飞行管理模型的线性化处理方法

刘铁成　张　良　聂兆虎
（山东大学，济南 250100）
指导教师：许宝刚

编者按：该答卷针对飞行管理问题的实际背景，采用计算机模拟和线性规划相结合的方法较好地解决了问题。论述条理清晰，计算结果正确。所采用方法的特点是运算时间短，普适性较强具有一定的启发性，特将有关部分予以发表。

关键词：线性规划，模拟，管理。

一、模拟与线性规划模型

要解决飞行角度调整问题，首先要判断出哪些飞机会在区域内发生碰撞，令 $l_{i,j}(t) = (x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_j(t) - y_j(t))^2 - 64$，整理得

$$l_{i,j}(t) = at^2 + bt + c$$

其中

$$a = 4\nu^2 sin^2(\frac{\theta_i^0 - \theta_j^0}{2}), \nu = \nu_i = \nu_j$$

$$b = 2\nu[(x_i^0 - x_j^0)(cos\theta_i^0 - cos\theta_j^0) + (y_i^0 - y_j^0)(sin\theta_i^0 - sin\theta_j^0)]$$

$$c = (x_i^0 - x_j^0)^2 + (y_i^0 - y_j^0)^2 - 64$$

两架飞机 P_i 和 P_j 在区域内发生碰撞的条件是：

1）两架飞机间的最短距离小于等于 8 公里；

2）刚达到距离 8 公里时两飞机仍在区域内。

由条件 1）可得约束

$$b^2 - 4ac \geq 0 \tag{3}$$

且两飞机距离达到 8 公里的时刻为

$$T_{ij} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

由条件 2)可得下列约束

$$\begin{cases} T_{i,j} > 0 \\ 0 \le x_i(T_{i,j}) \le 160 \\ 0 \le x_j(T_{i,j}) \le 160 \\ 0 \le y_i(T_{i,j}) \le 160 \\ 0 \le y_j(T_{i,j}) \le 160 \end{cases} \tag{4}$$

如果 P_i 和 P_j 同时满足(3)和(4),它们就会在区域内相撞,否则不会在区域内相撞,根据上述结论,我们编制了计算机程序 Aircraft Administration(程序见附录),求出各个相撞的飞机,并对相撞的任何两架飞机进行调整,使其满足:

(1) 调整后相撞飞机的总数量不大于调整前相撞飞机的总数量;

(2) 两架相撞飞机设为 P_i,P_j. 若 P_i 调整后相撞飞机的总数量小于 P_j 调整后的相撞飞机的总数量,则优先考虑调整飞机 P_i。

(3) 若 P_i 调整后相撞飞机的总数量等于 P_j 调整后的相撞飞机的总数量,则调整角度较小的一个飞机。

依照上述原则,经过反复调整,即可得到一个满足题目要求的较优的调整范围。

对给定的两架飞机 P_i 和 P_j,我们考虑它们的相对运动,P_i 和 P_j 相撞当且仅当 P_i 在某一时刻以相对速度 $\vec{v}_{i,j}$ 进入以 P_j 为圆心,以 8 公里为半径的圆形区域内,如图 1 所示,设图中的圆的半径为 8 公里,O 点有一架飞机 P_i,C 点有一架飞机 P_j,则∠AOB 即为 P_i 相对于 P_j 做相对运动时的禁飞方向。

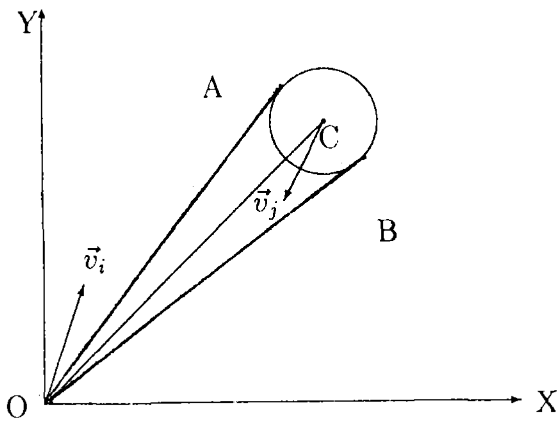

图 1

在给出线性规划模型之前,我们先给出模型中要用到的符号和函数的定义。

令 $f:[0,2\pi]\times[0,2\pi]-\{[(\alpha,\alpha)]\mid 0\le\alpha\le 2\pi\}\to[0,2\pi]$,对 $\alpha\in[0,2\pi]$ 和 $\beta\in[0,2\pi]$,令

$$f(\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\alpha+\beta+\pi}{2} & \text{当 } \alpha>\beta \text{ 且 } \alpha+\beta<3\pi\\ \dfrac{\alpha+\beta-3\pi}{2} & \text{当 } \alpha>\beta \text{ 且 } \alpha+\beta\geq 3\pi\\ \dfrac{\alpha+\beta+3\pi}{2} & \text{当 } \alpha<\beta \text{ 且 } \alpha+\beta<\pi\\ \dfrac{\alpha+\beta-\pi}{2} & \text{当 } \alpha<\beta \text{ 且 } \alpha+\beta\geq\pi\end{cases}$$

易见 $f(\alpha,\beta)$ 是 α 和 β 的线性函数，且 $\theta_{ij}=f(\theta_i,\theta_j)$。

令 $\varphi_{i,j}$ 是点 $(x_i(0),y_i(0))$ 指向点 $(x_j(0),y_j(0))$ 的向量与 X 轴正向的夹角，$\varphi_{i,j}$ 的值由下式给出，

$$\varphi_{i,j}=\begin{cases}arcctg\,\dfrac{x_j(0)-x_i(0)}{y_j(0)-y_i(0)} & \text{当 } y_j(0)-y_i(0)>0\\ \pi+arcctg\,\dfrac{x_j(0)-x_i(0)}{y_j(0)-y_i(0)} & \text{当 } y_j(0)-y_i(0)<0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{当 } y_j(0)=y_i(0)\end{cases}$$

令 $d_{i,j}=\sqrt{(x_i(0)-x_j(0))^2+(y_i(0)-y_j(0))^2}$，$\psi_{ij}=arcsin\,\dfrac{8}{d_{i,j}}$，则不碰撞的条件为：$\theta_{i,j}-\varphi_{i,j}>\psi_{i,j}$ 或 $\varphi_{i,j}-\theta_{i,j}>\psi_{i,j}$。令

$$g(\theta_{i,j},\varphi_{i,j})=\begin{cases}\theta_{i,j}-\varphi_{i,j} & \text{当 } \theta_{i,j}>\varphi_{i,j}\\ \varphi_{i,j}-\theta_{i,j} & \text{当 } \theta_{i,j}<\varphi_{i,j}\end{cases}$$

设第 i 架飞机为避免相撞需沿逆时针调整 $\triangle\theta_i^1$ 或沿顺时针调整 $\triangle\theta_i^2$，且二者之中至少有一个为零（非零的值就是飞机飞行角度调整的幅度 $\triangle\theta_i$）。我们以所有飞机的调整幅度之和最小为目标，建立线性规划模型如下：

目标函数 $\quad min\ z=\sum_{i=1}^{n}(\triangle\theta_i^1+\triangle\theta_i^2)$

约束条件

$$\begin{cases}a_i^1+a_i^2\leq 1 & i=1,2,\cdots,n\\ a_i^1=0,1 & i=1,2,\cdots,n\\ a_i^2=0,1 & i=1,2,\cdots,n\\ \triangle\theta_i^j\leq\dfrac{\pi}{6}a_i^j & i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2\\ \theta_i=\theta_i^0+\theta_i^1-\theta_i^2 & i=1,2,\cdots,n\\ \theta_{i,j}=f(\theta_i,\theta_j) & \\ g(\theta_{i,j},\varphi_{i,j})>\psi_{i,j} & i=1,2,\cdots,n-1,\ j=i+1,\cdots,n\end{cases}$$

对一般的情况来讲，当 θ_i 是个未知量时，线性函数 $f(\theta_i,\theta_j)$ 和 $g(\theta_{i,j},\psi_{i,j})$ 都难以确定。但在给定数据的条件下，可先运用计算机模拟得到一可行的调整方案 $\{\triangle\theta'_1,\triangle\theta'_2,\cdots,\triangle\theta'_n\}$，在此方案的基础上，以各飞机的初始飞行角度为主要依据，确定 $f(\theta_i,\theta_j)$ 和 $g(\theta_{i,j},\psi_{i,j})$（当 $\triangle\theta'_i,(1\le i\le n)$ 都比较小时，此方法尤其有效），故我们的线性规划模型是可行的，对得出的解我们继续用计算机模拟进行优化，在各飞机的飞行角度调整幅度之和不增加的条件下，使各飞机调整幅度尽量均衡，即，使调整幅度最大的飞机的调整角度最小，因此，我们认为我们所设计的这一模型对处理实际问题是会非常有效的。

飞行管理问题的逐步逼近搜索方法

王　崧　　于劲松　　陆　昱

（北京大学，北京 100871）

指导教师：雷功炎

编者按：本文给出了一种逐步逼近的搜索方法，它尽管不能保证求出最优解，但具有以下三个特点：(1)简单易于编程计算。(2)对目标为绝对值函数与平方和函数两种模型都适用。(3)由计算结果看出对该问题是一个可行的方法。这里只摘录了原文的部分段落。

关键词：搜索法，全局最优解，局部最优解

模型的建立

由于要求中方向解的误差不超过 0.01 度，我们可以只考虑样本空间 $\Omega=[-30°,30°]\times\cdots\times[-30°,30°]$ 中所有坐标均为 0.01 的整数倍的点。令

$$\Omega' = \{\triangle\alpha\in\Omega \mid 100\triangle\alpha_i \text{ 为整数}, i=0,1,2,3,4,5\}.$$

则 Ω' 中共有 $6001^6\cong4.7\times10^{22}$ 个点。要通过遍历 Ω' 中所有元素来求最小值是不可能的。因此，我们采取了一种搜索算法，实践证明它可在允许的时间消耗下给出较优解（通过本文中后面的具体例子中用此搜索结果与证明了的最优解的比较，我们发现此结果已完全满足了我们的要求）。仍然记

$$F(\triangle\alpha)=\begin{cases}+\infty & \text{存在 } i,j,\ DIST(A_i,A_j)\le 8\\ f(\triangle\alpha) & \text{其它}\end{cases}$$