基于双线性系统、差分方程的人口增长模型

摘 要

社会经济的许多领域的规划都必须考虑人口这一重要因素。而人口普查只能为我们提供某几个时间点的横截面数值，但在现实生活中，人们常常需要其他时间点的人口总数及其构成。于是一个迫切的任务就是如何用少数的几个时点的信息比较准确的得到较详尽的其他时点的人口数据。

人口系统发展是一个动力学过程，为强惯性系统，人口死亡率和出生率构成人口增长的双线性系统。

针对中短期预测，基于统计理论，将 5 年的死亡出生率，死亡率求期望，建立了人口增长的定常差分方程模型，预测至 2015 的人口发展趋势，通过 MATLAB 求解得到 2015 年的总人口为 14.17 亿，乡村城镇化趋势明显；并且人口在 2025 左右出现峰值，约为 15.1 亿。

针对长期预测，根据动力学发展过程理论，当时间尺度接近惯性系统的时间常数（社会人口的平均寿命）时，人口状态将发生明显改变。由此建立了人口增长的时变差分模型。并通过 MATLAB 求解，预测 2050 年的人口总数为 14.33 亿，人口系统达稳定状态。

然后，利用 Leslie 矩阵分析模型的稳定性。当时间 t（年）充分大时人口增长也趋于稳定。针对长期模型的检验，对不同的总和生育率做出了人口总数的变化曲线。得出当总和生育率的更替水平临界值略大于 2.0。

关键词：差分方程，强惯性系统，Leslie 矩阵，总和生育率

蔡忠祥、汪波权、周彦辉，指导教师：梅正阳

一. 问题重述与分析

1.1 问题重述

中国乃泱泱人口大国，人口规模是城市规划和土地利用总体规划中一项重要的控制性指标，人口规模是否合理，不仅影响到未来地区经济和社会发展，而且会影响到地区生态环境可持续发展。 因此准确地预测未来人口的发展趋势，制定合理的人口规划和人口布局方案具有重大的理论意义和现实意义。

根据国家人口报告，对短期、中期和长期人口预测作如下定义：十年内为短期，十到十五年为中期，五十年及其以上为长期。

人口发展过程是一个很缓慢的过程。它的“时间常数”接近平均期望寿命约七、八十年的时间。人口状态随时间变化的过程称为人口发展过程。

目前，中国人口发展出现了新的特点，突出表现为老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些因素都影响着中国人口的增长。

要能有利于人口与经济的社会的协调发展，必须将人口总量峰值控制15亿人左右，全国总和生育率在未来30年应保持在1.8左右。同时，近年的低生育水平反弹势能大，维持生育水平代价高，这就必须创新工作思路、机制和方法。在确定人口发展战略时，必须着眼于人口本身的问题，处理好人口与经济资源环境之间的相互关系。构建和谐社会，又要优先投资人的全面发展。

1.2 问题分析

本题是一个人口发展预测的问题。人口发展与一般种群增长一样，是由自然增长率决定的。然而，人类个体是一种社会的个体，所以人口发展有自己的特点。想到人口的迁移，性别比例等。人口发展受政策的影响，例如计划生育；也要受到人们意识的影响，像生育意识等。但是从社会层面上看，生育意识在整个社会上体现为妇女的生育模式。

首先，数据的处理。在经过分析和验证后，适当修正题中的个别有误数据后，利用有效数据进行建模求解。我们要提取出死亡率、生育率等，这是求解人口增长模型的必要数据。

其次，模型建立。和一般的预测模型一样，本模型也是个预测模型，所以考虑到用前一年的信息来推得下一年，于是我们想到差分方程模型。同时，将死亡率与出生率分开，分别与当年的人口相乘，于是得到一个双线性的模型，即死亡与出生都与当年的人口成线性关系。

最后，利用已有信息，对中短期与长期进行预测，得出反映人口发展与人口构成的关键指数。

二. 符号系统

符号	意　义	单位
$N(t)$	t 年度总人口数	万人
$x_i(t)$	t 年度 i 岁的人口总数	万人
$w_i(t)$	t年度 i 岁的女性人数	万人
$m_i(t)$	t年度 i 岁的男性人数	万人
$f_i(t)$	t 年度 i 岁的妇女平均每人一年生育的子女数	万人
$A(t)$	t 年度人口的平均年龄	岁
$\mu_i(t)$	t 年度 i 岁的年龄死亡率	_
$s(t)$	t年度男女性别比	_
$k_i(t)$	t年度 i 岁的女性比例	_
$b(t)$	t 年度人口相对出生率	_
$r(t)$	t 年度自然增长率	_

三. 模型假设

1）中国的市、镇、乡三个系统的整体封闭，不考虑国际上人口流动；
2）十年内为短期，十到十五年为中期，五十年及其以上为长期；
3）婴儿出生年份过了年底 12 月即为一岁；
4）90 岁及其以上年龄的人在模型建立和求解中，都按 90 岁考虑；

四. 模型分析与建立

4.1 模型分析

为了对我国中长期和长期人口进行预测，必须考虑我国人口的实际特征，传统的指数模型，logistic 模型都不能够得到令人满意的结果，因而必须建立适合中国人口增长的数学模型，宋健模型对于预测中国的人口增长具有借鉴作用。

在建立人口增长模型时，首先不考虑国际人口流动，即假设中国为一封闭的大系统，但由于我国人口地区分布的特征不能简单的用一个笼统的模型进行概括，所以可以假设市，镇，乡为独立的系统，通过对每个系统的人口增长建立预测模型，最后通

过求和得到全国的人口增长预测模型。

考虑到市，镇，乡每个系统均可用改进的宋健模型进行预测，因而我们首先建立对所有子系统都使用的人口增长预测模型：

4.1.1 封闭人口系统的离散模型

1）死亡人口

用t表示时间，并且以年度为单位。用$x_i(t)$表示t年度（比如 2001 年）满i周岁但不到$i+1$周岁的人口总数，$i=1,2,\cdots m$, m是人能活到的最高年龄，题中，m取为 90+。t 年度各年龄的人口总数 t 叫做人口年龄构成，记为向量形式 $x(t)=\{x_0(t),x_1(t),\cdots,x_m(t)\}$，叫做人口状态向量。

t年度满i周岁的人口数$x_i(t)$，经过一年后变成了$x_{i+1}(t)$，其中有一部分人由于各种原因而死亡，死亡人口数为$x_i(t)-x_{i+1}(t+1)$。据此定义年龄死亡率函数$\mu_i(t)$

$$\mu_i(t)=\frac{x_i(t)-x_{i+1}(t+1)}{x_i(t)},i=1,2,\cdots m \qquad \ldots\ldots (1)$$

得：

$$x_i(t+1)=[1-\mu_i(t)]x_i(t),i=1,2,\cdots m \qquad \ldots\ldots (2)$$

2）下面再讨论生育人口

首先定义女性比例函数$k_i(t)$，它是t年度i岁的妇女人数$w_i(t)$与i岁总人口数$x_i(t)$之比，即

$$k_i(t)=w_i(t)/x_i(t) \qquad \ldots\ldots (3)$$

式中，t年度满i岁总人口数为$x_i(t)$，则年满i岁的妇女人数为$k_i(t)x_i(t)$。妇女育龄区间记为$\left[a_1,a_2\right]$，a_1和a_2分别为有生育能力的妇女的最小和最大年龄，题中$a_1=15$，$a_2=49$。

用年龄别生育率$f_i(t)$表示t年度年龄为i周岁的妇女平均每人在一年内所生子女数。再用$F_i(t)$表示t年度年龄为i岁的妇女组在一年内所生育子女总数，则有

$$F_i(t)=f_i(t)k_i(t)x_i(t)=f_i(t)\omega_i(t) \qquad \ldots\ldots (4)$$

新生人口，即所有育龄妇女在t年度一年内所生育子女总数$\varphi(t)$为

$$\varphi(t)=\sum_{i=a_1}^{a_2}F_i=\sum_{i=a_1}^{a_2}f_i(t)k_i(t)x_i(t) \qquad \ldots\ldots. (5)$$

令 $f_i(t)=\beta(t)h_i(t)$， $i=a_1,a_1+1,\cdots a_2$， …… (6)

并且 $h_i(t)$ 满足下述条件

$$\sum_{i=a_1}^{a_2} h_i(t)=1 \qquad \text{…… (7)}$$

将（6）式两边从 a_1 到 a_2 对 i 求和，则有

$$\sum_{i=a_1}^{a_2} f_i(t)=\beta(t) \qquad \text{…… (8)}$$

其中 $\beta(t)$ 就是妇女总和生育率，为每名妇女按照某一年的各年龄组生育率度过育龄期，平均可能生育的子女数，是衡量生育水平最常用的指标之一。

将（8）代入（5）中，便得到

$$\varphi(t)=\beta(t)\sum_{i=a_1}^{a_2} h_i(t)k_i(t)x_i(t) \qquad \text{…… (9)}$$

由式（9）可以得出，t 年出生的人口数 $\varphi(t)$ 与该年总和生育率 $\beta(t)$ 成正比。

满足条件（7）的 $h_i(t), i=a_1,a_1+1,\cdots,a_2$，称为妇女生育模式。它反映了不同年龄上育龄妇女的生育水平。$h_i(t)$ 的大小说明 i 周岁年龄上生育水平的高低，用统计学语言，即不同生育年龄上的加权因子。在式（9）中

$$\sum_{i=a_1}^{a_2} h_i(t)k_i(t)x_i(t)=\sum_{i=a_1}^{a_2} h_i\omega_i(t) \qquad \text{…… (10)}$$

就是t年度生育了孩子的妇女加权平均数。$\varphi(t)$ 同样与妇女平均数成正比。

将（2）、（9）联立起来，就得到一个封闭的人口发展离散方程组。

$$\begin{aligned}
&\varphi(t)=\beta(t)\sum_{i=a_1}^{a_2} h_i(t)k_i(t)x_i(t)\,,\\
&x_0=\varphi(t)\\
&x_1(t+1)=(1-\mu_0)x_0(t)\\
&x_2(t+1)=(1-\mu_1)x_1(t) \qquad \text{…… (11)}\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
&x_m(t+1)=(1-\mu_{m-1}(t))x_{m-1}(t)
\end{aligned}$$

引入向量和矩阵符号，

人口状态向量 $$x(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_m(t)\end{Bmatrix},$$

人口状态转移矩阵 $H(t)=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1-\mu_1(t) & 0 & \ddots & & \\ 0 & 1-\mu_2(t) & \ddots & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\mu_{m-1}(t) & 1-\mu_m(t) \end{Bmatrix}$，

生育矩阵 $B(t)=\begin{Bmatrix} 0 \ \cdots \ b_{a1}(t)\cdots b_{a2}(t) \ \cdots \ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

其中 $b_i(t)=(1-\mu_0(t))k_i(t)h_i(t)$， $i=a_1,a_1+1,\cdots,a_2$ 。

则上述离散方程组(11)可表述为下述向量形式，即为封闭系统的人口增长模型：

$$x(t+1)=H(t)x(t)+\beta(t)B(t)x(t)$$
$$x(t_0)=x_0 \qquad \ldots\ldots (12)$$

4.1.2 开放人口系统的离散模型

式（12）描述的是封闭人口发展过程，如果考虑人口迁入、迁出和人口城镇化的趋势。引入人口迁移向量 $g(t)$：

$$g(t)=\begin{Bmatrix} g_0(t) \\ g_1(t) \\ \vdots \\ g_{m-1}(t) \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots (13)$$

其中 $g_i(t)$， $i=1,2,\cdots m-1$，是 t 年度年满 i 岁的人口迁移数量，迁入为正，迁出为负。 $g(t)$ 是带有统计性质的随机变量。

将式（13）加入式（12）得到完整的人口增长模型：

$$x(t+1)=H(t)x(t)+\beta(t)B(t)x(t)+g(t)$$
$$x(t_0)=x_0 \qquad \ldots\ldots (14)$$

上述方程为完整的人口发展离散方程。右端第一项反映了死亡因素对人口发展的影响；第二项反映了生育因素对人口发展的影响；第三项反映了迁移对人口发展的影响。

方程右边反映 t 年度人口年龄构成演变到 $t+1$ 年度。方程左边则是 $t+1$ 年度人口年龄构成。因此，方程组（14）全面反映了出生、死亡、迁移和时间这四个影响人口发展的基本因素。

上式（14）中，妇女总和生育率 $\beta(t)$ 是控制量，通过控制、调节 $\beta(t)$ 来改变和控制人口的发展趋势。状态向量是年龄构成 $x(t)$ 。从控制论的观点来看，式（14）是一个双线性系统。

针对市、镇和乡三个系统而言，均为开放人口系统，但把市、镇和乡作为一整体，则为封闭的人口系统。即有， $\sum g(t)=0$ 。

4.2 人口增长预测模型的建立

针对市、镇和乡三个系统，用 $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), x^{(3)}(t)$ 分别表示 t 年度市、镇和乡的总人口。

最终基本模型为

$$N(t)=\sum_{i=1}^{3} x^{(i)}(t)$$
$$x^{(i)}(t+1)=H^{(i)}(t)x^{(i)}(t)+\beta^{(i)}(t)B^{(i)}(t)x^{(i)}(t)+g^{(i)}(t)$$
$$x^{(i)}(t)=w^{(i)}(t)+m^{(i)}(t)\text{，}\quad i=1,2,3 \qquad \ldots\ldots (15)$$

五. 模型进一步分析与求解

5.1 数据分析

通过对附录 2 中的数据进行分析，以及与中华人民共和国国家统计局（http://www.stats.gov.cn）上的数据进行对比，发现附表 2 中 2001-2004 年的城市男、城市女、镇男、镇女、乡男、乡女的数据应为 1‰抽样调查数据；2005 年的应为 1.31％。另外，2003 年的城市妇女生育率、镇妇女生育率、乡村妇女生育率比起其他年份少了一个数量级。所以，在模型建立求解中，对上数数据进行修正。

另外，在尝试对 2001-2005 年死亡率、生育率等做拟合时，发现 1-3 次的拟合都不理想，四次以上已经没有意义。下面给出 2001-2005 年 20 岁城市男性的死亡率的散点图（图 1）：

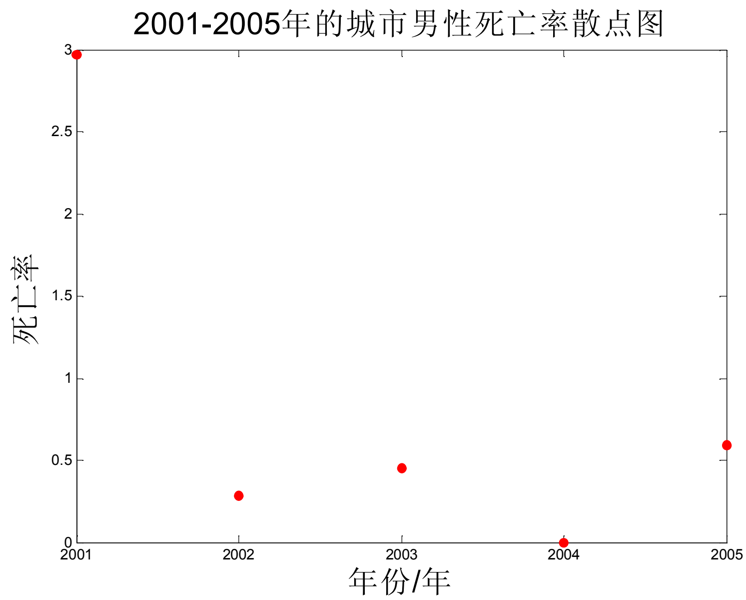


图 1 2001-2005 年的城市男性死亡率散点图

图中散点拟合的符合度太低，根据统计理论，采用期望作为一个计算的标准。

5.2 中短期人口预测

短期模型直接由上面基本模型式（15）计算，下面进行简化分析与实现

5.2.1 中短期人口预测模型简化

根据国家相关政策，定制人口预测十年内为短期，十到十五年为中期。这里取 5 年为一个时间段，2005 年为初始点，预测短期 2010 年，中期 2015，2020 年的人口结构。

先观察市、镇、乡三元结构的发展趋势，每个子系统占总体系的比例 r_{s1}, r_{s2}, r_{s3} 利用 Matlab 拟合工具箱，2001 到 2005 年数据拟合，随时间呈线性关系（如图 2），

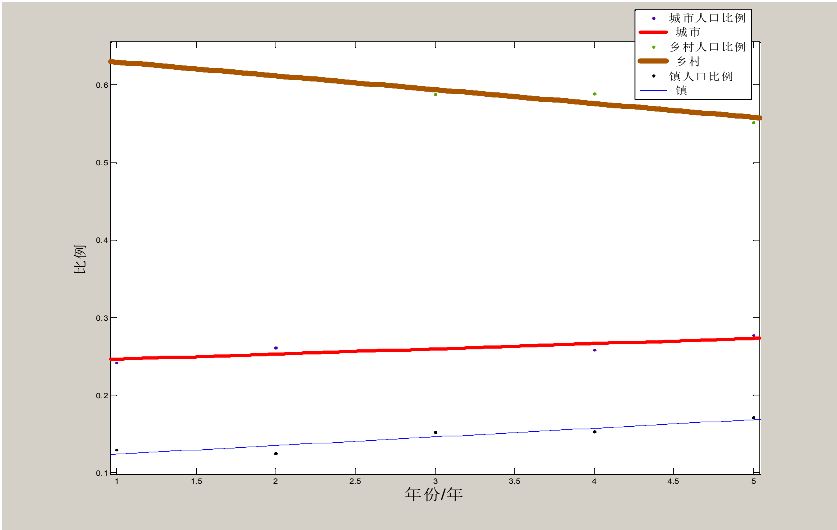


图 2 市镇乡人口比例

其中线型最粗（最上一条）为乡村人口比例曲线， $f(x) = -0.01782x+0.6472$

中间一条为城市人口比例曲线， $f(x) = 0.006694x+0.2398$

下面一条为乡村人口比例曲线， $f(x) = 0.01113x+0.113$

首先模型假设中国为一个大的封闭系统，其中的三个子系统市，镇，乡之间相互依存，分别记为 S1, S2, S3（如下图 3 所示）

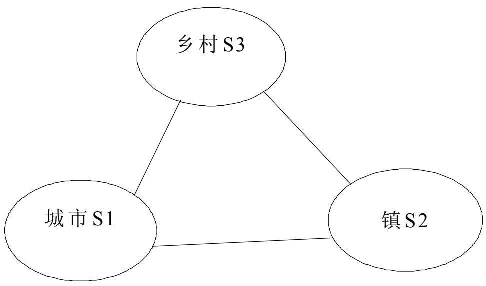


图 3

这里绕开了迁移率求解，对于市、镇、乡三元结构，巧妙地打断市、镇、乡三个子系统之间的联系。因为对于中短期预测，三个子系统独立发展按照模型 4.1 求解得

到人口数与实际考虑迁移按照 4.2 求解得到的人口总量，经过误差分析，检验均符合较好。

表 1 2001 和 2005 年人口结构表

指标	2001 年人数/万人	2005 年人数/万人
总人口	122055.9	129662.4
城市	29537.2	35938.2
镇	15825.5	22205.95
乡	76693.2	71518.2
男性	65370	70309
女性	56686	59354

故，以 2001 年数据为初始条件，利用封闭系统模型 4.1 的式（12），与迭代求得 2005 年人口结构如下，并与表 1 中实际 2005 年数据对比。

表 2 2005 年数据对比

指标	求得 2005 年人数/万人	实际 2005 年人数/万人	相对误差/%
总人口	131260.0	129662.4	1.23
市	36380.0	35938.2	1.21
镇	22480.0	22205.95	1.23
乡	72400.0	71518.2	1.22
男性	66916.0	65506.0	1.24
女性	64344.0	64094.0	1.19

通过上表分析，得到 S1、S2、S3 系统最终都符合的优化模型：

$$x(t+1) = H(t)x(t) + \beta(t)B(t)x(t)$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad \ldots\ldots \quad (5.1.1)$$

再由数据分析中可知，死亡率、生育率可用作均值处理。进而简化模型为：

$$x(t+1) = Hx(t) + \beta(t)Bx(t)$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad \ldots\ldots. \qquad (5.1.2)$$

5.2.2 中短期人口预测模型求解

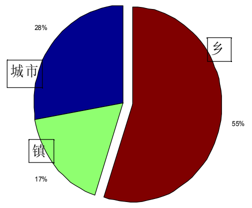
中短期定义为 5～20 年，取 2005 年数据作为初始值 $t_0 = 2005$,带入（5.1.2）差分方程，求得 2010，2015 年这两个关键时间点的横截面人口结构，如下表：

表 3 2010 年与 2015 年人口结构

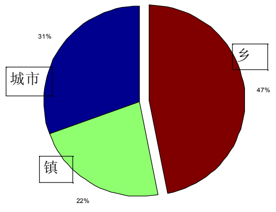
指标	2010 年人数/万 人	2015 年人数/万人
总人口	135510	141730
城市	41561	48217

镇	30395	39670
乡	63554	53843
0～14 岁	25044	27548
15～64 岁	102470	102680
65 岁及其以上	15052	18523

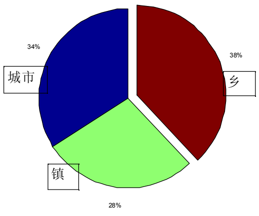
1） 城镇化分析：乡村人口比例（饼图中分离的部分）逐年下降，乡村城镇化明显。



2005 年比例



2010 年比例



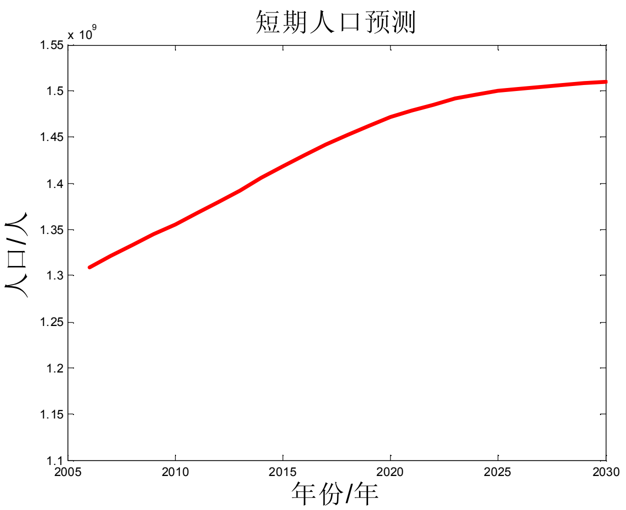
2015 年比例

2）平均年龄：

表 4 平均年龄

年份	平均年龄
2005	35.0328
2010	36.5485
2015	37.5563

3）中短期（2005～2030 年）预测总人口曲线图



.图 4 短期人口预测

图中曲线峰值出现在 2025 年附近，峰值人口约为 15.1 亿。

5.3 长期人口预测模型

由于一种人口政策的社会效果不能在数年内看出其全部表现。制定政策的人甚至不能期望在他们自己的寿命范围内看出该项政策的最终结局，只有后代才能根据实际效果来评价其正确与否。

因为市、镇、乡依据 4.2 中的基本模型：

$$x(t+1)=H(t)x(t)+\beta(t)B(t)x(t)+g(t)$$
$$x(t_0)=x_0$$

由于基本模型各项参数均是含时变量，对中短期预测影响不大，但在长期预测中，若忽略时间因素，时间上的误差积累，将导致预测的误差越来越大。比如

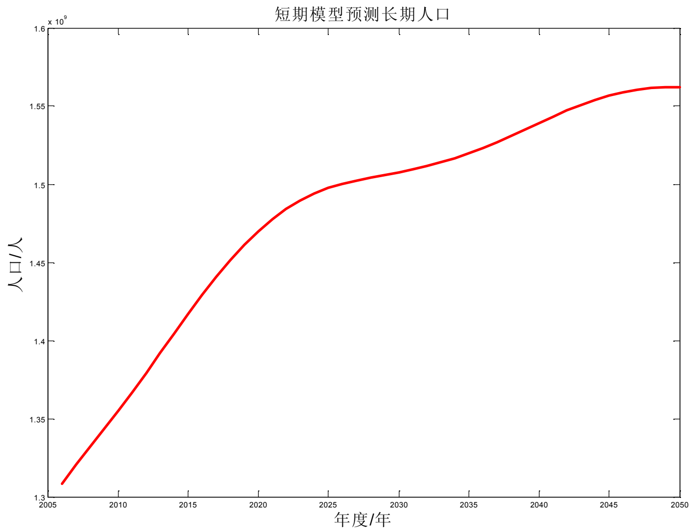


图 5 短期模型预测长期人口

下面，用 5.1 中的短期模型来估计 2020 年以后的人口发展，如图 5。

发现在 2025 年以后，过了一个峰值之后，人口总数持续上升，显然背离了实际情况。所以此模型对长期预测不再适用。

因此，长期预测要求找到参数随时间的变化规律。

首先，迁移向量 $g(t)$ 随时间变化，但是考虑到人口迁移主要受到政策的控制和城市人口的容纳度的影响，所以：

$$g(t)=g'(t)+\varepsilon_1(t)$$

其中，$g_1(t)$ 是关于时间 t 的总体趋势函数，而 $\varepsilon(t)$ 是考虑迁移受多种因素影响，而产生的波动。

长期模型与短期的差别除了在迁移上，还表现在人口转移矩阵 $H(t)$ 和生育矩阵 $B(t)$。同样，考虑长期模型的影响因素复杂性，类似 $g(t)$，给出下面修正式：

用于计算 $H(t)$ 的死亡率：$\mu(t)=\mu'(t)+\varepsilon_2(t)$

生育矩阵 $B(t)$ 修正为：$B(t)=B'(t)+\varepsilon_3(t)$

于是有：$x(t+1)=H'(t)x(t)+\beta(t)B'(t)x(t)+g'(t)+\varepsilon_1(t)$

其中 $H'(t)$ 与 $B'(t)$ 为分别加入 $\varepsilon_2(t)$ 和 $\varepsilon_3(t)$ 后所得。

5.3.1 长期人口预测求解

为了方便求解，将 $\varepsilon(t)$ 用 t 的简单函数进行处理，这里是用

$$\varepsilon(t)=(t-2005)\times 0.001$$

进行计算。

1）根据模型假设，50 年预测为长期，取 2050 年时间截断面，2050 年人口结构如下表

表 5 2050 年人口结构

指标	2050 年人数/万人
总人口	143270
市	48081
镇	53540
乡	41663
男子	73211
女子	70059
0～14 岁	22796
15～64 岁	89056
65 岁及以上	35767

2）由上表得，2050 年，市、镇、乡比例如下图：

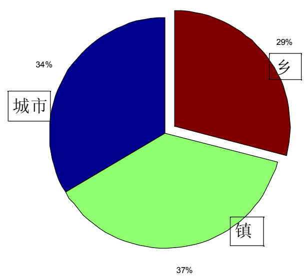


图 6　2050 年市、镇、乡人口比例

3）平均年龄

$A(t)=\frac{1}{N(t)}\sum_{i=0}^{m} ix_i(t)=43.72$，对比 2005。2010。2015 年的平均年龄，人口结构逐步趋向老龄化，最终达稳定状态。

六. 模型评价与检验

6.1 模型稳定性分析

模型 4.2 中式（12）$x(t+1)=H(t)x(t)+\beta(t)B(t)x(t)$，为双线性系统，其中人口状态转移矩阵 $H(t)$，人口状态向量 $x(t)=\{x_0(t),x_1(t),\cdots,x_m(t)\}$ 是 m 维向量，因此，系统的状态空间是 m 维的欧几里德空间向量 R^m，它是由一切 m 维向量所组成的实线性空间。

可以写为 $x(t+1)=Hx(t)+\beta Bx(t)=[H+\beta B]x(t)$,令 L，即 Leslie 矩阵 $L=H+\beta B$，得 $x(t+1)=Lx(t)=L^k x(0)$，$k=1,2,\cdots$ …… （15）

$x(t)$ 系统的稳定状态由 Leslie 矩阵决定。据文献[2]:

定理 1 L 矩阵有唯一的正特征根 λ_1，且它是单重的，λ_1 对应的正特征向量

$$x^*=[1,s_1/\lambda 1,s_1s_2/\lambda_1^2,\cdots,s_1s_2\cdots s_{n-1}/\lambda_1^{n-1}]^{\mathrm{T}}$$

L 矩阵的其 $n-1$ 个特征根 λ_k 都满足

$$|\lambda_k|\le\lambda_1,\quad k=2,3,\cdots n \qquad \text{……（16）}$$

定理 2 若 L 矩阵第一行有两项顺次元素都大于 0，则式（16）中仅等号不成立，即

$$|\lambda_k|<\lambda_1,\quad k=2,3,\cdots n \qquad \text{…… （17）}$$

且由式（15）表示的 $x(t)$ 满足 $\lim_{t\to\infty}x(t)/\lambda_1^k=cx^*$ …… （18）

从上述定理可以对时间充分大（$t\to\infty$）后人口按年龄组的分布 $x(t)$ 的性态做出如下分析：

1）由式（18），有 $x(t)=c\lambda^k x^*$ …… （19）

这表明当 t 充分大时，人口年龄的分布趋向稳定，其各年龄组的数量占总量的比例与特征向量 x^* 中对应分量占总量的比例相同，即 x^* 就表示了人口按年龄组的分布状况，故 x^* 可称为稳定分布，它与初始分布 $x(t_0)$ 无关。

2）由式（19）又可以得到

$$x_i(t+1)=\lambda x_i(k),\quad i=1,2,\cdots n$$

这说明当 t 充分大时人口增长也趋于稳定，其各年龄组的数量都是上一年度的 λ 倍，即人口增长完全由 Leslie 矩阵的唯一正特征根决定。显然，当 $\lambda>1$ 时，人口递增；$\lambda<1$ 时，人口递减;；$\lambda=1$ 时，人口总量不变。其中 λ 可称为固有增长率。

6.2 模型检验

6.2.1. 对短期模型中三系统处理方案的讨论：

针对 5.1 中市、镇、乡三个系统，做以下分析：

由于（一）三个系统之间可以一步到达，所以我们认为三个系统之间的人口只进行一次迁移（从始点至终点）。例如群体从乡迁移到镇再到市，迁移人口进行了两次迁移，但本模型将其当作从乡到市的一次转移。

（二）群体人口的出生率，死亡率，生育率在中短期时间范围内受环境的影响很小因而忽略不计，并认为迁移人口的出生率，死亡率，生育率仍与原所在系统保持一致，例如有群体 P 从乡迁移到市，但群体 P 的出生率，死亡率，生育率仍旧保持不变具有乡系统的属性（出生率，死亡率，生育率）。

（三）本问题中系统区别于系统的因素可以认为是出生率，死亡率，生育率；并把这些因素作为系统的属性。

由于，在 10-15 年之间转移的人口至多只能产生一代，因而可以考虑以下三种情况：

1) 假设所有的迁移人口在新系统中不产生下一代，即可以把他算作原所在系统的人口，因而对于每个小系统而言，虽然有流动人口，但就整个大的封闭系统而言不受影响。
2) 假设所有的迁移人口在新系统中产生下一代.虽然在新系统中产生后代，但他的数量仍旧与其在原系统中所产生的后代相同，所以对整个大的封闭系统不产生影响。
3) 迁移的人口中一部分产生后代，一部分不产生后代。根据(1),(2)的分析知迁移人口对整个大系统不产生影响。

6.2.2. 长期预测模型中，对总和生育率的讨论

在长期预测模型中，针对不同的 β 得到 2005-2050 的人口总数变化趋势。可见，在 β=2.0 与 β=2.3 之间，人口最终会趋于稳定，β=2.5 时 2045 年后的人口增长也比较缓慢。这与人口增长的特点是一致的。因为，一旦达到生育更替水平，出生和死亡将逐渐趋于均衡，在没有国际迁入与迁出的情况下，人口将最终停止增长，保持稳定状态。

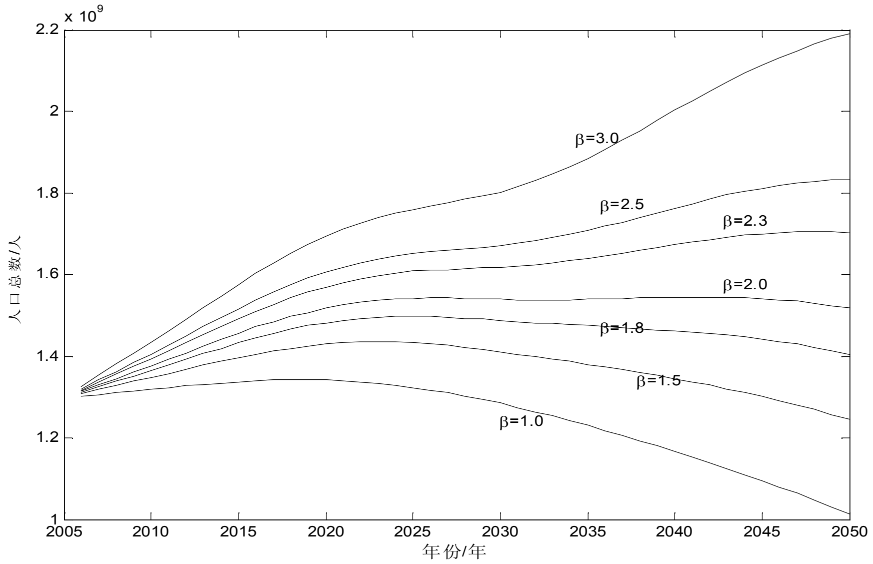


图 7 不同总和生育率下的人口增长趋势

6.3 模型优点

1．在 4.2 的模型建立中，死亡率和出生率（也就是相应的人口的自然增长率）作为此人口预测模型的基础，这是符合种群增长模型的特点的。同时，人口增长模型有自身的特点，比如迁入与迁出。于是，我们由封闭模型来得到了考虑迁入、迁出的开放模型。

与此同时，在本题中，根据模型假设将中国看作一个封闭系统，其中包含三个开放的子系统。从而得到符合本题实际的差分模型。

所以，从模型建立过程来看，此模型符合从一般到特殊的过程。从模型考虑因素来看，包含了影响人口的重要因素。

2．在短期模型中，考虑到此模型具有短期的特点，所以部分参数变化对整体的影响较小。所以，做出合理的简化，方便了模型的求解。而由 5.1 中的定量检验得到 2005 年总人口误差为 1.23%，市、镇、乡相应的人口误差分别为：1.21%，1.23%，1.22%。而男、女性人口误差为 1.24%，1.19%。

3．在长期模型中，尽管最终发现人口总数趋于稳定，但是在人口发展过程中，由于多因素的影响，可能产生波动。于是，在模型中加入了扰动项。基于这点的考虑，使得模型更加充分。

4．此模型与 Logistic 模型相比，多考虑了人口结构的作用。比如，各年龄段的人口，性别比等等。

6.4 模型缺点

1．把整个中国看作一个封闭的系统，不考虑外国人口的迁入与本国人口的迁出。这在人口发展历史上是不可取，所以本模型作此假设，也就限定了此模型的应用范围。

2．在短期模型中，简化处理时，忽略了一些参数的变化，必定会损失一些精度。

这里也可视为模型的不足之处。比如，将死亡率等取期望，将人口状态转移矩阵 $H(t)$ 转化为常矩阵 H 进行计算，这样必然导致存活人口与实际有差异。

七. 参考文献

[1] 宋健 于景元，人口控制论，北京：科学出版社，1985.5
[2] 姜启源 谢金星 叶俊，数学建模（第三版），北京：高等教育出版社，2003.8
[3] 叶其孝 姜启源等译，数学建模（第 3 版），北京：机械工业出版社， 2005
[4] 陈杰，MATLAB 宝典，北京：电子工业出版社，2007.1
[5] 王彦，八十年代以来我国人口发展的数学模型和展望，政学者论文集，2002