

数学建模竞赛

1998 年全国大学生数学建模竞赛

姜 启 源

(清华大学应用数学系, 北京 100084)

由教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办的“1998 年全国大学生数学建模竞赛”于 1998 年 9 月 22 日至 24 日举行. 来自 26 个省(市、自治区), 400 所院校的 2103 个队参加了这次竞赛.

竞赛答卷首先在 24 个赛区进行初评, 评出各赛区的获奖者. 然后各赛区按一定比例将优秀答卷送全国组委会, 全国组委会聘请专家从 273 份答卷中评出全国一等奖 79 名, 二等奖 153 名, 占参赛队 11%, 12 月 11 日在上海举行了颁奖仪式.

全国大学生数学建模竞赛是 1992 年开始由中国工业与应用数学学会举办的. 国家教委对这项活动十分重视, 决定自 1994 年开始由教委高教司和中国工业与应用数学学会共同主办, 每年一次. 参赛的院校平均以 30% 的速度递增.

这项竞赛的题目一般来源于工程技术和管理科学等方面经过适当简化加工的实际问题, 不要求预先掌握深入的专门知识, 而具有较大的灵活性供参赛者发挥创造能力. 今年的 A 题由浙江大学陈叔平提供, B 题由上海海运学院丁颂康提供. 为了更广泛、有效地收集适合这项竞赛的题目和素材, 再次向全社会诚征赛题, 联系地址: 北京市清华大学应用数学系, 联系人: 郝秀荣, 邮编: 100084.

为了与广大同学进行交流, 并对今后的竞赛予以适当引导, 全国评阅委员会选择了 11 篇优秀答卷发表, 并请命题者和评阅者撰文讲评.

这里发表的论文都是学生们在三天内写出的, 为了保持原貌只作了文字上的个别修正和繁琐处的删节, 文章不可避免地存在着相当多的不妥之处, 请读者谅解.

下面是本次竞赛的题目和获奖名单.

1998 年全国大学生数学建模竞赛题目

A 题 投资的收益和风险

市场上有 n 种资产 (如股票、债券、...) S_i ($i = 1, \dots, n$) 供投资者选择, 某公司有数额为 M 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资. 公司财务分析人员对这 n 种资产进行了评估, 估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i , 并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i . 考虑到投资越分散, 总的风险越小, 公司确定, 当用这笔资金购买若干种资产时, 总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量.

购买 S_i 要付交易费, 费率为 p_i , 并且当购买额不超过给定值 u_i 时, 交易费按购买 u_i 计算 (不买当然无须付费). 另外, 假定同期银行存款利率是 r_0 , 且既无交易费又无风险. ($r_0 = 5\%$)

1) 已知 $n = 4$ 时的相关数据如下:

S_i	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	u_i (元)
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案, 即用给定的资金 M , 有选择地购买若干种资产或存银行生息, 使净收益尽可能大, 而总体风险尽可能小.

2) 试就一般情况对以上问题进行讨论, 并利用以下数据进行计算.

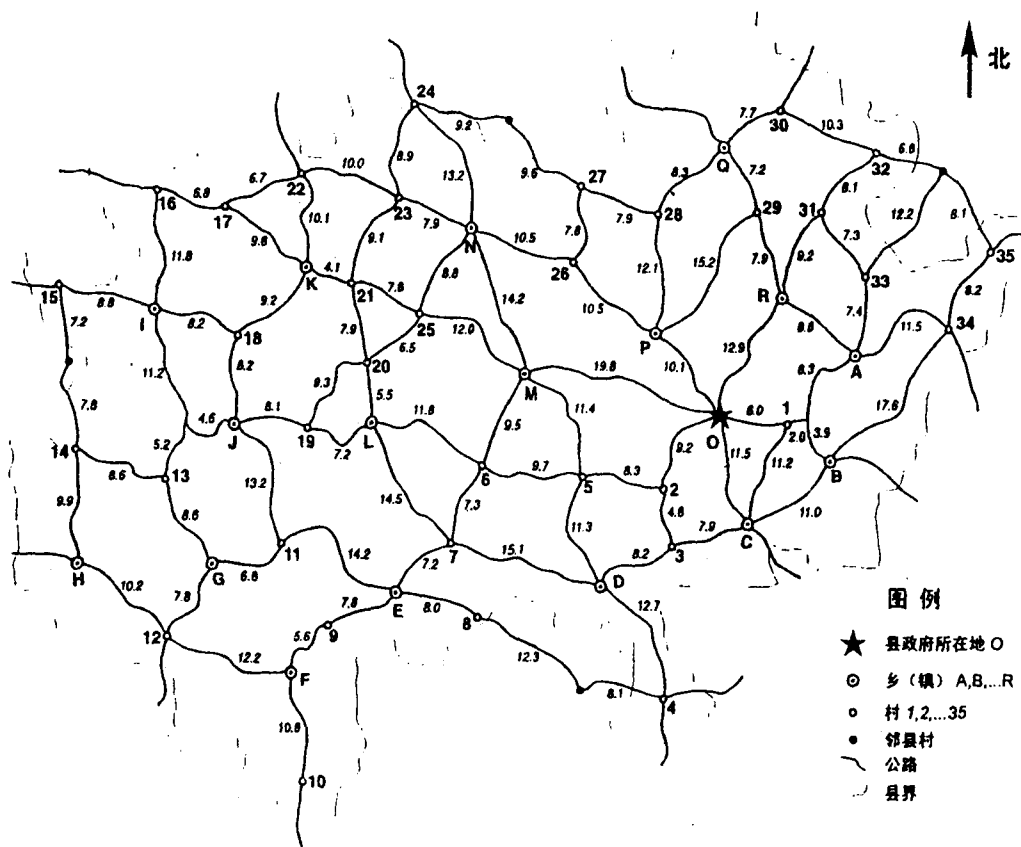
S_i	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	u_i (元)
S_1	9.6	42	2.1	181
S_2	18.5	54	3.2	407
S_3	49.4	60	6.0	428
S_4	23.9	42	1.5	549
S_5	8.1	1.2	7.6	270
S_6	14	39	3.4	397
S_7	40.7	68	5.6	178
S_8	31.2	33.4	3.1	220
S_9	33.6	53.3	2.7	475
S_{10}	36.8	40	2.9	248
S_{11}	11.8	31	5.1	195
S_{12}	9	5.5	5.7	320
S_{13}	35	46	2.7	267
S_{14}	9.4	5.3	4.5	328
S_{15}	15	23	7.6	131

B 题 灾情巡视路线

下图为某县的乡(镇)、村公路网示意图,公路边的数字为该路段的公里数.

今年夏天该县遭受水灾.为考察灾情、组织自救,县领导决定,带领有关部门负责人到全县各乡(镇)、村巡视.巡视路线指从县政府所在地出发,走遍各乡(镇)、村,又回到县政府所在地的路线.

1. 若分三组(路)巡视,试设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线.
2. 假定巡视人员在各乡(镇)停留时间 $T = 2$ 小时,在各村停留时间 $t = 1$ 小时,汽车行驶速度 $V = 35$ 公里/小时.要在 24 小时内完成巡视,至少应分几组;给出这种分组下你认为最佳的巡视路线.
3. 在上述关于 T, t 和 V 的假定下,如果巡视人员足够多,完成巡视的最短时间是多少;给出在这种最短时间完成巡视的要求下,你认为最佳的巡视路线.
4. 若巡视组数已定(比如三组),要求尽快完成巡视,讨论 T, t 和 V 改变对最佳巡视路线的影响.



投资组合与模糊规划模型

王正方 赵文明 倪德娟

指导教师: 数学建模教练组

(杭州电子工业学院, 杭州 310027)

编者按 本文能针对问题的要求通过分析, 建立正确的数学模型, 并用偏好系数加权法把双目标优化问题, 化为单目标优化问题, 计算得到正确的结果. 作者还用模糊线性规划的方法来求解, 进行比较. 此外本文还分析讨论了头资额相对小的情形.

摘要 本文讨论了投资的风险与收益的问题. 首先我们给出了一个比较完整的模型, 然后, 考虑投资数额相当大时的一个近似处理模型, 并分别用偏好系数加权法和模糊线性规划法进行了求解, 接下来, 我们又考虑了如何处理投资额相对较小的情况下的最优投资组合情况, 引入了绝对收益率进行了较为有效的解决.

一、问题的提出 (略)

二、基本假设 (略)

三、符号说明

M : 投资者拥有的全部资金; s_i : 供投资者选择的资产;
 r_i : 资产 s_i 的平均收益率; p_i : 购买资产 s_i 要付交易费率;
 q_i : 购买资产 s_i 的风险损失率; r_0 : 同期银行利率;
 w_i : 投资于资金的比例. (其余符号在文中陆续引出)

四、问题的分析和模型的建立

设银行存款也是等价于市场上供投资者选择的资产之一. 存银行记为 S_0 , 而它相应的风险损失率 q_0 和交易费 p_0 均为 0, 经以上变换, 存银行生息与投资市场上的资产可以统一处理.

设投资于第 i 种资产所付交易费为 $A_i (i = 0, 1, \dots, n)$,

$$A_i = p_i \times \max(Mw_i, u_i f(w_i)),$$

其中

$$f(w_i) = \begin{cases} 0, & (w_i = 0), \\ 1, & (w_i > 0) \end{cases}$$

上式中, 如不投资于 S_i , 则 $w_i = 0$, 可得 $A_i = 0$, 如投资, 则在 Mw_i 与 u_i 两者中取大的一个, 然后再乘以相应的交易费率即为所付的交易费, 这完全符合了实际要求.

投资总额 M 可分为两部分: 一部分用来付交易费共为 $\sum_{i=0}^n A_i$, 另一部分则用来购买各种资产共为 $\sum_{i=0}^n A_i w_i$. 显然有 $\sum_{i=0}^n A_i + \sum_{i=0}^n Mw_i = M$. 而投资 M 相应的净收益 $R = \sum_{i=0}^n r_i Mw_i - \sum_{i=0}^n A_i =$

$\sum_{i=0}^n (r_i + 1) M w_i - M$. 总体风险大小为 $C = \max_{0 \leq i \leq n} (q_i w_i M)$ 该式体现出了投资越分散, 风险值越小, 且用所投资的 s_i 中最大的一个风险来度量总体风险.

经以上分析, 可建立如下双目标规划模型:

$$\begin{aligned} \max R &= \sum_{i=0}^n (r_i + 1) M w_i - M, & \min C &= \max_{0 \leq i \leq n} (q_i \times M w_i) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{i=0}^n A_i + \sum_{i=0}^n M w_i = M, \\ w_i \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $A_i = p_i \times \max(M w_i, u_i \times f(w_i))$, $f(w_i) = \begin{cases} 0, & (w_i = 0), \\ 1, & (w_i > 0) \end{cases}$

五、模型的求解

由于题目给出的是一笔相当大数额的资金 M , 而在 M 相当大时, 如对 S_i 有投资, 可近似认为 $M w_i$ 均大于相应的 u_i , 于是模型的约束条件简化为:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n w_i (1 + p_i) = 1, \\ w_i \geq 0, \end{cases}$$

于是原模型的求解等价于

$$\begin{aligned} \min R &= M (\sum_{i=0}^n (r_i + 1) w_i - 1), & \min C &= M \left(\max_{0 \leq i \leq n} q_i w_i \right), \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{i=0}^n (1 + p_i) w_i = 1, \\ w_i \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

该式中, 第二个目标为非线性的, 这为求解带来了很大的麻烦, 我们设法把此非线性目标转化为线性, 于是又得到以下模型:

$$\begin{aligned} \min R &= M \left(\sum_{i=0}^n (r_i + 1) w_i - 1 \right), & \min C &= M \times \lambda, \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{i=0}^n (1 + p_i) w_i = 1, \\ w_i \geq 0, \\ q_i w_i \leq \lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

运用偏好系数加权法, 将模型中的两个目标分别赋权重合并. 设 $1 - \mu$ 和 μ 分别表示投资者赋予净收益和总体投资风险权重数. 以上双目标规划就变为如下的单目标规划:

$$\begin{aligned} \min a &= (1 - \mu) \times \left(- \left(\sum_{i=0}^n (r_i + 1) w_i - 1 \right) \right) + \mu \lambda, \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{i=0}^n (1 + p_i) w_i = 1, \\ w_i \geq 0, \\ q_i w_i \leq \lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $\mu \in [0, 1]$.

权重数 $1 - \mu$ 与 μ 分别表示投资者对净收益大小和总体投资风险两者的重视程度. μ 的取值范围为 $[0, 1]$. μ 数值越大, 表示投资者越重视总体风险的大小, 也即希望风险尽可能地小. 当 $\mu = 1$ 时, 表示投资者极端厌恶风险, 此时如有无风险的所供资产存在, 则这种投资者会毫不犹豫地选取无风险资产进行投资, 如 μ 为 0, 则这种为无视投资风险, 一味追求期望净收益.

模型的解:

运用参数规划技术得到有效证券组合, 为投资决策提供定量的依据. 具体计算结果如下:

当 $0 < \mu < 0.0319$ 时有效证券组合为 $w_0 = 0, w_1 = 0.9909, w_2 = 0, w_3 = 0, w_4 = 0$, 净收益 $0.2673M$, 总体风险值为 2.475 :

当 $0.0319 < \mu < 0.0411$ 时, 有效证券组合为 $w_0 = 0, w_1 = 0.369, w_2 = 0.615, w_3 = 0, w_4 = 0$, 净收益为 $0.2165M$, 总体风险值为 0.9225 ;

当 $0.0411 < \mu < 0.0448$ 时, 有效证券组合为 $w_0 = 0, w_1 = 0.3140, w_2 = 0.5233, w_3 = 0.1427, w_4 = 0$, 净收益为 $0.2106M$, 总体风险为 0.7850 ;

当 $0.0448 < \mu < 0.2036$ 时, 有效证券组合为 $w_0 = 0, w_1 = 0.2376, w_2 = 0.3960, w_3 = 0.1080, w_4 = 0.2284$, 净收益为 $0.2016M$, 总体风险为 0.5940 ;

当 $0.2036 < \mu < 1$ 时, 有效证券组合为 $w_0 = 1, w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$, 净收益为 $0.05M$, 总体风险为 0 ;

当 $\mu = 0.0319$ 时, 净收益为 $R = 0.05 + 0.2553 \cdot C$ 其中总体投资风险 $C \in [0, 0.5940]$;

当 $\mu = 0.0411$ 时, 净收益为 $R = (0.1737 + 0.0470 \cdot C)M$, 其中总体风险 $C \in [0.5940, 0.7850]$;

当 $\mu = 0.0448$ 时, 净收益为 $R = (0.1770 + 0.0428 \cdot C)M$ 其中总体风险 $C \in [0.7850, 0.9225]$;

当 $\mu = 0.2036$ 时, 净收益为 $R = (0.1863 + 0.0327 \cdot C)M$ 其中投资风险 $C \in [0.9225, 2.4753]$.

同样问题 2) 求得证券组合情况如表 1、2 所示:

表 1 偏好系数变化时相应的投资组合

μ 区间	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
1, 0.0429	1	0	0	0	0	0	0	0	0
—0.0395	0	0.0778	0.06048	0.05444	0.07777	0	0.08370	0.04803	0.09779
—0.0371	0	0.0845	0.06802	0.06121	0.08745	0	0.09417	0.05028	0.10997
—0.03369	0	0.1056	0.08213	0.07391	0.10559	0	0.11371	0.06522	0.13278
—0.0314	0	0	0.09205	0.08284	0.11835	0	0.12746	0.14883	0.09326
—0.0238	0	0	0.10603	0.09542	0.13632	0	0	0.08420	0.17142
—0.0130	0	0	0	0.10715	0.15306	0	0	0.09454	0.19248
—0.0063	0	0	0	0.12686	0	0	0	0.11193	0.22788
—0.0035	0	0	0	0.16581	0	0	0	0.14635	0
—0.0024	0	0	0	0.20512	0	0	0	0.18100	0
—0.00146	0	0	0	0.28286	0	0	0	0.24959	0
—0.00136	0	0	0	0.50207	0	0	0	0.443	0
—0	0	0	0	0.94340	0	0	0	0	0

w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	收益	风险值
0	0	0	0	0	0	0	0.05M	0
0.06128	0.08165	0.10536	0	0.071	0	0	0.1964M	3.26616
0.06891	0.09182	0	0	0.079845	0	0.15969	0.21299M	3.67287
0.08320	0.11087	0	0	0.096411	0	0	0.24291M	4.43491
0.09326	0.12427	0	0	0.10806	0	0	0.26339M	4.9708
0.10741	0.14313	0	0	0.124464	0	0	0.2878M	5.72536
0.12061	0.16072	0	0	0.13976	0	0	0.30199M	6.42878
0.14280	0.19028	0	0	0.165463	0	0	0.320499M	7.61129
0.18665	0.24872	0	0	0.216276	0	0	0.33516M	9.94872
0	.30770	0	0	0.267568	0	0	0.343296M	12.3081
0	0.42430	0	0	0	0	0	0.354108M	16.9719
0	0	0	0	0	0	0	0.37339M	30.124
0	0	0	0	0	0	0	0.40943M	56.6038

表 2 收益与风险的关系

偏好系数 (μ)	收益与风险关系	风险 (c)	μ 最小应大于的值 (元)
0.0429	$R=0.05+0.04484C$	(0, 3.266)	7751
0.0395	$R=0.06373+0.04064C$	(3.266, 3.673)	6278
0.0371	$R=0.06884+0.03924C$	(3.673, 4.435)	5790
0.0337	$R=0.07334+0.03823C$	(4.435, 4.97)	5166
0.0314	$R=0.10256+0.032336C$	(4.97, 5.725)	4422
0.0238	$R=0.17234+0.02017C$	(5.725, 6.429)	3995
0.0130	$R=0.20136+0.01565C$	(6.429, 7.611)	3373
0.0063	$R=0.27276+0.00627C$	(7.611, 9.949)	2713
0.0035	$R=0.30085+0.00345C$	(9.949, 12.308)	2193
0.0024	$R=0.31476+0.002318C$	(12.308, 16.972)	811
0.0015	$R=0.32923+0.00147C$	(16.972, 30.124)	421
0.0013	$R=0.332194+0.00136C$	(30.124, 56.604)	2193

以上运用偏好系数加权法得出一系列最优投资组合, 下面我们运用模糊线性规划来求解. 上述偏好系数加权法依赖于权重的建立, 而模糊目标规划则应用模糊隶属函数的概念, 首先引入一些符号与公式:

U_k 为第 k 理想目标达成的最高期望; L_k 为第 k 理想目标达成的最低可接受值;

d_k 为第 k 理想目标的降低允许范围 (变动余地).

与每一个目标有关的是它的模糊隶属函数, 它表示为:

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 0, & (Z_k \leq L_k), \\ 0 < u_k(x) < 1, & (L_k < Z_k < U_k), \\ 1, & (Z_k \geq U_k), \end{cases}$$

也就是上式能反映一个现实目标的达成度 (若完全达成, 取 1) 或 (完全未达成, 取 0 值), 我们令模糊隶属函数:

$$\mu_k(x) = 1 - \left(\frac{U_k - Z_k}{d_k} \right).$$

对模糊模型的任何解来说, 我们希望最大化 $\mu_k(x)$ 的最小值, 也就是说希望最小化任一现实目标的最

坏未达成度, 这可以用虚拟变量 η 来描述

$$\min Y = \eta, \quad \text{s.t.} \geq \left(\frac{U_k - Z_k}{d_k} \right)$$

于是对本模型, 我们可以得到如下模型:

$$\begin{aligned} \min Y = \eta, \quad \eta &\geq \frac{\max \left(\frac{r_i}{1 + p_i} \right) - \sum_{i=0}^n (r_i w_i)}{\max \left(\frac{r_i}{1 + p_i} \right) - r_0}, \\ \eta &\geq \frac{f}{\max(q_i w_i)}, \quad \sum_{i=1}^n A_i + \sum_{i=0}^n M w_i = M, \\ w_i &\geq 0, \quad f \geq q_i w_i. \end{aligned}$$

上述分别对问题 1) 和 2) 得出的是一个有效解:

$(w_0 = 0, w_1 = 0.2778, w_2 = 0.4630, w_3 = 0.1263, w_4 = 0.1082)$ 相应的风险值为 0.7 与 $(w_0 = w_1 = w_2 = 0, w_3 = 0.2606, w_4 = w_5 = w_6 = 0, w_7 = 0.2300, w_{10} = 0.3980, w_{11} = w_{12} = 0, w_8 = w_9 = 0, w_{13} = 0.07645, w_{14} = w_{15} = 0)$ 相应的风险值为 15.6. 而对它的约束严格性进行松弛, 可得到一系列的在不同的投资风险下的最优组合.

六、模型的进一步扩展 (略)

七、模型的优缺点分析 (略)

参 考 文 献

- [1] J.P. 伊格尼齐奥 (美), 单目标和多目标系统线性规划, 同济大学出版社, 北京, 1986.
- [2] 李梦琳, 证券市场与投资, 浙江大学出版社, 杭州, 1993.
- [3] 管梅谷, 线性规划, 山东科学技术出版社, 济南, 1990.
- [4] 胡毓达, 实用多目标最优化, 上海科技出版社, 上海, 1990.

投资组合模型

伍仕刚 孟宪丽 胡子昂

指导教师: 数学建模教练组

(杭州电子工业学院, 杭州 310027)

编者按 该文正确建立了数学模型——多目标决策模型,用以解决 A 题的投资组合问题.通过偏好系数加权法将多目标决策问题化为单目标决策模型——非线性规划,并简化为线性规划问题求解,还用参数规划技术解出了 $n = 4$ 的详细结果.本文的特点在于考率了一个问题:到底 M 多大时,非线性规划与其简化形式有相同解?这文中定理 1 给出一个充分条件,可以对于具体问题作出判定,所得简化的线性规划问题的最优解也是原来非线性规划问题的最优解.

摘要 本文建立了考虑交易费用情况下的市场资产组合投资模型,并采用偏好系数加权法对资产的预期收益和总风险进行评价,给出在不同偏好系数下的模型最优解.然后模型讨论了一般情况下的最优投资求解方法,给出定理,在总金额大于某一量值时,可化为线性规划求解.

一、问题提出 (略)

二、基本假设 (略)

三、符号说明

n : 市场上可用于投资的资产数; M : 投资者拥有的总投资额;
 x_0 : 投资于银行的存款额; x_i 对第 $i (i = 1, 2, \dots, n)$ 种资产 S_i 的实际投资额;
 w_i : 对第 $i (i = 1, 2, \dots, n)$ 种资产的投资比重; R 投资者最终所获得的净收益;
 Q : 投资者的风险损失金额; ξ_i : 资产 S_i 在该段时期内的预期收益率;

$$r_i = E[\xi_i], \quad q_i = \sqrt{D[\xi_i]};$$

p_i : 购买资产 S_i 时所需付的交易费率.

四、问题分析

由于资产预期收益的不确定性,导致它的风险特性,资产的风险用预期收益率的方差来表示.在这里,投资 S_i 的平均收益为 $x_i r_i$ 风险损失为 $x_i q_i$.

要使投资者的净收益尽可能大,而风险损失尽可能小,一个解决办法就是进行组合投资,分散风险,以期获得较高的收益,模型的目的就在于求解最优投资组合.当然最优投资还决定于人的因素,即投资者对风险、收益的偏好程度,怎样解决二者的相互关系也是模型要解决的一个重要问题.

五、模型建立及求解

投资者的净收益为购买各种资产及银行的总期望收益除去在此过程中的交易费用.

在对资产 S_i 进行投资时, 对于投资金额 x_i 的不同, 所付的交易费用也有所不同: 不投资时不付费, 投资额大于 u_i 时交易费为 $x_i p_i$, 否则交易费为 $u_i p_i$. 记

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & \text{当 } x_i = 0, \\ u_i & \text{当 } 0 < x_i \leq u_i, (i = 1, 2, \dots, n) \\ x_i, & \text{当 } x_i > u_i, \end{cases} \quad (1)$$

则购买资产 S_i 所付的交易费为 $p_i \varphi_i$. 由于投资银行时勿需交易费, 所以总交易费用为 $\sum_{i=1}^n p_i \varphi_i$. 投资者的净收益

$$R = x_0 r_0 + \sum_{i=1}^n x_i E[\xi_i] - \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i. \quad (2)$$

在对单个资产进行投资时, 风险损失金额为风险损失率与投资数额的乘积. 组合投资时, 投资者所要承担的风险采用所投资资产中风险损失金额的最大值来度量, 即

$$Q = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i q_i\} \quad (3)$$

• 多目标投资决策模型

问题的目标在于使净收益尽可能大, 总体风险尽可能小, 根据上面的讨论, 可建立存在无风险投资 (即存银行生息) 时, 资产组合投资决策的多目标数学模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & R = x_0 r_0 + \sum_{i=1}^n x_i E[\xi_i] - \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i, \\ \min \quad & Q = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i D[\xi_i]\}, \\ \text{s.t.} \quad & x_0 + \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i p_i = M, \\ & \varphi_i = \begin{cases} 0, & (x_i = 0), \\ u_i & (0 < x_i \leq u_i), \\ x_i, & (x_i > u_i) \end{cases} \\ & x_0 \geq 0, \quad x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$

为便于以后的求解和论证, 将目标函数 $\min Q$ 变换成等价形式, $\min Q = Q$ 并且附加约束条件

$x_i D[\xi_i] \leq Q (i = 1, 2, \dots, n)$, 上述模型可化为等价的多目标规划模型:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & R = x_0 r_0 + \sum_{i=1}^n x_i E[\xi_i] - \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i, \\
 \min \quad & Q = Q, \\
 \text{s.t.} \quad & x_0 + \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i p_i = M, \\
 & \varphi_i = \begin{cases} 0, & (x_i = 0), \\ u_i & (0 < x_i \leq u_i), \\ x_i, & (x_i > u_i) \end{cases} \\
 & x_0 \geq 0, x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{5}$$

• 偏好系数加权法

在实际投资中, 投资者总是权衡资产风险和预期收益两个方面, 选择一个令自己满意的资产组合进行投资, 这种满意的资产组合称为有效资产组合. 因此分别对目标函数 R 和 Q 赋予权重 $1 - \lambda$ 和 λ , ($0 < \lambda \leq 1$), 将 (5) 式化为单目标规划模型:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & W = \lambda \cdot Q - (1 - \lambda) \left[x_0 r_0 + \sum_{i=1}^n r_i x_i - \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i \right], \quad (0 < \lambda \leq 1), \\
 \text{s.t.} \quad & x_0 + \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i p_i = M, \\
 & \varphi_i = \begin{cases} 0, & (x_i = 0), \\ u_i & (0 < x_i \leq u_i), \\ x_i, & (x_i > u_i) \end{cases} \\
 & x_i q_i \leq Q \\
 & x_0 \geq 0, x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{6}$$

加权系数 λ 称为投资偏好系数, 代表了投资者对风险的厌恶程度, 实际计算中, λ 的值由投资者自己来决定.

(6) 式是一个带约束条件的非线性规划问题, 一般可用罚函数法化为无约束非线性规划, 再利用多维空间的单纯形法, 通过计算机编程进行求解. 不过这种方法过于复杂且缺乏一定的稳定性, 因此有必要寻求一种较为简单的方法.

由于交易费用的分段性, 造成目标规划 (6) 的非线性, 如果考虑所投总资产数量相当大的情况, 认为对某种资产 S_i , 只存在不投资和投资额大于 u_i 两种情况, 即不考虑 u_i 对交易费用的影响, 而且后面有定理可以证明, 当 M 大于某一值时, 投资额的确只有以上两种情况. 如以投资权重 w_i 为

变量, 这时 (6) 式可化如下的为线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min Z &= \lambda \cdot Q - (1 - \lambda) \left[w_0 r_0 + \sum_{i=1}^n r_i w_i - \sum_{i=1}^n p_i w_i \right], \quad (0 < \lambda \leq 1), \\ \text{s.t. } w_0 + \sum_{i=1}^n w_i + \sum_{i=1}^n p_i w_i &= M, \\ w_i q_i &\leq Q, \\ w_0 \geq 0, w_i &\geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (7)$$

对此线性规划模型进行求解, 给定投资偏好值 λ , 利用数学软件 Maple V4.0 进行求解, 代码如下 (以问题 1 的数据为例且取 $\lambda = 0.7$):

```
with(simplex);
cnsts := {w1 + w2 + w3 + w4 + w0 + 0.01*w1 + 0.02*w2 + 0.045*w3 + 0.065*w4 = 1};
obj := -0.3*(w1*0.28 + w2*0.21 + w3*0.23 + w4*0.25 + w0*0.05
        - 0.01*w1 - 0.02*w2 - 0.045*w3 - 0.065*w4) + 0.7*Q; 4
minimize(obj, cnsts union {w1 >= 0, w2 >= 0, w3 >= 0, w4 >= 0, w0 >= 0,
        Q >= 0, w1*0.025 - Q <= 0, w2*0.015 - Q <= 0, w3*0.055
        - Q <= 0, w4*0.026 - Q <= 0});
```

输出结果为 $\{w1 = 0.99009, w0 = 0, w2 = 0, w3 = 0, w4 = 0, Q = 0.024753\}$.

六、模型扩展 (略)

参 考 文 献

- [1] 文显武, 国际投资, 武汉大学出版社, 武汉, 1998.
- [2] [美] J.P. 伊格尼齐著, 李毅华译, 单目标和多目标系统线性规范, 同济大学出版社, 上海, 1986.
- [3] 管梅谷, 线性规划, 山东科学技术出版社, 济南, 1983.

附 录 (略)

风险投资分析

程文鑫 苑 青 骆文润

指导教师: 数模组

(海军工程学院, 武汉 430033)

编者按 本文概念清晰、分析透彻, 正确地建立了问题的双目标规划模型, 并转化为单目标线性规划问题, 用网络法算出正确的结果. 同时, 提出并论证了两个准则, 简化了模型的求解. 特别对假设 $M_i \geq u_i$ 的合理性、银行利率变化对投资组合的影响等作了灵敏度分析.

摘 要 本文主要研究多种资产的组合投资问题. 根据题目所给信息, 建立了在一定简化条件下的多目标规划模型和单目标风险约束模型, 并对问题一与问题二分别使用上述两模型进行求解得到多种投资组合方案, 同时对一般情况进行了讨论, 最后对模型进行了相应的灵敏度分析, 讨论了简化条件的适用情况. 结果表明模型是较为符合实际的.

一、问题的提出与分析 (略)

二、符号的说明

参数	范围	说明
S_i	$i=1, 2, \dots, n$	能够投资的资产种类
M	相当大	投资总额
M_i	$i=1, 2, \dots, n$	资产 S_i 的纯购买额
P_i	$i=1, 2, \dots, n$	购买资产 S_i 的交易费率
C_i	$i=1, 2, \dots, n$	购买资产 S_i 的交易费
q_i	$i=1, 2, \dots, n$	购买资产 S_i 的风险损失率
r_i	$i=1, 2, \dots, n$	购买资产 S_i 的平均收益率
U_i	$i=1, 2, \dots, n$	交易费的门限值
z_i	$i=1, 2, \dots, n$	购买资产 S_i 的金额在总资金中的比例
μ	$\mu \in (0, 1]$	投资者对投资风险的厌恶程度
R_i		资产 S_i 的净收益
E_i		购买资产 S_i 所获得的收益

对于同期银行存款, 其相应的符号分别表示为 S_0, M_0, r_0, z_0 等, 其中 C_0, P_0, q_0, U_0 全为零.

三、模型的建立

(一) 有关概念的定义

1. 平均收益率 r_i 和净收益 R_i

$$r_i = \frac{\text{收益}}{\text{购买额}} = \frac{E_i}{M_i}$$

$R_i = E_i - C_i$, 此时

$$r_i = \frac{E_i}{M_i} = \frac{R_i + C_i}{M_i}$$

故总体净收益

$$R = \sum_{i=0}^n R_i = \sum_{i=0}^n (M_i r_i - C_i)$$

2. 风险损失率 q_i 和总体风险 σ

$$q_i = \frac{\text{风险损失资金}}{\text{购买额}} = \frac{\sigma_i}{M_i}$$

则在用资金 M_i 购买资产 S_i 时的风险为 $\sigma_i = M_i q_i$. 根据假设 4, 购买若干种资产时, 其总体风险为

$$\sigma = \max_{1 \leq i \leq n} \{M_i q_i\}$$

(二) 模型的建立

1. 模型 A 根据上述概念, 我们可建立存在无风险投资时, 资产组合投资决策函数为:

$$R = \sum_{i=0}^n R_i = \sum_{i=0}^n (M_i r_i - C_i), \quad (1)$$

$$\sigma = \max_{1 \leq i \leq n} \{M_i q_i\}, \quad (2)$$

由于两个函数具有一般性, 计算比较复杂. 考虑到投资金额 M 相当大, 即可以认为 $M_i \geq U_i$, 从而可把交易费 C_i 简化为 $C_i = M_i P_i$.

在资产 S_i 中投资的总额可表示为

$$M_i + C_i = M_i + M_i P_i = M_i (1 + P_i)$$

此时购买额可表示为

$$M_i = \frac{M z_i}{1 + P_i}$$

这样上述两决策函数 (1)、(2) 可转化为

$$R = \sum_{i=0}^n (M_i r_i - C_i) = M \sum_{i=0}^n \frac{(r_i - P_i)}{1 + P_i} z_i$$

$$\sigma = \max_{1 \leq i \leq n} \{M_i q_i\} = M \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{q_i}{1 + P_i} z_i \right\}$$

从而可以建立双目标规划模型: 模型 A

$$\max R = M \cdot \sum_{i=0}^n \frac{r_i - P_i}{1 + P_i} z_i, \quad (3)$$

$$\min \sigma = M \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{q_i}{1 + P_i} z_i \right\} \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=0}^n z_i = 1, & i = 0, 1, 2, \dots, n. \\ z_i \geq 0, \end{cases}$$

2. 模型 B 对于双目标规划模型 A, 其一般解法可采用网格搜索法. 在投资种类较多时, 模型 A 求解比较复杂, 为此需在模型 A 的基础上进行适当简化.

现对总体风险赋予一个上界值 δ 在 σ 不超过 δ 的情况下, 寻求使收益 R 达到最大的投资组合 (投资比例), 其数学模型为模型 B

$$\max R = M \cdot \sum_{i=0}^n \left(\frac{r_i - P_i}{1 + P_i} z_i \right), \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sigma = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{M z_i}{1 + P_i} q_i \right\} \leq \delta, \\ \sum_{i=0}^n z_i = 1 & i = 0, 1, 2, \dots, n \\ z_i \geq 0 \end{cases}$$

四、模型的求解

(一) 模型 A 的求解

由于模型 A 为双目标函数规划模型, 因此我们采用双目标规划的一般方法进行求解, 设 $(1 - \mu)$ 和 μ 分别表示投资者赋予期望收益和总体风险的权重数, 令 $k = (1 - \mu)(-R) + \mu\sigma$, 此时将双目标规划模型 A 转化为如下单目标规划模型

$$\min K = -M \sum_{i=0}^n (1 - \mu) \sum \frac{r_i - P_i}{1 + P_i} z_i + \mu M \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{q_i}{1 + P_i} z_i \right\},$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=0}^n z_i = 1, \\ z_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \mu \in (0, 1] \end{cases}$$

一般情况下 $\mu \neq 0$, μ 越大表示投资者对总体风险越厌恶, 当 $\mu = 1$ 时表示投资者对资产投资风险极端厌恶.

对上述模型用网格搜索法求解 (程序见附录 1(略)). 可得给定 μ 下的最佳投资组合.

在问题 1 中投资种类 $n = 4$, 对于不同的 μ 易得到资金的投资比例 $z = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ 及相应的净收益 R 和风险 δ . 即可得到对于不同 μ 的投资组合如下: 记 $z = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$

$0 < \mu < 0.76$ 时 $R = 0.267M$ $\sigma = 0.0247M(0.00, 1.00, 0.00, 0.00, 0.00)$,

$\mu = 0.78$ 时 $R = 0.217M$ $\sigma = 0.0094M(0.00, 0.38, 0.62, 0.00, 0.00)$,

$\mu = 0.80$ 时 $R = 0.216M$ $\sigma = 0.0091M(0.00, 0.37, 0.62, 0.01, 0.00)$,

$\mu = 0.82$ 时 $R = 0.206M$ $\sigma = 0.0076M(0.00, 0.31, 0.52, 0.14, 0.03)$,

$0.84 < \mu < 0.86$ 时 $R = 0.203M$ $\sigma = 0.0062M(0.00, 0.25, 0.42, 0.11, 0.22)$,

$\mu > 0.88$ 时 $R = 0.200M$ $\sigma = 0.0060M(0.00, 0.24, 0.41, 0.11, 0.24)$.

为了进一步分析模型结果, 画出 $R - \mu, \sigma - \mu$ 曲线图 (略)

由图可知, R, σ 是 μ 的非增函数, 这是由于随着 μ 的增大, σ 即投资者对风险 σ 的厌恶程度增大, 风险承受力降低, 从而使 R, σ 减小. 从图中还可看出一个有趣的现象, 在 $\mu = 0.768$ 时, R

和 σ 均发生突变, 这是由于在风险超过一定限度时, 投资者就会由风险型变为保守型, 这比较符合实际.

(二) 模型 B 的求解

对于某一次投资, 因 M 为常数, 此时模型 B 可简化为

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=0}^n \frac{(r_i - P_i)}{1 + P_i} z_i, \\ & \text{s.t.} : \begin{cases} \sigma \leq \delta, \\ \sum_{i=0}^n z_i = 1, (i = 0, 1, 2, \dots, n) \\ z_i \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

此模型为单目标线性规划模型, 可直接利用 Lindo 软件求解, 但为了在 n 较大时求解方便, 我们提出下述准则以给出更为简便的算法.

准则 1 各资产的投资比列分配由净收益率 $\frac{r_i - P_i}{1 + P_i}$ 从大到小排序.

准则 2 如有资产 S_i 和 S_j 的净收益率相等, 则对应的风险较小的资产优先考虑.

现假设各资产投资的净收益率排序为: $r'_1 \geq r'_2 \geq \dots \geq r'_N \geq r'_0 \geq r'_{N+1} \geq \dots \geq r'_n$.

则在分配中, 若 $z_{i+1} = 0$, 则必有 $z_{i+1} = z_{i+2} = \dots = z_N = z_0 = z_{N+1} = \dots = z_n = 0$. x 现用反证法证明准则 1.

假设 A: 存在 $z_{i+1} \neq 0$ 而 $z_i = 0$, 分两种情况进行讨论.

(1) 当分配给 S_i 和 S_{i+1} 的分配比列值 $\frac{S}{\frac{q_{i+1}}{1+P_{i+1}}} \leq \frac{\delta}{\frac{q_i}{1+P_i}}$ 时, 此时对于净收益率关系式

$$\sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + z_K + r'_i z_i \geq \sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + r'_{i+1} z_i \geq \sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + r'_{i+1} z_{i+1}$$

恒成立, 即投资比例 $(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \dots, 0)$ 不比投资比例 $(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_i, 0, 0, \dots)$ 更优.

(2) 当分配给 S_i 和 S_{i+1} 的分配比例值 $\frac{S}{\frac{q_{i+1}}{1+P_{i+1}}} > \frac{\delta}{\frac{q_i}{1+P_i}}$ 时, 不妨设 $z_{i+1} = z_i + z'_{i+1}$, 此时

$$\sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + r'_{i+1} z_{i+1} = \sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + z_K + r'_{i+1} z_i + r'_{i+1} z'_{i+1} \leq \sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + r'_i z_i + r'_{i+1} z'_{i+1} \text{ 成立.}$$

则投资比例 $(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, 0, 0, \dots, 0)$ 不妨投资比例 $(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, 0, 0, \dots, 0)$ 更优.

由此可见, 假定 A 不成立, 即不存在 $z_{i+1} \neq 0$ 而 $z_i = 0$ 的投资比例为最优.

准则 2 说明: 对于净收益相等的若干种资产, 假设投资比例总和为 $Z_{\text{总}}$, 在某个 M 值下, 不管怎样分配, 它们所产生的净收益为 $M \cdot Z_{\text{总}}$, 即净收益不变, 而风险 $\sigma = \max_{1 \leq i \leq n} \{M \cdot z_i \frac{q_i}{1+P_i}\}$ 为取得更小的风险, 我们应尽量将投资放在 $z_i \frac{q_i}{1+P_i}$ 小的资产上, 这样可以得到其它投资比例不变的情况下风险最小而净收益不变的最优解.

因此上述准则 1. 准则 2 是合理的.

由上述准则 1. 2 进行编程 (程序附录 2(略)) 即可求出一系列以 δ 为上限的最佳投资组合.

(三) 模型 B 所得的主要结论

1. 问题 2 的解

由于问题 2 中的风险投资种类 $n = 15$, 我们利用模型 B 进行求解. 任意给定 δ , 确定投资风险 σ 在不超过 δ 情况下的最优投资组合, 列表 (表 4-1)、画 $\delta - R$ 曲线图 (略).

表 4.1

δ/M	0.05	0.09	0.11	0.15	0.20	0.30	0.40	0.45	0.50	0.55
R/M	0.264	0.329	0.338	0.349	0.359	0.373	0.387	0.394	0.400	0.407

由图可知, 随着 δ 的增加, 收益 R 逐渐增大, 投资者可根据自己的偏好, 选择满足要求的 δ 和 R , 进行有效资产组合投资. 考虑到 R 要尽量大, σ 要尽量小, 同时分析 $\delta-R$ 曲线知, 在 $\delta < 0.08M$ 时, R 随 δ 急骤上升, 这是由于随着 δ 的增大, 人们对风险的厌恶程度减缓, 投资者逐渐走向风险型, 而在 $\delta > 0.08M$ 时, 曲线渐趋平缓, 这是由于当 δ 大到一定程度时, 风险收益大的资产均已投资, 收益变化不大. 由于 δ 变缓范围较广, 限于时间不一例举. 在此只给出一个较优的资产组合.

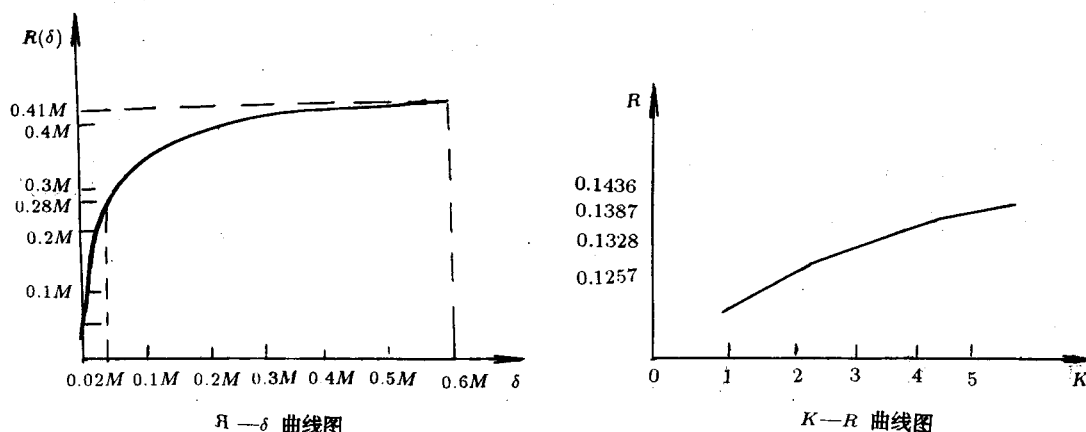
$$R = 0.323M, \quad \sigma = 0.08M,$$

$$z_3 = 14.1\%, \quad z_7 = 12.4\%, \quad z_8 = 19.6\%,$$

$$z_9 = 15.4\%, \quad z_{10} = 20.6\%, \quad z_{13} = 17.9\%$$

2. 一般问题的求解

在此我们利用模型 B 将问题一和问题二结合在一起考虑, 即此时的风险投资种类 $n = 19$ 种, 通过附录 II(略) 的程序求解 R , 并画出 $R-\delta$ 曲线如下:



由上图曲线知, 曲线可分为三段: i) $0 \leq \delta/M \leq 0.007$ 时, R 急骤增大, 这是因为随着 δ 的增大, 投资者对风险的厌恶程度降低, 即投资者由保守型走向风险型, 并且此时只需考虑问题二的 15 种投资, 故 R 增大显著. ii) $0.007 < \delta/M < 0.02$ 时, R 随 δ 快速增大, 这是因为风险的增加对投资方向的影响减缓. iii) $\delta/M > 0.02$ 时, R 渐趋平缓.

为了研究投资资产的个数 K 对 R 的影响, 我们取 $\delta = 0.01$, 利用模型 B 分别计算了不同投资资产数目时的收益, 由计算结果可以看出: 当资产数目较少时, 随着资产数的增加, R 迅速增长, 但当 $K = 5$ 时, R 几乎与最大收益相等. 由此可看出, 投资过于分散, 并不能增加 R . 再考虑到资金管理因素, 因此组合投资的数目不宜过多.

五、灵敏度分析

1. 在模型 A, B 中, 我们假设 $M_i \geq u_i$ 成立, 研究此假设的合理性, 我们求出满足假设的最小总投资额 M' , 此时 $M' \cdot z_i - M' z_i \cdot P_i \geq U_i$ 恒成立, 故

$$M' = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{U_i}{z_i(1 - P_i)} \right\}.$$

对于模型 A 或 B 来说, 当 μ 或 δ 变化时, M' 也随之变化. 为此, 我们可以通过改变 μ 或 δ 的值, 得到一组 M' . 其结果见表 5.1、表 5.2. 从表中结果可以看出: M' 相对于资金总额 M 很小, 故对模型 A 和模型 B 的简化是合理的.

表 5.1

μ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M'	104	104	104	104	104	104	104	281	433	433

表 5.2

δ/M	0.05	0.1	0.15	0.2	0.35	0.35	0.4	0.45	0.5	0.6
M'	5154	2603	2361	1288	1501	650	650	947	1616	6655

2. 一个好的模型不仅只适用于某一具体问题, 而且还应对同一类问题有效, 因此我们尝试对原始数据进行修改, 以考察模型的适用性. 由于银行资产比较特殊, 故此我们对银行利率进行改动, 我们选择 0.05, 0.1, 0.15 三个数据进行考察.

表 5.3

r_0	$\mu=0.1$ 时		$\mu=0.5$ 时		$\mu=0.1$	
	R	z_0	R	z_0	R	z_0
0.05	0.267	0	0.267	0	0.05	1
0.10	0.267	0	0.267	0	0.10	1
0.15	0.267	0	0.267	0	0.15	1

表 5.3 中的数据由模型 A 计算得到, 银行利率改变对投资没有影响, 这主要是因为 S_1, S_2, S_3, S_4 均为高收益低风险资产, 从表 5.3 中看出: 银行利率的小幅上涨 (相对于 $S_1 \sim S_4$) 并不改变投资者的投资方向.

表 5.4

r_0	$\delta=0.01$		$\delta=0.05$		$\delta=0.1$		$\delta=0.5$	
	R	z_0	R	z_0	R	z_0	R	z_0
0.05	0.09	0.693	0.26	0	0.33	0	0.4	0
0.128	0.798	0.26	0	0.33	0	0.4	0	
0.17	0.844	0.27	0.22	0.33	0	0.4	0	

表 5.4 中的数据由模型 B 计算得到, 当 δ 较小时, 即投资者对风险承受力较小时, 银行利率变化对投资者影响较大; 而当 δ 较大时, 影响几乎为 0. 这说明对于冒险型投资者来说银行利率的提高并不影响他们的投资方向.

七、模型的优缺点及改进方向 (略)

参 考 文 献

- [1] 陈云贤, 证券投资论, 北京工业大学出版社, 北京, 1992.
- [2] 程仕军, 系统工程, 极大化证券组合的投资收益率, 1994.
- [3] 董加礼等, 工程运筹学, 北京工业大学出版社, 北京, 1988.

资产投资收益与风险模型

陈定涛 蒋 浩 肖红英

指导教师: 梁元第

(四川联合大学, 成都 610065)

编者按 本文建立了正确的双目标模型, 并且把该模型通过控制总体风险合理地转化为单目标线性规划问题, 还给出了计算结果. 文章的特色在于通过计算的收益 — 风险的一系列解, 通过多次函数拟合建立了收益 — 风险的函数关系, 并且根据函数的导数、二阶导数的性质, 结合本题的经济含义, 获得了保守型、温和型、冒险型的区分及较合理的投资区间. 分析结论有一定的数为理论依据, 而且也较符合实际.

摘 要 本文应用多目标决策方法建立模型, 并通过简化, 成为一个单目标线性规划问题. 计算后得到了一个合乎公司要求的、净收益尽可能大, 而总体风险尽可能小的最优方案, 如下所示:

问题 1 的最佳投资方案

对第 i 项投资的金额	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
收益	0.0033M	0.2368M	0.3947M	0.1076M	0.2277M

对表 2 中的数据进行同样的计算和分析, 也获得了一个理想的投资方案, 从而证明了我们的模型具有一般性.

问题重述 (略)

问题分析

本题中的投资问题是利用所给数据, 通过计算分析得到一种尽量让人满意的投资方案, 并推广到一般情况. 下面是实际中要考虑的两点情况.

- 在风险一定的情况下, 取得最大的收益
- 在收益一定的情况下, 所冒风险最小.

不同的投资者对利益和风险的侧重点不同, 但在一定范围内都是正常的. 所以我们只能要求选择一种尽量好的方案. 即风险尽量小, 收益尽量大, 这符合题意和一般投资者的心理.

表 1 给出的四种投资项目各自的平均收益率、风险损失率以及交易费率各不相同, 我们先以 q_i 为横坐标表示风险, 以 $(r_i - p_i)$ 为纵坐标表示收益建立一个粗略的图形. 从大体趋势可以看出, q_i 越大, $(r_i - p_i)$ 也越大, 即风险越大, 期望收益越大. 同理对表 2 画出图 2, 亦可看出同样的趋势. 虽然很粗糙, 但符合一般的实际情况.

题目中给出交易费的计算数额是一个分段函数, 设为 $t_i = \begin{cases} u_i, & x_i \leq u_i \\ x_i, & x_i > u_i \end{cases}$. 在实际计算中, 不容易处理, 但我们注意到, 在表 1 中, u_i 的数值非常小, $\sum_{i=1}^4 u_i = 103 + 198 + 52 + 40 = 387$ 元, 对其中最大的 u_i 来说, $u_2 = 198 < 200$ 元, 而已知 M 是一笔相当大的资金. 同时交易费率 p_i 的值也很小. 即使在 $x_i < u_i$ 时, 以 u_i 来计算交易费与用 x_i 直接计算交易费相差无几. 所以, 后

面我们具体计算时,为简化暂不考虑 u_i 的约束,都以 x_i 来代替 u_i 计算交易费.这一小的误差将在后面的讨论中具体加以分析.

公司在问题一的情况下可对五种项目投资,其中银行无风险,收益 $r_0 = 5\%$ 为定值,在投资期间不会变动.其它投资项目虽都有一定的风险,但收益可能大于银行利率.我们拟建立一个模型,这个模型对一般投资者都适用.并根据他们风险承受能力的不同提出多个实用于各种类型人的投资方案.(把投资者分为一冒险型,温和型与保守型,越积极冒险的人对风险损失的承受能力越强,用 c 作为指标来划分.)

由前面的分析已经知道,风险越大,利益可能越大.所以,利益与风险是一对矛盾,我们根据公司要求,用多目标划来建模,力求利益大,风险小.寻找一种令公司满意的方案.

设计第 i 种资产投入钱数占总金额 M 的比例为 x_i ,则投资期满所得净收益为 $\sum (x_i r_i - t_i p_i)$ 总风险以 S_i 项中所冒风险的最大值来考虑.这是一个二目标线性规划模型.

问题二扩大了投资范围,首先我们根据问题一中所建模型对数据计算,取不同的 c 值,得到一组数据,这与前面的方法相同.

我们又对表 2 中的数据观察,发现数据极一规则,有些项目 x_i, q_i, p_i 的数值明显不符合投资要求,因而可在计算之前整体优化.即对所给项目粗略去舍,再对剩余项目进行投资.这将在模型的优化中加以讨论.

模型建立

当该公司对市场上的资产进行投资时,涉及到两个衡量投资方案好坏的标准,也即有两个目标:

1. 净收益大;
2. 风险小.

我们设 z_1 为净收益函数

$$z_1 = \text{收回资产时的总资产} - \text{投资时的总资产}$$

因此:

$$z_1 = \sum_{i=0}^n x_i + \sum_{i=0}^n x_i r_i - 1.$$

又因为此 $\sum_{i=0}^n (x_i + t_i p_i) = 1$ (同投资时交易费从 M 中扣去) 所以

$$z_1 = \sum (x_i r_i - t_i p_i) \quad \text{其中 } t_i = \begin{cases} u_i, & x_i \leq u_i, \\ x_i, & x_i > u_i, \end{cases}$$

同时,我们希望,所投第 i 项中最大风险越小越好.以 z_2 表示风险函数.

$$z_2 = \max\{x_i q_i / i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

综合以上分析,得出模型:模型 A: (双目标决策模型)

$$\max\{z_1 = \sum_{i=0}^n (x_i r_i - t_i p_i)\}, \quad \min\{z_2 = \max\{x_i q_i\},$$

$$\sum_{i=0}^n (x_i + t_i p_i) = 1$$

$$\text{s.t. } x_i \geq 0.$$

该模型的非劣解集可以用线性加权法求出, 但对于双目标决策来说, 存在两个问题:

1. 两目标各自的权重不好任意决定;
2. 对本模型目标函数 z_2 难以处理, 考虑到这两种情况, 我们对模型 A 进行下面的简化.

引进一个参量 e , 表示投资者风险的承受能力. 由题意要求: $x_i q_i \leq e$ 这样迫使投资分散, 风险也就相应减小, 从直观上来讲就是各个项目同时发生风险的概率不大. 防止了盲目的追求利益, 是对风险的一种量化. 于是对

$$\min\{z_2 = \max\{x_i q_i\}\}$$

可以把目标函数 z_2 变成约束条件

$$x_i q_i \leq e$$

在问题分析中, 已经证明不考虑 u_i 的约束, 对投资方案影响不大. 综合各种情况把模型 A 整个简化成以下模型.

模型 B

$$\max z_i = \sigma x_i (r_i - p_i)$$

$$\text{s.t. } x_i q_i \leq e$$

$$\sum x_i (1 + p_i) = 1$$

$$x_i \geq 0$$

这个模型是一个单目标的线性规划. 在给定的 e 值下, 很容易求出此时的最优解, 我们又根据各人的不同承受能力给出一系列 e 值, 求出一系列最优解. 我们期望通过对这一系列点 (e, z) 的拟合, 得出一个函数关系式 $z_1 = f(e)$, 从而由此拟合函数 $f(e)$, 运用数学方法可以求得一个合理的投资方案.

数据计算与分析

一、对问题 1 的计算与分析

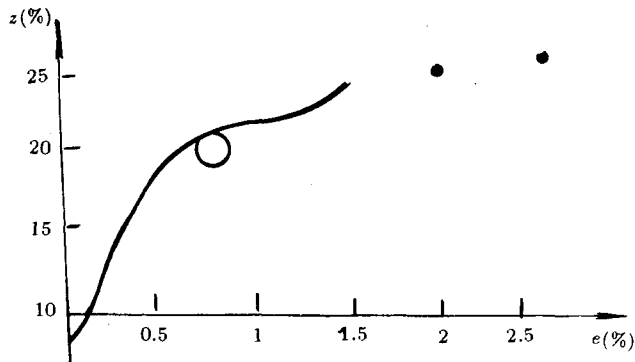
利用附表 A 的程序 (略) 在 mathematica 软件包中解出对应于给定不同 e 的最优解, 列表如下:

投资项 $e\%$	z_1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0.1	7.5528	0.8316	0.04	0.0667	0.0182	0.0385
0.2	10.1055	0.6633	0.08	0.1333	0.0364	0.0769
0.3	12.6583	0.4949	0.12	0.2	0.0545	0.1154
0.4	15.211	0.3266	0.16	0.2647	0.0727	0.1338
0.45	11.4874	0.2424	0.18	0.3	0.818	0.1731
0.5	17.7638	0.1582	0.2	0.3333	0.0909	0.01923
0.55	19.0402	0.074	0.22	0.3167	0.1	0.2115
0.6	20.1908	0	0.24	0.4	0.1091	0.2212
0.7	20.6607	0	0.28	0.4667	0.1273	0.1016
0.8	21.1043	0	0.32	0.5532	0.1271	0
0.9	21.552	0	0.36	0.6	0.0233	0
1.0	21.902	0	0.4	0.5843	0	0
1.5	23.5392	0	0.6	0.3863	0	0
2.0	25.1763	0	0.8	0.1882	0	0
2.5	26.7327	0	0.9901	0	0	0

从表中数据可看出, e 越大, z_1 越大, 即风险大, 收益也大. 这是合乎常理的.

通过对上述数据的分析, 我们不妨把投资者大概分为三种类型, 即: 保守型、温和型、冒险型. 由上表, 我们还可以看出, 当投资越分散时, 投资者所承担的风险也越小, 这与题意也是一致的, 也即冒险型的投资者会出现集中投资的情况, 而保守型的投资者则尽量分散的投资.

我们又对一系列坐标点 (e, z) 进行多项式拟合在六次的情况下, 拟合状况, 如下图所示:



所得的 $z - e$ 函数关系式为

$$z_1 = 7.2 - 9.1e + 162.2e^2 - 301e^3 + 235e^4 - 83.7e^5 + 11.2e^6$$

由图我们注意到: 尽管当 e 增大时, z_1 也同时增大, 但其增长势头也即 $f'(e)$ 在一定区间 $[e_1, e_2]$ 内迅速减少.

我们认为在 $f'(e)$ 发生相对剧烈变化的区间投资是合理的. 因为在现实生活中, 正常人不会多冒相对较大的风险去求取相对很少的收益, 即这也就是指 $e > e_2$ 的投资区域, 相反, 也不会因为多冒相对很小的风险, 而放弃相对增加很多的收益, 这也就是指 $e < e_1$ 的投资区域. 在这里, $f'(e)$ 可以理解为每一个单位风险所能获得的收益, 又注意到 $f'(e)$ 在经过急剧减少后, $f'(e)$ 将会保持保持相对稳定, 但 $f(e)$ 趋向水平也即每增加一个单位风险所能多获得的收益很小.

作为一个理性的投资者, 我们确定以 $[e_1, e_2]$ 区间上曲率最大 (也即 $f(e)$ 函数曲线最弯曲的点所对应的投资方案作为最佳的投资方案).

即对于曲率公式

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

要求函数 k 取最大值时所对应的点, 也就是最佳方案所对应的点.

从拟合曲线可估算出 $[e_1, e_2]$ 区间为 $[0.4, 1]$ 区间, 在 Mathematica 软件上计算可得 $e^* = 0.74$. 然而我们通过连接折线注意到拟合曲线在折线斜率急剧变化的区间拟合得不好, 因而在这段区间上我们通过增加坐标点进行小区间拟合, 又通过 Mathematica 软件计算出, 当 $e^{**} = 0.592$ 时, 其曲率最大, 所以我们选择 e^{**} 为最优解, 其对应的方案如下:

对第 i 项投资的金额	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
收益	0.0033	0.2368	0.3947	0.1076	0.2277

即在 $e^{**} = 0.592$ 时, 有一个最佳的投资方案.

二、对表二的计算与分析

利用附录程序 B 在 Mathematica 软件下解出对应于给定 e 的最优解 z_1 , 列表如下

ϵ	0.5	1.5	3	5	8	15	30
x_0	0.8459	0.5376	0.0753	0	0	0	0
x_1	0.0119	0.0357	0.0714	0	0	0	0
x_2	0.0093	0.0278	0.0556	0.026	0	0	0
x_3	0.0083	0.025	0.05	0.0833	0.1333	0.25	0.5
x_4	0.0119	0.0357	0.0714	0.1190	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0.0128	0.0385	0.0769	0.1125	0	0	0
x_7	0.0083	0.025	0.05	0.0833	0.1333	0.25	0.4451
x_8	0.0149	0.0449	0.0898	0.1497	0.1739	0	0
x_9	0.0094	0.0281	0.0563	0.0938	0.1501	0	0
x_{10}	0.0125	0.0375	0.075	0.125	0.2	0.375	0
x_{11}	0.0161	0.0484	0.0968	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	0	0	0	0
x_{13}	0.0109	0.0326	0.0652	0.1087	0.1739	0.0829	0
x_{14}	0	0	0	0	0	0	0
x_{15}	0.0217	0.0652	0.1304	0	0	0	0
z_1	7.2714	11.8141	18.6283	26.6713	32.3891	35.0148	37.32

注 其余数据见附录(略)。

由上表数据也可以看出, 风险承受能力越大, 收益也越大, 而投资越分散, 其对应的风险也就越小, 这与表数据结果的分析结论是吻合的。同样, 我们也可以对 (ϵ, z) 点集进行拟合函数为:

$$z_1 = 3.43867 + 6.34598\epsilon - 0.382283\epsilon^2 + 0.000923\epsilon^3 + 0.000674\epsilon^4 - 0.000022\epsilon^5 + 2.16593 \times 10^{-7}\epsilon^6$$

从而得到

$$\epsilon^* = 7.40$$

在此情况下的最优投资方案为

$$(0, 0, 0, 0.1233, 0.0123, 0, 0, 0.1233, 0.2216, 0.1388, 0.185, 0, 0, 0.1609, 0, 0)$$

对表 2 数据的计算与分析, 验证了我们的模型适合于一般情形。

模型的优化

考虑到当投资项过多时, 会使计算很复杂, 因而我们在直接计算数据前对投资项目按一定标准进行估算, 去掉一些明显的劣项, 进而简化计算。我们这里以 $(r_i - p_i)$ 作为净收益的估计值, 以 q_i 作为风险的估计值。给定在两目标决策时净收益与风险的权重分别为 0.9 和 0.1, 即 $0.9(r_i - p_i) - 0.1q_i$ 作一个综合的估计值。从而对表 2 的数据进行估算, 由上面的数据可以得出(1)、(11)、(12)、(19), 这几项是可以去掉的。然后, 我们任选一 ϵ ($\epsilon = 1.5$) 通过计算, $z^* = 11.5269$, 对在简化之前同等条件下 $z = 11.8141$,

S_1	$\frac{r_i - p_i}{q_i}$	数学期望
1	0.178	2.55
2	0.283	8.37
3	0.723	33.06
5	0.5533	15.96
6	0.417	0.33
7	0.516	24.79
8	0.841	21.92
9	0.58	22.48
10	0.848	26.51
11	0.216	2.93
12	0.6	2.42
13	0.762	24.47
14	0.925	3.88
15	0.319	4.34

我们可以得出, 删除一些, 劣等投资项目后, 会对 z 以及 x_i 产生影响, 但对收益 z 的影响不大, 可计算出相对误差 $= (11.8141 - 11.5269) / 11.8141 = 0.024$, 而当投资项目众多, 而又有一定数量的劣等投资项目时, 这种方法对计算的简化是非常明显的.

模型的讨论

一、拟合状况对最优投资方案的影响

由于是以拟合曲线在一定范围内曲率最大的点所对应的方案, 为最佳方案, 但是考虑到在实际中拟合曲线, 存在一定的误差, 因而我们所选取的方案不一定是一般情况下最好的方案, 但必定在最优方案的附近. 为了解决这个问题, 我们可以将各坐标点用线段连接起来, 通过分析可以得到各线段, 斜率变化相对剧烈的区间, 进而在这个区间内通过减小 c 的步长来增加坐标点然后在这个区间内进行第二次拟合, 再用同样的方法可以求出区间内曲率, 最大的一点, 从而得到一般情况下的最好方案.

二、稳定性的讨论

灵敏度讨论: 在我们所建立的线性规划模型 B 中, 假定参数 r_i, q_i 都是常数, 但实际上这些系数往往是估计值和预测值, 市场和人为因素对这类参数的确定有一定影响, 当 r_i, q_i 有微小变化时, 目标函数的变化是否会很大? 因此需要进行灵敏度分析.

不妨在 $c = 0.05$ 时, 使 r_i 与 q_i 有小的增长, 求出目标函数 f 变化幅度并列如下:

r 增长幅度	q 增长幅度	f 值变化幅度
1%	0	1.1%
2%	0	2.2%
5%	0	5.5%
10%	0	11%
0	0	-0.7%
0	2%	-1.4%
0	5%	-3.4%
0	10%	-6.5%
10%	10%	3.4%
5%	10%	1.5%

对该表数据进行分析可知, r_i, q_i 微小变化对目标函数影响不大, 表明我们的模型通过了灵敏度检验, 具有实用价值.

三、对 u_i 的讨论

在模型中, 我们没有考虑 u_i 对交易费的影响, 从而简化了模型. 由条件可知, 当满足 $x_i M \geq u_i$ 时, 可以对 u_i 忽略不计, 通过对数据的计算可知, 在 M 相当大的情况下, x_i 都能满足上述条件, 因而我们认为一般情况下 u_i 对模型的影响非常小, 所以在计算时忽略它是比较合理的.

附 录 (略)

参 考 文 献

- [1] 钱颂迪等, 运筹学, 清华大学出版社, 北京, 1990.
- [2] 周汉良, 范玉妹, 数学规划及其应用, 冶金工业出版社, 北京, 1985.
- [3] 陈雨露, 赵锡军, 金融投资学, 中国人民大学出版社, 北京, 1996.
- [4] 李庆扬等, 数值分析, 华中理工大学出版社, 武汉, 1996.

资本市场的最佳投资组合

闫 珺 王 璐 韩嘉睿

指导教师: 邓明华

(北京大学数学科学学院, 北京 100871)

编者按 本文作者对投资理论相当熟悉, 对问题的讨论也更多地解决投资组合问题, 而不拘泥于数学表达. 尤其是作者在最后对模型的评价更显示出他们对投资决策有相当全面的理解. 本文在数学上也极有特色. 他们的解法出乎常规: 通过随机投点法描出有效投资组合前沿, 前沿由直线段所组成, 再结合经济上的考虑给出适当的解答. 这样做是颇有创见的.

摘 要 市场上有多种可提供投资者选择的资产. 本文试图对各种收益和风险进行分析, 在一定的标准下给出全部资产组合的效益前沿, 即有效资产组合, 为投资者提供参考.

在建立模型时, 考虑到资本市场的实际情况, 我们对题目的条件作了适当的简化和补充. 由于用于投资的资金 M 很大, 我们忽略了单位资产的交易费用 u_i ; 同时我们允许从银行贷款进行投资, 以增加投资的灵活性. 我们把资产的平均收益率和风险损失率作为各种资产及组合的收益和风险地定量描述, 用计算机模拟了各种可能的投资组合, 得到了完整的风险—收益图, 直观地给出了有效资产组合的区域, 并给出了精确的计算方法计算资产组合集合的效率前沿, 使不同类型的投资者都可以找到最佳的投资组合.

最后, 我们指出了一些在模型中没有考虑进去的因素, 并分析了这些因素可能对模型产生的影响, 并提出了模型的改进方向, 以满足对预测的可靠程度要求更高的投资者的需求.

1 问题的表述 (略)

2 市场上的投资组合模型

2.1 基本假设及其合理性

(1) 一项资产的平均收益率是在一个投资周期内各种可能收益值在总投资中所占的百分比的统计平均. 单项资产的收益用其平均收益率来衡量, 由若干项资产所组成的资产组合的收益用构成该资产组合的各项资产的平均收益率的权重平均来表示.

(2) 一项资产的风险损失率是在一个投资周期内资产在发生风险时最大可能的损失在总投资中所占的百分比. 单项资产的风险用其风险损失率来衡量, 由若干项资产所组成的资产组合的风险用构成该资产组合的各项资产中最大的一个风险来衡量.

(3) 公司 (投资者) 按照其对投资所具有的期望收益和风险程度的估计做出投资决策.

(4) 进行投资决策时坚持“最大化原则”. 即给定一定的风险水平, 投资者将选择期望收益最高的资产或资产组合; 给定一定的期望收益, 投资者将选择风险最低的资产或资产组合.

(5) 公司 (投资者) 只能按照市场价格买入或卖出资产, 且这种单期的买卖行为不会对资产的价格产生影响.

(6) 资本市场是无障碍的, 即交易费用为零, 资产的交易数量不限, 公司 (投资者) 可根据其财力在市场上按市场价格购买任何一种资产.

(7) 公司 (投资者) 可以用相同的利率水平 (r_0) 无风险无限制地从银行借入或借出资金.

前两条假设确定了对资产的收益和风险的度量. 第 3、4、5 项假设是基本符合实际的. 由于 M 是一笔数额相对很大的资金, 我们忽略了 u_i 的作用作了第 6 项假设. 事实上, 以表 3.1 中的数据为例, u_i 至多造成

$$103 \times 1\% + 198 \times 2\% + 52 \times 4.5\% + 40 \times 6.5\% = 9.93(\text{元})$$

的损失, 在 M 很大时是可以忽略不计的. 后一条假设虽然与实际情况略有出入, 但不会影响到结论的正确性, 对我们分析问题、简化模型提供了帮助.

2.2 建立模型

设占资金 M 中比例为 α_i 的部分被用来购买资产 $S_i (i = 1, \dots, n)$. 令 $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$, 当 $\alpha_0 > 0$ 时, 将剩余的资金 $\alpha_0 M$ 存入银行; 当 $\alpha_0 < 0$ 时, 从银行中借出资金 $\alpha_0 M$. 借入借出资金的利率均为 r_0 , $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

对给定的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 购买资产 S_i 的资金为 $\alpha_i M$, 忽略 u_i 的作用, 实际用于资产 S_i 的投资为 $\alpha_i M \frac{1}{1+p_i}$. 从而资产 S_i 的预期收益为 $\alpha_i M \frac{1}{1+p_i} r_i$, 投资组合的总收益为 $\sum_i \alpha_i M \frac{1}{1+p_i} r_i$; 购买资产 S_i 的风险损失率为 q_i , 风险为 $\alpha_i M \frac{1}{1+p_i} q_i$, 总体风险为 $\max\{\alpha_i M \frac{1}{1+p_i} q_i\}$. 称

$$\bar{r}_i = \frac{r_i}{1+p_i}, \quad (2.1)$$

为实际收益率

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{1+p_i}, \quad (2.2)$$

为实际风险率, 总体收益率 $E = \sum_i \alpha_i \bar{r}_i$, 总体风险率 $Q = \max\{\alpha_i \bar{q}_i\}$. 问题的实质即在 $\sum_i \alpha_i = 1$ 的条件下求出 α_i 的值, 使总体收益率 R 尽量大, 总体风险率 Q 尽量小.

2.3 多项风险资产的组合

我们首先来考察四项风险资产的组合投资问题. 在计算中我们使用 $n = 4$ 时的相关数据如表 3.1 所示.

表 3.1

S_i	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	$u_i(\text{元})$	$\bar{r}_i(\%)$	$\bar{q}_i(\%)$
S_1	28	2.5	1	103	27.7	2.48
S_2	21	1.5	2	198	20.6	1.47
S_3	23	5.5	4.5	52	22.0	5.26
S_4	25	2.6	6.5	40	23.4	2.44

表中的 \bar{r}_i 和 \bar{q}_i 是根据 (2.1) 和 (2.2) 计算出来的. 将这四项风险资产按一定比例组合在一起, 便构成了四项风险资产的组合. 我们用计算机对可能的投资组合进行了随机模拟, 绘制了图 3.1. 图中的横轴表示总体风险率, 纵轴表示总体收益率.

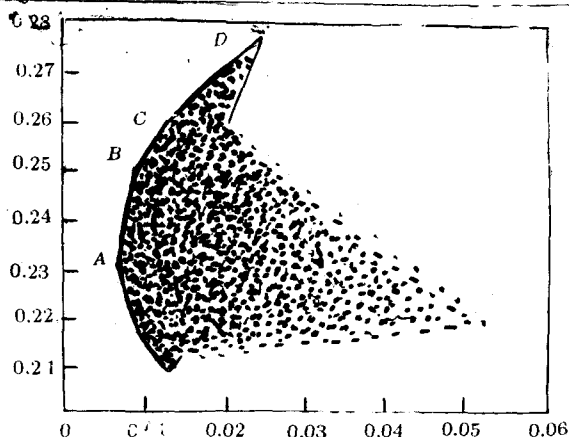


图 3.1

对每一个随机产生的资产组合, 我们把该组合的总体风险和收益用风险 — 收益图中一个点来表示. 图 2.1 中的黑色部分近似地表示了 4 项资产构成的各种资产组合的集合, 投资者的任何一种投资组合对应图中的一个点. 我们观察到在这个区域的边缘存在一条折线 $ABCD$, 对于投资者的任何一种选择, 在该折线上都可找到一种投资组合具有更高的收益和更低的风险. 因此投资者将只在折线 $ABCD$ 上选择他所需要的资产组合, 我们称折线 $ABCD$ 为这一资产组合集合的效率前沿.

下面我们给出一种方法, 通过表 3.1 确定出点 A, B, C, D 的坐标, 从而得到资产组合的效率前沿.

首先将资产 S_1, S_2, S_3, S_4 重新排序, 使 \bar{r}_i 递减排列, 得到新的表 3.2.

表 3.2

No	S_i	$\bar{r}_i(\%)$	$\bar{q}_i(\%)$	\bar{q}_i^{-1}
1	S_1	27.7	2.48	40.3
2	S_4	23.4	2.44	41.0
3	S_3	22.0	5.26	19.0
4	S_2	20.6	1.47	68.0

对表 3.2 的最后一列求和并取倒数, 作为点 A 的横坐标; 将表 3.2 的第二列与第四列对应数据乘积的和与刚才得到的横坐标相乘, 作为点 A 的纵坐标. 即点 A 的横坐标为

$$(40.3 + 41.0 + 19.0 + 68.0)^{-1} = 0.0059,$$

点 A 的纵坐标为

$$(27.7\% \cdot 40.3 + 23.4\% \cdot 41.0 + 22.0\% \cdot 19.0 + 20.6\% \cdot 68.0) \cdot 0.0059 = 0.230.$$

去掉表格的最后一行, 重复上述步骤可以得到点 B 的纵坐标为

$$(40.3 + 41.0 + 19.0)^{-1} = 0.0100,$$

点 B 的横坐标为

$$(27.7\% \cdot 40.3 + 23.4\% \cdot 41.0 + 22.0\% \cdot 19.0) \cdot 0.0100 = 0.249.$$

依此类推可算出点 C 的坐标为 $(0.0123, 0.256)$, 点 D 的坐标为 $(0.0248, 0.277)$. 在坐标纸上描出折线 $ABCD$ 即得到了投资组合的效率前沿. 投资者可依自身对风险的偏好程度在效率前沿上选择适当的投资组合. 效率前沿的性质及计算方法的严格证明请参见附录 (略).

2.4 风险资产与无风险资产的组合

如果公司 (投资者) 还可以选择在无风险资产上进行投资, 则其投资策略将更加灵活, 资产组合的集合及效率前沿也会发生较大的变化. 我们选用银行存款的利率 r_0 为无风险资产的平均收益率, 设对风险资产的投资组合的总体收益率为 R , 总体风险率为 Q . 总投资由 a 比例风险资产和 $(1-a)$ 比例无风险资产组成. 则这种投资组合的总体风险率为 $\bar{Q} = aQ$, 总体收益率为 $\bar{R} = (1-a)r_0 + aR = a(R - r_0) + r_0$. 一般来说, 风险投资的收益率 R 应大于无风险投资的收益率 r_0 , 所以当风险资产所占比例 $0 \leq a \leq 1$ 时, 在风险—收益图上得到一条向右上方倾斜的线段, 如图 4.1 所示. 该线段向右上方的延长线对应 $a > 1$, 此时我们认为公司以无风险收益率 r_0 从银行借入占总资产 $(a-1)$ 的资金. 从图中可以看到, 随着贷款的增加, 风险和收益都呈线性上升. $a > 0$ 的部分是该资产组合的效率前沿.

在一无风险资产和多项风险资产的组合投资中, 对风险资产的每一种投资组合, 效率前沿都是从点 $(0, r_0)$ 出发, 过点 (Q, R) 的直线. 这是因为, 所有可行的风险资产组合也可视为一种风险资产. 在 2.3 的讨论中我们知道风险资产的投资组合应在一条折线上选取, 因此总体投资的效率前沿应为折线上的点与点 $(0, r_0)$ 的连线中斜率最大的一条, 如图 4.2 所示,

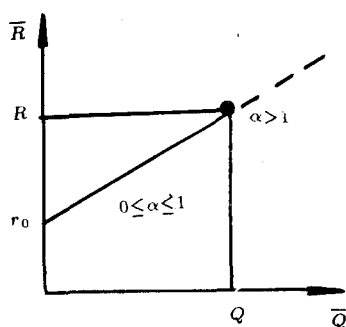


图 4.1

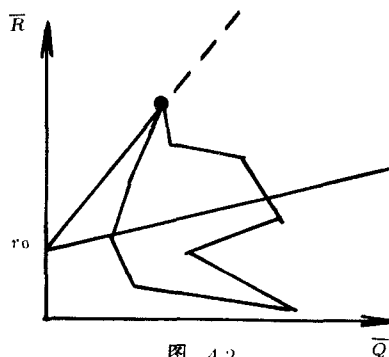


图 4.2

应用 2.3 中的方法, 我们已经可以对多种风险投资的效率前沿进行精确的计算, 在得到效率前沿各顶点的坐标后, 分别比较它们与点 $(0, r)$ 的连线的斜率, 即可得到总投资的效率前沿.

2.5 风险投资的比率

在前面两节的讨论中, 我们已经得到了投资组合的效率前沿. 由于实际中无风险资产的存在, 一般来说, 这个效率前沿是一条射线. 对这条射线上的每一点所对应的投资组合, 我们已经知道了它的风险和收益. 在效率前沿上, 风险是随着收益的增加而增加的. 对投资者来说, 选择哪一种投资组合, 取决于投资者对风险的喜好程度. 对于风险回避型 (risk averse) 的投资者来说, 他会选择风险较低的投资组合, 在效率前沿上, 对应的点接近 $(0, r_0)$, 即他会把多数的资金投入银行. 另一方面, 对于风险喜好者 (risk loving) 来说, 他会选择高风险高收益的投资组合, 在效率前沿上, 对应的点远离 $(0, r_0)$, 他有可能从银行贷款进行风险投资.

下面我们来计算具体的投资比例. 对 n 种风险资产 $S_i (i = 1 \cdots n)$ 和相应的实际收益率 \bar{r}_i 与实际风险率 \bar{q}_i 说, 不妨设 $\bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \cdots > \bar{r}_n$ 应用 2.3 的方法, 我们可以算出风险投资的效率前沿折线的 n 个顶点 P_1, P_2, \cdots, P_n , 其中点 P_i 的坐标为

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{\bar{q}_1} + \frac{1}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{1}{\bar{q}_i}}, \frac{\frac{\bar{r}_1}{\bar{q}_1} + \frac{\bar{r}_2}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{\bar{r}_i}{\bar{q}_i}}{\frac{1}{\bar{q}_1} + \frac{1}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{1}{\bar{q}_i}} \right)$$

从这 n 个顶点向点 $(0, r_0)$ 所引的直线的斜率为

$$\left(\frac{\frac{\bar{r}_1}{\bar{q}_1} + \frac{\bar{r}_2}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{\bar{r}_i}{\bar{q}_i}}{\frac{1}{\bar{q}_1} + \frac{1}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{1}{\bar{q}_i}}, \frac{\frac{\bar{r}_1}{\bar{q}_1} + \frac{\bar{r}_2}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{\bar{r}_i}{\bar{q}_i}}{r} \right) / \frac{1}{\frac{1}{\bar{q}_1} + \frac{1}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{1}{\bar{q}_i}}$$

$$= \frac{\bar{r}_1 - r_0}{\bar{q}_1} + \frac{\bar{r}_2 - r_0}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{\bar{r}_i - r_0}{\bar{q}_i}$$

由于已经假设 $\bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \cdots > \bar{r}_n$, 为了使直线的斜率尽可能大, 只需 $i_0 = \max\{i | r_i > r_0\}$, 则风险投资组合的投资比率为对 $1 \leq k \leq i_0$, 风险投资中比率为 $\frac{\frac{1}{\bar{q}_k}}{\frac{1}{\bar{q}_1} + \frac{1}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{1}{\bar{q}_{i_0}}}$ 的资金被用来购买资产 S_k , 而其余资产则不投入资金. 若投资者根据自己的偏好确定了投资风险资产的比率 α , 则总的投资组合为向 S_k 投入资金 $\frac{\frac{1}{\bar{q}_k}}{\frac{1}{\bar{q}_1} + \frac{1}{\bar{q}_2} + \cdots + \frac{1}{\bar{q}_{i_0}}}(1 \leq k \leq i_0)$, 而将其余的占比率为 $(1 - \alpha)$ 的资金存入银行 (当 $\alpha > 1$ 时为从银行借出占比率 $(\alpha - 1)$ 的资金用于风险投资).

下面我们将这一结果应用于题目中给出的两组数据:

对于第一组数据, 参见表 2.2 可知所有的 \bar{r}_i 均大于 r_0 , 从而风险投资中投向资产 S_1, S_2, S_3, S_4 的比率分别为 23.95%, 24.36%, 11.29%, 40.40%. 在风险—收益图上, 效益前沿为过点 $(0, 0.05)$ 和点 $(0.0059, 0.230)$ 的线段.

对于第二组数据, 相应的数据如表 5.1 所示, 仍然有所有 \bar{r}_i 均大于 r_0 , 于是风险投资中投向资产 S_1, S_2, \cdots, S_{15} 的比率分别为: 2.0%, 1.5%, 1.4%, 2.0%, 72.1%, 2.0%, 1.3%, 2.5%, 1.6%, 2.1%, 2.7%, 1.6%, 1.8%, 1.6%, 3.8%. 当公司在这种比例下进行风险投资时可以达到投资组合的效率前沿. 效率前沿为

表 5.1

S_i	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	$u_i(\%)$ (元)	$\bar{r}_i(\%)$	$\bar{q}_i(\%)$
S_1	9.6	42	2.1	181	9.40	41.14
S_2	18.5	54	3.2	407	17.93	52.33
S_3	49.4	60	6.0	428	46.60	56.60
S_4	23.9	42	1.5	549	23.55	41.38
S_5	8.1	1.2	7.6	270	7.53	1.12
S_6	14	39	3.4	397	13.54	37.72
S_7	40.7	68	5.6	178	38.54	64.39
S_8	31.2	33.4	3.1	220	30.26	32.40
S_9	33.6	53.3	2.7	475	32.72	51.90
S_{10}	36.8	40	2.9	248	35.76	38.87
S_{11}	11.8	31	5.1	195	11.23	29.50
S_{12}	9	5.5	5.7	320	8.51	52.03
S_{13}	35	46	2.7	267	34.08	44.79
S_{14}	9.4	5.3	4.5	328	9.00	50.72
S_{15}	15	23	7.6	131	13.94	21.38

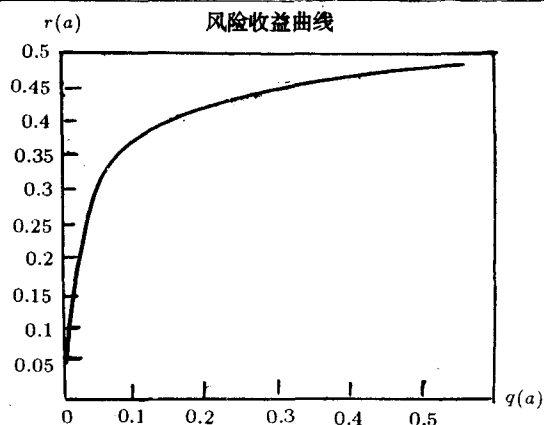


图 5.1

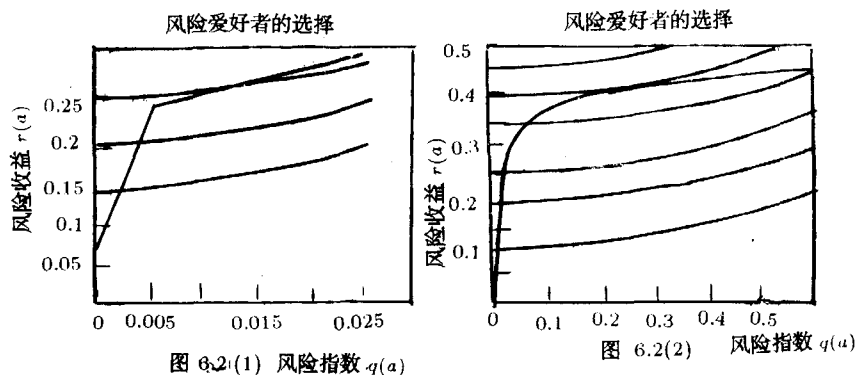
过点 $(0, 0.05)$ 和点 $(0.0081, 0.1155)$ 的直线.

从计算结果中我们看到, 如果选择点 $(0.0081, 0.1155)$ 附近的投资组合, 风险已经降至 1% 以下, 而收益高于 10%. 因此多项资产构成的投资组合可以大幅度地减少投资风险. 对市场投资的调查表明, 想有效地减少风险, 至少要有十种左右的资产, 15 种资产是比较好的数量. 这里计算结果和实际情况是相符的. 在图 5.1 中, 我们给出了风险投资的效率前沿折线, 折线的顶点用小圆圈标出. 该折线在风险较大时收益的增加速度很慢. 这表明在风险投资中, 如果选择了高收益的投资组合, 则势必造成风险的上升. 而且风险上升的速度随收益的增加而加快. 因此, 在决策时不能片面地追求高收益而冒无谓的风险.

2.6 投资组合的决策

为了定量的描述风险与收益在决策时所起的作用, 对一个特定的投资者而言, 下面我们引入该投资者的无差异曲线. 在经济学上, 效用是指人们从某事物中所得到的主观上的满足程度. 由于在效率前沿上的投资组合较其余选择更为有效, 投资者不会选择效率前沿以外的资产组合. 而在效益前沿上, 投资者将追求使效用最大的投资组合. 每一组 (风险, 收益) 对投资者的效用是确定的, 于是我们可在风险—收益图上描出一族曲线, 每一条曲线上的点所对应的效用相等, 称这样的一条曲线为无差异曲线. 我们把一族无差异曲线画在图 4.1 上, 得到了图 6.1. 则切点 A 对应于投资者在效率前沿上的选择. 对于题目中所给的两组数据, 我们已经给出了效率前沿的范围. 下面我们针对公司决策者的不同类型来给出不同的效用函数.

(1) 风险喜好型 (risk loving) 效用函数可取作 $f_L(Q, R)$, 此时的无差别曲线族为 $f_L(Q, R) = C$ ($0 < C < \infty$), 无差异曲线见图 6.2(1) 和图 6.2(2);

图 6.2(1) 风险指数 $q(a)$ 图 6.2(2) 风险指数 $q(a)$

(2) 风险中性 (risk neutral) 效用函数可取作 $f_n(Q, R)$, 此时的无差别曲线族为 $f_n(Q, R) =$

$C'(0 < C < \infty)$ 无差异曲线见图 6.3(1) 和图 6.3(2);

(3) 风险回避型 (risk averse) 效用函数可取作 $f_A(Q, R)$, 此时的无差别曲线族为 $f_A(Q, R) = C'(0 < C < \infty)$, 无差异曲线见图 6.4(1) 和图 6.4(2).

风险中性者的选择

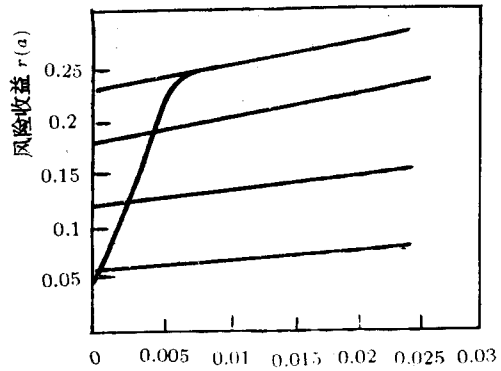


图 6.3 (1) 风险指数 $q(a)$

风险中性者的选择

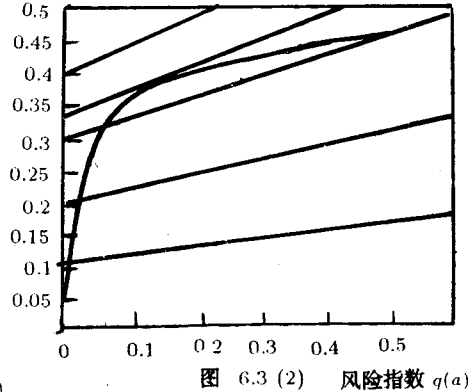


图 6.3 (2) 风险指数 $q(a)$

风险回避者的选择

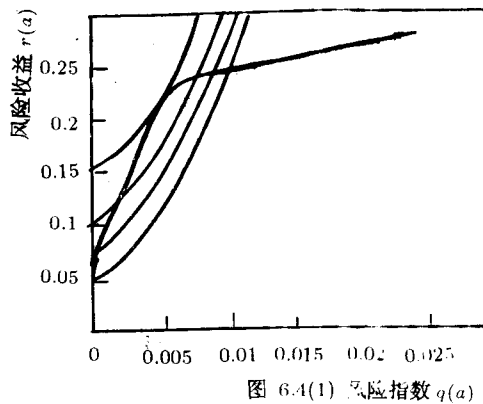


图 6.4(1) 风险指数 $q(a)$

风险回避者的选择

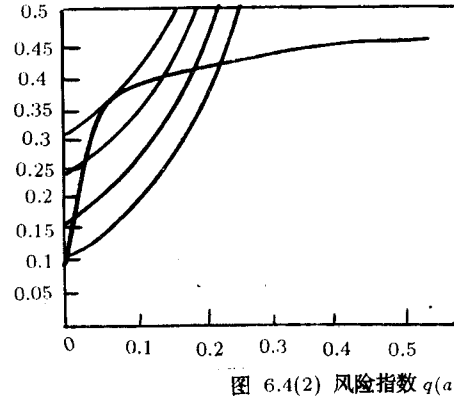


图 6.4(2) 风险指数 $q(a)$

3 对模型的评价和讨论

利用上面的数学模型解出的效率前沿可以帮助投资者作出有效的投资组合, 但最终对投资组合的选择, 还要靠投资者的风险承受能力决定. 这一模型对投资的指导意义在于, 人们可以利用计算机对大量风险资产的历史数据进行处理, 通过对历史数据的分析研究预测出资产的平均收益率和风险损失率, 根据模型便可以计算出资产组合集合的效率前沿.

当然, 模型中也存在不足. 用平均收益率和风险损失率代表收益和风险与实际情况有所不同, 而且没有提出精确的预测收益和风险的方法, 这就不能在模型内部保证预测的准确程度. 在实际的市场运作中, 各种风险资产之间是有一定关联的. 比如在某一时期货币汇率的下跌往往伴随着股市的下跌, 这时如果同时在外汇市场和股票市场上进行了投资, 则实际的风险要高于这两个投资风险中的任何一个. 在假设用所有投资中最大的风险代表混合投资的风险时, 我们没有体现出这一点, 这也降低了模型的合理性.

尽管如此, 这个模型还是对组合投资的决策提供了重要的启示和指导: 为了减少风险, 我们应该在多种资产上进行投资, 并且少量的资产组合就可以大幅度地减少风险; 在一定条件下, 投资者可以从银行贷款进行投资, 以获得更大的收益; 在进行投资决策时, 投资者应尽可能获得完整的市场信息, 以作出合理的预测. 这些在实际投资中被总结出来的重要经验, 在模型中都得到了不同程度的反映.

确定一个有效的资产组合是一个非常复杂的决策过程. 我们已经知道, 风险中的一部分可以通过增加资产组合中的资产数目而消除, 这一部分风险称作非系统风险. 非系统风险是由个别资产本身的

各种因素造成的收益的不稳定,例如政府对汇率的干预、股市上的传闻等等,都会对某类资产产生短期的影响.还有一部分风险是反映各资产共同状况的,不能通过改变资产组合的办法加以消除.例如全球范围内的经济紧缩、大的自然灾害、爆发战争等,所有的资产都会受到作用而产生共同运动表现出整体收益的不稳定性.研究表明,下述四个因素对大多数资产和证券的收益有着显著的影响:

- (1) 通货膨胀率的意外变化; (2) 工业生产的意外变化;
- (3) 风险补偿的意外变化; (4) 利率结构的意外变化.

在度量风险和收益时,投资者还可以选择其他的标准,例如期望收益率和标准差、离差率等等.在进行决策分析时,也可以选择其他的模型例如资本资产定价模型(CAPM)等对收益和风险进行预测.为了获得更为合理的结果,我们对模型提出了一些改进的方向,以适应不同投资者的需求:

一、单位资产的价格.对于个人投资者来说,资产的单价也是相当重要的.以表格 5.1 中的数据为例,在投资分配不利时,投资者有可能多付出

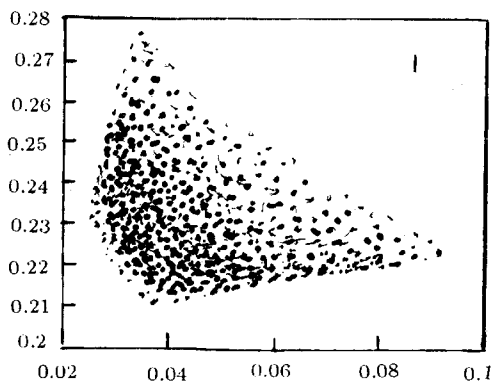
$$181 \times 2.1\% + 407 \times 3.2\% + 428 \times 6.0\% + \dots + 131 \times 7.6 = 243.053(\text{元})$$

在多次买卖中,这些损失可能会对总体的收益和风险产生一定的影响.因此在制定投资策略时,应尽量使购买每一种资产的资金都是单位资产成本的整数倍,以减少手续费的损失.

二、从银行贷款.银行的贷款利率一般要高于存款利率,但仍小于风险投资的收益率.因此在效率前沿上,对应于从银行贷款投资的射线的斜率应略小于在银行存款的那条线段的斜率.而且从银行贷款有偿还的责任,不能任意的追加投资,因此实际上的风险要比名义上的风险损失率大,投资者贷款时必须极端慎重.如果确定要贷款,在衡量风险时应考虑到投资者偿还贷款的能力.

三、风险资产之间的相互关系.前面已经提到,风险资产之间有着一定的相互作用.为了更精确的刻画这种关系,我们可以选用其他的方式来衡量资产的风险.例如用标准差来衡量风险的程度.这时在计算资产组合的风险时不仅要考虑各项资产的标准差的权中平均,而且要将每两种资产的相关程度计算在内,这便可以反映出资产之间的联系和相互作用.

四、衡量风险的标准.在我们的模型中,衡量风险只单纯考虑了资产在一个投资周期后发生的损失,忽略了在购买资产时付出的手续费.为了更精细的估算,我们可在衡量总体风险时综合考虑手续费的损失,这时的总体风险函数应为 $Q = \max\{\alpha_i q_i\} + \sum \alpha_i p_i$. 在这种情况下,可以类似的证明有关效率前沿的性质和计算方法.下图给出了在采用这样的风险估计时效率前沿在风险—收益图上的形状(对应于题目中的第一组数据).



此外,在实际操作中还要综合考虑到通货膨胀、市场操纵、投机等多种因素对已作出的投资组合的方案进行调整,才能得到最佳的资产组合方案.

附 录 (略)

投资收益与风险的优化模型

曾劲松 俞 杰 薛大雷

指导教师: 雷英杰

(华北工学院理学系, 太原 030054)

编者按 本文将二目标优化问题, 对两个目标作加权组合化成单目标优化问题. 寻找最优解时采用了净收益率排序. 风险固定时净收益率大者优先的原则. 逐项确定各投资项目的投资额. 对这一解法的合理性, 文章给出了理论证明. 对试验题给出的数据解出了最佳投资方案. 解题步骤, 理论依据均简明, 清晰.

摘 要 本文以投资效益为目标, 对投资问题建立了一个优化模型. 由于不同的投资方式具有不同的收益和风险损失, 该模型根据优化组合的原理, 提出了两个准则, 并根据准则从众多投资方式中选出若干种投资, 组合成非劣投资, 使在投资额一定的情况下, 经济效益尽可能最大, 风险尽可能最小.

一、符号说明

m_i — 购买 s_i 的购买资金; G — 总体净收益; F — 总体风险; A — 投资效益;
 $(r_i - p_i)/(1 + p_i)$ — 投资效率¹
 s_k — 在所有的投资项目中 $(r_i - p_i)/(1 + p_i)$ 最大的那一投资项;
 $g_i(m_i)$ — 购买 s_i 的投资资金为 m_i 时的净收益; t — 投资项目数.

二、模型的建立与求解

银行存款可视为对 s_0 的投资, 其平均收益率为 $r_0 = 5\%$, 风险损失率 q_0 、购买费率 p_0 皆为 0. 由于各项投资量都比较大, 为追求最大投资效益, 对第 i 项的投资至少应大于等于 u_i .

$$\begin{aligned} A &= G - K \cdot F \\ &= \sum_{i=0}^n g_i(m_i) - K \cdot \max\{q \cdot m_i\} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \\ &= \sum_{i=0}^n (r_i - p_i) \cdot m_i - K \cdot \max\{q_i \cdot m_i\} \\ &= \sum_{i=0}^n m_i(r_i - p_i) - k \cdot \max\{q_i \cdot m_i\} \end{aligned}$$

其中

$$\sum_{i=0}^n m_i(1 + p_i) = M.$$

准则一 当总体风险一定, 即 $F = \max\{q_i \cdot m_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 一定时, 投资效益 A 取最大的必要条件是 $(r_i - p_i)/(1 + p_i)$ 值最大的那一项投资的购买额为 $F/q_k (F \leq M \cdot q_k/(1 + p_k))$.

¹ 投资效率应为 $(m_i r_i - m_i p_i)/(m_i + m_i p_i) = (r_i - p_i)/(1 + p_i)$, 见 [2].

证 (略)

准则二 若总体风险 F , 总的资金 M 和投资项目为 s_k 的风险损失率 q_k , 购买费率 p_k 满足 $F \geq M \cdot q_k / (1 + p_k)$ 且所有投资都用来购买 s_k 时, 投资效益 A 最大.

证 (略)

根据准则一, 当给定 $F (F \leq q_k \cdot M / (1 + p_k))$ 时, 若要求 A 最大, 需把 $(r_i - p_i) / (1 + p_i)$ 值最大的一项投资 s_k 作为优先投资项目, 对该项投资 F / q_k 后, 在后面的投资中仍需将 $(r_i - p_i) / (1 + p_i)$ 值较大者作为优先投资项目, 如此将得到一个在 F 一定时的最优投资方案.

根据准则二, 当 $F > q_k M$ 时所有资金都用来购买 s_k , 对于题 (1) 所给的数据, 计算投资效益率 $(r_i - p_i) / (1 + p_i)$ 得

$$\begin{aligned} (r_0 + p_0) / (1 + p_0) &= 0.05 & (r_1 + p_1) / (1 + p_1) &= 0.2673 \\ (r_2 + p_2) / (1 + p_2) &= 0.1863 & (r_3 + p_3) / (1 + p_3) &= 0.1770 \\ (r_4 + p_4) / (1 + p_4) &= 0.1737 \end{aligned}$$

将投资效益率从大到小排列得

$$\frac{r_1 - p_1}{1 + p_1} > \frac{r_4 - p_4}{1 + p_4} > \frac{r_3 - p_3}{1 + p_3} > \frac{r_2 - p_2}{1 + p_2} > \frac{r_0 - p_0}{1 + p_0}$$

于是优先投资项的先后顺序为 s_1, s_2, s_3, s_4, s_0 , 假定所给 M 为 1 时, 根据此方案, 对于不同风险的最佳投资方案如附表一 (略).

对于一般的情况, 可以对投资效益率排序, 按优先顺序先后投资, 且各投资量以不超过给定风险为限, 则可得最佳投资方案. 具体的计算过程如下

首先, 由 $\sum_{j=0}^{t-1} n \frac{F}{q_j} (1 + p_j) \leq M \leq \sum_{j=0}^t \frac{F}{q_j} \cdot (1 + p_j)$ 来确定 t 的值, 则

$$G = \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (r_j - p_j) + \frac{M - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (1 + p_j)}{1 + p_t} \cdot (r_t - p_t)$$

其各项购买额 m_j 为当 $j < t$ 时, $m_j = \frac{F}{q_j}$; 当 $j = t$ 时,

$$m_j = \left[M - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (1 + p_j) \right] \cdot \frac{1}{1 + p_t},$$

当 $j > t$ 时, $m_j = 0$.

如对题中给定的数据, 利用我们建立的模型, 进行了最佳投资方案的计算, 所得结果可见附表二 (略).

以上计算过程中所使用的程序我们已附于文后, 详见附录一至四 (略).

模型评价与推广 (略)

参 考 文 献

- [1] 赵国杰, 技术经济学, 天津大学出版社, 天津.
- [2] 庄俊鸿等, 投资经济学, 华南理工大学出版社, 广州.
- [3] 荆新等, 财务管理学, 中国人民大学出版社, 北京.

一类投资组合问题的建模与分析

陈叔平

谭永基

(浙江大学, 杭州 310027) (复旦大学, 上海 200433)

摘 要 本文介绍了 1998 年全国大学生数学建模竞赛 A 题的特点、建模与求解过程, 并对参赛队的答案作出评述.

在今年的全国大学生数学建模竞赛中, 陈叔平提供的赛题 (即 A 题) 被竞赛全国组委会采用.

该题是一类关于投资组合的决策问题. 构思这道题目的主要动机是它有广泛的背景和一定的难度, 同时也让参赛学生有较大的发挥余地. 在人类的经济活动中, 收益和风险往往是相伴而来的, 不同的经营 (或投资) 项目有不同的收益和风险. 此外, 每一项目都需要经营 (或投资) 成本, 而可用的资金都是有限的. 因此相当大的一类决策问题可归结为在资金总额约束下, 对一批成本 — 收益 — 风险各不相同的项目进行权衡并作出经营 (或投资) 抉择. 我们可以列出许多这样的问题. 下面就是一个例子.

某出版社有 n 种不同的书籍可供选择出版. 确定出版一种图书时, 要支付固定数额的稿酬和制版费. 当印数达到某一数量时, 包括印刷发行费在内的整个成本可视为印数的线性函数. 此外每种图书都有各自的利润率. 但当第 i 种图书印数为 y_i 时, 将可能有 $g_i(y_i)$ 的量销不出去, 这部分图书只能作为废纸回收处理, 相当于损失. 如果 $g_i(y_i) = q_i y_i$ 其中 q_i 是常值, 那么这一问题就与 A 题所给出的情形基本相同.

我们选择证券投资组合为具体背景是因为它是目前社会上的一个热点, 接近大众生活, 容易引起兴趣. 但与此同时也带来了一些弊病. 下面我们具体介绍这道赛题的几个特点, 同时分析一下命题中的一些缺陷.

1. 交易费问题. 一项商业活动的成本一般由固定成本和可变成本两部分组成. 研制开发费、基建费等与产量无关的基本费用属固定成本. 原材料、能耗等与产量或经营规模相关的属可变成本. 赛题中给出的这类成本函数是有代表性和有趣的, 开发生产一种新药或新软件如此, 乘坐出租车也如此. 从数学上看, 这类成本函数非凸也非连续. 因此放到目标函数和约束条件中求解优化问题有一定的困难, 至少没有完全现成的方法可直接套用.

2. 风险问题. 风险是人们都能意会、十分熟悉但又没有统一标准的一个量. 为了明确起见, 我们选择 $\max_{1 \leq i \leq N} q_i x_i$ 作为投资 x_i 于 $S_i, 1 \leq i \leq n$, 的总体风险. 它反映了风险损失一般不会同时发生的现实, 也与一些文献 (如 [1]) 中所采用的一致. 本拟给出这个具体表达式, 后考虑到检验参赛学生的建模能力而改成文字叙述. 由于问题的背景是证券投资, 一些参赛学生从各种不同的参考资料中查阅了金融风险的其它公式 (如 Markowitz 的定义, 见 [2]), 从而引起了一定程度的混乱. 对金融风险的不同度量公式进行比较, 在完成本题基本要求基础上才予讨论.

3. 多目标优化问题. 人们的经济行为之所以呈现多样性, 主要原因是兼顾收益和风险时有不同的考虑, 且各人可支配的资金也不同. 追求大的收益和小的风险构成一个两目标优化问题. 传统上, 这类问题大多用某种方式化为单目标问题来求解. 例如, 将一个指标作为约束来优化另一指标或将两指标加权合成一个指标. 这一过程依赖于决策者对收益和风险的理解与偏好, 因而往往是不唯一的. 对固定的一个单目标优化问题求解不是主要目的, 因为所得的结果对本题的具体背景并无太大的实际意义. 本题的决策包含两个层次: 首先是决定买哪些股票, 然后是决定各买多少. 对在不同的偏好考虑下算得的结果进行分析、比较则更有意义, 也有更大的讨论和发挥余地.

4. 计算和数据问题. 由于交易成本函数的非凸, 非连续, 该题在一般情况下的求解是有一定难度的. 例如, 一维装箱问题就可化为固定风险水平条件下极大化收益这类问题的特殊情况 (见附录). 吴雄伟的论文 [3] 曾对加权和模型的算法作过巧妙但较复杂的分析. 当资金总额不足以购买这 N 种证券“起步值”之和, 即 $M \leq \sum_{i=1}^n u_i$ 时, 情况变得有些复杂. 因此我们加了 M “相当大”这一条件.

当 N 和 $\{(r_i, q_i, p_i, u_i); 1 \leq i \leq N\}$ 的值由数据具体给出时, 就可构造各种数值算法. 由于命题较匆忙且碍于我国股市目前的实际情况, 赛题中给出的数据不够理想, 使得把交易成本当作线性函数处理对计算结果的影响不大. 这就造成了解题和评卷时的又一些混乱.

一、参考建模与求解过程

1. 模型的建立.

设购买 S_i 的金额为 x_i , 所需的交易费 $c(x_i)$ 为

$$c_i(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i = 0, \\ p_i u_i, & 0 < x_i < u_i, \\ p_i x_i, & x_i \geq u_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

设存银行的金额为 x_0 , 显然 $c_0(x_0) = 0$.

对 S_i 投资的净收益为

$$R_i(x_i) = (1 + r_i)x_i - (x_i + c_i(x_i)) = r_i x_i - c_i(x_i),$$

投资组合 $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ 的净收益为

$$R(x) = \sum_{i=0}^n R_i(x_i)$$

由题意, 投资的风险

$$Q(x) = \max_{1 \leq i \leq n} q_i x_i.$$

投资所需资金为

$$F(x) = \sum_{i=0}^n (x_i + c_i(x_i)).$$

因此, 问题的数学模型是一个双目标优化:

$$\min \left\{ \begin{pmatrix} Q(x) \\ -R(x) \end{pmatrix} \middle| F(x) = M, \quad x \geq 0 \right\}$$

2. 模型的约化.

上述双目标优化模型可用多种方式记为单目标优化问题, 主要有以下三种:

模型 a 固定风险水平, 优化收益:

$$\begin{aligned} \max \quad & R(x), \\ \text{s.t.} \quad & Q(x) \leq k, \\ & F(x) = M, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

模型 b 固定盈利水平, 极少化风险:

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(x), \\ \text{s.t.} \quad & R(x) \geq k, \\ & F(x) = M, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

模型 c 确定投资者对风险 — 收益的相对偏好参数 $\rho > 0$, 求解

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho Q(x) - (1 - \rho) R(x), \\ \text{s.t.} \quad & F(x) = M, x \geq 0. \end{aligned}$$

在上述三个问题中, 选择 k, h 的不同水平和 ρ 的不同值进行求解就可揭示投资和风险之间相互依存规律, 再根据投资者对风险的承受能力, 确定投资方案.

3. 化简与求解.

因为 M 相当大, S_i 若被选中, 其投资额 x_i 一般都超过 u_i , 投资费用可简化为

$$c_i(x_i) = p_i x_i.$$

在进行计算时, 可设 $M = 1$, 此时 $(1 + p_i)x_i$ 可视为投资 S_i 的比例. 对固定风险的情形, 问题可化为求如下线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i, \\ \text{s.t.} \quad & q_i x_i \leq k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ & \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M. \end{aligned}$$

对于有相对偏好参数 ρ 的优化问题, 引入变量 x_{n+1} , 可化为如下线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & L(x) = \rho x_{n+1} - (1 - \rho) \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M, \quad x \geq 0, \\ & q_i x_i \leq x_{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

这两个问题易于用 MATHEMATICA, MATLAB, LINDO 等数学软件来求解, 对固定收益优化风险的问题也可作类似处理.

二、几点评述

多数参赛队能够正确地写出净收益的表达式. 有些参赛队用投资 S_i 的全部费用 (包括投资与手续费) $y_i = x_i + c_i(x_i)$ 作基本变量. 当 M 较大时 $c_i(x_i) = p_i x_i$, 从而 $y_i = x_i + p_i x_i = (1 + p_i)x_i$, 因此收益表达式为

$$R = \sum \frac{(r_i - p_i)y_i}{1 + p_i}.$$

固定风险, 优化收益问题就成为

$$\begin{aligned} & \max \sum \frac{(r_i - p_i)}{1 + p_i} y_i, \\ & \text{s.t. } \max \frac{q_i y_i}{1 + p_i} \leq k, \\ & \sum_{i=0}^n y_i = M, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

此问题既可以用线性规划求解, 但也可以证明, 将 $\frac{r_i - p_i}{1 + p_i}$ 按由大至小次序排队, 投资时尽可能将资金投向 $\frac{r_i - p_i}{1 + p_i}$ 最大的投资项目即能获得最优解. 这样, 无需求解线性规划也能获得最优解.

本问题建模中主要的缺陷表现在两个方面. 其一, 计算投资总支出时遗漏交易费用, 约束条件误为

$$\sum_{i=0}^n x_i = M.$$

另一个缺陷是未用题目所要求的 $\max_{1 \leq i \leq n} q_i x_i$ 作为风险的度量而是采用 Markowitz 定义的风险.

在数值求解时, 有些参赛队用随机模拟或枚举的方法求最优解, 但计算量较大, 精度也略差一些. 有些参赛队直接解非线性规划, 但没有注意到交易费不是一个光滑函数, 因此目标函数和约束条件均不是可微的, 而直接调用一些需用导数的非线性规划程序, 这样做是不可取的.

各参赛队的答卷中总的来说对模型的验证、评价和敏感性分析等方面似嫌不足, 有待提高.

附 录

定理一 设模型 a 的最优解 (固定风险水平, 优化效益) 为 $x^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*)$, 则至多有一个 $i \geq 1$, 使得 $x_i^* \in (t_i, u_i) \cup (u_i, s_i)$. (其中符号的意义见定理二的证明)

定理二 模型 a 是 NP 难问题.

证明 构造一个一维装箱问题, 已知是 NP 难问题, 下面说明它可化为模型 a.

问题甲: 设 M 是一个正整数, a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个小于 M 的正整数, $A = \{1, 2, \dots, n\}$, 求指标集 $B \subset A$, 使得

$$\sum_{i \in B} a_i = \max_{B' \subset A} \left\{ \sum_{i \in B'} a_i < M \right\}.$$

问题乙: 我们要讨论的投资问题.

问题甲是难问题, 下面证明若问题乙存在多项式时间算法,

则问题甲也存在多式时间算法. 构造一个乙问题如下:

适当选取 $p_i, q_i, r_i, 0 \leq i \leq n$ 等参数, 可以使得 $r_0 = \frac{1}{10^n M}$,

$\bar{r}_i = 1, u_i = a_i, t_i = a_i - \frac{1}{10^{2n}}, s_i = a_i + \frac{1}{10^n}, 1 \leq i \leq n$.

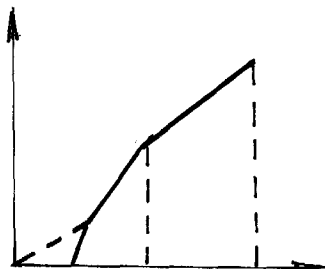
其中 q_i, p_i, r_i 意义同上文.

$\bar{r}_i = r_i - u_i, s_i = \frac{k}{q_i}$. 特别地, $i = 0$ 表示银行. 如图.

设 $x^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*)$ 是乙的最优解. 易知 $x_i^* \in [t_i, s_i] \cup \{0\}, 1 \leq i \leq n$.

令 $B = \{i | x_i^* \neq 0, i \in A\}$, 则 B 即是甲问题的解. [首先可以证明 $x_i^* \notin [t_i, u_i)$, 因为若 $x_i^* \in [t_i, u_i)$, 则由定理一必有 $x_j^* = u_i$ 或 $x_j^* = s_i (j \neq i, j \in B)$, 这时 $\sum_{i \in B} x_i^*$ 不是整数, 矛盾.] 所以

以 $x_i^* \in [u_i, s_i]$.



因对 $i \in B$ 有 $x_i^* = a_i + \tau(i) \frac{1}{10^n}$, $\tau(i) \in [-1, 1]$, 则

$$\begin{aligned} R(x^*) &= \sum_{i \in B} R_i(x_i^*) + R_0(x_0^*) = \sum_{i \in B} \bar{r}_i x_i^* + r_0 x_0^* \\ &= \sum_{i \in B} \left(a_i + \tau(i) \frac{1}{10^n} \right) + r_0 x_0^* = \sum_{i \in B} a_i + \left(\sum_{i \in B} \tau(i) \frac{1}{10^n} + r_0 x_0^* \right). \end{aligned}$$

下面断言: $\{a_i | i \in B\}$ 使甲最优. 否则记甲的最优解为 $\{a_j | j \in \bar{B} \subset A\}$ 则 $\sum_{i \in \bar{B}} a_i - \sum_{i \in B} a_i \geq 1$.

因为

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \bar{B}} a_i - R(x^*) &\geq \sum_{i \in \bar{B}} a_i - \sum_{i \in B} a_i - \left(\sum_{i \in B} \tau(i) \frac{1}{10^n} + r_0 x_0^* \right) \\ &\geq 1 - \frac{n+1}{10^n} > 0, \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

构造 \bar{x} 如下: $\bar{x}_i = a_i (i \in \bar{B})$, $\bar{x}_0 = b - \sum_{i \in \bar{B}} a_i$, $\bar{x}_i = 0 (i \notin \bar{B}, i \neq 0)$. 则 $R(\bar{x}) \geq \sum_{i \in \bar{B}} a_i > R(x^*)$,

与 x^* 是乙的最优解矛盾.

所以乙有多项式时间算法, 甲必有.

证毕

参 考 文 献

- [1] Cai, X., Teo, K.L., Yang, X.Q. and Zhou, X.Y., Portfolio Optimization Under Minimax Risk Measure, 1998, to appear in Management Sci.
- [2] Elton, E.J. and Gruber, M.J., Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, John Wiley & Sons, New York 1995.
- [3] 吴雄伟, 一类带交易成本的证券组合投资 -- 模型及算法, 浙江大学博士学位论文, 1998.

Modeling and Analysis of a Kind of Investment Combination Problems

CHEN SHU-PING

(Zhejiang University, Hangzhou 310027)

TAN YONG-JI

(Fudan University, Shanghai 200433)

风险投资组合的线性规划模型

邓刚毅 许剑勇 周 斌

指导教师: 胡良剑

(中国纺织大学, 上海 200051)

编者按 本文通过风险函数转化为不等约束, 建立为线性规划模型, 直接采用现成程序进行计算, 得出优化决策方案, 并且给出有效投资曲线, 根据投资者主观偏好, 选择投资方向.

摘 要 对市场上的多种风险资产和一种无风险资产 (存银行) 进行组合投资策略的设计需要考虑两个目标: 总体收益尽可能大和总体风险尽可能小, 而这两个目标在一定意义上是对立的.

本文给出组合投资方案设计的一个线性规划模型. 主要思路是通过线性加权综合两个设计目标; 假设在投资规模相当大的基础上, 将交易费函数近似线性化; 通过决策变量的选取化解风险函数的非线性.

模型的最大优点是: 计算过程稳定性好, 速度快. 我们对各种加权因子, 求得了最优化决策方案, 从而得到问题的有效投资曲线. 根据有效投资曲线, 投资者可以由自己的主观偏好, 直观地选择自己的投资方向.

一、问题的提出 (略)

二、符号说明

S_i : 第 i 种资产 ($i = 1, 2, \dots, n, n+1$), 其中 S_{n+1} 表示存入银行;
 r_i : S_i 的平均收益率; q_i : S_i 的风险损失率;
 p_i : S_i 的交易费率; u_i : S_i 购买额阈值; M : 资金总额;
 X_i : 投资 S_i 占总额的比重 (不含交易费), 以下简称投资;
 Y_i : 投资 S_i 的交易费占总额的比重, 以下简称交易费;
 f_1 : 净收益; f_2 : 总体风险; λ : 权因子.

三、模型的建立

(一) 基本模型

我们的目标是对各种资产投资以后, 不仅收益尽可能大, 同时总体风险还要尽可能小, 所以我们的目标函数应为收益和风险两个函数. 由于在一段时间内的各种资产的平均收益率和风险损失率均已由财务人员分析了出来, 因此我们可以建立以下数学模型:

$$\begin{aligned} \text{目标1} \quad & \max f_1 = \sum_{i=1}^{n+1} (r_i X_i - Y_i) \\ \text{目标2} \quad & \min f_2 = \max_{1 \leq i \leq n} (q_i X_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n+1} (X_i + Y_i) = 1, \end{aligned}$$

其中

$$Y_i = \begin{cases} 0, & X_i = 0, \\ \frac{u_i}{M} p_i, & 0 < X_i < \frac{u_i}{M}, \\ X_i p_i, & X_i \geq \frac{u_i}{M}. \end{cases}$$

这是一个多目标非线性数学规划模型, 且 f_1 不是 x_i 的连续函数, 优化求解困难. 下面我们将它转化为一个线性规划模型.

(二) 线性规划模型

1. 目标函数的确定

多目标规划有多种方法化为单目标问题解决. 我们使用线性加权法.

$$\text{总目标函数} \quad \min f = \lambda f_2 + (1 - \lambda)(-f_1)$$

λ 反映了风险投资中投资者的主观因素, λ 越小表示投资越冒险. 特别地 $\lambda = 0$ 表示只顾收益不顾风险, 这样的人有可能取得最大收益; $\lambda = 1$ 表示只顾风险而不顾收益, 这样的人会将所有资金存入银行.

2. 交易费函数的线性化近似

本题难点之一是 Y_i 不是 X_i 的连续函数. 现将 Y_i 近似为 X_i 的线性函数.

$$Y_i = p_i X_i$$

对阈值以下有一定误差 (图 (略)). 但当投资规模充分大时, 对优化结果不会有明显影响. 一方面, 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 若 S_i 的投资很小, 会白白浪费交易费, 对优化不利, 最优解一般不会出现小 X_i ; 另一方面当投资总额很大时, 不足购买费阈值的追加费用对目标函数影响不大.

3. 风险函数的转化

令 $X_{n+2} = f_2$, 那么必有 $q_i X_i \leq X_{n+2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 由于目标函数优化 f , 从而最优解必可使 $\max_{1 \leq i \leq n} (q_i X_i)$ 达到 X_{n+2} . 这样得到线性规划模型

$$\begin{aligned} \min f &= (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n+1} (p_i - r_i) X_i + \lambda X_{n+2} \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} (1 + p_i) X_i = 1, \\ q_i X_i - X_{n+2} \leq 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ X_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, n+2. \end{cases} \end{aligned}$$

四、模型的求解

(一) 求解方法

本文采用 MATLAB 优化工具箱中的线性规划函数 lp 求解. 它优化下列线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min C^T X, \\ \text{s.t. } AX \leq b \end{aligned}$$

使用格式为

$$X = lp(C', A, b, vlb, vub, X_0, N)$$

其中 v_{lb}, v_{ub} 分别是上下界, X_0 为初始值, N 表示约束条件中前 N 个约束为等式约束.

(二) 计算步骤

1. 输入数据, 选取权因子 λ ;
2. 生成矩阵 C, A, b ;
3. 根据需要取 v_{lb}, v_{ub}, X_0, N (本问题 v_{lb} 取零向量, N 取 1, v_{ub} 和 X_0 无特殊要求, 置为空集);
4. 使用 MATLAB 函数 lp 求解;

(三) 计算结果及分析

1. 投资问题一 (略)

使用上述方法分别求解当 $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ 时的最优决策及风险和收益如下:

S_i	$\lambda=0\sim0.7$	$\lambda=0.8$	$\lambda=0.9$	$\lambda=1$
S_1	0.9901	0.3690	0.2376	0.0000
S_2	0.0000	0.6150	0.3960	0.0000
S_3	0.0000	0.0000	0.1080	0
S_4	0	0	0.2284	0.0000
存银行	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
净收益	0.2673	0.2165	0.2016	0.0500
风险	0.0248	0.0092	0.0050	0.0000

2 投资问题二 (略)

使用上述方法分别求解 $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ 的最优决策及风险和收益如下

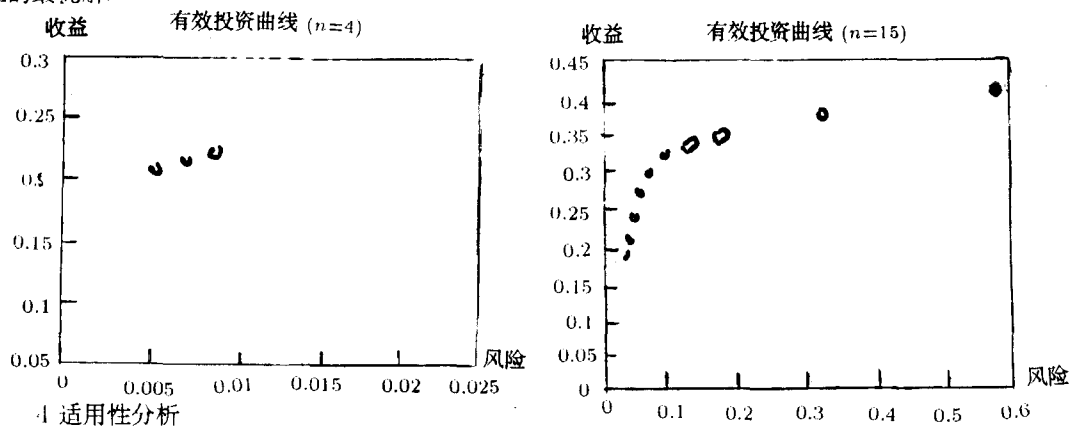
S_i	$\lambda=0\sim0.1$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$	$\lambda=0.4\sim0.5$	$\lambda=0.6\sim0.7$	$\lambda=0.8$	$\lambda=0.9\sim1$
S_1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0874	0.0000
S_2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0680	0.0000
S_3	0.9434	0.2051	0.1658	0.1269	0.1071	0.0612	0.0000
S_4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1531	0.0874	0.0000
S_5	0.0000	0.0000	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
S_6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0942	0.0000
S_7	0.0000	0.1810	0.1463	0.1119	0.0945	0.0540	0.0000
S_8	0.0000	0.0000	0.0000	0.2279	0.1925	0.1100	0.0000
S_9	0.0000	0	0.1867	0.1428	0.1206	0.0689	0.0000
S_{10}	0.0000	0.3077	0.2487	0.1903	0.1607	0.0918	0.0000
S_{11}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
S_{12}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
S_{13}	0.0000	0.2676	0.2163	0.1655	0.1398	0.0798	0.0000
S_{14}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
S_{15}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1597	0.0000
存银行	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
净收益	0.4094	0.3433	0.3352	0.3205	0.3050	0.2130	0.0500
风险	0.5660	0.1231	0.0995	0.0761	0.0643	0.0367	0.0000

3 投资方案分析

(1) 从上面结果得到问题一的四个典型最优组合, 问题二有 7 个典型最优组合. 对于不同风险承受能力, 选择该风险水平下的最优投资组合. 例如: 对问题一, 若风险承受水平是 0.02, 那么取 $\lambda = 0.2$ 时的决策方案.

(2) 净收益和风险都是 λ 的单调下降函数 (图 (略)) 说明谨慎程度越强, 风险越小但受益也越小. 具有明确的实际意义.

(3) 更详细的计算结果见下图. 我们用 $\lambda = 0 \sim 1$ 内 300 等分点, 求得最优投资组合集及它们形成的有效投资曲线. 这条曲线上的任一点都表示该风险水平的最大可能收益和该收益要求的最小风险. 实际上我们发现其有效投资曲线是离散的, 问题一只有 5 个最优方案, 问题二只有 13 个最优方案. 其中问题一风险 0.0059 (即 $\lambda = 0.9$) 的决策 (0.2376, 0.3960, 0.1080, 0.2284, 0) 和问题二风险 0.0995 (即 $\lambda = 0.3$) 的决策 (0, 0, 0.1658, 0, 0, 0, 0.1463, 0, 0.1867, 0.2487, 0, 0, 0.2163, 0, 0, 0) 具有特别重要的意义, 因为它们对应在风险增长较慢情形下最大的收益, 可认为是一般意义上的最优解.



4 适用性分析

当 $0 < X_i < \frac{u_i}{M}$, 线性规划模型可能不是最优解. 也就是说结果的正确性与 M 有关, $M > (\frac{u_i}{x_i})$ 时必最优, 但 $M < (\frac{u_i}{x_i})$ 时结果不一定可靠. 比如对问题二, 当 $\lambda = 0.3$ 时, 这个临界值为 2581; 对问题一, $\lambda = 0.9$ 时, 这个临界值为 500.

五、模型的验证 (略)

参 考 文 献

- [1] 运筹学, 清华大学出版社, 北京, 1990.
- [2] 赵锡军等, 金融投资学, 中国人民大学出版社, 北京, 1996.
- [3] 施阳, MATLAB 语言工具箱, 西北工业大学出版社, 西安, 1998.

最佳灾情巡视路线的数学模型

杨庭栋 李晓涛 郑长江

指导教师: 赵 静

(解放军后勤工学院, 重庆 400016)

编者按 本文力求运用数学概念和方法来严格处理涉及的各种对象, 力求借助于几何直观和生活体验的启发作用, 为计算机搜索制定行之有效的操作规则; 在数值结果方面, 粗估与细节化相结合, 从而提供较为完备的数值描述. 本文第四部分定理证明中有误, 为版面计从删. 欲窥全豹, 试索原文.

摘 要 本文将求最佳巡视路线问题转化为图论中求最佳推销员回路的问题, 并用近似算法去寻求近似最优解. 对分组问题定义了均衡度用以衡量分组的均衡性. 对问题 1 和问题 2 先定出几个分组的准则进行初步分组, 并用近似算法求每一组的近似最佳推销员回路, 再根据均衡度进行微调, 得到较优的均衡分组和每组的近似最佳推销员回路, 对问题 1 得出总路程较短且各组尽可能均衡的路线, 各组的巡视路程分别为 216.4 公里, 191.1 公里, 192.3 公里, 总路程为 599.8 公里. 对问题 2, 证明了应至少分为 4 组, 并求出了分为 4 组时各组的较优巡视路线, 各组的巡视时间分别为 22.74 小时, 22.59 小时, 21.69 小时, 22.54 小时. 对问题 3, 求出完成巡视的最短时间为 6.43 小时, 并用较为合理的分组的准则, 分成 22 个组. 对问题 4, 研究了在不影响分组的均衡条件下, T, t, V 的允许变化范围, 并得出了这三个变量的关系式, 并由此对分三个组的情况进行了具体讨论.

一、问题重述 (略)

二、模型的假设与符号说明 (略)

三、模型的建立与分析

本问题要求在某县的乡 (镇)、村公路网中, 寻找从县政府所在地 (图中 O 点) 出发, 走遍各乡 (镇)、村, 又回到县政府所在地, 使总路程或时间最少. 将公路网图中, 每个乡 (镇) 或村看为图中的一个节点, 各乡 (镇)、村之间的公路看作图中对应节点间的边, 各条公路的长度 (或行驶时间) 看作对应边上的权, 所给公路网就转化为图论中的加权网络图, 问题就转化为一个图论问题, 即在给定的加权网络图中寻找从给定点 O 出发, 行遍所有顶点至少一次再回到 O 点, 使得总权 (路程或时间) 最小.

为了讨论方便, 先给出图论中相关的一些定义.

定义 1 经过图 G 的每个顶点正好一次的圈, 称为 G 的哈密尔顿圈, 简称 H 圈.

定义 2 在加权图 $G = (V, E)$ 中

- (1) 权最小的哈密尔顿圈称为最佳 H 圈;
- (2) 经过每个顶点至少一次且权最小的闭通路称为最佳推销员回路.

由定义 2 可知, 本问题是一个寻求最佳推销员回路的问题. 最佳推销员回路的问题可转化为最佳 H 圈的问题. 方法是由给定的图 $G = (V, E)$ 构造一个以 V 为顶点集的完备图 $G' = (V, E')$, E' 中每条边 (x, y) 的权等于顶点 x 与 y 在图 G 中最短路径的权, 即

$$\forall (x, y) \in E', \quad \omega(x, y) = \min d_G(x, y).$$

在图论中有以下定理：

定理 1 加权图 G 的最佳推销员回路的权和 G' 的最佳 H 圈的权相同。

定理 2 在加权完备图中求最佳 H 圈的问题是 NP —完全问题。

我们采用一种近似算法求出该问题的一个近似最优解，来代替最优解，算法如下：

算法一 求加权图 $G(V; E)$ 的最佳推销员回路的近似算法：

1. 用图论软件包求出 G 中任意两个顶点间的最短路，构造出完备图 $G'(V, E')$,

$$\forall (x, y) \in E', \omega(x, y) = \min d_G(x, y),$$

2. 输入图 G' 的一个初始 H 圈；

3. 用对角线完全算法^[2]产生一个初始 H 圈；

4. 随机搜索出 G' 中若干个 H 圈，例如 2000 个；

5. 对第 2、3、4 步所得的每个 H 圈，用二边逐次修正法^[2]进行优化，得到近似最佳 H 圈；

6. 在第 5 步求出的所有 H 圈中，找出权最小的一个，此即要找的最佳 H 圈的近似解。

此算法程序见附录 (略) (由于二边逐次修正法的结果与初始圈有关，故本算法第 2、3、4 步分别用三种方法产生初始圈，以保证能得到较优的计算结果)。

问题一 若分为三组巡视，设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线。

此问题是多个推销员的最佳推销员回路问题。即在加权图 G 中求顶点集 V 的划分 V_1, V_2, \dots, V_n ，将 G 分成 n 个生成子图 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_n]$ 使得

(1) 顶点 $O \in V_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

(2) $\bigcup_{i=1}^n V_i = V(G)$ 。

(3) $\frac{\max_{i,j} |\omega(C_i) - \omega(C_j)|}{\max_i \omega(C_i)} \leq \alpha$ ，其中 C_i 为 V_i 的导出子图 $G[V_i]$ 中的最佳 H 圈， $\omega(C_i)$ 为 C_i 的权， $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

(4) $\sum_{i=1}^n \omega(C_i) = \min$

定义 3 称 $\alpha_0 = \frac{\max_{i,j} |\omega(C_i) - \omega(C_j)|}{\max_i \omega(C_i)}$ 为该分组的实际路程均衡度。 α 为最大容许均衡度。显然 $0 \leq \alpha_0 \leq 1$ ， α_0 越小，说明分组的均衡性越好。取定一个 α 后， α_0 与 α 满足条件 (3) 的分组是一个均衡分组。条件 (4) 表示总巡视路程最短。

此问题包含两方面：第一，对顶点分组；第二，在每组中求最佳推销员回路，即为单个推销员的最佳推销员问题。我们只能去寻求一种较合理的划分准则，对图 1 进行初步划分后，求出各部分的近似最佳推销员回路的权，再进一步进行调整，使得各部分满足均衡性条件 (3)。

从 O 点出发去其它点，要使路程较小应尽量走 O 点到该点的最短路。故用图论软件包求出 O 点到其余顶点的最短路，这些最短路构成一棵 O 为树根的树，将从 O 点出发的树枝称为干枝，见图 1，从图中可以看出，从 O 点出发到其它点共有 6 条干枝，它们的名称分别为①，②，③，④，⑤，⑥。

根据实际工作的经验及上述分析，在分组时应遵从以下准则：

准则一 尽量使同一干枝上及其分枝上的点分在同一组；

准则二 应将相邻的干枝上的点分在同一组；

准则三 尽量将长的干枝与短的干枝分在同一组。

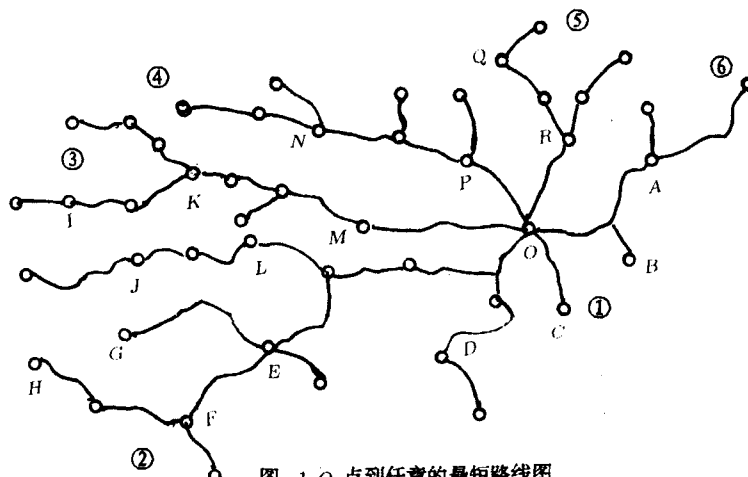
由上述分组准则，们找到两种分组形式如下：

分组一：(⑥，①)，(②，③)，(⑤，④)；

分组二：(①，②)，(③，④)，(⑤，⑥)；

显然分组一的方法极不均衡，故考虑分组二。

对分组二中每组顶点的生成子图, 用算法一求出近似最优解及相应的巡视路线. 使用算法一时, 在每个子图所构造的完备图中, 取一个尽量包含图 1 中树上的边的 H 圈作为其第 2 步输入的初始圈.



分组二的近似解见表 1.

图 1 O 点到任意的最短路线图

表 1 (单位: 公里)

小组名称	路 线	总路线长度	路线的总长度
I	O-P-28-27-26-N-24-23-22-17-16-I-15 -I-18-K-21-20-25-M-O	191.1	558.5
II	O-2-5-6-L-19-J-11-G-13-14-H-12-F-10-F-9-E-7-E-8-4-D-3-C-O	241.9	
III	O-R-29-Q-30-32-31-33-35-34-A-B-1-O	125.5	

因为该分组的均衡度

$$\alpha_0 = \frac{\omega(C_1) - \omega(C_2)}{\max_{i=1,2,3} \omega(C_i)} = \frac{241.9 - 125.5}{241.9} = 54.2\%$$

所以此分法的均衡性很差.

为改善均衡性, 将第 II 组中的顶点 C, 2, 3, D, 4 划归第 III 组, 重新分组后的近似最优解见表 2, 各组的近似最优巡视路线见图 2.

表 2 (单位: 公里)

编号	路 线	路线长度	路线总长度
I	O-P-28-27-26-N-24-23-22-17-16-I-15 -15-I-18-K-21-20-25-M-O	191.1	599.8
II	O-2-5-6-7-E-8-E-9-F-10-F-12-H-14-13-G-11-J-19-L-6-5-2-O	216.4	
III	O-R-29-Q-30-32-31-33-35-34-A-1 -B-C-3-D-4-D-3-2-O	192.3	

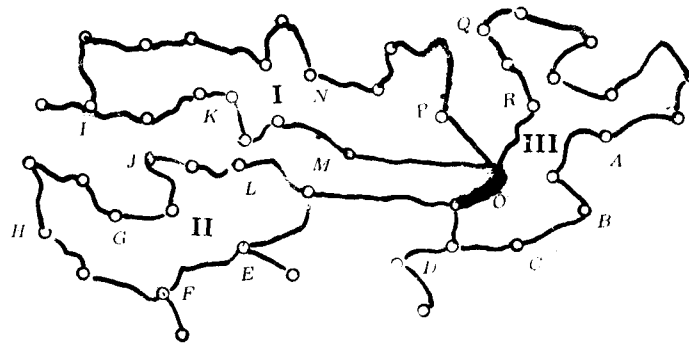


图 2 分为 3 组时各组的巡视路线图

注：图中粗线部分为 II 组与 III 组共同经过的路线

下面对此结果进行分析。因该分组的均衡度

$$\alpha_0 = \frac{\omega(C_3) - \omega(C_1)}{\max_{i=1,2,3} \omega(C_i)} = \frac{216.4 - 191.1}{216.4} = 11.69\%$$

所以这种分法的均衡性较好。若取最大容许的均衡度 $\alpha = 12\%$ ，则这是一个均衡分组。

用算法一算出整个网络图的近似最佳推销员巡回为 $O-C-3-2-5-D-4-8-E-9-F-10-F-12-H-12-G-11-J-19-L-7-6-M-N-25-20-21-K-18-J-13-14-15-I-16-17-22-23-24-27-26-P-28-Q-30-Q-29-R-31-33-31-32-35-34-A-B-O$

总路长为 588.6 公里。而表 2 中三组巡回的总路线长为 599.8 公里。可以认为这样设计的分组方法和巡回路线能使总路线近似最短。

问题二 当巡视人员在各乡(镇)、村的停留时间一定，汽车的行驶速度一定，要在 24 小时内完成巡视，至少要分几组及最佳的巡视路线。

由于 $T = 2$ 小时， $t = 1$ 小时， $V = 35$ 公里/小时，需访问的乡镇共有 17 个，村共有 35 个。计算出在乡(镇)及村的总停留时间为 $17 \times 2 + 35 = 69$ 小时，要在 24 小时内完成巡回，考虑行走时间，故至少要分 4 组。

由于该网络的乡(镇)、村分布较为均匀，故有可能找出停留时间尽量均衡的分组，当分 4 组时各组停留时间大约为 $\frac{69}{4} = 17.25$ 小时，则每组分配在路途上的时间大约为 $24 - 17.25 = 6.75$ 小时。而前面讨论过，分三组时有个总路程 599.8 公里的巡视路线，分 4 组时的总路程不会比 599.8 公里大太多，不妨以 599.8 公里来计算。路上时间约为 $\frac{599.8}{35} = 17$ 小时，若平均分配给 4 个组，每个组约需 $\frac{17}{4} = 4.25$ 小时 < 6.75 小时，故分成 4 组是可能办到的。

现在尝试将顶点分为 4 组。分组的原则：除遵从前面准则一、二、三外，还应遵从以下准则：

准则四 尽量使各组的停留时间相等。

用上述原则在图 1 上将图分为 4 组，同时计算各组的停留时间，然后用算法一算出各组的近似最佳推销员巡回，得出路线长度及行走时间，从而得出完成巡视的近似最佳时间。用算法一计算时，初始圈的输入与分三组时同样处理。

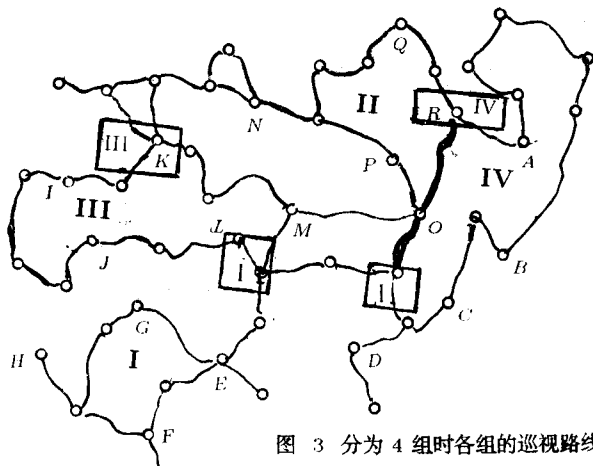


图 3 分为 4 组时各组的巡视路线图

注 1. 图中粗线表示其中两组都要经过的路段. 2. 方框中的点表示其中两组都经过的地方. 3. 方框中有两字符, 罗马字符表示要停留于此地的巡视组, 另一字符表示此地点的代号.

这 4 组的近似最优解见表 3, 各组的近似最优巡视路线见图 3.

表 3 (路程单位: 公里; 时间单位: 小时)

组名	路 线	路线 总长度	停留 时间	行走 时间	完成巡视 的总时间
I	O-2-5-6-7-E-8-E-11-G- 12-H-12-F-10-F-9-E-7-6-5-2-O	195.8	17	5.59	22.59
II	O-R-29-Q-30-Q-28-27-26-N- 24-23-22-17-16-17-K-22-23-N-26-P-O	199.2	16	5.69	21.69
III	O-M-25-20-21-K-18-I- 15-14-13-J-19-L-6-M-O	159.1	18	4.54	22.54
IV	O-R-A-33-31-32-35-34- B-1-C-D-4-D-3-2-O	166	18	4.74	22.74

表中符号说明: 黑体表示前面经过并停留过, 此次只经过不需停留; 上加横线的表示此点只经过不停留. 该分组实际均衡度

$$\alpha_0 = \frac{22.7 - 21.69}{22.74} = 4.62\%$$

可以看出, 表 3 分组的均衡度很好, 且完全满足 24 小时完成巡视的要求.

问题三 在 T, t, V 的假定下, 巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间为多少, 并给出此条件下的最佳路线.

我们发现从 O 点巡视 H 点的最短时间是所有最短时间中最长的, 其距离为 77.5 公里, 算出时间为

$$t_H = \frac{77.5}{35} \times 2 + 2 = 6.43 \text{ 小时,}$$

因此, $T = 2$ 小时, $t = 1$ 小时, $V = 35$ 公里 / 小时, 若巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间为 6.43 小时.

在最短时间的限定下, 完成巡视的最优路线应满足如下条件:

- (1) 每个组巡视的总时间不能超过最短时间 $t_H = 6.43$ 小时;
- (2) 所有的点都必须访问到, 不能漏点;
- (3) 所需巡视组数要尽量少.

在寻求最优路线时, 从距离 O 点较远的一些点 (如 12, 10, 15, 22 等点) 开始搜索比较容易, 因为到这些点的路线比较少.

具体方法如下:

第一步 依据图 1 算出从 O 点到每一个点的最短距离;

第二步 找出其中最大的一个, 算出从 O 点沿最短路巡视所需的时间 t_i , 并求 $\Delta t = t_H - t_i$.

第三步 若 $\Delta t < 1$, 则这一组只能访问这一点;

若 $\Delta t > 1$, 则在余下的点中找到距离 O 点最远的点, 根据条件看这一组能否巡视这一点.

第四步 若能巡视则算出 Δt , 转到第三步;

第五步 若不能, 则依次判断次远点、第三远点 ..., 满足总巡视时间不超过 t_H , 就让这组巡视这一点, 直到 $\Delta t < 1$, 然后再从第二步开始.

通过以上的方法, 最后我们找到的最优解是 22 个组. 如表 4.

表 4 (时间单位: 小时)

编号	巡视路径	停留地点	所需时间	时间差
1	$O-H-O$	H	6.43	0
2	$O-2-5-6-L-19-J-13-14-13-J-19-L-6-5-2-O$	13,14	6.15	0.28
3	$O-M-25-21-K-18-I-15-I-16-17-K-21-25-M-O$	15,16	6.31	0.12
4	$O-2-5-6-7-E-9-F-12-G-11-E-7-6-5-2-O$	12,11	5.94	0.49
5	$O-2-5-6-7-E-8-E-9-F-10-F-9-E-7-6-5-2-O$	8,10	6.22	0.21
6	$O-2-5-6-7-E-11-G-11-E-7-6-5-2-O$	G	5.58	0.85
7	$O-2-5-6-7-E-9-F-9-E-7-6-5-2-O$	9, F	6.14	0.29
8	$O-2-5-6-L-19-J-18-K-21-25-M-O$	$J,18$	6.29	0.14
9	$O-M-25-21-K-18-I-18-K-21-25-M-O$	I	5.49	0.94
10	$O-M-25-21-K-17-22-23-N-26-P-O$	17,22,23	6.12	0.31
11	$O-2-5-6-L-19-L-6-5-2-O$	$L,19$	5.64	0.79
12	$O-M-25-20-21-23-24-N-26-P-O$	20, 21, 24	6.10	0.33
13	$O-M-25-21-K-21-25-M-O$	25, K	5.50	0.93
14	$O-2-5-6-7-E-7-6-5-2-O$	6,7, E	6.38	0.05
15	$O-R-31-32-35-34-A-1-O$	31,32,35,34	6.32	0.11
16	$O-R-29-Q-30-Q-28-P-O$	$Q,30,28$	6.11	0.32
17	$O-P-26-27-26-N-26-P-O$	26,27, N	6.23	0.20
18	$O-2-3-D-4-D-3-2-O$	3, $D,4$	5.99	0.44
19	$O-1-A-33-31-R-29-R-O$	$A,33,29$	5.97	0.46
20	$O-2-5-M-O$	2,5, M	5.40	1.03
21	$O-1-B-C-O$	1, B,C	5.98	0.45
22	$O-P-O-R-O$	P,R	5.32	1.11

问题四 巡视组数已定, 要求尽快完成巡视, 讨论 T , I 和 V 的改变对最佳巡视路线的影响.

要尽快完成巡视, 就得要求每组完成巡视时间尽量均衡, 因为总的完成巡视时间按最长的完成巡视时间计算. 现在讨论在均衡度允许的范围内已分成 n 组后, 改变 T, t, V 对最佳巡视路线的影响. 显然在分组不变的情况下, 无论 T, t, V 如何改变, 对每组内的最佳巡视路线是没有影响的, 但可能

会影响各组间的均衡性. 因此该问题实际上是讨论 T, t, V 对分组的影响, 即在不破坏原来分组均衡的条件下, T, t, V 允许的最大变化范围.

在分 n 组的情况下, 设

S_i : 表示第 i 组的最佳推销员回路路线总长度;

X_i : 表示第 i 组所要停留的乡镇的数目;

Y_i : 表示第 i 组所要停留的村的数目;

$i = 1, 2, 3, \dots, n$.

显然, 当 $X_i = X_j, Y_i = Y_j, S_i = S_j; i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ 时, 即每组的乡(镇)数、村数、最佳巡回的长度均相等, 因而分组绝对均衡时, 即 $\alpha_0 = 0$, 无论 T, t, V 如何改变都不会改变原来分组的均衡.

(一) 不影响分组的均衡时, T, t, V 的最大允许变化范围的讨论:

对任意一个组 i , 其完成巡视的时间

$$T_i = X_i T + Y_i t + \frac{S_i}{V}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

设均衡分组的最大允许时间均衡度为 α , 即

$$\frac{|T_i - T_j|}{\max_{i=1,2,\dots,n} T_i} \leq \alpha, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

则有

$$|T_i - T_j| \leq \alpha \cdot \max_{i=1,2,\dots,n} T_i$$

记 $\varepsilon = \alpha \cdot \max_{i=1,2,\dots,n} T_i$, 则 ε 表示均衡分组所允许的最大时间误差, 称为最大允许时间误差. 则

$$\left| (X_i - X_j) \cdot T + (Y_i - Y_j) \cdot t + \frac{S_i - S_j}{V} \right| \leq \varepsilon \quad (1)$$

由式 (1) 我们得到

$$-\varepsilon \leq (X_i - X_j) \cdot T + (Y_i - Y_j) \cdot t + \frac{S_i - S_j}{V} \leq \varepsilon, \quad (2)$$

由式 (2) 可推出以下结果

1. 当 $X_i - X_j > 0$ 时, 要保持原均衡分组不变, T 必须满足的条件为

$$\begin{aligned} & \max_{X_i - X_j > 0} \left\{ \frac{-\varepsilon - (Y_i - Y_j) \cdot t - \frac{S_i - S_j}{V}}{X_i - X_j} \right\} \\ & \leq T \leq \min_{X_i - X_j > 0} \left\{ \frac{\varepsilon - (Y_i - Y_j) \cdot t - \frac{S_i - S_j}{V}}{X_i - X_j} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

2. 当 $Y_i - Y_j > 0$ 时, 要保持原均衡分组不变, t 必须满足的条件为

$$\begin{aligned} & \max_{Y_i - Y_j > 0} \left\{ \frac{-\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T - \frac{S_i - S_j}{V}}{Y_i - Y_j} \right\} \\ & \leq t \leq \min_{Y_i - Y_j > 0} \left\{ \frac{\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T - \frac{S_i - S_j}{V}}{Y_i - Y_j} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

3. 当 $S_i - S_j > 0$ 时, 由 (2) 式得

$$(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t - \varepsilon \leq \frac{S_i - S_j}{V} \leq \varepsilon(X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t$$

① 当 $0 \leq (X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t \leq \varepsilon$ 时, 有

$$V \geq \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t} \right\} \quad (5)$$

② 当 $(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t > \varepsilon$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t} \right\} \\ & \leq V \leq \min_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t - \varepsilon} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

由 (3)—(6) 式, 当 T, t, V 三个变量中任意两个变量无论如何变化, 都可计算出为保持均衡分组不变, 三个变量所允许的最大变化范围。

(二) 分三组的实例讨论

现对分三组的情况进行讨论. 对问题一中所得的三个分组, 若考虑停留时间和行驶时间, 且取 $T = T_0 = 2$ 小时, $t = t_0 = 1$ 小时, $V = V_0 = 35$ 公里/小时, 结果如表 5.

表 5 (路程单位: 公里; 时间单位: 小时)

编号	X_i	Y_i	S_i	行驶时间	总时间
I	5	13	191.1	5.46	28.46
II	6	11	192.3	5.49	28.49
III	6	11	216.4	6.18	29.18

实际均衡度为 $\alpha_0 = \frac{29.18 - 28.46}{29.18} = 2.5\%$.

实际时间误差为 $\varepsilon_0 = 2.5\% \times 29.18 = 0.72$ 小时.

现分别规定均衡分组的最大允许均衡度 $\alpha = 2.5\%$ 和 $\alpha = 5\%$, 即最大容许的时间误差分别为 $\varepsilon = 0.72$ 小时和 $\varepsilon = 1.44$ 小时, 计算出 T, t, V 三个参量中固定任意两个时, 要不破坏原均衡分组, 另一个参量所容许的变化范围. 结果如下表:

表 6

	t, V 不变	T, V 不变	T, t 不变
$\alpha = 2.5\%$ $\varepsilon = 0.72$ 小时	$1.25 \leq T \leq 2$	$1 \leq t \leq 1.38$	$V \geq 35$
$\alpha = 5\%$ $\varepsilon = 1.44$ 小时	$0.51 \leq T \leq 2.74$	$0.63 \leq t \leq 1.75$	$V \geq 17.3$

表上表可以看出:

(1) 当实际均衡度 $\alpha_0 = 2.5\%$ 刚好等于最大容许均衡度 $\alpha = 2.5\%$ 时, 要保持原均衡分组, 当 t, V 不变时, T 只能减小, 且下界为 1.25 小时; T 的上界为 $T_0 = 2$ 小时;
 T, V 不变时, t 只能增大, 且上界为 1.38 小时; t 的下界为 $t_0 = 1$;
 T, t 不变时, V 只能增大, 且无上界. V 的下界为 $V_0 = 35$.

(2) 当实际均衡度 $\alpha_0 = 2.5\%$ 小于最大容许均衡度 $\alpha = 5\%$ 时, 即 $\varepsilon_0 < \varepsilon$ 时要保持原均衡分组, 当

t, V 不变时, T 变化的下界为 0.51 小时, 上界为 2.74 小时;

T, V 不变时, t 变化的下界为 0.63 小时, 上界为 1.75 小时;

T, t 不变时, V 可以增大但无上界, 也可减小, 且下界为 17.3 公里 / 小时.

(三) 对实例结果的分析.

上述实例的均衡分组有一个特点: 各组的停留时间相等, 即取 $T = T_0 = 2$ 小时, $t = t_0 = 1$ 小时, $V = V_0 = 35$ 公里 / 小时, 在表 5 的分组中

$$(X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

定义 4 各组的停留时间相等的均衡分组称为停留时间相等的均衡分组. 由 (7) 式得

$$T_0 = -\frac{Y_i - Y_j}{X_i - X_j} \cdot t_0, \quad X_i - X_j \neq 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (8)$$

现讨论对停留时间相等的均衡分组, T, t, V 的变化规律.

对停留时间相等的均衡分组, 分组的实际时间误差:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \max_{i,j} \left\{ \left| (X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 + \frac{S_i - S_j}{V_0} \right| \right\} \\ &= \max_{i,j} \left\{ \left| \frac{S_i - S_j}{V_0} \right| \right\} = \frac{S_{i'} - S_{j'}}{V_0} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, i' 为使 S_i 最大的组的标号; j' 为使 S_j 最小的组的标号. (*)

当 T, t 不变时, 即 $T = T_0, t = t_0$ 时因 $(X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 = 0 < \varepsilon$, 由式 (6) 知, 要保持平衡分组, V 的下界应为

$$\begin{aligned} V_{\min} &= \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T_0 - (Y_i - Y_j) \cdot t_0} \right\} \\ &= \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\varepsilon} \right\} \\ &= \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\varepsilon} \quad i', j' \text{ 的含义同 } (*) \end{aligned}$$

① 取 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 时, 由 (9) 式得

$$V_{\max} = \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\varepsilon} = V_0$$

② $\varepsilon > \varepsilon_0$ 时, 由 (9) 式得

$$V_{\min} = \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\varepsilon} < V_0$$

故有以下定理

定理 当取 $V = V_0, T = T_0, t = t_0$ 时, 对图进行停留时间相等的均衡分组后, 设该分组的实际时间误差为 ε_0 .

(1) 若取最大允许时间误差 $\varepsilon = \varepsilon_0$, 当 T, t 不变时, 要使该均衡分组保持不变, V 的下界为 V_0 , 即 V 只能增加不能减少;

(2) 若取最大允许时间误差 $\varepsilon > \varepsilon_0$, 当 T, t 不变时, 要使该均衡分组保持不变, V 的变化范围的下界小于 V_0 .

四、模型的推广 (略)

五、优缺点分析

优点

1. 本文提出的分组准则简便易行, 可操作性强, 且可逐步调整使分组达到均衡.
2. 用均衡度的概念定量的刻画了分组的均衡性.
3. 在用近似算法求近似最佳推销员回路时, 采取了三种不同的方法产生初始圈, 使得算法比较完善, 得到了误差很小的近似最优解.
4. 从理论上定量地讨论了 V, T, t 的变化对均衡分组灵敏度的影响, 得到了很好的结果.

缺点 (略)

参 考 文 献

- [1] 舒贤林, 徐志才编著, 图论基础及应用.
- [2] 龚劬编, 图论与网络最优算法.
- [3] 费培之编著, 图和网络及其应用.

灾情巡视路线的设计

韦芳芳 杨兰兰 柏 瑞

指导教师: 杨廉峰

(东南大学, 南京 210018)

编者按 本文不仅提出了若干种确定初始巡视路线的方法, 而且对路线的调整给出了一些准则和启发式算法, 简捷、有效地解决了各个问题. 行文简明、通畅.

摘 要 本文建模的主要思想是将巡视路线的设计分为两个部分: 首先生成一个可行的巡视路线, 然后利用启发式算法对巡视路线进行调整优化. 对可行路线的生成给出了三种方法, 1. 采用直观判断, 较为简单. 2. 借鉴了求 Hamilton 圈的方法. 3. 基于最小生成树, 求出的路线总路程较短, 为 553.6 公里. 本文采用方法 3 得出的路线作为启发式算法的初始路线.

本文提出了一系列启发式算法并采用一定的调整规则对初始路线进行了调整, 较好地解决了所提出的问题. 对于问题 1, 给出了均衡度的概念来衡量各组路线的均衡性. 解为总路程 587.2 公里, 均衡度 0.16; 对于问题 2, 采用点调整的规则求出用 4 组完成巡视所需的最短的时间 22.62 小时, 对于问题 3, 采用一种最短路线调整法求出在最短的时间 6.43 小时内, 用 22 组就可以完成巡视.

问题重述与模型假设 (略)

问题分析

问题要求对巡视的路线进行设计, 同时必须考虑的因素包括总路程最短、组数的选择和各组巡视路线尽量均衡的条件下完成一次巡视需要的最短时间. 按如下几点进行分析:

1、关于总路程和组数的关系, 我们引入定理一: 当有 i 个组同时进行巡视时, 必然存在一总路程最短的路线, 记这时的总路程为 d_i , 则对于 j 组的巡视若 $i \geq j$, 有 $d_i \geq d_j$. (附录一)

2、为了对各组之间的均衡度进行量化, 引入距离均衡度的概念. 距离均衡即要求各组巡视所经过的路程 a_i 尽量接近, 由此定义均衡度来衡量这种接近程度, 距离均衡度 $B = \frac{\max\{a_i\} - \min\{a_i\}}{a/n}$, 在同等条件下, B 越大, 各组越不均衡.

3、由 1 可知, 要求总路程最短, 在极限情况下为只有一组进行巡视, 由定理 1 此时巡视总路程最短, 但由于只有一组同时巡视时消耗时间较多, 只有在人员较缺乏的情况下, 采用一组巡视. 在多组同时巡视时要求尽量均衡的情况下 (问题一), 本文定义只有满足均衡度 $B < 0.2$ 的路线为可行路线.

4、当 $n = 1$ 时, 该问题可以转化为“货郎担”问题, 而“货郎担”问题为 NPC 问题, 因此无法给出最优解, 只能给出一种启发式算法, 得到一个较优解.

本文建立的模型就是基于这种考虑首先给出一些初始路线, 然后提出了一些启发式算法, 按照一定的规则对初始路线进行优化.

模型准备

1. 问题 2 要求给出满足一定要求的最小分组数, 因此必须知道总路程的一个下界. 根据定理

一, 显然一组巡视时的最优路线是总路程的一个较好的下界. 但由于一组巡视时的最优路线与“货郎担”问题是等价的, 因而不可解的. 所以我们要用别的方法求出总路程的一个下界.

注意到巡视路线必须走遍所有的乡、村, 因此总路程必然大于公路图的最小生成树的权和. 因此, 我们可以将该图的最小生成树的路程之和作为总路程的下界. 本文用 Prim 算法求出了公路图的最小生成树, 并求出最小生成树的总路程为 422.7 公里.

2 问题 3 要求给出完成巡视的最短时间, 由于巡视人员足够多, 显然这与距离 O 点 (乡镇府) 最远的乡、村有关. 另外, 在从一个村巡视完后到另一个村巡视时为了节约时间, 要求按照最短路径行进. 本文用 Floyd 算法求出了任意两点之间的最短路径, 附录二 (略) 给出了所有点与 O 点之间的最短路径.

模型建立与求解

由问题分析可知, 本文对该问题的求解分为两个步骤, 即初始值的确定和利用启发式算法的求解. 下面我们根据这种思路建立模型如下:

一、初始值的确定

对问题一, 在极限情况下, 由问题分析 3 可知, 可以认为仅仅一组巡视, 而另外两组不动, 这时总路程最短, 但这样均衡性极差. 为转化问题, 我们加入两个虚拟点代表县城, 则求三组的问题可以转化为对 55 个点求一组的路线问题. 对一组的路线的求解可化为“货郎担”问题, 可通过经典的求“货郎担”问题的“近似”算法进行求解. 但通过计算机的求解发现这三个县城点在整个路线中相邻很近, 很难给出规则保证三个点在整个路线中的均衡性. 因此考虑将该图分为三个区域, 分别对每个区域进行求解, 则问题的关键就转化为如何对图进行区域划分.

方法一：直接判断法

对给出的图可以直观地进行分块, 手工给出其初始解. 很显然, 由于县城位置偏向一边, 则若分为三组, 县城远离的一边分为两块的可能性比临近县城的一边大得多. 这样可以得到手工给出的分为三组巡视的路线 1 如下:

I: $O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 33 \rightarrow 31 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow P \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow O$;

II: $O \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow I \rightarrow 18 \rightarrow K \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow M \rightarrow O$;

III: $O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow L \rightarrow 19 \rightarrow J \rightarrow 11 \rightarrow G \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow H \rightarrow 12 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow C \rightarrow O$.

各组所走的路程分别为 (单位: 公里): I: 168 II: 176.7 III: 237.5.

各组所走路程总和为 (单位: 公里): 582.2. 可以求出其均衡度为 0.34.

方法二：逐步加入法

该方法的思想为: 任取最外围一点, 以逆时针为搜索方向, 假定搜索尽量走方向变化最小的路线即先加入本区域最外围的点, 然后在内部逐步加入新的点.

最后得到本区域的所有点, 该方法首先必须确定巡视要分为几组, 并且规定各组必须经过县城即 O 点, 然后用上述方法确定各区域的范围. 以这种方法可以进行调整得到一总路程较短的初始化路线 2 如下:

I: $O \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow A \rightarrow 1 \rightarrow O$;

II: $O \rightarrow P \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow I \rightarrow 18 \rightarrow K \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow M \rightarrow O$;

III: $O \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow D \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow E \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow 12 \rightarrow H \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow G \rightarrow 11 \rightarrow J \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow O$.

各组所走的路程分别为 (单位: 公里) I: 136.5 II: 191.1 III: 232.1.

各组所走路程总和为 (单位: 公里) 559.7. 可以求出其均衡度为: 0.54.

方法三：基于最小生成树的深度优先搜索法

(1) 根据逐步加入法所得的结果 559.7, 将它分为 d_1, d_2, d_3 满足 $d_1 < d_2 < d_3$, 且 $d_1 + d_2 + d_3 = 559.7$, d_1, d_2, d_3 分别表示每组所走路程的上限, 令 d_1, d_2, d_3 为初值, 再设 S_1, S_2, S_3 为实际每组的路程.

(2) 选择最小生成树中任一点为起点, 将该点与 O 点的最短路程赋值给 S_1 进行深度优先搜索, $S := S_1 +$ (树上连续搜索两点之间的最短距离), 若 $S_1 +$ (正在搜索点到 O 点的最短距离) $> d_1$, 则停止搜索.

(3) 在以上所找点中找到一条与 O 相连且距离在 d_1 限制范围内的一条至少过顶点一次的回路.

(4) 找到这条回路中所包括点 (除 O 点外) 中最后搜索的点, 将此点作为寻找回路 2 的起点.

(5) 将 d_1 改为 d_2 和 d_3 重复 (2) ~ (4).

(6) 找出 3 条回路后, 如已比 559.7 小或 d_1, d_2, d_3 不满足限制条件则退出, 否则以步长 5 改变 d_1, d_2, d_3 重复以上步骤.

根据这种方法可得到以下的路线 3:

I: $O \rightarrow P \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 21 \rightarrow K \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow I \rightarrow 18 \rightarrow J \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow M \rightarrow O$;

II: $O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 33 \rightarrow 31 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow O$;

III: $O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow E \rightarrow 11 \rightarrow G \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow H \rightarrow 12 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow 9 \rightarrow E \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow C \rightarrow O$.

各组所走的路程分别为 (单位: 公里): I: 212.2 II: 125.5 III: 215.9.

各组所走路程总和为 (单位: 公里): 553.6. 可以求出其均衡度为: 0.49.

二、启发式算法

以上求出的初始路线都是没有考虑均衡情况下的解, 均衡度不满足我们定义的要求, 因而可以采用一些启发式算法对初始路线进行调整, 从而减小均衡度即提高各组巡视路程的均衡程度以获得满足要求的较佳路线. 本文采用如下调整规则对初始路线进行调整:

规则一、边界调整法

边界调整主要目标就是在边界对各区域进行调整, 以提高各组的均衡程度.

比较上述几种方法生成的初始路线, 这里主要对方法三的初始路线进行调整.

假设三区域 I、II 和 III 各自路程满足 $a_1 < a_2 < a_3$, 我们对调整规定如下准则:

(1) 为增强相邻区域的可调整性, 规定首先对相邻边界点较多的两区域进行调整.

(2) 优先对 a_i 最小的区域 I 和 a_i 最大的区域 III 之间进行调整, 若区域之间的相邻点相对较少, 则通过第三个区域 II 进行 I、II 和 II、III 之间的调整进行.

(3) 规定调整结束的标志为满足均衡度要求, 即

$$\max\{a_i\} - \min\{a_i\} < \frac{0.2 \times a}{n},$$

则距离均衡度 $B < 0.2$ 满足要求.

根据以上准则, 其调整步骤如下:

(1) 计算当前方案的均衡度, 如果满足准则 (3), 退出; 否则, 转 (2).

(2) 选择路程相差较大的两块区域, 通过规则 (2) 进行调整, 调整后转 (3).

(3) 若调整超过一定的次数, 退出; 否则, 返回步骤 (1).

根据以上算法对方法三的初始路线 3 进行调整后得到的优化路线 4 如下:

I: $OC \rightarrow B \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow P \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow A \rightarrow I \rightarrow O$;

II: $O \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 21 \rightarrow K \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow I \rightarrow 18 \rightarrow J \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow M \rightarrow O$;

III: $O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow E \rightarrow 11 \rightarrow G \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow H \rightarrow 12 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow 9 \rightarrow E \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow O$.

各组所走的路程分别为 (单位: 公里): I: 179 II: 197.7 III: 210.5. 总和为: 587.2.

可以求出其均衡度为 0.16, 满足要求, 则用本方法所调整的路线即为问题一的解.

规则二、转移点调整法

本方法主要用来对问题二进行求解. 首先我们证明分三组不可能在 24 小时内完成巡视 (略).

由于分三组不可能在 24 小时内完成巡视, 接着我们试图寻找分四组完成巡视的路线. 为使总耗时最短, 我们要尽量使各组停留时间均衡, 各组行驶路程也尽量均衡, 则采用同于问题一的解法, 可以得到一个分为四组的路线 5 如下:

I: $O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 28 \rightarrow Q \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow A \rightarrow 1 \rightarrow O$;

II: $O \rightarrow P \rightarrow 26 \rightarrow 27 \rightarrow 24 \rightarrow N \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow K \rightarrow 21 \rightarrow 25 \rightarrow M \rightarrow O$;

III: $O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow L \rightarrow 20 \rightarrow 19 \rightarrow J \rightarrow 18 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow H \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow J \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow O$;

IV: $O \rightarrow C \rightarrow 3 \rightarrow D \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow E \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow 12 \rightarrow G \rightarrow 11 \rightarrow E \rightarrow 7 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow O$.

各组所走的路程分别为 (单位: 公里): I: 142.5 II: 152.1 III: 194.6 IV: 189.2.

各组所需的时间分别为 (单位: 小时): I: 21.07 II: 21.34 III: 22.56 IV: 23.40.

各组所走路程总和为 (单位: 公里): 678.4 总共所需的时间为 (单位: 小时): 23.40. 可以求出其均衡度为 0.3.

若要求完成巡视所需时间尽量短, 则要对上面所求出的路线 5 进行调整. 分析路线 5 的数据可知, 各组的时间相差很近, 所以不能较大幅度地对路线 5 进行调整, 而采用转移点的规则, 即通过 II 和 III 来降低初始路线中时间较长的组的时间, 加长初始路线中时间较短的组的时间, 每组的点数变化不超过 1. 假设四个区域 I、II、III 和 IV 满足 $T_4 > T_2(T_3) > T_1$, T_i 为调整后的时间, 则一次调整的规则如下:

本次调整的状态变化为: I 中增加来自 II、III 或 IV 中的一点, IV 中减少一点至 I、II 或 III, II 和 III 中只增加或减少一点.

规定达到调整精度要求时 $\max\{T_i\} - \min\{T_i\} < 2$.

(1) 如满足 $T_1 < T_4$ 转 (2), 否则转 (3).

(2) 若满足 $T_{2(3)}$ 则转 (4), 否则转 (3).

(3) 返回本次调整前的状态, 若调整次数大于规定次数或达到精度要求, 退出, 否则转 (1).

(4) 若调整次数大于规定次数或达到精度要求, 退出, 否则转 (1).

采用上述方法, 对路线 5 进行调整 1 次就可以满足调整的要求, 得到一优化路线 6 如下:

I: $O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 28 \rightarrow Q \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow A \rightarrow 1 \rightarrow O$;

II: $O \rightarrow P \rightarrow 26 \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow K \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow M \rightarrow O$;

III: $O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow L \rightarrow 19 \rightarrow J \rightarrow 18 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow H \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow J \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow O$;

IV: $O \rightarrow C \rightarrow 3 \rightarrow D \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow E \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow 12 \rightarrow G \rightarrow 11 \rightarrow E \rightarrow 7 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow O$.

各组所走的路程分别为 (单位: 公里): I: 158.3 II: 143.6 III: 196.6 IV: 189.2.

各组所需的时间分别为 (单位: 小时): I: 22.52 II: 21.10 III: 22.62 IV: 22.40.

各组所走路程总和为 (单位: 公里) 687.7. 总共所需的时间为 (单位: 小时) 22.62. 可以求出其均衡度为 0.31.

则问题二的解为: 至少分四组在 24 小时内可以完成巡视. 若要求路程较短, 巡视路线为路线 5; 若灾情较为严重, 要求时间较短, 则巡视路线为路线 6.

规则三、最短路调整法

该方法利用求出的最短路进行求解, 较好地解决了问题三. 根据附录二的到 O 点的各点的最短路, 可以得出一个最短路的排序, 设为 $d_1 < d_2 < \dots < d_k$, 该方法的思想是首先确定最长的一条最短路 d_k 所需的时间即所求的最短时间, 然后以此为上限, 逐次考虑 d_{k-1}, d_{k-2}, \dots , 在每一最短路中尽量在时间限制范围内多巡视几点. 由附录二可知最长的最短路路程为 77.5 公里, 计算出最短时间为 6.43 小时, 则具体求解方法如下:

方法一 按上述从大到小的顺序考虑每个尚未巡视过的节点, 若当前考虑的点为 i , 则当巡视完点 i 后, 沿最短路径原路返回 O 点. 若时间允许, 则可顺便巡视该路径上的点. 优先考虑巡视最短路径上的乡及最短路径上的距 O 点较远的点. 在该路上可以在最短时间限制内尽量多巡视一些地方, 则对于问题 3, 在 6.43 小时之内, 需要 24 组完成巡视, 各组的巡视路线见附录三 (1)(略).

方法一在处理离 O 点较近的点时, 在上述规则下容易产生浪费, 则考虑对方法一进行改进.

方法二 仍然按最短路的排序进行考虑, 不断加入新的点. 但巡视某一点 i 后, 如果时间充裕, 并不按 i 点到 O 点的最短路径返回, 而是先到 j 点巡视, 然后再返回 O 点. 定义 $dis(i, j)$ 为 i 点和 j 点之间的距离, 则对于下一节点 j 应满足:

(1) $dis(i, j)$ 应尽量小; (2) $dis(O, j)$ 应尽量大; (3) j 点尚未巡视过; (4) j 点返回 O 点总共所花的时间 < 6.43 时.

为了满足条件 (1) 及 (2), 我们选择 $dis(O, j) - dis(i, j)$ 最大的点作为 j 点.

由此规则对问题 3 进行求解, 可得到在 6.43 小时之内需要 22 组完成巡视, 各组的巡视路线见附录三 (2)(略).

对于问题 3, 完成巡视的最短时间为 6.43 小时; 在最短时间限制下, 可以考虑以最少的巡视组数 (人员数) 来确定方案的优劣, 因而我们给出问题 3 的解为在最短时间 6.43 小时内用 22 组巡视人员来完成巡视, 其巡视路线见附录三 (2)(表).

模型分析

在问题 4 中, 我们定义每组的巡视时间 $t_i (i = 1, 2, 3)$, 则表达式如下

$$\begin{cases} t_1 = \frac{d_1}{v} + x_1 \cdot T + y_1 \cdot t \\ t_2 = \frac{d_2}{v} + x_2 \cdot T + y_2 \cdot t \\ t_3 = \frac{d_3}{v} + x_3 \cdot T + y_3 \cdot t \end{cases} \quad *$$

其中 x_i, y_i 分别为第 i 组巡视的乡数和村数. $t_{\max} = \max[t_1, t_2, t_3]$ 即为整体所花的时间, $t_{\min} = \min[t_1, t_2, t_3]$.

为了满足尽快完成任务, 则 t_{\max} 应尽量少, 也即 t_1, t_2, t_3 应越均衡, 这样总体耗时减少.

我们定义 $\alpha = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{\sum t_i / 3}$, α 称为相对时间均衡度, 当我们取不同的 α 值, T, t, V 改变对最佳巡视路线的影响结果是不同的. 以路线 4 为例分析如下, 路线 4:

$$\begin{aligned} d_1 &= 179, & x_1 &= 6, & y_1 &= 11, \\ d_2 &= 197.7, & x_2 &= 6, & y_2 &= 11, \\ d_3 &= 210.5, & x_3 &= 5, & y_3 &= 13. \end{aligned}$$

当取 $T = 2, t = 1, V = 35$ 时

$$\begin{cases} t_1 = 28.11, \\ t_2 = 28.64, \\ t_3 = 29.01, \end{cases} \quad \alpha_1 = \frac{29.01 - 28.11}{\frac{29.01 + 28.64 + 28.11}{3}} = 0.03$$

假设参数 T, t, V 改变时, 最佳巡视路线不变, 考察 α 是否满足一定的均衡度, 如果不满足均衡度, 则假设不成立, 最佳巡视路线需要改变.

当取 $T = 0, t = 0, V = 35$ 时

$$\begin{cases} t_1 = 5.1, \\ d_2 = 5.65, \\ t_3 = 6.00, \end{cases} \quad \alpha_1 = \frac{6.0 - 5.11}{\frac{6.0 + 5.1 + 5.65}{3}} = 0.16.$$

若取 $\alpha < 20\%$, 则以上两种 T, t 和 V 条件下, 路线 4 都可以作为最佳路线; 若取 $\alpha < 15\%$, 在参数为 $T = 2, t = 1, V = 35$ 时的路线不能作为参数改变为 $T = 0, t = 0, V = 35$ 时的最佳路线, 所以 $T = 0, t = 0, V = 35$ 条件下的最佳路线发生了改变.

从以上分析可得, T, t 和 V 的改变对最佳路线的影响不但与 T, t 和 V 改变方式有关, 而与最佳路线均衡度的精度要求有关, 所以我们不能笼统地认为 T, t 和 V 的改变对最佳路线有影响, 但我们可以进行局部分析.

(1) 若要使 T_j, t_j, V_j 最佳路线在一定均衡度条件下是稳定的, 即从 T_j, t_j, V_j 变到 T_k, t_k, V_k 后最佳路线不变, T_k, t_k, V_k 应满足何条件? 则对于一条具体的对应 T_j, t_j, V_j 最佳路线, 我们可确定 $x_i, y_i, d_i (i = 1, 2, 3)$ 及均衡度, 保持最佳路线不变, 即 $x_i, y_i, d_i (i = 1, 2, 3)$ 不变, 对于 T_k, t_k, V_k , 计算 α , 则 $\alpha = f(T_k, t_k, V_k)$, 若满足均衡度要求 α , 即 $f(T_k, t_k, V_k) < \alpha$ 时则认为在参数变为 T_k, t_k, V_k 时, 最佳线路不变.

(2) 若 $T = 0, t = 0$, 则从 (*) 可以很简单地得到 V 的任意变化都不改变最佳路线.

(3) 要求出 T, t, V 的任意变化对最佳巡视路线的影响, 可以进行大量的 T, t, V 下的最佳路线的模拟, 再通过分析得到对最佳路线的影响.

以分析即为对问题 4 的讨论.

模型评价及改进

本文所建模型的主要思想是将巡视路线的设计分为两个部分: 首先生成一个可行的巡视路线, 然后利用启发式算法对巡视路线进行优化. 在初始值的生成中本文给出了三种方法, 方法一直观地进行了判断, 较为简单; 方法二借鉴了求 Hamilton 圈的方法; 方法三则基于最小生成树, 求出的路线总路程较短, 方法较为有效, 本文就采用该方法求得的路线作为后面启发式算法的初始路线.

基于生成的初始巡视路线, 本文提出了一系列启发式算法并采用一定的调整规则对初始路线进行了调整, 较好地解决了所提出的问题. 由于问题考虑的因素太多, 因此针对不同的要求就要给出不同的调整规则, 采用不同的启发式算法.

规则一、二和三就是分别针对问题 1、2 和 3 而提出的, 在问题 1、2 和 3 中的组数、 T 、 t 、 V 等条件发生变化时, 对问题仍然适用. 模型的分析则分析了 T, t 和 V 的变化对最佳路线的影响.

以上模型均建立在将区域分为几个区域的基础之上, 而本文在模型建立中提出了一种添加虚拟点来将求多组路线问题转化为一组路线的问题的思想, 如果能够找出一种准则, 使三个代表县城点之间的距离尽量大, 则在最好的情况下, 将使两个县城点均分整个一条路线, 从而求出最均衡的三条路线; 并且在满足均衡度的条件下可以降低均衡来求出较短路程的路线. 这种改进将简化问题的求解, 并可以得到较好的解.

附录一

定理一 当有 i 个组同时进行巡视时, 必然存在一总路程最短的路线, 记这时的总路程为 d , 则对于 j 组的巡视若 $i \geq j$, 有 $d_i \geq d_j$. 证明 (略).

附录二(略)

附录三

说明 巡视路线中经过乡 (镇) 时, 时间增加 2 小时; 经过村庄时, 时间增加 1 小时. 由于行驶的速度为 35 公里 / 小时, 则在经过乡 (镇) 巡视可以等效于在路程中增加 70 公里, 同理经过村庄巡视则增加 35 公里. 下面的巡视路线中折算的路程即基于此思想.

(1) 在最短时间内用 24 组人员巡视的路线 (略).

(2) 在最短时间内用 22 组人员巡视的路线.

组号称	巡视点	巡视路线	路程 (公里)
1	H	$O \rightarrow H \rightarrow O$	225
2	14, 13	$O \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow O$	215.4
3	15, 16	$O \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow O$	220.8
4	12, 11	$O \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow O$	207.8
51	0, 8	$O \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow O$	217.8
6	G	$O \rightarrow G \rightarrow O$	195.4
7	I	$O \rightarrow I \rightarrow O$	192.2
8	F, 9	$O \rightarrow F \rightarrow 9 \rightarrow O$	215.2
9	J, 18	$O \rightarrow J \rightarrow 18 \rightarrow O$	220.4
10	17, 22, 23	$O \rightarrow 17 \rightarrow 22 \rightarrow 23 \rightarrow O$	214.2
11	19, L	$O \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow O$	197.4
12	24, K	$O \rightarrow 24 \rightarrow K \rightarrow O$	215.1
13	E, 7, 6	$O \rightarrow E \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow O$	223.4
14	21, 20, 25	$O \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow O$	190.8
14	35, 34, A	$O \rightarrow 35 \rightarrow 34 \rightarrow A \rightarrow O$	212
16	30, Q, 28	$O \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 28 \rightarrow O$	213.9
17	4, D, 5	$O \rightarrow 4 \rightarrow D \rightarrow 5 \rightarrow O$	216.4
18	N, 26, 27	$O \rightarrow N \rightarrow 26 \rightarrow 27 \rightarrow O$	217.8
19	32, 31, 33	$O \rightarrow 32 \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow O$	174.3
20	P, 29, R	$O \rightarrow P \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow O$	221.1
21	2, 3, M	$O \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow M \rightarrow O$	198.3
22	1, B, C	$O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$	209.4

灾情巡视路线寻优模型

罗卢杨 龙继东 唐小军

指导教师: 徐全智

(成都电子科技大学, 成都 610054)

编者按 本文对模型的叙述清晰、简明、有特色, 提出了一系列策略对巡视路线进行有效的调整.

摘 要 本文讨论了灾情巡视路线的优化问题, 并总结出一些在这类图中求最优回路的有效法则. 文中首先将乡村公路示意图转化为赋权连通图, 并通过最小生成树分解法将原权图分为若干子图, 分析并给出在这些子图中寻找最佳回路的若干原则: 扩环策略、增环策略、换枝策略. 依据这些原则, 求得不同条件下的巡视路线.

当巡视人员分为组时, 在要求总路程最短且尽可能均衡的条件下各组巡视路程分别为: 206.8km, 219.5km 159.3km. 当要求在 24 小时完成巡视, 至少需分 4 组, 巡视完成时间为: 22.3 小时. 当巡视人员足够多时, 完成巡视的最短时间为 6.43 小时, 巡视人员需分成 22 组.

一、问题重述 (略)

二、问题分析

如果巡视人员只分一组, 巡视路线是指巡视人员从县政府 O 出发, 沿乡村公路遍历各乡镇、村, 最后回到县政府. 把该问题抽象为图论的赋权连通图问题, 即有一赋权无向连通图 $G(V, E)$, $O \in V$, 两村之间公路的长度, 即为该无向图的边权 $\omega(e)$, 寻找一条最佳的路线, 即在图 $G(V, E)$ 中, 找到一条包含 O 的回路, 它至少经过所有的顶点 E 一次, 使总路程 (总时间) 最小. 这是一个一般推销员问题 (general salesman problem)^[1].

如果巡视人员分成若干组, 每组考察一部分区域, 且所有乡村都考察到. 如果能把这些乡村分块, 即图 $G(V, E)$ 中把图分为若干个连通的子图 G_i , 每个子图 G_i 中寻找一条包含 O 的回路 L_i , 则对每个子图 G_i 而言, 化为一般推销员问题.

完成巡视的时间应是各组巡视时间中最长的时间. 故为使巡视效率高, 应尽量使各组巡视时间接近, 反映在图 G 分块时应尽量均衡.

三、变量及符号说明

$G(V, E)$: 赋权连通图; G_i : $G(V, E)$ 的第 i 个子图; L_i : 子图 G_i 中的最佳回路;

$\omega(e)$: 边 e 的边权; $\omega(v)$: 点 v 的点权; l_i : L_i 的各边权之和;

c_i : L_i 的各点权之和; T : 巡视中在每个乡镇停留时间;

t : 巡视中在每个村的停留时间; \bar{V} : 汽车行驶速度.

为叙述方便起见, 我们在文中不加说明的使用上述变量或符号的变形形式, 它们的含义可通过上下文确定.

四、条件假设 (略)

五、模型的建立

把乡村公路示意图抽象为一赋权连通图 $G(V, E)$, 在权图 G 中, $v_i \in V(G)$ 对应示意图中的乡、村所在地, v_0 表示县政府所在地, $e_j \in E(G)$ 对应示意图中的公路. 边权 $\omega(e_j)$ 对应示意图中的公路长度, 点权 $\omega(v_i) = \begin{cases} T \times \bar{V}, & v_i \text{代表乡镇}, \\ t \times \bar{V}, & v_i \text{代表村} \end{cases}$, 其中 \bar{V} 表示车速.

建立的数学模型如下:

$$\forall e \in E(G), \exists \omega(e) \in N, \exists v \in V(G), \exists \omega(v) \in \{\bar{V} \times T, \bar{V} \times t\}, v_0 \in V(G),$$

求 G 中回路 $L_1, L_2, \dots, L_k (k > 1)$, 使得满足:

$$(1) v_0 \in V(L_i), i = 1, 2, \dots, k; \quad (2) \bigcup_{i=1}^k V(L_i) = V(G);$$

$$(3) \sum_{i=1}^k \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e) = \min \text{ (目标为总距离最短); 或 } \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e) + \sum_{v \in V(L_i)} \omega(v) \right\} = \min \text{ (目标为巡视时间最短);}$$

六、模型的求解

问题 1 现要分三组巡视, 则需把图 G 分成三个子图 $G_i (i = 1, 2, 3)$, 在每个子图 G_i 中寻找最佳回路 $L_i (i = 1, 2, 3)$.

因为最小生成树能包含图 G 中所有顶点 E , 而且最小树的边权是相邻两顶点之间的距离, 它描述了顶点之间的相近程度, 故可考虑利用最小生成树初步分块.

根据最小生成树求解的 Kruskal 算法^[1], 我们找到图的最小生成树如图 1:

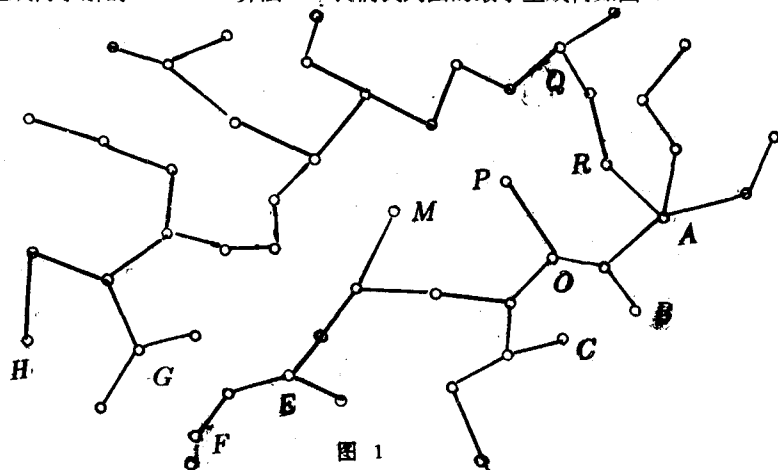


图 1

现要对已得到的最小生成树 T 分解, 以获得三个子图 G_i , 使得分解结果尽量均衡. 由于在最小生成树上, 边权接近, 可略认为均衡即各子图包含的顶点数接近, 故各子图包含的顶点尽量接近 $[(35 + 17)/3] = 17$ 个. 故有以下分解原则:

最小生成树分解原则:

(i) 分解点为 O 点或尽可能接近 O 点; (ii) 分解所得的三个子图 G_i 所包含的顶点数尽可能接近 17 个; (iii) 尽量使分解所得的子图 G_i 为连通图; (iv) 尽量使子图 G_i 与点 O 的最短路上的点在该子图内, 尽量使各子图的点在该子图内部形成环路.

根据以上分解原则, 我们得到分解结果如图 2 所示.

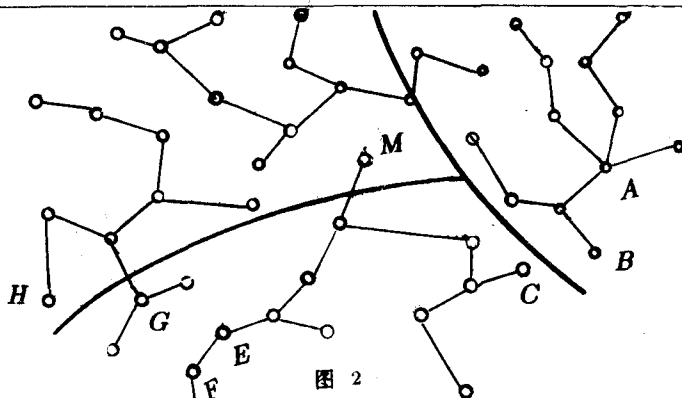


图 2

从而根据最小生成树的分解方法把图 $G(V, E)$ 划分为三个子图 $G_i, i = 1, 2, 3$, 分别在 G_i 中寻找最佳巡视路线. 现给出几个在寻找最优回路的有效优化规则:

1 扩环策略:

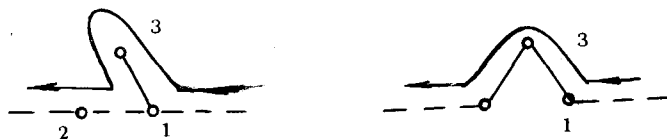


图 3.1

如果在图 G 中的路径 C_i 中, 有孤立的枝存在, 如图 3.1 所示代表 1, 2, 3 三个顶点, 若 $\omega_{1,2} + \omega_{1,3} > \omega_{2,3}$, 则应考虑扩环. 扩环策略还可扩展到多个顶点的情况:

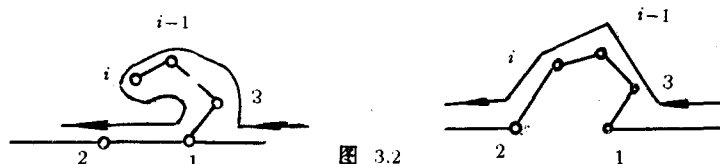


图 3.2

如图 3.2 所示: 扩环后相比扩环前其权和变化为:

$$\Delta = - \left\{ \omega_{1,2} + 2[\omega_{1,3} + \sum_{k=4}^i \omega_{k-1,k}] \right\} + \left\{ \omega_{1,3} + \sum_{k=4}^i \omega_{k-1,k} + \omega_{1,2} \right\}$$

若 $\Delta < 0$, 则应扩环. 当 $\omega_{1,2} < \omega_{1,3} + \dots + \omega_{i,2}$ 时, 扩环后总路程更少, 可进行扩环调整.

2 增环策略:

若环路上某顶点处长出两条枝, 且存在可使两枝成环的边, 可考虑增环. 增环前后其权和变化为:

$$\Delta = \omega_{i,i+1} - \left(\sum_{k=2}^i \omega_{k-1,k} + \omega_{j,2} \right)$$

若 $\Delta < 0$, 则应增环. 当 $\omega_{i,i+1} < \omega_{2,3} + \dots + \omega_{j,2}$ 时, 增环后总路程更少, 可进行增环调整.

我们对图 4 进行分析, 发现扩环策略与增环策略条件完全满足, 故这两种策略完全适用.

3 换枝策略:

若环路上某顶点长出一条枝, 而该枝末梢同环路中另一顶点距离接近, 可考虑换枝. 如图 5 所示, 若

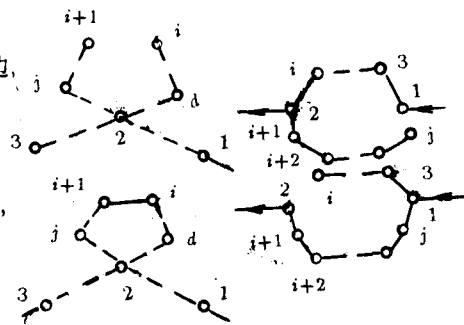


图 4

图 5

$\omega_{1,3} + \dots + \omega_{i,2} + 2(\omega_{2,i+1} + \dots + \omega_{j-1,j}) > \omega_{1,j} + \dots + \omega_{i+1,2} + 2(\omega_{1,3} + \dots + \omega_{i-1,i})$
 则应考虑换枝. 换枝的结果是使被重复的路减少.

根据以上的优化策略及分块结果, 在 $G_i, i = 1, 2, 3$, 中分别寻找一条从 O 出发, 遍历 V 并回到 O 的最短路线.

在图 $G(V, E)$ 中, 求三条从 O 出发并回到 O 的路 L_1, L_2, L_3 , 满足 $V = \bigcup_{i=1}^3 V_i, V_i (i = 1, 2, 3)$ 为 L_i 中经过点的集合, 使得 $\sum L_i$ 最小, 且 L_i 与 L_j 相差不大.

为求出 L_1, L_2, L_3 , 我们以下列步骤进行:

1. 作出 G 与 O 之间的最短路;

2. 以 O 与 G 连通的路径及原图 G 的最优树在 G_i 中保留的边为基础, 进行增环扩环调整, 使最后尽可能形成一个环路.

12, G , 11 归入 G_3 , 因为它们可与 $F, 9, E$ 形成环路; M 归入 G_2 是因为 M 在 G_2 与 O 的最短路上. 现对 G_2 进行调整: 首先, 根据增环法添上 $e_{2,16}$, 根据对换法, 添上边 $e_{14,15}$, 去掉 $e_{J,18}$; 根据扩环法, 添加边 $e_{22,K}$, 去边 $e_{17,K}$, 再进行扩环, 加边 $e_{21,23}$, 去边 $e_{21,25}$; 加边 $e_{23,N}$, 去边 $e_{24,N}$, 得到图 6.1. 同样, 根据这些法则对 G_1, G_3 调整, 分别可得到图 6.2 和图 6.3.

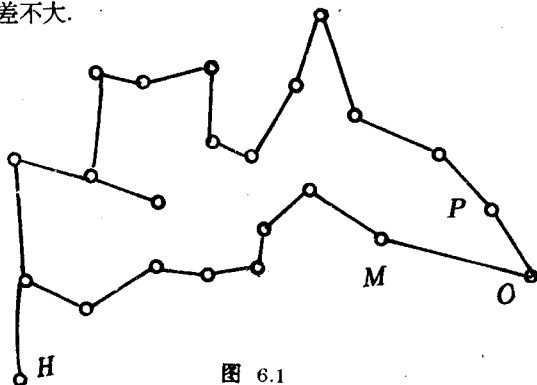


图 6.1

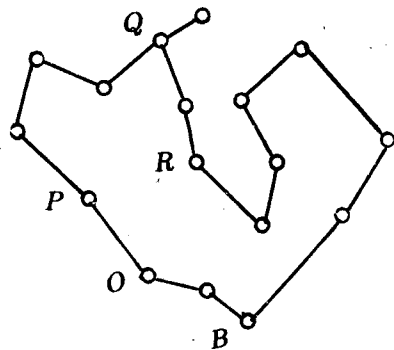


图 6.2

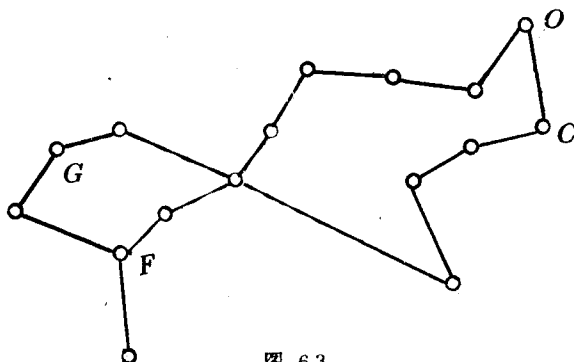


图 6.3

再由图计算得 $l_1 = 159.3, l_2 = 206.8, l_3 = 219.5(KM)$, 总路程长 585.6km. 如图所示.

问题 2 (限时巡视的最佳路线)

若分成 n 组巡视人员, 其各自所走的路径 L_i , 回路 L_i 中边权 $\omega(e_i)$, 点权 $\omega(v_i)$, 则有 $l_i = \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e_i)$, 点权和 $c_i = \sum_{v \in V(L_i)} \omega(v_i) = (2a_i + b_i) \times 35$, 其中 a_i 为乡相对应的点的数目, b_i 为与村相对应的数目, 巡视至少应分的组数 $n: n = \min \{n | \frac{l_i}{35} + 2a_i + b_i < 24\}, (i = 1, \dots, n)$.

可以证明 $n > 3$ (略).

考虑 $n = 4$, 同分三组的情况类似, 用最优树分解方法把图 G 分成子图 $G_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 子图中点权之和 $2a_i + b_i$ 尽量相同, 总的点权之和为 $17 \times 2 + 35 = 69$, 故平均每个子图中点权和为 $[69/4] = 17$, 故参照分三组时的最小树分解原则, 分成 4 组时最小树分解原则为:

- 1) 使各子图中点权和尽量接近 17;
- 2) 分解后的各子图尽量为连通图;

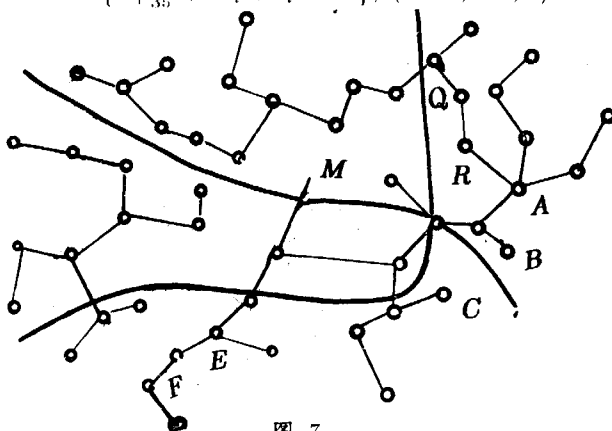


图 7

- 3) 分解点为 O 或尽量接近 O ;
 4) 生成的子图容易形成圈或接近圈. 为使尽量均衡, 大致划分如图所示:

通过增环、扩环、换枝等策略, 对各子图内部调整而寻找最佳巡视回路, 其结果如图 8 所示:

经计算得到如下结果:

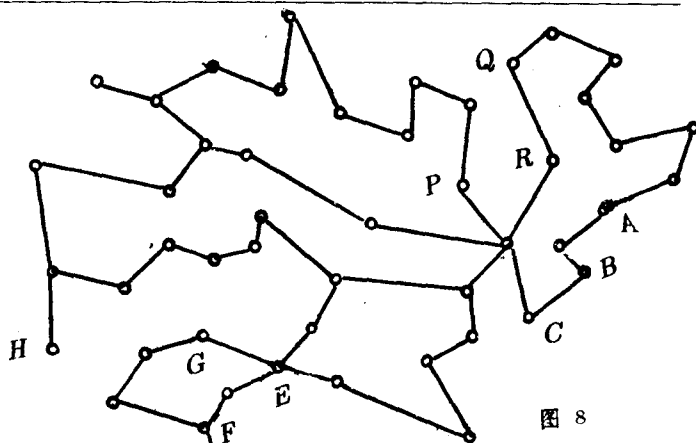


图 8

组数	路程 (km)	巡视时间 (h)	巡视路线
1	140.1	22.0	$O, C, B, I, A, 34, 35, 33, 31, 32, 30, 29, R, O$
2	154.3	21.4	$O, P, 28, 27, 26, N, 23, 22, 17, 16, K, 21, 25, M, O$
3	185	22.3	$O, M, 25, 21, K, 18, I, 15, 14, H, 14, 13, J, 19, 20, L, 6, 5, 2, O$
4	182	21.1	$O, 2, 5, 6, 7, E, 11, G, 12, F, 10, 9, E, 8, 4, D, 3, C, O$

完成巡视的最小时间为 $t_{\min} = 22.3$ 小时. 其中路线重合部分的点, 播 $K, 21, 25, M$ 为二组巡视. $6, 5, 1$ 由三组巡视.

问题 3 巡视人员足够多, 到并设汽车也足够多, 甚至每个村、镇都可分配一组巡视员, 这些组的完成时间中最长的即为完成巡视的时间下限 t_{\min} , 从最短生成树上可以看出, H 离 O 距离 $l_{O,H}$ 最长, 且 H 的权最大 $= 2$, 故巡视 H 的那组所花的时间为完成整个巡视的时间下限, $t_{\min} = \frac{2l_{O,H}}{\bar{V}} + \omega_H = 6.43$. 因此, 需解决的问题是

$$\begin{aligned} \min \quad & n \\ \text{s.t.} \quad & \frac{2l_i}{35} + 2a_i + b_i \leq t_{\min} \end{aligned}$$

我们给出一种算法, 按此算法可比较好地解决这个问题. 算法如下:

- 1) 令 $i = 0$.
- 2) 选最短路树形图中未被标号的点中离点 O 最近的点, 设为 M , M 与 O 的距离为 l_m , 设第 i 个巡视点集 $V_i = \{M\}$, 计算 V 最多还可增加的点的权之和 $l_m = t_{\min} - \frac{2l_m}{\bar{V}} - \omega_m$.
- 3) 尽可能使并入 V_i 的点的权之和为 $[l'_m]$, 同时满足存在从 O 出发, 经历 V_i 中所有点并回到 O 点的路 L_i , 使 $\frac{l_i}{\bar{V}} + Ta_i + tb_i \leq tb_i \leq t_{\min}$, l_i 为 L_i 的长度, a_i, b_i 分别为中权为 T, t 的点的个数. 若同时存在几种并入方式, 选取并入的点到 O 距离之和最大的那一种.
- 4) 在图中把中含有的点标上号, 若还有点未标号, 令 $i = i + 1$ 转 (2), 否则, 停止. 通过这种算法, 得到应分为 22 组, 结果见表.

问题 4 设某种情况下, 即 \bar{V}, T, t 取某一组值时, 在满足 $\max t_i$ 取最小值的条件下的点集为 V_i , 对应路为 L_i , 其长度为 $l_i, i = 1, 2, \dots, n$. 令 $t_i = \frac{l_i}{\bar{V}} + Ta_i + tb_i$, 此时应满足 t_i, t_j 相差不大, 否则, 可将 t_i 中最大的点集去掉一个点, 并将其加到 t_j 中最小的点集中去.

当 \bar{V} 改变 $\Delta \bar{V}$ 时, t_i 的改变量为 $\Delta t_i = \frac{(\bar{V} - \bar{V}')}{\bar{V}\bar{V}'}$.

分组	巡视路线	花费时间 (h)	路程 (km)
{H}	O, 2, 3, 8, 7, E, 11, Q, 12, H, 12, Q, 11, E, 7, 8, 3, 2, O	6.43	155
{14, 13}	O, 2, 5, 6, L, 19, J, 13, 14, 13, J, 19, L, 6, 5, 2, O	6.15	145.4
{15, 16}	O, 26, N, 23, 22, 16, I, 15, I, 18, K, 21, 25, M, O	6.37	153
{12, 11}	O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 12, G, 11, E, 7, 6, 5, 2, O	5.93	137.6
{10, 8}	O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 10, F, 9, E, 8, E, 7, 6, 5, 2, O	6.21	147.4
{G}	O, 2, 5, 6, 7, E, 11, G, 11, E, 7, 6, 5, 2, O	5.58	125.4
{I}	O, M, 25, 21, K, 18, I, 18, K, 21, 25, M, O	5.49	122.2
{F, 9}	O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 9, E, 7, 6, 5, 2, O	6.17	111.2
{J, 18}	O, 2, 5, 6, L, 19, J, 18, K, 21, 25, M, O	6.29	115.4
{17, 22, 20}	O, P, 26, N, 23, 22, 17, K, 21, 20, 25, M, O	6.31	115.8
{19, K}	O, M, 25, 21, K, 21, 20, 19, L, 6, 5, 2, O	6.18	111.2
{24, 23, 21}	O, P, 26, N, 24, 23, 21, 25, M, O	5.79	97.9
{E, 7, 6}	O, 2, 5, 6, 7, E, 7, 6, 5, 2, O	6.38	83.4
{L, 5, 25}	O, M, 25, 20, L, 6, 5, 2, O	6.36	82.8
{30, Q, 32}	O, R, 31, 32, 30, Q, 29, R, O	6.17	76.2
{35, 34, 33, 31}	O, 1, A, 34, 35, 33, 31, R, O	6.42	84.7
{4, D, 3}	O, 2, 3, D, 4, D, 3, C, 1, A, 1, O	5.99	69.8
{N, 27, 28}	O, P, 26, N, 26, 27, 28, P, O	6.27	79.5
{29, P, R}	O, R, 29, P, O	6.32	46.1
{31, 2, C}	O, R, 31, R, O, C, 3, 2, O	6.22	77.6
{26, M}	O, M, N, 26, P, O	4.86	65.1
{B, A}	O, 1, B, A, 1, O	5.15	40.4

由于 t_i 的不同, Δt_i 也不同, 当 \bar{V} 变化很大时, 可能使 t_i 相差很大, 从而需要重新调整巡视路线. 现以 $n = 3, V = 35, T = 2, t = 1$ 讨论变动对路线的影响.

首先, 从 1 中所得的三条巡视路线及对应巡视点集开始, 将 t_i 最大的点集中调整一个到 t_i 最小的点集中去, 直到 $\max t_i$ 不再减小为止, 我们得到三条路线, 对应长度分别为 194、205.3、206.8, 各巡视点集中权为 1、2 的点的个数分别为: $a_1 = 6, b_1 = 11, a_2 = 5, b_2 = 13, a_3 = 6, b_3 = 11$.

当 T 增加时, 对应时间分别为 $t_1 = 6\Delta T + 28.5, t_2 = 5\Delta T + 28.9, t_3 = 6\Delta T + 28.9$, 当 $\Delta T > 3.4$ 时, 可将 V_3 中的点 H 调入 V_2 中, 此时对应的时间为 $t'_1 = 6\Delta T + 28.5, t'_2 = 5\Delta T + 31.5, t'_3 = 6\Delta T + 26.3$ 均比 $\max\{t_1, t_2, t_3\} = t_3$ 小, 故应改变巡视路线.

七、模型的评价及改进

1. 该问题实际上是一个一般推销员问题, 是已被论证的 NPC 问题, 至今仍无有效的算法. 求最优 Hamilton 回路是该问题的常见的计算机近似算法, 它不能保证得到最优解, 运算量很大, 这种算法能很容易在图论文献中查到 [1, 2].

我们的策略改进方法也不能保证求得最优解, 但接近最优解. 并且所提出的策略能大幅度减少计算量, 以至于根据手算便能得到较为满意的结果.

2. 我们利用最优树分解方法对图分块, 但未能给出一个准确的原则定量地给出总路程最短同均衡性最好的制约关系.

参 考 文 献

- [1] E. 米涅卡 [美], 网络图的最优化算法, 中国铁道出版社, 北京, 1984.
- [2] 卢开澄, 图论及应用, 清华大学出版社, 北京, 1981.

灾情巡视的最佳路线

丁颂康

(上海海运学院, 上海 200135)

摘 要 今年夏季, 我国长江、松花江流域的广大地区遭受了特大水灾. 作为 1998 年全国大学生数学建模竞赛 B 题的“灾情巡视路线”问题就是在这样的背景下构思而成的. 本文中, 我们将结合答卷评阅情况, 简单介绍一些有关该题解答的要点.

一、关于问题的数学模型

本题给出了某县的道路交通网络图, 要求的是在不同条件下, 灾情巡视的最佳分组方案和路线. 这是一类图上的点的行遍性问题, 也就是要用若干条闭链复盖图上所有的顶点, 并使某些指标达到最优.

点的行遍性问题在图论和组合最优化中分别称为哈密尔顿问题和旅行商问题. 所谓哈密尔顿问题, 就是研究图中是否存在经过所有顶点恰好一次的圈或路, 这种圈或路 (如果存在) 分别称为哈密尔顿圈和哈密尔顿路, 简称为 H -圈和 H -路. 而旅行商问题通常是指在赋权图上经过所有顶点至少一次, 且使总长度 (即边权之和) 达到最小的闭链. 而本题所求的分组巡视的最佳路线, 则与多旅行商问题 (MTSP) 类似, 也就是 m 条经过同一点并复盖所有其它顶点又使边权之和达到最小的闭链.

求解非完全图的多旅行商问题, 通常所用的方法可分为两步. 首先是利用任意两点间的最短路长度作为该两点间边的权构造一个完全图. 这一点对于原图中没有边相连的点对尤为重要. 容易证明, 在如此构造出来的完全图中, 各边的权将自然满足三角不等式, 即任意三点间, 两边权之和不小于第三边的权; 并且该完全图中的最优哈密尔顿圈与原图上的最优旅行商路线等价. 第二步, 以一点 v 为起终点 (本题中的县城 O) 的多旅行商问题, 可以采用将该点视作若干点 v_1, v_2, \dots, v_k (k 为旅行商人数), 并令 $w(u, v_j) = w(u, v)$ (对所有的点 $u \neq v$) 及 $w(v_i, v_j) = \infty$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$) 的方法, 再将前述的完全图拓展成增广完全图. 然后, 在该增广完全图上求最优哈密尔顿圈. 通常情况下, 这个最优哈密尔顿圈将经过 v_1, v_2, \dots, v_n 各一次, 而这些点在圈上又不相邻. 因此, 它们将把这个圈分解成恰好 k 段. 这 k 段形成以 v 作为起终点的闭链, 分别对应 k 个旅行商的旅行路线. 并且这些旅行路线对于总长度最短的目标来说一定是最优的.

在拓展完全图上求解最优哈密尔顿圈 C^* , 可以表达成下述线性规划 (更确切地讲是 0-1 规划) 的形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \sum_j w_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j x_{ij} = 1, \quad \forall i \\ & \sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall j \\ & \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset V, \text{ 且 } S \neq \emptyset \\ & x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned} \quad (*)$$

其中 w_{ij} 就是点 i 和 j 间边的权. V 是图的点集. 而条件 $\sum_{i \in S, j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 1$ 是为了保证取 $x_{ij} = 1$ 的边不形成小的圈. 这里 S 是点集 V 任意的非空真子集. (*) 式的最优解中 $x_{ij} = 1$ 的边 (i, j) 将构成最优哈密尔顿圈 C^* .

值得注意的是, 用 (*) 式求得增广完全图上的最优解, (也就是多旅行商问题的最优解), 能使 k 条旅行路线的总路程达到最小, 但是这 k 条路线的均衡性可能相当差. 因此, 当要求均衡性较好的解还需要做大量的调整工作. 此外, 哈密尔顿问题和旅行商问题都属 NP -完全类, 也就是说, (*) 式问题的求解没有多项式时间的算法. 对于本题的规模 (包括县城共有 53 个点, 再加上构造增广完全图时添加的 $k-1$ 个点), 要想求得真正的最优解是不现实的. 为此只能采用启发式算法, 求得近似最优解.

单旅行商问题的近似算法, 有如分枝定界、最小插入、最小生成树、对换调优、最近邻点, 以及神经网络、模拟退火、遗传算法等方法. 容易证明, 单旅行商的最优路线长度, 必定是多旅行商最优路线总长度的下界. 已知的一条原图的单旅行商最优路线的近似解为: $O-P-29-R-31-33-A-34-35-32-30-Q-28-27-26-N-24-23-21-K-22-17-16-I-15-I-18-J-19-L-20-25-M-6-7-E-11-G-13-14-H-12-F-10-F-9-E-8-4-D-5-2-3-C-B-1-O$. 其长度为 514 公里.

在求本题的解之前, 对原问题所给条件作一些适当的假设还是必要的. 例如, 公路不考虑等级差别, 也不受灾情或交通情况的影响, 各条公路段上汽车行驶速度可以认为是均匀的; 各巡视组巡视的乡 (镇)、村不受行政区划的影响, 即某乡 (镇) 与隶属于它的村不一定要分在同一组内; 各巡视组保持统一行动, 即不允许一个巡视组再分成若干小组等等.

二、关于问题的求解

本题的第一问, 要求设计分三组巡视时使总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线.

这里有两个目标. 若记三组的巡视路线长度从小到大分别为 C_1, C_2, C_3 , 则该两目标的数学表达式为:

$$\min(C_1 + C_2 + C_3)$$

以及

$$\min(C_3 - C_1)$$

但是这两个目标又是相互矛盾的, 也就是不可能同时达到最小. 因此具体求解时, 应两者兼顾, 用多目标的方法处理. 为简单起见, 根据实际问题灾情巡视的背景, 一种较为合理的考虑是转换成一个目标函数, 即

$$\min C_3.$$

根据前面分析, 分组巡视路线的最优解, 应当采用增广完全图上的单旅行商路线分段的方法求得. 但是根据原题图的规模以及边的稀疏性, 用这种方法处理反而将使问题变得更为复杂. 而且考虑到均衡性要求需做的调整工作也将是大量的. 因此, 可以采用先适当进行点的分组, 分别求出各组的单旅行商路线, 然后在组间进行适当调整的方法求得近似解.

对于巡视组的划分, 我们可以利用原图的最小生成树 (所选择的都是权最小边). 从县城出发的最短路生成树, 或者原图的单旅行商路线等等子图作为依据, 因为它们都是在某种指标下的最优解, 而这类指标与原题的要求又相当接近. 当然, 也可以直接利用地理位置, 射线扫描, 对边界进行合理划分后向内扩展等直观方法作近似处理.

分组以后, 由于规模较小, 最优巡视路线的设计就变得较为简单. 一般可借助现成软件求出精确解来. 即便没有这类软件, 采用近似算法或者直接搜索也都能较容易地找出很好的近似最优解.

这里提供两种近似最优解的参考答案. 前者的总路程较短但均衡性较差. 后者的均衡性相当好但总里程稍长. 假如以 $\min C_3$ 的目标来衡量, 后者是已知的最佳答案.

第一种方案:

第一组: $O - C - B - 34 - 35 - 32 - 30 - Q - 28 - Q - 29 - R - 31 - 33 - A - 1 - O$.
总里程为 153.1km.

第二组: $O - P - 26 - 27 - 26 - N - 24 - 23 - 21 - K - 22 - 17 - 16 - I - 15 - I - 18 - J - 19 - L - 20 - 25 - M - O$. 总里程 210.5km.

第三组: $O - 2 - 3 - D - 4 - 8 - E - 9 - F - 10 - F - 12 - H - 14 - 13 - G - 11 - E - 7 - 6 - 5 - 2 - O$.
总里程 210.5km.

第二种方案:

第一组: $O - 1 - B - 34 - 35 - 32 - 31 - 33 - A - R - 29 - Q - 30 - Q - 28 - 27 - 24 - 23 - N - 26 - P - O$. 总里程 197.6km.

第二组: $O - M - 25 - 20 - 21 - K - 22 - 17 - 16 - I - 13 - G - 11 - E - 8 - 4 - D - 3 - C - O$.
总里程 200.4km.

第三组: $O - 2 - 5 - 6 - L - 19 - J - 18 - I - 15 - 14 - H - 12 - F - 10 - F - 9 - E - 7 - 6 - 5 - 2 - O$.
总里程 203.5km.

综观参赛队的答卷, 三组巡视总路程和各组路程的极差大体有以下关系: 总路程约在 540~550 公里时, 极差将达到 100 公里; 总路程在 570 公里左右时, 极差约为 50 公里; 而极差在 10 公里以内时, 总路程将略超过 600 公里.

三、有时间约束的最佳路线

本题的第二问是添加了巡视组停留时间 $T = 2$ 小时, $t = 1$ 小时以及汽车行驶速度 $v = 35$ 公里/小时的条件下, 要求在 24 小时内完成巡视的最少分组数以及相应的最佳巡视路线. 第三问则是在上述时间参数条件下, 尽可能在最短时间内完成巡视所需的最少组数以及相应的巡视方案. 尽管两问形式雷同, 但却蕴含着不同的数学内涵.

在前文中我们曾经提到, 原图的单旅行商路线长度是分组巡视总路程的下界. 而已知的单旅行商路线长度均在 500 公里以上. 因此各组花在汽车行驶上的时间之和将超过 14 小时 ($35 \times 14 = 490 < 500$). 加上在各乡(镇)、村的停留时间 $m \cdot T + n \cdot t = 17 \times 2 + 35 \times 1 = 69$ (小时). (其中 m 为乡(镇)数, n 为村数). 各组所需时间之和将大于 83 小时. 若分成三组, 就不可能在 24 小时内完成巡视. 于是, 所求的最小分组数为 4.

若记 C_j 为第 j 组的巡视路线长度, m_j, n_j 分别为该组停留的乡(镇)和村数 ($j = 1, 2, 3, 4$), 则各组所花费的时间 h_j 为:

$$h_j = 2m_j + n_j + C_j/V, \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

和第一问的情况类似, 所谓最佳的要求仍然是两目标的. 即要求

$$\min(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

以及

$$\min\{\max_j h_j\}$$

假若我们仍然以后者作为主要目标来考虑,那么,乡村数的均衡性和各组路程的均衡性就依然是分组的主要依据.参照第一问解答的方法和所得的结果,并对各组的交界作适当的调整,用计算机搜索的方法容易得到较好的解.一个比较好的分组方案为:

第一组: $O - C - 3 - D - 4 - 8 - E - 9 - F - 10 - (F - 9 - E) - 7 - 6 - 5 - 2 - O$.
总路程 $C_1 = 158.8$ 公里, $m_1 = 4, n_1 = 9$; 总巡视时间为 $h_1 = 21.54$ 小时.

第二组: $O - (2 - 5 - 6) - L - 19 - J - 13 - 14 - H - 12 - G - 11 - (J - 19) - 20 - 25 - M - O$.
 $C_2 = 176.3\text{km}, m_2 = 5, n_2 = 7; h_2 = 22.04$ 小时.

第三组: $O - (P) - 28 - 27 - 24 - 23 - 22 - 17 - 16 - I - 15 - (I) - 18 - K - 21 - (23) - N - 26 - (P) - O$. $C_3 = 180.3\text{km}, m_3 = 3, n_3 = 11; h_3 = 22.15$ 小时.

第四组: $O - 1 - B - 34 - 35 - 32 - 30 - Q - 29 - R - 31 - 33 - A - (1 - O) - P - O$.
 $C_4 = 146.1\text{km}, m_4 = 5, n_4 = 8; h_4 = 22.17$ 小时.

(以上各组巡视路线中括号的点为只经过不停留的点).各组的巡视时间均在 22 小时左右,极差仅 0.23 小时.以 $\min\{\max_j h_j\}$ 为标准而言,是已知的最好方案之一.一般来说,较好的参赛文章都能得到分四组,且四组巡视时间总和在 87—88 小时之间,偏差又较小的方案.

问题的第三问是在上述时间参数假设下,如果有足够多的巡视人员,要求出完成巡视的最短时间,并给出在最短时间限制下的最佳巡视路线.

事实上,完成巡视的最短时间受到单独巡视离县城最远的乡(镇)所需时间的制约.采用图上求最短路径的 Dijkstra 算法,可以求得从县城到各点的距离.离县城最远的乡为 H 点,距离为 77.5 公里.因此,单独巡视该乡所需时间为 $h_H = \frac{77.5 \times 2}{35} + 2 = 6.43$ 小时.(离县城最远的村为 14,若单独巡视所需时间要小得多).即使人员足够多,分组再细,完成巡视至少需要 6.43 小时.于是,问题便成为在 6.43 小时内完成巡视所需的最少分组数和巡视方案.

容易验证,要在 6.43 小时内完成巡视,有些点(如 I, J, H)只能单独作为一组,时间不允许在别的乡村停留.而绝大部分乡村可以和其它乡村分在同一组内,并在限定时间内完成巡视.

我们把能够放在同一组内巡视的乡村称为一个可行集.这种可行集是原图点集 V 的一个子集.显然,原题所求的最少分组数便是点集的可行集最小复盖问题.同旅行商问题一样,子集复盖问题也属 NP-完全类.因此,求该问题的最优解也是在短时间内做不到的.采用计算机作近似搜索仍不失为较常用的办法.关于该问题的研究,本刊同期发表的华东理工大学俞文颢教授的文章有详细讨论.他的文章还证明了本题的最小复盖数为 22.

参照点在图中从县城出发的最短路树上的位置,采用就近归组的搜索方法,容易得到最优解 22 组的分组方法及相应的巡视路线.这里不一一列举了.

在阅卷中发现,有个别的参赛队,找到了一种分成 21 个组的方案,并且指明尽管其中有两组的巡视时间超过了最短时间的要求,但因为超出时间不长(小于 0.1 小时),考虑到问题的实际背景,用两个小组几分钟时间的代价换取了节省一个组的人力物力的效果.我们认为,就数学建模竞赛的本意而言,这些同学的构思是可取的.

四、关于 T 、 t 、 V 的讨论

本题第四问要求在巡视组数已定的情况下尽快完成巡视,讨论参数 T 、 t 和 V 的改变对最佳巡视路线的影响.

前面我们已经提到,要尽快完成巡视,即要求各组巡视时间的最大值也要最小.用数学式子

表示就是:

$$\min\{\max_j h_j\} = \min\left\{\max_{1 \leq j \leq k} \left(m_j \times T + n_j \times t + \frac{C_j}{V}\right)\right\}$$

这里 k 是给定的分组数. m_j, n_j 分别是第 j 组停留的乡(镇)数和村数, C_j 是第 j 组巡视路线的长度. ($j = 1, 2, \dots, k$).

在上述 h_j 的表达式中, 由于 T 和 t 的作用完全相仿, 所以为简化讨论起见, 对于任意给定的 T 和 t , 不妨记 $p = T/t$, 即 $T = pt$. 这里 h_j 可简记为:

$$h_j = (p \cdot m_j + n_j) \cdot t + \frac{C_j}{V}.$$

它是 t 和 $\frac{1}{V}$ 的线性函数, 将随着 t 和 $\frac{1}{V}$ 的增大 (即 V 的减小) 而增大. 于是我们容易得到以下结论:

1° 若 t 增大而 V 不变. 为了使 h_j 的最大值尽可能小, 就要求 $pm_j + n_j$ 的最大值尽可能小. 但是当 T 和 t 的关系确定后, $\sum_j (pm_j + n_j)$ 是定值 ($= p \cdot m + n$, 其中 m 是全县的乡(镇)数 17, n 是全县的村数 35.) 上述要求就成为各组停留乡村数 (加权以后之和) 尽可能均匀. 用数学式子表示即为:

$$\left\lfloor \frac{pm + n}{k} \right\rfloor \leq pm_j + n_j \leq \left\lceil \frac{pm + n}{k} \right\rceil$$

这里 $\lfloor a \rfloor$ 和 $\lceil a \rceil$ 分别表示数 a 的下整数和上整数. 当然, 在调整各组停留的乡村数使之达到均衡时, 自然会给各组的路线及其长度带来影响. 这时应当考虑进行适当调整.

2° 若 t 不变而 V 增大. 这种情况下, 在 h_j 中可能导致 C_j/V 起主导作用. 那么, 和 1° 的结论类似, 我们更应使 C_j 即各组的巡视路线尽可能均衡. 诚然, 因为 $\sum C_j$ 不是常数, 而且 C_j 的均衡性会带来 $\sum C_j$ 的增大, 这对于尽快完成巡视会带来负面影响. 所以对具体情况应作具体分析, 比如可以考虑 h_j 的前半部份 $(pm_j + n_j) \cdot t$ 对均衡性的修正, 对路程较长的组尽量考虑停留较少乡村.

至于, t 和 V 的交互作用, 对于这样一个原本很难得到最优解的离散最优化问题来说, 将变得更为复杂. 这里就不再进一步讨论了.

The Optimal Routes for the Disaster Inspection

DING SONG-KANG

(Shanghai Maritime University, Shanghai 200135)

多旅行商路线的几个问题*

俞文觐

(上海华东理工大学应用数学研究所 200237)

摘 要 本文对 98B 题 (全国大学生数学建模竞赛) 的几个较为深入的问题进行讨论, 包括: 最小的 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系, 目标函数的处理, 最小组数问题. 特别, 对于 98B 题第三小题, 22 组是否为最小组数, 我们给出了肯定的结论.

旅行商问题是运筹学中的一个典型问题, 多旅行商问题是它的扩充, 它可应用于车辆路线组织, 作业调度等方面^[1], 全国大学生数学建模竞赛 98B 题正是这样一类问题. 一般来说, 这类问题不存在好算法. 由于实际要求的不同, 这类问题中的目标函数与约束条件又可以有多种形式, 这样, 结合具体问题的特殊性, 进行较为深入的讨论, 仍然是可能的.

本文对 98B 题的几个较为深入的问题进行讨论. 在 §1, 我们讨论无向图上最小 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系, 指出二者何时相同、何时可能不相同的一些判断. 在 §2, 针对 98B 中的目标函数的处理, 讨论如何将双目标化为单目标的问题, 以及如何把点权化为边权的问题. 我们在 §3 讨论, 在给定的时间下, 如何确定最小组数的问题. 特别, 98B 题第三小题中, 当给定时间限定为 6.4286(小时), 可断言 22 组是最小组数, 也就是说, 21 组是不可行的, 对此, 我们在 §4 介绍了集合覆盖问题, 在 §5 讨论了有关 98B 题第三小题的性质, 最后在 §6 给出证明.

为节省篇幅, 我们对 98B 题不再复述, 因为在本期杂志的若干文章中均有叙述. 98B 题的图形亦略, 但有关数据列在附录中, 以保持本文的完整性.

§1 最小 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系

我们限于讨论无向图的情形.

给定一个连通图 $G = (V, E, w)$, 其中 V 为顶点集, E 为边集, w 为定义在 E 上的权 (非负). G 的一个 Hamilton 回路是顶点集上的一个循环排列 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \sigma_{n+1}$ ($\sigma_{n+1} = \sigma_1$), 其中一切 $\sigma_i \sigma_{i+1} \in E$, $w(\sigma)$ 定义为 σ 上所有边权之和. 当 $w(\sigma)$ 达到最小, σ 称为最小 Hamilton 回路. G 的一个旅行商路线是顶点集 V 的可重复但不遗漏的一个循环排列, 多旅行商路线则是顶点集 V 的可重复但总体上不遗漏的多个循环排列, 其余有关概念类同于 Hamilton 回路.

对于 G 为完全图的情形, 不难得到以下二个结论^[2].

结论 1 如果完全图 $G = (V, E, w)$ 的权不受限制, 那么存在例子使得: G 的最小 Hamilton 回路不是 G 的最优旅行商路线.

结论 2 如果完全图 $G = (V, E, w)$ 的权满足三角形不等式:

$$\forall i, j, k \in V, \quad w_{i,k} \leq w_{i,j} + w_{j,k}, \quad (1.1)$$

那么 G 的最小 Hamilton 回路必是 G 的最优旅行商路线.

对于 G 为连通但不是完全图的情形, 容易注意到: G 可能不存在 Hamilton 回路, 这时也就不存在最小 Hamilton 回路; 还可以想到: G 的最优旅行商路线可到完全图 G' 上去找, 这个完全

*“优化理论与算法”为国家自然科学基金资助项目.

图 $G' = (V, E', w')$, 其中边集 E' 包含 V 的一切点对, 而 $w'_{i,j}$ 定义为 G 上顶点 i 与顶点 j 之间的距离 (最短路长度), 它必定满足三角形不等式.

结论 3 连通图 $G = (V, E, w)$ 所相应的完全图 $G' = (V, E', w')$ 的最小 Hamilton 回路 H' 必定给出 G 的最优旅行商路线, 其中 H' 中的边用 G 中的最短路 (其两端点与该边的二端点相同) 来代替.

结论 3 具有直观解释, 它可用反证法加以证明.

从 98B 题的竞赛答案来看, 不少答卷提到上述结论 2 与结论 3, 但是在叙述结论 2 时, 一些答卷未指明这一结论只适用于完全图, 在叙述结论 3 时, 一些答卷也未强调 G 与 G' 的差别. 这样, 也就产生了一个疑问: 结论 2 能否推广到非完全图呢? 这时, 相应于三角形不等式 (1.1) 的条件要变为:

对任 $(i, k) \in E$ 及从 i 至 k 的任一条路 P ,

$$w_{i,k} \leq \sum_{(j,l) \in P} w_{j,l}. \quad (1.2)$$

也就是说, 对任 $(i, k) \in E$, $w_{i,k}$ 恰等于 $G = (V, E, w)$ 中顶点 i 与 k 之间的最短路长. 对于上述疑问的结论如下:

结论 4 有例子表明, 即使 $G = (V, E, w)$ 满足 (1.2) 且存在 Hamilton 回路, 但 G 的最小 Hamilton 回路不是 G 的最优旅行商路线.

证 如图 1, $G = (V, E, w)$, V 由 10 个顶点组成, 而 E 由 13 条边组成, 权 $w_{i,j}$ 分别标出在每一条边旁, 其中 x 大于 1. 显然, 对此图 G , (1.2) 是成立的. 图 G 有唯一的 Hamilton 回路 ABCDEFGHIA, 其长度 (即最小的 Hamilton 回路长度) 为

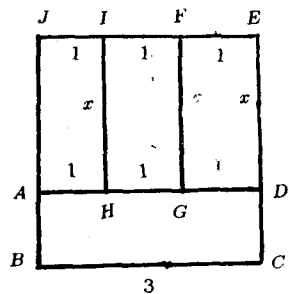


图 1

$$l_1 = 8 + 4x. \quad (1.3)$$

但图 G 的旅行商路线 ABAHGDCDEFIJA 的长度为

$$l_2 = 10 + 2x. \quad (1.4)$$

由于 $x > 1$, 必有 $l_2 < l_1$, 这样就得到了结论 4. 证毕

尚待研究的问题是, 对满足 (1.2) 且存在 Hamilton 回路的图, 再增加什么合理的条件, 可保证 G 的最小 Hamilton 回路必是最优旅行商路线呢?

§2 关于目标函数的处理

在 98B 题第一小题中, 要求设计三组“总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线”. 以 C_1, C_2, C_3 表示三组巡视路线的长度, 上述要求可表示为如下双目标函数的优化:

$$\min (C_1 + C_2 + C_3), \quad \min \left(\max_{1 \leq i \leq 3} C_i - \min_{1 \leq i \leq 3} C_i \right).$$

从问题的实际背景出发, 可考虑替代为下列目标函数的优化:

$$\min \max_{1 \leq i \leq 3} C_i. \quad (2.1)$$

它与上述双目标在含义上有一致的地方, 但不尽相同.

在 98B 题第二小题中, 容易确定最小组数为 4 (参见本文 §3). 在 98B 题中已将 35 个村编号为从 1 到 35, 现再将 17 个乡的字母编号依次改为从 36 至 52, 将县城编号为 53, 引入点权 (顶点上的权) 如下:

$$v_i = 35 \quad (1 \leq i \leq 35), \quad v_i = 70 \quad (36 \leq i \leq 52), \quad v_{53} = 0, \quad (2.2)$$

其中已将在村与乡的巡视时间依照汽车行驶速度 (35 公里 / 小时) 化成了公里数. 以 $G = (V, E, w)$ 表示 98B 题的图, 以 $G' = (V, E', w')$ 表示相应的完全图 (w' 表示任二点之间的距离), 以 H_1, H_2, H_3, H_4 表示 G' 上的 4 个旅行商路线, 其全体能覆盖 V , 且每个 H_i 均包含顶点 53 (县城). 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 令

$$C_i = \sum_{(j,k) \in H_i} w'_{j,k}, \quad D_i = \sum_{j \in H_i} v_j.$$

类似于 (2.1), 对 98B 题第二小题, 可考虑 $G' = (V, E', w')$ 上列目标函数的优化:

$$\min \max_{1 \leq i \leq 4} (C_i + D_i). \quad (2.3)$$

但是, (2.3) 与 (2.1) 的区别是明显的, (2.1) 中的目标函数含有边权, 而 (2.3) 中的目标函数兼含边权与点权. 为了把 (2.3) 转换为与 (2.1) 相同的形式, 引入另一完全图 $G'' = (V, E', w'')$, 其中

$$\forall (j, k) \in E', \quad w''_{j,k} = w'_{j,k} + \frac{1}{2}v_j + \frac{1}{2}v_k \quad (2.4)$$

易知, 边权 w'' 仍满足三角形不等式. 这样, 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 令

$$C''_i = \sum_{(j,k) \in H_i} w''_{j,k},$$

利用 (2.4) 容易证明, 必成立 $C''_i = C_i + D_i$. 从而, 可以得到下列优化问题

$$\min \max_{1 \leq i \leq 4} C''_i. \quad (2.5)$$

结论 5 $G' = (V, E', w')$ 上的优化问题 (2.3) 等价于 $G'' = (V, E', w'')$ 上的优化问题 (2.5), 其中权边权 w'' 由 (2.4) 给出.

结论 5 的意义在于, G' 上的边权与点权都化成了 G'' 的边权, 从而使第二小题的问题与第一小题的问题 (2.1) 成为相同的形式 (只是组数不同), 它们可采用相同的近似算法来处理. 我们发现, 在 98B 题的个别答卷, 提到过把点权化为边权的思想, 但要把这一思想明确地形成一个结论, 还需联系到目标函数的具体形式, 以上讨论了单目标函数 $\max C_i$ 的情形, 对前述双目标的情形和下一节的最小组数问题, 讨论是类似的.

§3 最小组数问题

给定长度约束, 求解多旅行商路线的最小组数, 是一个有现实意义的重要问题. 98B 题中第二小题与第三小题均涉及这样的问题. 用 §2 中的记号, 它可以表示成如下形式. 给定一个连通图 $G = (V, E, w)$ (98B 题的相应数据见附录), 求相应的完全图 $G' = (V, E', w')$ 上多旅行商路线 H_i ($i = 1, 2, \dots, r$), 使其全体能覆盖 V , 其每一个旅行商路线均含有顶点 53 (县城), 且达到:

$$\min r, \quad (3.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in H_i} v_j + \sum_{(j,l) \in H_i} w'_{j,l} \leq L, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (3.2)$$

其中 v_j 为点权, L 为给定的长度上限.

一般来说, 求解最小组数问题 (3.1)–(3.2), 或者说, 要确定最小组数 r , 包括两个方面, 一方面, 要构造 G' 的 r 个旅行商路线, 满足相应的长度约束, 另一方面, 要证明 r 是组数的下界, 即证明 $r-1$ 组是不可行的.

对 98B 第二小题来说, 问题 (3.1)–(3.2) 中的长度上界 L 为 840 公里, 相应的时间上界为 24 小时. 给出 4 组可行的旅行商路线是不困难的, 多数答卷都能做到, 但要证明 4 组是一个下界, 不少答卷都做得不好, 只有少数试卷给出了简洁的论证. 以下是一个这样的论证. 假如 3 组可行的旅行商路线能符合长度约束或相应的时间约束, 由于从县城至所有点 (村或乡) 的距离的最大值为 $d = 77.5$ (公里), 而 $2d$ 是 G' 的多旅行商问题的一个简单下界, 这样, 由 (3.2) 可得:

$$3 \cdot 840 \geq \sum_{i=1}^{52} v_i + 2d = 69 \times 35 + 155 = 2570,$$

便得矛盾.

对于一般的长度上界 L (相应的时间上界为 $T = L/35$), 最小组数问题 (3.1)–(3.2) 的解答会是相当困难的, 计算量也会很大. 对 98B 第三小题来说, 问题 (3.1)–(3.2) 中的长度上界 L 为 225 公里, 它相当于时间上界 6.4286 小时. 很多答卷给出 23 组可行的旅行商路线, 不少答卷给出 22 组可行的旅行商路线, 但 22 组是否为最小组数呢? 对此, 未发现有一个答卷能够给出正确的论证. 当然, 这与答卷时间有限也是有关的. 我们将在 §5 与 §6 中证明下列结论.

结论 6 当 $L = 225$ 时, 最小组数问题 (3.1)–(3.2) 具有下界 $r = 22$.

§4 集合覆盖问题及其下界

为证明结论 6 做准备, 我们在本节叙述集合覆盖问题的概念及关于下界的一个结论. 集合覆盖问题的提法如下:

给定集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个子集族 F , 在 F 中寻找最小个数 (称最小覆盖数) 的子集族 $F' \subseteq F$, 使得 N 的每一个元素至少属于 F' 中的一个子集.

在计算复杂性理论中, 该问题是一个 NP 困难问题. 同时, 对于一般情况, 也很难得到什么结论. 为了得到有用的结论, 我们对 N 与 F 的形式做出一些限制.

假设 1 对任何 $S \in F$, S 的子集亦属于 F .

假设 2 记 F_j 为子集族 F 中元素个数为 j 的那些子集组成的族, 假设成立

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4.$$

假设 3 设 $N = A \cup B$, 记 $F_{j,l}$ 为子集族 F 中 A 元素个数为 j 、 B 元素个数为 l 的那些子集组成的族, 假设成立

$$F_3 = F_{3,0} \cup F_{2,1} \cup F_{1,2}, \quad F_4 = F_{4,0} \cup F_{3,1}. \quad (4.1)$$

上述二个假设等价于

$$F_5 = \emptyset, \quad F_{0,3} = \emptyset, \quad F_{2,2} = F_{1,3} = F_{0,4} = \emptyset.$$

这表明, 比起 A 中的元素来说, B 中的元素的“权”较重, 从而, F_3 中没有 3 元素皆属于 B 的三点子集, F_4 也有类似的性质.

结论 7 若 N 的子集族 F 满足假设 1–3, 设 $|N| = n$, $|B| = b$, 又 $F_{1,2} \cup F_{3,1}$ 的最大分离子集数为 q , 则集合覆盖问题的最小覆盖数 r 满足:

$$r \geq \lceil (n + b - q)/4 \rceil.$$

该结论的证明从略, 有兴趣的读者可以自己研究.

该结论给出了最小覆盖数的一个下界, 它特别适合于 $F_{1,2}$ 与 $F_{3,1}$ 所含子集个数较少的情形. 此外, 在有关假设满足时, 另有二个明显的下界 $\lceil n/4 \rceil$ 与 $\lceil b/2 \rceil$.

§5 合格组的一些性质

首先, 简述一下 §2 中提到过的顶点编号. 顶点集 N 分为 A (村) 与 B (乡), 其中

$$A = \{1, 2, \dots, 35\}, \quad B = \{36, 37, \dots, 52\}$$

与最小组数问题 (3.1)–(3.2) 相一致, 根据 98B 第三小题的要求, 我们引入下列定义.

定义 1 $N = A \cup B$ 的一个子集 S 称为合格组, 如果

$$\sum_{j \in S} v_j + \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq 225, \quad (5.1)$$

其中点权 v_i 由 (2.2) 给出, $\text{LTSP}(\cdot)$ 表示这些点的旅行商路线的最优长度.

这样, 每个合格组确定了一个可行的旅行商路线, 98B 题第三小题中的要求就是要确定寻找组数最少的合格组, 使其全体能覆盖所有村与乡.

合格组的全体构成 N 的子集族 F . 如前, 以 F_j 表点数为 j 的合格组的全体. 经过计算与分析, 我们得到:

$$|F_1| = 52, \quad (5.2)$$

$$|F_2| = 795, \quad (5.3)$$

$$|F_3| = 1354, \quad (5.4)$$

$$|F_4| = 58, \quad (5.5)$$

$$|F_5| = 0, \quad (5.6)$$

现对上述诸式作简要的说明如下. (5.1) 右端 225(公里) 相当于时间上界 6.4286 小时, 它恰是 $v_j + \text{LTSP}(\{j, 53\})$ 对一切 j 的最大值, 所以每一个点(村或乡)均是一个合格组, 因此显然成立 (5.2). (5.3) 与 (5.4) 可通过穷举法算得. 为了较快地确定 F_4 , 即确定一切 4 点合格组, 可考虑 F_3 中哪些 3 点合格组可以扩充, 例如, 假如 3 点合格组 $\{i, j, k\}$ 能扩充为 4 点合格组, 它至少应满足

$$\sum_{j \in S} v_j + \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq 190,$$

即它至少有松弛量 35(公里), 相当于 1 小时. 同时, 假如它扩充为 4 点合格组 $\{i, j, k, l\}$, 那么还应有 $\{i, j, l\} \in F_3$, $\{i, k, l\} \in F_3$, $\{j, k, l\} \in F_3$. 这样, 4 点合格组的候选者就少得多了, 从而 F_4 可以较快地计算出来, 便得 (5.5). 当然, 以上 F_2, F_3, F_4 的计算都要借助于计算机来完成.

下面, 我们证明 (5.6). 不然的话, 设存在 5 点合格组 $S = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$. 由点权 (2.2) 及定义 1, S 中至多一个点为 B 的点(乡). 假如 S 中确有一个点为 B 的点, S 中点权之和为 210, 于是对 $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 有

$$w'(k_i, 53) \leq \frac{1}{2} \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq \frac{1}{2} (225 - 210) = 7.5, \quad (5.7)$$

其中 $w'(i, j) = w'_{i,j}$ 表示点 i 与点 j 之间的距离. 容易检验, 满足 (5.7) 的只有一个点 (点 1), 不可能有 5 个点, 便得矛盾. 假如 S 中所有点为 A 的点, S 中点权之和为 175, 于是对 $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 有

$$w'(k_i, 53) \leq \frac{1}{2} \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq \frac{1}{2}(225 - 175) = 25. \quad (5.8)$$

同样, 对 $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ($i \neq j$), 有

$$w'(k_i, k_j) \leq \frac{1}{2} \text{LTSP}(S \cup \{53\}) \leq 25. \quad (5.9)$$

容易检验, A 中点满足 (5.8) 的有 9 个, 其全体记为 $A^* = \{1, 2, 3, 5, 26, 28, 29, 31, 33\}$. 也容易检验, 只有 A^* 中的点 $k_i = 1$, 存在 A^* 中其他四个点 k_j 能满足 (5.9). 但 (5.9) 要求这样的点 k_i 有 5 个, 所以亦得矛盾.

如前, 以 $F_{j,l}$ 表示 A 中点数为 j , B 中点数为 l 的合格组的全体. 用 (5.6) 的推理过程同样可证明

$$|F_{0,3}| = |F_{2,2}| = 0, \quad (5.10)$$

从而更有 $F_{1,3} = F_{0,4} = \emptyset$. 由 (5.1) 所确定的合格组构成的子集族 F 满足假设 1, 是显然的. (5.6) 与 (5.11) 表明 F 满足假设 2--3. 根据计算, $F_{1,2} \cup F_{3,1}$ 包含下列 15 个合格组:

$$\begin{aligned} &\{1, 36, 37\}, \quad \{1, 36, 38\}, \quad \{1, 36, 52\}, \quad \{1, 37, 38\}, \quad \{1, 37, 50\}, \\ &\{1, 37, 52\}, \quad \{1, 38, 50\}, \quad \{2, 37, 38\}, \quad \{2, 38, 39\}, \quad \{3, 37, 38\}, \\ &\{3, 38, 39\}, \quad \{29, 50, 52\}, \quad \{1, 2, 3, 37\}, \quad \{1, 2, 3, 38\}, \quad \{2, 3, 5, 38\}. \end{aligned}$$

由于上述 15 个合格组只涉及 11 个点, 而上述每个合格组为 3 点或 4 点, 所以 $F_{1,2} \cup F_{3,1}$ 至多有 3 个分离的合格组. 通过简单列举, 可知 $F_{1,2} \cup F_{3,1}$ 的最大分离合格组个数为

$$q = 3. \quad (5.11)$$

§6 结论 6 的证明

由 $|N| = 52$, $|b| = 17$ 及 (5.11), 根据结论 7 可算得复盖 N 的最小组数的一个下界为 $\lceil (|N| + |B| - q)/4 \rceil = \lceil 66/4 \rceil = 17$, 但它与结论 6 (22 组为下界) 相去甚远. 因此, 我们还要讨论子集族 F 的更多性质, 以发掘与利用覆盖 N 的合格组的结构.

以 $F_j(k)$ 表示 F_j 中含有点 k 的合格组的全体 (也是子集族), 类似地引入记号 $F_{j,l}(k)$. 对计算结果进行检验, 根据 $F_2(k) = \emptyset$ 等要求可以发现 N 的下列子集:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{42, 43, 44\}, & A_1 &= \{10, 12, 13, 14, 15, 16\}, \\ B_2 &= \{41, 45, 46\}, & A_2 &= \{8, 9, 11, 17, 18, 19, 22, 24\}. \end{aligned}$$

它们分别具有下列性质:

$$\forall k \in B_1, \quad F_2(k) = \emptyset, \quad (6.1)$$

$$\forall k \in A_1, \quad F_{1,1}(k) = \emptyset, \quad F_3(k) = \emptyset, \quad (6.2)$$

$$\forall k \in B_2, \quad F_{0,2}(k) = \emptyset, \quad F_3(k) = \emptyset, \quad (6.3)$$

$$\forall k \in A_2, \quad F_{1,2}(k) = F_{2,1}(k) = \emptyset, \quad F_{3,0} \neq \emptyset, \quad F_4(k) = \emptyset. \quad (6.4)$$

设 $T = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ 由 r 个合格组组成, 它能覆盖点集 $N = A \cup B$. 由于满足假设 1, 可设不同合格组是互相分离的. 由性质 (6.1), T 必含有 3 个单点合格组, 不妨设

$$S_1 = \{42\}, \quad S_2 = \{43\}, \quad S_3 = \{44\}.$$

由性质 (6.2)–(6.3), 覆盖 $A_1 \cup B_2$ 的必是两点合格组. 进一步, 可以发现, 二点均在 $A_1 \cup B_2$ 中的二点合格组只有 4 个, 更具体地说, 有

$$F'_2 = F_2 \cap (A_1 \cup B_2)^2 = \{\{12, 13\}, \{13, 14\}, \{13, 16\}, \{15, 16\}\}. \quad (6.5)$$

由 (6.5) 易知 F'_2 中分离的 2 点合格组至多有 2 个, 因此只可能有以下三个情形:

情形 1 $|T \cap F'_2| = 2$; **情形 2** $|T \cap F'_2| = 1$; **情形 3** $|T \cap F'_2| = 0$.

以情形 1 来分析, 其它二情形的分析是类似的. 在情形 1, $T \cap F'_2$ 的二个 2 点合格组能覆盖 $A_1 \cup B_2$ 中的 4 个点, T 必还有 5 个合格组覆盖 $A_1 \cup B_2$ 的另外 5 个点. 由于 (6.2)–(6.3), 这 5 个合格组必定皆为 2 点合格组, 它们的全体亦覆盖 $A_1 \cup B_2$ 之外的 5 个点 i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 , 且这 5 个点皆属于 A (即不能属于 B). 现不妨设覆盖 $A_1 \cup B_2$ 的 7 个 2 点合格组为 S_4, S_5, \dots, S_{10} , 且令

$$T_1 = \{S_{11}, S_{12}, \dots, S_r\}, \quad (6.6)$$

$$N_1 = N \setminus (B_1 \cup A_1 \cup B_2 \cup \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}). \quad (6.7)$$

于是, T_1 覆盖 N_1 . 经计算可检验如下性质: A_2 的任三点不能组成一个合格组, 即

$$F_3 \cap (A_2 \times A_2 \times A_2) = \emptyset. \quad (6.8)$$

由于 $|A_2| = 8$, $A'_2 = A_2 \setminus \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ 至少有 3 个点. 同时, (6.8) 保证这 3 个点至少属于二个合格组. 因此, 不妨设 $i_6 \in A'_2 \cap S_{11}$, $i_7 \in A'_2 \cap S_{12}$. 由 (6.4), 可分以下情形:

情形 1.1 $|S_{11}| = |S_{12}| = 3$; **情形 1.2** $|S_{11}| \leq 2$ 或 $|S_{12}| \leq 2$.

其实, 情形 1.2 又可分成若干情形. 现只分析情形 1.1, 因其他情形亦类似. 分析的整个思路可参见图 2. 不妨设

$$S_{11} = \{i_6, i_8, i_9\} \in F_{3,0}, \quad S_{12} = \{i_7, i_{10}, i_{11}\} \in F_{3,0}.$$

接着 (6.6)–(6.7), 令

$$T_2 = T_1 \setminus \{S_{11}, S_{12}\} = \{S_{13}, S_{14}, \dots, S_r\},$$

$$N_2 = N_1 \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{11}\} = A' \cup B',$$

其中 $A' \subset A$, $B' \subset B$. 实际上,

$$A' = A \setminus (A_1 \cup \{i_1, i_2, \dots, i_{11}\}),$$

$$B' = B \setminus (B_1 \cup B_2).$$

$$\text{所以 } |A'| = 35 - 17 = 18,$$

$$|B'| = 17 - 6 = 11,$$

$$|N_2| = 29.$$

由于 T_2 覆盖 N_2 , 根据结论 7 与 (5.10), 可得 T_2 中组数的下界如下:

$$r - 12 \geq \lceil (29 + 11 - 3)/4 \rceil = \lceil 37/4 \rceil = 10.$$

所以 $r \geq 22$. 结论 6 证毕.

注 如果要校核上述证明中的计算是否正确, 实际上不必要算出 F_2, F_3, F_4 的全部合格组 (见 (5.3)–(5.5)), 而只需校核对推理过程起作用的以下内容: (4.1), (5.11), (6.1)–(6.4) 以及 (6.8).

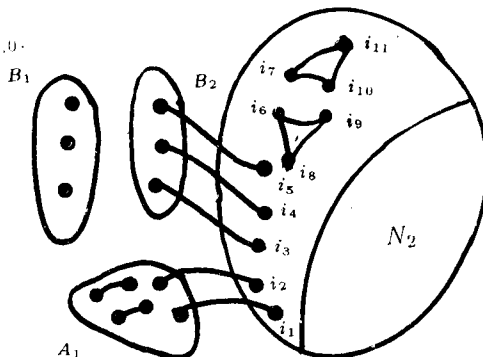


图 2

附 录

98B 题的图形所相应的图 $G = (V, E, w)$ 的有关数据如下, 以备必要时可复算. $w(32, 33) = 19$ 不满足三角形不等式 (1.2), 该值被略去.

$w(53, 1) = 6,$	$w(53, 2) = 9.2,$	$w(53, 38) = 11.5,$	$w(53, 48) = 19.8,$
$w(53, 50) = 10.1,$	$w(53, 52) = 12.9,$	$w(1, 36) = 10.3,$	$w(1, 37) = 5.9,$
$w(1, 38) = 11.2,$	$w(2, 3) = 4.8,$	$w(2, 5) = 8.3,$	$w(3, 38) = 7.9,$
$w(3, 39) = 8.2,$	$w(4, 8) = 20.4,$	$w(4, 39) = 12.7,$	$w(5, 6) = 9.7,$
$w(5, 39) = 11.3,$	$w(5, 48) = 11.4,$	$w(6, 7) = 7.3,$	$w(6, 47) = 11.8,$
$w(6, 48) = 9.5,$	$w(7, 39) = 15.1,$	$w(7, 40) = 7.2,$	$w(7, 47) = 14.5,$
$w(8, 40) = 8,$	$w(9, 40) = 7.8,$	$w(9, 41) = 5.6,$	$w(10, 41) = 10.8,$
$w(11, 40) = 14.2,$	$w(11, 42) = 6.8,$	$w(11, 45) = 13.2,$	$w(12, 41) = 12.2,$
$w(12, 42) = 7.8,$	$w(12, 43) = 10.2,$	$w(13, 14) = 8.6,$	$w(13, 42) = 8.6,$
$w(13, 44) = 16.4,$	$w(13, 45) = 9.8,$	$w(14, 15) = 15,$	$w(14, 43) = 9.9,$
$w(15, 44) = 8.8,$	$w(16, 17) = 6.8,$	$w(16, 44) = 11.8,$	$w(17, 22) = 6.7,$
$w(17, 46) = 9.8,$	$w(18, 44) = 8.2,$	$w(18, 45) = 8.2,$	$w(18, 46) = 9.2,$
$w(19, 20) = 9.3,$	$w(19, 45) = 8.1,$	$w(19, 46) = 7.2,$	$w(20, 21) = 7.9,$
$w(20, 25) = 6.5,$	$w(20, 47) = 5.5,$	$w(21, 23) = 9.1,$	$w(21, 25) = 7.8,$
$w(21, 46) = 4.1,$	$w(22, 23) = 10,$	$w(22, 46) = 10.1,$	$w(23, 24) = 8.9,$
$w(23, 49) = 7.9,$	$w(24, 27) = 18.8,$	$w(24, 49) = 13.2,$	$w(25, 48) = 12,$
$w(25, 49) = 8.8,$	$w(26, 27) = 7.8,$	$w(26, 49) = 10.5,$	$w(26, 50) = 10.5,$
$w(27, 28) = 7.9,$	$w(28, 50) = 12.1,$	$w(28, 51) = 8.3,$	$w(29, 50) = 15.2,$
$w(29, 51) = 7.2,$	$w(29, 52) = 7.9,$	$w(30, 32) = 10.3,$	$w(30, 51) = 7.7,$
$w(31, 32) = 8.1,$	$w(31, 33) = 7.3,$	$w(31, 52) = 9.2,$	$w(32, 35) = 14.9,$
$w(33, 35) = 20.3,$	$w(33, 36) = 7.4,$	$w(34, 35) = 8.2,$	$w(34, 36) = 11.5,$
$w(34, 37) = 17.6,$	$w(36, 37) = 12.2,$	$w(36, 52) = 8.8,$	$w(37, 38) = 11,$
$w(44, 45) = 15.8,$	$w(48, 49) = 14.2,$		

参 考 文 献

- [1] 杜端甫, 运筹图论, 北京航空航天大学出版社, 北京, 1994.
 [2] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys, The Traveling Salesman Problem, Wileys, Chichester, 1995.

Some Problems on Multiple Traveling Salesman Routes

YU WEN-CI

(East China University of Science and Technology, Shanghai 200237)

灾情巡视路线最优解的证明

张建新¹

(沙洲工学院, 张家港 215600)

编者按 本文对问题三的分析有独特之处, 证明正确且较朴实, 特予发表.

摘要 本文对灾情巡视路线中的问题三, 从理论上证明了完成巡视至少要分 22 组, 并给出一个分 22 组总巡视时间为 130.578 小时的方案.

问题三 在 $T = 2$ 小时, $t = 1$ 小时, $v = 35$ 公里 / 小时的假定下, 如果巡视人员足够多, 完成巡视的最小时间是多少? 并给出此时间限定下的最佳巡视路线.

分析 在 T, t 和 v 的值固定不变, 巡视人员足够多的条件下, 我们先假设每个巡视组只负责一个乡 (镇) 或村. 此种情况下, 完成巡视最短时间就等于按最短路线各乡 (镇)、村完成巡视任务所用时间最多的一个, 即为:

$$\max_i \left(\frac{2d_{iO}}{v} + T_i \right)$$

其中 d_{iO} 为 i 点到 O 点的最短距离 ($i = 1, 2, \dots, 35, A, B, \dots, N, P, Q, R$), T_i 为巡视 i 点时所停留的时间, 即

$$T_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq 35, \\ 2, & (i = A, B, \dots, N, P, Q, R) \end{cases}$$

显然这也是在组数少于 52 的情况下最短巡视时间的下界.

为了证明下面定理, 首先用 Dijkstra 算法求出所有点与 O 点之间的最短距离, 并计算出在最短路径上所花费的时间, 见下表 1 (也可用手工求解).

定理 1 如果巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间为 $45/7$ 小时.

证 由表 1 知, 按最短路径, H 点是距县政府 (O) 所在地最远的乡 (镇)、村, 即 $\max[d_{iO} = d_{HO} = 77.5 \text{ 公里}]$, 又因为 $\sum_i (T_i) = 2 = T_H$, 所以 $\max_i \left(\frac{2d_{iO}}{v} + T_i \right) = \frac{2d_{HO}}{v} + T_H = 2 \times 77.5/35 + 2 = 45/7$ 小时.

定理 2 若要在 $45/7$ 小时内完成巡视, 至少需 22 组.

为了证明此定理, 首先引入下列结论.

结论 1 在乡 (镇)、村总停留时间大于 2 小时的任一巡视回路中一定不能含有 H, G, I 三个乡 (镇) 和 14, 15, 12, 10, 13, 16 六个村.

证 假设一巡视回路在乡 (镇)、村总停留时间大于 2 小时, 则在路上所花时间应小于 $6.4286 - 3 = 3.4286$ 小时, 县城至回路中任一乡 (镇)、村的最短路所花时间应小于 $3.4286/2 = 1.7143$ 小时, 结合表 1 可知 H, G, I 三个乡 (镇) 和 14, 15, 12, 10, 13, 16 六个村不满足条件.

结论 2 在乡 (镇)、村总停留时间大于 3 小时的任一巡视回路中一定不能含有 F, J, K 三个乡 (镇) 和 11, 17, 18, 8, 9, 22, 19, 24 八个村.

证 假设一巡视回路在乡 (镇)、村总停留时间大于 3 小时, 则县城至回路中任一乡 (镇)、村的最短路所花时间应小于 $(6.4286 - 4)/2 = 1.2143$ 小时, 结合表 1 可知 F, J, K 三个乡 (镇) 和 11, 17, 18, 8, 9, 22, 19, 24 八个村不满足条件.

¹ 作者现为东南大学国内访问学者、导师朱道元.

表 1

点	最短路径长 (公里)	花费时间 (小时)	点	最短路径长 (公里)	花费时间 (小时)
H	77.5	2.2143	30	35.7	1.0200
14	72.7	2.0772	4	34.9	0.9972
15	69.9	1.9972	7	34.5	0.9858
12	67.3	1.9229	25	31.8	0.9086
10	65.9	1.8829	N	31.1	0.8886
13	64.1	1.8315	32	30.2	0.8629
G	62.7	1.7915	27	28.4	0.8115
I	61.1	1.7458	Q	28.0	0.8000
16	60.3	1.7229	34	27.8	0.7943
11	55.9	1.5972	6	27.2	0.7772
F	55.1	1.5743	33	23.7	0.6772
J	54.3	1.5513	D	22.2	0.6343
17	53.5	1.5286	28	22.2	0.6343
18	52.9	1.5115	31	22.1	0.6315
8	49.7	1.4200	29	20.8	0.5943
9	49.5	1.4143	26	20.6	0.5886
22	49.0	1.4000	M	19.8	0.5657
19	46.2	1.3200	5	17.5	0.5000
24	44.3	1.2658	A	16.3	0.4658
K	43.7	1.2486	3	14.0	0.4000
E	41.7	1.1915	R	12.9	0.3686
21	39.6	1.1315	B	11.9	0.3400
L	39.0	1.1143	C	11.5	0.3286
23	39.0	1.1143	P	10.1	0.2886
20	38.3	1.0943	2	9.2	0.2629
35	36.0	1.0286	1	6.0	0.1715

结论 3 在乡(镇)、村总停留时间大于 4 小时的任一巡视回路中一定不能含有 E, L, N, Q, M 五个乡(镇)和 21, 23, 20, 35, 30, 4, 7, 25, 32, 27, 34, 6, 33, 28, 31, 26 十六个村。

证 假设一巡视回路在乡(镇)、村总停留时间大于 4 小时, 则县城至回路中任一乡(镇)、村的最短路所花时间应小于 $(6.4286 - 5)/2 = 0.7143$ 小时, 结合表 1 可知 E, L, N, Q 四个乡(镇)和 21, 23, 20, 35, 30, 4, 7, 25, 32, 27, 34, 6 十二个村不满足条件; 考虑乡(镇) M 和村 33, 28, 31, 26, 虽然县城到乡(镇) M 和村 33, 28, 31, 26 中任一点的最短路所花时间都小于 0.7143 小时, 但由于在这些点的最短路上在乡(镇)、村总停留时间最多为 4 小时, 因此必须经过不在各自最短路上的乡(镇)、村。下面分三种情况讨论不在各自最短路上的乡(镇)、村:

(1) 分别与这 5 点直接相邻的乡(镇)、村, 因为除与乡 M 相邻的村 5, 与村 31 相邻的村 33、与村 33 相邻的村 31 外的乡(镇)、村都是本结论中所列出的乡(镇)、村, 由上面证明可知无法形成在乡(镇)、村总停留时间为 5 小时并且总巡视时间不超过 $45/7$ 小时的巡视回路, 而经过县城 O 、乡 M 与村 5 的最短回路在乡(镇)、村总停留时间仅为 4 小时, 再加进新的乡(镇)、村总巡视时间又超过 $45/7$ 小时, 经过县城 O 与村 31, 33 的最短回路总路程超过 50 公里。

(2) 分别与这 5 点最短路中间点直接相邻的乡(镇)、村, 如与村 28、26 最短路中的乡 P , 与村 31 最短路中的乡 R , 与村 33 最短路中的乡 A , 村 1 相邻的乡(镇)、村, 不妨设访问最近的村 29, 26, 28, 乡(镇) A, B, C , 这时 $(O, P, 28, 26, O), (O, P, 26, 28, O), (O, P, 28, 29, O),$

$(O, 31, R, A, O), (O, A, 33, B, O), (O, 33, 1, C, O)$ 巡视回路的总路程均超过 50 公里.

(3) 与县城 O 直接相邻的乡(镇)、村, 因为县城到乡(镇) M 和村 33, 28, 31, 26 中任一点最短距离与县城到最近的乡(镇) P 和最近的村 1 中任一点最短距离之和的两倍均超过 50 公里. 所以不存在包括乡(镇) M 和村 33, 28, 31, 26 中任一点在内并且在乡(镇)、村总停留时间为 5 小时, 总巡视时间不超过 $45/7$ 小时的巡视回路.

结论 4 不存在在乡(镇)、村总停留时间为 6 小时, 总巡视时间不超过 $45/7$ 小时的巡视回路.

证 假设一巡视回路在乡(镇)、村总停留时间为 6 小时, 则县城至回路中任一乡(镇)、村的最短距离所花时间应小于 $(6.4286 - 6)/2 = 0.2143$ 小时, 结合表 1 可知只有村 1 满足条件, 而一个村无需停留 6 小时, 因此, 这样的巡视回路不存在.

结论 5 假设一巡视回路只巡视 a, b 两村, 则 O 与 a, a 与 b, b 与 O 之间最短距离之和不大于 155 公里.

证 假设 O 与 a, a 与 b, b 与 O 之间最短距离之和大于 155 公里, 则只巡视 a, b 两村所需总时间大于 $2 + 155/35 = 45/7$ 小时, 所以 a, b 两村不能在同一巡视回路中.

类似可证假设一巡视回路只巡视 a, b 一乡一村(二乡), 则 O 与 a, a 与 b, b 与 O 之间最短距离之和不大于 120(85) 公里.

结论 6 假设一巡视回路只巡视 a, b, c 三村, 则 O, a, b, c 四点构成的最优推销员回路总路程不大于 120 公里.

证 假设 O, a, b, c 四点构成的最优推销员回路总路程大于 120 公里, 则只巡视 a, b, c 三村所需总时间大于 $3 + 120/35 = 45/7$ 小时, 所以 a, b, c 三村不能在同一巡视回路中.

类似可证 假设一巡视回路只巡视 a, b, c 一乡二村(二乡一村), 则 O, a, b, c 四点构成的最优推销员回路总路程不大于 85(50) 公里.

下面证明定理 2

证 由结论 1 知 H, G, I 必须单独巡视, 由于 14, 15, 12, 10 中任何两村不能在同一巡视回路中(由表 1, 最短路径图和结论 5 可得), 所以结论 1 中所列出的 3 个乡(镇)和 6 个村至少需要 7 组才可完成巡视. 这 7 组巡视回路中最多还可以再巡视其它的二个村, 不妨设再巡视结论 2 中所列出的 2 个村(因为换成其它村不影响下面证明的最终结果), 则结论 2 中所列出的乡(镇)、村还剩下 3 个乡(镇)和 6 个村, 由结论 2 知 F, J, K 三个乡(镇)中任何两乡(镇)不能在同一巡视回路中, 又由于 11, 17, 18, 8, 9, 22, 19, 24 中任何三村不能在同一巡视回路中(由表 1, 最短路径图和结论 6 可得), 所以即使前 7 组巡视回路访问了结论 2 中所列出的 2 个村, 经过 F, J, K 的巡视回路组又访问了结论 2 中所列出的三个村, 剩下的三个村至少仍需 2 组巡视, 因此, 结论 2 中剩下的 3 个乡(镇)和 6 个村至少需 5 组才可完成巡视. 这 5 组巡视回路中最多还可以再巡视其它的三个村(或一乡和一村), 不妨设再巡视结论 3 中所列出的三个村(或一乡和一村), 则结论 3 中所列出的乡(镇)、村还剩下 5 个乡(镇)和 13 个村(或 4 个乡和 15 个村), 因为结论 3 中所列出的乡(镇)、村所在的每条巡视回路在乡(镇)、村总停留时间至多 4 小时, 而结论 3 中剩下的 5 个乡(镇)和 13 个村(或 4 个乡和 15 个村)总停留时间为 23 小时, 所以结论 3 中剩下的 5 个乡(镇)和 13 个村(或 4 个乡和 15 个村)至少需 6 组才可完成巡视. 这 6 组巡视回路中最多还可以再巡视其它的一个村, 至此, 上面 $7 + 5 + 6 = 18$ 个组的巡视回路中最多共能巡视 11 个乡(镇)和 31 个村. 考虑剩下的 6 个乡(镇)(O 除外)和 4 个村, 由结论 4 知, 这 6 个乡(镇)和 4 个村所在的每条巡视回路在乡(镇)、村总停留时间至多 5 小时, 而这 6 个乡(镇)和 4 个村总停留时间为 16 小时, 所以这 6 个乡(镇)和 4 个村至少需 4 组才可完成巡视. 即整个巡视至少需要 $18 + 4 = 22$ 组才可完成.

按照上面证明思想, 我们得到一个 22 组的巡视方案, 见表 2.

表 2

巡视路线	巡视时间 (小时)	巡视路程 (公里)	巡视路线	巡视时间 (小时)	巡视路程 (公里)
$O-H-O$	6.429	155	$O-L-20-25-O$	6.366	82.8
$O-G-O$	5.583	125.4	$O-N-26-27-O$	6.223	77.8
$O-I-O$	5.492	122.2	$O-30-Q-28-O$	6.112	73.9
$O-F-9-O$	6.149	110.2	$O-4-D-3-O$	5.995	69.8
$O-J-19-O$	6.103	108.6	$O-P-29-R-O$	6.318	46.1
$O-18-K-O$	6.023	105.8	$O-A-B-1-O$	6.155	40.4
$O-14-13-O$	6.155	145.4	$O-2-5-M-O$	5.392	48.7
$O-15-16-O$	6.309	150.8	$O-31-32-35-34-O$	6.318	81.1
$O-12-11-O$	5.938	137.8	$O-C-33-O$	4.832	64.1
$O-10-8-O$	6.223	147.8	$O-23-24-O$	4.635	92.2
$O-E-7-6-O$	6.383	83.4	$O-21-17-22-O$	6.12	109.2

且总巡视时间为 131.253 小时.

按照尽量沿最短路走和尽量访问邻近乡、村的原则, 逐步修改, 最后得到一个比上面更优的 22 组的巡视方案, 见表 3.

表 3

巡视路线	巡视时间 (小时)	巡视路程 (公里)	巡视路线	巡视时间 (小时)	巡视路程 (公里)
$O-H-O$	6.429	155	$O-L-20-25-O$	6.366	82.8
$O-G-O$	5.583	125.4	$O-N-27-28-O$	6.272	79.5
$O-I-O$	5.492	122.2	$O-Q-30-29-O$	6.04	71.4
$O-F-9-O$	6.149	110.2	$O-4-D-3-O$	5.995	69.8
$O-J-19-O$	6.103	108.6	$O-P-R-O$	5.315	46
$O-18-K-O$	6.023	105.8	$O-C-B-1-O$	5.983	34.4
$O-14-13-O$	6.155	145.4	$O-2-5-M-O$	5.392	48.7
$O-15-16-O$	6.309	150.8	$O-31-32-35-34-O$	6.318	81.1
$O-12-11-O$	5.938	137.8	$O-33-A-O$	4.355	47.4
$O-10-8-O$	6.223	147.8	$O-23-24-26-O$	5.635	92.2
$O-E-7-6-O$	6.383	83.4	$O-21-17-22-P$	6.12	109.2

且总巡视时间为 130.578 小时.

参 考 文 献

- [1] 肖位枢主编, 图论及其算法.
- [2] 陈惠开著 [美], 吴哲辉, 刘昌孝译, 网论—网络流.

Proof on Optimality of Casualty Inspecting Routes

ZHANG JIAN-XIN

(Shazhou Institute of Technology, Zhangjiagang 215600)

灾情巡视的最佳路线 (节选)

田家国 吴小丽 夏传刚

指导教师: 数学建模教练组

(黑龙江矿业学院, 鸡西 158105)

编者按 这里只选载该文有特色的一部分, 即对问题 3 的一种新看法. 一辆 (足够大的) 车为一组, 巡视人员沿途上、下车巡视沿途的每一点. 这样在最短时间内由用 6 组即可完成任务.

我们求出各偏远乡 (镇)、村距县政府的最小距离. 在这些最小距离中, 最大为 H 距离政府的距离, 其值为 77.5 公里. 完成对 H 的巡视的最短时间为 $77.5/35+2=6.43$ 小时, 即为完成巡视的最短时间. 我们采用的对策是在通往 H 镇的巡视车载有足够的巡视人员, 每经过一个乡 (镇)、村就有一组巡视人员下车去巡视. 直到 H 镇, 当 H 镇巡视完毕后, 巡视车按原路返回, 接回所有巡视人员. 在该过程中, 巡视人员上车或下车的时间可以忽略不计. 在寻求各偏远乡 (镇)、村的最短路过程中, 而无法经过 $G, 11, 20$ 这三个点, 对这三个点采用的方法是: 如果邻近的巡视路线经过这三个点所花费的时间不超过 6.43 小时, 那么可以不走最短路线, 严格按照以上方案, 我们确定巡视路线为 7 条. 但是, 这样使各组巡视人员的工作量不均衡. 因此, 我们进一步优化, 得到分为 6 组的巡视路线, 这样巡视完全县所有的乡 (镇)、村所需时间为 6.45 小时, 比分为 7 组巡视多 0.02 小时, 但考虑到该问题的实际意义, 我们采用分为 6 组的巡视路线, 具体路线如下表和图所示.

组号	路线 (原路返回)
1	$O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 33 \rightarrow 31 \rightarrow 32 \rightarrow 30$
2	$O \rightarrow R \rightarrow 29 \rightarrow Q \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16$
3	$O \rightarrow P \rightarrow 26 \rightarrow N \rightarrow 25 \rightarrow 20 \rightarrow 21 \rightarrow K \rightarrow 18 \rightarrow I \rightarrow 15$
4	$O \rightarrow M \rightarrow 6 \rightarrow L \rightarrow 19 \rightarrow J \rightarrow 11 \rightarrow G \rightarrow 13 \rightarrow 14$
5	$O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow E \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 12 \rightarrow H$
6	$O \rightarrow C \rightarrow 3 \rightarrow D \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow E \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 10$

