distance network to a supply-demand transportation price table. Based on this, we constructed three models: the linear-cost-network-flow model, the developed linear-cost-network-flow model and the non-linear-cost-network-flow model. By generlizing the traditional minimum-cost-maximum-flow algorithm, we solved the non-linear-cost-network-flow model. We also gave the truth proving and the complexity-analysis to our algorithm.

订购和运输钢管的最优方案

陆维新,　林　皓,　陈晓东
指导老师:　周　杰

(四川大学,　成都　610064)

编者按:　该文建立了用于天燃气管道铺设的钢管订购和运输总费用最省的二次规划模型. 总费用作为目标函数, 钢管生产厂的产量限制等作为约束条件. 所建模型通过定性分析与使用Lingo 软件求解获得了满意的方案, 并且计算量大大减少了. 整篇文章理由描述充分, 层次清楚, 洞察力强而篇幅较短.

摘要:　本文研究铺设天燃气钢管的最优方案问题. 我们建立了一个以总费用为目标函数的二次规划模型.

1　问题的重述与分析(略)

2　模型的假设与符号说明

1) 基本假设:

①要铺设的管道侧有公路, 可运送所需钢管;

②钢管在运输中由铁路运转为公路运时不计换车费用;

③所需钢管均由 $S_i(i=1,\cdots,7)$ 钢厂提供;

④假设运送的钢管路途中没有损耗.

2) 符号说明($i=1,2,\cdots,7$, $j=1,2,\cdots,15$):

s_i: 钢厂 S_i 的最大生产能力;

p_i: 钢厂 S_i 的出厂钢管单位价格(单位: 万元);

d: 公路上一单位钢管的每公里运费($d=0.1$ 万元);

e: 铁路上一单位钢管的运费(分段函数见表 1);

c_{ij}: 1 单位钢管从钢厂 S_i 运到 A_j 的最小费用(单位: 万元);

b_j: 从 A_j 到 A_{j+1} 之间的距离(单位: 千米);

x_{ij}: 钢厂 S_i 运到 A_j 的钢管数;

y_j: 运到 A_j 地的钢管向左铺设的数目;

z_j: 运到 A_j 地的钢管向右铺设的数目;

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{钢厂 } S_i \text{ 提供钢管} \\ 0, & \text{钢厂 } S_i \text{ 不提供钢管} \end{cases};$$

W: 所求钢管订购、运输的总费用(单位: 万元);

表 1　铁路的单位运费

r(单位: 公里)	$r\le 300$	$301\le r\le 350$	$351\le r\le 400$	$401\le r\le 450$	$451\le r\le 500$
e(单位: 万元)	20	23	26	29	32
$501\le r\le 600$	$601\le r\le 700$	$701\le r\le 800$	$801\le r\le 900$	$901\le r\le 1000$	$r\ge 1000$
37	44	50	55	60	$5\left(\left[\frac{r-1000}{100}\right]+1\right)+60$

3　模型的建立

我们的目标函数是总费用 W, 它包含三项: 钢管出厂总价 Q, 运输费 P, 及铺设费 T. 即

$$W = Q + P + T$$

其中

$$Q = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} p_j \cdot x_{ij},\ P = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} c_{ij}\cdot x_{ij},$$

铺设费 T 可以如下来确定: A_j 开始从左右两个方向铺设, y_j 与 z_j 单位长钢管的费用为

$$d\cdot 1 + d\cdot 2 + \cdots + d\cdot y_j = d\frac{(1+y_j)y_j}{2} \text{ 与 } d\frac{(1+z_j)z_j}{2}$$

故

$$T = d\sum_{j=1}^{15}\left(\frac{(1+y_j)y_j}{2} + \frac{(1+z_j)z_j}{2}\right)$$

约束条件为:

① 生产能力的限制: $500\cdot t_i \le \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \le s_i\cdot t_i \quad (i=1,\cdots,7) \quad (t_i = 0 \text{ 或 } 1)$

② 运到 A_j 的钢管用完: $\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = y_j + z_j \quad (j=1,\cdots,15)$

③ A_j 与 A_{j-1} 之间的钢管: $z_j + y_{j+1} = b_j \quad (j=1,\cdots,14)$

④ 变量非负性限制: $x_{ij}\ge 0, y_j\ge 0, z_j\ge 0$, $(i=1,\cdots,7, j=1,\cdots,15)$.

综合以上讨论, 得出问题 I 的数学模型如下:

$$\text{Obj1: min}\quad W = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} p_i\cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} c_{ij}\cdot x_{ij} + d\sum_{j=1}^{15}\left[\frac{(1+y_j)y_j}{2} + \frac{(1+z_j)z_j}{2}\right]$$

s t

$$\begin{aligned}
&500\cdot t_i \le \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \le s_i\cdot t_i \quad (i=1,\cdots,7)\\
&\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = y_j + z_j \quad (j=1,\cdots,15)\\
&z_j + y_{j+1} = b_j \quad (j=1,\cdots,14)\\
&y_1 = 0,\quad z_{15} = 0\\
&x_{ij}\ge 0, y_j\ge 0, z_j\ge 0, \quad (i=1,\cdots,7, j=1,\cdots,15)\\
&t_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad (i=1,\cdots,7)
\end{aligned}$$

4　对模型 Obj1 的求解:

为了求解模型, 必须求出系数 $(c_{ij})_{7\times 15}$, 其中每一 c_{ij} 表示 S_i 到 A_j 的最小费用, 因而, 求

解 c_{ij} 实际上是一个求最短路的问题. 总路段由铁路和公路组成, 由于单位运费的差别, 分别计算就有一定难度, 因此考虑将单位运费乘以路程来作为"距离", 这样将两者统一起来, 利用最短路的算法, 可得到从 S_i 到 A_j 的最小运费. 具体实现算法如下:

① 将图中 39 个点构成一个 39×39 的权矩阵 $A_{39\times39}$, 其中 a_{ij} 表示从 A_i 到 A_j 的最短路程, 若 A_i, A_j 不能直接相连, 用 $a_{ij} = \infty$ 表示. 铁路自身构成 $A^1_{39\times39}$, 公路自身构成一个 $A^2_{39\times39}$, 分别对 A^1 和 A^2 运用弗洛依德算法, 得出局部最短路程矩阵和最短路径矩阵 path1, paht2.

② 对公路, 将 $0.1\times A^2$ 记为公路局部最短"距离"(运费) 矩阵 $A^{1\prime}$, 对铁路, 用铁路的费用 e 进行转换, 得局部最短"距离"(运费) 矩阵 $A^{2\prime}$. 令 $A = \min(A^{1\prime}, A^{2\prime})$, min 表示 $A^{1\prime}$ 与 $A^{2\prime}$ 中对应元素较小者.

③ 对得到的 A, 再使用一次弗洛依德算法, 得到全局的最短"距离", 实际上, 就是每两点间最小运费矩阵, 从中抽取出 S_i 到 A_j 之间的子矩阵 C'.

④ 为了便于以后计算, 将 S_i 的单价 p_i 加到 C' 中 S_i 对应的列上, 得最小费用矩阵 C (略).

下面先通过分析, 对模型解进行估计.

首先, 由题图可估计, 最右边的钢厂, 如 S_6、S_7 一定不会运往 $A_1 \sim A_3$ 等较左边的点. 其次, 由最小费用矩阵 C 来决定订购的优先级, A_j 中费用最小的权所对应的 S_i 即为最优, 可分析得: 对 $A_1 \sim A_8$: S_1 最优, S_2 次优, S_3 再次; 对 A_9: S_3 最优, S_1 次优; 对 $A_{10} \sim A_{11}$: S_5 最优, S_6 次优, S_4 再次; 对 $A_{12} \sim A_{14}$: S_6 最优, S_7 次优; 对 A_{15}: S_7 最优.

另外, 由于钢厂一旦开工就必须生产 500 单位, 而 A_{15} 至多需要铺 500 单位, 所以可能不从 S_7 购运. S_4 对应的权基本为每一行中最大成本, 所以为最末考虑因素, 所以可能不运出. 再考虑生产上限因素, 由于 $S_5 \sim S_7$ 上限很大, 所以 $A_{10} \sim A_{15}$ 由 $S_5 \sim S_7$ 应能完全供给, 并达到目标值最优. 而 S_1 上限只有 800 单位, 所以先满足 $A_1 \sim A_8$ 中优先级较高的, 接下面方法排序: 令 $\mathrm{sub}(S_i \to A_j, S_{i'} \to A_j)$ 表示从 S_i 到 A_j 所需单位成本与 $S_{i'}$ 到 A_j 所需的成本之差. 若差值越大, 表明越应该由两者较小的来提供 A_j 的钢管, 如 $\mathrm{sub}(S_1 \to A_5, S_2 \to A_5) = 68$ 单位, 而 $\mathrm{sub}(S_1 \to A_7, S_2 \to A_7) = 78$ 单位, 表示 S_1 应优先满足 A_7. ∴可得优先级为 $A_7 > A_6 > A_5 = A_4 > A_8 > A_3 > A_1$. 再由 S_i 的产量上限以及 A_j 两边要铺设的钢管数, 得到结论: S_1, S_2, S_3 必须满荷运出, 即 $S_1 = 800$ 单位, $S_2 = 800$ 单位, $S_3 = 1000$ 单位, 才能使目标值较优, 且由要铺的所有钢管数, 可大致推出: $S_1 \to A_5, A_6, A_7$; $S_2 \to A_1, A_2, A_3$; $S_3 \to A_4, A_7, A_8, A_9$; $S_5 \to A_{10}, A_{11}$; $S_6 \to A_{12}, A_{13}, A_{14}$; $S_7 = 0$; $S_4 = 0$.

然后, 再把 S_1, S_2, S_3 可运到的铺设点范围放宽, 观察 (c_{ij}) 矩阵, 其中该矩阵右上角和左下角的 c_{ij} 比较大, 故可考虑把其对应的 x_{ij} 取为 0, 则只需考虑 (x_{ij}) 矩阵的左上角、右下角对应的 3×8 矩阵求解, 运用数学软件 Lingo 5.0, 编程求出: $W_1^* = 1.282142\times10^6$ (万元).

5 对模型 Obj1 的灵敏度分析

1) 确定哪个钢厂的销价的变化对购运计划和总费用的影响最大

我们假设该钢厂的销价变化在 $\pm10\% p_i$ 万元以内, 这是较为合理的. 将目标函数的 W 表示为 p_i 的函数,

$$W = f(p_1, p_2, \cdots, p_7),$$

$$\Delta W = \frac{\partial f}{\Delta p_1}\cdot\Delta p_1 + \frac{\partial f}{\Delta p_2}\Delta p_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_7}\Delta p_7.$$

因此在销价的变化量相同时, $\frac{\partial f}{\partial p_i}$越大, 则 p_i 的变化对 w 的变化影响越大

由模型 Obj1 计算得到的数据可以知道$\frac{\partial f}{\partial p_6}= 2000$ 单位是最大的, 所以 S_6 的销价变化对购运计算和总费用的影响最大, 我们可以通过简单的分析来证明: 由于 S_6 提供的数量最大, 销价只要很小变化的, 就会引起总费用的很大变化, 同时, 当价格越来越高, 由于 p_6 和 $\sum_{j=1}^{15} x_{6j}$ 互为消长的关系, 当 S_6 越来越小, 它在总需求中占的份额减少, 影响减弱, S_6 下降的速度也将放慢

除了销价的升高, 我们还必须考虑销价的降低, 此时应尽量满足提供量最少的点 S_5, 当价格越来越低, 由互为消长关系, S_5 点的提供量将增加, 它占总需求的份额增加, 影响增强, 对于 S_5 上升的速度将放慢

2) 确定哪个钢厂的生产上限的变化对物运计划和总费用的影响最大

由于 S_1 是 A_1 到 A_8 的最优首选, 因此若 S_1 与其它 S_i 同时扩大相同的 ΔS 容量, 则 S_1 会更优, 所以推断 S_1 应为影响最大者. 由最小费用矩阵 C 可以知道, A_i ($i= 1, \cdots, 8$) 所需的钢管量最好都能由 S_1 提供, 则此时 S_1 达到最大需求量, 在模型 Obj1 的条件下, S_1 为 2536 单位, 而 S_1 的上限为 800 单位, 考虑到实际钢厂的投入与产出, 在很短的时期内生产要达到原来的 3 倍, 不符合实际意义, 所以考虑 S_1 在 10% 范围内变化. 同理对于 A_9 点, 最优为 S_3 全部提供, 即 S_3 应提供 634 单位, 对于 A_{12}、A_{13}、A_{14}、A_{15}, 由 S_6 全部提供为最优, 即 S_6 应提供 1205 单位, A_{11}、A_{10} 由 S_5 全部提供为最优, 即 S_5 应提供 796 单位

利用计算机模拟, 得出 5 个供货钢厂分别扩建 1% , 2% , 4% , 6% , 8% , 10% 时的成本的增长率, 见表 2. 可以看出, 相同的 ΔS 下 A_1 产生的增长率最大, 符合上述分析. 一旦工厂扩建范围超过最大需求量, 则不再会使目标函数优化, 则此时增长率为 0, 即是上图中 S_5、S_6 的情况. 而对于 S_1, 一旦 $S_1 > 2536$, 则其增长率也为 0. (S_1 的数字结果见表 2)

表 2　某个 S_i 在变化 ΔS 的情况下目标函数减小量及减小的比率

ΔS	S_1		S_2		S_3		S_5		S_6	
	Δz (万元)	$\frac{\Delta z}{z}$ (%)	Δz (万元)	$\frac{\Delta z}{z}$ (%)	ΔZ (万元)	$\frac{\Delta z}{z}$ (%)	Δz (万元)	$\frac{\Delta z}{z}$ (%)	Δz (万元)	$\frac{\Delta z}{z}$ (%)
1%	872	0.068	328	0.025	310	0.024	0	0	0	0
2%	1744	0.136	656	0.051	620	0.048	0	0	0	0
4%	3488	0.272	1312	0.102	1240	0.096	0	0	0	0
6%	5232	0.408	1968	0.153	1860	0.145	0	0	0	0
8%	6976	0.544	2624	0.204	2480	0.193	0	0	0	0
10%	8720	0.685	3280	0.256	3100	0.242	0	0	0	0

6　问题III的分析

若要铺设的道路不是一条线, 而是一个树形图, 则有以下两个问题

首先, 模型一中给出的算法可以进行扩展, 对于网络中不同性质的路有 n 种, 设 n 个与原矩阵同阶的局部距离矩阵, 局部最优后, 再统一求解

其次, 由于树形图的出现, 则某些管道处会出现多支路. 则模型一中模型的 y_j (左铺), z_j

(右铺)不再适用,此时可考虑多增加一些支路变量,如 $y_{1j}, y_{2j}, \cdots, z_{1j}, z_{2j}, \cdots$之类,增加约束条件 $y_{1j}+y_{2j}+\cdots+z_{1j}+z_{2j}+\cdots=x_{ij}$,在目标函数中增加相应的铺设费,具体做法可由下面对图二的模型获知,问题III建模如下(m_j 是运到 A_j 的钢管向第三支路铺设的数目):

$$\mathrm{Obj2}: \min W = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{21} p_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{21} c_{ij} x_{ij} + d\left[\sum_{i=2}^{15} \frac{y_i(y_i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{14} z_i \frac{(z_i+1)}{2} + \frac{m_9(m_9+1)}{2} + \frac{m_{11}(m_{11}+1)}{2} + \frac{m_{17}(m_{17}+1)}{2}\right]$$

$$\text{s.t.}\quad 500 \cdot t_i \le \sum_{j=1}^{21} x_{ij} \le s_i \cdot t_i \qquad (i=1,\cdots,7)$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = y_j + z_j \qquad (j=1,\cdots,21 \text{ 且 } j \ne 9, 11, 17)$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = y_j + z_j + m_j \qquad (j=9, 11, 17)$$

$$z_j + y_{j+1} = b_j \qquad (j=1,2,\cdots,14)$$

$$m_9 + y_{16} = 42, \qquad z_{19} + y_{20} = 260$$

$$z_{20} + y_{21} = 100, \qquad m_{11} + m_{17} = 10$$

$$y_{17} + y_{18} = 130, \qquad z_{17} + y_{19} = 190$$

$$x_{ij}, y_j, z_j, m_j \ge 0 \quad (i=1,\cdots,7, j=1,\cdots,21), \quad t_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad (i=1,\cdots,7)$$

运用数学软件Lingo5.0编程求出:

$$W_2^* = 1.40633 \times 10^6 (\text{万元})$$

参考文献:

[1] 姜启源.《数学模型》. 高等教育出版社, 北京, 1996.

[2] 严蔚敏, 吴伟民.《数据结构》. 清华大学出版社, 北京, 1992.

[3] 叶其孝.《大学生数学建模竞赛辅导教材》. 湖南教育出版社, 长沙, 1993.

Optimal Scheme for Purchasing and Transporting Steel Tubes

LU Wei-xin, LIN Hao, CHEN Xiao-dong

(Sichuan University, Chengdu 610064)

Abstract: The optimal scheme in the construction of the nature gas pipeline has been studied in this article. We have set up a quadratic programming model in which the objective function is the total expense of the construction.