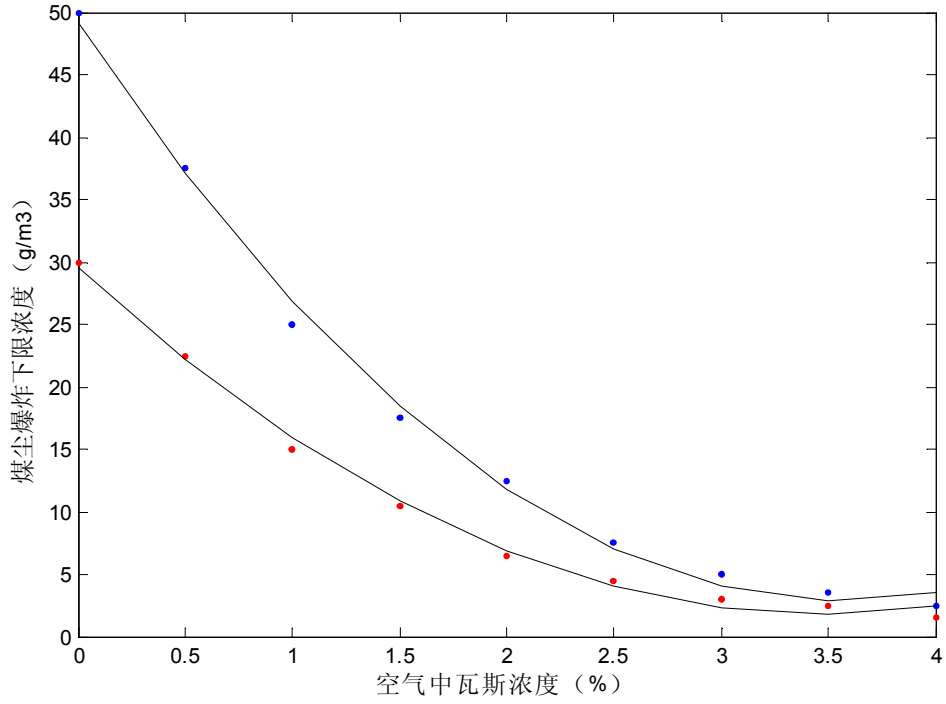
这样就能得到煤尘的现有浓度与爆炸下限越接近，其发生煤尘爆炸的可能性就越大，即随着  $L_{ij} - l_{ij}$  的值减小，发生事故的可能性  $\mu$  的值增大。由此，建立如下模型：

### 1) 初等的倒数模型

由于满足随着  $L_{ij} - l_{ij}$  的值减小， $\mu$  的值增大的性质，可假设二者成反比例关系。当比例系数为 1 时，就有：

$$\mu_{ij} = \frac{1}{L_{ij} - l_{ij}} \quad (4)$$

图 1 煤尘爆炸浓度下限范围



根据附表 1 中的数据运用 Matlab7.1 进行拟合[3]，可以得到关于煤尘爆炸浓度下限的上、下界方程分别为：

$$\begin{aligned} L_{ij} &= 3.6450c_{ij}^2 - 25.9801c_{ij} + 49.1939 \\ L_{ij} &= 2.2857c_{ij}^2 - 15.9429c_{ij} + 29.6000 \end{aligned} \quad (5)$$

结合附表 2 中给定的数据，应用倒数模型进行计算，可以得到各个数据点对应的爆炸的可能性。再应用 Matlab7.1 软件就能够求出其期望与标准差[4]，得到爆炸的可能性为：

$$\mu = 6.19\% \quad (\sigma = 2.63\%)$$

对于该模型，在离爆炸下限的数值较大范围内，结果的效果较好；在  $l$  接近  $L$  时（在  $L-1 \sim L$  的范围之内），会造成爆炸的可能性大于 100%，与真实情况相不符。所以要将现有的初等倒数模型进行修正。

## 2) 修正后的倒数模型

仍沿用之前的倒数模型为基础，可以假设修正后的模型为：

$$\mu_{ij} = \frac{1}{L_{ij} - (l_{ij} + a)} + b \quad (6)$$

当煤尘的浓度为 0 时，爆炸的可能性为 0，代入模型，可得：

$$0 = \frac{1}{L_{ij} - a} + b \quad (7)$$

当煤尘的浓度为  $L$  时，爆炸的可能性为 1，即 100%，可得：

$$1 = -\frac{1}{a} + b \quad (8)$$

联立(7)、(8)求解，可以得到结果如下：

$$\begin{cases} a = \frac{L_{ij} \pm \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}}}{2} \\ b = \frac{2}{-L_{ij} \pm \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}}} \end{cases} \quad (9)$$

根据实际情况可知，方程  $\mu_{ij} = \frac{1}{L_{ij} - (l_{ij} + a)} + b$  的图象为  $\mu_{ij} = \frac{1}{L_{ij} - l_{ij}}$  的图象向右向下移动而成，所以  $a$  与  $b$  的值应均为负数，所以，得到  $a$ 、 $b$  的值分别为：

$$\begin{cases} a = \frac{L_{ij} - \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}}}{2} \\ b = \frac{2}{-L_{ij} - \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}}} \end{cases} \quad (10)$$

由此，可以得到改进后的模型为：

$$\mu_{ij} = \frac{2}{L_{ij} + \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}} - 2l_{ij}} - \frac{2}{L_{ij} + \sqrt{L_{ij}^2 + 4L_{ij}}} \quad (11)$$

结合附表 2 中给定的数据，应用倒数模型进行计算可以得到各个数据点对应的爆炸的可能性。再求出其期望与标准差，就能够得到爆炸的可能性为：

$$\mu = 1.88\% \quad (\sigma = 1.24\%)$$

### 3、由瓦斯与煤尘影响不安全度的模型

由附表 2 可知在断电后人员撤出，不可能产生危险；同时用附表 1 中的数据拟合曲线进行计算可知，已知的煤尘浓度不可能达到爆炸下限。结合模型(11)考虑，我们认为其爆炸可能性将会十分低，趋近于 0，甚至可能不发生爆炸。但是不发生爆炸不代表完全安全。于是由此建立一个煤矿不安全度模型。

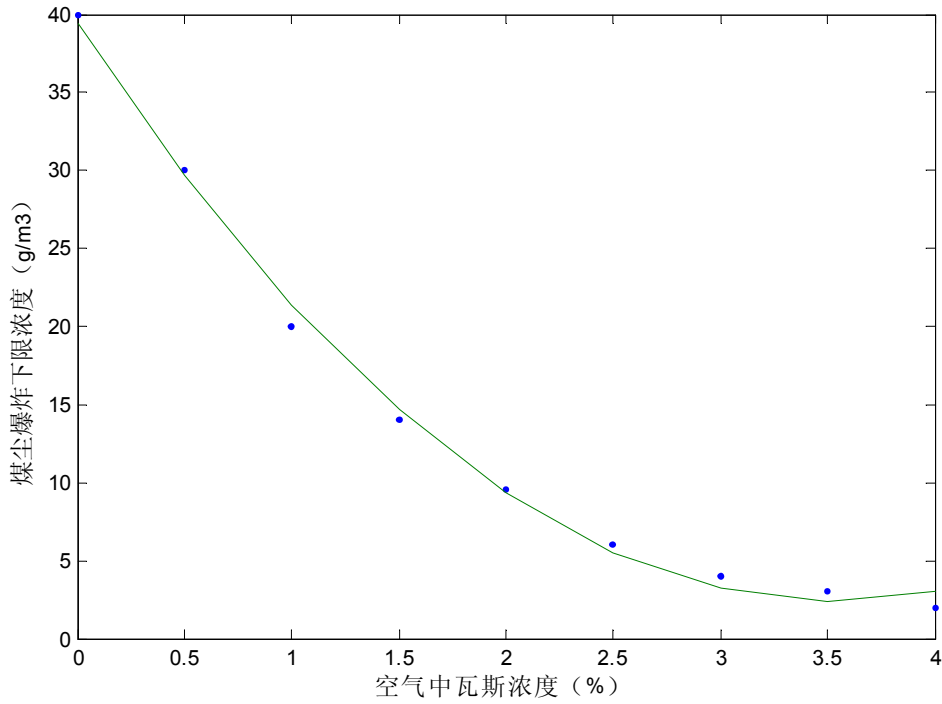
根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定，对该煤矿的安全程度有指导意义的是甲烷传感器的报警浓度和断电浓度。除此之外，还需要结合瓦斯浓度与煤尘爆炸浓度下限的关系，来确定煤尘浓度对不安全程度的影响。这样，就将不安全程度分为由瓦斯浓度引起的不安全程度和由煤尘浓度引起的不安全程度两个部分，取其中最大值作为矿井的不安全度，即：

$$H_{ij} = \max(H_1, H_2) \quad (12)$$

#### 1) 由煤尘浓度引起的不安全程度

煤尘浓度的影响是由于浓度与爆炸下限的临近，引起了矿井的不安全事故。由于爆炸下限的取值均匀分布于附表 1 所给的爆炸下限范围之内。所以选用其组中值运用 Matlab7.1 进行拟合[3]，得到曲线如下：

图 2 瓦斯浓度与爆炸下限的关系



对应的方程为：

$$y = 2.9654x^2 - 20.9615x + 39.3970 \quad (13)$$

即煤尘的爆炸下限  $L$  与瓦斯浓度  $c$  的关系式：

$$L_{ij} = 2.9654c_{ij}^2 - 20.9615c_{ij} + 39.3970 \quad (14)$$

将各个监测点各个班次所测量的煤尘浓度转化成为百分制的分数，为：

$$H_2 = \frac{l_{ij}}{L_{ij}} \cdot 100 \quad (15)$$

## 2) 由瓦斯浓度引起的不安全程度

瓦斯所引起的不安全事故为报警和断电。

因为断电会影响煤矿的正常生产，所以断电的危险程度比煤尘浓度的影响大，报警的危险程度根据瓦斯断电浓度与报警浓度的关系进行确定。由模型(15)可以计算得到煤尘浓度引起的不安全程度的最大值为 31.9。由于断电危险大于煤尘浓度的影响，所以将其不安全程度赋为 32，由于在各工作面上断电浓度与报警浓度之比为 3 : 2，所以可得报警时的不安全程度为 21。即：

$$H_1 = \begin{cases} 0 & \text{瓦斯浓度低于报警浓度} \\ 21 & \text{瓦斯浓度高于报警浓度低于断电浓度} \\ 32 & \text{瓦斯浓度高于断点浓度} \end{cases} \quad (16)$$

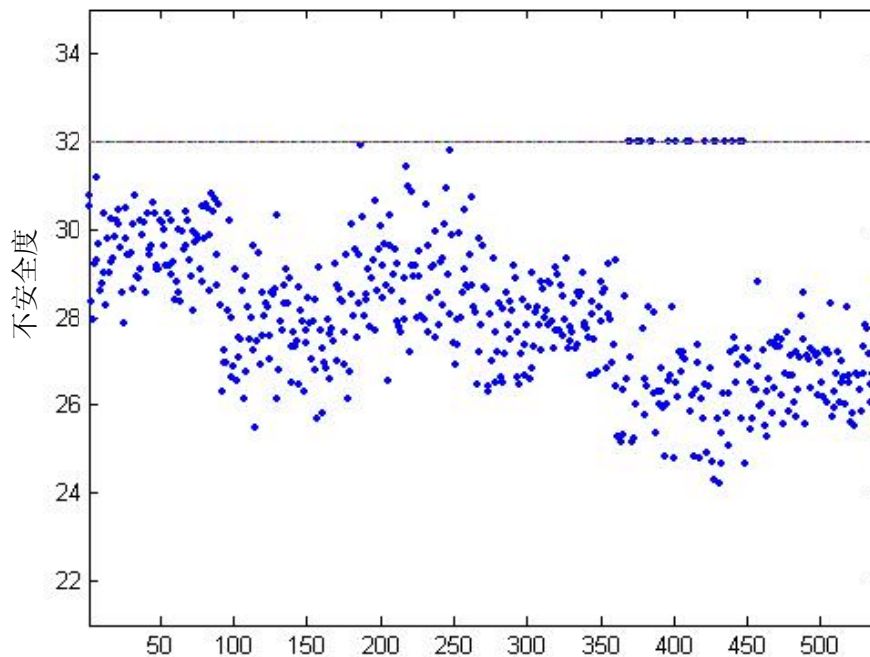
## 3) 矿井的不安全度

对二者进行综合，可以得到矿井的不安全程度为：

$$H_{ij} = \max(H_1, H_2) \quad (17)$$

将所得的 540 个数据点的不安全度做散点图，如下：

图 3 各数据点不安全度



定义评判标准为：分值在 0~21 为安全，21~32 为较危险，32~80 为危险，80~100 为高度危险。

由以上标准可以判断出整个煤矿中的所有点都是处在 21~32 这一区间内的。所以可以认为整个煤矿都是较危险的。

### 三、问题三

#### 1、不考虑漏风的情况

总的风量  $Q$  是在进风口处的风速  $v$  与主巷道断面面积  $S_1$  的乘积。在进入矿井后，按照作用效果可以分成 3 个部分：采煤工作面 I 所获得的风量  $Q_1$ ，采煤工作面 II 所获得的风量  $Q_2$  与掘进工作面所获得的风量  $Q_3$ 。在风的流动中不考虑风量的变化。各处的风量都是该处的风速与巷道断面面积的乘积，所以，可以得到在进风口的风速与各处风速和断面面积的关系为：

$$v = \frac{S_2 \cdot v_1 + S_2 \cdot v_2 + S_1 \cdot v_3}{S_1} \quad (18)$$

并且根据《煤矿安全规程》第一百零一条规程的规定，可以得到各处的风速范围为：

$$\begin{aligned}
0 < v &\leq 8 \\
0.25 &\leq v_1 \leq 4 \\
0.25 &\leq v_2 \leq 4 \\
0.25 &\leq v_3 \leq 4
\end{aligned} \tag{19}$$

又根据备注中的叙述，可以知道局部通风机所在的巷道中至少需要有 15% 的余裕风量（新鲜风），得到：

$$S_1 \cdot v_3 \geq 15\% \cdot v \cdot S_1 \tag{20}$$

根据局部通风机的额定风量为  $150 \sim 400 \text{ m}^3/\text{min}$ ，当局部通风机的风量为  $150 \sim 400 \text{ m}^3/\text{min}$  时，从局部通风机的风筒中所排出的风的速度为：

$$v_4 = \frac{S_1 \cdot v_3}{S_4} \tag{21}$$

当局部通风机的风量大于  $400 \text{ m}^3/\text{min}$  时，从局部通风机的风筒中所排出的风的速度为：

$$v_4 = \frac{400}{60 \cdot S_4} \tag{22}$$

所以，综上所述，从局部通风机的风筒中所排出的风的速度为：

$$v_4 = \begin{cases} \frac{S_1 \cdot v_3}{S_4} & 150 \leq S_1 \cdot v_3 \cdot 60 \leq 400 \\ \frac{400}{60 \cdot S_4} & S_1 \cdot v_3 \cdot 60 \geq 400 \end{cases} \tag{23}$$

对于安全程度的约束，利用问题二中的模型，使各处均不会发生报警，且不会发生爆炸事故，即，瓦斯浓度应与煤尘浓度应满足：

$$\begin{aligned}
0 < c_{ij} &= g(v_{ij}) < 1.0 \\
0 < l_{ij} &= f(v_{ij}) < L
\end{aligned} \tag{24}$$

对风速与瓦斯的相关性进行分析，选取了采煤工作面 I、采煤工作面 II 以及回风巷 I、回风巷 II 的所有数据进行整体分析。

因为在分析过程中，考虑到掘进面和总回风巷的已知数据中的风速与瓦斯的相关性较差，且在煤矿的生产过程中二者与前四个工作单位关系不密切。总回风巷中的瓦斯浓度主要是由几个工作面产生，随着风的流动而到达该处进而产生影响的。掘进工作面不同于采煤工作面，首先其对煤层的影响程度小，其次在该工作面有独立的通风系统。所以总回风巷和掘进工作面并不能与前四个工作单位进行联合讨论。于是，在分析中不予考虑。

对于需要考虑的四个工作单位，在已知的数据中同一风速对应多个瓦斯浓度，不易发现规律并进行讨论。所以，先对在同一风速时的瓦斯浓度进行平均化，求得平均值。再将每个风速和其对应的瓦斯浓度平均值应用 SPSS12.0 软件进行相关性分析，可以得到下表：

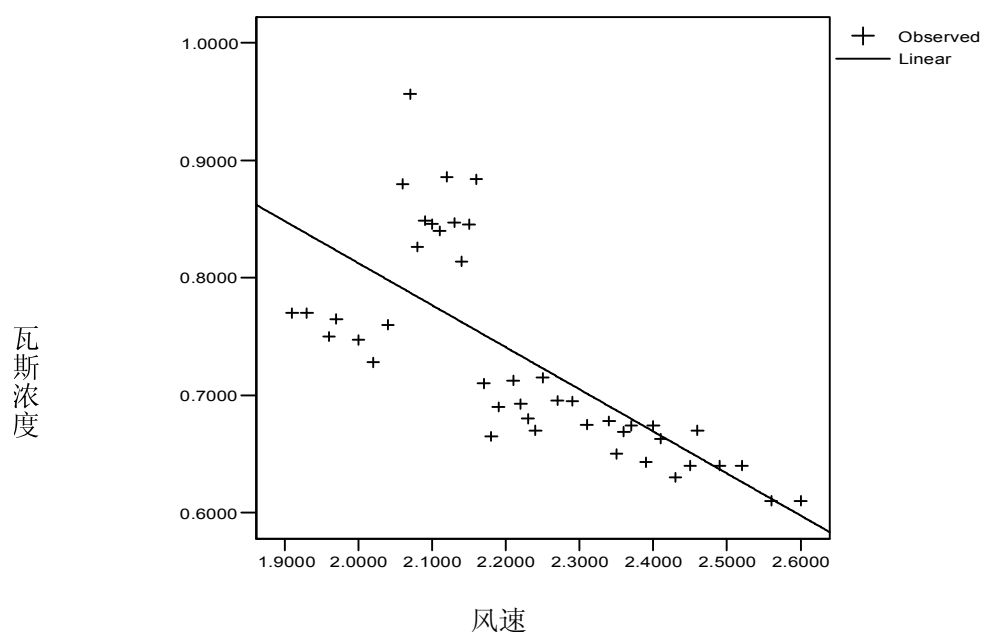
表 5 风速与瓦斯相关性分析

		风速	瓦斯
风速	Pearson Correlation	1	-.725**
	Sig. (2-tailed)	.	.000
	N	43	43
瓦斯	Pearson Correlation	-.725**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	.
	N	43	43

\*\* . Correlation is significant at the 0.01 level

由上表可明显看出其 p 值小于 0.001，于是，可以认为风速与瓦斯浓度的相关性较好，呈相关系数为-0.725 的负相关关系。对其进行拟合，可得下图：

图 4 风速与瓦斯浓度拟合曲线



得到上图的最优拟合方程为：

$$g(v_{ij}) = -0.3583v_{ij} + 1.5291 \quad (25)$$

同理，对风速与煤尘的数据做与上文相同的处理，分析处理后的数据，可得二者的相关性如下表：

表 6 风速与煤尘相关性分析

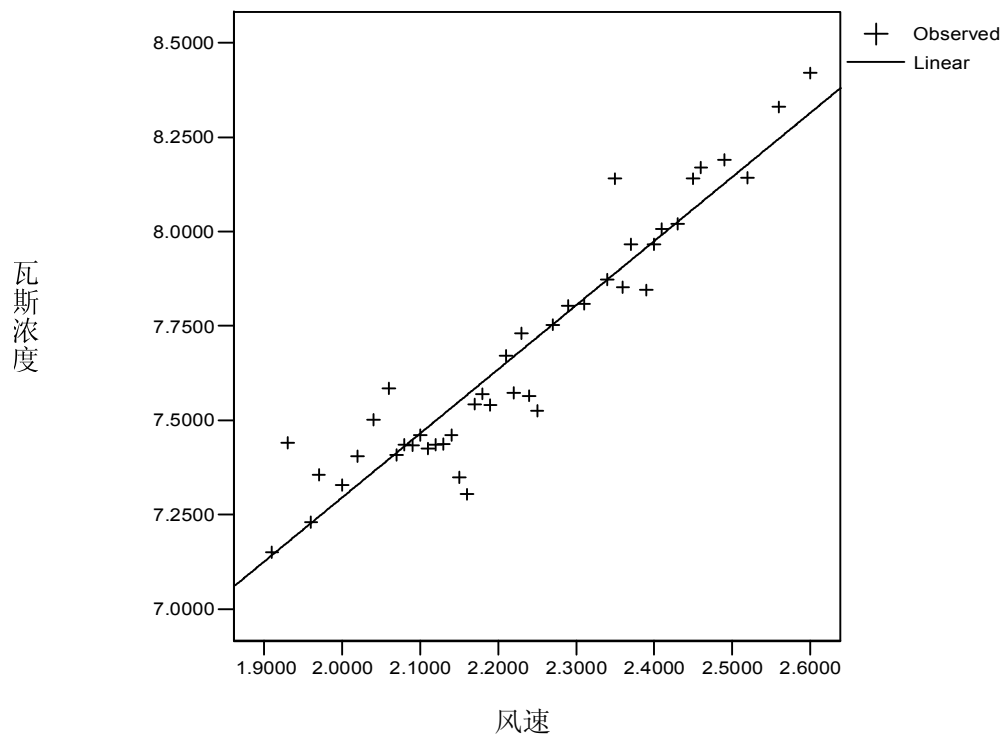
		风速	煤尘
风速	Pearson Correlation	1	.945**
	Sig. (2-tailed)	.	.000
	N	43	43
煤尘	Pearson Correlation	.945**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	.
	N	43	43

\*\* . Correlation is significant at the 0.01 level

联

由上表可明显看出其  $p$  值小于 0.001，于是，可以认为风速与煤尘的相关性较好，呈相关系数为 0.945 的正相关关系。对其进行拟合，可得下图：

图 5 风速与煤尘拟合曲线



可得到上图的最优拟合方程为：

$$f(v_{ij}) = 1.6876v_{ij} + 3.9018 \quad (26)$$

并且，事故发生的可能性应当不高于问题二中所得的发生事故可能性的期望，设风量改变后发生事故的可能性为  $\mu'$ ，于是，又有安全性的约条件为：

$$\mu' < \mu \quad (27)$$



综合各个工作面，进、回风巷以及安全程度，得到最终的规划模型：

$$\min v = \frac{S_2 \cdot v_1 + S_2 \cdot v_2 + S_1 \cdot v_3}{S_1}$$

$$S.T \quad \begin{cases} S_1 \cdot v_3 \geq 15\% \cdot v \cdot S_1 \\ 0 < v \leq 8 \\ 0.25 \leq v_1 \leq 4 \\ 0.25 \leq v_2 \leq 4 \\ 0.25 \leq v_3 \leq 4 \\ v_4 = \begin{cases} \frac{S_1 \cdot v_3}{S_4} & 150 \leq S_1 \cdot v_3 \cdot 60 \leq 400 \\ \frac{400}{60 \cdot S_4} & S_1 \cdot v_3 \cdot 60 \geq 400 \end{cases} \\ 0 < g(v) < 1.0 \\ 0 < f(v) < L \\ \mu' < \mu \end{cases} \quad (28)$$

应用 Lingo8.0 软件解非线性规划[5]，得到结果如下：

表 7 不漏风情况的风量

	风速(m/s)	风量(m3/min)
进风口	3.84	1152.00
工作面 I	1.48	355.20
工作面 II	1.48	355.20
局部通风机	1.48	400.00

## 2、考虑漏风的情况

当存在漏风的时候，风从总进风口到各个工作面会有第一个风量的改变，再从各工作面到各回风巷会有第二个风量的改变，而后再到总回风巷会出现第三个风量的改变。根据附表 2 中所给出的数据，可以得到风量的改变系数  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$ 、 $p_4$ 。 $p_1$ 为主巷道到达工作面 I 的系数大小 0.8964， $p_2$ 为主巷道到达工作面 II 的系数大小 1.0101， $p_3$ 为进风口到达主巷道的系数大小 0.9241， $p_4$ 为回风巷到达总回风巷的系数大小为 1.082 再根据风量的改变，得到各个改变后的风速  $v_1'$ 、 $v_2'$ 、 $v_3'$ 。

再代入前一个问题的规划模型，可以得到：

$$\min v' = \frac{\frac{S_2 \cdot v_1'}{p_1} + \frac{S_2 \cdot v_2'}{p_2} + S_1 \cdot v_3'}{S_1 \cdot p_3}$$

$$S.T \left\{ \begin{array}{l} S_1 \cdot v_3' \geq 15\% \cdot v' \cdot S_1 \\ 0 < v \leq 8 \\ 0.25 \leq v_1' \leq 4 \\ 0.25 \leq v_2' \leq 4 \\ 0.25 \leq v_3' \leq 4 \\ v_4 = \begin{cases} \frac{S_1 \cdot v_3'}{S_4} & 150 \leq S_1 \cdot v_3' \cdot 60 \leq 400 \\ \frac{400}{60 \cdot S_4} & S_1 \cdot v_3' \cdot 60 \geq 400 \end{cases} \\ 0 < g(v) < 1.0 \\ 0 < f(v) < L \\ \mu' < \mu \end{array} \right. \quad (29)$$

应用 Lingo8.0 软件解非线性规划[5]，得到结果如下：

表 8 漏风情况的风量

	风速(m/s)	风量(m <sup>3</sup> /min)
进风口	3.99	1197.00
工作面 I	1.48	355.20
工作面 II	1.48	355.20
局部通风机	1.48	400.00

### 3、考虑各工作面的风速对瓦斯和煤尘的影响不同

对各个不同的工作面应用 SPSS12.0 软件进行相关性分析，结果发现个别工作面的相关性不好，不能进行拟合求解。于是，假设瓦斯的绝对涌出量  $G$  与煤尘的质量  $R$  不变。可以得到以下两个方程：

$$\begin{aligned} c_{ij} \cdot v_{ij} \cdot S &= G_{ij} \\ r_{ij} \cdot v_{ij} \cdot S &= R_{ij} \end{aligned} \quad (30)$$

进而得到瓦斯与煤尘的浓度值为：

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{G_{ij}}{S \cdot v_{ij}} \\ r_{ij} &= \frac{R_{ij}}{S \cdot v_{ij}} \end{aligned} \quad (31)$$

与前一个模型的其余部分相同，就能得到新的规划方程为：

$$\min v' = \frac{\frac{S_2 \cdot v_1'}{p_1} + \frac{S_2 \cdot v_2'}{p_2} + S_1 \cdot v_3'}{S_1 \cdot p_3}$$

$$S.T \quad \begin{cases} S_1 \cdot v_3' \geq 15\% \cdot v' \cdot S_1 \\ 0 < v \leq 8 \\ 0.25 \leq v_1' \leq 4 \\ 0.25 \leq v_2' \leq 4 \\ 0.25 \leq v_3' \leq 4 \\ v_4 = \begin{cases} \frac{S_1 \cdot v_3'}{S_4} & 150 \leq S_1 \cdot v_3' \cdot 60 \leq 400 \\ \frac{400}{60 \cdot S_4} & S_1 \cdot v_3' \cdot 60 \geq 400 \end{cases} \\ 0 < \frac{G}{s \cdot v} < 1.0 \\ 0 < \frac{R}{s \cdot v} < L \\ \mu' < \mu \end{cases} \quad (32)$$

应用 Lingo8.0 软件解非线性规划[5]，得到结果如下：

表 9 考虑不同工作面情况的风量

	风速(m/s)	风量(m3/min)
进风口	2.40	720.35
工作面 I	0.95	227.83
工作面 II	1.10	264.16
局部通风机	0.50	150.00

## 七、灵敏度分析

将第三问模型中约束条件的各个参数做允许范围内的数值变化。结果发现除  $g(v)$  值外，其余参数对风速、风量大小的影响都不大。（因为要改变的参数个数和各个参数的不同取值过多，较为繁索，在此不一一列出）

所以可得出结论：由此模型求出的解，即为此问题的最优解。

## 八、模型的评价

第一问中的模型从不同的角度判断出了该煤矿的性质为高瓦斯煤矿；第二问的模型运用了统计学的原理较好的分析出了该矿井发生危险的概率以及其生产过程中的不安全性；第三问中的模型采用了数据拟合的方法，虽然在拟合过程中抛弃了一些点，但是其较好的解决了通风量最优的问题。

总体看来，本文应用了广泛的数学知识，从多个角度对问题进行了分析与解

答，考虑的较为全面。主要可以改进的地方是在解答问题三时，所进行拟合的过程中淘汰了一些点，如果可以将这些点也引入进行分析，解答将会更为合理。

本文模型的推广性主要体现在问题三的规划模型中，该模型容易推广到面粉生产、加油站安全和水泥厂生产等评判最佳方案中，该方法的应用十分广泛，只要对模型中的某些约束条件稍加改动，或者再加一些约束条件，遇到的问题仍能得到很好的解决。

## 参考文献

- [1] 《煤矿安全规程》，国家安全生产监督管理局，国家煤矿安全监察局；
- [2] 《矿井瓦斯涌出》，<http://www.hsgs.cn/b6.sb7.1.htm>，2006年9月14日；
- [3] 《MATLAB7 基础与提高》，北京：电子工业出版社，2005年4月；
- [4] 易东，《军事医学统计学》，西安：第四军医大学出版社，2006年8月；
- [5] 谢金星、薛毅，《优化建模与 LINDO/LINGO 软件》，北京：清华大学出版社，2005年7月。

# 易拉罐形状和尺寸的最优设计

朱玖实 张 强 郑登易

指导教师：樊爱军

## 摘 要

本文研究的是易拉罐在容积为一定值的情况下形状和尺寸的最优化，使得成本最低的问题。

问题一，直接用游标卡尺测量 355ml 百事可乐易拉罐的尺寸数据并进行分析。

问题二，设易拉罐为正圆柱体，建立体积的函数关系式（模型一），用高等数学求极值的方法，利用 matlab7.1 编程求解，得到最优设计的解析解。求得容积为 355 ml 时， $h = 11.71cm$ ,  $r = 3.11cm$  时，用料体积为  $V = 8.9135cm^3$ 。

问题三，设易拉罐是一个正圆台与正圆柱的组合物。固定容积，建立用料体积（表面积乘以厚度）的函数关系式（模型二）。结合实际半径和高度的取值范围，运用 matlab7.1 编程，进行数值搜索，对所得结果进行数据分析得到用料体积的最小值：容积为 355 ml 时， $r_1 = 2.5000cm$ ,  $r_2 = 3.5500cm$ ,  $h_1 = 0.9000cm$ ,  $h_2 = 8.3000cm$  时，用料体积  $V = 8.3391cm^3$ ，比圆柱节省用料百分比  $k = 6.44\%$ 。与测量值进行比较，从而验证了模型的合理性。

问题四，设计了用料体积更省的球状易拉罐，运用数值搜索得到最优解为：罐盖半径  $r = 1.55cm$ ，罐身高度  $h = 8.25cm$  时，用料体积仅为  $V = 6.682cm^3$ 。考虑手感舒适度，进一步设计为双球重叠体，求得较优解：容积为 355 ml 时，罐盖半径 2.5cm，罐身最宽处半径为 3.6172cm，总高度为 10.457cm，用料体积才为  $8.105cm^3$ 。

最后，我们结合对数学建模的认识和本次建模的感受，撰写了一篇短文。

**关键词：**正圆柱体；正圆台；球状易拉罐；双球重叠体；数值搜索；数据分析

## 一、问题重述（略）

## 二、符号说明

$r$	-----	圆柱体的底面半径
$h$	-----	圆柱体的罐身的高度
$h_1$	-----	易拉罐正圆台罐盖的高度
$h_2$	-----	易拉罐罐身的高度
$v_i$	-----	( $i=1,2,3$ )分别为罐盖、罐身、罐底材料的体积
$d_i$	-----	( $i=1,2,3$ )分别为罐盖、罐身、罐底材料的厚度
$r_i$	-----	( $i=1,2$ ) 分别为罐盖、罐身的半径
$C$	-----	易拉罐的容积
$V(r, h)$	-----	易拉罐用料的总体积
$k$	-----	圆台圆住体比正圆柱体节约用料百分比

## 三、模型的假设

- 1、假设易拉罐罐盖、罐身、罐底所用材料的厚度不同，且各部分材料的厚度为定值（在求解过程中就为我们测出的值）
- 2、假设易拉罐的下部分为正圆柱体，即底部是平的
- 3、假设易拉罐的容积均为 355 毫升
- 4、假设不考虑易拉罐各部分的下料问题
- 5、假设在问题四中罐盖，罐底的半径相同

## 四、问题分析

本文研究易拉罐的形状和尺寸的最优设计问题，而影响形状的因素很多，比如容量、罐皮厚度、受压情况、生产技术等等，如果面面俱到那模型就很复杂，而且在不同情况下适用程度不同。为了使模型得到更为广泛的应用，同时为了简化模型我们认为不同形状的易拉罐对应部分（盖、底、侧面）的厚度相同。同时在固定容积下讨论不同形状的用料，求使得材料总体表面积最少时的高度与半径的比。

要研究易拉罐的半径和高度的优化比例，厚度可作为已知条件，用测得的值来表示。最优化实际是用料最省。于是我们把固定容积下用料的总体积（表面积

乘以厚度)作为模型好坏的判断标准。根据用料的不同对不同模型进行选取,从而补充和完善模型。

问题二:

我们用测得的厚度与高度和半径表示出容积和体积,在容积一定的情况下,求得解析解,建立了体积关于高度和半径的关系式模型,并编程,求解。

问题三:

思路与问题一大致相同,只是易拉罐形状不同,建立的函数关系式也不同。我们建立了体积关于罐盖半径,罐身半径,正圆台的高度,罐身高度的优化模型。

问题四:

按常理可知在容积一定的情况,长方体、正方体、球体的表面积比较中,球体的表面积会是最小,所以从这方面入手,对模型设计。同时考虑到手感等因素,对球的半径进行缩小,在满足大多数人的要求的情况下,设计较为实用节料的模型。

## 五、模型的建立与求解

问题一:

直接用游标卡尺测量 355ml 百事可乐易拉罐得到:

罐盖厚度  $d_1 = 0.052\text{cm}$ , 罐身厚度  $d_2 = 0.026\text{cm}$ , 罐底厚度  $d_3 = 0.046\text{cm}$

罐盖半径  $r_1 = 2.611\text{cm}$ , 罐身半径  $r_2 = 3.281\text{cm}$

正圆台高度  $h_1 = 0.834\text{cm}$ , 圆柱高度  $h_2 = 10.338\text{cm}$

问题二:

由题意设易拉罐是一个正圆柱体,研究易拉罐的高度和半径尺寸的最优设计。要最优,就是在容积相同的条件下,使用的体积最少。于是,以消耗的材料体积  $V(r, h)$  最小为目标,消耗的材料体积等于其表面乘以相应部分的厚度,而罐盖、罐底为薄圆柱体,体积分别为  $\pi r^2 d_1, \pi r^2 d_3$ , 罐身体积为  $2\pi r h d_2$ 。又易拉罐的容积  $C = \pi r^2 h$ , 故,

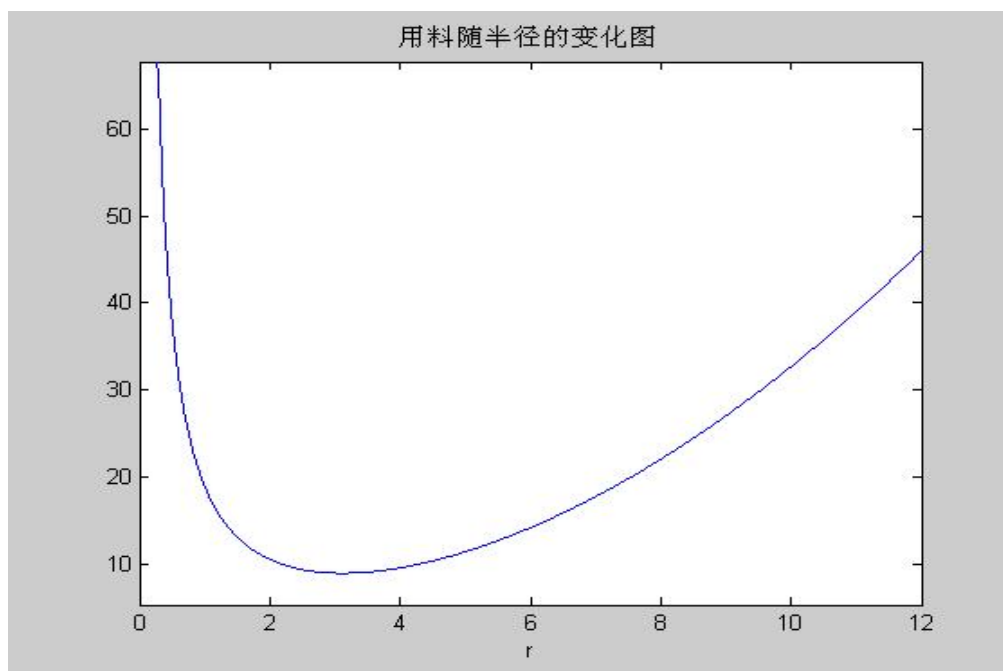
模型一: 在  $C = \pi r^2 h$  时, 求函数

$$V(r, h) = \pi r^2 d_1 + \pi r^2 d_3 + 2\pi r h d_2 \text{ 的极值点。}$$

求解: 将  $C = \pi r^2 h$  变形为  $h = C / \pi r^2$  代入函数, 则:

$$V(r) = \pi r^2 d_1 + \pi r^2 d_3 + 2cd_2 / r$$

对于确定的材料，其厚度比为定值，尺寸只由高度和半径确定，所以我们可以用实际的厚度来计算。我们测得 355ml 百事可乐易拉罐  $d_1 = 0.052\text{cm}$ ， $d_2 = 0.026\text{cm}$ ， $d_3 = 0.046\text{cm}$ ，代入  $V(r) = \pi r^2 d_1 + \pi r^2 d_3 + 2cd_2 / r$ ，运用 matlab7.1 编程（见附录程序 1）作图得：



图一

图一反映了，容积一定时，材料体积随半径的变化情况，由于极值点只有一个，所以该极值点也是最小值点。在该临界值点时，材料消耗的体积最小，对应的高度和半径的组合也最优。

求临界点：令其导数为零得，

$$\frac{dv}{dr} = 2\pi r d_1 + 2\pi r d_3 - 2cd_2 / r^2 = 0 \quad \text{即：}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{cd_2}{\pi(d_1 + d_3)}},$$

代入  $h = c / \pi r^2$  得：

$$h = \sqrt[3]{\frac{c(d_1 + d_3)^2}{\pi d_2^2}}$$

由于高度与半径的比值，能更直观的描述易拉罐的外形特征，于是用高度比半径



可得到：

$$\frac{h}{r} = \sqrt[3]{\frac{c(d_1 + d_3)^2}{\pi d_2^2}} \times \sqrt[3]{\frac{\pi(d_1 + d_3)}{c d_2}} = \frac{d_1 + d_3}{d_2}$$

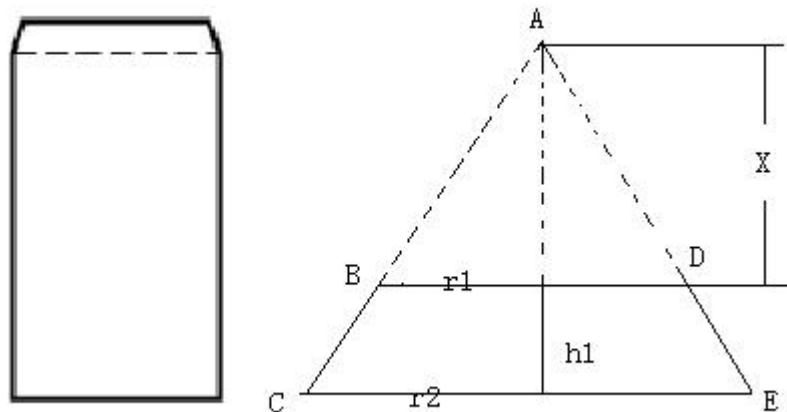
由此可知，高度与半径比只取决于易拉罐三部分的厚度比，将测量的易拉罐  $d_1 = 0.052cm$ ， $d_2 = 0.026cm$ ， $d_3 = 0.046cm$ ，代入上式得优化设计时  $h = 11.71cm$ ， $r = 3.11cm$ ， $h/r \approx 3.77:1$ 。因此，容量为  $C = 335ml$  的易拉罐，消耗材料的最小值为  $8.9135 cm^3$ 。

**检验：**用测量值与该优化值进行比较。由于实际易拉罐与圆柱体外行相差较大，不能测量精确的  $r, h$  值。于是用罐身半径表示出  $r = 3.261cm$ ，用总高度表示出  $h = 12.364cm$  从而得到实际  $h/r \approx 3.76:1$ 。显然，3.77 与 3.76 差别较小，可以认为该优化设计比较合理。

### 问题三：

为使模型更精确，更符合实际，考虑 上面部分是一个正圆台，下面部分是一个

圆柱体的情形。容积  $C$  包含这两部分  $C = C_{tai} + C_{zhu}$ ， $C_{zhu} = \pi r_2^2 h_h$ ，如图二：



图二

该图为易拉罐上面部分（正圆台）的纵截面图。显然，台的容积等于大圆锥与小圆锥的体积差。即：

$$C_{tai} = V_{ACE} - V_{ABD}$$

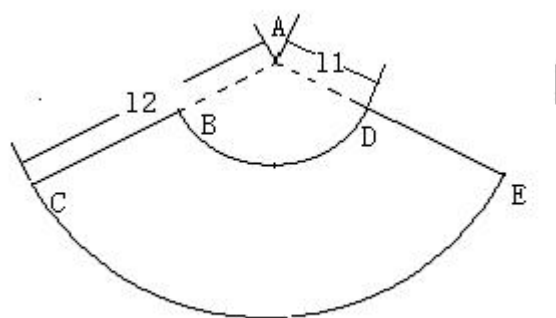
又圆锥的体积等于  $1/3$  底面积乘以高，设小圆锥的高为  $x$ ，故：

$$C_{tai} = V_{ACE} - V_{ABD} = \frac{1}{3} \pi r_2^2 (h_1 + x) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 x, \text{ 其中 } x = \frac{r_1 h_1}{r_2 - r_1}$$

综合以上结果可得，易拉罐的容积为：

$$C = V_{tai} + V_{zhu} = \frac{1}{3} \pi r_2^2 (h_1 + x) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 x + \pi r_2^2 h_2$$

易拉罐材料的体积包含罐盖、罐身、罐底这三部分。体积等于表面积乘以厚度，容易得到：罐盖材料的体积  $V_1 = \pi r_1^2 d_1$ ，罐底材料的体积为  $V_3 = \pi r_2^2 d_3$ ，罐身由台和圆柱两部分组成，将台展开得到图三。显然，台的表面积等于两个扇形



面积之差。

图三

由扇形面积公式  $S = \frac{1}{2} LR$  得：

$$S_{BCED} = \pi r_2 l_2 - \pi r_1 l_1$$

$$(\text{其中 } l_1 = \sqrt{x^2 + r_1^2}, l_2 = \sqrt{(x + h_1)^2 + r_2^2})$$

体积  $V_{BCDE} = \pi d_2 (r_2 l_2 - r_1 l_1)$  则：

罐身的体积  $V_2 = V_{BCED} + 2\pi r_2 d_2 h_2 = \pi d_2 (2r_2 h_2 + r_2 l_2 - r_1 l_1)$  故，易拉罐材料的体积为：

$$V(r_1, r_2, h) = V_1 + V_2 + V_3 = \pi r_1^2 d_1 + \pi d_2 (2r_2 h_2 + r_2 l_2 - r_1 l_1) + \pi r_2^2 d_3$$

模型二：在容积  $C = \frac{1}{3}\pi r_2^2(h_1 + x) - \frac{1}{3}\pi r_1^2x + \pi r_2^2h_2$  ( $x = \frac{r_1h_1}{r_2 - r_1}$ ) 时，求函数

$$V(r_1, r_2, h_1, h_2) = \pi r_1^2 d_1 + \pi d_2 (2r_2 h_2 + r_2 l_2 - r_1 l_1) + \pi r_2^2 d_3$$

( $l_1 = \sqrt{x^2 + r_1^2}, l_2 = \sqrt{(x + h_1)^2 + r_2^2}$ ) 的极小值点。

**求解：**将括号中的条件代入函数消元，模型转化为一个四元非线性函数。取不同的步长，采用数值逼近法，运用 matlab7.1 编程（见附录程序 2）求解，得到四组数值解，如表一：

表一：最小值点及对应体积

$V(cm^3)$	$r_1(cm)$	$r_2(cm)$	$h_1(cm)$	$h_2(cm)$
7.7813	0.0125	3.5625	3.1500	7.8750
7.7815	0.0600	3.5400	3.1100	7.5900
7.7812	0.0300	3.5500	3.1200	7.9050
7.7855	0.1500	3.6000	2.9000	7.7000

数据分析：观察表一中可以看出：几组数据  $r_1$  都较小，这是因为罐盖的厚度测量值约是罐身测量值两倍，即是说罐盖面积越小，材料体积的消耗就越少，于是就导致罐盖半径很小。然而，半径太小，不仅饮用不便，饮料还可能不易流出，所以实际易拉罐的平台半径不可能仅为零点几厘米。

易拉罐的实际形状和尺寸受多种因素影响，如压力，焊接工序等，总之，综合考虑其优化值范围必定在现实值左右。而测量的易拉罐的罐盖半径  $r_1 = 2.611cm$ ，罐身半径  $r_2 = 3.281cm$ ，正圆台高度  $h_1 = 0.834cm$ ，圆柱高度  $h_2 = 10.338cm$ 。于是限定四个变量的可行解范围，例如罐盖半径，半径太小，饮用不便，同时也不可能大于罐身半径  $3.281cm$ ，不妨设  $0.1 < r_1 < 3.281cm$ ，其它变量范围类推，再通过程序搜索出局部最优解。如表五：

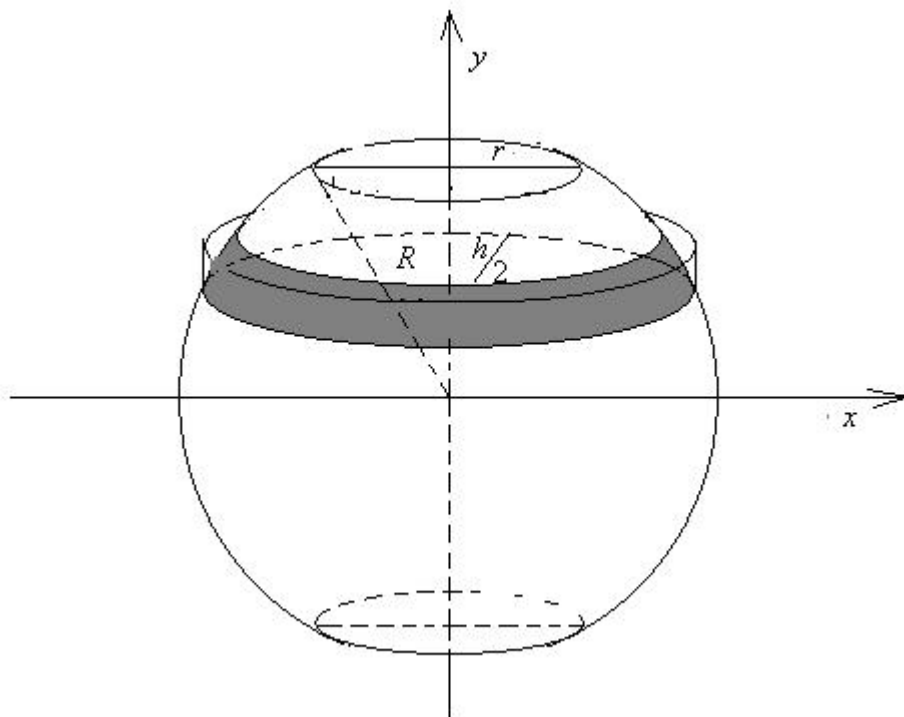
表五：较优设计的变量值

用料体积 $V(cm^3)$	罐盖半径 $r_1(cm)$	罐身半径 $r_2(cm)$	正圆台高度 $h_1(cm)$	罐身高度 $h_2(cm)$	比圆柱节省用料百分比 $k$
<b>8.3391</b>	<b>2.5000</b>	<b>3.5500</b>	<b>0.9000</b>	<b>8.3000</b>	<b>6.44%</b>
8.3127	2.5000	3.5550	1.2000	8.0500	6.74%
8.3226	2.5000	3.4800	1.0950	8.5025	6.63%
8.0864	1.4000	3.5000	5.6000	6.3000	9.28%
7.9409	1.1000	3.3000	3.3000	8.8000	10.91%
<b>7.8219</b>	<b>0.3333</b>	<b>3.6663</b>	<b>1.9998</b>	<b>7.6659</b>	<b>12.25%</b>
<b>7.7971</b>	<b>0.4444</b>	<b>3.5552</b>	<b>2.4442</b>	<b>7.9992</b>	<b>12.52%</b>
<b>7.7905</b>	<b>0.2222</b>	<b>3.5552</b>	<b>3.5552</b>	<b>7.6659</b>	<b>12.60%</b>
7.7850	0.1110	3.4965	2.9415	8.2190	12.66%

数据分析：观察涂黑的数据可知，适当增加用料体积，可加大罐盖半径，使它更符合实际。再比较罐盖半径均为  $2.5\text{ cm}$  的三组数据，可发现第一组与现实值更接近，即该组为最优设计。该种设计用料体积为  $8.3391\text{ cm}^3$ ，而模型一的圆柱体最优设计消耗材料的体积为  $8.9135\text{ cm}^3$ ，即是说该设计节约  $6.44\%$  的材料，可见模型二明显优于模型一。

#### 问题四：

由于相同的体积，球的表面积最小。于是外形可尽量设计为球体，但球容易滚动，既不方便放置，又不方便饮用，所以，上下底仍设计为平底。得到新易拉罐如图四：



图四

由于侧面为球体，所以球面上任一点  $(x, y)$ ，有  $x^2 + y^2 = R^2$ ，又  $R^2 = r^2 + h^2 / 4$ ，即：

$$y = \sqrt{r^2 + h^2 / 4 - x^2}$$

用两个平面水平截此图形，并将围成的图形作为微元（图四中深色部分）。微元可近似看作圆柱体，以圆弧的弧长为高，由弧微分公式  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$  有：微元的容量：

$$dC = \pi x^2 dy$$

该设计的易拉罐总容量为：

$$C = 2 \int_0^{h/2} \pi g(y)^2 dy, \quad (g(y) = \sqrt{r^2 + h^2 / 4 - y^2})$$

同时，微元材料的体积等于表面积乘以厚度，

$$dv = 2\pi x d_2 ds = 2\pi x d_2 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

罐身材料的体积为：

$$V_2 = 2 \int_r^R 2\pi x d_2 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

又因为罐盖、罐底材料的体积分别为：

$$V_1 = \pi r^2 d_1, \quad V_3 = \pi R^2 d_3$$

所以，该设计的易拉罐总材料的体积为：

$$V(r, h) = V_1 + V_2 + V_3 = \pi r^2 d_1 + 2 \int_r^R 2\pi x d_2 \sqrt{1 + y'^2} dx + \pi R^2 d_3$$

模型三：在易拉罐总容量为

$$C = 2 \int_r^R \pi x^2 dy, \quad (y = \sqrt{r^2 + h^2 / 4 - x^2}) \text{ 时, 求函数}$$

$V(r, h) = V_1 + V_2 + V_3 = \pi r^2 d_1 + 2 \int_r^R 2\pi x d_2 \sqrt{1 + y'^2} dx + \pi R^2 d_3$  的极小值点。

**求解：**与模型二方法基本相同，只是自变量只有两个，消  $y$  得到容量  $C$ , 半径  $r$  关  $V$  的函数。为便于同模型二比较，容积  $C$  仍取  $355ml$  左右，用 matlab7.1 编程（见附录程序 3），进行数值搜索，得表六：

表六 最小值点及对应体积

用料 $V$ ( $cm^3$ )	容量 $C$ ( $cm^3$ )	罐盖半径 $r$ ( $cm$ )	罐身高度 $h$ ( $cm$ )	罐球半径 $R$ ( $cm$ )
6. 856	352. 527	1. 95	7. 90	4. 4050
6. 946	357. 428	2. 00	7. 90	4. 4275
6. 881	351. 930	2. 00	7. 85	4. 4050
6. 800	355. 078	1. 80	8. 05	4. 4092
6. 685	354. 645	1. 60	8. 20	4. 4011
<b>6. 682</b>	<b>356. 278</b>	<b>1. 55</b>	<b>8. 25</b>	<b>4. 4066</b>
6. 703	351. 805	1. 70	8. 10	4. 3923
7. 002	356. 539	2. 10	7. 80	4. 4294
6. 836	353. 250	1. 90	7. 95	4. 4057
7. 068	356. 121	2. 20	7. 70	4. 4342

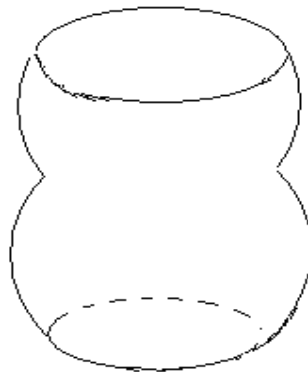
由表六可看出,第 6 组数据相比其他组数据，用料  $V$  最少，容量  $C$  却较多，且半径和高度也较为合理，故此组数据最优。在  $356ml$  时，罐盖半径  $r$  在  $1.55cm$  附近，消耗材料体积  $V$  约为  $6.68 cm^3$ 。半径、高度的微小变化对用料、容量的影响不太大，实际生产中可根据生产条件，选择相宜的方案。

与模型二相比，近似相同的容积（相差仅  $1.278ml$ ），模型二需要材料  $8.3391 cm^3$ ，而模型三仅需要  $6.682 cm^3$ ，故模型三显然优于模型二。

**设计优化：**

在上述设计中，虽然在材料方面取得了较为优等的值，但是从球体的直径大小不难发现所设计的形状不便于人们握住。一般成人的虎口大小为  $5-7cm$ ，而

上面所得结果都在  $8.8cm$  以上，这对大多数人来讲都很不方便，所以这个设计图形很有必要修善，为了保证节约材料我们同样像前面的设计一样定性为球体形，在兼顾球体直径的大小符合大部分人的方便需要的情况下设计出以下的双球重叠样式，其初图如下：



图五

这个形状从视学上就给让人感觉新颖，显然的更加方便好拿。并且用上面一样的方法编程（见附录程序 4），可以得到容量同样为  $355ml$  的易拉罐，其所需材料总体积为  $8.105cm^3$ ，罐盖半径  $2.5cm$ ，罐身最宽处半径为  $3.6172cm$ ，总高度为  $10.457cm$ 。

### 易拉罐运输讨论：

在实际生产中，作为厂家来讲一种产品的成本是多方面的。对于易拉罐的生产来说，不仅要考虑到其材料成本，其他如生产、上漆、库存以及运输多方面的成本都是厂商必须考虑到的因素。但作为数学模型，由于因素众多不可能考虑得面面俱到，更因为市场经济的不断变化，不可能建立一个考虑周全的数学模型。所以在此我们就只引入有关运输的讨论。

首先，费用是任何商家所关心的问题。无论生产什么样的产品，成本费用最低是他们想达到的目的。因为不同规格的产品所涉及的费用不同，所以为了降低成本我们要对易拉罐的设计进行分析。这里我们根据不同形状易拉罐所构成的材料和运输的成本来对其形状规格进行较为合理的选取。

函数的建立：总成本= 材料成本 + 运输成本

我们引入两个参数  $k$  和  $\lambda$  分别表示单个易拉罐的材料成本和每次运输所需的费用。对 1000 万个易拉罐的总成本进行分析。假设每次的装载体积为  $V$ ，每个圆柱形拉罐（图二）和每个球状形拉罐（图五）的占用空间体积分别为  $v_1$  和  $v_2$ 。

得到每次运输不同易拉罐的个数分别为  $\frac{V}{v_1}$  和  $\frac{V}{v_2}$ ，所以 1000 万个易拉罐的运输费

用分别为  $\frac{v_1}{V} \times \lambda \times 10^7$  和  $\frac{v_2}{V} \times \lambda \times 10^7$ ，再分别加上材料成本得到：

$$\begin{cases} f_1 = k_1 \times 10^7 + \frac{v_1}{V} \times \lambda \times 10^7 \\ f_2 = k_2 \times 10^7 + \frac{v_2}{V} \times \lambda \times 10^7 \end{cases}$$

这里  $k_1$ ,  $k_2$  表示单个圆柱和球状易拉罐的材料成本, 而且仅考虑用料多少来确定成本。  $f_1$ ,  $f_2$  表示各自总成本。假设所有易拉罐在运输过程中都是规则地摆放, 占用空间用它们在三维中的各自最大的值, 它们各自所造成的空间浪费不一样, 并且是相当大的。比如一个长方体易拉罐的摆放较一个球形的要严密得多, 这样就节省了空间, 从而降低了运输成本。

我们了解到一个关于运输方面的粗略值, 从而得到一个相应的估计值。运输车车厢的长, 宽, 高分别大约为  $9.6m$ ,  $2.6m$ ,  $3m$ , 从上海到重庆的运费每次大约为 1.6 万元。设这 1000 万个易拉罐由上海运到重庆, 查资料[1]得, 我国易拉罐的生产成本为 0.48 元每个, 于是可以算出双球状易拉罐的生产成本为 0.44 元每个。  $v_1 = 452cm^3$ ,  $v_2 = 547cm^3$ 。将数据代入公式  $f_1$ ,  $f_2$ , 可得  $f_1$  为 5765812 元,  $f_2$  为 5568803 元, 显然  $f_1$  大于  $f_2$ 。进一步分析还可得到当  $\lambda$  大于 3.15 万元时,  $f_2$  大于  $f_1$ , 很明显这是不可能的, 因为 3.15 万元几乎是实际运费的两倍。

由以上关于易拉罐运输的讨论, 可知我们所设计的双球状易拉罐能给企业带来更多的利润, 在 1000 万个的数量时大约可以节省 20 万元的费用。

## 六、模型的评价及推广

模型一得到的计算值与实际测得值几乎能完全吻合, 说明我们的模型建立得比较合理。模型能客观并正确的反映出易拉罐高度和半径尺寸比例的最优, 且模型横截面直径适应人类手掌虎口口径的大小, 即是能有握住且握实的舒适感, 能给予人们感官尤其是触觉上的愉悦和享受。

模型二易拉罐由正圆台和圆柱组成, 更切合实际, 在容积同为 355ml 时, 模型二比模型一更节约材料, 且模型二延续了模型一手感舒适的优点。

模型三为我们自己设计的形状, 在容积同为 355ml 时, 模型三比模型二进一步节约材料, 减小易拉罐成本, 从而提高经济效益, 更易受到厂家欢迎。同时, 考虑到手感问题, 将设计改为双球重叠的形状, 造型别致、新颖, 易被追求时尚的现代人所接受。

由于时间的限制各数据资料的有限, 模型的考虑因素不够全面。同时因为市场经济的不断改变使得求解结果与现实有一定的差异。

利用本文所讨论的方法, 可以对不同行业的产品盛装、库存、运输等多方面进行分析讨论。更因为当今市场的强大竞争力, 厂家若能找到一条更优的生产路线, 在产业的发展过程中将收到巨大的经济效益。



## 参考文献

- [1] 徐涛, 提高终端消费市场易拉罐消费量, 《市场周刊·商务营销》, 46-47 页, 2003 年。
- [2] 谭永基, 蔡志杰等, 《数学模型》, 上海: 复旦大学出版社, 2006 年 3 月。

## 短文

### 对数学建模的见解

数学模型是针对实际问题, 为了某个特定目的, 对复杂的实际问题进行分析, 发现其中的可以用数学语言来描述的关系或规律, 把这个实际问题转化为一个数学问题, 作出合理的简化和假设, 运用适当的数学工具得到一个数学结构。这就称为数学模型, 也可以说, 数学建模是利用数学语言(符号、式子与图象)模拟现实的模型。把实际问题抽象为某种数学结构是数学模型的基本特征。它或者能解释特定现象的现实状态, 或者能预测到对象的未来状况, 或者能提供处理对象的最优决策或控制。

我们认为数学建模的关键步骤为:

1、题目的分析, 拿到问题后, 仔细审题, 认真推敲题目所包含的所有信息, 检索并获得自己需要的东西, 为以下步骤打好坚实的基础。

2、模型假设和建立, 根据实际对象的特征和建模的目的, 对问题进行必要的简化, 并用精确的语言提出一些恰当的假设。模型假设确定了诸多因素中的主要因素, 即建模的方向[2]。假设不同, 建立的模型也就有差异。在假设的基础上, 将现实问题的主要因素进行量化, 成为变量。再用相应的数学方法确定变量与目标间的关系。

3、模型求解与应用, 对所得的结果进行数学上的分析, 通过一些相关软件, 得出数据。将模型分析结果与实际情形进行比较, 以此来验证模型的准确性、合理性和适用性。如果模型与实际较吻合, 则要对计算结果给出其实际含义, 并进行解释。如果模型与实际吻合较差, 则应该修改假设, 再次重复建模过程。应用方式因问题的性质和建模的目的而异。总之, 取其精华而已。

数学建模的难点是如何建立数学模型, 即是从“假设”到“模型的建立”的分析。我们做本题时, 模型的简化并建立成为我们所攻克的重要关口, 因为用料市场单价是波动的, 以制造单个易拉罐用料价格最低为目标, 显然不太合理。经过全组人员讨论及查阅资料, 以用料体积为目标函数建立模型则更为简单、合理。

社会对数学的需求并不只是需要数学家和专门从事数学研究的人才, 而更大量的的是需要在各部门中从事实际工作的人, 善于运用数学知识及数学的思维方法来解决他们每天面临的大量的实际问题, 取得经济效益和社会效益。我们在建模的过程中, 应该掌握分析问题和收集相关资料的能力。

# 题目：煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制

王洪林 张 泉 唱 凯

指导教师：罗明奎

## 摘要

本题讨论的是一个关于煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制的问题。通过模型的建立和求解，我们主要解决了以下三个具体问题。

(1) 对于问题一，为了简化模型，假设在工作面上煤尘的产生与该工作面上煤的产量有正比关系，然后根据相对、绝对瓦斯涌出量的计算公式，求出每天每个监测点的相对、绝对瓦斯涌出量，并用最大相对瓦斯涌出量和绝对瓦斯涌出量与附件二第一百三十三条的判断标准进行（相对、绝对瓦斯涌出量临界值）比较，确定当天瓦斯涌出量是否超标。通过 Matlab6.5 编程求解，最终确定该矿井为高瓦斯矿井。

(2) 对于问题二，首先根据附表 1 给出的有限点所对应的瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系，通过 Matlab6.5 编程分别用曲线拟合的方法拟合出煤尘爆炸下限浓度的最小值、最大值与瓦斯浓度的关系；接着从附表 2 中筛选出所有监测点中瓦斯浓度超出其报警浓度的数据，得到了 25 组数据；然后创造性地将经济学<sup>[2]</sup>中个体指数和综合指数的概念引申为本问题的个体爆炸危险度和综合爆炸危险度，构造出个体爆炸危险度函数和综合爆炸危险度函数，并以综合爆炸危险度来衡量该矿井的爆炸的系数。最后用 Matlab6.5 编程求解，得到综合爆炸危险度为 37.29%。

(3) 对于问题三，要在保证矿井安全的情况下，求出一个最佳的（总）通风量。首先根据附表2的数据，通过Matlab6.5编程分别用曲线拟合的方法拟合出风速与瓦斯浓度、风速与煤尘浓度的关系；然后建立一个以最佳总通风量为目标函数的线性规划模型，根据附图1所示各井巷风量的分流情况，并综合考虑瓦斯浓度、煤尘浓度、风速和局部通风机额定风量和余裕风量等约束条件，运用 Lingo8.0软件编程求解，得到了该煤矿所需要的最佳总通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量。

关键字： 曲线拟合 线性规划 爆炸危险度函数

## 问题重述（略）

### 符号说明

以下各符号中  $i=1,2,\dots,30; j=1,2,3; k=1,2$ ;

$\eta_{ijk}$ : 第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点的煤尘产量

$K_{ik}$ : 第  $i$  天第  $k$  个监测点产煤量;

$W_i$ : 第  $i$  天的煤产量;

$v_{ijk}$ : 第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点的风速;

$S$ : 各个监测点的断面面积;

$Q_{ijk}$ : 第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点单位时间内巷道的空气流量;

$V_{ijk}$ : 第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点一个工作班内总的空气流量;

$T$ : 每一个工作班的工作时间;

$M_{ijk}$ : 第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点一个工作班内的瓦斯涌出量;

$\varpi_{ijk}$ : 第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点的瓦斯百分含量;

$R_{ik}$ : 第  $i$  天第  $k$  个监测点一个工作日内总的相对瓦斯涌出量;

$\psi_{ijk}$ : 第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点的煤尘体积含量;

$H_i$ : 第  $i$  天的相对瓦斯涌出量;

$f_{ik}$ : 第  $i$  天第  $k$  个工作面的煤尘产量占一、二工作面的煤尘总量的比例,

### 问题的分析与求解

(一): 问题一的分析与求解:

由附件二第一百三十三条, 可知判断该矿井的瓦斯等级有两个标准 (矿井相对瓦斯涌出量小于或等于  $10m^3/t$ 、绝对瓦斯涌出量小于或等于  $40m^3/min$ ), 当且仅当两者都小于或等于临界值时才为低瓦斯, 否则为高瓦斯。对此我们根据附表二中的数据分别求出各个监测点的相对瓦斯涌出量与绝对瓦斯涌出量。用任意一天各个监测点的相对瓦斯涌出量与绝对瓦斯涌出量的最大值来表示当天的相对瓦斯涌出量与绝对瓦斯涌出量, 然后计算出实测值超过临界值的频率。

模型一：

首先对相对瓦斯涌出量进行分析：相对瓦斯涌出量是相对于生产量而言，而整个矿井只有工作面 I 和工作面 II 有煤的产出，故只需求出工作面 I 和工作面 II 的相对瓦斯涌出量。假设在工作面上煤尘的产生正比于该工作面上煤的产量，故各个工作面的煤产量可以按该工作面上的煤尘浓度进行分配。

### 1. 巷道空气流量 $Q_{ijk}$ 的计算

第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点单位时间内巷道的空气流量  $Q_{ijk}$ ，等于该监测点的断面面积  $S$  乘第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点的风速  $v_{ijk}$ 。

$$Q_{ijk} = v_{ijk} S \quad i = 1, 2, \dots, 30; j = 1, 2, 3; k = 1, 2 \dots \dots \dots \text{①}$$

### 2. 总空气流量 $V_{ijk}$ 的计算

第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点总的空气流量  $V_{ijk}$ ，等于每一个工作班的工作时间  $T$  乘  $Q_{ijk}$ 。

$$V_{ijk} = Q_{ijk} T \dots \dots \dots \text{②}$$

### 3. 煤尘产量 $\eta_{ijk}$ 的计算

第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点的煤尘产量  $\eta_{ijk}$ ，等于第  $i$  天第  $j$  个班第  $k$  个监测点的煤尘体积含量  $\psi_{ijk}$  乘  $V_{ijk}$ 。

$$\eta_{ijk} = V_{ijk} \psi_{ijk} \dots \dots \dots \text{③}$$

则：三个班煤尘产量总和  $\eta_{ik}$  为

$$\eta_{ik} = \sum_{j=1}^3 \eta_{ijk} \dots \dots \dots \text{④}$$

### 4. 煤尘比重 $f_{ik}$ 计算

第  $i$  天第  $k$  个工作面的煤尘产量占一、二工作面的煤尘总量的比例：

$$f_{ik} = \frac{\eta_{ik}}{\eta_{i1} + \eta_{i2}} \quad i = 1, 2, \dots, 30; k = 1, 2$$

### 5. 煤产量 $t_{ik}$ 的计算

我们认为两个工作面的产煤量之比等于对应的煤尘量之比, 因此第  $i$  天第  $\kappa$  个监测点的产煤量  $t_{ik}$  等于第  $i$  天的产煤总量与煤尘比重  $f_{ik}$  的乘积:

$$t_{ik} = W_i f_{ik} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

6. 瓦斯涌出量  $M_{ij\kappa}$  的计算

第  $i$  天第  $j$  个班第  $\kappa$  个监测点的瓦斯涌出量  $M_{ij\kappa}$ , 为第  $i$  天第  $j$  个班第  $\kappa$  个监测点总的空气流量  $V_{ij\kappa}$  与第  $i$  天第  $j$  个班第  $\kappa$  个监测点的瓦斯百分含量的乘积:

$$M_{ij\kappa} = V_{ij\kappa} \varpi_{ij\kappa} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

7. 相对瓦斯涌出量  $R_{i\kappa}$  的计算

相对瓦斯涌出量  $R_{i\kappa}$  为平均日产一吨煤同期所涌出的瓦斯量, 那么第  $i$  天第  $\kappa$  个监测点的相对瓦斯涌出量为:

$$R_{i\kappa} = \sum_{j=1}^3 M_{ij\kappa} / t_{ik} \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

8.  $H_i$  的计算

为保证矿井安全, 所以采用第  $i$  天两个监测点的相对瓦斯涌出量最大值来表示当天的相对瓦斯涌出量, 则第  $i$  天的相对瓦斯涌出量:

$$H_i = \max_k R_{i\kappa} \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

通过计算得出30天的相对瓦斯涌出量 (见表1)

表1 每天相对瓦斯涌出量的最大值

天数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
相对瓦斯含量	23.178	22.865	21.778	21.631	22.363	26.11	23.295	21.363	23.16	21.652
天数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
相对瓦斯含量	20.79	20.17	21.97	23.721	21.52	20.523	25.395	24.542	20.799	21.528
天数	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
相对瓦斯含量	23.162	22.366	25.783	22.78	24.402	20.924	22.207	22.065	22.588	22.573

30天的相对瓦斯涌出量的最小值为  $20.523\text{ m}^3/t$ 、最大值为  $26.11\text{ m}^3/t$ , 说明每天工作面的相对瓦斯涌出量均超过瓦斯涌出量临界值 ( $10\text{ m}^3/t$ )。

已知绝对瓦斯涌出量为单位时间涌出的瓦斯体积（单位为  $m^3/\min$ ），根据附表 2 的数据可得每一天的绝对瓦斯涌出量：

表 2 每天绝对瓦斯涌出量

天数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
相对瓦斯含量	28.002	27.576	28.61	27.025	27.12	28.949	27.417	26.85	26.801	27.39
天数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
相对瓦斯含量	26.843	25.553	28.681	27.807	26.54	27.28	29.371	27.725	26.841	27.197
天数	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
相对瓦斯含量	27.817	27.602	29.291	27.228	27.683	26.838	27.887	26.992	27.357	27.725

运用 Matlab6.5 可以求出 30 天内超过相对瓦斯涌出量临界值的概率  $P = 100\%$ ，可以直接得出结论：该矿是属于“高瓦斯矿井”。

## (二)：问题二的分析与求解：

由附件二第一百六十八条，可知在所设置的六个监测点中只要瓦斯浓度超过 1.0% 报警器就会发出警报，在报警器发出警报之前整个矿井是安全的，那么要判断该煤矿不安全的程度，只需对瓦斯浓度超过 1.0% 的 25 个数据（见表三）进行处理。这里我们把经济学中个体指数和综合指数的概念<sup>[2]</sup>引申为本问题的个体爆炸危险度和综合爆炸危险度。

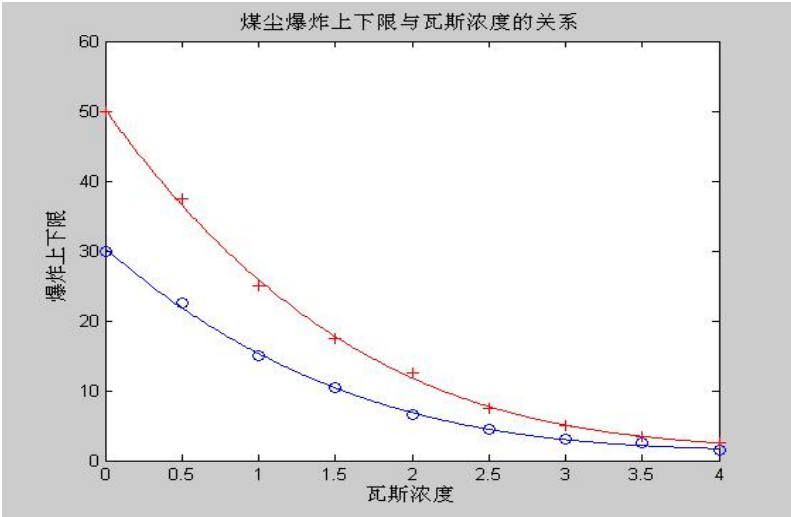
个体爆炸危险度越大，矿井的爆炸可能性越大。而各个监测点的煤尘浓度越大，其个体爆炸危险度越大。由于在某一瓦斯浓度下煤尘的爆炸下限是在一个范围内浮动的。设煤尘的爆炸下限在该范围里是均匀分布的。根据附表一分别拟合出不同瓦斯浓度与爆炸下限的最小值、最大值的关系（如图 1 所示）。构造出个体爆炸危险度函数，并进一步得到综合爆炸危险度函数，且综合爆炸的危险度越高发生煤矿发生爆炸的可能性越高。

模型二符号说明

参数	说明
$x_i$	表示第 $i$ 个超标数据的瓦斯浓度；
$y(x_i)$	表示瓦斯浓度为 $x_i$ 所对应的煤尘浓度；
$y_1(x_i)$	表示在第 $i$ 个超标数据的瓦斯浓度下的最小煤尘爆炸下限；
$y_2(x_i)$	表示在第 $i$ 个超标数据的瓦斯浓度下的最大煤尘爆炸下限；

$y_i$	表示第 <i>i</i> 个超标数据实际的爆炸下限（常数）；
$\zeta_i$	表示第 <i>i</i> 个超标数据的个体爆炸危险系数；
$\xi$	表示超标数据的综合爆炸危险系数；

通过数据，用曲线拟合的方法得到了煤尘爆炸上下限与瓦斯浓度的关系，并用 Matlab6.5绘图如下：



我们筛选出瓦斯浓度超过1.0%的数据(如下表):

风速	2.12	2.12	2.11	2.12	2.13	2.13	2.09	2.08	2.06	2.12	2.08	2.07	2.15
瓦斯含量	1.01	1	1.03	1.02	1.01	1.07	1	1.05	1.01	1	1.11	1.03	1.03
煤尘含量	7.15	7.2	7.1	7.28	7.13	7.1	7.45	7.32	7.66	7.46	7.66	7.5	7.18
风速	2.13	2.16	2.11	2.12	2.07	2.12	2.09	2.14	2.07	2.13	2.1	2.15	
瓦斯含量	1.04	1.02	1	1	1.07	1.05	1.18	1	1	1.03	1.06	1.03	
煤尘含量	7.26	7.28	7.16	7.1	7.06	7.45	7.26	7.46	7.57	7.23	7.23	7.21	

假定  $y_j$  在  $y_1(x_i) \sim y_2(x_i)$  内发生的概率是等可能的,即  $y_j$  在所在区间上服从均匀分布，具有如下密度函数：

$$f(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{y_2(x_i) - y_1(x_i)} & y_1(x_i) < y_i < y_2(x_i); \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$$

结合实际分析,在瓦斯浓度一定的情况下,煤尘浓度离爆炸下限点越近爆炸风险越大,将爆炸下限点的危险系数定为 1,由此定义第*i*个超标数据的个体爆炸危险系数为:

$$\zeta_i = \frac{y(x_i)}{y_i};$$

第*i*个超标数据的个体平均爆炸危险系数

$$E(\zeta_i) = \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} \frac{y(x_i)}{y_i} \times \frac{1}{y_2(x_i) - y_1(x_i)} dy$$

运用 *Matlab6.5* 编程解得 25 个超标数据的个体平均爆炸危险系数 (见表)

数据序数	1	2	3	4	5
危险系数	0.35808	0.35795	0.36085	0.36728	0.35708
数据序数	6	7	8	9	10
危险系数	0.37168	0.37038	0.37756	0.38362	0.37087
数据序数	11	12	13	14	15
危险系数	0.41312	0.38118	0.36491	0.37171	0.36728
数据序数	16	17	18	19	20
危险系数	0.35596	0.35298	0.36959	0.38427	0.41269
数据序数	21	22	23	24	25
危险系数	0.37087	0.37634	0.36745	0.37569	0.36644

个体爆炸危险系数介于35.298%到41.312%之间。

参考经济学综合指数概念<sup>[2]</sup>,定义综合爆炸危险系数为个体爆炸危险的加权调和平均,即综合爆炸危险系数*ξ*为:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{25} y(x_i)}{\sum_{i=1}^{25} \frac{y(x_i)}{\zeta_i}};$$

运用 *Matlab6.5* 编程可以求得:

$$\xi = 37.19\%$$

因此该煤矿的综合爆炸系数为37.19%。

(三): 问题三的分析与求解:

由附件1的背景资料可以知道:从降低瓦斯浓度的角度考虑,风速越大越好,但风速过大,将会增加巷道空气中的煤尘浓度,因此风速必需满足《煤矿安全规程》第一百零一条中附表二的要求。由问题二的数据,我们用拟合的方法确



定了瓦斯含量与风速、煤尘含量与风速的关系。煤尘爆炸下限与瓦斯含量的关系。于是我们确定以最佳总通风量为目标函数，以瓦斯浓度、煤尘浓度、风速和局部通风机额定风量和余裕风量为约束条件。构造了一个规划模型。

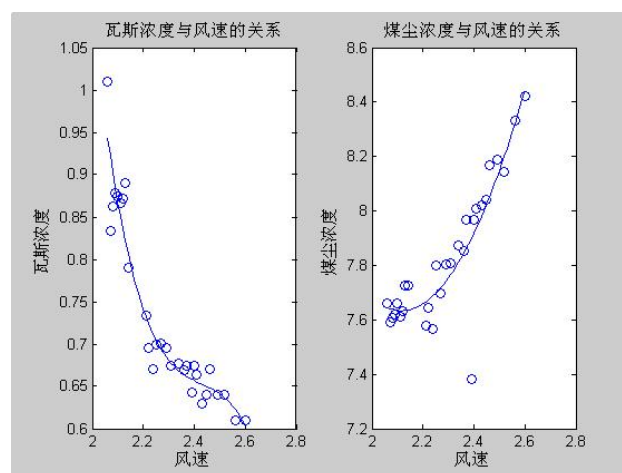
首先，我们根据附表 2 的数据拟合出瓦斯含量  $x_1$  与风速  $v_i$  的关系为  $x_1 = f(v_i)$ ，煤尘含量  $x_2$  与风速  $v_i$  的关系为  $x_2 = g(v_i)$ 。煤尘爆炸下限  $x_3$  与瓦斯含量  $f(v_i)$  的关系为  $x_3 = k(f(v_i))$ 。拟合图形如下：

瓦斯浓度与风速的关系

$$f(v_i) = -4.7731v^3 + 34.7717v^2 - 84.5771v + 69.3395$$

煤尘浓度与风速的关系

$$g(v_i) = -0.3814v^3 + 6.0834v^2 - 20.6322v + 27.6661$$



目标函数是最佳总通风量也就是使总通风量最小即：

$$\min Q = v_1 S_1 + v_2 S_2 + v_3 S_3 ;$$

约束条件如下：

- ① 为保证局部通风机正常工作巷道中至少需要有15% 的余裕量，结合物理学中流体力学的知识，在局部通风机所在巷道有如下要求：

$$85\%v_3 S_3 = v_4 S_4 + v_5 S_5 ;$$

- ② 瓦斯浓度的限制：为降低瓦斯使矿井爆炸的因素，各个监测点的瓦斯浓度应低于它的爆炸下限：

$$f(v_i) < 1\% ;$$

- ③ 煤尘浓度的风限制：为降低煤尘使矿井爆炸的因素，各个监测点的煤尘浓度应低于它的爆炸下限：

$$g(v_i) < k(f(v_i));$$

④ 风速限制：因井巷中的风速受限所以井巷中风速应介于最小值与最大值之间：

$$X_{i1} < v_i < X_{i2};$$

注： $X_{i1}$  和  $X_{i2}$  为井巷中允许的风流速度（见附录二第 103 条表二）。

通过上述分析，可建立如下非线性模型：

$$\begin{aligned} \min Q &= v_1 S_1 + v_2 S_2 + v_3 S_3 \\ s.t. &\begin{cases} 85\%v_3 S_3 = v_4 S_4 + v_5 S_5; \\ f(v_i) < 1\%; \\ g(v_i) < k(f(v_i)); \\ X_{i1} < v_i < X_{i2}; \end{cases} \end{aligned}$$

运用 Lingo8.0 对上述模型求解得：

煤矿所需要的最佳（总）通风量为  $Q = 37.5522m^3/s$ ；

工作面 I 所需要的风量为  $Q_1 = 11.6861m^3/s$ ；

工作面 II 所需要的风量为  $Q_2 = 11.6861m^3/s$ ；

局部通风机的风量为： $Q_3 = 22.0166m^3/min$ ；

## 5. 模型评价

模型的优点

（1）解决问题一时，对于某天某监测点相对瓦斯涌出的出量的计算，我们采用取任意监测点最大相对瓦斯涌出量的方法来计算当天最大相对瓦斯涌出量，同时求出每天的绝对瓦斯涌出量，然后将它们分别与各自的临界值进行比较，来判断瓦斯涌出量的高低。这样处理符合客观实际。

（2）对于问题二而言，我们巧妙地将经济学中个体指数和综合指数的概念引申为本问题的个体爆炸危险度和综合爆炸危险度。并且创造性地用个体爆炸危险度和综合爆炸危险度来衡量矿井的不安全程度，同时构造出个体爆炸危险度函数和综合爆炸危险度函数，解决问题的思路新颖。

（3）对于问题三的数据处理，我们首先对附表 2 的数据用 Excel 处理，以风速为自变量进行纵向排序，对于同一风速对应不同的变量时，我们对变量取均值。然后对同一监测点用曲线拟合的方法确定瓦斯含量与风速、煤尘含量与风速的关系。发现瓦斯含量与风速、煤尘含量与风速的拟合效果非常令人满意。于是用此拟合关系来进行计算。这样既使问题得到简化，又保证了所得结果的准确性和合理性。

(4) 本题中，我们所有方程的求解都采用软件编程求解，如果具体数据发生变化，我们只要稍加修改数据，便可得到结果。模型具有较强的实用性。

模型的改进方向

(1) 本题中我们没有考虑气压，风阻，温度等因素对瓦斯浓度，煤尘浓度和风速的影响，读者还可以从这几个方面去思考。

(2) 对于第三问的求解，我们还可以从网络信息流方面考虑模型的建立，由于时间关系我们这里没有讨论。

### 模型的推广

本题中，对于问题二的求解我们创造性地建立了个体爆炸危险函数和综合爆炸危险函数，此函数在指数评判方面可以进行广泛地应用和推广，如：面粉厂、水泥厂的粉尘危险性判断等。

### 参考文献：

- [1] 赵静 但琦，数学建模与数学实验（第2版），北京：高等教育出版社，2003
- [2] 赵彦云，经济统计和分析，北京：中国财政经济出版社，2003