第 30 卷第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 30　No. 1
2000 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan. 2000

数学建模

自动化车床管理的数学模型

杨振华,　邱中华

(南京邮电学院应用数理系, 南京　210003)

摘要:　本文针对 1999 年全国大学生数学建模竞赛A 题——自动化车床管理问题的问题(2), 建立了完整的数学模型, 并给出了该数学模型的解

1　模型假设

我们先考虑只有刀具故障的情况

1. 刀具故障的发生满足正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu=600.0$, $\sigma=195.644$(若取无偏估计 $\sigma=196.63$, 对建模无本质影响, 仅是计算结果有微小偏差). 密度函数为 $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$. 除刀具故障外, 无其它故障

2. 每生产 s 个零件检查一次, 一旦检查到不合格品则换刀. 至多生产 u 个零件后更换刀具

3. 不合格零件损失费用 $f=200$ 元/件, 检查费用 $t=10$ 元/次, 故障调节费用 $d=3000$ 元/次, 误判停机费用 $a=1500$ 元/次, 正常更换刀具费用 $k=1000$ 元/次

在上述假设条件下, 最多检查次数为 $n=\left[\frac{u-1}{s}\right]$.

2　数学模型

$$\min F(s,u)=\frac{E(F)}{E(N)}$$

其中 $E(F)$ 为各种费用之和的期望值, $E(N)$ 为零件合格品数目的期望值

$$E(F)=\sum_{m\in M}F^{(m)}P^{(m)},$$

$$E(N)=\sum_{m\in M}N^{(m)}P^{(m)}.$$

其中, M 为事件的各种可能情况组成的集合.

下面, 我们遍历刀具故障出现与第一次检查出不合格品这两个事件发生的所有情况来计算 $E(F)$ 与 $E(N)$.

设刀具故障发生在第 $i-1$ 次检查与第 i 次检查之间($1\le i\le n+2$), ($i=n+1$ 表示刀具故障出在第 n 次检查之后, 生产 u 个零件之前; $i=n+2$ 表示刀具出现在生产 u 个零件之

收稿日期: 1999-11-20

后). 设第一次查出不合格品出现在第 j 次检查中(前 $j-1$ 次检查均合格) $(1\le j\le n+1)$, $(j=n+1$表示 n 次检查均为合格品).

刀具故障出现与第一次检查出不合格品这两个事件的发生可分为以下几种情形:

(一) $1\le i\le n$: (1) $1\le j\le i-1$; (2) $i\le j\le n$; (3) $j=n+1$

(二) $i=n+1$: (1) $1\le j\le n$; (2) $j=n+1$;

(三) $i=n+2$: (1) $1\le j\le n$; (2) $j=n+1$;

下面我们就根据这几种情形来计算 $E(F)$ 与 $E(N)$.

(一) $1\le i\le n$, 我们将故障发生的区间$[(i-1)s, is)$分成 s 个小区间:

$$[(i-1)s+r, (i-1)s+r+1)\ (r=0,1,\cdots,s-1)]$$

(1) $1\le j\le i-1$

事件发生的概率: 前 $j-1$ 次检查均为合格品, 概率为 0.98^{j-1}, 第 j 次检查为不合格品, 概率为 0.02, 因此, 事件发生的概率为: $P=\int_{(i-1)s+r}^{(i-1)s+r+1} g(x)\mathrm{d}x\cdot 0.98^{j-1}\cdot 0.02$

零件合格品数: j 次检查中, $j-1$ 个为合格品, 1 个为不合格品, 还有 $j(s-1)$ 个零件构成 成功概率为 0.98 的 $j(s-1)$ 重贝努里试验, 合格品数的期望为 $0.98j(s-1)$. 因此: $N=j(s-1)0.98+j-1$.

注 这里对零件合格品的概率理解为: 除去已确定为合格或不合格的零件, 别的零件的合格品的概率为98%. 另外还有一种理解, 即不论检查出多少个合格品或不合格品, 认为其总体合格品概率为 98%, 那样对建模的结果稍有影响(故障时的合格品概率有类似的问题).

费用: 共检查了 j 次, 检查费用为 jt; 共生产了 js 个零件, 合格品数的期望为N, 因此, 不合格品数的期望为 $js-N$, 零件损失费用为 $f(js-N)$; 另外, 误认为故障而停机的损失费用为 a, 因此: $F=jt+f(js-N)+a$.

对于其它各种情况, 我们可以类似地进行计算

(2) $i\le j\le n$

$$P=\int_{(i-1)s+r}^{(i-1)s+r+1} g(x)\mathrm{d}x\cdot 0.98^{i-1}\cdot 0.4^{j-i}\cdot 0.6$$

$$N=0.98((i-1)(s-1)+r)+0.4(j-i+1)(s-1)-r)+j-1$$

$$F=jt+f(js-N)+d$$

(3) $j=n+1$

$$P=\int_{(i-1)s+r}^{(i-1)s+r+1} g(x)\mathrm{d}x\cdot 0.98^{i-1}\cdot 0.4^{n-i+i}$$

$$N=0.98((i-1)(s-1)+r)+0.4(u-(i-1)s-r-(n-i+1))+n$$

$$F=nt+f(u-N)+d$$

(二) $i=n+1$, 我们将故障发生的区间$[ns, u)$分为 $u-ns$ 个小区间

$$[h, h+1), (h=ns, ns+1, \cdots, u-1)$$

(1) $1\le j\le n$

$$P=\int_{h}^{h+1} g(x)\mathrm{d}x\cdot 0.98^{j-1}\cdot 0.02$$

$$N=0.98j(s-1)+j-1$$

$$F=j\cdot t+f\cdot(j\cdot s-N)+a$$

(2) $j=n+1$

$$P = \int^{h+1} g(x)\,\mathrm{d}x \cdot 0.98^{n}$$

$$N = 0.98(h - n) + 0.4(u - h) + n$$

$$F = n \cdot t + f \cdot (u - N) + d$$

(三) $i = n + 2$

(1) $1 \le j \le n$

$$P = \int^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \cdot 0.98^{j-1} 0.02$$

$$N = 0.98j(s - 1) + j - 1$$

$$F = jt + f(js - N) + a$$

(2) $j = n + 1$

$$P = \int^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \cdot 0.98^{n}$$

$$N = 0.98(u - n) + n$$

$$F = nt + f(u - N) + k$$

综合以上各种情况, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
E(N) = {} & \sum_{i=1}^{n} \{ \sum_{r=0}^{s-1} \int_{(i-1)s+r}^{(i-1)s+r+1} g(x)\,\mathrm{d}x \cdot [\sum_{j=1}^{i-1} 0.98^{j-1} \cdot 0.02 \cdot (0.98j(s-1) + j - 1) \\
& + \sum_{j=i}^{n} 0.98^{i-1} \cdot 0.4^{j-i} \cdot 0.6 \cdot (0.98((i-1)(s-1) + r) \\
& + 0.4((j - i + 1)(s - 1) - r) + j - 1) \\
& + 0.98^{i-1} \cdot 0.4^{n-i+1} \cdot (0.98((i-1)(s-1) + r) \\
& + 0.4(u - (r-1)s - r - (n - i + 1)) + n]\} \\
& + \sum_{h=ns}^{u-1} \int^{h+1} g(x)\,\mathrm{d}x [\sum_{j=1}^{n} 0.98^{j-1} \cdot 0.02 \cdot ((0.98j(s-1) + j - 1) \\
& + 0.98^{n}(0.98(h - n) + 0.4(u - h) + n)] \\
& + \int^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x [\sum_{j=1}^{n} 0.98^{j-1} \cdot 0.02 \cdot (0.98j(s-1) + j - 1) \\
& + 0.98^{n}(0.98(u - n) + n)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(F) = {} & \sum_{i=1}^{n} \{ \sum_{r=0}^{s-1} \int_{(i-1)s+r}^{(i-1)s+r+1} g(x)\,\mathrm{d}x \cdot [\sum_{j=1}^{i-1} 0.98^{j-1} \cdot 0.02 \cdot (jt + a \\
& + f(js - (0.98j(s-1) + j - 1))) \\
& + \sum_{j=i}^{n} 0.98^{j-1} \cdot 0.4^{j-1} \cdot 0.6(jt + d + f(js - (0.98((i-1)(s-1) + r) \\
& + 0.4((j - 1 + 1)(s - 1) - r) + j - 1)) \\
& + 0.98^{i-1} 0.4^{n-i+1}(nt + d + f(u - (0.98((i-1)(s-1) + r) \\
& + 0.4(u - (s - 1) - r - (n - i + 1)) + n))]\} \\
& + \sum_{h=ns}^{u-1} \int^{h+1} g(x)\,\mathrm{d}x [\sum_{j=1}^{n} 0.98^{j-1} 0.02(jt + a + f(js - (0.98j(s-1) + j - 1)) \\
& + 0.98^{n}(nt + d + f(u - (0.98(h - n) + 0.4(u - h) + n)))]
\end{aligned}$$

$$+\int^{\infty} g(x)\,dx\left[\sum_{j=1}^{n} 0.98^{j-1} 0.02(jt+a+f(js-(0.98(j(s-1)+j-1))\right.$$
$$\left.+0.98^{n}(nt+k+f(u-(0.98(u-n)+n)))\right]$$

3　模型求解及结果

我们对 s 从 1 至 100, u 从 100 至 600 用穷举法进行搜索, 比较 $F(s,u)$ 的值, 求得最优解为: $s=54$, $u=304$, 此时目标函数值为 9.37681, 若限定 u 为 s 的整数倍, 则最优解为: $s=51$, $u=306$, 此时目标函数值为 9.40044.

4　考虑其它故障的情况

若考虑其它故障, 我们将上述模型中的假设 1 改为: 其它故障与刀具故障的发生相互独立, 其它故障服从区间[0, 22800]上的均匀分布. 此时模型依然具有下列形式:

$$\min F(s,u)=\frac{E(F)}{E(N)}$$

其中, $E(F)$ 与 $E(N)$ 的表达式只需遍历其它故障的发生、刀具故障的发生以及第一次检查出不合格品这三个事件的所有情况即可推导出, 由于其形式相当复杂, 我们不在此列出.

类似于前面的模型, 我们可以求出在考虑其它故障的情况下, 最优解为: $s=40$ $u=314$, 此时目标函数值为 9.57354.

Mathematical Model of Automatic Managing of Lathe

YANG Zhen-hua,　QIU Zhong-hua

(Nanjing University of Posts & Telecommunications, Nanjing　210003)

Abstract: In this paper, we establish the mathemaical model of problem A of 1999 Chinese Undergraduate Mathematical Contest in Modeling —— automatic managing of lathe. Then we give the solution of this model.

刀具问题的仿真及灵敏度分析

赵桂芹,　周　林

(东南大学, 南京　210096)

摘要: 本文通过计算机模拟仿真, 搜索到了 CMCM-99A 题中换刀间隔与检查间隔的近似最优解及单位正品最小费用, 并对 p_1(好刀生产正品的概率), p_2(坏刀生产正品的概率), k, f, d 进行了灵敏度分析, 得出 u(换刀间隔)是最重要的优化参数的结论.