

DVD 在线租赁的优化设计方案

摘要：我们研究了一个 DVD 在线租赁问题，针对注册会员满意度的问题，提出了解决 DVD 分配方案以及应该购买 DVD 数量的模型与算法。我们得到如下结果：

问题 1：我们把模型简化为每月集中在月初和 16 号租赁，15 号和月末归还，月初时所有 DVD 全部被借出，月末全部归还，通过对这些问题的模型假设列出方程，解出至少准备多少张，才能保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50% 在一个月之内能够看到该 DVD。

问题 2：目标函数是会员要获得最大满意度，满意度与会员对 DVD 偏爱程度有关，根据实际模拟出一个偏爱度的函数，要获得最大满意度，求所有会员对所收到 DVD 的偏爱度的和即可，然后通过 0-1 变量建立 0-1 规划模型求解会员获得的满意度最大时 DVD 的分配方案。我们在模型二求解时，认为该问题是一个变相的指派问题，用 LINGO 进行求解，然后我们又提出了一个寻找并逼近最优分配的算法，用 matlab 实现求解解得的满意度稍微小于用 LINGO 解的值，但运行速度加快，具体结果详见表一与表二。

问题 3：是一个多目标最优化问题，优化目标有两个，会员的满意度和 DVD 的购买量，两个目标在一定程度上相互影响，相互制约，要使满意度变大，即使购买量变大。同时还要满足 95% 的会员得到他想要的 DVD，我们认为会员得到订单中十种 DVD 中的任意三种即为他得到想得到的 DVD。仍然用 0-1 变量建立了一个 0-1 规划。用 LINGO 进行求解，结果详见表三。我们还基于贪婪算法提出的一个新的解法得出一个近似最优解。

问题 4：我们考虑到生活中的关于 DVD 需求预测、购买和分配的实际情况。提出了一些问题并对其进行简单的解答和模型修改与建立。对于 DVD 需求预测我们应用灰度预测模型进行预测。

关键词：满意度函数 0-1 规划 指派问题 贪婪算法 灰度预测

问题重述

如下是在线 DVD 租赁问题。顾客缴纳一定数量的月费成为会员，订购 DVD 租赁服

务。会员对哪些 DVD 有兴趣，只要在线提交订单，网站就会通过快递的方式尽可能满足要求。会员提交的订单包括多张 DVD，这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的。网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次，每次获得 3 张 DVD。会员看完 3 张 DVD 之后，只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回（邮费由网站承担），就可以继续下次租赁。请考虑以下问题：

- 1) 网站正准备购买一些新的 DVD，通过问卷调查 1000 个会员，得到了愿意观看这些 DVD 的人数（表 1 给出了其中 5 种 DVD 的数据）。此外，历史数据显示，60% 的会员每月租赁 DVD 两次，而另外的 40% 只租一次。假设网站现有 10 万个会员，对表 1 中的每种 DVD 来说，应该至少准备多少张，才能保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50% 在一个月内能够看到该 DVD？如果要求保证在三个月内至少 95% 的会员能够看到该 DVD 呢？
- 2) 表 2 中列出了网站手上 100 种 DVD 的现有张数和当前需要处理的 1000 位会员的在线订单，如何对这些 DVD 进行分配，才能使会员获得最大的满意度？请具体列出前 30 位会员（即 C0001~C0030）分别获得哪些 DVD。
- 3) 继续考虑表 2，并假设表 2 中 DVD 的现有数量全部为 0。如果你是网站经营管理人员，你如何决定每种 DVD 的购买量，以及如何对这些 DVD 进行分配，才能使一个月内 95% 的会员得到他想看的 DVD，并且满意度最大？
- 4) 如果你是网站经营管理人员，你觉得在 DVD 的需求预测、购买和分配中还有哪些重要问题值得研究？请明确提出你的问题，并尝试建立相应的数学模型。

表 1 对 1000 个会员调查的部分结果

DVD 名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
愿意观看的人数	200	100	50	25	10

表 2 现有 DVD 张数和当前需要处理的会员的在线订单（表格格式示例）

DVD 编号		D001	D002	D003	D004	...
DVD 现有数量		10	40	15	20	...
会员 在线 订单	C0001	6	0	0	0	...
	C0002	0	0	0	0	...
	C0003	0	0	0	3	...
	C0004	0	0	0	0	...

注：D001~D100 表示 100 种 DVD，C0001~C1000 表示 1000 个会员，会员的在线订单用数字 1,2,... 表示，数字越小表示会员的偏爱程度越高，数字 0 表示对应的 DVD 当前不在会员的在线订单中。

模型假设

- 1) 假设一个月为一个租赁周期，60% 的人租两次，40% 的人租一次，第一次下订单是月

初，租两次的人统一在月初借，在 15 号还，16 号继续下第二张订单，并和租一次的人在月末把所有 DVD 归还，而租一次的人有可能在月初也有可能在 15 号租赁到他想要的 DVD。

- 2) 假设第一，二，三个月会员分别对 DVD_i 的需求量基本保持不变。
- 3) 假设一个月内，会员的所有订单中所选 DVD 的排序不变。
- 4) 如果你订单上的 10 张 DVD 存货小于三张时进行等待，直到能够分给该会员他想得到的某三张 DVD，网站才会发片。
- 5) 一个会员在归还 DVD 后，不会再租赁同一张 DVD。

问题分析

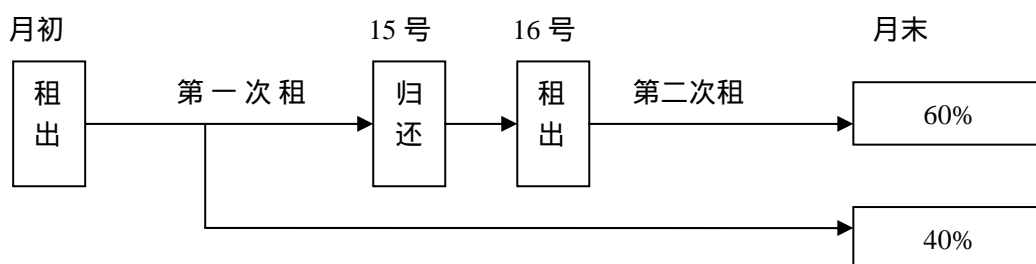
该问题是一个在一定约束条件下的最优化问题，问题二的目标函数是会员要获得最大满意度，满意度与会员对 DVD 偏爱程度有关，可以先构造一个偏爱度的函数，要获得最大满意度，求所有会员对所收到 DVD 的偏爱度的和即可。问题三是一个多目标最优化问题，优化目标有两个，会员的满意度和 DVD 的购买量，两个目标在一定程度上相互影响，要使满意度变大，即使购买量变大。同时还要满足 95% 的会员得到他想要的 DVD，我们认为会员得到订单中十种 DVD 中的三种即为他想得到的 DVD。在解决问题二和问题三时，我们分别用两个 0-1 变量来表示会员 i 是否租到他想要的 DVD_j 和会员一个月内的租赁次数，通过这些决策变量我们可以列出约束条件进行求解。

基本符号说明

D_i	需购买 DVD_i 的张数
P_i	愿意看 DVD_i 的人的数量
a_{ij}	第 i 名会员租赁 j 张 DVD 的偏爱程度值（不被租赁的 DVD 偏爱值为 0），其中 $a_{ij} = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$
C_i	当会员租到他想要的 DVD 时记为 1，其它记为 0
E_i	当会员在一个月内存租赁两次记为 1，否则记为 0；

模型建立

5.1 模型一



因为该网站是月费制，我们选一个月为一个租赁周期，到第二个月全部 DVD 收回，重新进入下一个租赁周期。D1 显然小于 DVD1 的需求量 200 张，所以开始的时候 D1 会被全部租出，因为 40% 的人一个月只租一次，我们认为他们等到月末才会归还，60% 的人一个月租两次，第一次看了半个月就归还，这时有 0.6D1 被归还回来可以继续租给他人，其他人看了半个月后归还，这样就构成了一个租赁周期。可表示为：

$$D_i + 0.6 D_i = 50\% * P_i$$

同样因为我们已经假设了以一个月为一个租赁周期，所以第二，三个月的租赁方法与第一个月一样，且我们已经假设第一，二，三个月会员分别对 DVD_i 的需求量保持不变。所以可以列式为：

$$3 * (D_i + 0.6 D_i) = 95\% * P_i$$

5.2 会员的偏爱度函数

会员的满意度与会员的偏爱程度有关，对租到的 DVD 的偏爱程度越高，会员的满意度越大，要使会员获得最大的满意度，即使所有会员对租到的 DVD 的偏爱程度的综合评价最高，我们就用这些偏爱度的和来表示这个综合评价。

事实上，每一个会员对 DVD 都有一个“偏爱程度”，通常认为每个会员对 DVD 的偏爱程度可以分为十种等级，即构成了评语集 $V = \{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7 \ v_8 \ v_9 \ v_{10}\}$ ，

并附相应的数值 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10。

为了得到“偏爱度”的量化指标，首先注意到，人们对在选择 DVD 时，开始时随着偏爱程度等级的降低，偏爱度的量化值变化不大，但当偏爱程度降到某一个等级时，以后每个会员对 DVD 的偏爱程度每降低一级可能导致会员的不感兴趣，根据实际情况我们构造这样一个函数：

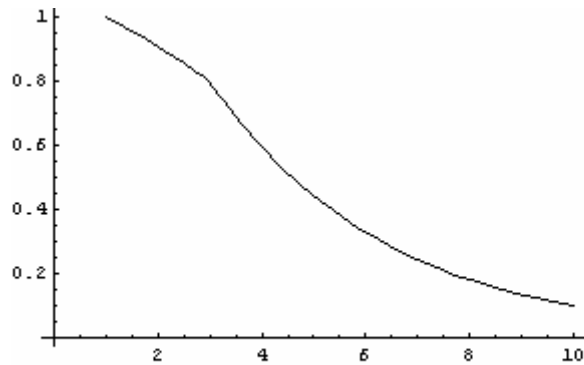
$$f(x) = \begin{cases} a \ln(11-x) + b, & 1 \leq x \leq 3 \\ e^{\frac{-x+\beta}{\alpha}}, & 3 \leq x \leq 10 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

当“非常喜欢”时，则把这个函数值量化为 1，即 $f(1) = 1$ ，当“一般喜欢”时，则把这个函数量化为 0.8，即 $f(3) = 0.8$ ，当“不是很喜欢”时，则函数量化为 0.1，即 $f(10) = 0.1$ 。

于是确定出 $\alpha = 3.36629$, $\beta = 2.24883$, $a = 0.896284$, $b = -1.06377$, 经计算可得

$$f(1)=1, \quad f(2)=0.9056, \quad f(3)=0.8, \quad f(4)=0.5944, \quad f(5)=0.4416, \quad f(6)=0.3281, \\ f(7)=0.2438, \quad f(8)=0.1811, \quad f(9)=0.1346, \quad f(10)=0.1$$

且其中 $f(0) = 0$



偏爱度图像，横坐标为偏爱程度，纵坐标为量化值

则每个会员对 DVD 的分配的评语集为 $\{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7 \ v_8 \ v_9 \ v_{10}\}$ 的量化值

为 $\{1, 0.9056, 0.8, 0.5944, 0.4416, 0.3281, 0.2438, 0.1811, 0.1346, 0.1\}$

5.3 模型二：

构造三个决策变量：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当第一次分配第 } i \text{ 个会员租赁第 } j \text{ 个 DVD 且 } a_{ij} > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 1000 \\ j = 1, \dots, 100 \end{matrix}$$

会员的满意度可用 z 来表示，则

$$\max z = \sum_{i=1}^{1000} \left(\sum_{j=1}^{100} f(a_{ij}) * x_{ij} \right)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{100} x_{ij} = 3 \text{ 或 } 0 \\ \sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq D_j \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

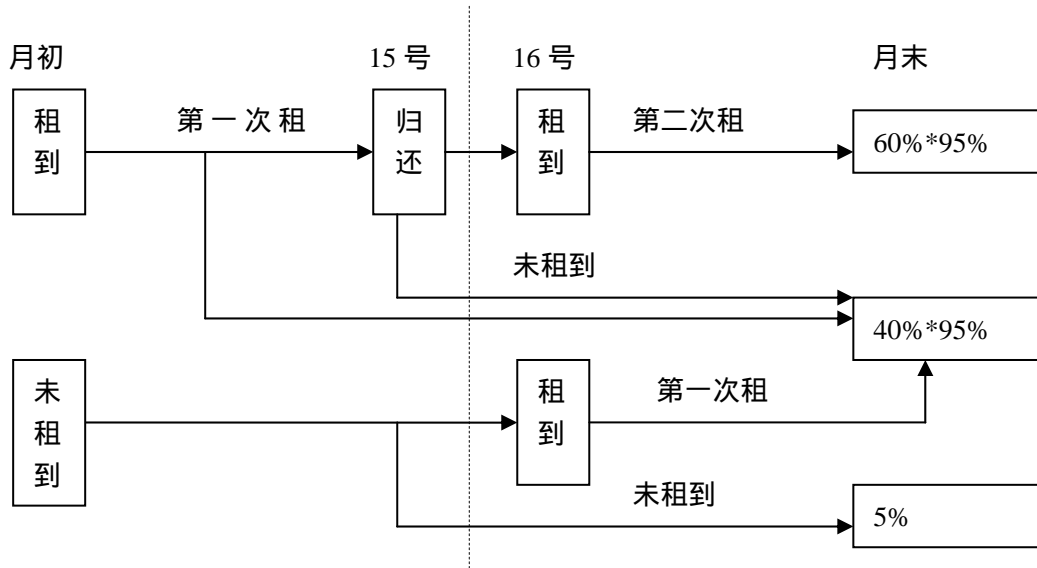
5.4 模型三

如果你订单上的 10 张 DVD 存货小于三张时进行等待，直到能够分给该会员他想得

到的某三张 DVD，网站才会发片。这样就会出现有些会员等了一个月都没等到订单上 DVD 的情况，即为题目中所说的没有得到想看的 DVD 的人的 5%的会员。

根据题意可知会员可分为两种人，一种是在一个月内得到自己想看的 DVD,一种是在一个月内并没有得到他想看的 DVD，而第一种人又可分为一个月租两次和一个月租一次。一个月租一次的可以月初租到月末归还，也可以 16 号租到月末归还。

如图所示：



图：模型三的图示

首先构造两个决策变量：

$$x_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{当第一次分配第 } i \text{ 个会员租赁第 } j \text{ 个 DVD 且 } a_{ij} > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 1000 \\ j = 1, \dots, 100 \end{matrix}$$

$$x_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{当第二次分配第 } i \text{ 个会员租赁第 } j \text{ 个 DVD 且 } a_{ij} > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 1000 \\ j = 1, \dots, 100 \end{matrix}$$

分给第 i 名会员第 j 张 DVD, 当这张 DVD 是他想要的 DVD 时, 则 $x_{ij}^{(1)} = 1$ 或 $x_{ij}^{(2)} = 1$, 否则就不是他想要的 DVD, 所以在 100 张 DVD 中分配给第 i 名会员时如果

$\sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(1)} = 1$ 或 $\sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(2)} = 1$ 则说明这名会员分到了他想要的 DVD, 否则说明他并没有得到

他想要的 DVD。

然后构造两个决策变量：

$$C_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(1)} = 1 \text{ 或 } \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(2)} = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

要使一个月内有 95% 的会员得到他想要的 DVD，则 $\frac{\sum_{i=1}^{1000} C_i}{1000} \geq 95\%$ 。

$$E_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(1)} = 3 \text{ 且 } \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(2)} = 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

要保证大约 60% 的会员每月租赁两次，另外的 40% 只租一次，则 $\frac{\sum_{i=1}^{1000} E_i}{1000} = 60\%$

因为会员不会借他借过的 DVD，所以第一次分配后该会员的偏爱程度矩阵会变化，构造一个新的矩阵 $\overline{a_{ij}}$ ($i=1,2,\dots,1000$, $j=1,\dots,100$) 作为第一次分配之后的偏爱程度矩阵，

先令 $\overline{a_{ij}} = a_{ij}$ ，若在第一次分配中，会员 i_1 租到 DVD j_1 ，则 $\overline{a_{i_1 j_1}} = 0$ ，其他没被租到的 DVD 的喜爱程度 $\overline{a_{ij}}$ ，由小于 a_{ij} 的偏爱程度中曾被租过的个数 n 来决定，即 $\overline{a_{ij}} = a_{ij} - n$ 。

模型二的模型如下：

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_{i=1}^{1000} \left(\sum_{j=1}^{100} f(a_{ij}) * x_{ij}^{(1)} + f(\overline{a_{ij}}) * x_{ij}^{(2)} \right) \\ \text{Min } &\sum_{i=1}^{1000} D_i \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(1)} \leq 3, & \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(2)} \leq 3 \\ \frac{\sum_{i=1}^{1000} C_i}{1000} \geq 95\%, & \frac{\sum_{i=1}^{1000} E_i}{1000} = 60\% \\ \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)} \leq D_i, & \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(2)} \leq (D_i - \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)}) + 0.6 * \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)} \\ x_{ij}^{(1)} = 0 \text{ 或 } 1, & x_{ij}^{(2)} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5.5 DVD 的需求预测，购买与分配

购买：1) 在购买 DVD 时要考虑 DVD 的价格不同这个因素。设价格为 v_j ，建立模型时

的目标函数由原来的购买量最小 ($\text{Min } \sum_{i=1}^{1000} D_i$) 变成购买时的花费最小

$$(\text{Min} \sum_{i=1}^{1000} v_j * D_i)$$

2) 我们认为 DVD 可以在月的中旬随时更新。设新进 DVD 为 m 个，则约束条件

$$\text{中的} \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(2)} \leq (D_i - \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)}) + 0.6 * \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)} \text{ 变为}$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(2)} \leq (D_i - \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)}) + 0.6 * \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)} + m \quad \text{同时部分偏爱程度 } a_{ij} \text{ 会发生变化。综}$$

合上面可以把模型改进为：

$$\text{Max } z = \sum_{i=1}^{1000} (\sum_{j=1}^{100} f(a_{ij}) * x_{ij}^{(1)} + f(\overline{a_{ij}}) * x_{ij}^{(2)})$$

$$(\text{Min} \sum_{i=1}^{1000} v_j * D_i)$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(1)} \leq 3, & \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(2)} \leq 3 \\ \frac{\sum_{i=1}^{1000} C_i}{1000} \geq 95\%, & \frac{\sum_{i=1}^{1000} E_i}{1000} = 60\% \\ \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)} \leq D_i, & \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(2)} \leq (D_i - \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)}) + 0.6 * \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)} + m \\ x_{ij}^{(1)} = 0 \text{ 或 } 1, & x_{ij}^{(2)} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

分配： 1) 考虑可以在一个月的任何时候归还和租赁 DVD，这样可以提高 DVD 的利用率。我们可以考虑为概率问题，把月中归还时间与租赁时间看作一个正态分布。对一个月的租赁过程进行计算机模拟。

2) 我们还会发现在实际情况中，一个人下订单时，网站可能会提示 DVD 的存货量信息有的为有库存，有的是暂时短缺，还有的是长时间缺货，会员可以根据这些提示下订单。

3) 在分配时，先到先得，当几人同时等待时我们可能会优先分配给等待时间较长的会员。满意度是一个关于等待时间的单调递减函数，会员 i 的满意度函数

为 $\sum_{j=1}^{100} f(a_{ij}) * x_{ij} - g(t)$ ， $g(t)$ 为一个关于等待时间的单增函数，可以理解为“埋怨

度”，设 t_i 为该会员收到想得到的 DVD 的时间。当 $t \leq t_i$ 时， $g(t) = kt^2$ ，当 $t \geq t_i$ 时，

$g(t) = 0$ 。

4) 分配的时候当发生冲突时要优先分给前几个月满意度较小的会员。我们考虑前三个月的情况,分别对前三个月的满意度进行加权求和,定义从上月到三个月前的权值分别为 0.5,0.3,0.2。取满意度加权求和后最小的会员,并把 DVD 分发给他。

5) 对每个会员建立一个信誉度,如果某会员违约没有按时归还 DVD,则信誉度变低,若某会员信誉度越低则不会在分配时给他优先。

上面一系列问题都是值得我们去研究的,必须将他们考虑到模型中。

需求预测:对 DVD 的总需求(或单个 DVD 需求)的预测我们选用灰色预测的模型

step1: 对数据进行检验与处理,为了保证建模的可行性需要对已知数据列作必要的检测

处理,设以前的统计量即每个月的 DVD 的需求量用 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 计算数列的级比

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)} \quad (k=2,3,\dots,n)$$

如果所有的级比 $\lambda(k)$ 都落在可容覆盖 $X = (e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}})$ 内,则数列 $x^{(0)}$ 可以进行数学灰度预测,否则,需要对数列 $x^{(0)}$ 做必要的变换处理,使其落在可容覆盖内。即取适当的常数 c ,做平移变换 $y^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) + c \quad (k=1,2,\dots,n)$ 则使 $y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n))$ 的级

$$\text{比 } \lambda_y(k) = \frac{y^{(0)}(k-1)}{y^{(0)}(k)} \in X \quad (k=2,3,\dots,n)$$

step 2: 建立灰度模型,根据已知公式可得

$$x^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (k=1,2,\dots,n-1)$$

$$\text{而且 } x^{(0)}(k+1) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) \quad (k=1,2,\dots,n-1)$$

[1]

模型求解

6.1 模型一的求解

$$P_1=20000, \quad P_2=10000, \quad P_3=5000, \quad P_4=2500, \quad P_5=1000$$

使看见该 DVD 的会员至少 50% 在一个月之内能够看到该 DVD 的

$$D_1=6250 \quad D_2=3125 \quad D_3=1563 \quad D_4=782 \quad D_5=313$$

使看见该 DVD 的会员至少 95% 在三个月之内能够看到该 DVD 的

$$D_1=3960 \quad D_2=1980 \quad D_3=990 \quad D_4=495 \quad D_5=198$$

6.2 模型二的求解：

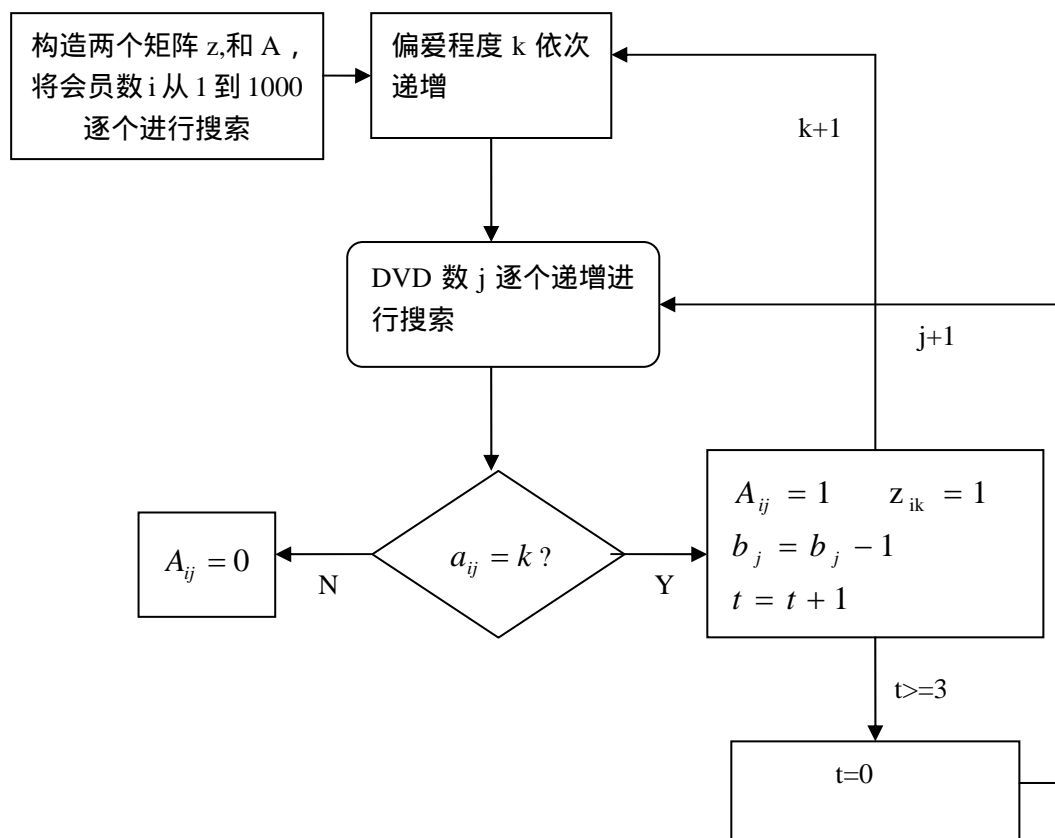
6.2.1，该问题为一种变相的指派问题（某单位须完成 n 项任务，恰好有 n 人可承担这些任务），指派问题有固定的算法，用 lingo 编程[2]得前 30 位会员分别得到的 DVD 为：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
所选 DVD	8	6	4	7	11	19	8	31	53	55
	41	44	50	18	66	5	26	71	78	60
	98	62	80	41	68	66	51	78	100	85
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
所选 DVD	59	2	21	23	13	55	47	41	66	45
	63	7	78	52	66	84	51	60	84	61
	66	31	96	89	85	97	67	78	86	89
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
所选 DVD	45	38	29	37	9	22	22	8	26	37
	50	55	81	41	69	68	50	26	30	62
	53	57	95	76	94	95	58	34	55	98

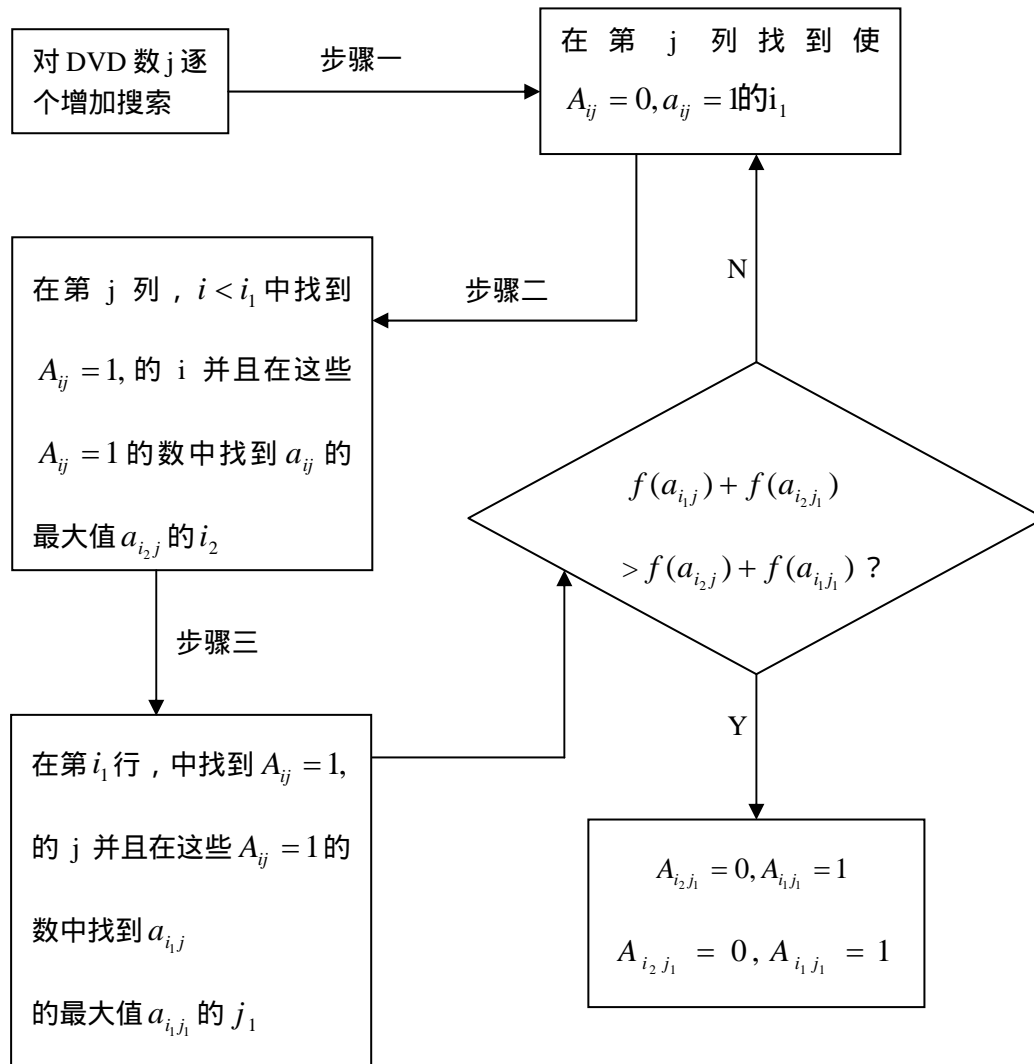
表一：lingo 问题二的分配方案

其中，他们获得的最大满意度 z 为 2397

6.2.2，构造一个算法，如下流程图所示：



构造好 $z[]$ 和基本的 $A[]$ 后，如下面流程所示对 $A[]$ 中的 A_{ij} 进行调整达到 DVD 的分配最优，使会员获得最大满意度。



上面流程结束后，接着步骤一变为“在第 j 列找到使 $A_{ij} = 0, a_{ij} = 2$ 或 3 的 i_1 ”，其他步骤按上面步骤进行，用 matlab 编程得：前 30 个会员得到的 DVD 为：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
所选 DVD	8	6	4	7	11	16	8	15	53	55
	82	44	50	18	66	19	26	31	78	60
	98	62	80	41	68	53	81	71	100	85
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
所选 DVD	19	2	21	23	13	6	47	41	67	45
	58	7	78	43	85	84	51	60	84	61
	83	31	96	52	88	97	67	78	86	89

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
所选 DVD	45	38	29	37	9	22	22	8	30	1
	53	55	81	41	69	68	42	34	44	37
	65	57	95	76	94	95	58	82	55	62

表二：算法问题二的分配方案

求得的会员的最大的满意度 z 为：2182.3

6.3 模型三的求解：

6.3.1. 这是一个多目标函数，要想求解必须把它转化为单目标函数，根据会员的满意度最大和 DVD 的购买量最小的双重目标，我们采用先满意度后购买量的策略。

第一步：根据满意度最大原则，要得到第一次分配和第二次分配第 i 名会员的 DVD 分配情况，解出 $x_{ij}^{(1)}$ 和 $x_{ij}^{(2)}$ 的优值。[3]

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= \sum_{i=1}^{1000} \left(\sum_{j=1}^{100} f(a_{ij}) * x_{ij}^{(1)} + f(\bar{a}_{ij}) * x_{ij}^{(2)} \right) \\
 \text{s.t.} \\
 &\begin{cases} \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(1)} \leq 3, & \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(2)} \leq 3 \\ \frac{\sum_{i=1}^{1000} C_i}{1000} \geq 95\%, & \frac{\sum_{i=1}^{1000} E_i}{1000} = 60\% \\ \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)} \leq D_i, & \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(2)} \leq (D_i - \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)}) + 0.6 * \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)} \\ x_{ij}^{(1)} = 0 \text{ 或 } 1, & x_{ij}^{(2)} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

第二步：在一定满意度要求下，要考虑到购买量的最小重新调度。

$$\begin{aligned}
 \text{Min } &\sum_{i=1}^{1000} D_i \\
 \text{s.t.} \\
 &\begin{cases} \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(1)*} \leq 3, & \sum_{j=1}^{100} x_{ij}^{(2)*} \leq 3 \\ \frac{\sum_{i=1}^{1000} C_i^*}{1000} \geq 95\%, & \frac{\sum_{i=1}^{1000} E_i^*}{1000} = 60\% \\ \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)*} \leq D_i, & \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(2)*} \leq (D_i - \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)*}) + 0.6 * \sum_{i=1}^{1000} x_{ij}^{(1)*} \\ x_{ij}^{(1)*} = 0 \text{ 或 } 1, & x_{ij}^{(2)*} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

其中 $x_{ij}^{(1)*}$, $x_{ij}^{(2)*}$ 为上面在满意度最大为目标函数时求得的最优的分配方案。

用 lingo8.0 对模型进行求解得到每种 DVD 的购买量：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	32	30	32	24	26	29	30	31	26
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
27	29	27	27	22	37	32	27	30	33
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	28	35	25	26	27	24	21	27	32
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
28	29	34	26	36	31	26	24	23	30
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
40	37	27	32	35	29	31	23	27	29
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
37	29	31	25	30	34	31	28	31	32
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
23	31	28	37	29	33	29	33	34	35
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
32	31	23	30	22	21	24	28	26	31
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
27	17	24	21	31	26	34	24	24	29
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
32	28	26	26	32	25	30	28	22	34

表三：问题三得 DVD 的购买量

DVD 的总的购买量为 2877 张。

注：分配方式见附件

6.3.2. 我们构造一个贪婪算法来求解这个问题，把双目标线性规划通过加权归一化转变成单目标性线规划，并通过寻找最大满意度和看到他想看到 DVD 的人数比例这两个因素变化最小，来搜索使 DVD 的总数量最小的优解。

步骤一：求 DVD_j 的期望数量， $D_j = \frac{3}{\sum_{k=1}^{10} f(k)} * \sum_{i=1}^{1000} f(a_{ij})$ ($j=1...100$) 取 D_k 上限作为

迭代初值。

步骤二：对各个 DVD 依次进行 $D_k - 5$ ($k=1...100$) 的操作，求每次的最大满意度 z_k ，

以及看到他想看到 DVD 的人数比例 t_k

Step1: 利用模型二对 DVD 的分配算法进行第一次的最优分配，并建立 0-1 矩阵 A (其中 $A(i, j)=1$ 则说明第 i 个会员租赁了第 j 张 DVD, $A(i, j)=0$ 则说明第 i 个会员没

有租赁了第 j 张 DVD 。

Step2: 随机从 $A(i, j) = 3$ 中取 60% 作为一个 月租赁两次的会员, 并将随机选取的会员的 $A(i, j)$ 加到第一次分配后的 D_j' (即分配后各个 DVD 的库存)。

Step3: 再对随机选取的会员和第一次分配未租赁的会员 (即 $A(i, j) < 3$ 的会员) 利用模型二的分配算法进行第二次 DVD 分配, 修正 0-1 矩阵 A 。

Step4: 求出 $A(i, j) \geq 3$ 的会员的总数 n_k , 则会员看到他想看的 DVD 比例是

$$t_k = \frac{n_k}{1000}; \text{最大满意度 } z_k = \sum_{i=1}^{1000} \left(\sum_{j=1}^{100} f(a_{ij}) * A(i, j) \right)。$$

步骤三: 对会员看到他想看到的 DVD 比例 t_k 和最大满意度 z_k 进行归一化。

注: 对 z_k 而言, $z_{\max} = f(1) + f(2) + f(3) = 2.7056$, $z_{\min} = f(8) + f(9) + f(10) = 0.4157$

$$\text{令 } z_k' = \frac{z_k - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}}。$$

如果减少 DVD 数量, 考虑到满意度 z_k 和看到他想看到 DVD 的人数比例 t_k 这两个因素, 现定义 $p_k = z_k' + t_k$ 为减少 DVD 数量的价值, 按价值 p_k 由小到大的顺序作为填充策略, 从而获得近似最优解。[4]

步骤四: 求出最小的 p_k 。

如果 $t_k' \geq 95\%$, 将 $D_{k'} - 5$, 并且回到步骤二继续迭代; 即减少 DVD 的数量, 使最大满意度 z_k 以及看到他想看到 DVD 的人数比例 t_k 的劣达到最小, 并且继续迭代寻找下个 DVD 数量减少点。

如果 $t_k' < 95\%$, 继续步骤五跳出迭代。

步骤五: 输出的数量 D_k , 最大满意度 z_k 。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	32	30	32	25	30	25	29	30	28
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
27	29	27	30	25	35	32	29	32	34
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
32	30	32	26	28	31	28	23	25	33
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
33	30	31	29	34	32	25	30	26	28
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
42	35	29	30	36	27	30	27	30	28
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
34	26	32	26	27	33	30	24	29	34
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
26	32	28	35	31	35	31	33	33	31
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
32	33	24	26	27	25	24	30	28	29
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
31	22	22	22	29	24	32	24	27	31
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
35	29	27	27	33	24	22	32	21	31

表四：问题三的第二种算法的 DVD 的购买量

DVD 的总的购买量为 2905 张。

模型优缺点

- 1) 对模型二的求解我们用了两种解法，一种是直接用 lingo8.0 进行求解，第二种是自己建立了一个算法，其中有思想不够成熟，所以最后求得的最优解比用 lingo8.0 求得的小一些，但相差 $<10\%$ ，而且这个算法的优点就是运行速度比第一种要快。
- 2) 在整个过程中，我们认为一个月租两次的人 15 号还盘，接着 16 号第二次下订单，而一个月租一次的人月末才还 DVD，但如果考虑会员可以随时归还 DVD，那么 DVD 的利用率就会大大增加，所以这样的模型假设会使求得的 DVD 的购买量比最优值大。

灵敏度分析

1. 对于模型三进行灵敏度分析，首先研究每月能够看到想看 DVD 的会员所占百分比变化的影响。

能够看到想看 DVD 的会员所占比例	80%	85%	90%	95%
DVD 的购买量	2698	2753	2811	2877

满意度	2819 . 26	2995 . 47	3171 . 67	3347 . 87
------------	------------------	------------------	------------------	------------------

从表中看出当能够看到想看 DVD 的会员的比例每较少 5% , DVD 的购买量减少大约 0.02% , 满意度减小 1% 。由此看出模型三的稳定性和较好。

2 . 这里我们研究每月租两次的会员所占百分比变化的影响

每月租两次的 会员所占百分 比	50%	60%	70%
DVD 的购买量	3160	2877	2732
满意度	3218 . 28	3347 . 87	3477 . 47

从表中可以看出当每月租两次的会员所占百分比每减少 10% , DVD 的购买量减少大约 5% , 满意度大约减小 5% 。

所以每月租两次的会员所占百分比变化的对 DVD 购买量和满意程度的影响比每月能够看到想看 DVD 的会员所占百分比变化的影响大些。

3.这里我们研究会员每次所拿 DVD 张数的变化对满意度的影响

会员每次所拿 DVD 张数	2	3
满意度	1859 . 7	2397 . 67

由此可以看出每个会员得到的 DVD 基本都是他们的偏爱程度为 1 , 2 , 3 的 DVD。即使每次所拿张数有变化 , 但他们得到的基本都是他们很喜欢的 DVD,没有明显变化。

模型拓展

见 5.5

参考文献：

[1]韩中庚，《数学建模方法及其应用》，北京：高等教育出版社，2005 年

[2]钱颂迪，《运筹学》，北京：清华大学出版社，2002 年

[3]刘康生 胡崇海，《电力市场的输电阻塞管理》，工程数学学报，vol.21 No.7:117 页，2004 年

- [4]杨浩,《模型与算法》,北京:北方交通大学出版社,2003 年
- [5]姜启源 谢金星 叶俊 , 《数学模型》,北京:高等教育出版社,2004 年
- [6]D.Hanselman,B.Littlefield,《Matlab 6》,北京:清华大学出版社 , 2002 年