

基于直接线性变换的单目定标模型

摘要

本文利用数码相机成像原理，建立数学模型，实现了利用相机摄制物体的图像进行系统标定。

针对问题一，根据空间解析几何中的理论，建立了世界坐标系、摄像机坐标系、像平面坐标系和影像坐标系 4 套坐标系，利用针孔成像原理，结合空间坐标转化知识，推导出 4 套坐标系中点的坐标转化关系，建立了三维单目定标模型。结合靶标图为平面的特点，将模型简化为二维单目定标模型，利用直接线性变换算法对模型进行求解。

针对问题二，利用图像射影的交比不变性，确定靶标图中的特征点与像图中点的对应关系，对问题一中的二维单目定标模型进行求解，得到相机的内部参数与外部参数，最终求解出靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标，具体求解结果如下表所示(单位：mm)：

圆心像点	A'	B'	C'	D'	E'
x	-49.9572	-23.3775	34.0362	18.8654	-60.1366
y	-41.9101	-39.928	-35.6464	40.9808	40.8724

同时求解出相机的偏转角为 -18.8747° 、倾斜角为 9.7535° 和俯仰角为 155.0864° ，以及相机光学中心在世界坐标系中的坐标为 $(-160.2588, 170.6876, 424.1587)$ 。对参数进行检验和敏感性分析，引入重叠率，通过重叠率和还原后的靶标图中圆心的偏差距离来衡量模型精度，对模型的稳定性和精确性进行量化评价。将求得结果与椭圆拟合定中心的近似处理方法得出的结果进行比较，在图像平面与靶标图所在平面夹角较小且精度要求不高的情况下，椭圆拟合求出的中心来可以近似代替靶标图中圆的圆心的实际投影。

针对问题三，设计了加入随机噪声的方法，通过随机噪声对图像进行干扰，通过比较加噪时还原后的靶标图中圆心与未加噪时还原后的靶标图中圆心的偏差距离，得出该模型具有很高的精度和稳定性的结论。

针对问题四，利用问题一建立的三维单目定标模型，求解出两部相机的内部参数和外部参数，推导出两部相机参数间的关系，建立了双目标定模型。给出了求解出两部相机的相对位置的方法。

关键词：直接线性变换 单目定标模型 交比不变性 随机噪声

1. 问题重述

随着科学技术的飞速发展,数码相机定位在许多方面有广泛的应用。在计算机视觉中,如何由数码相机拍摄到的二维投影图像确定目标方位是很重要的研究内容,在相机标定、三维重建、交通监管等很多方面有广泛的应用价值。所谓数码相机定位是指用数码相机摄制物体的相片确定物体表面某些特征点的位置。最常用的定位方法是双目定位,即用两部相机来定位。对物体上一个特征点,用两部固定于不同位置的相机摄得物体的像,分别获得该点在两部相机像平面上的坐标。只要知道两部相机精确的相对位置,就可用几何的方法得到该特征点在固定一部相机的坐标系中的坐标,即确定了特征点的位置。于是对双目定位,精确地确定两部相机的相对位置就是关键,这一过程称为系统标定。

标定的一种做法是:在一块平板上画若干个点,同时用这两部相机照相,分别得到这些点在它们像平面上的像点,利用这两组像点的几何关系就可以得到这两部相机的相对位置。实际的做法是在物平面上画若干个圆作为靶标。但靶标图中的圆在像平面中的图像一般会发生形变,所以必须从像中把圆心的射像的像坐标精确地找到。

建立数学模型和算法以确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标,设计一种方法检验所建立的模型,并对模型的精度和稳定性进行讨论,并将模型推广到两部相机标定的情况。

2. 问题分析

照相机的成像过程是从三维物体空间到二维图像平面的透视投影过程。空间中任意点与透视投影图像上的点存在射影变换的关系。基于特征识别要求特征对这种射影变换具有不变性,保证该特征不受透视投影的影响,使识别结果不随照相机的位置及内部参数的改变而改变。从图像中看出,圆在相片中的像是类椭圆形状的,用椭圆的重心近似认为是圆心在像中的点。但圆心几何特性在投影映射下无法保持,只有通过投影变换的交比不变性才能确定出靶标图到像平面的对应点。对于空间两平面中的其他的点,则需要建立直接线性变换关系,确定相机的内部参数和外部参数,得到两个平面上任意一点的一一对应关系。

因此,需要建立数学模型,求解出照相机的内部参数与外部参数,确定靶标图中的圆心在图像平面的像坐标,进一步确定两部固定相机空间的相对位置。为了进一步考察模型的准确性和稳定性,可以在图像中人为地加上噪声观察结果的变化。

3. 模型假设

针对本问题,建立如下合理的假设:

1. 可以将数码相机简化看作一个针孔。
2. 忽略透视投影的非线性畸变引起的误差。
3. 假设像平面上 x 方向和 y 方向上单位像素的长度相同。
4. 假设两部相机的位置始终保持不变。

4. 符号说明

为表述问题方便，建立相应符号系统。部分符号在用到处再详细说明，主要符号说明如下：

符号	说明	单位
O_0-uv	影像坐标系	像素
O_1-xy	像平面坐标系	毫米
$O_w-X_wY_wZ_w$	世界坐标系	毫米
$O_c-X_cY_cZ_c$	摄像机坐标系	毫米
f	像距，即光学中心到像平面的距离	像素
dx	单位像素在 x 轴方向上的物理尺寸	毫米
dy	单位像素在 y 轴方向上的物理尺寸	毫米
α	重叠率，即还原后的靶标图与原始靶标图重合部分面积占整个靶标图的面积的比例	
β	圆心偏差距离	毫米
R	摄像机坐标系的正交单位旋转矩阵	
T	摄像机坐标系的位移向量	
R_s	第二个相机像平面到第一个相机像平面的正交单位旋转矩阵	
T_s	T_s 为第二个相机像平面到第一个相机像平面的位移向量	

5. 问题一模型建立与求解

5.1 数据预处理

考虑到图像中需要研究的为圆经过投影映射后的图像，需要对原始数据进行处理，得出所需的映射图像的数据。图像数据处理步骤如下：

一、将原图转化为灰度图，方便处理。

二、由于原图中很有可能受到来自各种因素的随机误差的影响，需要进行去噪处理。首先，考虑到所用图形的像素面积，使用模板尺寸为 $6*6$ ，标准差为 2 的高斯低通滤波^[1]滤去图像中的基本杂点，然后再使用维纳二维自适应滤波使图像进一步平滑，将杂点减到最少。

三、使用 Canny 算子^[1]得到图像的边缘，再将处理后的图像和边缘图像二值化

作为模型所用的基础数据。

利用上述图像数据处理方法，图像处理后的结果如下图图 1 所示：

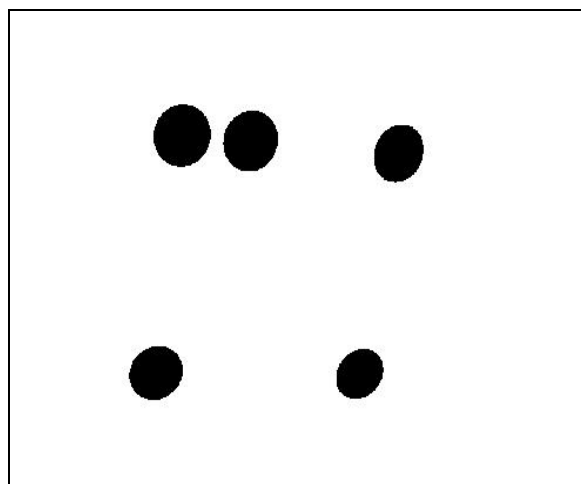


图 1 图像经数据处理后的结果

5.2 问题分析

通过已知靶标上圆的相对位置，确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标，根据相机的成像原理，靶标上的点与像平面上的像点存在一一对应的关系。这个对应关系主要由相机的内部参数和外部参数两部分的因素决定。可以通过分析，找出靶标图与像平面上对应的特殊点，确定相机的内部参数和外部参数，建立靶标上的任意一点（包括圆心）与像平面上的像点的对应关系。为了研究问题的方便，建立 4 套以不同物体上的点为原点的坐标系，其空间位置关系如下图图 2 所示：

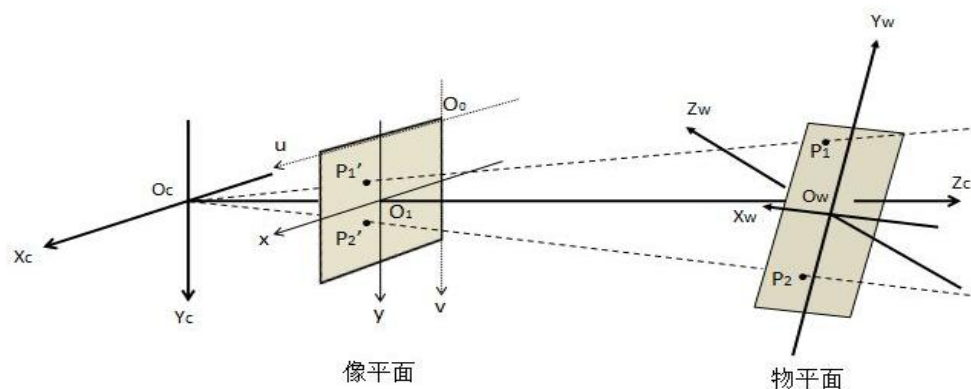


图 2 四套坐标系的构建图

5.3 模型建立

(一) 影像平面坐标系与像平面坐标系转换关系

影像平面坐标系和像平面坐标系都定义在图像上，只不过建立的位置和方向

不同。对于图像中的任何一个像点，在影像平面坐标系对应的坐标 (u, v) ，以像素为单位；在影像平面坐标系对应的坐标 (x, y) ，用物理单位。若 O_1 在 u, v 坐标系中的坐标为 (u_0, v_0) ，单位像素在 x 轴与 y 轴方向上的物理尺寸分别为 dx, dy ，则图像中的任何一个像点影像平面坐标 (u, v) 和像平面坐标 (x, y) 存在如下的转化关系：

$$\begin{cases} u = \frac{x}{dx} + u_0 \\ v = \frac{y}{dy} + v_0 \end{cases} \quad (5-1)$$

可以将上式(5-1)转化为如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

(二) 世界坐标系与摄像机坐标系转换关系

若世界坐标系中的任意一点 $P(X_w, Y_w, Z_w)$ ，其在摄像机坐标系中的坐标为 (X_c, Y_c, Z_c) 。设摄像机坐标系中的坐标原点在世界坐标系中的坐标为 (x_0, y_0, z_0) ，则根据空间几何知识，世界坐标系坐标 (X_w, Y_w, Z_w) 与摄像机坐标系坐标 (X_c, Y_c, Z_c) 存在如下转化关系：

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

其中， T 为位移向量，即 $T = (x_0, y_0, z_0)^T$ ；

$$R \text{ 为 } 3 \times 3 \text{ 正交单位旋转矩阵， } R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}。$$

(三) 像平面坐标系与摄像机坐标系转换关系

根据针孔模型成像原理可知，空间任意一点 P 到像平面的投影点 p 为光学中 O_c 与 P 点的连线 OP 与图像平面的交点。若像距 $f = |O_c O_1|$ ，世界坐标系中的点

$P(X_w, Y_w, Z_w)$ 在摄像机坐标系中坐标 (X_c, Y_c, Z_c) ，与像平面坐标系的投影点 $p(x, y, f)$ 存在如下比例关系：

$$x = \frac{fX_c}{Z_c}, y = \frac{fY_c}{Z_c} \quad (5-4)$$

上式 (5-4) 可以转化为矩阵形式：

$$Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

由表达式 (5-2)、(5-3)、(5-5) 可知，世界坐标系中的点 $P(X_w, Y_w, Z_w)$ 与像平面坐标系的投影点 $p(x, y, f)$ 对应关系^[2]如下：

$$\begin{aligned} Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & a_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = M_1 M_2 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-6)$$

其中 $a_x = \frac{f}{dx}$ ， $a_y = \frac{f}{dy}$ ， M 为投影矩阵， M_1 只由参数 a_x, a_y, u_0, v_0 决定，由

于 a_x, a_y, u_0, v_0 只与照相机的内部结构有关，因此称 M_1 为内部参数矩阵； M_2 只与目标在世界坐标系中的位置有关，因此称 M_2 为方位矩阵。

将 (5-6) 式转化为摄影测量中常用的共线方程，建立如下的三维单目定标模型：

$$\begin{cases} u - u_0 = a_x \frac{r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + x_0}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + z_0} \\ v - v_0 = a_y \frac{r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + y_0}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + z_0} \end{cases} \quad (5-7)$$

将已知的靶标上圆的圆心在时间坐标系中的坐标 (X_w, Y_w, Z_w) 代入上式 (5-7) 中，

即可确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标 (u, v) 。

5.4 模型求解

(一) 模型简化

数码相机的定标是通过在定标物体的某个物平面上画 N 个点, 因此这些点在同一平面上。可以建立适当的世界坐标系使这些点都在世界坐标系中的 $O_w - X_w Y_w$ 面上, 使这些点在 Z_w 方向上的坐标都为 0, 即 $Z_{wi} = 0, i = 1, 2, \dots, N$, 从而使一个研究三维物体的问题简化为一个二维平面的问题。

由假设 3 可知, 像平面上 x 方向上的单位像素长度 dx 与 y 方向上的单位像素长度 dy 相等。因此参数 a_x, a_y 满足 $a_x = a_y = \frac{f}{dx} = \frac{f}{dy}$, 设 $a_x = a_y = a$ 。

将 $a_x = a_y = a, Z_w = 0$ 代入 (5-7) 式中, 经化简后得到只含 8 个参数的直接线性变换方程, 建立如下二维的单目定标模型:

$$\begin{cases} u - u_0 = a \frac{L_1 X_w + L_2 Y_w + L_3}{L_7 X_w + L_8 Y_w + 1} \\ v - v_0 = a \frac{L_4 X_w + L_5 Y_w + L_6}{L_7 X_w + L_8 Y_w + 1} \end{cases} \quad (5-8)$$

其中, 8 个参数的表达式如下:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{r_{11}}{z_0}, \quad L_2 = \frac{r_{12}}{z_0}, \quad L_3 = \frac{x_0}{z_0}, \quad L_4 = \frac{r_{21}}{z_0} \\ L_5 &= \frac{r_{22}}{z_0}, \quad L_6 = \frac{y_0}{z_0}, \quad L_7 = \frac{r_{31}}{z_0}, \quad L_8 = \frac{r_{32}}{z_0} \end{aligned} \quad (5-9)$$

(二) 确定靶标上的点与像平面的对应点

根据图像射影的交比不变性^[3]规律, 可以得出如下合理性质:

- 世界坐标系中的直线在像平面中的射影仍是直线。
- 世界坐标系中的直线上任意一点在像平面中的射影仍在这条直线的射影上。
- 世界坐标系中两条相交直线的交点在像平面中的射影仍是这两条直线在像平面中的射影的交点。
- 世界坐标系中一条直线与一条曲线的切点在像平面中的射影仍是这条直线与曲线在像平面中的射影的交点, 且此交点仍是这两条射影的切点。

根据上述图像射影的交比不变性规律, 结合具体靶标上圆的相对位置的特点, 找出世界坐标系中 m 个点到像平面上射影点的对应关系, 构造 m 对坐标对

$(P_i(X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}), p_i(u_i, v_i)), i = 1, 2, \dots, m$ 。其中 $P_i(X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi})$ 表示世界

坐标系中第 i 个点的坐标, $p_i(u_i, v_i)$ 表示 P_i 在像平面中对应的射影的像坐标。

(三) 参数确定

由表达式 (5-8) 可知, 每对已知的坐标 (X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}) 和 (u_i, v_i) , 可以构造两个方程。要确定 (5-8) 式中的 8 个参数, 至少需要知道靶标上与像平面上 4 对对应点的坐标, 即满足 $m \geq 4$ 。

将已知的 m 对坐标对 $(P_i(X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}), p_i(u_i, v_i))$, $i=1, 2, \dots, m$ 代入 (5-8) 式中可得一个方程组, 通过解方程组就可以确定 L_1, L_2, \dots, L_8 等 8 个参数。

(四) 求解靶标上圆的圆心在像平面的像坐标

将步骤 (三) 中求解出的 8 个参数代入 (5-8) 式中, 再将靶标上 n 个圆的圆心的世界坐标系中的坐标 (X_w, Y_w, Z_w) 代入 (5-8) 式中, 即可求得靶标上圆的圆心在像平面的像坐标 (u, v) 。

6. 问题二的二维单目定标模型求解

6.1 模型求解

1. 靶标上圆的圆心在像平面的像坐标

根据靶标上圆的具体相对位置, 由这些圆的切线构造一个四边形 1234, 使靶标上所有的圆都在这个四边形内。依据同样的方法在像平面上构造一个四边形 1'2'3'4', 使像平面上所有的图像都在这个四边形内。因此可以认为四边形 1234 内的所有点 (包括边界) 通过数码相机一一影射到四边形的 1'2'3'4' 内所有点 (包括边界)。所构造的特殊四边形、直线、点的对应关系如下图所示图 3、图 4 所示:

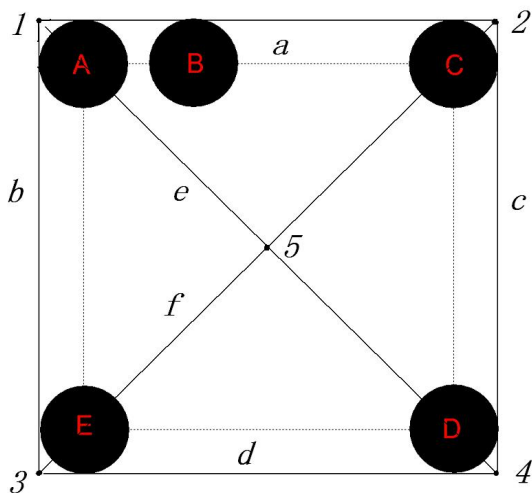


图 3 靶标上特殊的线和点

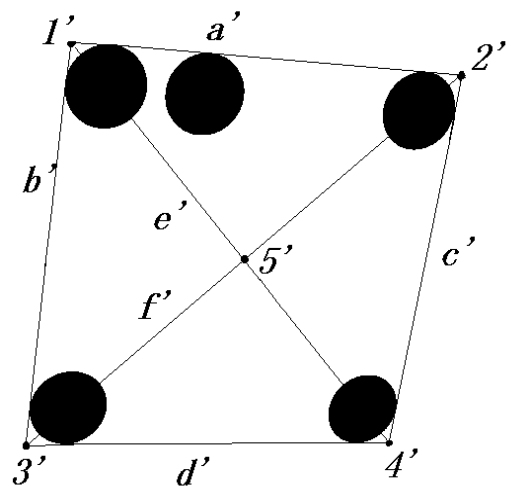


图 4 图像上特殊的线和点

根据图像射影的交比不变性可知，图 3 与图 4 中线与线的对应关系为 $a \rightarrow a', b \rightarrow b', c \rightarrow c', d \rightarrow d', e \rightarrow e', f \rightarrow f'$ ，点与点的对应关系为 $1 \rightarrow 1', 2 \rightarrow 2', 3 \rightarrow 3', 4 \rightarrow 4', 5 \rightarrow 5'$ 。这些点在世界坐标系和像平面坐标系中的对应坐标如下表表 1 所示：

表 1 特殊点在世界坐标系和像平面坐标系中坐标

特征点		1	2	3	4	5
世界坐标系 (单位: mm)		(-62, 62, 0)	(62, 62, 0)	(-62, -62, 0)	(62, -62, 0)	(0, 0, 0)
特征点		1'	2'	3'	4'	5'
像平面坐标系 (单位: 像素)	u	286.2834	683.3015	241.8944	609.8150	462.8048
	v	145.1630	178.6063	537.2656	534.8290	357.7679

由于只需要 4 个对应点的坐标就可以确定 (5-8) 式中的 8 个参数，因此选择 $1 \rightarrow 1', 2 \rightarrow 2', 3 \rightarrow 3', 4 \rightarrow 4'$ 四对对应点的坐标代入 (5-8) 式中，得出的参数如下表表 2 所示：

表 2 二维单目定标模型参数

参数	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8
数值	1.9258 E-3	3.3099 E-4	-0.03120	5.8630 E-5	-0.00189	-0.01663	0.000743	-7.281 E-4

假设靶标上的圆心在像平面的射影依次为 A', B', C', D', E' 。将表 2 中求得的参数代入 (5-8) 式中，然后由靶标上圆的圆心的世界坐标，通过 (5-8) 式求解出其该相机像平面的像坐标，具体求解结果如下表表 3：

表 3 靶标上圆的圆心在像平面的像坐标

特征点		A	B	C	D	E
世界坐标系 (单位: mm)		(-50, 50, 0)	(-20, 50, 0)	(50, 50, 0)	(50, -50, 0)	(-50, -50, 0)
特征点		A'	B'	C'	D'	E'
像平面坐标系 (单位: mm)	x	-49.9572	-23.3775	34.0362	18.8654	-60.1366
	y	-41.9101	-39.928	-35.6464	40.9808	40.8724

靶标上圆的圆心与其在相机像平面中的像坐标的空间对应关系如下图图 5 所示：

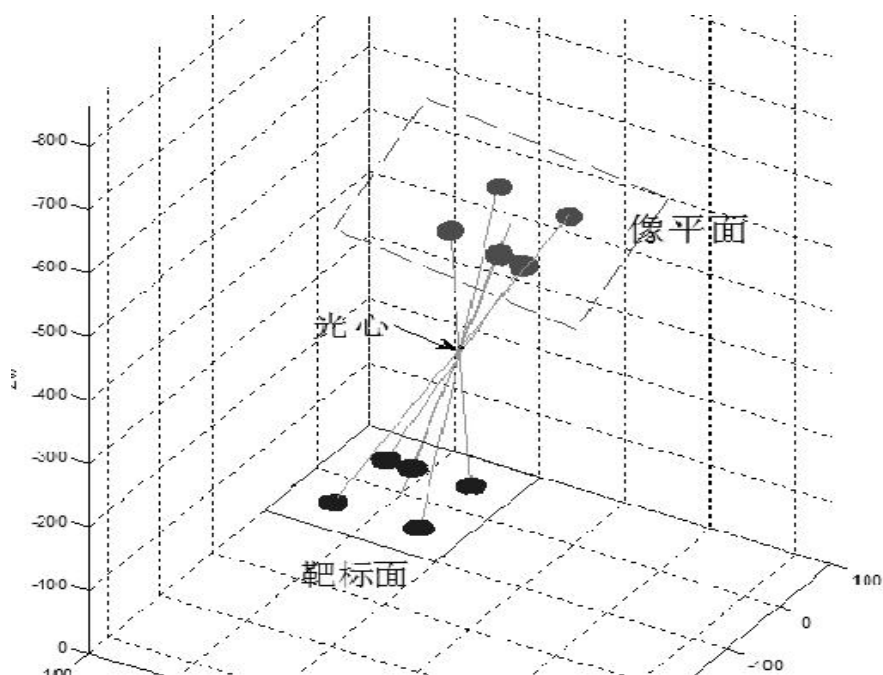


图 5 靶标上圆的圆心与像坐标的空间对应图

2. 相机旋转角及其在世界坐标系中的坐标

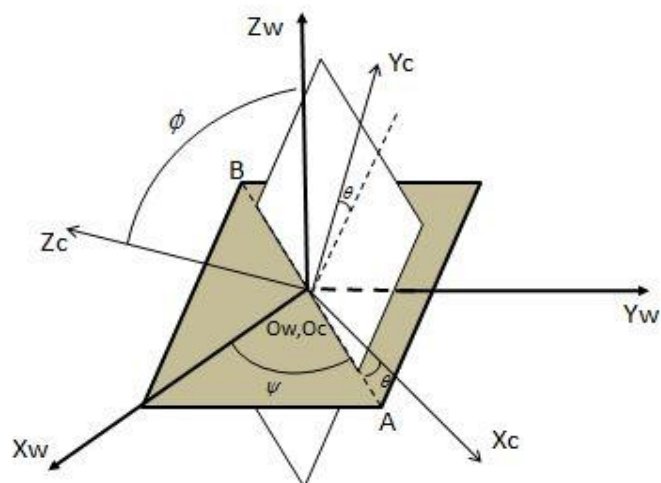


图 6 世界坐标系与摄像机坐标系转换图

上图图 6 中 θ 表示偏转角， ϕ 表示倾斜角， ψ 表示俯仰角。

世界坐标系变换到其中心在摄像机坐标系的中心的转化关系^[4]如下：

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta\sin\phi & \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\sin\theta\cos\phi & -\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

将表 2 中求得的参数代入 (5-9) 式中求得正交单位旋转矩阵 R 和位移向量 T 。根据旋转矩阵 R ，再由 (6-1) 式可得相机的偏转角、倾斜角和俯仰角分别为 $\theta = -18.8747^\circ$ ， $\varphi = 9.7535^\circ$ ， $\phi = 155.0864^\circ$ 。根据位移向量 T ，再由世界坐标系与摄像机坐标系转化关系 (5-3) 式，可得相机光学中心在世界坐标系中的坐标为 $(-160.2588, 170.6876, 424.1587)$ 。

6.2 模型分析

1. 精度检验

求解问题一的单目定标模型的关键在于确定模型中的 8 个参数，参数的准确性决定这该模型的精度。因此对求解出的参数的准确性进行检验很有必要。选取图 3 与图 4 中的对应点 $5 \rightarrow 5'$ 的坐标对所求参数进行检验。利用点 5 在世界坐标系中的坐标 $(0,0,0)$ ，代入单目定标模型 (5-8) 式中，求得其在像平面中的像坐标为 $(462.8048, 357.7679)$ ，与点 5 在像平面中的实际投影 $5'$ 的像坐标 $(462.8048, 357.7679)$ 完全吻合。这说明模型求解时确定的参数具有很高的准确性，从而使该模型具有很高的精度。

2. 敏感性分析

参数的稳定性决定了该单目定标模型的稳定性，从而决定这该模型求解像坐标的稳定性。因此，考虑参数 L_1 分别上下波动 5%，10%，20% 时，求解的特征点的像坐标的横纵平均偏移量如下表表 4 所示。

表 4 参数波动时像坐标的偏移量

特殊点		-5%	5%	-10%	10%	-20%	20%
L_1	Δu	8.19	-8.19	16.39	-16.38	32.77	-32.78
	Δv	0	0	0	0	0	0
L_2	Δu	0	0	0	0	0	0
	Δv	0.25	-0.24	0.50	-0.49	0.99	-1.00

分析表 4 可知：若参数 L_1 上下波动相同的百分比，两次波动的偏移量基本相同。随着波动百分比的增大，偏移量基本上是呈线性增长方式增大。 L_1 波动只会影响特征点在 u 方向上的偏移，而 L_2 波动只会影响特征点在 v 方向上的偏移。 L_1 微小波动时，引起的偏移量很大，因为它的基数很大，而 L_2 波动引起的偏移量较小。因此模型对参数 L_1 的敏感程度高于对参数 L_2 的敏感程度。

3. 重叠率

将像平面中的图像利用 (5-8) 式的转化关系进行逆转换, 得到还原后的靶标图像, 并与真实的靶标图进行比较。比较的效果如下图图 7 和图 8 所示:

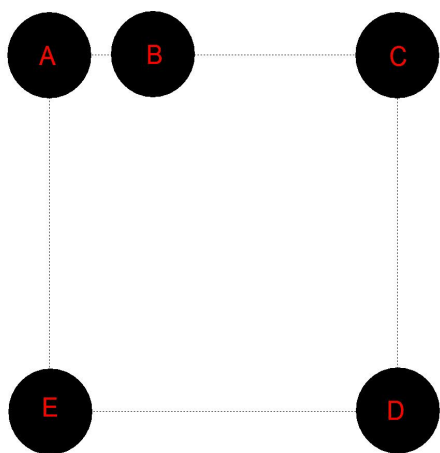


图 7 原始靶标图

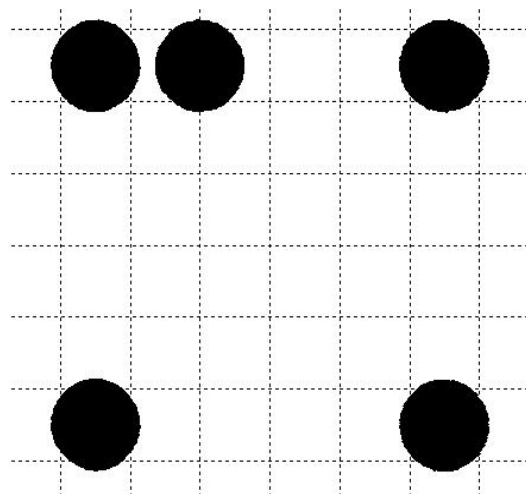


图 8 还原后的靶标图

为进一步研究该模型对图像还原的精确度, 定义重叠率 α :

$$\alpha = \frac{\text{还原后的靶标图中的点在原图中的园内的个数}}{\text{被还原点的总数}}$$

即还原后的靶标图与原始靶标图重合部分面积占整个靶标图的面积的比例。经计算, 还原靶标图与原靶标图的重叠率 α 为 97.2898%, 在误差允许范围内, 满足精度要求。进一步说明该模型有很高的准确度, 能够对图像进行很精确的还原, 从而对靶标图上的点进行准确定标。

4. 还原后的靶标图的圆心偏移量

设圆心偏差距 β 表示还原后的靶标图中圆的圆心与原始靶标图中的圆的圆心坐标的偏移量。假设还原后的靶标图图 8 中的图形可近似看作圆, 其半径仍 r 为 12 mm。设圆心坐标为 (x_0, y_0) , 圆边界上的点的坐标为 (x_i, y_i) 。建立如下确定圆心的最优化模型:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum (\Delta p_i + \Delta q_i) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + \Delta p_i - \Delta q_i = r^2 \\ \Delta p_i \geq 0, \Delta q_i \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6-2)$$

其中, Δp_i 、 Δq_i 分别为正、负偏差变量, 表示了对约束条件的满足程度。

通过 LINGO 编程求解 (6-2) 式的最优化模型, 可以得到还原后的靶标图中圆的圆心坐标, 并与原始靶标图中的圆心坐标进行比较。比较的结果如下表表 5 所示:

表 5 还原靶标图的圆心与原始靶标图的圆心比较

特殊点	A	B	C	D	E
还原图圆心	(-49.97,49.90)	(-20.08,49.91)	(49.86, 49.91)	(49.90,-50.13)	(-49.94,-49.85)
原始图圆心	(-50, 50)	(-20, 50)	(50, 50)	(50, -50)	(-50, -50)
偏移量 β	0.101702	0.123473	0.168868	0.157625	0.158092

还原靶标图中五个的图形的圆心偏离原始靶标图中的对应圆的圆心的距离的平均值为 0.14195 mm ，误差很小，精度很高。说明该模型能够利用像平面中的图像，精确地确定原始靶标图中特征点的位置。

6.3 与椭圆拟合定中心方法比较

通过对图像射影原理的分析可知，当图像平面与靶标图所在平面平行时，对于半径非零的靶标图上的圆，由椭圆拟合求得的中心与靶标图中圆的圆心的实际投影才是相同的。两个平面的夹角越大，两个中心点的差别越大。当图像平面与靶标图所在平面所成夹角较小时，可以近似地由椭圆拟合求出的中心来代替靶标图中圆的圆心的实际投影。然而，当两个平面所成夹角较大时，这种简化处理的方法带来的测量误差较大，在高精度测量要求的场合不是很合理。

在精度要求不是很高的情况下，利用椭圆拟合求中心法近似定圆心的像坐标，并将这种简化方法求解的结果与问题二中利用单目定标模型求解的精确结果进行比较。其比较结果如下表表 6 所示：

表 6 椭圆拟合法与单目定标模型的结果比较

特殊点		A'	B'	C'	D'	E'
椭圆拟合法	u	322.8197	422.9955	639.9571	582.8526	284.7081
	v	189.3777	196.9688	213.0619	503.2053	501.7608
单目定标模型	u	323.1617	423.6330	640.6566	583.3110	284.6836
	v	189.5797	197.0722	213.2565	502.9073	502.4978
偏差距离		0.3971	0.6456	0.7264	0.5468	0.7374

由上表 6 可知，这两种方法确定的圆心的像坐标的结果很相近，圆心像坐标的平均偏差距离为 0.6107 像素，误差很小。说明照相机在给靶标图摄像时，图像平面与靶标图所在平面所成夹角较小，这种情况下用椭圆拟合求出的中心来代替靶标图中圆的圆心的实际投影是合理可靠的。

7. 问题三 模型精度及稳定性检验

为了对三维单目定标模型进行检验，我们采用对所给数据，即拍摄图像加入噪声的办法，进一步观察模型在噪声影响下所得结果，对模型的精度与稳定性进行判断。

分别对数据图像加入了均值为 0 ，方差为 0.5 的高强度高斯白噪声和强度为 0.5 的椒盐噪声。进行数据与处理后可以发现，图像经过处理后，加入的噪声使得图像的边沿受到了侵蚀，使找到的切线受到干扰。对处理后的数据寻找切线，得到交点如下表表 7 所示：

表 7 切线交点坐标 (单位: 像素)

	高斯噪声	椒盐噪声
交点 1	(284. 5878, 144. 1968)	(286. 9882, 145. 6605)
交点 2	(684. 5284, 177. 0927)	(681. 4353, 178. 6018)
交点 3	(609. 9597, 534. 7696)	(610. 8865533. 7785)
交点 4	(241. 4646538. 4669)	(242. 786, 537. 3408)

利用所得对应点求得参数并得到像平面与靶标图的坐标变换关系参数如下表表 8 所示:

表 8 坐标变换关系参数

参数	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
高斯噪声	1. 9337 E-3	3. 327 E-4	-3. 126 E-2	5. 323E-05	-1. 901 E-3	-1. 648 E-2	7. 548 E-4	-7. 76 E-4
椒盐噪声	1. 9197 E-3	3. 207 E-4	-3. 086 E-2	5. 425E-05	-1. 89 E-3	-1. 714 E-2	7. 619 E-4	-6. 72 E-4

利用所得参数, 将像平面的数据点还原并进行圆心拟合所的结果如下表表 9 所示:

表 9 圆心拟合的坐标 (单位: mm)

特征点		A	B	C	D	E	圆心偏差距
高斯噪声	X_w	-50. 36557	-20. 04468	49. 56666	49. 70321	-50. 57481	0. 374741
	Y_w	50. 08572	49. 99444	49. 67538	-50. 10887	-49. 84392	
椒盐噪声	X_w	-50. 24789	-20. 1462	50. 15447	49. 89482	-50. 09769	0. 2946046
	Y_w	49. 87573	49. 89267	49. 89178	-50. 68727	-49. 9135	

与未加噪声前的结果相比 (圆心偏差距离为 0. 14195210mm), 高斯噪声和椒盐噪声分别使圆心偏差距离 Beta 增加了 163. 99%和 107. 54%可见对模型的精度还是有相当大的影响。在加噪情况下利用坐标变换求得像中对应的圆心如下表表 10 所示:

表 10 加噪情况下像中对应的圆心像坐标

特征点		A	B	C	D	E
高斯噪声	u	321. 9198449	423. 1640878	641. 5510983	583. 48563	284. 24177
	v	189. 0097714	196. 3382626	212. 1460482	502. 99047	503. 57672
椒盐噪声	u	323. 755509	423. 7619317	639. 4111674	584. 23836	285. 66562
	v	189. 717782	197. 084657	212. 9702464	501. 84687	502. 27269

可以得出在两种噪声的干扰下求得的圆心与未干扰前相比的圆心偏差距离分别为 1. 0044546 像素与 0. 8867235 像素。这种差距相对于整个象图来说是比较小的, 说明即使在有较大的噪声的干扰下, 三维单目定标模型也能较精确的得出像中原点, 具有良好的稳定性与精度。

8. 问题四的双目标定模型

实际生活中, 对物体上的特征点进行定标时, 最常用的定位方法是双目定位, 即用两部相机来定位。对物体上一个特征点, 用两部固定于不同位置的相机摄得物体的像, 分别获得该点在两部相机像平面上的坐标。只要知道两部相机精确的相对位置, 就可用几何的方法得到确定特征点的位置。于是对于双目定位, 精确地确定两部相机的相对位置就是关键。因此需要建立数学模型, 利用靶标及其在这两部相机像平面中的图像, 确定这两部固定相机的相对位置。

双目标定包括包括单部相机分别标定确定的内部参数和两部相机标定确定外部参数两部分。

8.1 相机内部参数标定

利用问题一中建立的世界坐标系中的点与像平面中的射影对应关系的单目定标模型，可以分别标定两部相机的内部参数。具体的标定步骤如下：

- 1) 两部相机固定于不同的位置，同时从不同的角度和位置对同一物体进行拍摄，得到物体在这两部相机的像平面的两组图像；
- 2) 对于每组图像，提取定标点在各自像平面中的像坐标，并找出其对应点在世界坐标系中的坐标；
- 3) 利用对应定标点的二维像平面坐标与三维的世界坐标，代入单目定标模型（5-8）式中，通过求解线性方程组得到内外参数。

8.2 两部相机外部参数标定

在8.1中可得到两部相机各自的内外参数，内外参数分别用 R_1, T_1 和 R_2, T_2 表示， R_1, T_1 表示第一部相机与世界坐标系之间的相对位置， R_2, T_2 表示第二部相机与世界坐标系之间的相对位置。对于任意一点 P ，若它在世界坐标系、第一部相机坐标系和第二部相机坐标系中的非齐次坐标分别为 (X_w, Y_w, Z_w) 、 (X_{c1}, Y_{c1}, Z_{c1}) 和 (X_{c2}, Y_{c2}, Z_{c2}) 。则存在如下转化关系：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_{c1} \\ Y_{c1} \\ Z_{c1} \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T_1 \\ \begin{bmatrix} X_{c2} \\ Y_{c2} \\ Z_{c2} \end{bmatrix} = R_2 \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T_2 \end{cases} \quad (8-1)$$

将上式（8-1）中的 X_w, Y_w, Z_w 消去后得到

$$\begin{bmatrix} X_{c1} \\ Y_{c1} \\ Z_{c1} \end{bmatrix} = R_1 R_2^{-1} \begin{bmatrix} X_{c2} \\ Y_{c2} \\ Z_{c2} \end{bmatrix} + T_1 - R_2^{-1} T_2 \quad (8-2)$$

设两部固定相机相对位置的几何关系可用 R_s 和 T_s 表示。其中 $R_s = R_1 R_2^{-1}$ ，为第二个相机像平面到第一个相机像平面的正交单位旋转矩阵；其中 $T_s = T_1 - R_2^{-1} T_2$ ，为第二个相机像平面到第一个相机像平面的位移向量，则建立如下双目标定模型：

$$\begin{bmatrix} X_{c1} \\ Y_{c1} \\ Z_{c1} \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} X_{c2} \\ Y_{c2} \\ Z_{c2} \end{bmatrix} + T_s \quad (8-3)$$

因此，两部相机的相对几何位置 R_s 和 T_s 可由 R_1, T_1 和 R_2, T_2 计算求出。

9. 模型优缺点及改进方向

模型优点：

1. 模型使用直接线性变换得出点点对应关系，只需少量数据即可较精确地实现相机的标定。
2. 模型具有很高的精度和稳定性，具有很强的抗干扰能力，能够对图像进行精确的还原。
3. 模型具有很好的普适性，能够很好地解决二维和三维的标定问题，操作简单，需要的数据量少。

模型缺点：

1. 确定参数时用到的特征点较少，求解出的参数可能存在一定的误差。
2. 没有考虑摄像机的径向畸变、切向畸变等因素引起的误差。
3. 通过找切线的方法来确定特征点，然而切线的确定存在一定误差。

改进方向：

可以引入畸变因子对模型进行改进，更准确的找出像图中圆点对应位置。相机获得的数据除了受到来自环境中的噪声的影响，还会受到自身缺陷的影响。相机内部干扰成像的因素主要有径向畸变、偏心畸变等，这些都会影响该模型的精度可以引入畸变因子对模型进行改进，更准确的找出靶标图中圆心对应射影的位置。

使用求切线的方法确定特征点，在模型中取得了较好的精度，不过由离散化的图形所求得的切线不可避免地会产生一些误差。若能找到更精确的确定特征点的方法，将能得到更好的结果。

10. 进一步工作及模型推广

进一步工作：

可以自己动手分别做二维和三维的双目标定模型实验，通过收集实际实验数据，检验所建模型的精确度、稳定性、复杂性及实际操作的简单易行性。通过在实验中使用该模型，发现该模型存在的缺点和不足，并进一步针对这些不足之处进行改进，使该模型能够在实际生活中得到更好地应用。

模型推广：

建立的三维单目定标模型可以很好地运用到三维重建、交通监管、机器人图像识别等领域。可以对该模型进行进一步研究，引入更加科学的方法，不断提高其准确度和稳定性，使其能够充分地运用到日常生活中，更好地解决实际问题。

11. 参考文献

- [1] 郝文化、田蕾、董秀芳，MATLAB 图形图像处理应用教程，北京：中国水利水电出版社，2004 年。
- [2] 李力冬，刘教民，单目视图下相机标定和平面测距研究，河北科技大学学报，第 26 卷第 1 期：47-50 页，2005 年 3 月。
- [3] 陈燕新，一组用于识别平面多边形的射影不变量，红外与毫米波学报，第 17 卷第 2 期：99-102 页，1997 年。
- [4] 章毓晋，图像工程，北京：清华大学出版社，2007 年。