

全国数学建模竞赛优秀论文集

2008 年

生物医学工程与医学影像学院·数学与生物数学教研室

前 言

数学建模是指利用数学方法和数学软件解决实际问题的过程，从 1994 年开始由教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办数学建模竞赛，每年一次。是目前我国规模最大的一项课外科技活动之一，其目的是培养学生的综合素质、创新意识和实践能力等。我校 2003 年首次组织本科生参加全国大学生数学建模竞赛，得到训练部教务处的全力扶持和学员旅、护理系的大力支持，发展至今，已建立了一个以科室主任为领导核心的数学建模指导教师团队，营造了领导关心数学建模、教师支持数学建模、学生喜欢参与数学建模的良好氛围。

2007 年我校共有 29 队参赛，11 个队参加甲组比赛，获全国一等奖 2 项、全国二等奖 1 项、重庆市一等奖 6 项；18 个队参加乙组比赛，获全国一等奖 3 项、重庆市一等奖 5 项、重庆市二等奖 6 项。我校获得全国奖的比例高出全国平均水平 11.37 个百分点。我校参赛队数占重庆市高校参赛队数的 5.66%，获全国一等奖队数的比例却高达 35.71%，彰显我校实力，为我校争得荣誉。

本册子收录了五篇在 2007 年全国大学生数学建模竞赛中获全国奖的优秀论文，都是在校大学生在三天之内完成的，问题来源于实际，文章思路清晰，方法多样，表述准确流畅，具有严密的逻辑性，具有一定的独到之处。可供参与数学建模竞赛的指导教师和学生参考。

数学与生物数学教研室

2008. 4. 10

目 录

2008 年获全国甲组二等奖	
一种线性相机成像模型及其参数的确定·····李强等	(1)
2008 年获全国乙组一等奖	
地面搜索方式模型 ·····廖斌等	(16)
2008 年获全国乙组一等奖	
NBA 赛程的分析与评价·····邓波等	(30)
2008 年获全国乙组二等奖	
NBA 赛程的分析与评价·····彭六生等	(48)
2008 年获全国乙组二等奖	
地面搜索的数学模型 ·····韦劲宇等	(62)
2008 年获全国乙组二等奖	
NBA 赛程的分析与评价·····吴宏日等	(78)
2008 年获全国乙组二等奖	
地面搜索时间的优化问题 ·····郭 敏等	(98)

一种线性相机成像模型及其参数的确定

李强 张琦 朱孔江

指导教师：罗明奎

摘要

本文讨论的是如何建立单相机成像的某点的空间坐标与该点像坐标之间的函数关系的数学模型，进而讨论如何确定双目定位中两部相机的相对位置。

文中首先根据相机光学成像原理，建立了四个坐标系用以定量描述特征点的位置，在不考虑镜头畸变的情况下建立了针孔相机模型。然后根据问题所给数据计算出了模型中所需的四个内部参数的取值。在确定模型外部参数的取值时，首先通过通过 `matlab7.0` 编程对靶标图像进行中值滤波、二值化、边缘提取的操作，计算出了靶标像图中圆心的像坐标，而后将所得像坐标与基于直角三点的相机外部参数确定方法相结合，通过 `matlab7.0` 编程计算出了模型所需的外部参数，该种做法仅需适用所给五个特征点中成直角关系的任意三个特征点就可以确定所有外部参数。

在对模型进行精度与稳定性检验时，利用基于直角三点的相机外部参数确定方法，通过使用不同的满足成直角关系的三个特征点对模型中的未使用的两个特征点的世界坐标与像坐标进行正反演计算，通过相对偏差来衡量模型的精度。通过在不同世界坐标系下同一特征点的正反演计算误差的波动大小来衡量模型的稳定性。

双目定位中确定两相机相对位置时，首先由针孔相机模型计算出两相机内外参数，而后根据两相机相机坐标系与世界坐标系的关系利用两相机各自的外部参数矩阵求解出两相机相对位置的矩阵表示。

【关键词】：针孔相机模型 中值滤波 边缘提取 基于直角三点的相机外部参数标定法 相对偏差

1、问题重述（略）

2、模型假设

1. 图像中像素是正方形的。
2. 摄像机内部参数只由出厂参数决定，不受环境因素影响。
3. 相机成像不存在镜头畸变。
4. 实验中所用摄像机的出厂参数完全相同。

3、符号说明

f : 摄像机焦距。

$P(X_w, Y_w, Z_w)$: 点 P 在世界坐标系中的坐标。

$P(X_c, Y_c, Z_c)$: 点 P 在摄像机坐标系中的坐标。

$p(u, v)$: 点 P 在图像坐标系中的像坐标。

$p(x, y)$: 点 P 在成像平面坐标系中的坐标。

(u_0, v_0) : 摄像机焦点在图像坐标系中的坐标。

dx, dy : 每个像素在成像平面坐标系的 x 、 y 轴方向上的物理尺寸。

α_x : 表示 x 方向焦距，单位为像素数。 $\alpha_x = \frac{f}{dx}$

α_y : 表示 y 方向焦距，单位为像素数。 $\alpha_y = \frac{f}{dy}$

R : 描述摄像机坐标系与世界坐标系位置关系的旋转矩阵。

t : 描述摄像机坐标系与世界坐标系位置关系的平移矩阵。

N : 摄像机内部参数矩阵。 $N = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

H : 摄像机外部参数矩阵。 $H = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$

$C^i(u, v)$: 靶标中对应圆 i 的圆心在图像坐标系中的像坐标。 $i = 1 \cdots 5$ 分别代表靶

标中的圆 A, B, C, D, E

4、模型建立与求解

题目首先要求建立数学模型来表征空间中靶标上的特征点（假设为 $[x, y, z]$ ）与其在相机像平面上的投影点像坐标（假设为 $[u, v]$ ）之间的关系，即找到 $[u, v] = f([x, y, z])$ 这样一个映射关系。由于相机成像是一个几何光学问题，可根据相机成像中的几何关系建立这两个坐标之间的联系。

4.1 坐标系的建立

为了定量描述相机光学成像中像坐标与相机位置的函数关系，定义四个坐标系，如图 3 所示：

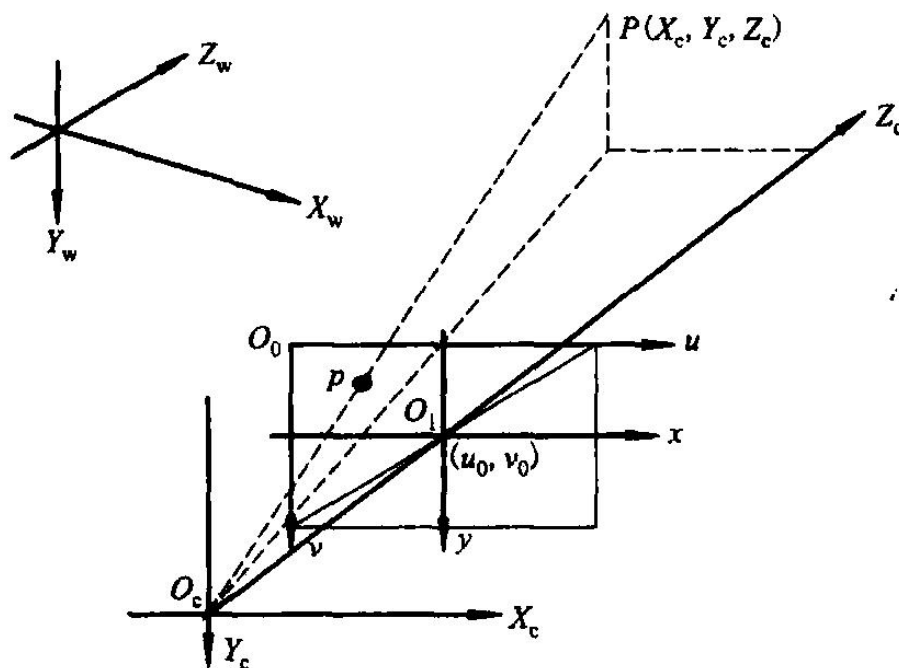


图 3 各坐标系示意图

图像坐标系：建立在像平面上的直角坐标系，坐标原点为 O_0 ，水平轴 u 、垂直轴 v 。图像本身以二维数组形式储存，图像中每一个元素（即像素）的值是对应图像点的灰度。一个像素的坐标 (u, v) 表示了像素在数组中的列数和行数。它是以像素为单位的坐标系。

成像平面坐标系：以摄像机光轴与图像坐标系的交点 O_1 为原点建立坐标系， x 、 y 轴分别与 u 、 v 轴正向平行。该坐标系是为了能用物理单位（比如毫米）明确地表示某个像素在图像中的位置，而引入的以物理单位表示的坐标系。其中原点 O_1 在图像坐标系中的坐标为 (u_0, v_0) 。

摄像机坐标系：该坐标系以镜头的光心 O_c 为原点， X_c 、 Y_c 轴与 x 、 y 轴正向平行， Z_c 轴为摄像机的光轴，与像平面垂直，指向实物， $|O_c O_1| = f$ 。

世界坐标系：为了描述摄像机以及物体的位置所选择的一个基准坐标系。世界坐标系由 X_w 、

Y_w 、 Z_w 三个轴构成，该坐标系原点和空间指向可任意选取。

实际上图像平面应该在摄像机光心的后部，并且物体在图像坐标系中的图像是倒立的。为了研究方便，人们常常将平面移动到光心的前部，而且得到的图像是正立的。图 3 表示中采取了这种表示方法。

拍摄时通常拍摄的是中远距离的物体，成像时物距 u ，像距 v 和焦距 f 之间有函数关系式：

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{f} + \frac{1}{v}, \text{ 因为 } u \gg f, \text{ 所以数码相机的焦距 } f \text{ 可以认为等于像距 } v, \text{ 就相当于透镜的中心}$$

点到感光胶片 CCD 的距离。图 3 中 $f = |O_c O_1|$ 就是这样确定的。

4.2 模型建立

不考虑镜头畸变的相机成像模型为针孔相机模型^[6]。针孔相机模型也是线性模型。根据假设 3，有任何点 P 在图像上的投影位置 p ，为光学中心 O_c 与 P 点的连线 $O_c P$ 与图像平面的交点。

在图 3 中， O_1 在图像坐标系中的坐标为 (u_0, v_0) ，设一个像素在成像坐标系中的 x 轴与 y 轴方向上的物理尺寸为 dx 、 dy ，则像平面中任意一点在图像坐标系和成像坐标系下的相应坐标有如下关系：

$$u = \frac{x}{dx} + u_0, \quad v = \frac{y}{dy} + v_0 \quad (1)$$

用齐次坐标与矩阵形式将(1)式表示为：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

从图 3 可知，摄像机坐标系与世界坐标系之间的位置关系可以用旋转矩阵 R 与平移向量 t 描述。设空间中某一点 P 在世界坐标系与摄像机坐标系中的齐次坐标分别是 $(X_w, Y_w, Z_w, 1)^T$ 与 $(X_c, Y_c, Z_c, 1)^T$ ，则有如下关系：

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 R 为 3×3 正交单位矩阵； t 为三维平移向量： $t = (t_1, t_2, t_3)^T$ ； $0^T = (0, 0, 0)$ 。在图 3

中, (x, y) 为 p 点的成像平面坐标系下的坐标, (X_c, Y_c, Z_c) 为空间点 P 在摄像机坐标下的坐标, $f=|O_c O_1|$ 为摄像机焦距, 根据比例关系可得出:

$$x = \frac{fX_c}{Z_c}, \quad y = \frac{fY_c}{Z_c} \quad (4)$$

用齐次坐标与矩阵表示上述透视投影关系:

$$Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

将方程(2)与(3)代入方程(5)得到以世界坐标系表示的 P 点坐标与其投影点 p 的坐标 (u, v) 的关系:

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = NH \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, $\alpha_x = \frac{f}{dx}$, $\alpha_y = \frac{f}{dy}$ 。 α_x 、 α_y 、 u_0 和 v_0 只与摄像机内部结构有关, 称这些参数为

摄像机内部参数, 对应的 N 矩阵称为摄像机内部参数矩阵; R 和 t 完全由摄像机相对于世界坐标系的方位决定, 称为摄像机外部参数, 相应的 H 矩阵称为摄像机外部参数矩阵。

4.3 模型参数确定

4.3.1 内部参数矩阵 N 的确定

摄像机的内部参数包括 α_x 、 α_y 、 u_0 和 v_0 。根据假设 2, 摄像机的内部参数只由相机的出厂参数决定, 不受环境因素影响, 因而通过问题中所给的数据可以确定出摄像机内部参数的取值。

题目已知相机的像距是 1577 个像素单位, 且 1 毫米约为 3.78 个像素单位, 由 $f \approx v$ 可知 $f = \frac{1577}{3.78} \text{ mm}$; 根据假设 1, 像素为正方形, 则图像坐标中的像素在成像平面坐标系中的物理尺寸表示的 dx , dy 的取值为 $dx = dy = \frac{1}{3.78} \text{ mm}$ 。将 f 、 dx 、 dy 的值代入公式 $\alpha_x = \frac{f}{dx}$,

$\alpha_y = \frac{f}{dy}$, 得到 $\alpha_x = \alpha_y = 1577$ 。

u_0 和 v_0 的取值方法参阅文献^[2]知可用相机分辨率的一半来分别代替。由题目所给相机分辨率为 1024×768 , 可知 $u_0 = 512$, $v_0 = 384$ 。

4.3.2 外部参数矩阵 H 的确定

外部参数矩阵 H 由 R 和 t 组成，完全由摄像机坐标系与世界坐标系的相对位置决定。故 H 的确定需要由多个点在摄像机坐标系与世界坐标系中的对应坐标关系联立方程求解。由于内部参数矩阵 N 已经确定，则(6)式方程表明外部参数矩阵 H 可完全由图像坐标系与世界坐标系的相对位置决定，故需要获得靶标中特征点在图像坐标系与世界坐标系中相对应的坐标。

1) 获取靶标各特征点的像坐标

靶标中特征点为圆心，根据假设 3，在不考虑镜头畸变时，圆的投影为椭圆，因而要确定靶标中各特征点的像坐标就是要确定靶标的像中各椭圆中心点的像坐标。

图像一般都是包含有噪声的，即使这样的噪声非常小，相机参数的实际解与由约束关系所得解之间的差异仍然是相当大的，因而在提取图像特征点之前，首先要对图像去噪。本文中采用的是中值滤波方法。

中值滤波是对一个滑动窗口内的诸像素灰度排序，用其中值代替窗口中心像素的原来灰度值的一种非线性的图像平滑法。中值滤波对脉冲干扰级椒盐噪声的抑制效果好，在抑制随机噪声的同时能有效保护边缘少受模糊^[4]。在实现时通过 matlab7.0 编程实现对靶标图像的中值滤波。

问题中所给相机的分辨率为 1024×768 ，而实际文章中所给靶标的像图的分辨率为 375×281 ，所以利用 matlab7.0 中的缩放命令将像的分辨率放大到相机的分辨率。此后提取像坐标均是在放大后的靶标的像图中进行。

确定图像中椭圆中心坐标的步骤：

1. 将靶标的像图通过 matlab7.0 编程二值化。该步骤有两个作用。其一，可以突出靶标中圆的像，便于特征点提取。第二，二值图像可以对原靶标像图中的噪声点进行一定程度的去噪。
2. 提取二值靶标像图中的圆像的边缘。边缘是两个具有不同灰度级的均匀图像区域的边界，在双目摄像时，它在两幅图像中产生相似的结果，且分布合理，因此选择边缘点作为参考点。
3. 进行边缘提取，读取第二步中提取的边缘上的像坐标 (u, v) 。

因为椭圆边上的点是关于椭圆中心对称的，则椭圆中心的坐标就是关于该中心对称的两点的横、纵坐标的平均值，所以当读取所有像坐标后，根据公式

$$C^i(u, v) = \left(\frac{\sum_{k=1}^m x_k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m y_k}{m} \right) \quad k = 1 \cdots m \quad i = 1 \cdots 5 \quad (7)$$

便可求出靶标中圆心在像坐标系中的像坐标。

将确定图像中椭圆中心坐标的各步对图像的处理后的图像通过 matlab7.0 编程画图显示在图 4 中。

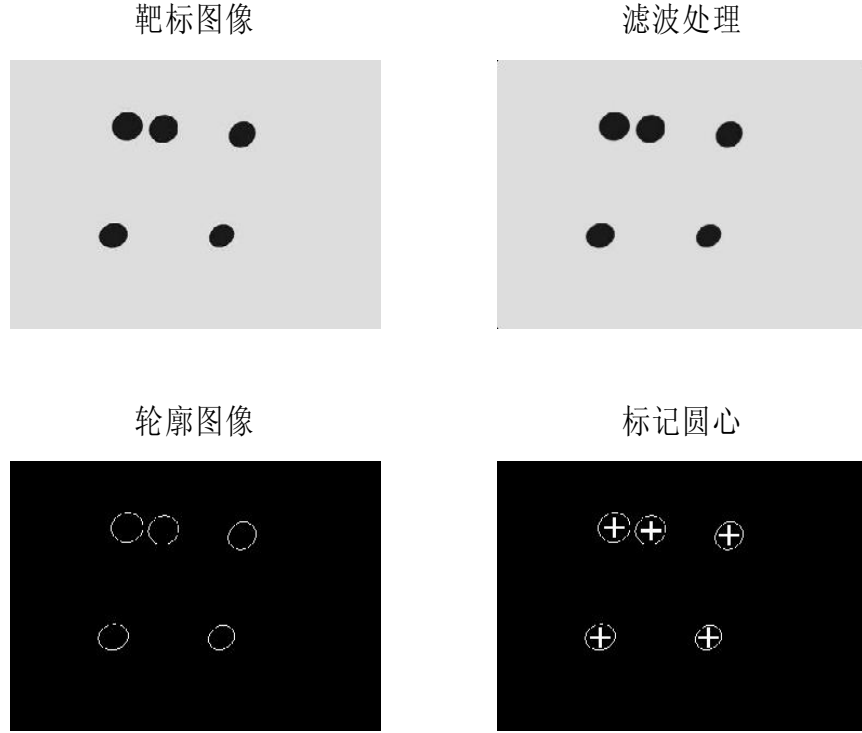


图 4 经过各步处理的图像作图

靶标中五个特征点在图像坐标系下坐标见表 1:。

表 1 靶标中五个特征点的像坐标

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
图像坐标系	(324, 189)	(424, 197)	(641, 213)	(584, 503)	(286, 502)

2) 数码相机外部参数直角三点标定法^[3]

该方法是利用三个成直角关系的特征点来实现外参数标定的方法。依据原理是射影对应定理：如果已知两个点列间的任意三对对应关系，那么可以确定唯一一个射影对应。

选取成直角关系的三点为特征点，并用这三点形成世界坐标系，直角顶点为原点，三点的世界坐标值分别为 $A(0,0,0)$ 、 $B(x_{wb},0,0)$ 、 $C(0,y_{wc},0)$ 。设 a 、 b 、 c 是 A 、 B 、 C 三点在图像坐标系中的像，对应的像坐标值为： $a(x_{a0},y_{a0})$ ， $b(x_{b0},y_{b0})$ ， $c(x_{c0},y_{c0})$ 。根据针孔成像规律， b 、 c 两点在其成像的光线上移动 z_{b1} 和 z_{c1} 到 b_1 、 c_1 两点使 Δab_1c_1 和 ΔABC 平行且相似，则 b_1 、 c_1 在图像坐标系中的坐标为：

$$\begin{aligned} x_{b1} &= x_{b0} \frac{z_{b1} + f}{f}, y_{b1} = y_{b0} \frac{z_{b1} + f}{f} \\ x_{c1} &= x_{c0} \frac{z_{c1} + f}{f}, y_{c1} = y_{c0} \frac{z_{c1} + f}{f} \end{aligned} \quad (8)$$

ab_1 和 ac_1 是直角三角形的两条直角边，由相互垂直的两条直线的方向向量的关系可得：

$$(x_{b1} - x_{a0})(x_{c1} - x_{a0}) + (y_{b1} - y_{a0})(y_{c1} - y_{a0}) + z_{b1}z_{c1} = 0 \quad (9)$$

由 $\Delta ab_1c_1 \cong \Delta ABC$:

$$\frac{ab_1}{ac_1} = \frac{AB}{AC} \quad (10)$$

用坐标表示:

$$\frac{(x_{b1} - x_{a0})^2 + (y_{b1} - y_{a0})^2 + z_{b1}^2}{(x_{c1} - x_{a0})^2 + (y_{c1} - y_{a0})^2 + z_{c1}^2} = \frac{x_{wb}^2}{y_{wc}^2} \quad (11)$$

将(8)分别代入(9)和(11), 联立方程得到关于 z_{b1} 和 z_{c1} 的方程组, 求解方程组, 排除解中的复数解以及不合适解, 便可求得合适的解。

根据 $\Delta ab_1c_1 \cong \Delta ABC$, 可以得到 A 、 B 、 C 三点在相机坐标系中的坐标值, 分别为:

$$\begin{aligned} x_{cA} &= kx_{a0}, y_{cA} = ky_{a0}, z_{cA} = kf \\ x_{cB} &= kx_{b1}, y_{cB} = ky_{b1}, z_{cB} = k(f + z_{b1}) \\ x_{cC} &= kx_{c1}, y_{cC} = ky_{c1}, z_{cC} = k(f + z_{c1}) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 k 为相似三角形的相似比, x_{cA}, y_{cA}, z_{cA} 分别是相机外部参数中的 t_x, t_y, t_z 。由数码相机成像模型可知世界坐标系和相机坐标系间的坐标转换关系如下:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \quad (14)$$

经过上面的计算, 我们可以知道相机外参数的平移向量 t 及 B 、 C 两点在相机坐标系中的坐标值, 将它们代入式(13), 可得到:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(x_{cB} - t_x)}{x_{wb}}, r_2 = \frac{(x_{cC} - t_x)}{y_{wc}} \\ r_4 &= \frac{(y_{cB} - t_y)}{x_{wb}}, r_5 = \frac{(y_{cC} - t_y)}{y_{wc}} \\ r_7 &= \frac{(z_{cB} - t_z)}{x_{wb}}, r_8 = \frac{(z_{cC} - t_z)}{y_{wc}} \end{aligned} \quad (15)$$

由于 R 是正交矩阵, 可得以下方程约束:

$$\begin{aligned}
r_3^2 + r_6^2 + r_9^2 &= 1 \\
r_1 r_3 + r_4 r_6 + r_7 r_9 &= 0 \\
r_2 r_3 + r_5 r_6 + r_8 r_9 &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

求解方程组(16)，得到关于相机外部参数的几组解，进而可通过验证选取相机正确的外部参数。

根据上述理论推导步骤，选取 A, E, D 三点建立世界坐标系，则三点的世界坐标分别为 $A(0,100,0), E(0,0,0), D(100,0,0)$ 。联立方程(8)、(9)和(11)，通过 matlab7.0 编程计算 z_{a1} 与 z_{d1} ，得到的 z_{a1} 与 z_{d1} 有两组值，分别 $(19.9622, -41.9057)$ 和 $(-30.3, 29.6563)$ 。根据求得的 (z_{a1}, z_{d1}) 取值，联立方程(15)和(16)，通过 matlab7.0 编程求解出相机的所有的外部参数，可知相机的外部参数矩阵 H 也是有两组解为 H_1 、 H_2 。

为选择出合适的外部参数矩阵 H 的取值，计算 (z_{a1}, z_{d1}) 分别取以上两组值时的 B 、 C 两点的理论像坐标值，而后将理论值与 B 、 C 两点的实际像坐标相比较，选出合适的 (z_{a1}, z_{d1}) 取值，计算结果见表 2。

表 2 B 、 C 两点在 H_1 、 H_2 下的计算像坐标与实际像坐标的比较

	世界坐标			实测像坐标		计算像坐标			
	X_w	Y_w	Z_w	u	v	u_1	v_1	u_2	v_2
A	0	100	0	324	189	324	189	324	189
D	100	0	0	584	503	584	503	584	503
E	0	0	0	286	502	286	502	286	502
B	30	100	0	424	197	404.1455	179.9975	424.0789	196.3745
C	100	100	0	641	213	610.9784	156.7644	640.9711	212.3567

从表 2 中比较可以看出 H 应取 H_1 ，即：

$$H = \begin{bmatrix} 0.6434 & 0.1096 & -0.3093 & -47.9679 \\ 0.0201 & -0.6343 & -0.3865 & 25.0452 \\ 0.2379 & -0.2431 & 0.8689 & 334.7138 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

3) 模型求解特征点像坐标

从题目所给的五个特征点，选取能构成直角关系的任意三点通过基于直角三点的相机外参数标定方法确定摄像机外部参数矩阵 H ，结合摄像机内部参数矩阵 N ，通过方程(6)便可计算出另外两点的像坐标。

通过观察可知，成直角关系的特征点组合有： ADE 、 CDE 、 ACD 、 BCD 、 ACE 、 ABE 。各特征点计算像坐标见表 3。由于存在误差，在不同的世界坐标系下，同一特征点的计算像坐标不同，取其平均作为该特征点的计算像坐标。

表 3 不同世界坐标系下特征点像坐标的计算值

直角三点	像坐标的计算值	
B-C-D	A	(323.8588, 189.6163)
	E	(285.8026, 501.9656)
C-D-E	A	(324.0680, 189.4832)
	B	(424.1805, 196.9117)
A-E-D	B	(424.0789, 196.3745)
	C	(640.9711, 212.3567)
A-B-E	C	(641.2287, 214.3783)
	D	(584.9535, 505.5285)
A-C-D	B	(424.0524, 196.5749)
	E	(285.8091, 501.2059)
A-C-E	B	(424.0658, 196.5760)
	D	(584.4184, 503.6900)
平均值	A	(323.9634, 189.5498)
	B	(424.0944, 196.6093)
	C	(641.0999, 213.3675)
	D	(584.6860, 504.6092)
	E	(285.8058, 501.5857)

4.4 模型检验

模型检验包括两个方面：模型精度的检验与模型稳定性的检验。模型精度可通过模型计算所得坐标值与实际测量坐标值之间的偏差大小来表征；模型稳定性本身表征模型建立过程中某一过程的实现方法或参数的变化对最终得到的模型精度有多大影响，此处模型稳定性考察了直角三点标定模型外部参数时三个构成直角三角形的不同选取组合对最终所得模型精度的影响。

4.4.1 模型精度的检验

对模型精度的检验通过比较特征点物像空间的坐标的正反演算所得坐标与实际坐标值的偏差来进行评价。该方法包括两方面内容：一是由世界坐标系坐标值(X_w, Y_w, Z_w)推算图像坐标系坐标值(u, v)；二是由图像坐标系坐标值(u, v)推算世界坐标系坐标值(X_w, Y_w, Z_w)。表 4、表 5 分别比较两种演算情况下计算值与测量值之间的差别。

表 4 世界坐标推算像坐标的计算结果与误差

直角三点	检验点	测量值 (X_w, Y_w, Z_w)	计算值 (u, v)	测量值 (u, v)	误差	
					Δu	Δv
A-E-D	B	(30, 100, 0)	(424.0789, 196.3745)	(424, 197)	-0.0789	0.6255
	C	(100, 100, 0)	(640.9711, 212.3567)	(641, 213)	0.0289	0.6433
C-D-E	A	(100, 100, 0)	(324.0680, 189.4832)	(324, 189)	-0.0680	-0.4832
	B	(70, 100, 0)	(424.1805, 196.9117)	(424, 197)	-0.1805	0.0883

A-C-D	B	(0, 70, 0)	(424.0524, 196.5749)	(424, 197)	-0.0524	0.4251
	E	(100, 100, 0)	(285.8091, 501.2059)	(286, 502)	0.1909	0.7941
B-C-D	A	(0, 100, 0)	(323.8588, 189.6163)	(324, 189)	0.1412	-0.6163
	E	(100, 100, 0)	(285.8026, 501.9656)	(286, 502)	0.1974	0.0344
C-A-E	B	(0, 30, 0)	(424.0658, 196.5760)	(424, 197)	-0.0658	0.424
	D	(100, 100, 0)	(584.4184, 503.6900)	(584, 503)	-0.4184	-0.69
B-A-E	C	(0, 100, 0)	(641.2287, 214.3783)	(641, 213)	-0.2287	-1.3783
	D	(100, 100, 0)	(584.9535, 505.5285)	(584, 503)	-0.9535	-2.5285

表 5 像坐标推算世界坐标的计算结果与误差

直角三 点	检 验 点	测量值 (u,v)	计算值 (X _w , Y _w , Z _w)	测量值 (X _w , Y _w , Z _w)	误差		
					Δx_w	Δy_w	Δz_w
A-E-D	B	(424, 197)	(29.9837, 99.8276, -0.0438)	(30, 100, 0)	0.0163	0.1724	0.0438
	C	(641, 213)	(100.0142, 99.8188, -0.0546)	(100, 100, 0)	-0.0142	0.1812	0.0546
C-D-E	A	(324, 189)	(100.0222, 100.1244, 0.0357)	(100, 100, 0)	-0.0222	-0.1244	0.0357
	B	(424, 197)	(70.0488, 99.9676, -0.0039)	(70, 100, 0)	-0.0488	0.0324	0.0039
A-C-D	B	(424, 197)	(0.1176, 70.0105, -0.0298)	(0, 70, 0)	-0.1176	-0.0105	0.0298
	E	(286, 502)	(100.2172, 99.9368, -0.0775)	(100, 100, 0)	-0.2172	0.0632	0.0775
B-C-D	A	(324, 189)	(-0.1693, 99.9672, -0.0384)	(0, 100, 0)	0.1693	0.0328	0.0384
	E	(286, 502)	(100.0001, 99.9425, 0.0158)	(100, 100, 0)	-0.0001	0.0575	-0.0158
C-A-E	B	(424, 197)	(0.1181, 29.9858, -0.0330)	(0, 30, 0)	-0.1181	0.0142	0.0330
	D	(584, 503)	(99.8110, 99.8630, 0.1033)	(100, 100, 0)	0.189	0.137	-0.1033
B-A-E	C	(641, 213)	(-0.3838, 99.9177, 0.1435)	(0, 100, 0)	0.3838	0.0823	-0.1435
	D	(584, 503)	(99.2747, 99.6723, 0.3236)	(100, 100, 0)	0.7253	0.3277	-0.3236

定义相对偏差 $\Delta r = \frac{r}{Z_c} \times 100\%$ ，其中 r 为推算出的计算坐标的绝对误差，等于推算出的计

算坐标与测量坐标的欧式距离， Z_c 表示检验点与相机之间的垂直距离。根据相对误差公式，利用表 4 和表 5 中的数据，通过 matlab7.0 编程计算，得到正反推算两种情况下的相对偏差，见表 6。

表 6 正反推算的相对偏差表

	Δr
由世界坐标推算像坐标	0.73842 %
由像坐标推算世界坐标	0.23477 %

正反推算中每个特征点都会有一个 Δr ，表 6 中的 Δr 的值是 Δr 的最大值。

从表 6 数据可以看出，本模型的 Δr 很小，所以认为本模型精度较高。

将表 4、5 中的误差项分别作图，见图 5。

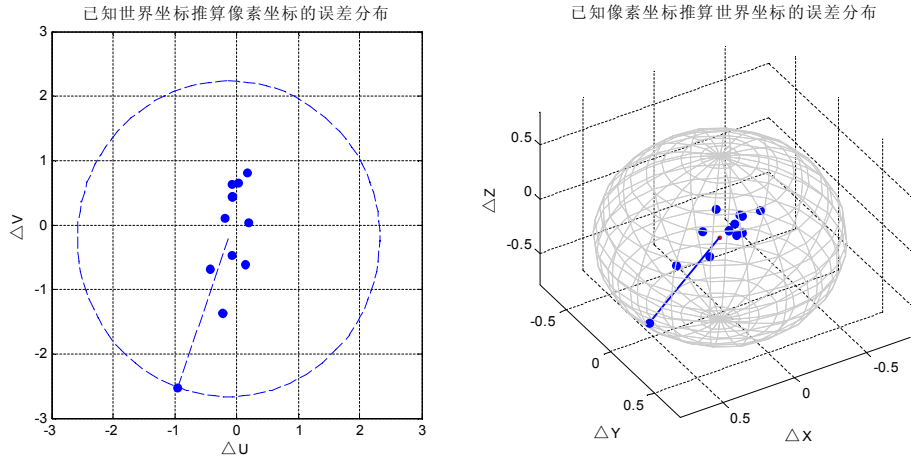


图 5 表 4、5 中误差项的分布图

从图 5 可见，表 4、5 中的误差分布较集中，且都在 0 附近，说明模型精度较高。

4.4.2 模型稳定性的检验

本模型在确定相机外部参数时，首先需要选定成直角关系的三点建立世界坐标系，而具有这样关系的特征点不只一组，选取不同的直角三点确定的相机外部参数是不同的，进而整个相机成像模型中的参数也是不同。因而考虑选取不同的直角三点来获得几组参数不同的相机成像模型，由所得各组成像模型下分别正反演算某点的像坐标和世界坐标。以同一点在各组成像模型下进行演算所得计算坐标的绝对误差的差异来衡量直角三点的选取方式对模型有多大影响。

观察表 4、5 中的数据，发现能够进行 B 点坐标演算的直角三点选取方式最多，故考虑以该点作为检验点，考察直角三点的选取方式对模型的影响。表 7、8 中列出直角三点的不同选取方式下 B 点像坐标和世界坐标的绝对误差。

表 7 表 4 中 B 点在不同世界坐标下的计算误差

直角 三点	误差	
	Δu	Δv
A-E-D	-0.0789	0.6255
C-D-E	-0.1805	0.0883
A-C-D	-0.0524	0.4251
C-A-E	-0.0658	0.424

表 8 表 5 中 B 点在不同世界坐标下的计算误差

直角 三点	误差		
	Δx_w	Δy_w	Δz_w
A-E-D	0.0163	0.1724	0.0438
C-D-E	-0.0488	0.0324	0.0039
A-C-D	-0.1176	-0.0105	0.0298
C-A-E	-0.1181	0.0142	0.0330

观察表 7、8 中数据，可见在分别以 ADE 、 CDE 、 ACD 、 ACE 为特征点建立世界坐标系后，经过正反演算得到的 B 点的坐标的绝对误差近似相等，说明本模型的稳定性较好。

4.5 固定相机相对位置的确定

通过针孔相机模型与基于直角三点相机外部参数的标定方法相结合的计算，我们得到了单个摄像机的内外参数值，在双摄像机摄像时，每个摄像机的内外参数均可利用上述求解方法进行求解。

双目摄像时，两摄像机的外部参数分别用 R_1, t_1 与 R_2, t_2 表示， R_1, t_1 表示左摄像机与世界坐标系之间的相对位置， R_2, t_2 表示右摄像机与世界坐标系的相对位置。对任意一点 P ，如果它在世界坐标系、左摄像机坐标系与右摄像机坐标系下的非齐次坐标分别为 x_w, x_{c1}, x_{c2} ，则：

$$\begin{aligned} x_{c1} &= R_1 x_w + t_1 \\ x_{c2} &= R_2 x_w + t_2 \end{aligned} \quad (17)$$

将上式 x_w 中消去后得到

$$x_{c1} = R_1 R_2^{-1} x_{c2} + t_1 - R_2^{-1} t_2 \quad (18)$$

两个摄像机之间的几何关系可以用以下的 R 和 t 表示：

$$\begin{aligned} R &= R_1 R_2^{-1} \\ t &= t_1 - R_2^{-1} t_2 \end{aligned} \quad (19)$$

从而双摄像机的相对几何位置 R 和 t 可通过(19)式由 R_1, t_1 与 R_2, t_2 计算得出。

5、模型评价与改进

5.1 模型的优点

1. 在从图像上提取靶标特征点的像坐标时，根据假设 3 将图像中黑色区域认定为严格的椭圆，从而用图像中各椭圆边缘点坐标的算术平均值代替靶标各特征点的像坐标，操作简便。
2. 一般情况下相机的内部参数要在实验室进行严格标定，由于本题中数据缺乏，故作出相机内部参数完全由相机出厂参数决定的假设，从而内部参数可理论推导得出，简化了相机的内部参数的确定过程。
3. 在进行相机外部参数矩阵 H 的计算时，使用了基于直角三点的标定方法，该方法只需要构成直角的三点的坐标便可求出所有外部参数，相比较使用最小二乘法需六个以上点坐标计算有明显的优越性，并且本题中只给出了五个靶点，若使用最小二乘法还需估计一点坐标，可能引入新的误差。
4. 相机成像模型为线性模型，鲁棒性高。

5.2 模型的缺点

1. 从靶标的像可知相机的实际成像过程中是存在光学畸变的，而题目中建立的成像模型为针孔成像模型，可考虑在其中加入畸变因子进行改进。
2. 提取图像特征时采用的是中值滤波去噪，而由文献^[5]知道邻域平滑滤波较中值滤波效果要好，从而可知本文中对图像的去噪不彻底，仍就会影响相机参数的计算。

5.3 模型改进

非线性摄像机模型^[7]

本文对摄像机参数的标定采用的是传统的线性法，没有考虑镜头畸变，准确度欠佳。非线性优化法可以得到比较高的标定精度，但其算法比较繁琐。两步法是介于两者之间的一种比较灵活的方法，所谓两步法是先利用线性方法求解摄像机参数，再考虑畸变引入非线性优化。在本文的线性模型基础上考虑畸变因素，利用给定的 5 个特征点，通过最小二乘法估计镜头的畸变系数；再用 Levenberg-Marquardt 迭代法优化标定参数，从而实现模型的改进。

由于镜头径向畸变是镜头产生误差的主要因素，因此只考虑径向畸变。镜头的径向畸变模型可以近似描述为：

$$\begin{cases} \delta_x^r = x(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \\ \delta_y^r = y(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \end{cases} \quad (20)$$

其中 k_1, k_2, \dots 为径向畸变系数； $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ；一般情况下取两个系数 k_1, k_2 就足以描述径向畸变； x, y 是图像像素在成像平面坐标系的针孔模型投影值。则畸变后 x, y 坐标为 $x_d = x + \delta_x^r, y_d = y + \delta_y^r$ ，令 (u_d, v_d) 和 (u, v) 表示图像坐标系下空间点对应的观察值和理论值。则两者关系为：

$$\begin{cases} u_d = f_x x_d + s y_d + u_0 = (u - u_0) \times (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) + u_0 \\ v_d = f_y y_d + v_0 = (v - v_0) \times (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) + v_0 \end{cases} \quad (21)$$

整理得

$$\begin{bmatrix} (u - u_0) r^2, (u - u_0) r^4 \\ (v - v_0) r^2, (v - v_0) r^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d - u \\ v_d - v \end{bmatrix} \quad (22)$$

将已知 5 个特征点的坐标代入(22)式中可得形如 $Dk = d$ 的表达式，可用最小二乘法求畸变参数 $[k_1, k_2] = (D^T D)^{-1} D^T d$ 。

至此，非线性参数估计需要给出的参数初值都已求得。将摄像机内部参数矩阵 N ，畸变系数 k_1, k_2 ，旋转向量 R ，平移向量 t 作为非线性估计的初值代入下面式子

$$J = \sum_{i=1}^5 \left\| p_i - \hat{p}(N, k_1, k_2, R, t, P_i) \right\|^2 \quad (23)$$

其中 $\hat{p}(N, k_1, k_2, R, t, P_i)$ 是第 i 点利用估计参数得到的投影值， P_i 上第 i 点的世界坐标。可用 Levenberg-Marquardt 迭代法优化标定参数。

从以上用两步法标定摄像机参数的过程来看，除用非线性搜索来估计参数外，整个求解方法只运用了线性关系。因此，此方法比较可靠。

6、参考文献

- [1]Roger Y.TSAI, A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses [J], IEEE Journal of Robotics and Automation, 1987, 3(4): 328
- [2]汪伟, 李郝林, 基于数码相机图像的三维重构, 上海理工大学报, 第 27 卷第 5 期: 430, 2005
- [3]熊琰, 龚华军, 沈晔青, 三维重构中数码相机参数标定方法研究, 计算机仿真, 第 24 卷第 9 期: 222-223, 2007
- [4]何谓中值滤波? 有何特点?
<http://zhidao.baidu.com/question/6544639.html>, 2006 年 5 月 6 日
- [5]赵勋杰, 李成金, 双目立体实时测距系统的关键技术研究, 激光与红外, 第 36 卷第 9 期: 874-877, 2006
- [6]伍雪冬, 蒋新华等, 计算机视觉中传统摄像机定标方法综述, 福建工程数学学院学报, 第 5 卷第 1 期: 57-61, 2007
- [7]蔡健荣, 赵杰文, 双目立体视觉系统摄像机标定, 江苏大学学报 (自然科学版), 第 27 卷第 1 期: 6-9, 2006

地面搜索方式模型

廖斌 陈杨 邓颖

指导教师：雷玉洁

摘要

地震灾后搜救工作的快速进行关系到人民的切身利益，也是全中国人民“众志成城，抗震救灾”精神的集中体现。本文研究的是在地震后震区地面交通和通讯系统严重瘫痪的情况下，救灾指挥部紧急派出多支小分队进行地面搜索，因此如何制定搜索队伍的行进路线，对预定区域进行快速全面的搜索是本文需要解决的问题。

问题一中，我们采用三种思维方式解决。

第一种方案：考虑任意搜索人员与组长的距离不能超过 1000 米，我们运用平地分格法，即将该矩形平地平均分为 126 个格子，每个格子为 800×800 平方米，然后在此基础上找出用时最短的搜索路径。根据转弯次数越少耗费时间越短的原则，我们设计出“S”型和“回”字型的搜索路径。分别得到“S”型搜索时间为 49.81 小时，“回”字型搜索时间为 50.38 小时。

第二种方案：考虑任意两人的距离不能超过 1000 米，我们设计出人员发散单独搜索。在遵循最短耗时搜索算法的条件下，先将平地矩形的短边分为 20 等分，20 个人从区域中心出发分散到各自搜索的矩形区域，实际开始搜索点就位于平地矩形的左侧短边上，然后每个搜索人员在各自搜索的矩形区域内往返搜索，得到搜索时间为 49.1 小时。

第三种方案：受第一种方案的启发，将第一种解决方案设计的网格，看作一个 9×14 的棋盘，把所有的搜索人员看作一枚棋子，问题就转化为：从棋盘中心位置开始，搜索出一条可行的路径，满足每个落子点只能走一次，使得棋子能走遍棋盘上的落子点且所用时间最少。

按照第一种方案考虑增加人数搜索解决的关键点是不能将矩形区域平分，因此剩余区域的搜索方式不能按照平地分格法进行搜索，考虑到剩余区域的搜索方式满足的条件是不能让搜索人员在搜索过程中有空闲时间。于是，我们将剩余区域分成两部分交替搜索行进建立模型一，得到增加 2 名搜索人员的搜索时间为 47.99 小时。

问题二中，50 人分组搜索模型是建立在问题一的基础上，我们将平地矩形区域划分为 3 个区域，并结合模型一以及对三组路径的设计，基于均衡度和人数分配的考虑，把 50 人分成 17, 17, 16 的三支队伍，再建立了一个关于组间搜寻时间相差最小的模型(模型二)，利用 *lingo8.0* 软件中求解得到搜索时间为 21.42 小时，均衡度为 0.19%，说明我们的设计方案使三组人员几乎同时完成搜索任务。

关键词：平地分格法 发散单独搜索 固定时间 可变时间 均衡度

一. 问题的重述（略）

5.12 汶川大地震使震区地面交通和通讯系统严重瘫痪。救灾指挥部紧急派出多支小分队，到各个指定区域执行搜索任务，以确定需要救助的人员的准确位置。在其它场合也常有类似的搜索任务。在这种紧急情况下需要解决的重要问题之一是：制定搜索队伍的行进路线，对预定区域进行快速的全面搜索。通常，每个搜索人员都带有 GPS 定位仪、步话机以及食物和生活用品等装备。队伍中还有一定数量的卫星电话。GPS 可以让搜索人员知道自己的方位。步话机可以相互进行通讯。卫星电话用来向指挥部报告搜索情况。

下面是一个简化的搜索问题。有一个平地矩形目标区域，大小为 11200 米×7200 米，需要进行全境搜索。假设：出发点在区域中心；搜索完成后需要进行集结，集结点（结束点）在左侧短边中点；每个人搜索时的可探测半径为 20 米，搜索时平均行进速度为 0.6 米/秒；不需搜索而只是行进时，平均速度为 1.2 米/秒。每个人带有 GPS 定位仪、步话机，步话机通讯半径为 1000 米。搜索队伍若干人为一组，有一个组长，组长还拥有卫星电话。每个人搜索到目标，需要用步话机及时向组长报告，组长用卫星电话向指挥部报告搜索的最新结果。

现在有如下问题需要解决：

问题一：

条件：假定有一支 20 人一组的搜索队伍，拥有 1 台卫星电话。

问题：请设计一种你认为耗时最短的搜索方式。按照你的方式，搜索完整个区域的时间是多少？能否在 48 小时内完成搜索任务？如果不能完成，需要增加到多少人才可以完成。

问题二：

条件：为了加快速度，搜索队伍有 50 人，拥有 3 台卫星电话，分成 3 组进行搜索。每组可独立将搜索情况报告给指挥部门。

问题：请设计一种你认为耗时最短的搜索方式。按照你的搜索方式，搜索完整个区域的时间是多少？

二. 基本假设

1. 假定在搜索过程中，搜索人员不遇到如联系方式中断、伤亡等突发事件；
2. 假定搜索速度不受发现目标的影响，即搜索到目标后继续搜索，且给组长汇报目标时，速度不变；

3. 假定各小组按照设计好的路径搜索。

三. 符号规定

α : 均衡度;

w : 搜索矩形的长;

v : 搜索矩形的宽;

i : 最小转弯的次数;

T : 搜索完毕所用时间;

T_1 : 固定时间;

L : 固有路程;

l : 人员组成一字型并排搜索的宽度

T_2 : 从起始出发点(区域中心)到实际出发点所需时间;

T_3 : 转弯所需时间;

t : 9人横向行进所用的时间为。

四. 问题分析

本题是要制定搜索队伍的行进路线, 对预定区域进行快速而全面地搜索, 解决此问题的关键点就是在题目要求的条件下设计一种最短耗时搜索路径。

问题一:

根据题目要求知: 派一支 20 人的搜索队伍, 在平地矩形大小为 11200 米 \times 7200 米的目标区内进行全境搜索, 还需要满足出发点在区域中心, 搜索完成后需要在左侧短边中点进行集结, 还应根据步话机通讯半径为 1000 米确定组长与组员的间隔距离得到本组人的探测总距离为 800 米。此距离满足搜索人员与组长的最大直线距离不能超过 1000 米的要求, 这也与组长在队伍中的位置无关

在开始分析问题, 我们设计出三种人员搜索方案。

第一种方案:

我们考虑任意人员与队长的距离不能超过 1000 米。

4.1 平地分格法

因为每个搜索人员可探测的半径为 20 米, 那么每个搜索人员可探测到的最大宽度为 40 米, 相邻两人间保持 40 米间距, 那么 20 个人一字排开, 同时搜索的宽度为 800 米, 即为地毯式搜索。我们不妨用 800 \times 800 平方米的正方形去覆盖平地矩形, 恰好得到 9 \times 14 = 126 个网格。

4.2 设计搜索路径

在分好格的平地矩形内, 要设计用时最短的搜索路径, 我们给出如下原则: (1) 搜索人员所走路径应满足直线最长;
(2) 搜索过程中按遇到的转弯次数为最少。

由以上两原则初步得到“S”型和“回”字型的路径搜索法。

4.3 搜索时间的确立

将搜索时间分为固定时间 T_1 和可变时间 T_2 、 T_3 、 T_4 。此处的固定时间即为 20 人

一字型并排搜索的时间总和，即搜索完所有 126 个网格的时间；可变时间包括从起始出发点(区域中心 O)到实际开始搜索点所需时间 T_2 和转弯所需时间 T_3 ，搜索结束的点到集结点所需的时间 T_4 ，故可以得到总搜索时间 $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ 。

4.4 是否增加搜索人员和增加人数的确立

根据 4.3 搜索的时间决定是否增加人数，不难想到增加的人数不会太多，因此我们采用逐个增加人数来制定搜索方案。解决问题的关键是，增加人数后所有人员一字排开的搜索方式不能整数次地完全将平地搜索完毕，而会得到一个剩余平地矩形。为了尽快搜索完剩余平地矩形，所有人员在搜索过程中不空闲，所以考虑分成两部分交替搜索和行进。

第二种方案：

我们考虑任意两人的距离不能超过 1000 米。在遵循最短耗时搜索算法的条件下，先将平地矩形的短边分为 20 等分，20 个人从区域中心出发分散到各自搜索的矩形区域，实际开始搜索点就位于平地矩形的左侧短边上，然后每个搜索人员在各自搜索的矩形区域内往返搜索。

第三种方案：

把第一种解决方案设计的网格，看作一个 9×14 的棋盘，把所有的搜索人员看作一枚棋子。问题就转化为：从棋盘中心位置开始，搜索出一条可行的路径，满足每个落子点只能走一次，使得棋子能走遍棋盘上的落子点，且所用时间最少。

问题二：

4.5 50 人分为 3 组进行搜索

对于问题二，分组搜索模型是建立在第一解决方案的基础之上。将 50 个人分成三组，基于均衡度的考虑，将人员分配为 17, 17, 16 三组。再将平地矩形分成 3 个横向矩形，粗略估计出每个矩形的宽度。按照第一方案，我们设计出三组搜索人员的搜索路径。于是，建立了一个关于三组搜寻时间相差最小的优化模型(模型二)，在 *lingo8.0* 中，可以使问题得到求解。

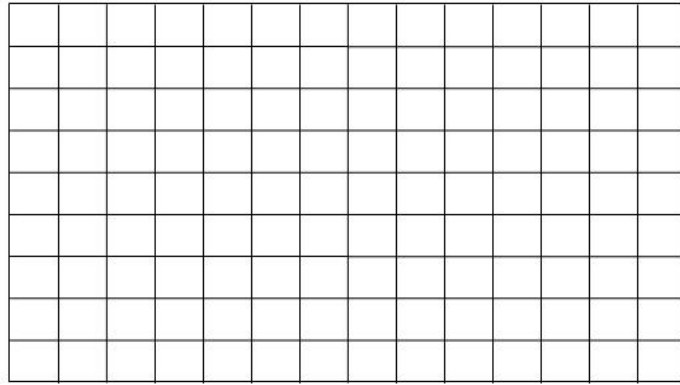
五. 模型建立与求解

问题一

第一种解决方案：

5.1 最短耗时搜索算法

将平地矩形分格如图(1)



每一格面积为 $800 \times 800 m^2$ ，横行 14 格，纵行 9 格

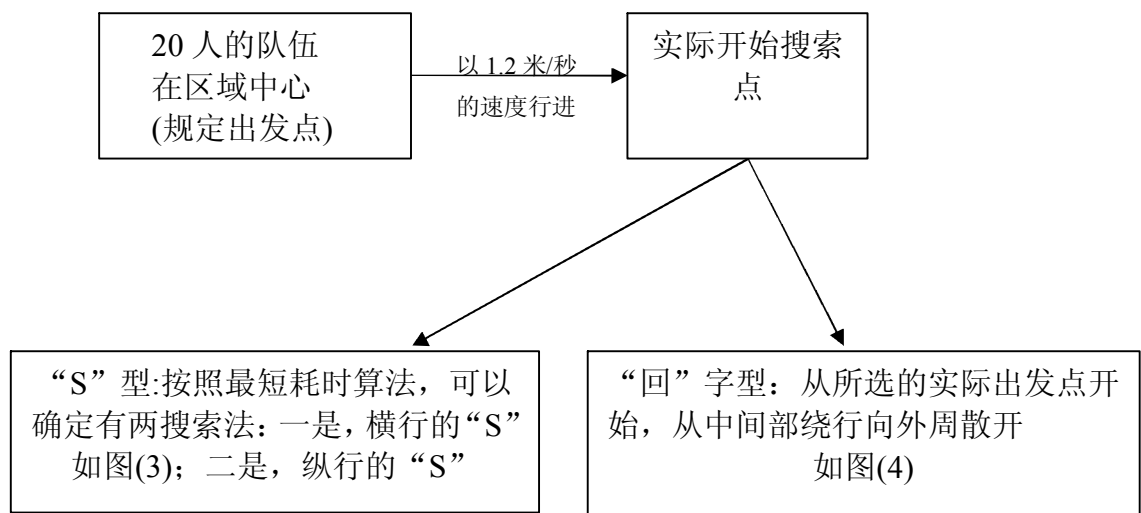
图(1)

问题一就等价转化为：寻找一条路径，使得搜索人员从区域中心 O 搜索每个网格一次，到达集结点所用时间最短。

寻找上述路径需要满足的条件：

- (1)搜索人员所走路径应按直线最长；
- (2)搜索过程中转弯次数最少。

算法流程：



图(2)

5.2 搜索时间的确立

5.2.1 固定时间 T_1 的确立

20 人并排一字搜索的总面积，直接将 800 米看做该矩形平地的一条边，易得到围成此矩形的另一边(队伍所走的直线距离)，即此次搜索过程中必须搜索的固定路程

$$L = 11200 \times 7200 / 800 = 100800 \text{ 米},$$

所以，固有需要时间 $T_1 = L / 0.6 = 100800 / 0.6 = 168000 \text{ 秒}$ 。

5.2.2 可变时间的确立

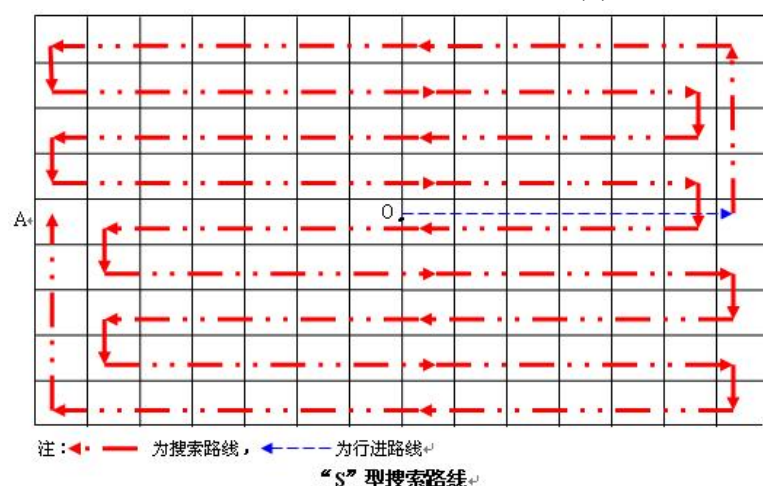
可变时间包括从起始出发点(区域中心 O)到实际开始搜索点所需时间 T_2 和转弯所需时间 T_3 。实际开始搜索点的确立与所走的字型有关，根据所走字型的不同可以分别得到各自的可变时间，下面是两种字型路径走法（如图(3)(4)）：
这里我们给出最少转弯次数的表达式：

$$\text{最少转弯次数: } i = \min \left\{ \left\lceil \frac{w}{l} \right\rceil - 1, \left\lceil \frac{v}{l} \right\rceil - 1 \right\}$$

其中 w 为搜索矩形的长， v 为搜索矩形的宽， l 为人员组成一字型并排搜索的宽度。

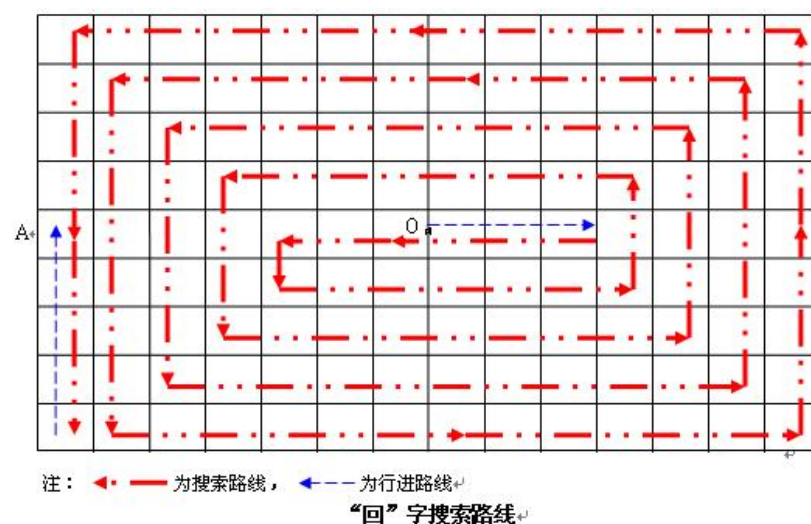
最少转弯次数可以作为在矩形内采用横向“S”型搜索或纵向“S”型搜索的依据。此横向“S”型搜索 $i = 8$ ，纵向“S”型搜索 $i = 13$ ，所以选择横向“S”型搜索。

横向“S”型搜索如下图(3)



图(3)

“回”字转弯次数为 17 次。如下图(4)



图(4)

观察以上两图，细虚线所示为行进路线，所以从起始出发点(区域中心 O)到实际开始搜索点所需的时间 T_2 ：

①由图(3)容易得到,“S”型 $T_2 = 800 \times 7 / 1.2 = 4667$ 秒,

②由图(4)容易得到,“回”字型规定出发点到实际出发点的路程 $S_2 = 800 \times 3 = 2400$ 米, $T_2 = 2400 / 1.2 = 2000$ 秒。

还可以从上两图观察得知,转弯有两种方式:一种是从横(纵)向转为纵(横)向的“直角型”转弯;另一种是从横(纵)向依秩序移动 800 米的“平移型”转弯。

所以,可以将转弯所需时间 T_3 求出,即 $T_3 = 800 / 1.2 = 667$ 秒。

“S”型转弯总时间 $T_3 = 667 \times 10 = 6670$ 秒

“回”字型转弯总时间 $T_3 = 667 \times 17 = 11339$ 秒

综上可以得到搜索总时间 T

“S”型 $T = T_1 + T_2 + T_3 = 168000 + 4667 + 6670 = 179337$ 秒 = 49.81小时,

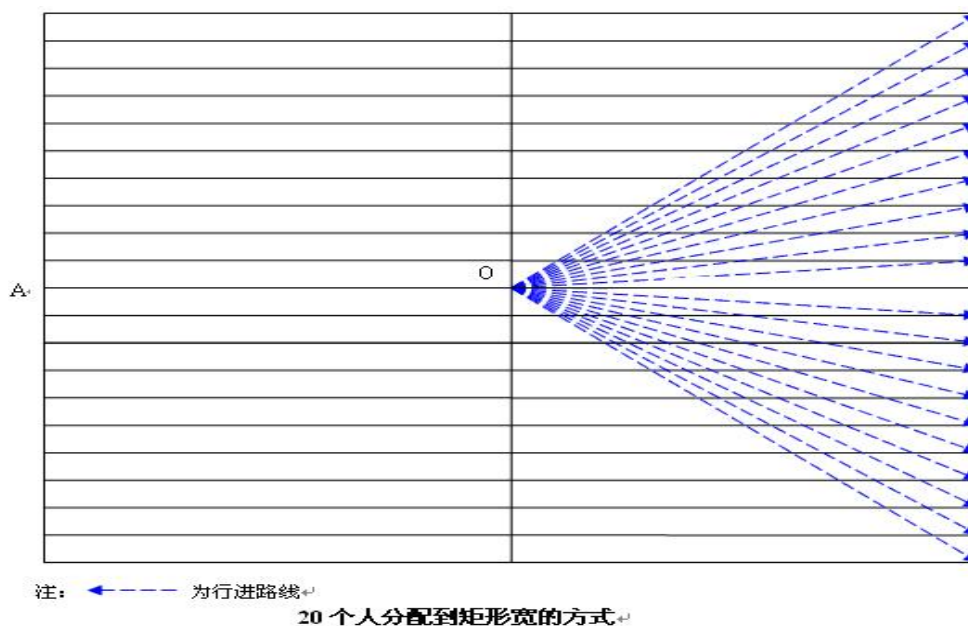
“回”字型 $T = T_1 + T_2 + T_3 = 168000 + 2000 + 11339 = 181339$ 秒 = 50.37小时

通过计算比较得到“S”型路径比“回”字型要节省 0.56 小时,所以选择“S”型路径作为我们的搜索方式。

第二种解决方案

5.2 人员发散单独搜索

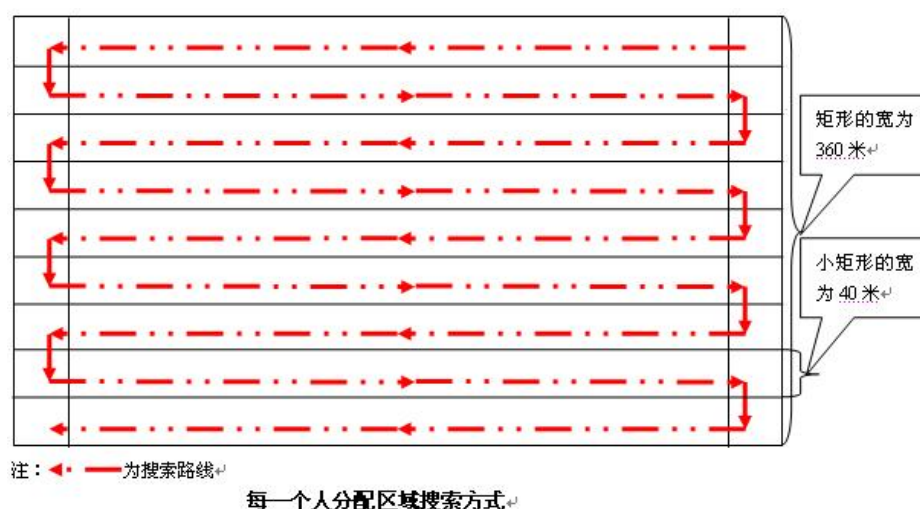
在这里的搜索方式只要满足两两之间的距离在 1000 米之内,就可以进行搜索。但在搜索路线的选取上,同样遵循上述最短耗时搜索算法的条件,让 20 个人从区域中心出发,分别行进到平地矩形左侧短边上,且每人相距 360 米,则 20 个人的配方式如下图(5):



图(5)

我们可以根据上图方式进行搜索,每个人在小矩形内的搜索方式是相同的,根

据最短耗时搜索算法满足的条件，得到在小矩形内的搜索方式如图(6)



图(6)

人员发散单独搜索完成平地矩形搜索的时间： $T = 49.11$ 小时。

我们将这种搜索方式与前面的方式作比较，虽然其搜索时间比前面的搜索方式时间少。但在实际搜索过程中，队员之间间隔的距离太远，不可避免的有以下不足之处：

(1) 当离组长较远的人员有情况时，信息要通过队友才能传达到组长，这使得人员信息传递不准确。

(2) 当某一个队员在搜索过程遇到单独无法解决的问题时，远距离不利于请求队友快速协助。

因此我们选择第一种理解搜索方式。

无论哪一种理解方式，20 人搜索的时间都超过了 48 小时，我们将问题进一步深入，需要增加搜索人员才能完成任务，容易想到增加一名搜索人员来解决此问题，但需要重新调整搜索方案。

第三种解决方案

对于一个大小为 9×14 的棋盘，棋子从当前位置 (X, Y) 出发，可以到达的下一个位置 (X', Y') ， (X', Y') 可取值为： $(X+1, Y), (X-1, Y), (X, Y+1), (X, Y-1)$ ，

限制条件^[1]：(1) $1 \leq X' \leq 9, 1 \leq Y' \leq 14$ ；

(2) (X', Y') 必须是棋子记录表中没有包括的新位置；

(3) 棋子在走子过程中要记录已走过的落子点，用 $u(k, j)$ 表示到达当前落子点的步数。 $(1 \leq k \leq 125, 1 \leq j \leq 125)$

(4)如果满足 $2u(k, j) \neq u(k-1, j) + u(k+1, j)$ 或 $2u(k, j) \neq u(k, j-1) + u(k, j+1)$ ，则 $u(k, j)$ 处为转弯落子点。

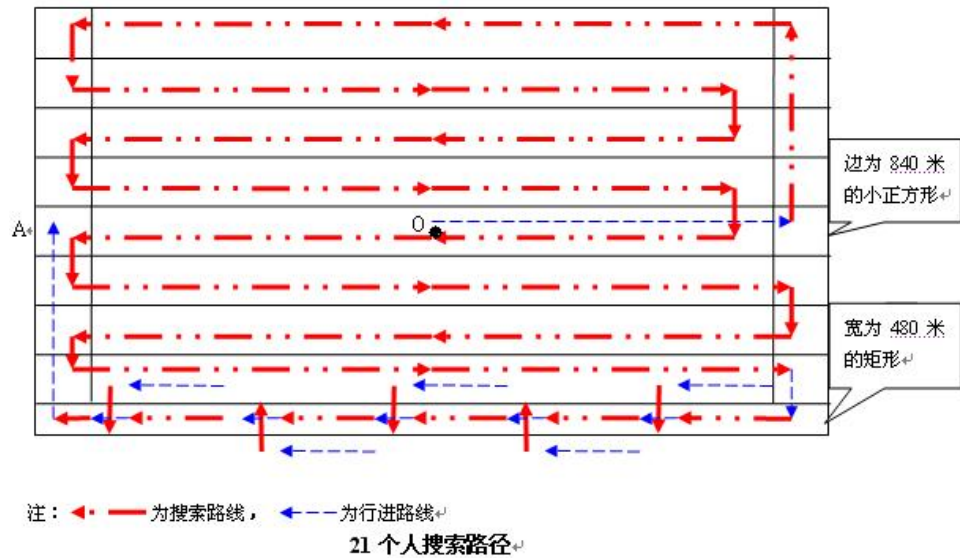
目标即为转弯落子点最少

由于时间欠缺，来不及编写程序，不能在软件上得到搜索路径。

5.3 增加 1 人的搜索方案

在增加一人的搜索方式下，解决的关键问题是如何处理 21 人不能按一字型排开搜索的面积，所以制定出一个分两步来完成搜索任务的方案，即：第一步，满足最短耗时搜索算法同时采用“S”型路径即 21 人一组按一字排开搜索；第二步，组内人员交替搜索和行进。

按照我们解决前一问题搜索路径的方法，设计出如图(6)的走法。



图(6)

5.3.1 21 人一字型并排“S”型走法

按照横行“S”型走法，21 人按一字排开搜索，得到 $\left\lceil \frac{7200}{840} \right\rceil = 8$ 个纵行格子，组

成剩余平地矩形的宽为 $7200 - 840 \times 8 = 480$ 米，在此将队伍分成两部分。分配一部分人搜索剩余平地矩形的宽，另一部分人搜索按图(6)搜索的方式交替搜索行进。

固定时间的确立：

第一步“S”型中，搜索的固定路程 $L = 11200 \times 840 \times \frac{8}{840} = 89600$ 米

所以，固定时间 T_1 的确立： $T_1 = \frac{89600}{0.6} = 149333$ 秒，

可变时间的确立：

“S”型路径，从起始出发点(区域中心 O)到开始搜索点所需时间：
 $T_2 = \frac{5600}{1.2} = 4667$ 秒。一次转弯所需时间 $T_3 = \frac{21 \times 40}{1.2} = 700$ 秒。观察上图(6)知，
 一共要转弯 9 次，故转弯所需总时间 $T_3 = 700 \times 9 = 6300$ 秒。所以完成“S”型搜索的
 时间 $T = T_1 + T_2 + T_3 = 149333 + 4667 + 6300 = 160300$ 秒

5.3.2 剩余平地走法

因为剩余平地的宽为 480 米，因此得出只需安排 12 人(记为甲组)先横向搜索后横向行进；剩余 9 人(记为乙组)先横向行进后纵向搜索的搜索方式，且甲乙两组同时完成一次搜索和行进。

不妨设 9 人横向行进所用的时间为 t ，结合图(6)可以得到以下方程：

$$t + \frac{480}{0.6} = \frac{1.2t - 360}{0.6} + \frac{360}{1.2}$$

解得 $t = 1100$ 秒，进行一次上述交替向左移动的距离为 $1.2t = 1320$ 米，所以至少

要进行 $\left\lceil \frac{11200}{1320} \right\rceil = 8$ 次交替。得到一次上述交替算法的时间 $T' = t + \frac{480}{0.6} = 1900$ 秒，8

次交替的结果为 $1900 \times 8 = 15200$ 秒，余下的距离为 $11200 - 1320 \times 8 = 640$ 米。剩余这部分区域搜索的时间：甲组按照先横向搜索走完 640 米后纵向行进时间为
 $T'' = \frac{640}{0.6} + \frac{480}{1.2} = 1467$ 秒，此时间也足够让乙组横向行进与甲组集结，此时的集结点并不是题目要求的左侧短边中点，但计算固有需要时间时直接采用面积与边的关系时，就将此时的集结点与最终的集结点的距离包含进去了，所以 21 人的搜索方案所耗时间 T 为：

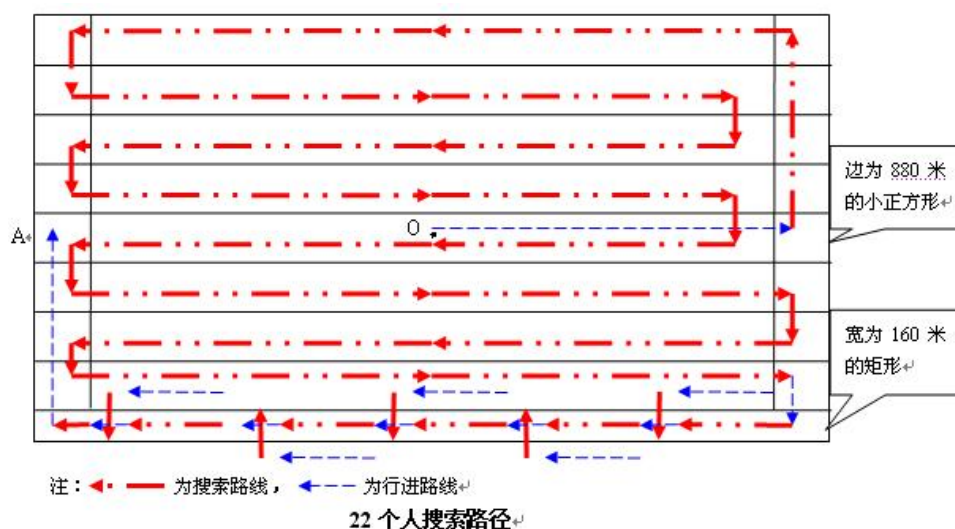
$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T' + T'' = 160300 + 15200 + 1467 = 176967 \text{秒} = 49.15 \text{小时}$$

增加一人不能满足在 48 小时内完成地面搜索任务，那么考虑增加 2 人的情况。根据以上算法，归纳出 p 个人搜索完长为 r , 宽为 h 的剩余平地矩形的时间模型(模型一)：

$$\begin{cases} f = 40p - h \\ n = \left\lceil \frac{r}{2h + b} \right\rceil \\ T''' = \frac{n(2h + f)}{1.2} + \frac{r - n(2h + f)}{0.6} + \frac{(n+1)h}{1.2} \end{cases}$$

5.4 增加 2 人的搜索方式

按照和增加 1 人的搜索的搜索方式，得到如下图(7)走法



图(7)

$$\text{固定时间 } T_1 = 880 \times 8 \times 1120 / (880 \times 0.6) = 149333 \text{ 秒} = 41.48 \text{ 小时}$$

“S”型，从起始出发点(区域中心 O)到开始搜索点所需时间

$$T_2 = 5600 / 1.2 = 4667 \text{ 秒} = 1.29 \text{ 小时}$$

一次转弯所需时间 $T_3 = 22 \times 40 / 1.2 = 733 \text{ 秒}$ ，由上图(7)观察知，一共要转弯 9 次，

故转弯所需总时间 $T_3 = 733 \times 9 = 6597 \text{ 秒} = 1.83 \text{ 小时}$

所以完成“S”型的总时间 $T = T_1 + T_2 + T_3 = 44.6 \text{ 小时}$

由模型一可以解出剩余平地搜索所用时间： $T''' = 3.39 \text{ 小时}$ ，

22 人搜索所耗时间 $T_{\text{总}}$ 为： $T_{\text{总}} = T + T''' = 44.6 + 3.39 = 47.99 \text{ 小时}$

综上所述，得出需要增加 2 人按照图(7)搜索方式刚好满足用 48 小时搜索的要求。

问题二

5.5 50 人分组搜索

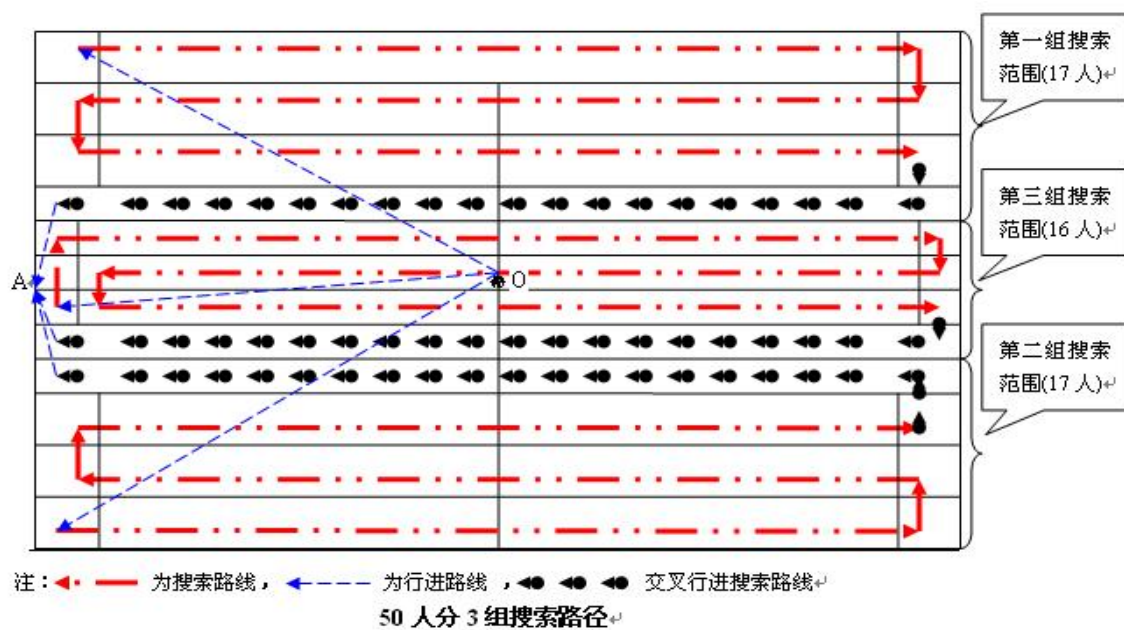
为了保证搜索结果的均衡性我们把 50 人按 17, 17, 16 分组，分别为第一组，第二组，第三组。根据 5.1 最短耗时搜索算法，我们可以大致的将平地划分为横向的 3 个矩形，各组搜索宽度分别令为 y, y, x 。

5.5.1 矩形平地面积的划分

根据问题要求，不妨设在不考虑任何约束条件情况下，每个人从左到右搜索 3 次时 50 个人搜索的最大面积为 67200000 平方米，搜索 4 次时 50 个人搜索的最大面积为 89600000 平方米，而该平地的总面积为 80640000 平方米，说明每个人从左到右搜索 3 次后，会有剩余平地矩形。那么所划分出的三块矩形的边长必然满足如下条件：

$$\begin{cases} 1920 < x \leq 2560 \\ 2040 < y \leq 2720 \\ 2y + x = 7200 \end{cases}$$

从而设计出 50 个人分成三组的搜索路径，如下图(8)



图(8)

令 a, c 分别为第一组、第三组交叉行进搜索矩形的宽； b, d 分别为第一组、第三组另一部分人搜索的最大距离。令 T_y, T_x 分别为第一组、第三组搜索区域所用的时间。

现在问题就转化为求 x, y 的值，使得三组搜索时间的差值最小，因此建立如下模型：

目标函数： $\min = |T_x - T_y|$

$$\begin{aligned}
&1920 < x \leq 2560 \\
&2040 < y \leq 2720 \\
&2y + x = 7200 \\
&a = x - 1920 \\
&c = y - 2040 \\
&b = 640 - a \\
&d = 680 - c \\
&ST. \left\{ \begin{aligned} n &= \left\lceil \frac{11200}{2a+b} \right\rceil \\ m &= \left\lceil \frac{11200}{2c+d} \right\rceil \\ T_x &= (62799 + \frac{n(2a+b)}{1.2} + \frac{11200-n(2a+b)}{0.6} + \frac{(n+1)a}{1.2}) / 3600 \\ T_y &= (\frac{6657+x/2}{1.2} + 57700 + \frac{m(2c+d)}{1.2} + \frac{11200-m(2c+d)}{0.6} + \frac{(m+1)c}{1.2}) / 3600 \\ x/40, y/40 &\in N^+ \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

在 *lingo8.0* 软件中，求得如下结果：(程序见附录)

$$x = 2480 \text{ 米}, T_x = 21.42 \text{ 小时}$$

$$y = 2360 \text{ 米}, T_y = 21.38 \text{ 小时}$$

所以，第三组搜索矩形的宽为 2240 米，所用的时间为 20.26 小时；第一，二组搜索矩形的宽为 2480 米，所用时间为 20.52 小时。

$$\text{均衡度: } \alpha = \frac{|T_x - T_y|}{\text{Max}\{T_x, T_y\}} = \frac{|21.42 - 21.38|}{21.42} = 0.18\%$$

α 值很小，均衡度很好，说明我们这种分组方法和搜索路线较好，在救援强度相对较大的情况下，搜索人员工作时间分配合理是非常重要的前提。

六. 模型的评价

此模型从多种不同的方案寻找出平地矩形的搜索路径，优点有以下几条：

- (1) 搜索方式以整体搜索为主，制定出一个合理的最短搜索路径的算法，充分满足了实际生活中人员信息传递的快捷性；
- (2) 搜索路径简单易行操作性强，搜索人员合理分配到搜索过程中，对人力资源得到很好的优化；
- (3) 结合均衡度设计出分组时的搜索路线，使得救援强度相对合适且集中；

然而，由于时间等客观因素，本模型也存在一些不足之处：没有充分的利用软件探索出一条最优的搜索路线。我们只能通过实际情况，构建一些最优的方案来寻找最优搜索路线。

七. 模型的推广与改进

1. 模型的推广：

本模型可以广泛推广到国防军事中领土、领空、领海的巡逻路径设计，在其巡

逻区域内，可以制定出有效、快速地完成任任务的方案；不仅可以对战争中雷区的扫描；还可以应用到农业生产中，对农作物的合理灌溉。

2. 模型的改进：在改进最短耗时搜索算法的情况下，将模型能够转化为图论和规划问题并能编程计算得出结果，则为最佳结果。

参考文献：

[1] 马走日棋盘算法

http://blog.chinaunix.net/u2/75161/showart_1103030.html

NBA 赛程的分析与评价

邓波 郭玉峰 白伟

指导教师：马翠

摘要

本文针对 NBA 赛程的分析评价问题，根据 2008-2009 年 NBA 的赛程安排，利用层次分析法建立了利弊评价模型。然后在着重考虑公平性因素的前提下，建立了基于 0-1 整数规划的赛程制定模型，得出了问题三的解决方法。

在问题一中，对于 1230 场比赛，要求综合考虑多种因素给出评价赛程利弊的数量指标。鉴于层次分析法在分析评价中被广泛应用，本文采用层次分析法来确定各因素对于赛程利弊的权重。将所得权重对应于每一个变量因素，得到了符合题意的评价模型。

问题二实际是对问题一所得评价函数的应用和检验。通过分类统计数据，得到 30 支球队各变量的均值。将变量均值代入判别函数得到的数值作为临界值。结果表明：现有赛程安排对小牛队最有利，对快船队最不利，而对火箭队来讲也是较为不利的。

问题三要求根据赛程找出与同部不同区球队比赛中，选取赛 3 场的球队的方法。此问题可以转化为设定一种较合理的赛程安排方案。求解问题三过程中，我们先引入了 0-1 变量，在公平性因素的前提下，以球队间实力差值的平方和为目标函数，建立了 0-1 规划数学模型。通过 Lingo8.0 编程求解，最终找出与同部不同区的十个球队中多赛一场的六个队（即与同部不同区的十个队中比赛四场的六个队）。通过计算发现新设定的赛程下球队实力比较均衡，能吸引更多观众，同时说明我们的模型是切实可行的。

本文利用经典的层次分析法和 0-1 规划方法，较好的解决了赛程编排对球队的影响问题以及赛制拟定问题。并且在每种方法的最后，我们都给出了检验准则并进行了检验，证明了本文提出的模型具有较好的一致性和吻合度，可在类似领域中推广。

关键词： 层次分析法 一致性检验 背靠背 0-1 规划

一、 问题重述（略）

二、 模型假设

（1）NBA 赛程的制定不存在赛程制定者的主观因素，例如，对某个球队的喜好或偏见；

（2）对于强队或弱队的界定，我们只根据 07-08 赛季各球队的比赛成绩得到相对的界定，不夹杂外界的评论；

（3）所有球队在赛季中不存在故意弃权退出比赛的情况；

（4）影响比赛因素只考虑文中所列出的，对于地域因素以及气候、文化差异等实际因素不予考虑；

（5）所有比赛球队在赛季开始后都按照赛程严格执行；

（6）考虑到背靠背因素的重要性，在分析球队的比赛时间间隔因素时，将背靠背的情况排除在外，即比赛时间间隔因素的变量下限定在一天。

三、 符号说明

表 1 东部球队对应符号

A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
东南区	魔术	奇才	老鹰	山猫	热火
B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
大西洋区	凯尔特人	猛龙	76 人	网	尼克斯
C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
中部区	活塞	骑士	步行者	公牛	雄鹿

表 2 西部球队对应符号

D	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
西南区	黄蜂	马刺	火箭	小牛	灰熊
E	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
西北区	爵士	掘金	开拓者	森林狼	超音速
F	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
太平洋区	湖人	太阳	勇士	国王	快船

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & a_i \text{与} b_j \text{比赛} \\ 0, & a_i \text{与} b_j \text{不比赛} \end{cases}; y_{i,j} = \begin{cases} 1, & b_i \text{与} c_j \text{比赛} \\ 0, & b_i \text{与} c_j \text{不比赛} \end{cases}; z_{i,j} = \begin{cases} 1, & c_i \text{与} a_j \text{比赛} \\ 0, & c_i \text{与} a_j \text{不比赛} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, 5$$

$M_i (i = 1, 2, \dots, 10)$: A 区球队在 B, C 区内选择球队时, 相应的实力指数

$N_i (i = 1, 2, \dots, 10)$: B 区球队在 A, C 区内选择球队时, 相应的实力指数

$P_i (i = 1, 2, \dots, 10)$: C 区球队在 A, B 区内选择球队时, 相应的实力指数

$G_i (i = 1, 2, \dots, 10)$: D 区球队在 E, F 区内选择球队时, 相应的实力指数

$H_i (i = 1, 2, \dots, 10)$: E 区球队在 D, F 区内选择球队时, 相应的实力指数

$K_i (i = 1, 2, \dots, 10)$: F 区球队在 D, E 区内选择球队时, 相应的实力指数

α_i : A 区球队在 B, C 区所选择的进行四场比赛的六支球队的综合实力指数,

$$i, j = 1, 2, \dots, 5;$$

β_i : B 区球队在 A, C 区所选择的进行四场比赛的六支球队的综合实力指数,

$$i, j = 1, 2, \dots, 5;$$

γ_i : C 区球队在 A, B 区所选择的进行四场比赛的六支球队的综合实力指数,

$$i, j = 1, 2, \dots, 5.$$

四、 问题分析

问题一要求从赛制的制定对球队的公平性与战绩影响出发, 用数学建模方法对已有的赛程进行分析与评价。关于赛程的制定对球队比赛的影响, 通过大量查阅 NBA 以及赛程相关资料, 主要可以考虑以下几个方面:

(1) 背靠背的比赛场数: 背靠背, 源自英文“back to back”的直译, 意思是连续两次。广义上讲, 球队连续两天作战, 就是背靠背的比赛, 在 NBA 比赛中提到“背靠背”, 一般是指球队连续两天客场作战, “背靠背”是对球队体能的极大考验。背靠背比赛严重消耗球队队员的精力与体力, 会对比赛的胜负产生重要影响;

(2) 连续主场和客场比赛的场数: 连续的主客场作战会对球员的心理产生积极的或是消极的影响, 从而间接影响球队的比赛成绩;

(3) 连续与强队或弱队比赛: 球队连续与强队或弱队作战也是影响球队制胜的因素之一;

(4) 每两场比赛的时间间隔方差：考虑到篮球比赛的激烈性对球员的体能会是一个极大的挑战，因此每两场比赛的时间间隔，即球员休息时间长短的波动率，是影响球队成绩的一个重要因素；

(5) 其他因素（包括球队之间转场带来的旅途疲劳，东西部地域与气候差异等），由于这些因素影响赛程利弊的作用比较小，文中暂不考虑。

层次分析法（AHP）是美国著名运筹学家 Saaty 教授于上世纪 70 年代提出的一种系统分析方法^[1]。层次分析法把一个复杂问题中的各种因素通过划分相互联系的有序层次使之条理化，在工程技术、经济管理、社会生活中的决策过程、评价分析中具有广泛的应用。鉴于此，本文利用层次分析法来评价各个因素对赛程利弊的影响程度，即确定各因素的权重。通过对 2008-2009 年 NBA 赛程各个因素的分析，利用所得到的权重，则可以建立了一个评价赛程利弊的数学模型。

问题二实际是第一问所建立的评价模型的应用与检验，一旦评价模型建立，该问题便可迎刃而解。

问题三中，要求根据赛程找出与同部不同区球队比赛中，选取赛 3 场的球队的方法，则需要分别对东西部球队的所有同部不同区球队赛程进行分析，找出其中的规律。同时，分析出该赛程是否合理。本着公平、均衡的原则，还可以提出一些其他更为合理的选取赛 3 场的球队的方法。

五、 模型建立与求解

问题一的求解模型：

首先，本文将赛程安排的主客场、背靠背以及球员心理等因素对赛程利弊影响的程度进行了分析，通过层次分析法确定了各个因素的权重。然后通过对 2008~2009 年 NBA 赛程的数据进行分析，得到了一组关于这六个因素的数据，最后利用权重及各个因素建立了评价赛程利弊数量指标的数学模型，从而很好的解决了问题一和问题二。

1、运用层次分析法确定各个因素影响赛程利弊的权重

由于赛程安排对球队的影响因素比较复杂，考虑到层次分析法在评价问题中的广泛应用以及较强的可操作性，问题一中采用该法评价各个因素对赛程利弊的影响程度。

(1) 建立层次结构模型

对于上面讨论的四个因素，还可以根据每个因素的特点进行细分和分层，从而建立层次分析法的层次结构模型如下：

目标层：赛程对队伍的利弊(A)；

准则层：主客场设置因素 (B_1)、球队双方实力因素 (B_2)、心理及体能因素 (B_3)；

子准则层：连续主场次数 (C_1)、连续客场次数 (C_2)、背靠背比赛场数 (C_3)、

连续与强队 (C_4)、弱队比赛 (C_5)、两场比赛的时间间隔方差

(C_6)。

同时有如下图（图 1）的递阶层次结构：

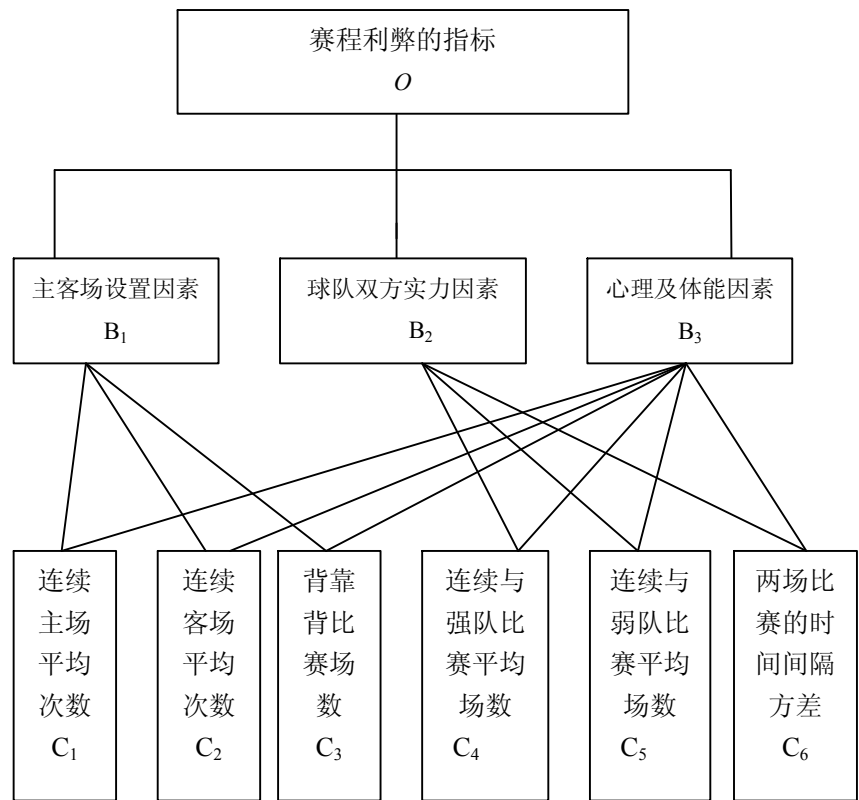


图 1 递阶层次结构示意图

（2）建立判别矩阵，求最大特征值及其对应的特征向量

首先利用 Saaty^[1]的 1-9 级标度法建立各层的判断矩阵，并利用 Matlab6.5（附录一：程序一）计算判断矩阵的最大特征值及其对应的特征向量。

表 3 1~9 比率标度

标度	定义
1	两个元素比较，具有同等重要性
3	两个元素比较，一个比另一个稍显重要
5	两个元素比较，一个比另一个明显重要
7	两个元素比较，一个比另一个强烈重要
9	两个元素比较，一个比另一个绝对重要

注：他们之间的 2、4、6、8 以及他们的例数有相应的类似意义。

对于 $O \sim B$ 层：根据准则层的各个因素（ B_1 ， B_2 ， B_3 ）在影响球队利弊方面的重要性以及表 3 的比率标度，可以得到如下判断矩阵（表 4）：其中 $O_{i,j}$ 表示 B_i 个因素与 B_j 个因素对赛程利弊的影响程度之比。

表 4 $O \sim B_i$ 的判别矩阵

O	B_1	B_2	B_3
B_1	1	3	3
B_2	1/3	1	1
B_3	1/3	1	1

$O \sim B_i$ 判别矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max} = 3.0$ ，其对应的特征向量为 (0.9045, 0.3015, 0.3015)。

同理我们可以得到 $B-C$ 层的判别矩阵：

表 5 $B_1 \sim C_i$ 的判别矩阵

B_2	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1	1/5
C_2	1	1	1/5
C_3	5	5	1

$B_1 \sim C_i$ 判别的矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max} = 3.0$ ，其对应的特征向量为 (0.1925, 0.1925, 0.9623)。

表 6 $B_2 \sim C_i$ 的判别矩阵

B_2	C_4	C_5	C_6
C_4	1	1	3
C_5	1	1	3
C_6	1/3	1/3	1

$B_2 \sim C_i$ 的判别矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max} = 3.0$ ，其对应的特征向量为 (0.6882, 0.6882, 0.2294)。

表 7 $B_3 \sim C_i$ 的判别矩阵

B_2	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1	1	1	1/3	1/2	1/2	5

C_2	1	1	1/3	1/2	1/2	5
C_3	3	3	1	1	1	7
C_4	2	2	1	1	1	5
C_5	2	2	1	1	1	5
C_6	1/5	1/5	1/7	1/5	1/5	1

$B_3 \sim C_i$ 判别矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max} = 6.1115$ ，其对应的特征向量为 (0.2621, 0.2621, 0.6057, 0.4950, 0.4950, 0.0762)。

(3) 一致性检验

对判断矩阵做一致性检验：为检验矩阵的一致性，首先计算出它的一致性指标 CI ：

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \quad n \text{ 表示判断矩阵的阶数}$$

显然，当矩阵具有完全一致性时， $CI=0$ ； $\lambda_{\max}-n$ 愈大， CI 愈大，矩阵的一致性越差。为判断矩阵是否具有满意的一致性，要将 CI 与平均随机一致性指标 RI 进行比较，对于 1~9 阶判断矩阵，Saaty 给出了 RI 值^[1](见表 8)。

表 8 随机性指标 RI 值

判断矩阵阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI 的取值	0	0	0.50	0.89	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

令 $CR = CI / RI$ ，当 $CR < 0.1$ 时，则判断矩阵具有满意的一致性。

按照一致检验的方法，对上述判断矩阵进行判断，对于 $O \sim B_i$ 、 $B_1 \sim C_i$ 、

$B_2 \sim C_i$ 的判断矩阵： $\lambda_{\max} = 3.0$ ， $n=3$ ，对于 $B_3 \sim C_i$ 的判别矩阵： $\lambda_{\max} = 6.1115$ ， $n=6$ ；

代入 CI 的表达式中，分别得到 $CI=0$ ， $CI=0.0223$ 。因此说明矩阵具有较好的一致性。

(4) 确定各因素的权重

按照层次分析法的方法，利用最大特征值所对应的特征向量确定权重，而权重不能有负值，所以对特征向量中为负的数取其相反数。

根据所得到的特征向量，将某层元素相对于上一层元素的权重，汇总如下表：

表 8 各层权重

	B_1	B_2	B_3	最终权重
	0.9045	0.3015	0.3015	W_i

C_1	0.1925	0	0.2621	0.2531
C_2	0.1925	0	0.2621	0.2531
C_3	0.9623	0	0.6057	1.0530
C_4	0	0.6882	0.4950	0.3567
C_5	0	0.6882	0.4950	0.3567
C_6	0	0.2294	0.0762	0.0921

可以看出，最终所得到的权重介于 0.0921-1.0530 之间，为了便于统一，采用（1）式做极差规范化方法进行相应的处理，得到规范后的权重值 W'_i 分别为：0.2067, 0.2067, 0.8598, 0.2913, 0.2913, 0.0752。

$$W'_i = \frac{W_i}{\sqrt{\sum_{C_i} W_i^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (1)$$

2、构建评价模型

为了直观评价赛程的利弊，这里将赛程的指标用数值量化：从而可以构建一个与各因素 $C_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 为变量的评价函数：

$$\begin{aligned} y &= W_1 C_1 - W_2 C_2 - W_3 C_3 - W_4 C_4 + W_5 C_5 - W_6 C_6 \\ &= 0.2067 C_1 - 0.0267 C_2 - 0.8598 C_3 - 0.2913 C_4 + 0.2913 C_5 - 0.0752 C_6 \end{aligned}$$

(2)

对于这六个影响赛程利弊（即评价函数值 y ）的因素而言，连续客场的均值、背靠背场数、休息时间间隔方差、连续与强队比赛的平均场数这四个因素的值与赛程利弊成反比（即 C_2, C_3, C_4, C_6 与 y 成反比），故将其取相反数。其他的因素均与赛程利弊成正比。

六种因素的取值方式的确定：

（1）连续主客场的均值（ C_1, C_2 ）：在球队的赛程安排中，往往会遇到某一支球队连续打客场或连续打主场的情况。分别统计 30 支球队的每一次连续打主场或客场的天数，最后累加求和得到总场数和总次数。两者的比值即是要求的连续主客场均值。

（2）背靠背场数（ C_3 ）：我们之所以单独考虑背靠背因素，是因为这是篮球比赛中衡量赛程公平性的一个重要指标。它不同于“连续客场的均值”这个因素，虽然连续客场包含了背靠背的情况，但是这两种因素的侧重点不同，因此对公平性函数的贡献也不同。

（3）连续与弱队或强队比赛数的均值（ C_4, C_5 ）

首先强队与弱队的定义：根据题目中的统计资料，在主要考虑胜率的情况下，得到如下的柱状分布“实力排行表”。

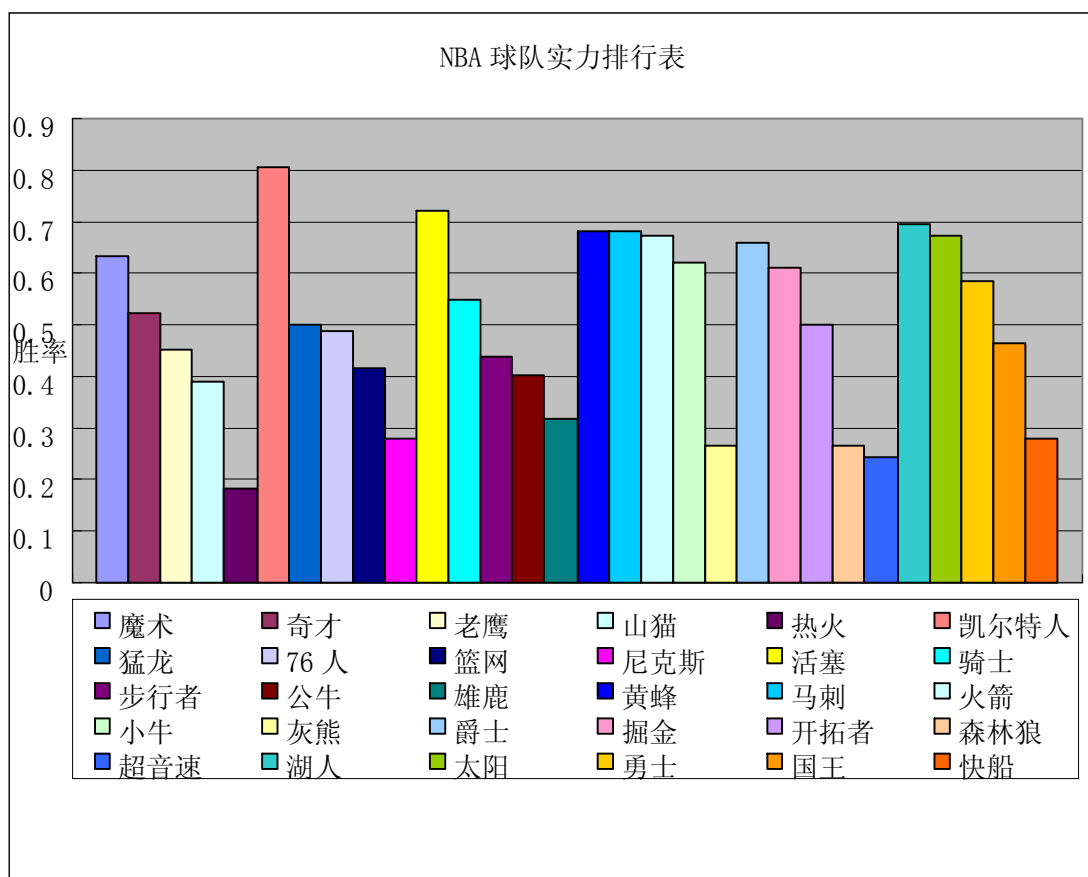


图 2 NBA 球队实力排行表

为了便于模型的讨论，规定胜率在 0.6 以上的球队为强队，胜率在 0.3 以下的为弱队，其余各队实力相当。这样强队便有：魔术，凯尔特人，活塞，黄蜂，马刺，火箭，小牛，爵士，掘金，湖人，太阳；弱队有：热火，尼克斯，灰熊，森林狼，超音速，快船。

赛程中经常会出现某一段时间间隔内一支球队连续与实力较强的队或实力较弱的队对抗，通过统计，得到某一支球队在整个赛程中总连续比赛场数和。两者的比值即是要求的连续与弱队或强队比赛数的均值。

(4) 两场比赛的时间间隔方差 (C_6)：从总体来看，平均每两场比赛的时间间隔都是相等的，约为两天，因为每一个球队的总比赛天数和总赛场数都是相同的。这里考虑两场比赛的时间间隔方差，方差大则说明赛程安排过程中存在较多分段性的赛程安排过紧或过少的情况，这样会不利于球队的整体发挥；相反，方差小则说明安排的紧凑程度合适，利于比赛。在统计数据基础上用 Matlab 6.5 编程（附录一 程序二）根据已得的数据，统计分析结果见下表：

表 9 各球队的参数统计表

参数 球队	连续客场数的 均值	连续主场数的 均值	背靠背场 数	连续对 弱队的 均值	连续对 强队的 均值	时间间 隔方差
76 人	3.66	2.64	6	2.3333	2.625	1.0316
步行者	3.1429	2.1818	5	2.5	2.7143	0.7846
超音速	2.75	2.7273	7	0	2.5556	0.7063

公牛	3.8571	2.7778	5	2	3	0.8197
国王	3.375	3.0909	11	2	2.4545	1.1056
湖人	3.2857	2.9091	10	2.25	3	0.8340
黄蜂	3.125	2.9	8	2.3333	3.1667	0.8587
活塞	3.2857	2.5455	5	0	2.8	0.8834
火箭	3.4285	3.1818	9	2	2.2857	0.6365
掘金	3.25	2.8182	6	2	2.4	0.7846
爵士	3.375	2.5385	7	2.5	3.2	1.0316
开拓者	3.75	2.8462	8	3.5	2.4444	0.7740
凯尔特人	2.7	2.5	6	2.5	3.1667	0.6505
快船	4.1667	3.25	11	2	2.8	0.8444
老鹰	3.1	3.1	6	2	3.5714	0.9779
马刺	3.883	2.6364	7	2	2.8571	0.9328
猛龙	2.7778	2.7	6	2.3333	2.375	0.7846
魔术	3	2.5455	5	2.5	2.8333	0.834
尼克斯	3.1	2.3333	6	3	2.25	0.6859
奇才	2.7778	2.7	6	2	2.25	0.7846
骑士	2.7143	2.6	6	2	2.5	0.7846
热火	3.6667	2.2867	7	2	2	0.89380
森林狼	2.5	2.4167	8	0	2	0.7599
山猫	3.375	2.5385	6	2	2.8750	0.8834
太阳	4	2.4	11	2	2.5714	0.7987
网	3.1667	2.4545	6	2	2.2	0.8587
小牛	3	2.9	5	2.5	2.3333	0.6999
雄鹿	2.6667	3.1111	6	2	3	0.7023
勇士	3.75	2.8182	10	2	3.25	0.6612

由此可得连续客场的均值：3.2486，连续主场的均值：2.7044，背靠背场数均值：7.0333，时间间隔方差均值：0.8240，连续与强队比赛场数均值：2.6838，连续与弱队比赛场数均值：2.0083。将这些均值代入所得评价函数（2），可以得到一个标准评价函数值得 $y' = -5.9270$ ，规定高于 y' 的取值为有利值，低于 y' 的取值为不利值。

由此就建立了一个评价赛程对每个球队是否有利的评价模型，将每个球队相应的六个因素值代入评价函数（2），即可得到一个评价赛程利弊的评价函数值 y ，若 y 高于标准评价函数值则说明赛程对该球队有利，低于标准评价函数值则说明赛程对该球队不利。

问题二的求解：

根据问题一中建立的评价模型，将表 9 中每支球队的各个数据代入评价函数（1），根据 Matlab6.5 编程（附录一：程序三）即得到如表 10 所示各球队的赛

程利弊评价函数值。

表 10 各球队的评价函数值

球队	76 人	步行者	超音速	公牛	国王	湖人	黄蜂
y 值	-5.3486	-4.4461	-6.8168	-4.6808	-9.6809	-8.8892	-7.1918
球队	老鹰	马刺	猛龙	魔术	尼克斯	奇才	骑士
y 值	-5.4786	-6.1217	-4.4693	-5.8638	-5.3111	-5.3655	-5.2291
球队	灰熊	活塞	火箭	掘金	爵士	开拓者	凯尔特人
y 值	-5.1777	-4.4499	-7.9203	-5.4518	-5.7916	-7.1457	-5.4607
球队	热火	森林狼	山猫	太阳	网	小牛	雄鹿
y 值	-6.6952	-7.2019	-5.4076	-9.6234	-5.4664	-4.3057	-5.4911
球队	快船	勇士					
y 值	-10.0136	-9.0367					

从评价函数值分布来看，有最大值-4.3057，最小值-10.0136。这样对应于球队可以得到：最有利的球队是小牛队，最不利的球队是快船队。而从对题目数据的分析来看，小牛队的背靠背比赛场数是最少的，而快船的背靠背比赛场数最多，预期结果和实际情况很符合，是比较准确的。而对于姚明所在的火箭队，函数值是-7.9203，比标准评价函数值小，可见是比较不利的。

通过评价函数值与标准评价函数值的比较，可以得到：低于均值 $y' = -5.9270$ 的队数为 12 支，高于均值的队数有 18 支，有利的达到 60%，而不利的有 40%，对于参加联赛的 30 支队伍来说是比较公平的。

问题三的求解模型：

题目要求根据赛程找出与同部不同区球队比赛中，选取赛 3 场球队的方法。根据已经安排 2008~2009 年 NBA 的赛程进行数据分析，发现现有赛程选取赛 3 场的球队时，同部不同区的各球队对手实力不是很均衡。而各球队对手实力的均衡是安排赛程公平性的一个重要因素。因此，可以看出已经安排的 2008~2009 年 NBA 的赛程中选取赛 3 场的球队方法并不太合理。为此，本文基于公平、均衡的原则设计了一个安排这部分赛程的模型。首先由于赛程时间已经确定，我们所能安排的也就只有东西球队选择和同部不同区的队伍对阵关系。模型建立以东部的 15 支球队为例，具体如下：

分析赛程知道，东部的各支球队要与同部不同区的队伍比赛 3 场，总共是 30 场，而每个球队与同部不同区的队伍比赛的总场数是 36 场，那么问题就在于剩余的 6 场比赛选择同部不同区的哪 6 支队伍比赛队伍，这也是 NBA 赛程的一个特点。既然每个球队与同部不同区的队伍比赛的总场数已定，并且有 30 场是必须赛的，那么问题就在于剩下这 6 支如何选择能使比赛相对公平。如果能够合理地选择这 6 支球队，那么，也就很好地解决了如何选择与同部不同区的队伍比赛 3 场的问题。对于这 6 支球队的选择可以采用如下方式：

为了简化问题，对东部三支球队依次进行分析，每一次考虑同部不同区的两支球队间比赛，由此得到 A, B, C 三区的对阵简化图（图 2）。图中 a_i 和 b_j 或 c_j

的连线表示 a_i 和 b_j 或 c_j 可能要进行比赛。这里用 $x_{i,j}$ 表示由 a_i 和 b_j 连接的边的权值，用 $z_{i,j}$ 表示由 a_i 和 c_j 连接的边的权值，用 $y_{i,j}$ 表示由 a_i 和 c_j 连接的边的权值。由此，

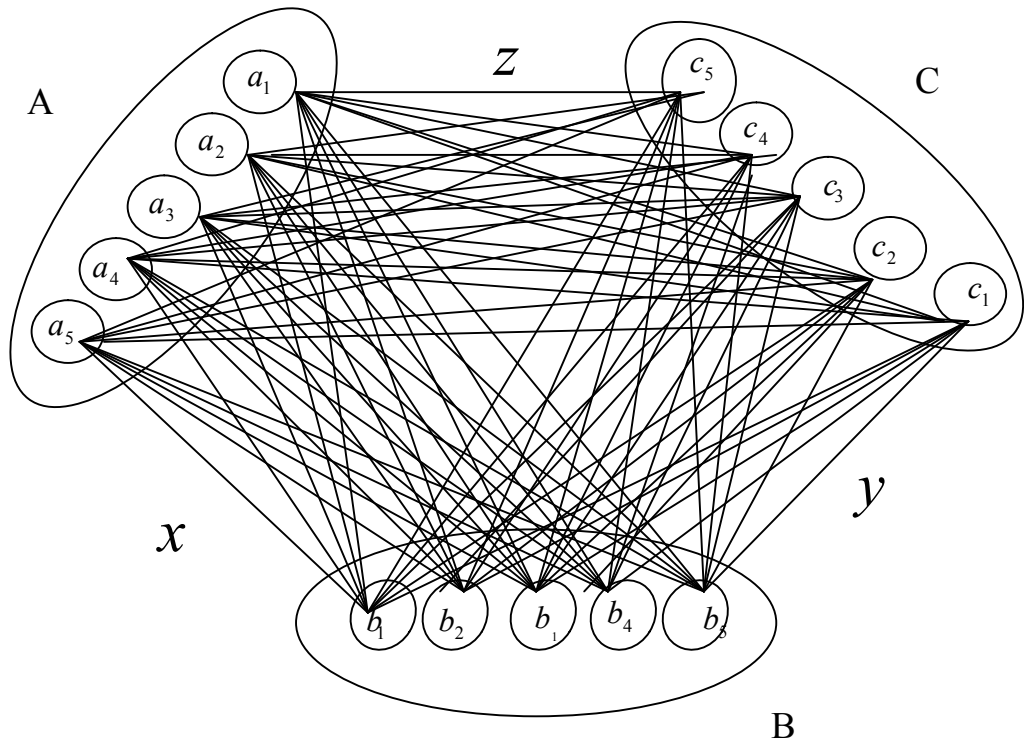


图3 东部3个区的对阵简图

可以把 $x_{i,j}$ 、 $y_{i,j}$ 、 $z_{i,j}$ 看作0-1变量。如果 $x_{i,j}$ 、 $y_{i,j}$ 、 $z_{i,j}$ 取1，则表示 a_i 和 b_j 、 a_i 和 c_j 、 b_i 和 c_j 有比赛，若 $x_{i,j}$ 、 $y_{i,j}$ 、 $z_{i,j}$ 取0，则表示 a_i 和 b_j 、 a_i 和 c_j 、 b_i 和 c_j 有比赛。

作为赛程制定者，是为了比赛尽可能的公平，那么在选择每个队和哪6个队进行剩下比赛的过程中，应充分考虑到各个队伍所面对的6个队的平均实力。如果每个队面对的6个队的实力相对较为均衡，则对于每个球队而言都应该是比较合理的。

考虑到赛程安排的复杂性及公平性，本文根据2007~2008年NBA各个球队的胜率，把球队按胜率进行实力排序，并给出排序的如下准则：

排序准则：球队实力指数（实力指数为球队胜率乘以10而得，故实力指数越大，球队实力越强）。根据排序准则，得到A、B、C三区的球队相应的实力指数如下：

(1) A区球队在B、C区内选择球队时，相应的实力指数 $M_i(i=1,2,\dots,10)$ 为：

表11 B、C区队伍实力指数

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
8.05	5.00	4.88	4.15	2.80	7.20	5.49	4.39	4.02	3.17

(2) B 区球队在 A, C 区内选择球队时, 相应的实力指数 $N_i (i=1,2,\dots,10)$ 为:

表 12 A、C 区队伍实力指数

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}
6.34	5.24	4.51	3.90	1.83	7.20	5.49	4.39	4.02	3.17

(3) C 区球队在 A, B 区内选择球队时, 相应的实力指数 $P_i (i=1,2,\dots,10)$ 为:

表 13 A、B 区队伍实力指数

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
6.34	5.24	4.51	3.90	1.83	8.05	5.00	4.88	4.15	2.80

为了建立同每个队比赛四场的 6 个对手的选择方式与这 6 个队的平均实力的关系, 本文建立了如下的 0-1 规划模型:

对应 A 区的五支球队 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 而言, 要满足 NBA 赛程的规则, 每支球队必须在 B 区 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ 内选择 3 支球队, 也必须在 C 区 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ 内选择 3 支球队, 同时根据 NBA 赛程规则可以知道对 B 区、C 区的每个球队而言, 他一旦被 A 区的某个队选中, 那么他就必须和 A 区中的球队赛 3 场。则根据上面假设的变量 x_{ij} 、 z_{ij} 应满足如下关系:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 x_{1,i} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 x_{2,i} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 x_{3,i} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 x_{4,i} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 x_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 x_{i,1} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 x_{i,2} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 x_{i,3} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 x_{i,4} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 x_{i,5} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 z_{1,i} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 z_{2,i} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 z_{3,i} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 z_{4,i} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 z_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 z_{i,1} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 z_{i,2} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 z_{i,3} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 z_{i,4} = 3 \quad \sum_{i=1}^5 z_{i,5} = 3 \end{array} \right. \quad (3)$$

对于 A 区的某个球队 a_i 而言, 根据他选择的对手以及对手的实力指标, 我

们可以得出球队 a_i 的 6 个对手的综合实力：

$$\alpha_i = M_1x_{i,1} + M_2x_{i,2} + M_3x_{i,3} + M_4x_{i,4} + M_5x_{i,5} + M_6z_{1,i} + M_7z_{2,i} + M_8z_{3,i} + M_9z_{4,i} + M_{10}z_{5,i}$$

那么，要赛程对于 A 区的五支球队相对公正，也就要求每支球队所面对的 6 个对手的综合实力相当。若令 $f = \sum (\alpha_i - \alpha_j)^2$ ，则可以知道，若 f 越小，则 A 区五支球队的对手的综合实力就越相近。结合 (3) 式，则有如下 0-1 整数规划问题：

$$\begin{aligned} \min f &= \sum (\alpha_i - \alpha_j)^2 \\ s.t. &\begin{cases} \sum_{i=1}^5 x_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 x_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,5} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 z_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 z_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,5} = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

同理，对于 B、C 区的 10 支球队，也可以建立如下两个 0-1 整数规划：
对于 B 区的五个球队有 0-1 整数规划：

$$\begin{aligned} \min f &= \sum (\beta_i - \beta_j)^2 \\ s.t. &\begin{cases} \sum_{i=1}^5 y_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 y_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,5} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 z_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 z_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,5} = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 β_i 球队 b_i 的 6 个对手的综合实力，记为：

$$\beta_i = N_1x_{1,i} + N_2x_{2,i} + N_3x_{3,i} + N_4x_{4,i} + N_5x_{5,i} + N_6y_{i,1} + N_7y_{i,2} + N_8y_{i,3} + N_9y_{i,4} + N_{10}y_{i,5}$$

对于 C 区球队来说有 0-1 整数规划：

$$\min f = \sum (\gamma_i - \gamma_j)^2$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^5 x_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 x_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,5} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 y_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 y_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,5} = 3 \end{cases}$$

其中 γ_i 球队 c_i 的 6 个对手的综合实力，记为：

$$\gamma_i = P_1 z_{i,1} + P_2 z_{i,2} + P_3 z_{i,3} + P_4 z_{i,4} + P_5 z_{i,5} + P_6 y_{1,i} + P_7 y_{2,i} + P_8 y_{3,i} + P_9 y_{4,i} + P_{10} y_{5,i}$$

通过求解上面 3 个 0-1 规划即可求出各个队伍的比赛对手，但是上述 3 个 0-1 规划问题都是在分别只考虑 A、B、C 三个区的各自 5 个球队的情况下建立的，对于东部的 15 个球队而言，并不是最公平的方式，由此通过分析三个规划问题，我们可以建立一个新的 0-1 规划问题：

$$\min f = \sum (\alpha_i - \alpha_j)^2 + \sum (\gamma_i - \gamma_j)^2 + \sum (\beta_i - \beta_j)^2$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^5 x_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 x_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 x_{i,5} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 y_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 y_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 y_{i,5} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 z_{1,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{2,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{3,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{4,i} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{5,i} = 3 \\ \sum_{i=1}^5 z_{i,1} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,2} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,3} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,4} = 3 & \sum_{i=1}^5 z_{i,5} = 3 \end{cases}$$

通过对目标函数分析可以看出，该 0-1 规划同时考虑到了东部 15 个球队的对手的综合实力均衡的问题，所以该规划问题得到的结果会相对公平、均衡。

利用 Lingo8.0 编程（附录二：Lingo 程序），对上述模型进行求解^[2]，所得结果见附录三。其对应的每个球队这 6 场比赛的对阵关系为下表所示：

表 14 东部球队对阵表

魔术	VS	猛龙	凯尔特人	VS	活塞	活塞	VS	魔术
魔术	VS	76 人	凯尔特人	VS	公牛	活塞	VS	老鹰
魔术	VS	尼克斯	凯尔特人	VS	雄鹿	活塞	VS	热火
奇才	VS	凯尔特人	猛龙	VS	骑士	骑士	VS	魔术

奇才	VS	网	猛龙	VS	步行者	骑士	VS	奇才
奇才	VS	尼克斯	猛龙	VS	雄鹿	骑士	VS	热火
老鹰	VS	凯尔特人	76 人	VS	活塞	步行者	VS	奇才
老鹰	VS	猛龙	76 人	VS	步行者	步行者	VS	老鹰
老鹰	VS	网	76 人	VS	公牛	步行者	VS	山猫
山猫	VS	凯尔特人	网	VS	活塞	公牛	VS	奇才
山猫	VS	76 人	网	VS	骑士	公牛	VS	山猫
山猫	VS	尼克斯	网	VS	步行者	公牛	VS	热火
热火	VS	猛龙	尼克斯	VS	骑士	雄鹿	VS	魔术
热火	VS	76 人	尼克斯	VS	公牛	雄鹿	VS	老鹰
热火	VS	网	尼克斯	VS	雄鹿	雄鹿	VS	山猫

利用上述模型，同理可得到西部球队这 6 场比赛的对阵关系：

表 15 西部球队对阵表

黄蜂	VS	爵士	爵士	VS	湖人	湖人	VS	黄蜂
黄蜂	VS	掘金	爵士	VS	国王	湖人	VS	火箭
黄蜂	VS	超音速	爵士	VS	快船	湖人	VS	小牛
马刺	VS	开拓者	掘金	VS	湖人	太阳	VS	黄蜂
马刺	VS	森林狼	掘金	VS	太阳	太阳	VS	马刺
马刺	VS	超音速	掘金	VS	快船	太阳	VS	小牛
火箭	VS	爵士	开拓者	VS	太阳	勇士	VS	黄蜂
火箭	VS	掘金	开拓者	VS	勇士	勇士	VS	马刺
火箭	VS	超音速	开拓者	VS	快船	勇士	VS	灰熊
小牛	VS	掘金	森林狼	VS	湖人	国王	VS	火箭
小牛	VS	开拓者	森林狼	VS	勇士	国王	VS	小牛
小牛	VS	森林狼	森林狼	VS	国王	国王	VS	灰熊
灰熊	VS	爵士	超音速	VS	太阳	快船	VS	马刺
灰熊	VS	开拓者	超音速	VS	勇士	快船	VS	火箭
灰熊	VS	森林狼	超音速	VS	国王	快船	VS	灰熊

通过所得到的结果，利用公式

$$f = \sum (\alpha_i - \alpha_j)^2 + \sum (\gamma_i - \gamma_j)^2 + \sum (\beta_i - \beta_j)^2$$

计算出同部不同区的 15 个球队所面对的对手实力综合指数之差的平均值都在 3.2 左右。因此对于东部和西部的队伍来说选择的 6 个对手的综合实力都是相差不大的，由此可见本文所建立的制定赛程的 0-1 规划模型是合理的。

六、 模型评价与改进

模型评价：

优点：

(1) 本文建立了一个评价赛程利弊的模型。首先利用层次分析法确定出了

各个因素的权重，然后将各个因素进行了量化，建立了一个评价赛程利弊的评价函数，很好的解决了赛程利弊的评价问题，通过对 2008~2009 年 NBA 赛程的评价来看，该评价模型效果比较令人满意，同时该模型简单易行，对各种赛程利弊的评价都有一定的推广意义。

(2) 在问题三中，本文通过对 2008~2009 年 NBA 赛程的分析，提出了该赛程存在的不足之处，同时基于公平、均衡的原则，建立了一个制定部分 NBA 赛程的 0-1 规划模型，从制定出的赛程分析来看，赛程安排比较合理，充分考虑了各个队伍的均衡性。

缺点：

(1) 在问题一中，我们采用了层次分析法来确定权重，主观因素较大，但实际操作中可以通过多个专家参与评价的方式以提高判断矩阵的质量，从而避免这些不利因素；

(2) 在问题二中，我们只能确定球队在整个联盟中的利益，即是相对的有利弊存在，而并不是绝对的。即没有考虑每一项评判指标的社会公认值，以此带入评判函数得到一个确定利弊的界值，然后将球队的综合函数值与之比较得到是否有利的评价。但是一旦能够得到这些指标，我们完全可以定量的判断利弊。

模型的改进：

1) 在该题中，由于许多因素的取值都是一个量化的在一定范围内连续型的整数集。因此，我们不能简单的将这些不同取值的变量划归一类，即采取完全相同的权重。题目中最为明显的此类因素为：背靠背比赛场数，连续主客场数，连续与强队或与弱队比赛的场数，球队间实力对比悬殊的场数。在这里我们重点分析背靠背的比赛场数影响因素：

经过统计分析，背靠背比赛平均为 7.03333 场，其上限是 11 场，下限是 5 场。有 11 场背靠背比赛的球队有国王、快船、太阳；有 5 场背靠背比赛的球队有步行者、公牛、灰熊、活塞、猛龙、小牛。

背靠背对球队的战绩是一个不利因素，尤其是对弱队。根据 NBA 实力排行，就单独分析背靠背对 30 支球队的影响权重。

根据背靠背的场数从 5 场到 11 场不等，不妨设相应的评价集为 {好，一般，差}，对应的数值为 5，7，11。根据实际情况取偏大型柯西分布隶属函数^[3]

$$g(x) = \begin{cases} \left[1 + m(x-n)^{-2}\right]^{-1}, & 5 \leq x \leq 7 \\ a \ln x + b, & 7 \leq x \leq 11 \end{cases}$$

其中 m, n, a, b 为待定常数。实际上，当评价为“差”时，则隶属度为 1，即

$g(11)=1$ ；当评价为“一般”时，则隶属度为 0.8，即 $g(7)=0.8$ ；当评价为“好”

时，则隶属度为 0.1，即 $g(5)=0.1$ 。于是 $m=1.44, n=4.6, a=0.4425, b=-0.061$ 或

$m=4, n=5.2857,$

$a=0.4425, b=-0.061$ 。将其带入上式可得隶属函数。这样可以得到 $g(5)=0.1$,

$g(6)=0.6625$ ， $g(7)=0.8$ ， $g(8)=0.8006$ ， $g(9)=0.8592$ ， $g(10)=0.9596$ ， $g(11)=1$ ；根据已知数据，利用 Matlab6.5 编程计算，即可得到背靠背对每一支球队的利弊的评价指标。那么背靠背对球队的影响权重如下表

表 16 背靠背权重影响表

球队	魔术	奇才	老鹰	山猫	热火	凯尔特人	猛龙	76 人
背靠背对球队的权重	0.8006	0.6625	0.6625	0.6625	0.8006	0.6625	0.1000	0.6625
球队	篮网	尼克斯	活塞	骑士	步行者	公牛	雄鹿	
背靠背对球队的权重	0.6625	0.6625	0.1000	0.6625	0.1000	0.1000	0.6625	
球队	黄蜂	马刺	火箭	小牛	灰熊	爵士	掘金	开拓者
背靠背对球队的权重	0.8592	0.8006	0.9113	0.1000	0.1000	0.8006	0.6625	0.8592
球队	森林狼	超音速	湖人	太阳	勇士	国王	快船	
背靠背对球队的权重	0.8592	0.8006	0.9596	1.000	0.9596	1.000	1.000	

这样根据权重相乘最终确定了判定方程时背靠背因素的系数，同时在带入变量时也就有了分段函数的性质。

2) 在优缺点分析时，我们已经说明了经典的层次分析法的缺陷，其中一个主要缺点就是主观性太强^[4]。

在这里，我们可以引入改进的模糊层次分析法，大体步骤如下：

- 1) 区别于九分法，利用三标度法，建立互补型的模糊判断矩阵；
- 2) 求行和并利用转化公式，将模糊判断矩阵改造为模糊一致性判断矩阵；
- 3) 利用和行归一法或方根法求得排序向量；
- 4) 利用转化公式将互补型矩阵转化为互反型矩阵；
- 5) 以排序向量作为特征值法的叠代初值，进一步求精度较高的排序向量。

改进型的模糊层次分析法在解决了判别矩阵一致性问题的同时，又解决了解的精度问题和收敛速度问题，但在本文中没有加以体现，是本文的一个值得改进之处。

七、 参考文献

- [1] 陈义华.数学模型[M].重庆：重庆大学出版社，1995
- [2] 谢金星，薛毅.优化建模 LINDO/LINGO 软件[M].北京：清华大学出版社，2005
- [3] 韩中庚.招聘公务员问题的优化模型与评述[J].工程数学学报.2004 年 12 月，第 21 卷第 7 期：150
- [4] 李永，胡向红，乔箭.改进的模糊层次分析法[J].西北大学学报（自然科学版）.2005 年 2 月，第 35 卷第 1 期:11-12

NBA 赛程的分析与评价

彭六生 邱伟明 常 镜

指导教师：宋丽娟

摘要：本文通过建立综合评价模型对 NBA 赛程安排利弊进行了分析和评价，并建立梯形转圈法对一部分赛程进行了安排。

问题一，针对如何评价赛程对某一支球队的利弊，本文考虑了 4 个主要因素，即赛事密度、对手实力、连续客场数、背靠背场数。对这 4 个因素（或 4 个评价指标），我们进行了极小化量化处理，并引入熵值对这三个评价指标进行了客观赋权，从而建立了综合评价模型。即得到综合评价指标

$$W_i = 0.1466A_{1i} + 0.6443A_{2i} + 0.0738A_{3i} + 0.1354A_{4i}$$

问题二，通过问题一中建立的综合评价模型和各量化的 4 个评价指标，求得各个球队的综合评价指标，确立在 95%置信度下，该指标的置信区间（0.8338，0.9301），落在该区间下的球队可看作赛程对其的利弊相当，由于火箭队综合评价指标 $W_{18} > 0.9301$ ，说明赛事安排对火箭队是较为有利的。要找出赛程对 30 支球队最有利和最不利的球队，只需找出综合评价指标最大值与最小值即对应的球队即可，可知赛程安排最有利和最不利分别为勇士队和热火队。

问题三：首先对各个球队的对阵要求进行分类，根据分类，求出描述球队之间对阵形势下比赛场数的矩阵。结合各项评价指标和所生成的矩阵，利用梯形转圈法设计赛程，选取赛 3 场的球队。从主客场对阵两支球队的整体实力以及对阵不同实力球队时的主客场次数方面考虑，用球队和观众的满意度对方案进行评价。

本文的系统分析思想和综合评价模型适用于大部分评价系统的研究，比如对某种疾病疗法的综合评价等，模型的建立关键在评价指标的确立及其量化，以及确定各指标在综合评价中的重要性，即权数的确定，本文采用的是客观赋权，避免了主观赋权的意愿性。

关键词：综合评价指标 客观赋权 熵值

1 问题的重述（略）

2 问题假设

- 1、背靠背表示连续两天作战；
- 2、不考虑场地、气候等对不同地域球队的影响；
- 3、评价的主观因素是一致的；
- 4、赛程中没有队伍弃权退出比赛；
- 5、赛程中没有出现意外的停赛事件。

3 符号说明

a	表示各球队赛程信息的矩阵
b	表示球队相邻两个场次比赛的时间差矩阵
w_i	赛程安排对第 <i>i</i> 支球队利弊的综合评价指标
A_{1i}	赛事密度安排对第 <i>i</i> 支球队利弊的评价指标
A_{2i}	对手实力对第 <i>i</i> 支球队利弊的评价指标
A_{3i}	连续客场作战场次安排对第 <i>i</i> 支球队利弊的评价指标
A_{4i}	背靠背场次安排对第 <i>i</i> 支球队利弊的评价指标
w_k	第 <i>k</i> 个评价指标的权重
D_i	对球队 <i>j</i> 赛事安排的均匀度
P_i	球队 <i>j</i> 的实力评分
q_{ij}	为球队 <i>j</i> 对 <i>i</i> 的影响（相对实力差）
Q_i	表示球队 <i>i</i> 各比赛场次的对阵球队综合实力对该球队的影响。

4 问题分析

问题一：要对赛程利弊进行综合评价，需要进行系统综合分析[1]，确立系统结构模型，确定影响综合评价的各项指标，我们考虑赛程安排对球队的利弊主要是对球队胜率的影响，对该要素综合评价的指标体系主要包括：

(1) 赛事密度。对一支球队来说，比赛场次安排的密度要合适，使得每两场比赛之间的间隔时间尽量均匀，这样不仅能够保障休息时间，又利于热身状态的保持。

(2) 对手强弱。对某球队来说，赛程安排的对手球队实力是影响其胜率的重要因素，可考察所安排赛程中各对手球队的综合实力对球队 i 的影响。

(3) 连续主客场数。连续主场作战对球队来说没有旅途奔波的劳累，没有心理上影响，主场球迷的支持更有利于提升士气；而连续客场作战影响球员休息和状态，对球队来说极为不利。两者权重相当，是互补的关系，可选取连续客场作战场次作为评价指标。

(4) 背靠背广义上来讲是球队连续两天作战，这种赛制是对球队体能和实力的极大考验，背靠背次数越多，对球队越不利。

以上各个评价指标对综合评价的重要性不同，需确定权重体现评价指标的地位和作用，本文采用一种客观赋权法，更具说服力，这种方法通过各个量化的指标，引入熵值的概念，来确定权重。[2]

各项指标的量化：

对赛事密度，可以考虑分析球队比赛时间安排的均匀性，采用相邻两场比赛时间差的方差来定量这个指标，方差越小，说明赛事安排的越均匀，对球队越有利；

对阵球队的实力强弱是影响胜率的重要因素，定义一个与对阵球队相比相对实力差来说明对手的相对实力，然后对所有对阵球队的相对实力求和，以说明赛程中对手的综合实力强弱，对手的综合实力越强，对球队越不利。

由赛程整理出连续客场和背靠背次数；

可见以上指标均为极小型指标，即越小越好。指标量化后采用一定标准对各指标无量纲化，实现评价指标的可比较性，以对赛程对某一支球队的利弊进行综合评价。

问题二：问题一对各指标进行了量化，并建立了综合评价模型，通过这个模型和影响火箭队胜率的各评价指标可求得各队综合评价指数，求出综合评价指数在一定置信度下的置信区间，确立该区间的意义是在该置信度下，落在该区间下的点可看作与均值无显著差异，也就是赛程对其利弊相当，低于下限表明赛程明显不利，高于上限表明赛程明显有利。通过求得综合评价指数的极值所对应的球队来确定赛程安排最有利和最不利的球队。

问题三：由已知信息对各个球队的对阵要求进行分类，根据分类，求出描述球队之间对阵形势下比赛场数的矩阵。结合各项评价指标和所生成的矩阵，利用梯形转圈法设计赛程，选取赛3场的球队。从主客场对阵两支球队的整体实力以及对阵不同实力球队时的主客场次数方面考虑，用球队和观众的满意度对方案进行评价。

5 模型建立与求解

为了便于数据处理和分析，整理已有赛程信息，进行数学描述：

(1) 对日期进行编号。将 08-09 赛季 10 月 29 日作为第一天，记为“1”，依次编号。

(2) 为了便于数据分析和处理，对 30 支球队如下编号，见表 1

表 1 30 支球队的编号对照表

东部联盟	编号	西部联盟	编号
东南区		西南区	
魔术	1	黄蜂	16
奇才	2	马刺	17
老鹰	3	火箭	18
山猫	4	小牛	19
热火	5	灰熊	20
大西洋区		西北区	
凯尔特人	6	爵士	21
猛龙	7	掘金	22
76 人	8	开拓者	23
篮网	9	森林狼	24
尼克斯	10	超音速	25
中部区		太平洋区	
活塞	11	湖人	26
骑士	12	太阳	27
步行者	13	勇士	28
公牛	14	国王	29
雄鹿	15	快船	30

根据对比赛日期、球队编号处理，可以建立数据结构如：2 13 11

表示 10 月 30 日比赛中客队为新泽西网队，主队华盛顿奇才。按这种结构依次列出 NBA08-09 赛季的 1230 场常规赛，可以得到一个的矩阵 a （程序见附录 1）来表示赛程信息。

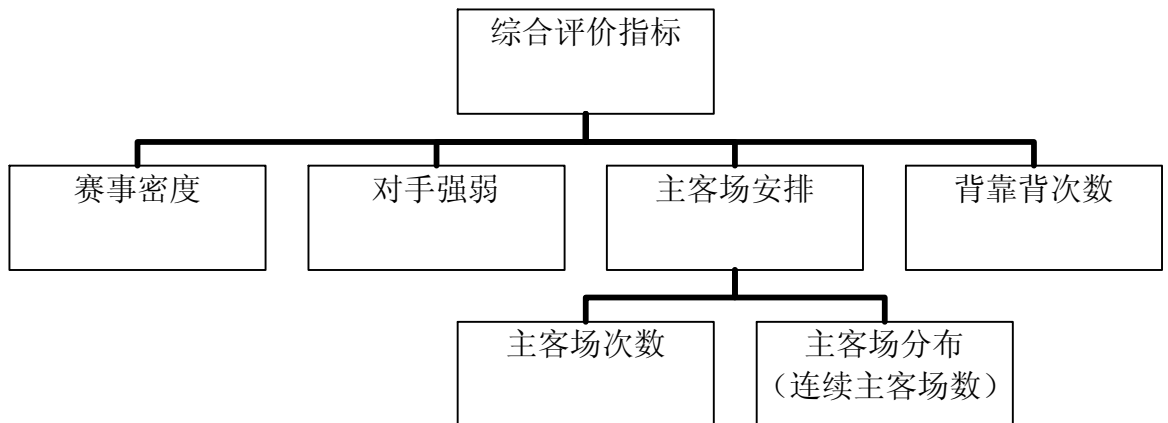
1.1 问题一：

1.1.1 模型的建立[1]

对球队 i 来说，赛程安排对其利弊主要取决于对其胜率的影响，定义一个“胜率影响指数” W_i 作为综合评价指标。影响胜率的主要因素有：

- (1) 赛事安排的均匀度，即单位时间内赛事密度；
- (2) 对手的强弱；
- (3) 主客场的安排，包括主客场的次数和分布，主客场分布即连续主客场次数；

- (4) 背靠背次数，即球队连续两天客场作战的次数
- 赛程对球队的利弊主要取决于其对球队胜率的影响，由此建立如下评价结构模型 (*)：



讨论：

- 1) 用 matlab6.5 统计主客场次数如下（程序见附录 2）

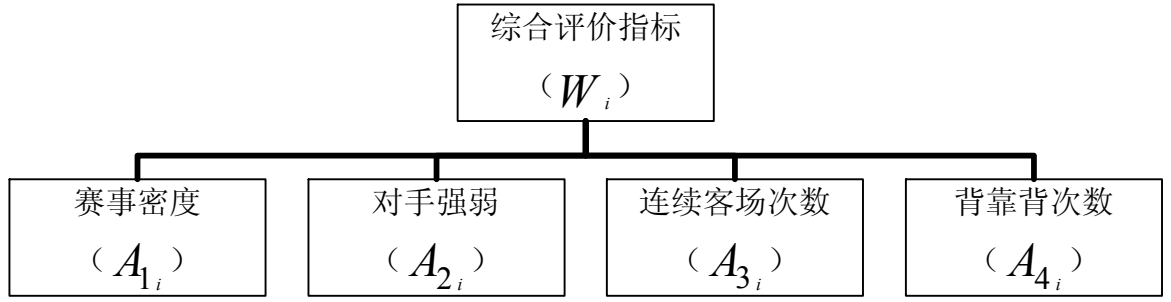
表 2 主客场次数

球队编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
主场次数	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41
客场次数	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41
球队编号	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
主场次数	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41
客场次数	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41

由表 2 可知，各球队主客场比赛场数均为 41 场，因此可不考虑主客场次数对球队的利弊。

- 2) 由于主场分布与客场分布是互补的，因此可只考虑连续客场次数。

将评价结构模型 (*) 修正为：



各个评价指标对综合评价值的影响程度不一样, 进行综合评价前必须首先确定评价指标的重要性, 即权重。 w_k 表示第 k 项指标的权重。

综合评价指数为

$$W_i = \sum_k w_k A_{ki} \quad (1)$$

其中 $\sum_k w = 1$

1.1.2 模型的求解

(1) 权重的确定

我们引入熵的定义对各项指标客观赋权[2]:

定义: $H(p_1, p_2, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^k p_i \ln p_i$ 称为对应于样本空间 $X(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 的熵, 也称Shannon熵。

定理: $H(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq H(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = \ln n$

推论: $S = \frac{1}{\ln n} H(p_1, p_2, \dots, p_n) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leq 1$

讨论利用熵确定各指标权重的方法:

我们设有 N 个球队, T 项评价指标, 其分值矩阵为:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1T} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2T} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NT} \end{pmatrix}$$

求解各指标权重的步骤分为以下几步:

(a) 评价指标的标准化

为了消除量纲, 增加可比性, 我们对各评价指标进行标准化。评价指标可分为极大型(即指标越大越好)和极小型(指标越小越好), 因此第 i 支的第 k 项

指标的分值 f_{ik} 可标准化为:

$$\text{极大型 } m_{ik} = \frac{f_{ik}}{M_k} \quad i=1,2,\dots,N; k=1,2,\dots,T \quad (2)$$

$$\text{极小型 } m_{ik} = 1 + \frac{m_k}{M_k} - \frac{f_{ik}}{M_k} \quad i=1,2,\dots,N; k=1,2,\dots,T \quad (3)$$

其中 M_k 和 m_k 分别为所有球队在第 k 项评价指标所得分值中的最大值和最小值。

(b) 求 S_k

由前述熵的定义可知 $0 \leq p_i \leq 1$ 且 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, 则在不改变 m_{ik} 单调性的情况下, 令:

$$p_{ik} = i=1,2,\dots,N; k=1,2,\dots,T) \quad (4)$$

$$\text{并取 } S_k = -\frac{1}{\ln N} \sum_{i=1}^n p_{ik} \ln p_{ik} \quad (k=1,2,\dots,T) \quad (5)$$

一旦 N 确定, 则 $\frac{1}{\ln N}$ 为定值, 因此可用 S_k 来刻画熵 $\sum_{i=1}^n p_{ik} \ln p_{ik}$ 。之所以用 S_k

来刻画熵, 是为了求权重而须使 $0 \leq S_k \leq 1$ (由推论知)。

(c) 求权重 w_k

由 (4) 知 S_k 是 p_{ik} 的减函数, 对于第 k 项指标, 若 $f_{ik} (i=1,2,\dots,N)$ 差异大, 则由 (1)、(2)、(3) 知 m_{ik} 和 p_{ik} 差异大, 则 S_k 越小; 另一方面, 指标的差异程度与在比较中的重要程度呈正相关, 因此差异程度大的指标其权重 w_k' 也越大, 这与 S_k 刚好相反。由于 w_k' 是一权重, 所以可令 $w_k' = 1 - S_k$ 可保证 $0 \leq w_k' \leq 1$ 。

由权重的定义, 可取

$$w_k = \frac{w'_k}{\sum_{k=1}^T w'_k} \quad (k=1,2,\dots,T) \quad (6)$$

从而保证 $\sum_{k=1}^T w_k = 1$ ，且 w_k 能够刻画第 k 项指标在比较中的重要程度。

(2) 评价指标的量化

1) 评价指标 A_{1i} 的量化（赛事密度）

定义均匀度 D_i 表示对于球队 i 比赛场次安排的密度， D_i 即为球队 i 相邻两次比赛时间差的方差（球队 i 相邻两次比赛时间差矩阵 b 见附录 3）。

表 3. 赛事安排的均匀度

球队编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
均匀度	0.705	0.648	0.898	0.819	0.769	0.759	0.840	1.044	0.944	0.794
球队编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
均匀度	0.644	0.905	0.830	0.830	0.940	0.869	0.794	0.794	0.709	0.884
球队编号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
均匀度	0.769	1.044	0.705	0.880	0.719	0.844	0.869	0.680	1.119	0.994

2) 评价指标 A_{2i} 的量化（对阵球队强弱）

根据附件 2，可得到 07—08 赛季各球队的排名信息，然后按照排名对各个球队的实力进行评分，排名第一为 30 分，依次递减：

表 4. 各球队实力评分情况

球队编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
实力评分	22	17	12	8	1	30	15	14	10	5	29	18	11	9	7
球队编号	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
实力评分	27	26	25	21	3	23	20	16	4	2	28	24	19	13	6

定义相对实力差 $q_{ij} = \frac{|P_i - P_j|}{P}$ 评价球队 i 对 j 的相对实力，其中 P_i 、 P_j 分别

表示球队 i 、 j 的实力评分。 q_{ij} 也可以表述为球队 j 对 i 的影响因子。

在 07—08 赛季各队赛程中，当对“各对手球队实力对球队 i 的影响”这一要素进行考察时，可将与球队 i 对手的各个球队的相对实力差相加，作为对手实力对其影响的量化指标。

$$Q_i = \sum q_{ijk} \quad (i=1,2,\dots,30; j=1,2,\dots,30; k=1,2,\dots,82) \quad (7)$$

表示球队 i 各个比赛场次的对阵球队的综合实力对该球队的影响。

用 Excel 整理数据，可得量化指标 A_{2i}

表 5. 对手综合实力强弱

球队编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
对手综合实力	36.676	37.706	52.75	93.375	1222	42.5	41	43.857	68	186.2
球队编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
对手综合实力	42.034	37.167	59.725	79	112.285	35.667	35.538	33.8	33.381	384.334
球队编号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
对手综合实力	33.435	34.2	32.1875	268.5	594.5	37.429	33.834	35.579	53.462	159.5

3) 评价指标 A_{3i} 的量化（连续客场作战场次）

对赛程表分析整理可得到连续客场比赛的总场次：

表 6. 连续客场比赛总场次

球队编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
比赛次数	29	27	33	27	29	29	31	29	26	23	30	25	25	27	31
球队编号	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
比赛次数	29	28	30	31	29	29	30	33	29	32	33	30	30	33	29

4) 评价指标 A_{4i} 的量化（第 i 支球队背靠背场次）

根据矩阵 a ，用 MATLAB6.5 计算出第 i 支球队的背靠背比赛数。

表 7. 各球队背靠背次数

球队编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
次数	16	18	22	21	19	17	17	21	22	19	16	19	21	22	22
球队编号	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
次数	19	18	20	16	22	21	21	16	22	18	19	19	15	21	21

根据权重的求解步骤(a)，用 matlab6.5 编程实现各评价指标标准化：（附录

4)

表 8. 标准化后的评价指标值

评价指标 球队编号	A_{1i}	A_{2i}	A_{3i}	A_{4i}
1	0.9455	0.9963	0.8182	0.9545
2	0.9964	0.9955	0.8788	0.8636
3	0.7730	0.9832	0.6970	0.6818
4	0.8436	0.9499	0.8788	0.7273
5	0.8883	0.0263	0.8182	0.8182
6	0.8972	0.9916	0.8182	0.9091
7	0.8248	0.9928	0.7576	0.9091
8	0.6425	0.9905	0.8182	0.7273
9	0.7319	0.9707	0.9091	0.6818

10	0.8660	0.8740	1.0000	0.8182
11	1.0000	0.9919	0.7879	0.9545
12	0.7668	0.9959	0.9394	0.8182
13	0.8338	0.9775	0.9394	0.7273
14	0.8338	0.9617	0.8788	0.6818
15	0.7355	0.9345	0.7576	0.6818
16	0.7989	0.9972	0.8182	0.8182
17	0.8660	0.9973	0.8485	0.8636
18	0.8660	0.9987	0.7879	0.7727
19	0.9419	0.9990	0.7576	0.9545
20	0.7855	0.7118	0.8182	0.6818
21	0.8883	0.9990	0.8182	0.7273
22	0.6425	0.9984	0.7879	0.7273
23	0.9455	1.0000	0.6970	0.9545
24	0.7891	0.8066	0.8182	0.6818
25	0.9330	0.5398	0.7273	0.8636
26	0.8213	0.9957	0.6970	0.8182
27	0.7989	0.9987	0.7879	0.8182
28	0.9678	0.9972	0.7879	1.0000
29	0.5755	0.9826	0.6970	0.7273
30	0.6872	0.8958	0.8182	0.7273

根据权重求解步骤(b)(c)，运用 matlab6.5 编程确定权重 w_k （附录 5）

$$w_k = (0.1466, 0.6443, 0.0738, 0.1354)$$

因此，赛程利弊的综合评价指标（胜率影响指数）为：

$$W_i = 0.1466A_{1i} + 0.6443A_{2i} + 0.0738A_{3i} + 0.1354A_{4i} \quad (8)$$

1.2 问题二：

由问题一各项标准化的评价指标和综合评价模型，用 matlab6.5 求得各球队的综合评价指标，并作图反映各球队综合评价指标：（附录 6）

表 9. 各球队综合评价指标

球队编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W_i	0.9701	0.9693	0.8906	0.8990	0.3183	0.9539	0.9396	0.8912	0.8921	0.8747
球队编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
W_i	0.9731	0.9342	0.9198	0.8990	0.8581	0.9308	0.9491	0.9332	0.9669	0.7265
球队	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

编号										
W_i	0.9327	0.8941	0.9636	0.7881	0.6552	0.9242	0.9295	0.9779	0.8674	0.8368

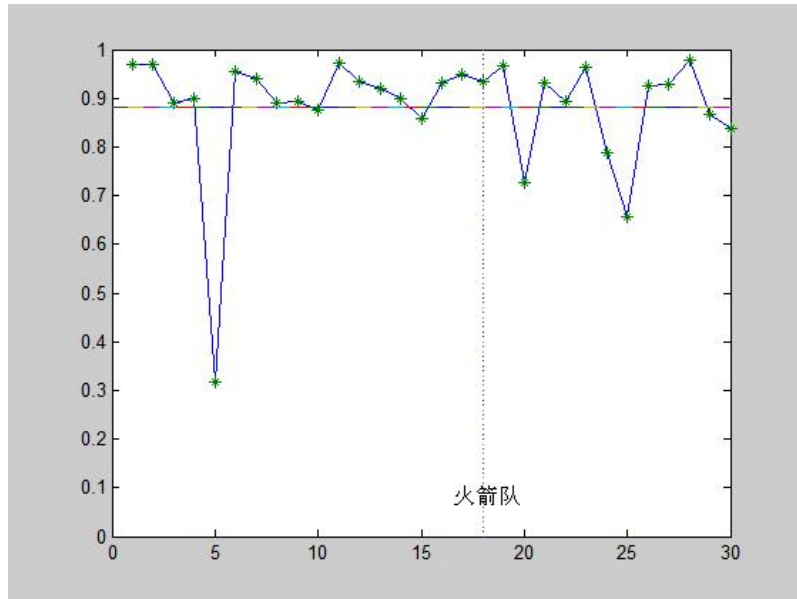


图 1. 综合评价指数对比图

令 $W = (W_1, W_2, \dots, W_{30})$, 则 $\mu(W_i) = 0.8820$

用 matlab 中编程求出在 95%置信度下, 综合评价指数的置信区间为(0.8338, 0.9301) (附录 7), 确立该区间的意义是在 95%置信度下, 落在该区间下的点可看作与均值 $\mu(W_i)$ 无显著差异, 即:

若 $0.8338 < W_i < 0.9301$, 则该球队的综合评价指数居中, 赛程安排的利弊程度均衡;

若 $W_i < 0.8338$, 则赛事安排对该球队明显不利;

若 $W_i > 0.9301$, 则赛事安排对该球队明显有利。

火箭队的综合评价指标 $W_{18} = 0.9332 > 0.9301$, 说明赛事安排对火箭队是较为有利的。

$$\max(W_i) = W_{28} = 0.9779$$

$$\min(W_i) = W_5 = 0.3183$$

有综合评价指标的含义可知赛程对勇士队 (28) 最有利, 对热火队 (5) 最不利

1.3 问题三:

根据已知的赛程分析，将每个球队和不同球队的对阵要求分为以下三类：

第一类：每支球队与同区的每一球队赛 4 场（主客各 2 场）

第二类：与同部不同区的每一球队有赛 4 场和赛 3 场（2 主 1 客或 2 客 1 主）两种情况，同时每支球队的主客场数量相同且同部 3 个区的球队间保持均衡；

第三类：与不同部的每一球队赛 2 场（主客各 1 场）

按照 NBA 比赛场数的规定，每个球队的比赛场数为 82。于是根据上述三类原则可分析得到比赛场数的分布安排：

与不同部的每支球队主客各赛 1 场即 2 场，共 30 场；

与同区的每一支球队主客各赛 2 场即 4 场，共 16 场；

剩下 36 场安排于与同部不同区的 10 支球队比赛。

考虑到每支球队的主客场数量相同且同部 3 个区的球队间的均衡性，可确立对任一球队，都与同部不同区的每一区中两支球队赛三场，对于赛三场的这两支球队而言，与同区的其他球队相比，一支为少 1 客场，另一支为少 1 主场，而非同时少 1 主场或 1 客场。

我们采用梯形转圈法对同部不同区的赛程进行安排。

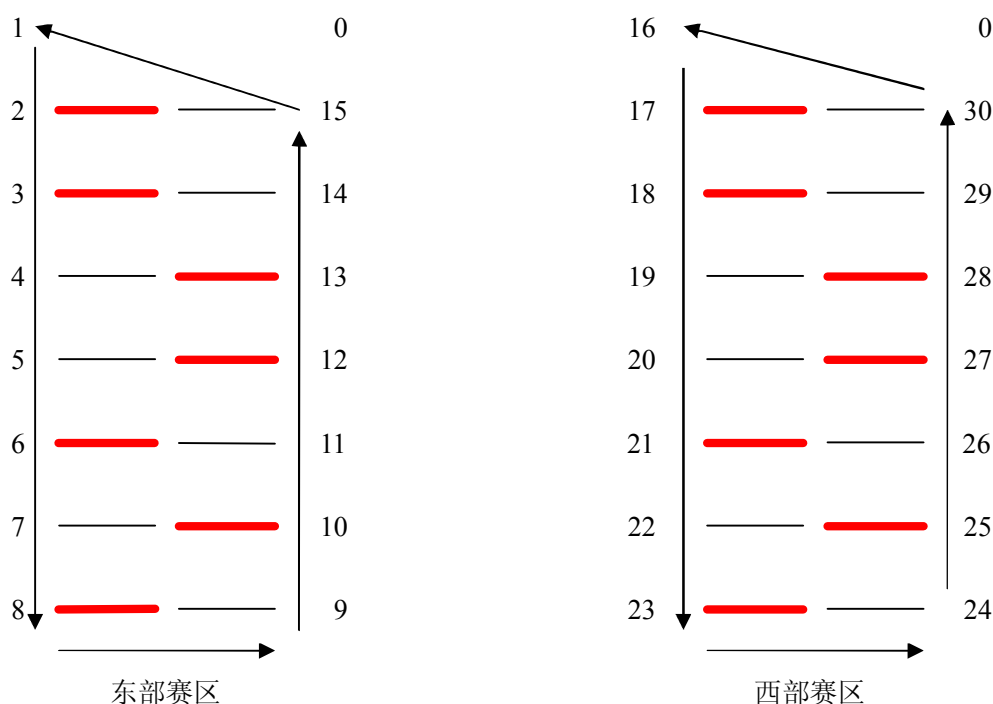


图 2. 梯形转圈法

结合图 1 说明梯形转圈法的算法：

(1) 1, 2, 3, 4……30 每个数字代表一支队。1-15 代表东部赛区各队，16-30 代表西部赛区各队，0 表示悬空。

(2) 处于同一条直线上的两支队表示是要比赛的两队。特别地，与零对着的那支队在休息。

(3) 红色粗线的一方表示是主场作战，黑色细线则表示是客场作战。

(4) 移动过程，两个赛区都是进行逆时针移动。每次移动所有的横线的位置保持不变。只是把每个数字按逆时针方向移动一个位置。例如图 1 所示的状态，经过一次移动后数字 15 将移动到图示状态 1 的位置，1 移动到 2 的位置，2 移动到 3 的位置。经过 14 次移动循环一周就可以确定能够安排完每支队与同在一大

赛区的每支队之间进行 1 场比赛（如图 10）。

（5）比完一个循环，红色粗线和黑色粗线表示的意义互换，即黑色粗线的一方表示是主场作战，红色细线则表示是客场作战。

根据以上安排，经过三次循环后同一个小赛区内各队之间还相互要赛一场。类似的用梯形转圈法进行赛程安排。而小赛区的每支球队与同在一个大赛区但不在同一小赛区的 10 支球队只需选赛 6 场，根据图 10 赛程对阵和公平性电脑随机选择剔除四个对阵，最后剔除的对阵中的球队即为所需赛三场的球队。

根据上述原则得到描述球队之间对阵形势下比赛场数的矩阵（附录 8）。根据生成的矩阵可以很快找到选赛三场的球队。由于西部赛区和东部赛区赛程规则完全一致，所以只需单方考虑某一赛区（东部赛区或西部赛区），本题考虑东部赛区。

表 10. 第一个循环的对阵形势（东部赛区）

1-14	2-15	3-14	13-4	12-5	6-11	10-7	8-9	8-9	10-7	6-11	12-5	13-4	3-14	2-15
1-12	2-13	12-3	11-4	5-10	9-6	7-8	7-8	9-6	5-10	11-4	12-3	2-13	1-14	15-13
10-1	11-2	10-3	4-9	8-5	6-7	6-7	8-5	4-9	10-3	11-2	1-12	15-13	14-12	15-11
8-1	9-2	3-8	7-4	5-6	5-6	7-4	3-8	9-2	10-1	15-11	14-12	13-11	14-10	9-15
1-6	2-7	6-3	4-5	4-5	6-3	2-7	8-1	9-15	14-10	13-11	12-10	13-9	8-14	7-15
4-1	5-2	3-4	3-4	5-2	1-6	7-15	8-14	13-9	12-10	11-9	12-8	7-13	6-14	15-5
1-2	2-3	2-3	4-1	15-5	6-14	7-13	12-8	11-9	10-8	11-7	6-12	5-13	14-4	3-15
15-1	1-2	3-15	14-4	5-13	6-12	11-7	10-8	9-7	10-6	5-11	4-12	13-3	2-14	15-1
1-13	2-14	13-3	4-12	5-11	10-6	9-7	8-6	9-5	4-10	3-11	12-2	1-13	14-15	14-15
11-1	12-2	3-11	4-10	9-5	8-6	7-5	8-4	3-9	2-10	11-1	15-12	13-14	13-14	15-12
1-9	2-10	3-9	8-4	7-5	6-4	7-3	2-8	1-9	10-15	14-11	12-13	12-13	14-11	10-15
1-7	2-8	7-3	6-4	5-3	6-2	1-7	15-8	9-14	13-10	11-12	11-12	13-10	9-14	15-8
5-1	6-2	5-3	4-2	5-1	15-6	14-7	8-13	12-9	10-11	10-11	12-9	8-13	14-7	15-6
3-1	4-2	3-1	4-15	14-5	13-6	7-12	11-8	9-10	9-10	11-8	7-12	13-6	14-5	4-15

方法评价：考虑主客场对阵两支球队的整体实力以及对阵不同实力球队时的主客场次数。有可能出现以下三种对阵形势：

（1）对于理想化的对阵形势来讲，主客场对阵对手越弱越好即安排没有悬念的比赛，或者主客场对阵弱实力球队场数越多越好，最高分别为 2。但对于广大观众而言精彩程度太低，看的人过少即客座率低；反过来讲，主客场对阵时对手均相对过强，或者是主客场对阵时对阵强对手次数过多，此种对阵形势同样对广大观众而言精彩程度太低，看的人也会不多。

（2）主客场对阵双方实力平均，即强队对强队或弱队对弱队。双方对阵实力相当对球队而言是比较糟糕的，会在比赛中消耗极大的体力甚至出现队员受伤的可能。但对于观众而言赛事是相当精彩的，逢有此类赛事客座率肯定高。

（3）主客场对阵双方实力有弱也有强，场次安排比较合理如客场安排一强队一弱队，主场安排也是一强队一弱队的对阵。此类安排对球队而言是比较好的，而且观众的客座率也是比较高的。

对于（1）、（2）中球队对阵现象，球队或观众肯定会有一方不甚满意。因此，可以进行人为干预对比赛进行对阵双方的调整。而（3）中对阵形势是可以接受的即不再需要人为干预。由于该方法对赛程的安排没有考虑时间因素的影响，且安排赛程时不可能做到绝对合理化，因此，该方法可能会对某些球队甚至比赛产生

一定的负面效应，但就整个赛程安排而言，我们是可以进行人为干预即根据需要将赛三场的主客场比赛调整安排在对球队对阵比赛相对合理的位置，并以此降低其产生的负面效应。

6 模型的评价与推广

6.1 模型的优点

(1) 模型的优点：综合评价系统所涉及数学理论较为成熟，说服力强；定义胜率影响指数说明赛程利弊，并根据实际设立相应评价指标，并量化了指标，数据转换较为客观。

(2) 权重的确定采用了引入熵的客观赋权法，替代了常用的主观赋权，使权重的确定更可信。

6.2 模型的缺点

(1) 模型仍然理想化了很多因素，比如长距离客场作战影响，对气候的适应造成的影响等等，使模型有一定局限性；

(2) 评价指标的量化存在缺陷，如球队实力的评估模型有待优化。

6.3 模型的改进与推广

(1) 采用更多的评价指标，从影响胜率之外的因素考虑赛程利弊，更为全面地评价球队实力，更全面考虑影响因素，加强模型的可信度。

(2) 做实际调查获取数据，对量化的评价指标做进一步修正。

(3) 本文的系统分析思想和综合评价模型适用于大部分评价系统的研究，比如对某种疾病疗法的综合评价等，模型的建立关键在评价指标的确立及其量化，以及确定各指标在综合评价中的重要性，即权数的确定。

参考文献

[1]董肇君，系统工程与运筹学，北京：国防工业出版社，2007

[2]罗万春等，公务员招聘方案的数学模型，重庆职业技术学院学报，14（4）：147-149，2005

地面搜索的数学模型

韦劲宇 张小玲 曹 念

指导教师：蔡昌启

摘 要

本文主要讨论设计了搜索 11200 米×7200 米的矩形目标区域的优化路径，以保证对预定区域进行快速全面的搜索。

问题一，我们讨论了如何使 20 人一组的搜索队伍在最短时间完成搜索任务。首先将其转化为图论问题，得到距离图 D （图 5-3），然后建立满足完全搜索的 0-1 规划模型【模型一】，利用 LINGO8.0 求解得到最短搜索的路径图（图 5-4），总搜索时间为 51.1018 小时，不能够在 48 小时内完成搜索任务。

为保证在 48 小时内完成搜索任务，采用减少搜索道即增加道宽的方法确定增加的最少人数。根据模型一建立了【模型二】和动态规划模型【模型三】，得到最终的搜索路径（图 5-7），增加的最少人数为 3 人，分为 8 道，完成搜索耗时 46.1019 小时。模型二、三具有通用性，可给出任意搜索道数的最短搜索时间及规定 48 小时内完成搜索需要增加的人数（表 5-1）。另外考虑改变搜索起始点的位置，建立了通用模型【模型四】，结合模型三求得不同分道数下完成搜索任务增加的最少人数和完成时间（表 5-2），由模型四也得到分 8 道和增加最少 3 人能完成搜索任务，完成时间为 45.1059 小时，比模型二优。

问题二，讨论了如何将 50 人分三组并选择最佳搜索路径，使搜索时间最短。把矩形分三个区域，按均分道宽和不均分道宽讨论。

对于均分搜索，确立了两种方式（图 5-10、5-11），建立【模型五】求得最短搜索时间分别为图 5-10 的 23.1151 小时和图 5-11 的 23.3524 小时。结论是采用均分搜索以图 5-10 的搜索方式最优，但浪费的人员较多。

对非均分搜索，引入搜索横径与道宽相对差异度 q ，人数均衡度 r 等因子作为限制条件，建立规划模型【模型六】求得人员分组为 16 人、17 人、17 人；所划区域宽分别为 2304 米、2448 米、2448 米；所耗最短总时间为 23.1151 小时，还是避免不了人员的浪费。

考虑浪费人员，建立规划模型【模型七】，得到在 50 个人的基础上，可以最大限度减少 5 人仍能在原来时间上完成搜索任务。此模型通过改进可以得到在规定时间内规定组数或完成的搜索的人员分配，安排多少人来完成任务，也可以在实现在规定人数的人员分组问题，是一个推广性较好的数学模型。

关键词：路线转换；距离图；0-1 规划；动态规划

一、问题重述（略）

二、符号说明

V_{ij} ：为 0、1 变量，表示是否选择某条路，其形式为 $V_{ij} = 0$ 表示不选择， $V_{ij} = 1$

表示选择走该路；

C_{ij} ：表示从第 i 点到第 j 点的路程距离，两点间没有路的用无穷大表示，自己到

自己距离为 0；

d ：搜索道的宽度；

z ：起点到终点的直线距离为 5600 米；

g_i ：各个组的起点到各自的搜索起点的距离；

n_i ：第 i 组的人数（ $i = (1, 2, 3)$ ）；

u_i ：第 i 组所搜索的区域的宽度。

$T_{\text{总}}$ ：搜索完成的最短总时间。

三、条件假设

1. 搜救人员按直线行进；
2. 地面情况对搜救人员的行进速度无影响；
3. 搜救人员向上级报告对搜索进度无影响；

四、问题分析

问题一：

1. 本问题要求设计 20 人一组的耗时最短的搜索^[1~3]方式，为保证时间最短，首先要求 20 人每秒搜索的面积尽可能大，所以须并排相切站队。由于每人步话机的通讯半径为 1000 米，为保证每个搜索队员搜索到目标及时向组长报告，只要搜索宽度不超过 1000 米，即可保证通讯。因为，20 人并排搜索的最宽距离为 $20 \times 40 = 800$ 米，所以 20 人可以同时并排向前搜索。

2. 由于目标区域为矩形且长宽不同，因此有横向搜索与纵向搜索两种方式。

由于 20 人的最大搜索宽度为 800 米，因此横向搜索道路可分为 $7200/800=9$ 个搜索道（图 4-1），纵向搜索道路可分为 $11200/800=14$ 个搜索道（图 4-2）。

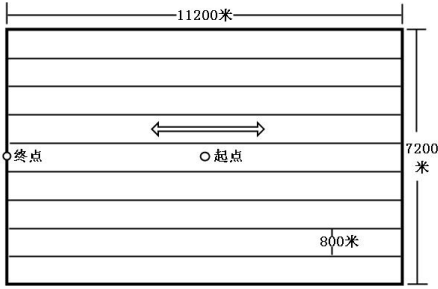


图 4-1 横向搜索道

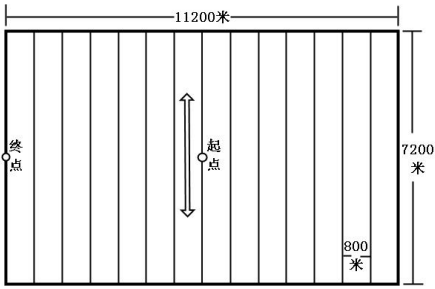


图 4-2 纵向搜索道

由图示可见，虽然横向道和纵向道的道数不同，但横向搜索距离（ $9 \times 11200 = 100800$ ）和纵向搜索距离（ $14 \times 7200 = 100800$ ）相同。而纵向道的道数多，转弯就多，所用时间比横向道所用时间长。因此最短时间的搜索方式应以横向道搜索进行。

为使问题求解简化，可将搜索道转化为距离图。根据搜索起始点的位置我们考虑两种搜索方式：

搜索方式一：搜索起点在目标区域的中心，按照横向搜索方式，根据图论及优化理论建立 0-1 规划模型。

搜索方式二：搜索起点在最上面或最下面道的端点。按照横向搜索方式，建立了通用模型。

问题二：

为了加快速度，搜索队伍 50 人需分三组。分组原则考虑按横向均匀分区和横向分为三种不同的道宽两种情况进行地毯式搜索，搜索均从矩形道的顶角横向扫描，到达终点，最后比较两种方式的最短搜索时间，较小者为完成搜索的最短时间。

情况一：横向均匀分道

由于道可以均匀分，因此可将道从上之下分为上、中、下三个部分，让 50 个人分为三组分别到达各自部分的顶角，然后从顶角横向搜索最后到达终点，由于问题一得出的结论为在人数多的时候道越宽用的时间也越短，因此 50 个人分为 3 组时应该分为 16、17、17 个，此时道宽应该按照 16 个人的搜索最大横径 $16 \times 40 = 640$ 米进行搜索，这样分得到的道为最少，即 $7200/640 = 12$ 个（见图 4-3），道宽为 $7200/12 = 600$ 米。

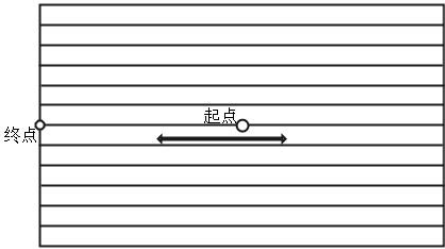


图 4-3 均匀分为 12 个道

由于分为三组，因此可将 12 个道均匀分为 3 个部分，每个小组各自先从起点到达自己搜索区域的顶角然后进行地毯式搜索，最后回到终点，由此得到两种搜索方式（图 5-8、5-9），按照搜索方式，根据问题一的分析，起点到搜索起点和矩形边界上前进的速度为 1.2 米/秒，搜索时速度为 0.6 米/秒，可计算出每种方式中每个组从起点到终点的时间，最后两种方式中谁用的时间最短就为使横向均匀分道的搜索时间最短的搜索方式。

情况二：横向分为三种不同的道宽

情况一中考虑了均分，在 50 人分为 16、17、17 时，道宽是按照 16 人的搜索距离 640 米分的道，每道道宽 600 米，分 12 个道，因此用 17 人去搜索的时候在道与道之间就重复了相当大的搜索面积，因此浪费了人员；由于搜索面积都一样大，前面分析了对总的影响时间最大的就是分道，道越多时间就越长，因此我们考虑将 50 个人分三组，道宽分为三种，把整个面积按照情况一考虑，仍然分为三个区域给三个组走，我们的目的是三个区域各自均匀分道，因此就产生了三个道宽，由于终点在矩形中间，因此每个区域的宽度不能超过 3600，否则时间肯定比图 13 大，在这个基础之上我们再考虑人员分配的差异不能太大，尽量均衡（也就是区域的宽度尽量相当），要时间最短三个区域的分道的道数一定要相同，但是考虑通讯 1000 米，我们认为每组的的人员最多为 $1000/40=25$ 人，我们的目的看能否安排 50 个人分三组分三个区域从原来的 4 个道减少数目，这样搜索时间就更短了，另外考虑尽量让人不浪费，因此每个区域的道宽和其对应人员搜索距离尽量之间的差异尽量小，且三个区域的差异相对比例保持基本平衡，由此，建立一个规划模型可解决该问题。

五、模型的建立与求解

问题一：

从问题分析中我们确立了 20 个人均匀并排成道宽 800 米同时进行横向直线搜索的方案。

（一）搜索道模型：根据问题分析建立的搜索道模型用图 5-1、5-2 表示为：

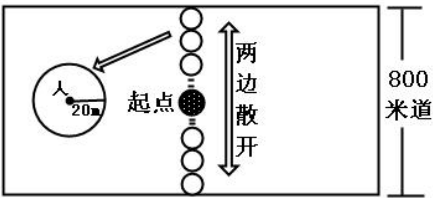


图 5-1 人员向道两边依次散开

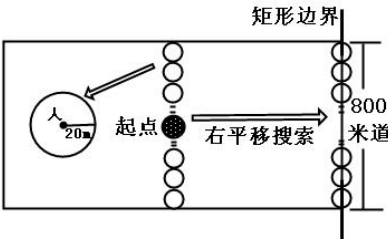


图 5-2 人员搜索抵达边界

以横向道为准，由于要时间最短，每个人都应同时进行搜索且考虑一并排相切的方式垂直矩形的边进行搜索，刚好为一个搜索道，因此在上面的道上 20 个人都应该并排从起点向道上散开为 800 米占道（图 5-1）；另外，每个人搜索面积是圆形的，因此要求 20 人一起的搜索时每个人都同时抵达矩形的最边沿（图 5-1），这样才能保证全部搜索完所有的面积。

(二) 距离图 D 的建立：把 20 个人看作一个点、搜索道看作一条边，相邻搜索道之间的距离为 800 米，以出发点和结束点及横向道两端点构成一个距离图^[4] D (图 5-3)。

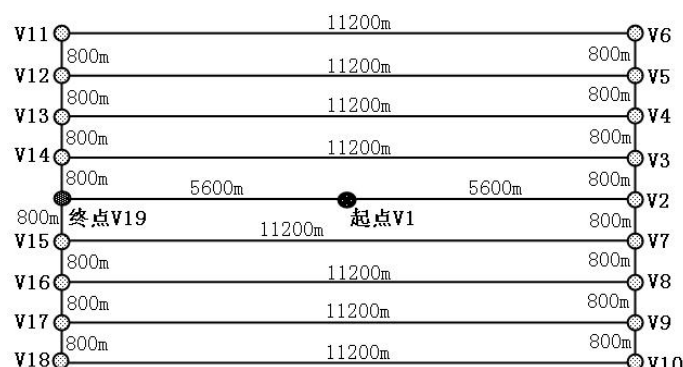


图 5-3 距离图

(三) 两种搜索方式下的模型建立与求解

搜索方式一 根据距离图，可建立从起点到终点搜索完面积的总路程最短的 0-1 规划^[5, 6]模型为：

目标函数，总路程最小：

$$\text{Min} \quad f = \sum_{i=1}^{19} \sum_{j=1}^{19} V_{ij} C_{ij} \quad (i \neq j)$$

限制条件：

1) 从起点到其它点的边之和大于等于 1，保证至少有边出去，则有：

$$\sum_{j=2}^{19} V_{1j} \geq 1$$

2) 所有点到终点的边之和大于等于 1，保证至少有边到达终点，有：

$$\sum_{i=1}^{18} V_{i19} \geq 1$$

3) 中间点进去和出去的边要守恒，有： $\sum_{j=1}^{19} V_{ji} - \sum_{j=1}^{19} V_{ij} = 0$

4) 所有搜索路径必须走完，有：

$$st. \begin{cases} V_{12} + V_{21} \geq 1, & V_{1,19} + V_{19,1} \geq 1 \\ V_{3,14} + V_{14,3} \geq 1, & V_{4,13} + V_{13,4} \geq 1 \\ V_{5,12} + V_{12,5} \geq 1, & V_{6,11} + V_{11,6} \geq 1 \\ V_{7,15} + V_{15,7} \geq 1, & V_{8,16} + V_{16,8} \geq 1 \\ V_{9,17} + V_{17,9} \geq 1, & V_{10,18} + V_{18,10} \geq 1 \end{cases}$$

5) 对于从起点到终点的路必须连通，不能形成脱离的圈；

5) 对于所有 V_{ij} ，有 $V_{ij} \in (0,1)$

综合以上，得到我们起点到终点满足搜索路径必走的条件的最短路的 0-1 规划模型为：

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f = \sum_{i=1}^{19} \sum_{j=1}^{19} V_{ij} C_{ij} \quad (i \neq j) \\ \text{st.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=2}^{19} V_{1j} \geq 1, & \sum_{i=1}^{18} V_{i19} \geq 1 \\ \sum_{j=1}^{19} V_{ji} - \sum_{j=1}^{19} V_{ij} = 0 \\ V_{12} + V_{21} \geq 1, & V_{1,19} + V_{19,1} \geq 1 \\ V_{3,14} + V_{14,3} \geq 1, & V_{4,13} + V_{13,4} \geq 1 \\ V_{5,12} + V_{12,5} \geq 1, & V_{6,11} + V_{11,6} \geq 1 \\ V_{7,15} + V_{15,7} \geq 1, & V_{8,16} + V_{16,8} \geq 1 \\ V_{9,17} + V_{17,9} \geq 1, & V_{10,18} + V_{18,10} \geq 1 \\ V_{ij} \in (0,1) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 19) \quad (\text{模型一}) \end{aligned}$$

根据建立的模型，利用 LINGO8.0 软件^[7]编程（程序一）求解，得到起点到终点的最短路径（图 5-4）为：

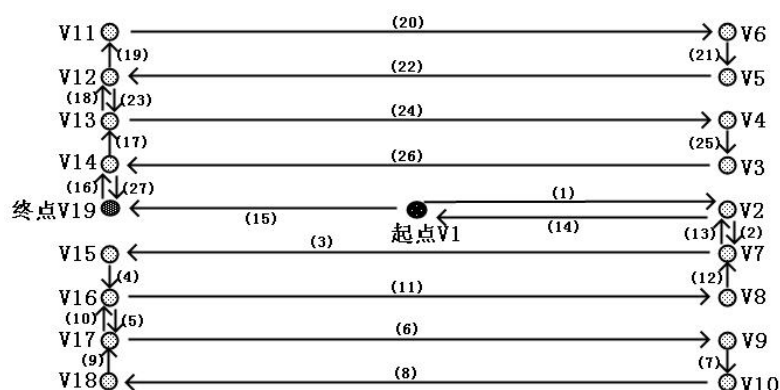


图 5-4 最短路径图

注：图中小括号的数字标记为搜索的次序标记，也为最短路的走向标记。
图中从起点到终点的路程为：V1（起点）→V2→V7→V15→V16→V17→V9→V10→V18→V17→V16→V8→V7→V2→V1→V19→V14→V13→V12→V11→V6→V5→V12→V13→V4→V3→V14→V19（终点），总路程为 119200 米，共 27 条边，其中有 9 条为搜索路（1、3、6、8、11、15、20、22、24、26），有 16 条边界路（2、4、5、7、9、10、12、13、16、17、18、19、21、23、25、27），还有一条重复搜索路（14）。

（1）最短时间的计算：

按照要求，边界路和重复的搜索路的行使速度为 1.2 米/秒，搜索路为 0.6 米/秒，因此根据 6 中的结果可以计算出最短搜索时间为：

$$T_1 = \left(\frac{16 \times 800 + 5600}{1.2} + \frac{8 \times 11200 + 2 \times 5600}{0.6} \right) / 3600 = 50.9259 \quad (\text{小时})$$

另在开始队伍从起点处向两边散开占道和队伍到达终点处汇聚需要时间，由于起点和终点都是在中间道的中点上，因此散开和汇聚的距离均只有 400-20=380 米，所用时间为：

$$T_2 = \left(\frac{2 \times 380}{1.2} \right) / 3600 = 0.1759 \quad (\text{小时})$$

因此，队伍从起点搜索完这个面积到达终点的总的最短时间为：

$$T_{\text{总}} = T_1 + T_2 = 50.9259 + 0.1759 = 51.1018 \quad (\text{小时})$$

综上，我们把搜索矩形目标区域的路线转换为距离图，利用图论通过建立满足条件的起点到终点的最短路径的 0-1 规划模型，最后计算得到搜索的走向，以及搜索完成的最短总时间为 51.1018 小时，因此，认为 20 人一组是不可能在 48 小时之内完成任务的。

（2）增加人数的模型建立与求解

根据上面的结果，20 人一组是不能在 48 小时内完成搜索任务。因此用增加人数、减少搜索道数来缩短搜索时间。而增加人数可减少搜索道，因此可将矩形目标区域均匀分为横向 8 道、7 道、6 道等等，直到得到的时间刚好小于 48 小时，增加的人数就为最少。此时增加的人数可以用道宽来计算。根据以上的分析，横向 9 道为奇数道，起点和终点在中间道的中间。但搜索道数目为偶数时，起点和终点在中间两道的交界线上，例如 8 道时的道宽为 $7200/8 = 900$ 米（图 5-5），那么在从起点向道分散开或向终点聚拢时的时间均为整个道宽，此时时间为 $900/1.2/3600 = 0.125$ 小时，利用上面思想将搜索图转化为距离图则为（图 5-6）。

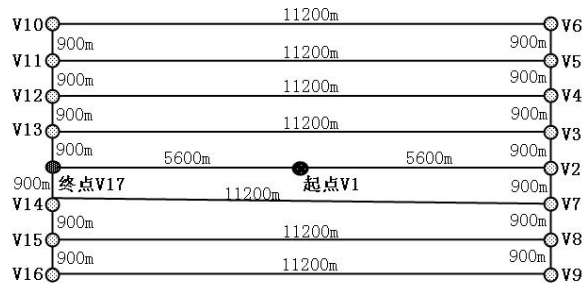
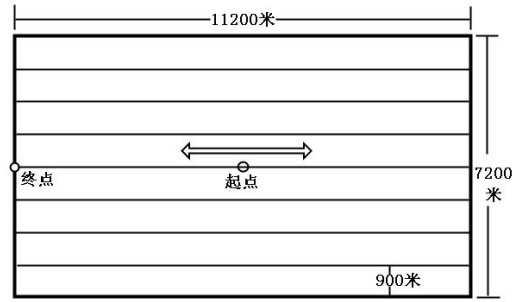


图 5-5 8 个道的横向搜索道

图 5-6 8 个道的距离图

同样按照前面的模型我们可以得到 8 个横向道的最短走向图 (5-7):

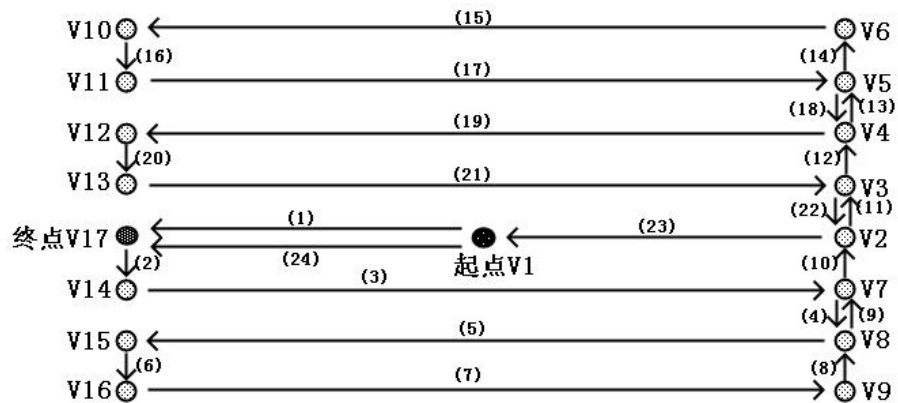


图 5-7 8 个搜索道的起点到终点搜索完的最短路径图

图中小括号的数字标记为搜索的次序标记, 也为最短路的走向标记, 共 24 条边, 其中有 9 条为搜索路 (1、3、5、7、15、17、19、21、23), 有 14 条边界路 (2、4、6、8、9、10、11、12、13、14、16、18、20、22), 还有一条重复搜索路 (24)。

因此综合奇数和偶数搜索道综合考虑, 在搜索区域分为 n 道路时, 都重复一条长为 5600 米搜索路, 且搜索长为 11200 米的搜索道为 n 条, 搜索时走的边界道宽的数量为 $2(n-1)$ 条, 因此我们可以建立以这种方式搜索的最短时间的通用模型, 设道宽为 d , 则最短路的最小时间为:

$$T_1 = \left(\frac{11200n}{0.6} + \frac{5600 + 2(n-1)d}{1.2} \right) / 3600$$

还要考虑，在开始队伍从起点要向道散开占道和到达终点聚拢需要的时间为：

$$T_2 = \begin{cases} \left(\frac{d-40}{1.2} \right) / 3600 & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ \left(\frac{2d-40}{1.2} \right) / 3600 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

因此，按照我们的方法得到搜索的最短总时间的通用模型为：

$$T_{\text{总}} = T_1 + T_2 = \begin{cases} \left(\frac{11200n}{0.6} + \frac{5600 + 2(n-1)d}{1.2} + \frac{d-40}{1.2} \right) / 3600 & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ \left(\frac{11200n}{0.6} + \frac{5600 + 2(n-1)d}{1.2} + \frac{2d-40}{1.2} \right) / 3600 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (\text{模型二})$$

二)

对于可以增加的人数可以建立优化模型：

目标增加人数最少，设增加的人数为 m 个，我们的目标是使得增加人数最少有。

$$\text{Min} \quad z = m$$

综上得到增加人数的动态优化模型^[8]：

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad z = m \\ &\text{st.} \begin{cases} 40 \times (20 + m) \geq d \\ T_{\text{总}} \leq 48 \\ d = 7200 / n \end{cases} \quad n = (8, 7, 6 \dots) \quad (\text{模型三}) \end{aligned}$$

这里，对于分 n 个道，我们从题目可以考虑通讯问题，组里其他人员必须及时向组长报告情况，因此每个人和组长的最长距离为 1000 米，我们考虑把组长放在中间，因此队员之间的最大距离为 2000 米，因此以 2000 米横排搜索，这里 $7200/200=3.6$ ，最少都要分 4 个道。

利用 LINGO8.0 软件（程序二）依次取 $n=8,7,6,5,4$ 求解分别得到结果为下表

表 5-1 不同分道在 48 小时以内完成增加的最少人数

分道数 (n)	增加人数 (个)	完成时间 (小时)
8	3	46.1019
7	6	40.6786

6	10	35.7315
5	16	30.213
4	25	24.9444

因此，建立了一个通用的模型可以适合任意的分道。由此看，最少增加 3 个人就可以完成任务，且总时间最小为 46.019 小时。

搜索方式二 搜索起点在最上面或最下面道的端点的模型建立

根据问题分析，得到奇数道和偶数道的最优地毯式搜索路径分别为（图 5-8、5-9）：

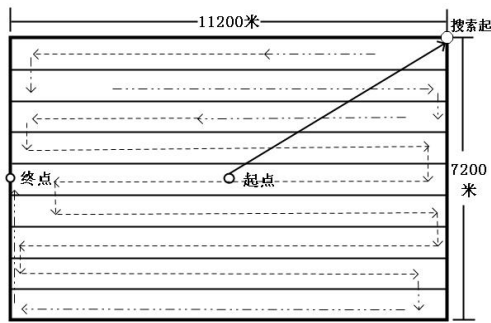


图 5-8 奇数道地毯式图

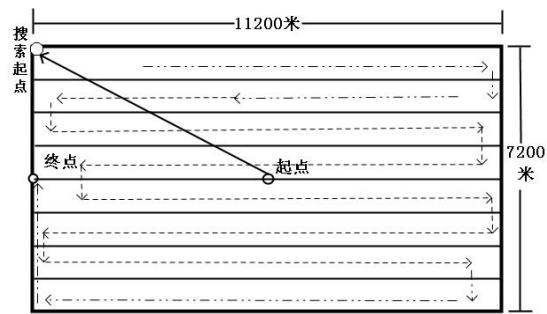


图 5-9 偶数道地毯式图

从图看奇数道应该从起点到右边的最上面或最下面道上，而偶数道从起点到左边的最上面或最下面道上，这样可以保证走的路径最短，时间也最短。从图 5-8 看，9 道时以 0.6 米/秒的速度走了 9 条 11200 的道，以 1.2 米/秒的速度走了道宽 12 条道宽加半个道宽及从起点到搜索起点的距离；而图 5-9 的 8 道时以 0.6 米/秒的速度走了 8 条 11200 的道，以 1.2 米/秒的速度走了道宽 10 条道宽加半个道宽及从起点到搜索起点的距离；因此可以总结得到奇数道和偶数道共同的 1120 道数为 n 道，而道宽条数为 $2(n-3)$ 条，奇数的多了 0.5 条，从图看起点到搜索起点的距离为起点到终点的距离和终点到搜索起点的平方和开方，设起点到终点距离为 d （1120 米），终点到搜索起点的距离为 s （3600 米），设道宽为 p ，因此可以得出计算最短时间的通用模型为：

$$T_{\text{总}} = \begin{cases} \left(\frac{11200n}{0.6} + \frac{(2(n-3)+0.5)p + \sqrt{d^2 + s^2}}{1.2} \right) / 3600 & n \text{ 为奇数} \\ \left(\frac{11200n}{0.6} + \frac{2(n-3)p + \sqrt{d^2 + s^2}}{1.2} \right) / 3600 & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (\text{模型四})$$

通过模型我们计算得到 9 道搜索的最短时间为 50.5255 小时，48 个小时不能完成搜索；8 道的道宽为 900 米，因此 20 个人的搜索横径为 800 米，不够，因此根据 $900/40=22.5$ ，最少还需要加 3 个人才能满足条件，另外我们考虑所有人最大只能相隔 1000 米因此最多只能 25 个人一组，23 个人满足条件，最后得到

的 8 道时间为 45.1059 小时，可以在 48 个小时以内完成任务，比前面时间更短。

因此我们认为这种方式比上面直接从起点开始的地毯式搜索时间要短些，搜索路径更好一点。

我们可以根据 9 中的模型可以分别取 $n = 8, 7, 6, 5, 4$ ，用 LINGO8.0（程序三）求解可以得到以下结果：

表 5-2 不同分道在 48 小时以内完成增加的最少人数

分道数 (n)	增加人数 (个)	完成时间 (小时)
8	3	45.1059
7	6	39.8612
6	10	34.3189
5	16	28.9670
4	25	23.1151

由表可以知道，此搜索方法的结果每减少一道增加的人数和 9 中的一样，但对应的搜索时间明显低于 9 中的搜索时间。说明这种搜索方式比前面要好一点。

问题二：

根据问题分析分横向均匀分道和横向分为三种不同的道宽两种方式进行地毯式搜索

（一）横向均匀分道

根据问题分析确定的两种搜索方式，如（图 5-10、5-11）：

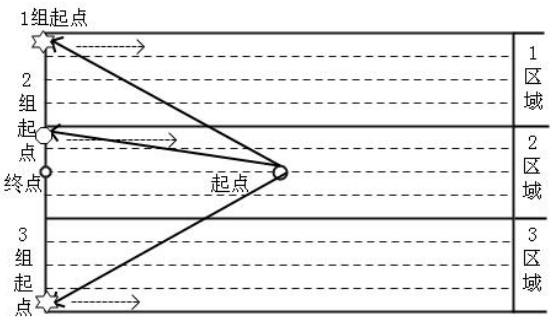


图 5-10

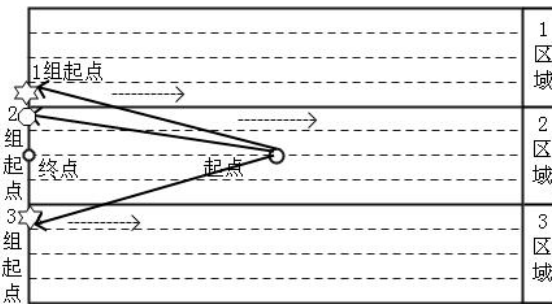


图 5-11

虚线箭头为各个组开始的地毯式搜索方向，，从图看起点和终点均在中间，因此 1 组和 3 组所用的时间相同，但是 1，2，3 组在进行区域的地毯式搜索中的区域时间相同，均为搜索 4 次 11200 米和转 3 个边界道宽，不同的是 1 与 2、3

在从起点到达各自的搜索起点的路程不同，且从搜索完毕后回到终点的边界路上用的时间也不同；图 5-10 中 1、3 组从地毯式搜索完毕要经 3 个道宽人员全部回到终点，2 组则从地毯式搜索完毕经 2 个道宽人员回到终点；图 5-11 中的 2 组和图 5-10 中的 2 组一样，1、3 组则从地毯式搜索完毕经 6 个道宽人员回到终点，但是与图 5-11 不一样的就在 1、3 组到达自己搜索顶角的路程比图 5-11 短。

结合问题分析综合，图 5-10 中 1、3 组各自总共经过一个 1.2 米/秒的对角线到达自己的搜索起点，再经过 4 次 0.6 米/秒的地毯式搜索，各自共经过 6 个 1.2 米/秒的边界道宽到达终点，2 组总共经过一个 1.2 米/秒的对角线到达自己的顶角，再经过 4 次 0.6 米/秒的地毯式搜索，共经过 5 个 1.2 米/秒的边界道宽到达终点；图 5-11 的 2 组与图 5-10 一样，1、3 组各自总共经过一个 1.2 米/秒的对角线到达自己的搜索起点，再经过 4 次 0.6 米/秒的地毯式搜索，各自共经过 9 个 1.2 米/秒的边界道宽到达终点

由此可计算出各个组的搜索总时间，设道宽为 d ，起点到终点的距离为 z ，各个组的起点到各自的搜索起点的距离为 g_i ，设各个组经过共经过的边界道宽的条数为 k_i 条。因此第 i 个组搜索的最短总时间的模型为：

$$T_i = \left(\frac{\left(\sqrt{z^2 + g_i^2} + dk_i \right)}{1.2} + \frac{4 \times 11200}{0.6} \right) / 3600 \quad (\text{模型五})$$

通过此公式结合数据，计算出图 5-10 和图 5-11 两种搜索方式的各组的搜索时间，各组中搜索时间最长的即为搜索的最短总时间，分别为：

图 5-10 有：

$$T_{1or3}^{5-10} = \left(\frac{\sqrt{5600^2 + 3600^2} + 6 \times 600}{1.2} + \frac{4 \times 11200}{0.6} \right) / 3600 = 23.1151 \text{ 小时}$$

$$T_2^{5-10} = \left(\frac{\sqrt{5600^2 + 1200^2} + 5 \times 600}{1.2} + \frac{4 \times 11200}{0.6} \right) / 3600 = 22.7609 \text{ 小时}$$

因此图 5-10 的搜索方式的最短总时间为 23.1151 小时。

图 5-11 有：

$$T_{1or3}^{5-11} = \left(\frac{\sqrt{5600^2 + 1800^2} + 9 \times 600}{1.2} + \frac{4 \times 11200}{0.6} \right) / 3600 = 23.3524 \text{ 小时}$$

$$T_2^{5-11} = \left(\frac{\sqrt{5600^2 + 1200^2} + 5 \times 600}{1.2} + \frac{4 \times 11200}{0.6} \right) / 3600 = 22.7609 \text{ 小时}$$

因此图 5-11 的搜方式的最短总时间为 23.3524 小时。

总之，认为均匀分道时，搜索方式以图 5-10 的方式为最好，搜索的最段总时间为 23.1151 小时，所以在搜索的时候应该选择图 5-10 的方式进行搜索。

(二) 横向分为三种道宽：建立一个规划模型

设三个组的人为 n_i ，三个区域的宽度为 u_i ，三个区域分的道数为 s 个，我们

的目标就是使得分的道数最小和各个组搜索横径与道宽的相对差异保持平衡,横径平衡用指标 q 表示,道宽尽量平衡用指标 r 表示,则有:

$$\text{Min} \quad f = s + q + r$$

对于各个区域的道宽必须满足: $40n_i \geq u_i/s$;

对于人数有: $\sum_{i=1}^3 n_i = 50$;

对于总宽度有: $\sum_{i=1}^3 u_i = 7200$;

由于终点在半矩形的中间,因此三个区域宽度有: $u_i \leq 3600$;

人数尽量均衡: $\frac{u_i}{7200} \leq r$;

每组人员数目的限制: $n_i \leq 25$;

对于各个组搜索横径与道宽的相对差异保持平衡有: $\frac{40n_i - u_i/s}{u_i/s} \leq q$;

$n_i, s \in Z^+$; $n_i, u_i > 0$;

因此模型归纳为:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f = s + q + r \\ \text{st.} \quad & \begin{cases} 40n_i \geq u_i/s \\ \sum_{i=1}^3 n_i = 50 \\ \sum_{i=1}^3 u_i = 7200 \\ \frac{40n_i - u_i/s}{u_i/s} \leq q & (i=1,2,3) \\ u_i \leq 3600 \\ u_i/7200 \leq r \\ n_i \leq 25 \\ n_i, s \in Z^+; n_i, u_i > 0 \end{cases} \quad (\text{模型六}) \end{aligned}$$

利用 LINGO8.0 (程序四) 软件求解得: $s = 4$ 、 $n_1 = 16$ 、 $n_2 = 17$ 、 $n_3 = 17$ 、 $u_1 = 2304$ 、 $u_2 = 2448$ 、 $u_3 = 2448$, 各个区域的道宽分别为 576、612、612 米, 各个区域的分道数目仍然为 4, 不能减少, 人员分配数目和原来的一样, 只是区域宽度变了, 其大致图为 (图 5-12):

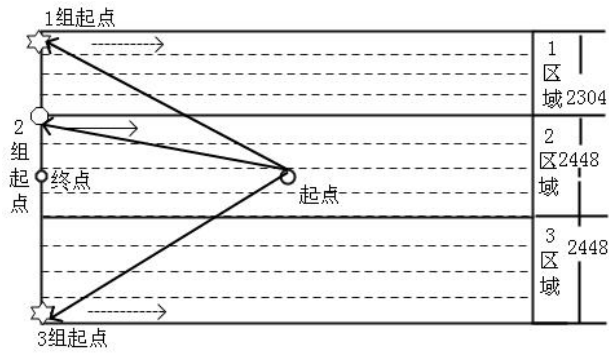


图 5-12 优化后的分道图

由于仍然分 4 道，按照图 5-10 的分析，上图 1、3 组的时间相同且比 2 组肯定大，因此最后计算的总时间为：

$$T' = \left(\frac{\sqrt{5600^2 + 3600^2} + 3600}{1.2} + \frac{4 \times 11200}{0.6} \right) / 3600 = 23.1151 \quad \text{小时}$$

和图 5-10 的时间一样，因此按照横向均匀分道和横向分为三种道宽这两种情况进行搜索都可以得到耗时最短的搜索方式，搜索完整个区域的时间为 23.1151 小时。

六、模型的进一步分析

在问题二中优化后横向分为三种道宽的规划模型，求得的最短时间与横向均匀分道一样，人员仍然处于浪费状态，由此认为优化了以后的模型还是不能改变时间的问题。

因此考虑到有人员的浪费，我们对模型进行进一步优化，减少人员但保持剩余人员仍然分三个组，同样分为三个区域，每个区域均为 4 个道，尽量不浪费人员，看在 50 个人的基础上最多可以减少多少人能够保持最短时间搜索完，三个区域的宽度尽量保持一致，设最多减少 v 个人，因此我们的模型又建立为：

$$\text{Max} \quad f = v - q - r$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 40n_i \geq u_i / 4 \\ \sum_{i=1}^3 n_i = 50 - v \\ \sum_{i=1}^3 u_i = 7200 \\ st. \begin{cases} \frac{40n_i - u_i / 4}{u_i / 4} \leq q & (i=1,2,3) \\ \frac{u_i}{7200} \leq r \\ u_i \leq 3600 \\ n_i \leq 25 \\ v, n_i \in Z^+; n_i, u_i > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{模型七})
\end{aligned}$$

利用 LINGO8.0（程序五）软件求解得： $n_1=15$ 、 $n_2=15$ 、 $n_3=15$ 、 $u_1=u_2=u_3=2400$ ，走法和图 5-10 一样，搜索的总时间也为 23.1151 小时，最多可以减少 5 个人在同样的时间里也可以完成任务。即只需要 45 个人，浪费了 5 个人。此外此模型可以改进得到在规定时间内规定组数完成的搜索的人员分配，安排多少人来完成任务，也可以实现规定人数的人员分组问题，是一个推广性很好的数学模型。

七、模型的优缺点

（一）优点：

1. 把求走完区域面积所用时间最少问题巧妙的转化为求两点之间最短路径问题,并巧妙的运用 0-1 规划解决图论问题;
2. 在问题一中建立了不同搜索道数所需的最短时间通用模型,可便捷的解决该类问题,使模型更具有适用性和推广性;
3. 采用各组人人紧密、并排式搜寻，避免了因为受灾人较小范围内从未搜区域移动到已搜区域而引起的漏检问题。
4. 整篇文章采用文字与图形结合说明，用图则使问题简单化，清晰化,更生动、形象说明各种路径及各编队过程。

（二）不足：

1. 本文只考虑了人员并排以圆相切的方式进行搜索，实际上还可以考虑是否可以以圆相交的方式进行搜索，可能还会存在很多搜索方式使得时间更短。
2. 本文是考虑人与人并排相切搜索，还可以考虑相离的时候搜索的情况，另外本文只考虑了以直线路线行进，可考虑曲线路径时间更短，由于时间和技术等方面的限制，这些研究可以今后待续。

参考文献

- [1] 劳伦斯, 斯通, 吴晓峰.最优搜索理论.北京: 海潮出版社, 1990.
- [2] 吴晓峰.白桦.最优搜索理论的进展[J].运筹学学报, 1992 年 02 期.
- [3] 朱清新.最优搜索理论及其应用[J].世界科技研究与发展, 2005 年 04 期.
- [4] 卢开澄, 卢华明著.图论及其应用. 北京: 清华大学出版社, 2005.1.
- [5] 姜启源, 邢文训, 谢金星等.大学数学实验.北京: 清华大学出版社, 2005.5.
- [6] Wayne L.Winston 著.运筹学-应用范例与解法.北京: 清华大学出版社, 2006.
- [7] 谢金星, 薛毅编著.优化建模与 LINDO\LINGO 软件.北京: 清华大学出版社, 2005.7.
- [8] 董军军.动态规划算法和贪心算法的比较与分析[J], 软件导刊, 2008.2.

NBA 赛程的分析与评价

吴宏日 张 栋 娄云霄

指导教师：周 彦

摘要

本文研究的是分析 NBA 赛程对球队的利弊，以及分析和改进赛程安排的问题。在问题一中，我们首先引入四个有关赛程影响球队利弊的因素：每两场比赛之间的间隔时间、球队“背靠背”次数、连续主场场数、连续客场场数。通过 MATLAB6.5 编程统计出每支球队各项指标的原始数据，并将球队编号便于量化统计。其次，我们通过对四项指标分别建立相应函数，对各项指标的数据进行标准化处理。第三步，运用层次分析法（AHP）确定各影响因素的权重，进而建立评判赛程对球队利弊的判别函数。

在问题二中，根据问题一建立的模型分别求出 30 支球队的四项影响因素的统计结果，代入判别函数中得到赛程对球队利弊的量化值，即可分析出赛程对火箭队的利弊（1.2136，在全联盟处于中等水平），以及赛程最有利的球队——超音速队和最不利的球队——公牛队。

问题三中，我们通过 MATLAB6.5 对东部赛三场球队的分析，巧妙的利用 0,1,-1 代换，得到东部不同区赛 3 场赛程安排分布矩阵，并探索出赛程安排的内在规律，以此建立优化模型，根据主客场均衡最佳的原则构造目标函数，并用 lingo80 求得最优赛程安排。模型结果分析，依据此方法各区球队主客场数基本能达到均衡要求，并且利用优化模型，简洁方便，可适强因此。另外，我们引入间接选定法对赛 3 场的球队重新安排，得到的赛程安排能够保证同部 3 个区的球队间保持均衡，并兼具公平性与合理性。

关键词 NBA 层次分析法 非线性规划 梯形转圈法

一、 问题重述（略）

二、 基本假设

1. 每两场比赛之间的时间间隔长短对球队的影响主要反映为球队的体能恢复情况。
2. 无其他因素影响时（如旅途奔波），相同时间内每支球队体能恢复情况相同。
3. “背靠背”赛程考虑旅途奔波及体能恢复对球队的双重影响。

三、 符号说明

t_{ij}	第 i 支球队第 $j-1$ 场比赛与第 j 场比赛间的间隔时间（小时）
$\varphi(t_{ij})$	球队在第 $j-1$ 场比赛与第 j 场比赛间隔时间内的体能恢复函数
$\sum \varphi_i$	第 i 支球队在整个赛季的比赛中的休息时间对体力恢复情况的累加
σ_i	第 i 支球队休息时间的影响因子
k_i	第 i 支球队的‘背靠背’次数
\hat{k}_i	第 i 支球队的 “背靠背” 相对影响因子
\hat{T}_i	第 i 支球队的连续主场总数影响因子
μ_{ij}	第 i 支队连续客场作战 j 场的 j 场总体胜率影响因数
z_{ij}	第 i 个球队连续客场作战 j 场的次数
R_i	第 i 支球队在整个赛季中连续客场的安排对客场固有胜率的影响因数
s_i	第 i 项指标的标准差（ $i=1, 2, 3, 4$ ）

四、 问题分析

问题一

考虑到 NBA 比赛作为竞技体育所具有的特性，我们认为有如下因素影响赛程对某一支球队的利弊^[1]：

(1) 每两场比赛之间的间隔时间。每支球队会利用两场比赛之间的间隔进行休息和调整。理论上讲球队体能的恢复与休息时间成正比，休息时间过短球队体能不足以完全恢复，但根据实际情况可知，休息时间过长会导致球队对比赛生疏，竞技状态下滑。因此，合理的比赛间隔时间才是球队所必需的。

(2) 球队“背靠背”次数。NBA 赛场中把球队连续两天在不同城市打比赛称为“背靠背”。在“背靠背”赛程中球队不仅没有充足的时间恢复体能，还要经受旅途的奔波，因此对球队是极大的挑战。NBA 赛程由于不能保证各球队“背靠背”比赛次数相同，通常设置一个上限和一个下限，这样的安排可能使某些球队的赛程相对不利。

(3) 连续主场场数。由于“主场效应”对球队心理、场地、群众方面的影响，主队往往有更多的获胜机会。连续主场更能使球队一鼓作气，取得优异战绩。因此连续主场越多对球队的赛程越有利。

(4) 连续客场场数。客场作战使得球队在心理、地域、士气方面处于下风，连续客场更因为旅途的奔波，对每一支球队都是严峻的挑战。并且连续客场数越多，球队获胜率越低。

值得提出的是，本题中研究的赛程安排对于球队的利弊均属于客观因素对球队的影响，而作为主观因素的球队自身实力不参与讨论，即与球队自身实力密切相关的因素，比如每支球队与比自己实力强的球队的交战场次，或与比自己实力弱的球队的交战场次，我们视其不能作为反映赛程安排对球队利弊的影响因素。

根据对客观实际的分析，我们认为各因素的影响程度不一样，其影响程度关系有：

每两场比赛之间的间隔时间>连续客场场数>连续主场场数>球队“背靠背”次数

通过对球队四项指标的统计，运用层次分析法对各项指标赋权重，以四项指标为自变量，球队赛程的利弊评判作为因变量，建立评价球队赛程利弊的目标函数。

问题二

由于问题一中已经得到评价球队赛程利弊的目标函数，我们直接将火箭队的各项指标代入目标函数中即可得到对火箭队赛程的评价。再将各个球队的四项指标分别带入目标函数，得到对 30 支球队的赛程评价，进而找出赛程对 30 支球队最有利和最不利的球队。

问题三

本问题要求从同部不同区的赛程安排中找赛程的安排规律。首先要对赛程进行可视化分析，为此我们巧妙构造了 $0,1,-1$ 代换的方法，是使赛程安排更加直观，找出某支球队最多或最少主客场要求等，为此就可以利用优化方法拟合，得到题设最优结果，使得各区主客场数达到均衡。

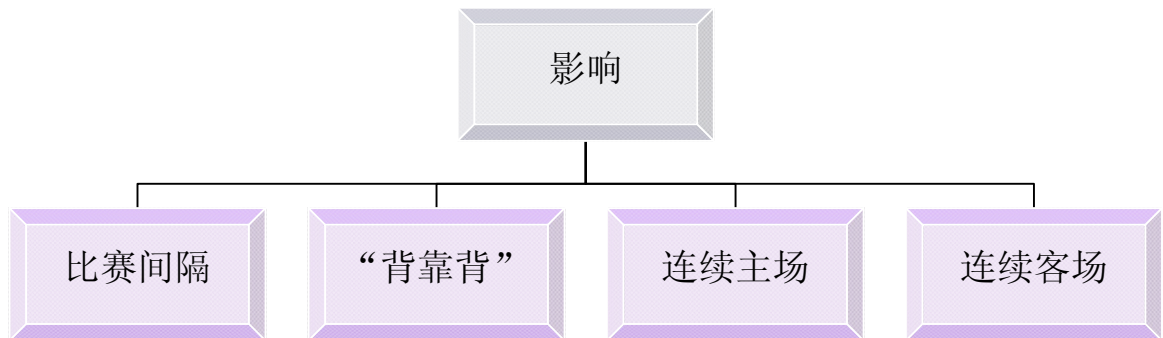
五、 模型建立与求解

问题一

1、确定影响球队赛程利弊的因素和球队编号

在问题分析中我们已经说明，赛程对某一支球队的利弊，有如下四个因素：每两场比赛之间的时间间隔、球队“背靠背”的次数、球队连续主场和连续客场

场数，如下图所示。



确定了赛程安排利弊影响因素后，我们用 1-30 的数字分别代表 NBA 的 30 支球队，具体见表 1：

东部赛区		西部赛区	
东南区		西南区	
魔术	1	黄蜂	16
奇才	2	马刺	17
老鹰	3	火箭	18
山猫	4	小牛	19
热火	5	灰熊	20
大西洋区		西北区	
凯尔特人	6	爵士	21
猛龙	7	掘金	22
76 人	8	开拓者	23
篮网	9	森林狼	24
尼克斯	10	超音速	25
中部区		太平洋区	
活塞	11	湖人	26
骑士	12	太阳	27
步行者	13	勇士	28
公牛	14	国王	29
雄鹿	15	快船	30

表 1

2、赛程单因素利弊分析

2.1 球队休息时间因素分析

比赛之间的间隔时间是否合理，表现为球队的体能恢复情况（这里，我们将休息时间过长导致的球队竞技状态下滑考虑在恢复情况中）。即时间间隔越短，体能恢复越差，时间间隔过长，导致球队对比赛生疏，竞技状态下滑，恢复情况同样不好。因此，我们用体力恢复值 $\varphi(t_{ij})$ 反映间隔时间的长短对球队的影响，

其中, t_{ij} 表示第 i 支队伍第 $j-1$ 场与第 j 场比赛之间休息时间的的小时数。

关于休息时间的小时数 t_{ij} 对体力恢复值 $\varphi(t_{ij})$ 的定量关系我们用模糊识别的方法给出隶属函数^[1]:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-m}{n-m} \right)^a, & m \leq t < n \\ 1, & n \leq t < p \\ \left(\frac{q-t}{q-p} \right)^a, & p \leq t < q \\ 0, & t < m, t \geq q \end{cases}$$

(1)

上式中各个参数的确定:

- n 和 p 的确定: 根据历年 NBA 赛程安排表每支队平均每两场比赛之间的休息时间的数据分析, 在最恰当休息时间 45 小时的左右 9 小时的范围内为恰当的休息时间。于是:

$$n=45-9=36, \quad p=45+9=54;$$

- m 的确定: 通常认为休息时间不超过 12 小时时对体能恢复几乎没有效果, 因此设定:

$$m=12;$$

- q 的确定: 考虑到如果休息时间过长会导致一支队伍的竞技状态下降, 出现所谓的“手冷”状态, 影响比赛的胜利。篮球比赛中通常认为这个时间为:

$$q=100;$$

- a 的确定: 根据 NBA 球员的经验了解到球员休息了二十四小时之后竞技状态恢复到百分之七十左右。所以:

$$\varphi(24)=0.7, \quad \text{即} \left(\frac{24-12}{36-12} \right)^a = 0.7; \text{解得:}$$

$$a=0.5;$$

将参数代入公式, 公式为:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-12}{12}\right)^{0.5}, & 12 \leq t < 36 \\ 1, & 36 \leq t < 54 \\ \left(\frac{100-t}{46}\right)^{0.5}, & 54 \leq t < 100 \\ 0, & t < 12, t \geq 100 \end{cases}$$

(2)

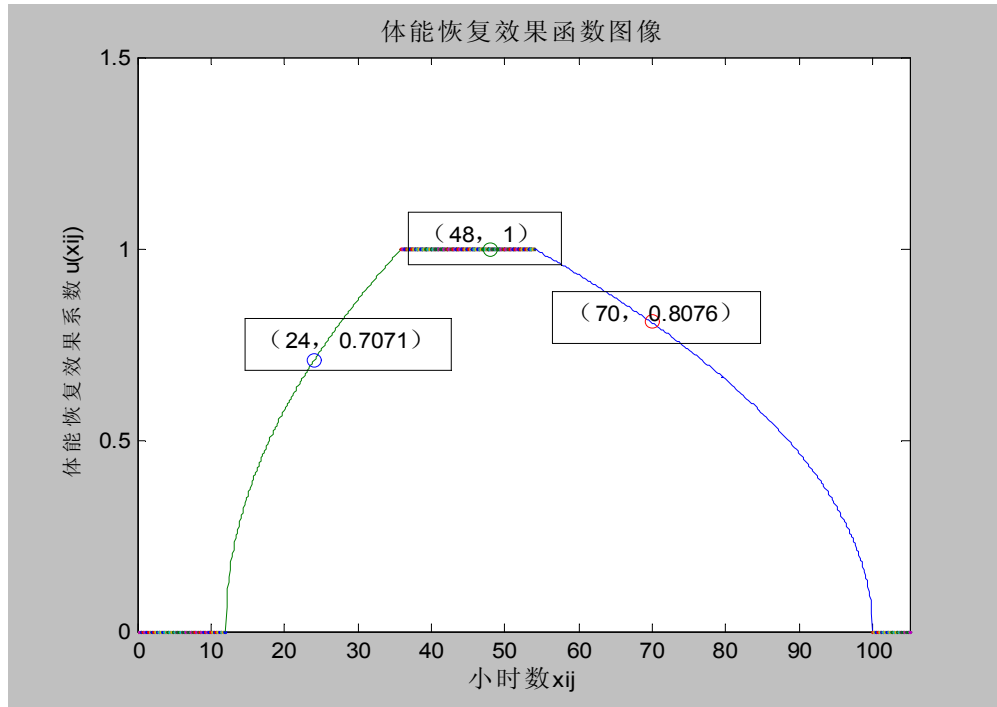


图 1

在本问题中，我们要考虑的是整个赛季的赛程安排对球队的影响，因此用 $\sum \varphi_i$ 表示第 i 支球队在整个赛季的比赛中的休息时间对体力恢复情况的累加。

即我们用 $\sum \varphi_i$ 反映整个赛季总休息时间的长短对第 i 支球队的影响。用 MATLAB6.5 计算的 $\sum \varphi_i$ 的分布矩阵：

$$\sum \varphi_i = \begin{bmatrix} 77.6736 & 75.1844 & 70.9744 & 72.7995 & 73.4166 & 78.1771 & 79.1414 \\ 73.2460 & 72.0864 & 71.4098 & 73.4010 & 72.8287 & 73.9828 & 75.0600 & 73.7155 & 68.1927 \\ 72.3816 & 74.2623 & 76.3611 & 73.9634 & 73.6895 & 73.1004 & 74.4479 & 74.5698 & 71.7053 \\ 72.3270 & 73.9461 & 75.5080 & 70.4071 & 72.6755 & & & & \end{bmatrix}$$

取 σ_i 作为第 i 支球队休息时间的的影响因子，并记 $S_{\sum \varphi}$ 为整个赛程的平均体

力恢复

$$\sigma_i = \frac{\sum \varphi_i - S_{\sum \varphi}}{S_{\sum \varphi}}$$

(3)

对 σ_i 的理解为：1、 σ_i 随 $\sum \varphi_i$ 单调递增， σ_i 值越大，表明 $\sum \varphi_i$ 值越大，即球队体力恢复情况越好，间接体现了该支球队休息时间更合理，有利。2、 σ_i 是一个相对指标，它的大小体现的是对所有球队的相对利弊，其正负值则代表与平均水平的差异。

我们对 σ_i 标准化后，用 MATLAB6.5 作得 σ_i 的分布图，如图 2 示：

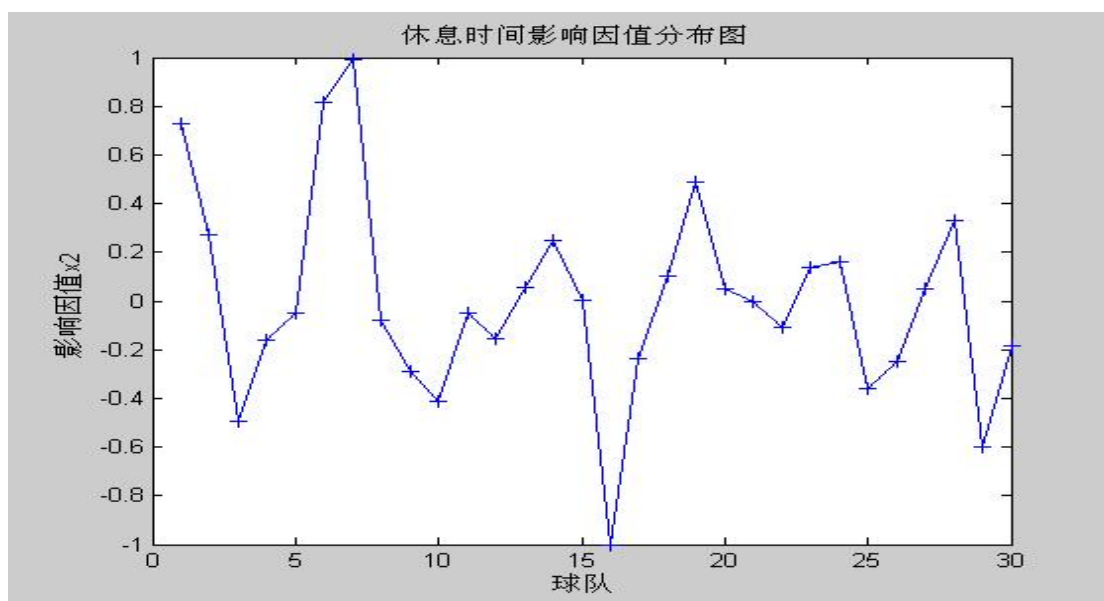


图 2

从图中看出，就休息时间因素考虑，第 7 支球队，即猛龙队休息时间最有利（ $\sigma_7 = 0.992$ ）。第 16 支球队，即黄蜂队的休息时间最不利（ $\sigma_7 = -1$ ）。

2.2 球队“背靠背”因素分析

我们用 matlab6.5 确定 08-09 赛季各球队‘背靠背’次数的分布矩阵：B=[16 19 21 19 18 17 17 19 22 15 14 19 21 21 21 19 18 20 18 20 19 20 17 21 17 19 18 14 20 20]，其分布如图 3 示

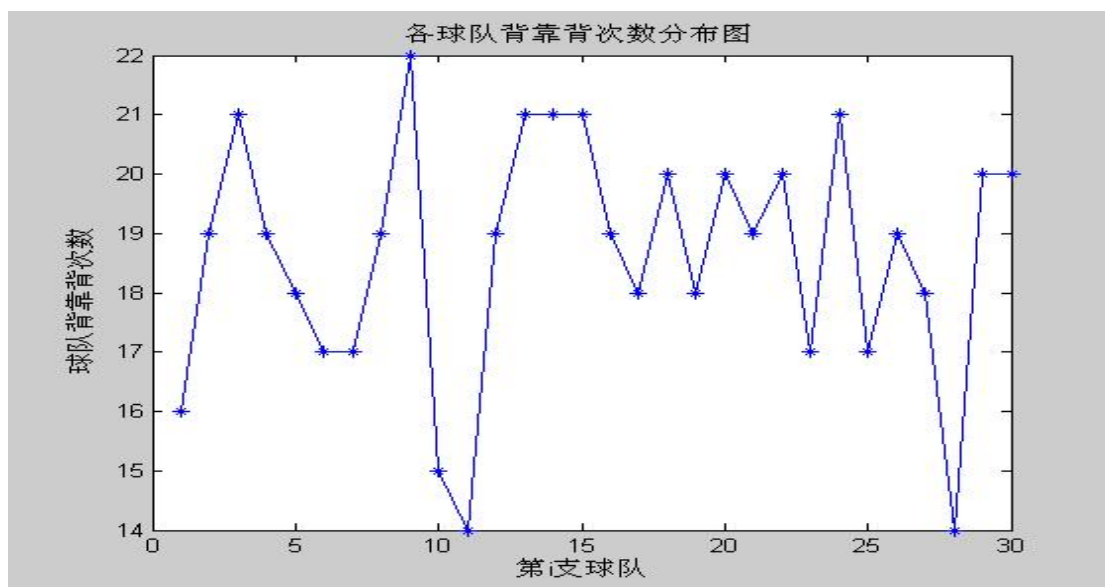


图 3

由图中可知，球队背靠背次数基本均衡，但是还存在差异，其中第九支球队背靠背次数最多， $B(9)=22$ ，对球队实力的发挥和战绩有不利的影

响。为了分析这种因素的不利影响，我们对整个赛程的“背靠背”次数取平均，得到平均“背靠背”数 \bar{k} ，即：

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$$

(4)

其中 k_i 为第 i 支球队的“背靠背”数， n 为整个赛季的球队总数。然后用其对每支球队作差绩，进行归一化处理后得到的第 i 支球队的“背靠背”相对影响因子 \hat{k}_i ，即：

$$\hat{k}_i = \frac{\bar{k} - k_i}{\bar{k}}$$

(5)

其中 \hat{k}_i 表示第 i 支球队背靠背数归一化处理后的相对影响因子，不难看出 \hat{k}_i 应具有以下性质：

- 1、 \hat{k}_i 随着 k_i 单调递减， \hat{k}_i 值越大，表明球队‘背靠背’次数越少对球队越有利，符合实际情况。
- 2、 \hat{k}_i 的正负情况也代表了对平均利弊的偏离程度。

同理，我们对 \hat{k}_i 标准化处理后，用 MATLAB6.5 作得“背靠背”影响因子分布图，如图 4 所示：

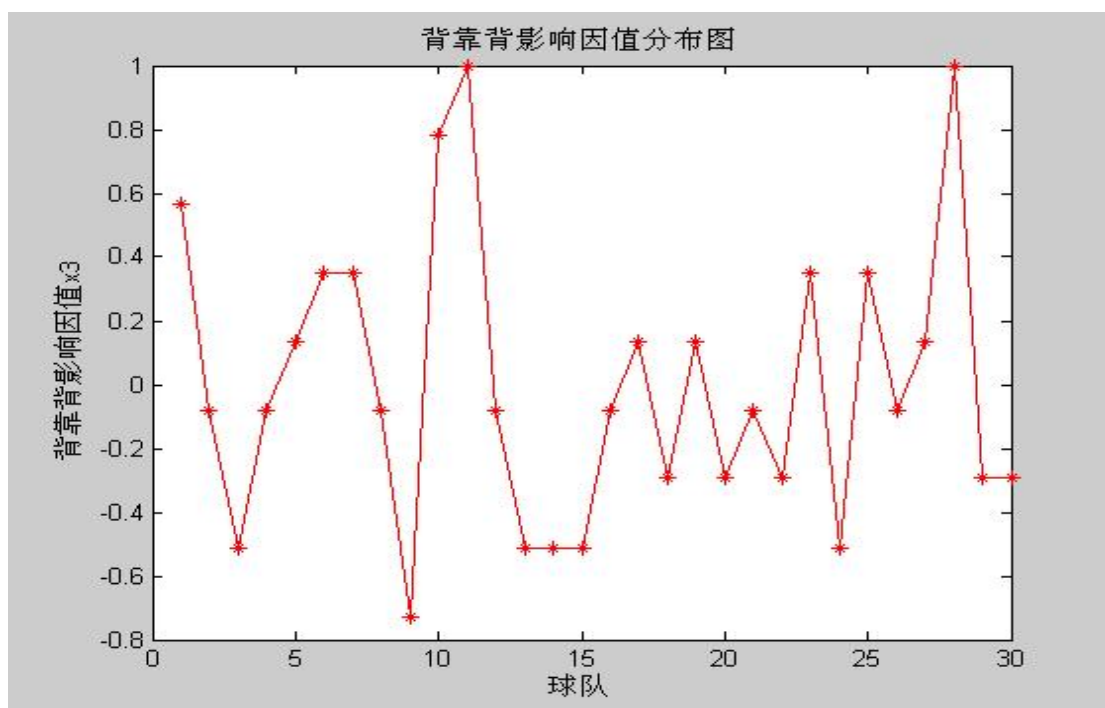


图 4

从图中分析得出，如果只考虑“背靠背”因素影响，则第 11 支球队，即活塞队赛程最有利 ($\hat{k}_{11} = 1$)，而第 9 支球队，即篮网的赛程最不利 ($\hat{k}_9 = -0.7266$)。

2.3 球队连续主场因素分析

根据“背靠背”因素类似的分析方法，对 30 支球队连续主场总数求均值并归一化后，得到第 i 支球队的连续主场总数影响因子 \hat{T}_i

$$\hat{T}_i = \frac{T_i - \bar{T}}{\bar{T}}$$

(6)

T_i 表示第 i 支球队的连续主场场数， \bar{T} 表示所有球队的连续主场场数的平均值。 \hat{T}_i 随 T_i 单调递增， \hat{T}_i 值越大，表明该球队连续主场场数越多，也就越有优势。

同理，我们对 \hat{T}_i 标准化后，用 MATLAB6.5 作图得到球队连续主场因子的分布图，如图 5 示：

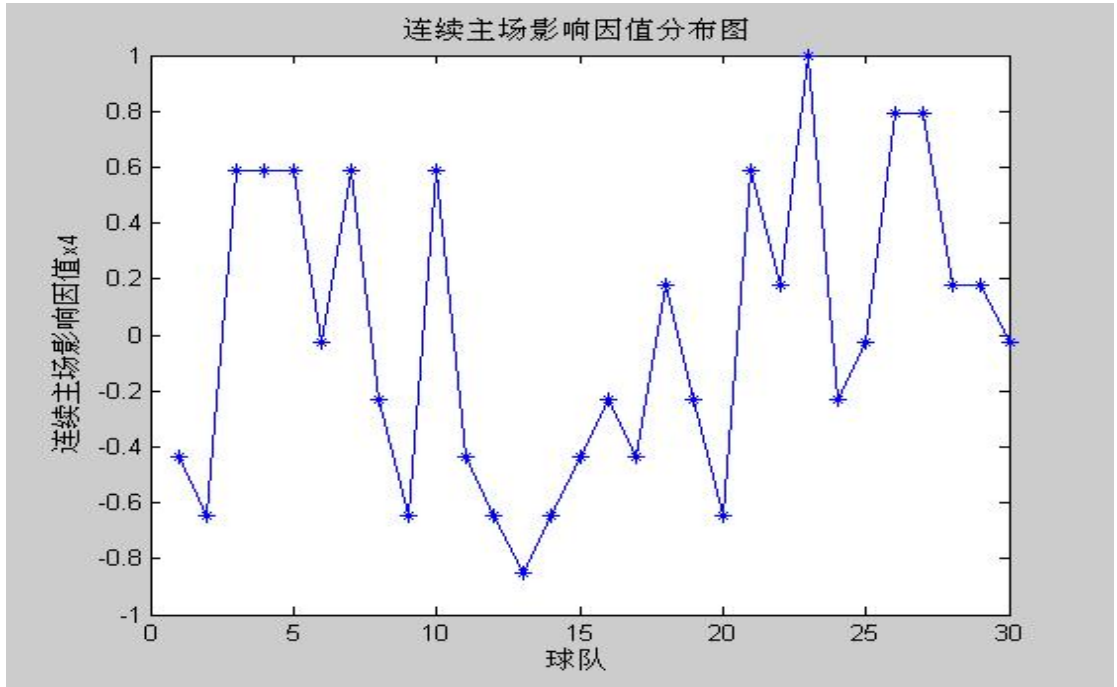


图 5

从图中分析得出，第 23 支球队，即开拓者在连续主场上最有利（ $\hat{T}_{23} = 1$ ），第十三支球队，即步行者队在连续主场上最不利（ $\hat{T}_{13} = -0.8493$ ）。

2.4 连续客场因素分析

我们知道，一支球队如果连续客场作战，那么越到后面的比赛获胜的把握就越小。

我们设 δ_{ij} 为第 i 支队连续客场作战 $j-1$ 场后第 j 场比赛对固有胜率的影响系数（ $j \geq 1$ ），假设 δ_{ij} 满足

$$\delta_{ij} = 1 - 0.05i$$

(7)

则第 i 支队连续客场作战 j 场的 j 场总体胜率影响因数

$$\mu_{ij} = \frac{\sum_{r=1}^j \delta_{ir}}{j}$$

(8)

设 R_i 为第 i 支球队在整个赛季中连续客场的安排对客场固有胜率的影响因数，则

$$R_i = \frac{\sum_{j=2}^8 z_{ij} \cdot j \cdot \mu_{ij}}{\sum_{j=2}^8 z_{ij} \cdot j}$$

(9)

其中， z_{ij} 表示第 i 个球队连续打 j 个客场比赛的次数。 R_i 随 z_{ij} 和 j 成递减关系，

即 R_i 值越大，则连续客场比赛次数（ z_{ij} ）和连续客场场数（ j ）都相对较少，说明这样的赛程对球队最有利。

由于 R_i 能很好的反映连续客场因素对球队的影响，我们直接把它作为连续客场赛程对球队利弊影响因子，用 MATLAB6.5 作得 R_i 的分布图，如图 6 示：

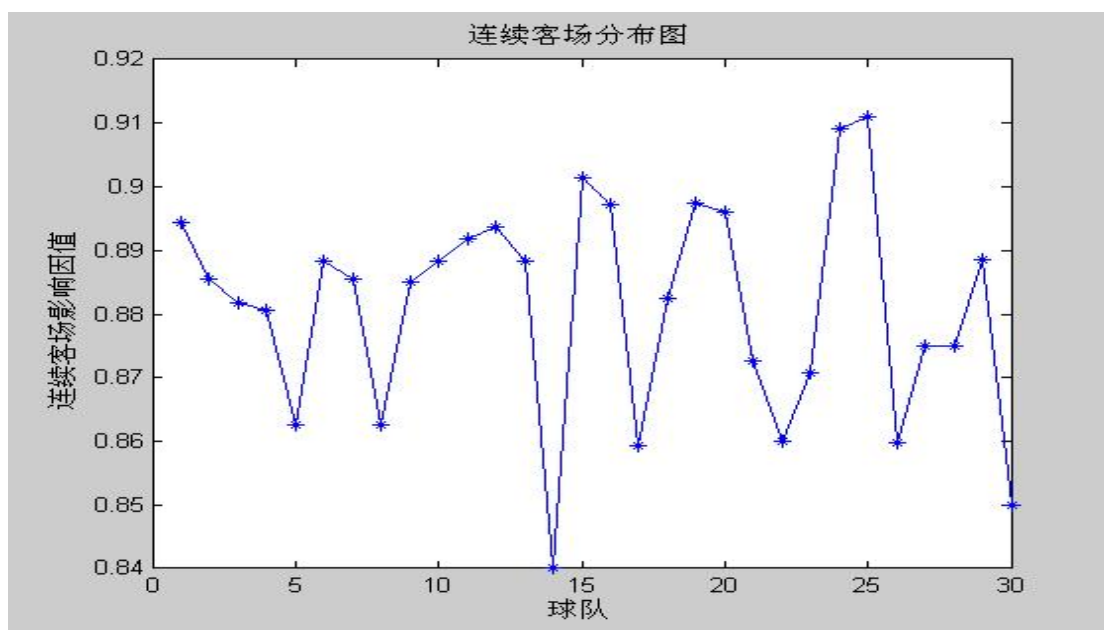


图 6

从图中分析得出，第 25 支球队（超音速）在连续客场上占优势，第 5 支球队（热火）在连续客场赛程安排上处于不利 $R_5 = 0.84$

3、赛程对球队利弊的多因素综合分析

3.1 构建判别函数

对某支球队来说，赛程安排的利弊是多因素综合考虑的结果，因此我们构造如下评判赛程对球队利弊的判别函数：

$$y = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4$$

(10)

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 代表各项因子的权重，则 y_i 应该具有以下性质：

1) $x_1 = \sum \varphi_i$ 表示休息时间影响因子， $x_2 = R_i$ 表示连续客场影响因子， $x_3 = \hat{T}_i$

表示连续主场影响因子， $x_4 = \hat{k}_i$ 表示背靠背影响因子。

2) y_i 越大，则赛程安排对球队越有利。

3) 在分析中我们已经讨论各因子影响程度关系： $\sum \varphi_i > R_i > \hat{T}_i > \hat{k}_i$ ，因此有：

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta$$

3.2 层次分析法确定影响因素权重

由于对上述四个因素定量分析较复杂，我们把各因素划分为互相联系的有序层使之条理化。根据对客观实际的判断，我们对每一层次的相对重要性给出定量的表示，用层次分析的方法确定全部元素相对重要性次序的权系数。

4 个指标因子权重，我们采用层次分析的方法求出指标权重。根据性质 3 构造判断矩阵 $S = (u_{ij})_{p \times p}$ 即：

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

用 MATLAB6.5 计算判断矩阵 R 的最大特征根得 $\lambda_{\max} = 4$ 。为进行判断矩阵的一致性检验，需计算一致性指标：

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = 0$$

(11)

平均随机一致性指标 $RI = 0.9$ 。随机一致性比率：

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0 < 0.1$$

(12)

因此认为层次分析排序的结果有满意的一致性，即权系数的分配是非常合理的。

其对应的特征向量为：

$$A = [2.2430 \quad 0.7477 \quad 0.5607 \quad 0.4486]$$

再作归一化处理得：

$$A = [0.5607 \quad 0.1869 \quad 0.1402 \quad 0.1121]$$

即，休息时间的权重： $\alpha = 0.5607$ ，连续客场因素的权重： $\beta = 0.1869$ ，

连续主场因素的权重： $\gamma = 0.1402$ ，‘背靠背’因素的权重： $\delta = 0.1121$ 。

将各项权重代入即得

$$y = 0.5607x_1 + 0.1869x_2 + 0.1402x_3 + 0.1121x_4$$

(13)

问题二

根据问题一建立的模型对 30 支球队的四项因素指标统计分析，得到表 2 结果

球队	连续客场	休息时间	背靠背	连续主场	利弊值 y	利弊排序
1	0.8944	0.7252	0.5682	-0.4384	1.2203	7
2	0.8855	0.2721	-0.0792	-0.6439	1.2153	13
3	0.8818	-0.4933	-0.5107	0.5891	1.2132	15
4	0.8806	-0.1622	-0.0792	0.5891	1.2126	16
5	0.8625	-0.0496	0.1367	0.5891	1.2024	21
6	0.8882	0.8164	0.3526	-0.0274	1.2168	12
7	0.8855	0.992	0.3526	0.5891	1.2153	13
8	0.8625	-0.0804	-0.0792	-0.2329	1.2024	21
9	0.885	-0.2909	-0.7266	-0.6439	1.215	17
10	0.8882	-0.4142	0.7841	0.5891	1.2168	12
11	0.8917	-0.0523	1	-0.4384	1.2188	9
12	0.8938	-0.1568	-0.0792	-0.6439	1.22	8
13	0.8883	0.0536	-0.5107	-0.8493	1.2169	11
14	0.84	0.2493	-0.5107	-0.6439	1.1898	26
15	0.9013	0.0054	-0.5107	-0.4384	1.2242	3
16	0.8972	-1	-0.0792	-0.2329	1.2219	5
17	0.8592	-0.2373	0.1367	-0.4384	1.2006	24
18	0.8825	0.1046	-0.2947	0.1781	1.2136	14
19	0.8975	0.4866	0.1367	-0.2329	1.222	4
20	0.8961	0.0496	-0.2947	-0.6439	1.2213	6
21	0.8726	0	-0.0792	0.5891	1.2081	19
22	0.86	-0.1072	-0.2947	0.1781	1.201	22

23	0.8708	0.1381	0.3526	1	1.2071	20
24	0.9092	0.1609	-0.5107	-0.2329	1.2286	2
25	0.9111	-0.3606	0.3526	-0.0274	1.2297	1
26	0.8598	-0.248	-0.0792	0.7945	1.2009	23
27	0.875	0.0469	0.1367	0.7945	1.2094	18
28	0.875	0.3311	1	0.1781	1.2094	18
29	0.8886	-0.5965	-0.2947	0.1781	1.217	10
30	0.85	-0.1836	-0.2947	-0.0274	1.1954	25

表 2

我们从表中分析得出：

- 1、对火箭队（18），标准化后的连续客场影响值： $x_1 = 0.8825$, 休息时间影响值： $x_2 = 0.1046$, 背靠背影响值 $x_3 = -0.2947$, 连续主场影响值： $x_4 = 0.1781$

将四个影响值带入利弊函数得到 $y_{18} = 1.2136$ ，在图上分布见图 8，综合利弊在所有球队中位于第 14 位。

- 2、对所有球队来说，根据赛程安排对利弊判别函数求得：

$$y_{\max} = y_{25} = 1.2297 \quad y_{\min} = y_{14} = 1.1898$$

即 08-09 赛程的安排对第 25（超音速队）支球队最有利，对第 14（公牛队）支球队最为不利。

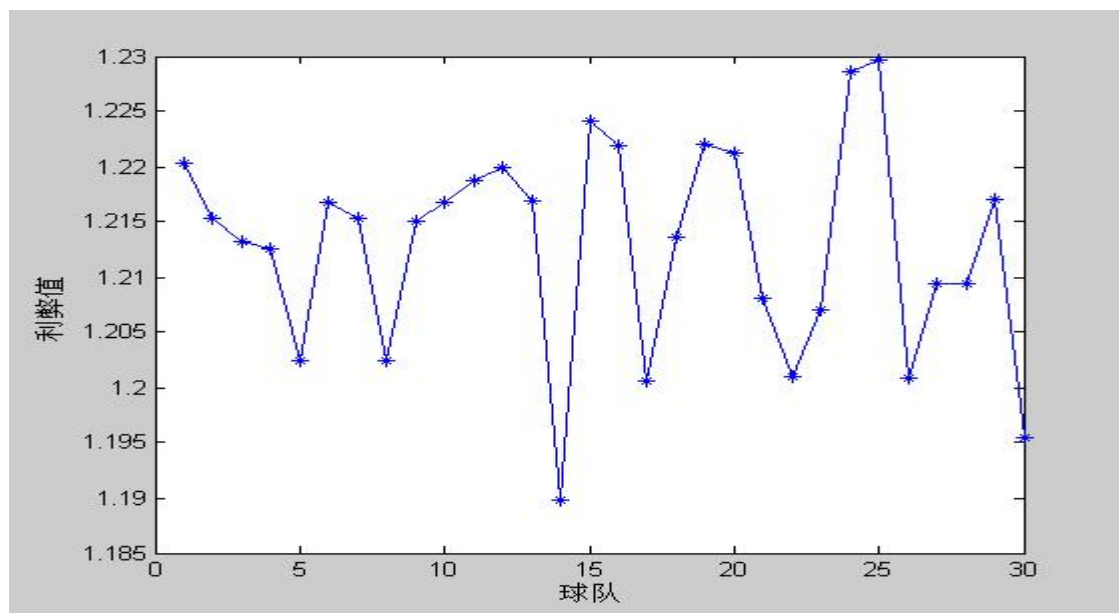


图 8

问题三

1、方法一

通过分析第 i 支球队与同部不同区的第 j 支球队打三场比赛的情况，记为

x_{ij} ，则 x_{ij} 的取值有以下三种情况：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

(14)

$x_{ij}=1$ ，则表示第 i 支球队与同部不同区的第 j 支球队打三场比赛，第 i 支球队是 2 个主场，一个客场； $x_{ij} = 0$ ，表示第 i 支球队与同部不同区的第 j 支球队没有安排三场比赛； $x_{ij} = -1$ ，表示第 i 支球队与同部不同区的第 j 支球队打三场比赛，第 i 支球队是 2 个主客场，一个主场。

因此我们用 MATLAB6.5 计算得到东部不同区球队赛三场的情况， x_{ij} 的分布矩阵见表

x_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	-1	1	0	0	-1
2	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	-1
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	0	0	-1	0
4	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0	-1	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	1	1
6	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
7	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
8	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	1
9	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
11	1	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	-1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	-1	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
14	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
15	1	1	0	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0

表 3

分析表中数据，我们得出赛程安排以下规律：

- 1) x_{ij} 分布矩阵成对角线负对称，这是由于球队赛三场时主客场次数不对称造成，因此三场球赛的，只要考虑表中一角赛区即可。
- 2) 由于是同部不同区内比赛，因此同区内的 $x_{ij} = 0, (|i - j| \leq 4)$ 。
- 3) 赛程安排要求考虑到每支球队的主客场数相同，当比赛四场时，由于是两个主场，两个客场，主客场绝对平均，没有考虑性，在赛四场时由于主客场分配的

不对称，因此要考虑进去。

4) 并且不同区之间，同区之间的主客场数要达到均衡，从表中我们可以看出各区间和同区不同球队差别比较小，均衡度较好。

根据上述赛程安排规律，我们可以用规划的方法实现。

规划模型

1) 目标函数

由上述规律 4 可知，赛区间主客场越均衡越好，因此确定目标函数为：

$$f = \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=6}^{15} x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=6}^{10} \sum_{j=1}^5 x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=6}^{10} \sum_{j=11}^{15} x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=11}^{15} \sum_{j=1}^{10} x_{ij} \right)^2 \quad (15)$$

主客场越均衡， f 值越小，因此要对 f 求最小值，即

$$\text{Min } f = \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=6}^{15} x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=6}^{10} \sum_{j=1}^5 x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=6}^{10} \sum_{j=11}^{15} x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=11}^{15} \sum_{j=1}^{10} x_{ij} \right)^2 \quad (16)$$

2) 约束函数

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \quad (i=1\dots 15, j=1\dots 15) \quad (17)$$

由于是同部不同区的比赛

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{ij} = 0 \quad (i=1\dots 5, j=1\dots 5) \\ \\ x_{ij} = 0 \quad (i=6\dots 10, j=6\dots 10) \end{array} \right. \quad (18)$$

$$x_{ij} = 0 \quad (i=11\dots 15, j=11\dots 15)$$

由规律 3 确定球队的主客场相同

$$\sum_{j=1}^{15} x_{ij} = 0 \quad (i=1\dots 15) \quad (19)$$

但从表中分析我们得出 $\sum_{j=1}^{15} x_{ij}$ 并不都等于零，于是我们根据其表中数据给定其一个上下限，记：

$$\sum_{j=1}^{15} |x_{ij}| \leq 6, \quad \left| \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \right| \leq 2$$

由规律一中得知 x_{ij} 成负逆矩阵分布

$$x_{ij} = -x_{ji} \quad (i=1\dots 15, j=1\dots 15)$$

3) 最优化问题 该问题是一个整数非线性优化问题，其数学表达式如下

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad f = & \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=6}^{15} x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=6}^{10} \sum_{j=1}^5 x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=6}^{10} \sum_{j=11}^{15} x_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i=11}^{15} \sum_{j=1}^{10} x_{ij} \right)^2 \\ (20) \quad \text{st.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^{15} |x_{ij}| \geq 2 \\ \sum_{j=1}^{15} |x_{ij}| \leq 6 \\ \left| \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \right| \leq 2 (i, j=1, 2, \dots, 15) \\ x_{ij} = 0, (i=1..5, j=1..5 / i=6..10, j=6..10 / i=11..15, j=11..15) \\ x_{ij} + x_{ji} = 0 \\ x_{ij} \in (-1, 0, 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

利用lingo80对上述函数求最优解，从结果(见附表1)的统计分析中，我们得出基本上符合总的规律，各区之间的主客场基本达到均衡，具体见图

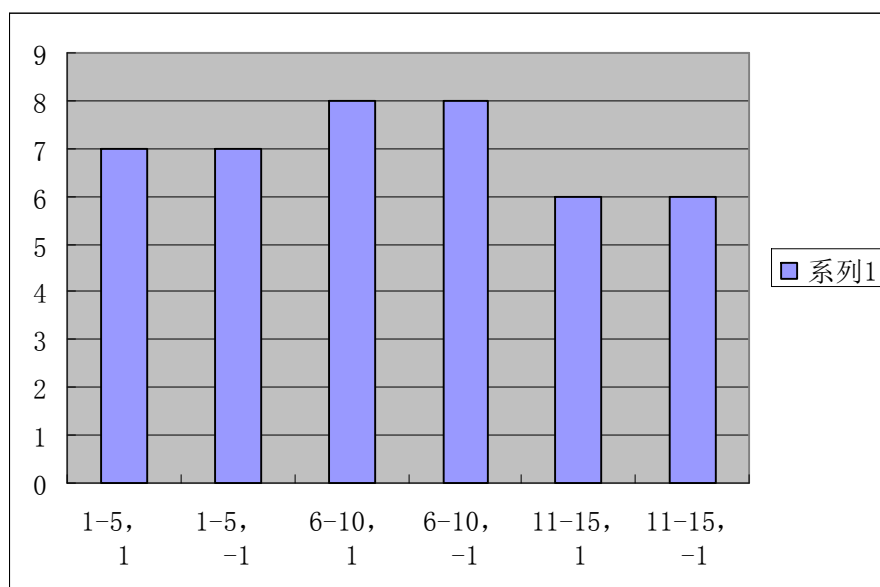


图9 各区球队主客场优势分布图

2、方法二

上文中我们已经根据赛程找出了与同部不同区球队比赛中，选取赛3场的球

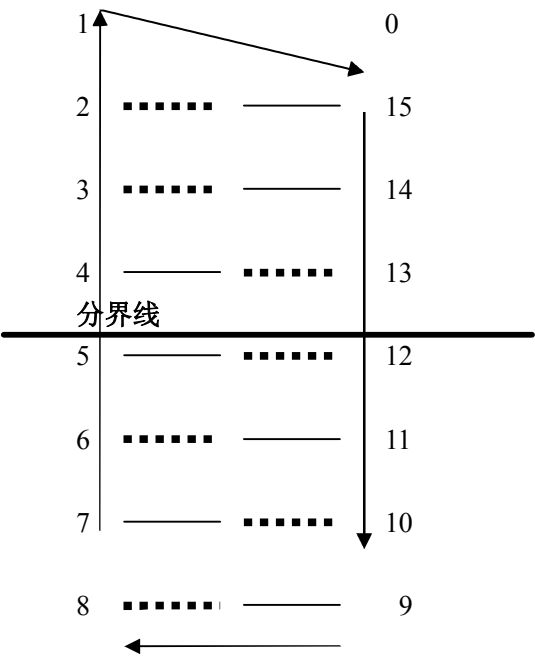
队的方法。通过转化为线性规划问题很好地解释了该方法的实现过程。但是对于这种复杂的赛程安排问题，我们只要安排出来的赛程有其合理性和公平性，就不失为一种合适的方法。下面，我们介绍选取赛 3 场的球队的新方法——**间接选定法**。

间接选定法主要步骤：

- ①通过**梯形转圈法**安排同部内 15 支球队间各进行 3 场比赛；
- ②利用计算机在同部不同区的 10 支球队中随机产生 6 支球队与已定球队比赛 4 场，从而也间接确定了比赛 3 场的球队对阵方案。

下面仅以东部内 15 支球队的比赛安排为例说明：

步骤一 梯形转圈法安排比赛：



东部赛区 (图 10)

[1]、图形说明：

- (1) 1, 2, 3, 4……15 每个数字代表东部赛区各队，0 表示悬空。
- (2) 处于同一水平线上的两支队表示要比赛的两队。与零对着的球队表示休息。
- (3) 实细线的一方表示是主场作战，黑色虚线表示是客场作战。
- (4) 以分界线为界，一天只进行分界线以上的 3 场比赛或以下的 4 场比赛。
- (5) 以顺时针方式进行旋转。每次旋转只是把每个数字按顺时针方向移动一个位置，而横线的位置保持不变。

[2]、工作方法：

第一天进行分界线以上的 3 场比赛，第二天进行分界线以下的 4 场比赛。然后开始进行第一次旋转过程，更新状态。开始第三天的比赛和第四天的比赛。第三天仍然进行分界线以上的 3 场比赛。第四天进行分界线以下的 4 场比赛。然后再进行一次旋转过程，更新状态。开始第五天和第六天的比赛。如此循环。经过 15 个旋转就可以确定能够安排完每支队与同部的每支队之间进行 1 场比赛。为了满足每支球队与同部的其余 14 支球队进行 3 场比赛，需经过 $14 \times 3 = 42$ 次旋转。

步骤二 计算机间接选定赛 3 场的球队：

通过梯形转圈法安排之后每支球队与同部球队的比赛场数为 42 场。另外，与不同部的 15 支球队各有两场比赛，即共 $15 \times 2 = 30$ 场（可通过别的安排方法实现，不作讨论）。第三，每支球队还需要与同区内其余四支球队各比赛一场，类似的运用梯形旋转法进行安排。这样总和之后，每支球队已安排 76 场比赛，剩余的比赛通过与同部不同区的 10 支球队选择赛 6 场即可。我们最简单的办法就是通过电脑的随机与公平性选择出 6 支球队进行比赛。也就是说，该方法通过计算机随机产生 6 支球队与选定球队赛 4 场从而间接确定比赛 3 场的球队对阵方案。

方法二的合理性分析：

(1)、旋转原理保证了每支球队进行比赛的情况完全相同，即休息时间和连续主客场情况都一样。

(2)、梯形转圈法还保证了每支球队每进行 14 个旋转之后各有一次背靠背和连续两天的休息时间，这样的安排也是合理的且对每支球队都是公平的。

(3)、电脑的随机和公平性也能够保证在确定了比赛 3 场的球队的对阵方案后，同部 3 个区的球队间保持均衡，符合题目要求。

六、 模型的评价

我们从实际问题出发，综合考虑多种因素，分析不同因素对球队利弊的影响，并建立出综合四项影响因素指标的判别函数，得出了理想的结果。据此，我们总结了模型有如下优点：

1、四项影响因素具有较高的可信度。四项影响因素是由查阅资料 and 实际经验所得，能够较好的反映出赛程对球队的利弊。

2、充分利用题中所给数据。由题中附件所提供的 08——09 年赛事安排，我们利用 SPSS10.0 和 MATLAB6.5 相继挖掘出每支球队整个赛季的休息时间间隔、“背靠背”的次数、连续主场场数、不同连续客场的次数和场数等，做到了对数据的充分利用。

3、对原始数据的处理较理想。针对四项影响因素，我们分别建立了四个与之相应的函数，对各项指标的原始数据进行预处理，并最终将全部数据标准化。

4、在问题三中，对赛程安排中选取赛 3 场球队的方法的探究，我们通过非线性规划建立了以主客场均衡度为目标函数的优化模型。该模型操作简单，可适用性广，并能够对赛程主客场数作出合理的均衡。

然而，由于时间紧迫，我们的模型是在做了部分的简化后所得。我们仅列举出了几项主要的影响因素，对于一些考虑比较复杂的、但较次要的因素我们并未考虑，比如球队地域因素、周末比赛对球队发挥的影响等等，这些都是值得改进的地方。

七、模型的推广与改进

本模型中所做的影响因素的分析以及运用层次分析法确定影响因素的权重，能够很好把定性分析与定量分析相结合，具有较强的实际应用能力和普遍适用性，因而具有较高的推广价值，比如：

1.在进行各种多因素分析时，可选择主要影响因素而剔除次要影响因素，是问题简化并提高效率；

2.在企业的资金面临多种投资方案时，运用层次分析法确定各种投资方案的权重，可使企业的投资获得最大收益；

3.对于赛事的安排模型和方法（间接选定法和梯形旋转法等），可用于多个球队之间循环赛的安排。

此外，为使模型应用效果更好，我们进一步考虑提高精确度的方法，认为可以对模型进行如下改进：

在分析影响球队赛程利弊的因素时，由于时间关系，我们仅考虑了主要影响因素，而对多个次要影响因素未予考虑。为使模型更加完善，提高判别的精确度，可以考虑增加评判指标。比如考虑球队地域因素对赛程安排的影响，周末观众人数比平时相对增加对球队（尤其是主场球队）水平发挥的影响，甚至赛季中期球队进行球员交易后对后面赛程的影响等。

参考文献

- [1].谢季坚，刘承平，模糊数学方法及其应用（第三版），武汉：华中科技大学出版社，2006.8，28—37，93—101。
- [2].常建娥，蒋太立，层次分析法确定权重的研究，武汉理工大学学报，29（1）：153—156，2007。
- [3].罗建军，杨琦，精讲多练 MATLAB，西安：西安交通大学出版社，2002.8，17—24。

地面搜索时间的优化问题

郭 敏 刘代洪 高鸿哲

指导教师：张鹏鹏

摘要

题目要求确定一条路径，使之在最短时间内搜索完一片平面区域。为得到耗时最短的路径，本文提出了五种搜索方式。根据搜索人员不能失去联系的限制条件，从中筛选出一人负责一条搜索带的条形分区搜索方式，以及全队排成直线的地毯式搜索方式，分别用 MATLAB6.5 编程求解，然后对结果进行优化，得到最终结果。

第一问：

(1) 用条形分区搜索方案解得耗费的总时间为 $49.0339h$ ，均衡度为 $G = 0.0202$ 。为尽量减少队员之间搜索路程的差距，进一步优化时，各队员增加一段适当的路程。优化后得到耗费的总时间为 $48.5830h$ ，均衡度减小到 $G = 0.0011$

(2) 采用地毯式搜索方案解得耗费的总时间为 $51.1111h$ 。由于原始路径中有 $4800m$ 的重复路程，优化时采用了曲形回路分段考虑的方法尽量减小重复路程。优化后得到耗费的总时间为 $50.9025h$ 。

对比两种方案求解的结果，可见，条形分区搜索方式耗费的总时间更小，效果更好。即便如此，总时间仍大于 $48h$ 。通过验证，若增加 1 人，即可在 $48h$ 内完成搜索。

第二问：

人数增加到 50 人后，若将平面区域等分，得到的搜索带宽度不是 $40m$ 的整数倍，所以不能直接按“己”字形路径行进。为克服该困难，考虑队伍拥有 3 台卫星电话，将平面区域分为三块。然后将队伍分为三组，使得在每个区域中每个人的搜索带宽度为 $20m$ 的整数倍，这样可以有六种分法。最后，对每种分组方案编程计算并调整分区，解得耗费的总时间最小为 $21.0740h$ 。此时分区和分组如下

三组 20 人 $6700 * 7200m^2$	一组 15 人 $4500 * 3600m^2$
	二组 15 人 $4500 * 3600m^2$

本文假设搜索人员发现目标后，向上报告可以通过其他队友互相传递，在此基础上给出了较好的搜索方案，使资源利用率最大化，得到搜索时间很接近所要求的时间。但是可能造成汇报不及时的问题，对此，本文进行了简单的讨论。

本文得出的搜索方案可推广应用于战后扫雷以及海上搜救等方面。

关键词：搜索 均衡度 优化 地毯式搜索 条形分区搜索

问题重述（略）

模型假设

1. 搜索人员可以通过他人或者直接联系组长，然后组长用卫星电话向指挥部报告搜索的最新结果；
2. 搜索人员通过他人联系组长，用于联系时间相对于搜索时间来说可以忽略不计；
3. GPS 定位仪和步话机都处于最佳状态，不会出现故障。

符号说明

- n : 搜索人数；
- T : 总耗时；
- t_1 : 从出发点到达搜索起点的时间；
- t_2 : 搜索耗时；
- t_3 : 重复地段耗时；
- t_4 : 搜索完成后所在点到达集结点的时间；
- t_5 : 转角耗时；
- t_{\max} : 最长耗时，即最晚到达集结点的搜索队员的耗时；
- t_{\min} : 最短耗时，即最早到达集结点的搜索队员的耗时；
- W : 最大耗时差值， $W = t_{\max} - t_{\min}$ ，即最长的搜索耗时与最短的搜索耗时之差；
- G : 均衡度， $G = (t_{\max} - t_{\min}) / t_{\max}$ 。

问题分析

两个问题都是要求我们设计一种耗时最短的搜索方式，因为要对整个指定区域进行搜索，故用于搜索的总时间是一样的，只是不同的方法有不同的行进时间，而且搜索完整个区域的时间是由最晚到达集结点的搜索人员所耗费时间决定。由于每种方法分配给每个人的搜索路程不一样，完成的时间也不一样，所以，各种方法所用的时间也不一样。

分析题目，本文根据如下原则，设计耗时最短的搜索方式：

1. 任意搜索人员可以通过自己或者他人联系上组长；
2. 必须使得搜索区域内的每一点都被搜索到；
3. 最先完成搜索的搜索人员耗时与最后完成搜索的搜索人员耗时之差应尽量小。

为了寻找耗时最短的方法，本文分别计算不同的搜索方案耗费的时间，然后在保证上述原则的条件下，通过改进搜索路线，重新分派搜索任务来实现对方案的优化。最后，从优化后的方案中找到用时最少的方案，就是问题所要寻找的最佳方案。

模型分析

根据对问题的分析，本文提出了 5 种不同的搜索方式，以下是对不同搜索方式的说明以及对其可行性的分析。

1. 走走停停式推进

每个人搜索时的可探测半径为 20 m ，该种推进方式就认为只要搜索人员站在圆心处停留一段时间，以该点为圆心， 20 m 为半径的一个圆的区域就被搜索完了，然后以 1.2 m/s 的速度行进到另一个圆，同样停留一段时间。只要用这样的圆把搜索区域完全覆盖再回到集结点就完成了搜索。

首先，这种推进方式的停留时间不能确定，再者，这种方式不切合实际，也不符合题目的要求。

所以，该搜索方式不具有可行性。

2. 从起始点放射状分区后分别推进

该方式是以起始点为中心把搜索区域分成 n 个搜索带，然后，每个搜索人员在自己负责的搜索带内，成放射状向前推进。每个搜索人员搜索完自己负责的区域后，以 1.2 m/s 的速度到达集结点。

由于步话机通讯半径为 1000 m ，如果按照这种方式推进，当推进到一定程度后，各个搜索人员之间的距离就大于 1000 m 了，这样就会使该搜索人员失去联系。

所以，该搜索方式不具有可行性。

3. “回”字形分区推进

将搜索平面区域划分（不均等划分）为如图 1 所示的 n 个搜索带，从起始点出发的搜索人员，以 1.2 m/s 的速度沿起始点与集结点的连线方向，到达自己对应的搜索带靠近起始点一边 20 m 处后，开始以 0.6 m/s 的速度顺时针（或者逆时针）方向搜索。各个搜索带的搜索人员完成各自的搜索任务后，到达起始点与集结点的连线上，最后以 1.2 m/s 的速度到达集结点，完成搜索。

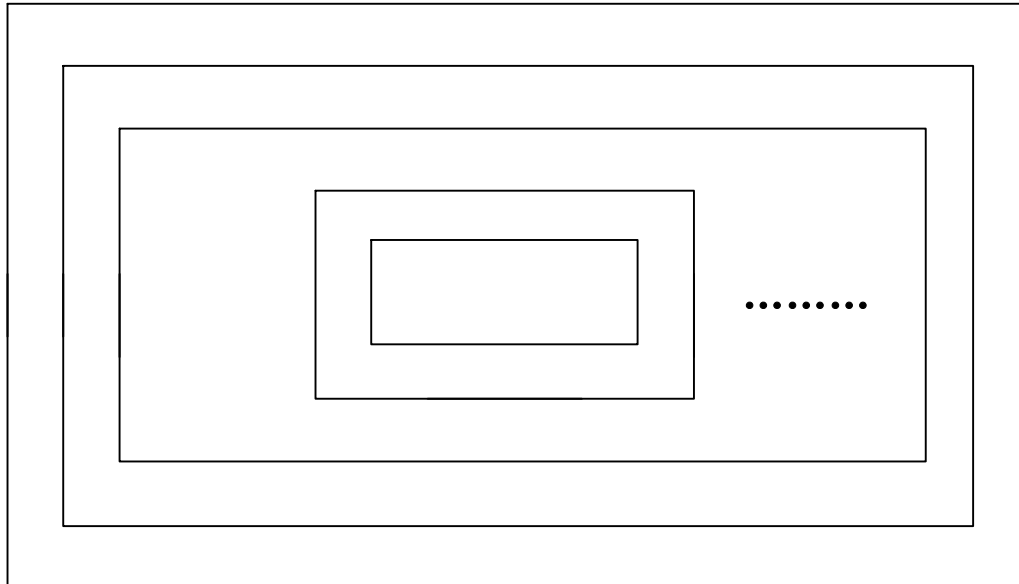


图1 “回”字形分区推进搜索平面区域划分的方式

由于相邻（或者间隔一个）的两个人到达自己对应的搜索带靠近起始点一边 $20m$ 处的时间不同，那么就会出现内圈先转弯的情况，又由于在转角处路程外圈比内圈大，如果按照这种方式推进，当推进到一定程度后某个搜索人员与其他搜索人员之间的距离就大于 $1000m$ 了，这样就会使该搜索人员失去联系。

所以，该搜索方式不具有可行性。

4. 条形分区后推进

将平面区域等分为 $7200/n$ 米，宽 11200 米长的 n 条搜索带，各搜索人员在各自的搜索带内成“己”字形推进，完成对各自搜索带的搜索后，以 $1.2m/s$ 的速度到达集结点，完成搜索。

这种推进方式相比“回”字形分区推进方式而言，没有了转角处路程外圈比内圈大的情况，使得任何搜索人员都可以通过自己或他人联系上组长。

所以，该搜索方式具有可行性。

5. 地毯式推进

将搜索人员排列成一条直线，以直线地毯式推进，快到达边界时转角。该模型的关键在于减少重复通过的区域、减少转角的数目。为了避免重复行进，因此，在平面右边划出一条 $800 * 7200m^2$ 的搜索带，剩下的区域等分为 9 条搜索带。搜索人员排成一列从中心出发，由 1 区下转至 5 区，到达下侧边境时转入右边搜索带底部，再向上行进到达其顶部，再转入横向搜索带内，最后到达集结点，完成搜索。

地毯式推进方式是把搜索人员排列成一条直线，所以不存在失去联系的情况。

所以，该搜索方式具有可行性。

模型建立

1. 模型 I 的建立:

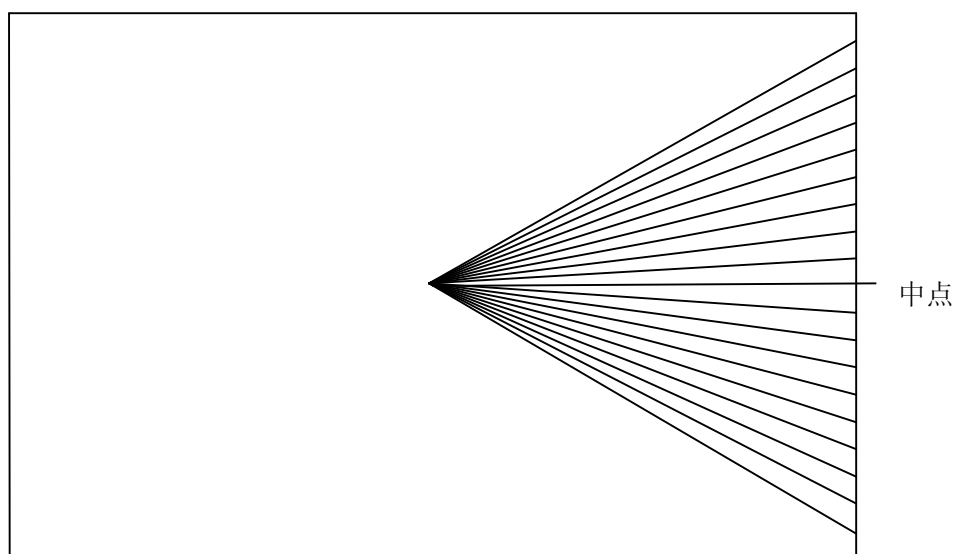


图 2 模型 I 的放射状行进时的行进方式

首先将搜索人员依次编号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 。将搜索区域以短边按搜索人数 n 份等分，由此可将平面区域等分为 $7200/n$ 米宽， 11200 米长的 n 条搜索带，从一端开始将 n 条搜索带依次编号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 。任务开始后，搜索队员借助 GPS 定位，以 1.2 m/s 的速度从起始点向右成放射状行进（如图 2），到达矩形平面短边边界上与其编号对应的搜索场地靠近搜索区域边界 20 m 的点上，然后搜索队员在对应的搜索带内，按“己”字形路线进行搜索。任意一条搜索带上的搜索路径如图 3 所示(演示动画如[路径演示.exe](#))。



图 3 模型 I 搜索时任意搜索带的行进方式

具体行进方式如下所述:

第一步：到达搜索起点后，搜索人员向左以 0.6 m/s 前进 11200 m 的距离；

第二步：中点以上的每个队员向下以 1.2 m/s 的速度前进 40 m ，中点以下的向上以 1.2 m/s 的速度前进 40 m ；

第三步：搜索人员向右以 0.6 m/s 前进 11200 m 的距离；

第四步：重复第二步；

第五步：重复第一二三四步，到搜索完该区域为止；

第六步：搜索完该区域的搜救人员以 1.2 m/s 的速度向集结点集中，完成搜索任务。

已知每个人搜索时的可探测半径为 20 m ，所以，箭头所示的路径两旁 20 m 范围内的目标，均可被搜索到。

2. 模型 II 的建立：

首先，将搜索区域划分为 10 个部分，除 6 号搜索带面积为 $7200 * 800\text{ m}^2$ 以外，其余搜索带面积都为 $800 * (11200 - 800)\text{ m}^2$ ，具体分区情况如图 4 所示：

7←	↑ 6
8→	
9←	
10→	
1→ (11←)	
2←	
3→	
4←	
5→	

图 4 模型 II 的区域划分及推进方式

然后，20 个人排成一条直线，在 $800 * (11200 - 800)\text{ m}^2$ 的搜索带里，按照图 4 中所示的编号和方向行进，到达搜索区域的边界时，调整队伍方向。以 4、5 号搜索带为例，队伍按图 5 所示方式进行调整。要完成搜索任务，队伍总共需要调整 9 次。

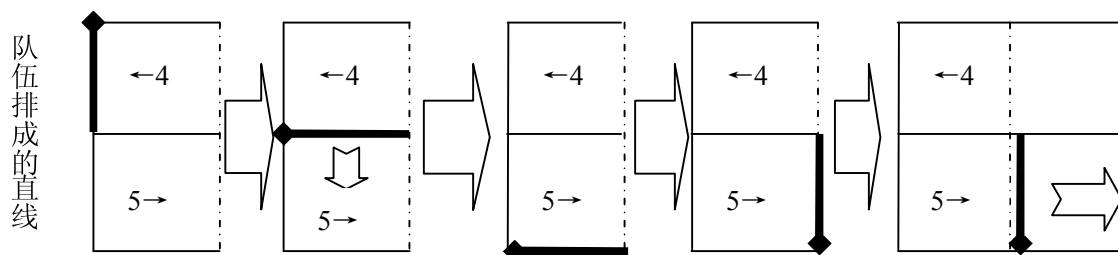


图 5 模型 II 转弯时的调整方式（以 4 号和 5 号为例）

模型求解

1. 问题一的求解

1.1 运用模型 I 解决问题一

1.1.1 原始方案

根据模型 I 的思想, 可以确定总耗时 $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

其中

$t_1 = \sqrt{5600^2 + (3580 - 7200 * (i - 1) / n / 40)^2} / 1.2 / 3600$, 表示从出发点到达搜索起点的时间;

$t_2 = 11200 * 7200 / n / 40 / 0.6 / 3600$, 表示搜索耗时;

$t_3 = 40 * (7200 / n / 40 - 1) / 1.2 / 3600$, 表示重复地段耗时;

$t_4 = 3620 - 7200 * i / 40 / n / 1.2 / 3600$, 表示搜索完成后所在点到达集结点的时间。

在 MATLAB6.5 上编写程序^[1] (见附录一), 计算各搜索人员的耗时, 得到的结果如表 1 所示:

表 1 原始方案各搜索人员的耗时

搜索人员代码	1	2	3	4	5	6	7
搜索耗时/h	49.0339	48.9074	48.7843	48.6650	48.5498	48.4389	48.3327
搜索人员代码	8	9	10	11	12	13	14
搜索耗时/h	48.2314	48.1351	48.0441	48.0441	48.1351	48.2314	48.3327
搜索人员带码	15	16	17	18	19	20	
搜索耗时/h	48.4389	48.5498	48.6650	48.7843	48.9074	49.0339	

由表 1 可知, 搜索完整个区域的时间 $T = t_{\max} = 49.0339h$ (即最晚到达集结点的搜索人员的总耗时)。但是, 这种方法搜索的最长耗时 t_{\max} 与最短耗时 t_{\min} 之差 (即耗时最大差值, 定义为 $W = t_{\max} - t_{\min}$) 太大。由此本文引入了均衡度^[2]。

定义: 均衡度 $G = (t_{\max} - t_{\min}) / t_{\max}$

模型 I 原始方案的均衡度 $G_1 = 0.0202$, 耗时最大差值 $W = 0.9898h$ 。这样资源没有得到充分运用, 也不利于节省时间, 所以, 本文设计了优化方案, 通过改进搜索路线, 重新分派搜索任务, 减小均衡度, 以实现对方案的优化。

本文设计了两种优化方案：

优化方案一：对于前九组搜索人员，每个搜索人员都少搜索一段距离，转而由 10 号搜索人员搜索（要使得耗时与用模型 I 计算的耗时 $49h$ 尽可能相等，由此可确定这样的一段距离为 $200m$ 。）；

优化方案二：每个搜索人员分别多增加一段搜索路程，原路程长的，新增路程短，原路程短的，新增路程长。这些新增的路程成等差数列。通过 MATLAB6.5 编程寻找得到最优等差数列，其公差为 240，首项为 520。

1.1.2 优化方案一

在原始方案的基础上 1-9、12-20 号搜索人员耗时都减去 $200/0.6/3600$ 小时，而 10 号和 11 号搜索人员各加上 $9*200/0.6/3600$ 小时，得到的结果如表 2 所示：

表 2 优化方案一各搜索人员的耗时

搜索人员代码	1	2	3	4	5	6	7
搜索耗时/ h	48.9413	48.8148	48.6917	48.5724	48.4572	48.3463	48.2401
搜索人员代码	8	9	10	11	12	13	14
搜索耗时/ h	48.1388	48.0426	48.8793	48.8793	48.0426	48.1388	48.2401
搜索人员带码	15	16	17	18	19	20	
搜索耗时/ h	48.3463	48.4572	48.5724	48.6917	48.8148	48.9413	

由表 2 可知，模型 I 优化方案一的总耗时（即最长耗时） $T = 48.9413h$ ，最大差值 $W = 0.8987h$ ，均衡度 $G_2 = 0.0184$ 。

1.1.3 优化方案二

根据模型 I 的思想，可以确定总耗时 $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

其中 $t_2 = (11200 * 7200 / n / 40 + 240 * i - 520) / 0.6 / 3600$ ，表示搜索耗时；

t_1, t_3, t_4 与原始方案相同。

在 MATLAB6.5 上编写程序（见附录三）计算，得到的结果如表 3：

表 3 优化方案二各搜索人员的耗时

搜索人员代码	1	2	3	4	5	6	7
搜索耗时/ h	48.5710	48.5555	48.5435	48.5354	48.5313	48.5315	48.5364
搜索人员代码	8	9	10	11	12	13	14
搜索耗时/ h	48.5462	48.5611	48.5830	48.5830	48.5611	48.5462	48.5364
搜索人员带码	15	16	17	18	19	20	
搜索耗时/ h	48.5315	48.5313	48.5354	48.5435	48.5555	48.5710	

由表 3 可知，模型 I 优化方案二的总耗时（即最长耗时） $T = 48.5830h$ ，最大差值 $W = 0.0517h$ ，均衡度 $G_3 = 0.0011$ 。

由上述分析，得到方法一的原始方案和优化方案一、二的耗时与均衡度比较，如表 4 所示：

表 4 方法一各种方案的耗时与均衡度比较

方案	方法一的原始方案	方法一的优化方案一	方法一的优化方案二
完成搜索的时间/ h	49.0339	48.9413	48.5830
最大差值/ h	0.9898	0.8987	0.0517
均衡度	0.0202	0.0184	0.0011

由表 4 知，模型 I 的优化方案二的总耗时与最大差值以及均衡度均最小，故模型 I 的最佳方案即为优化方案二。

1.2 运用模型 II 解决问题一

1.2.1 原始方案

总耗时 $T = \text{搜索耗时 } t_2 + \text{重复地段耗时 } t_3 + \text{转角耗时 } t_5$ 。

转角耗时的计算方法：

建立以开始转角时搜索人员所在直线最内部的点为原点，搜索人员所在直线为纵轴的坐标系，计算每个转角的耗时。由于队伍排成的直线长度为 $800m$ ，可将坐标为 $(0, y)$ 的搜救队员调整到坐标 $(800 - y, 0)$ ，以达到转角的目的。

$$\text{所以，每个人所需的调动时间为： } t = \frac{\sqrt{(800 - y)^2 + y^2}}{1.2} \quad (0 \leq y \leq 800)$$

$$\text{整理该式得： } t = \frac{\sqrt{320000 + 2(y - 400)^2}}{1.2}$$

可以看出，当 $y = 0$ 或 800 时， t 取得最大值 1333.3 秒。计算时以最晚完成移动的点为准。故 $1333.3s$ 为转角上额外的耗时。模型中 180 度转角共有 9 个，根据设定单个转弯时间 $t = 800 / 0.6 = 1333.3s$ 。转角耗时 $t_5 = 9 * t = 1333.3 * 9 = 12000s$ 。

重复地区耗时的计算方法：

定义：重复地段，再次经过的已搜索过的区域。

第一区有一个 $4800 * 800m^2$ 的重复地段（在这里，重复地段为队员在搜索完第十区，以转向完成后的位置为起点，推进至第一区中点所行的区域，故 $4800 = 5600 - 800$ ），行经重复地段时间 $t_3 = 4800 / 1.2 = 4000s$ 。

地毯式搜索其他地区的搜索耗时

$$t_2 = (11200 - 800) * 9 / 0.6 + 7200 / 0.6 = 168000s$$

$$\text{故总耗时 } T = t_2 + t_3 + t_5 = 184000s = 51.1111h。$$

1.2.2 优化方案

首先，由于模型Ⅱ中存在 $4800 * 800m^2$ 的重复地区，所以，应优先考虑减少或消除重叠地区的设计方案。本文设计曲形回路（即图 6 中 A、B 路线），以达到此目的。

其次，第十区的回路以各自中点为起点，向右搜索直至第六区的左边界，这段路线为曲形回路，为了便于计算，取回路部分单独计算。

根据重复地区最小化，转角数量少化的原则，本文确定了流程图的路线，如图 6 所示。第十区到达中点时，20 人等分为两组，每组 10 人，分别沿 A、B 路线搜索，然后在汇合点 a 处相遇，再分别运动到 b、c，再向左推移。

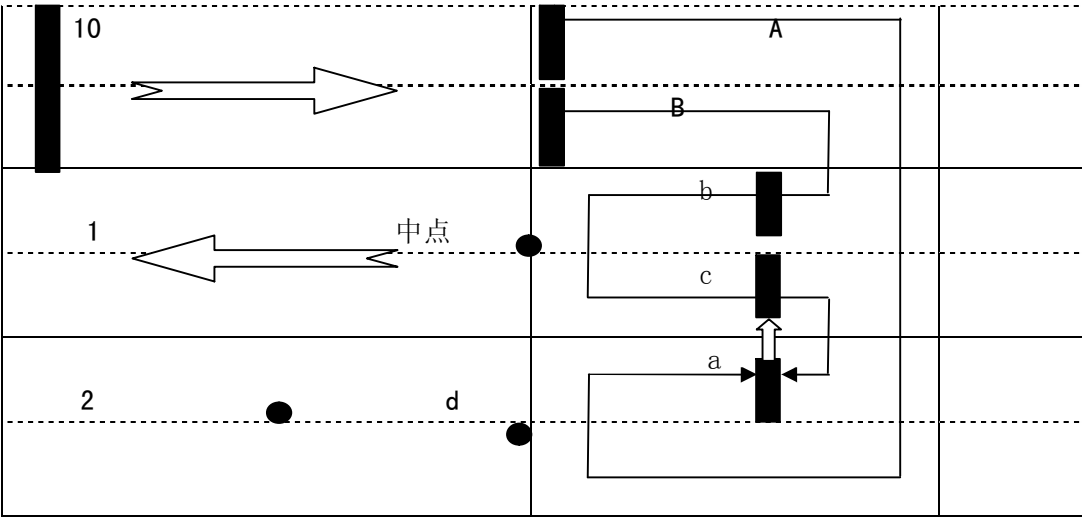


图 6 流程图

设汇合点（a 点）到第二区中点（d 点）的水平距离为 U ，分别取不同的 U 进行灵敏度（即耗时）分析^[3]，结果如表 5：

表 5 不同 U 值的灵敏度分析

汇合点到第二区中点距离 U (m)	2800	3200	3600	4000
A 路耗时(h)	6.8519	7.0370	7.2222	7.4074
a 路耗时(h)	7.5926	7.4074	7.2222	7.0370

由表 5 知，当汇合点在距第二区中点 $3600m$ 处耗时最少。

选取 $U = 3600m$ 时：

$$\text{转角耗时 } t_5 = (400 * 6 / 1.2 + 800 * 7 / 0.6) / 3600，$$

$$\text{搜索耗时 } t_2 = (4400 * 3 + 400 * 9 + 10400 * 7 + 7200) / 0.6 / 3600$$

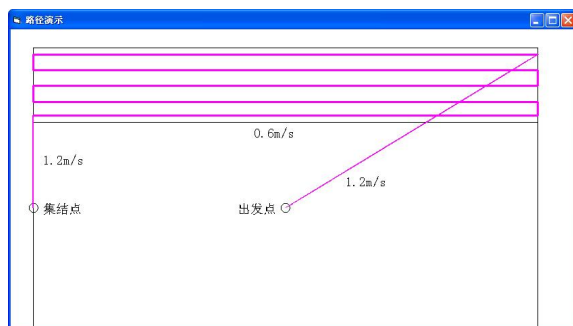


图 7 模型 I 的路径演示

由上述分析知，搜索完整个区域的时间是 $48.5830h$ ，不能在 $48h$ 内完成搜索任务。

由于 $48.5830h$ 与 $48h$ 很接近，考虑增加一人，计算耗时后，发现已经小于 $48h$ ，所以，只需增加到 21 人就可以在 $48h$ 内完成搜索任务。

2. 问题二的求解

2.1 问题二运用模型 I 求解的可行性分析

问题二中，搜索队伍有 50 人，将搜索区域以短边按搜索人数 n 份等分，得到搜索带宽为 $144m$ ，该搜索带宽度不是 $40m$ 的倍数，搜索不能走完整的“己”字形路线，对其进行规划，分成一部分走一个半“己”字，一部分走两个“己”字，这样做会使得最大差值很大（为 $5h$ 以上），也就使得耗时很大。故对于搜索队伍人数不是 $180(7200/40)$ 的因数的情况，不能直接使用模型 I 来解决，而应改进其分组方式。

2.2 最佳分组方式的确定

由于搜索队伍有 50 人（不是 180 的因数），拥有 3 台卫星电话，故应该考虑到分组搜索的影响。首先，按照面积比为 1: 1: 2 进行分区，具体分区情况如图 8 所示：

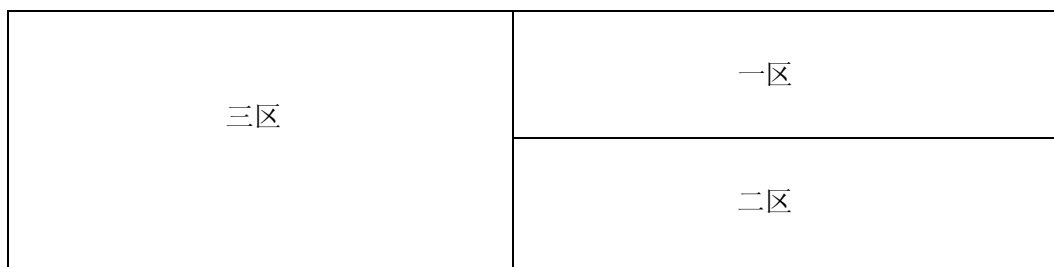


图 8 问题二中平面的分区方式

因为一区与二区的面积相等，所以搜索人数也应该相等，又由于一二区的搜索人数应该是 $7200/40$ 的公约数，故可以把人数进行如下分组：

- 方案一：一组（24）、二组（24）、三组（2）
- 方案二：一组（20）、二组（20）、三组（10）
- 方案三：一组（15）、二组（15）、三组（20）
- 方案四：一组（10）、二组（10）、三组（30）
- 方案五：一组（5）、二组（5）、三组（40）
- 方案六：一组（1）、二组（1）、三组（48）

其中方案一与方案六，方案二与方案五，方案三与方案四相同，故重新进行如下分组：

方案一：一组（24）、二组（24）、三组（2）

方案二：一组（20）、二组（20）、三组（10）

方案三：一组（15）、二组（15）、三组（20）

根据模型 I 的思想，可以确定总耗时 $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

其中

$t_1 = \sqrt{5600^2 + (3580 - 3600 * i / m)^2} / 1.2 / 3600$ ，表示从出发点到达搜索起点的时间；

$t_2 = (11200 - m) * (n / 2 - m_1) / 0.6 / 3600$ ，表示搜索耗时；

$t_3 = 40 * (n / 2 - m_1 - 1) / 1.2 / 3600$ ，表示重复地段耗时；

$t_4 = 3620 - 3600 * i / m_1 / 1.2 / 3600$ ，表示搜索完成后所在点到达集结点的时间。

在 MATLAB6.5 上编程（程序见附录四、五）计算，得到分组情况、耗时、分区与最大差值，如表 7 所示：

表 7 分组情况、耗时、分区与最大差值

方案	一	二	三	四	五	六
分组情况	24, 24, 2	20, 20, 10	15, 15, 20	10, 10, 30	5, 5, 40	1, 1, 48
耗时	22.9583	22.2843	21.0740	21.0740	22.2843	22.9583
分区	10700, 500	8800, 2400	6700, 4500	4500, 6700	8800, 2400	500, 10700
最大差值	3.0556	1.7917	0.1667	0.1667	1.7917	3.0556
均衡度	0.1331	0.0804	0.0079	0.0079	0.0804	0.1331

由上表可知，方案三的耗时与最大差值均最小，故方案三即为解决问题二的最佳方案。

由上述分析知，搜索完整个区域的时间是 21.0740 小时。

模型的评价与推广

1. 评价：

优点：① 本文假设搜索人员发现目标后，可以通过其他队友互相传递向上报告，在此基础上给出了较好的搜索方案，使资源利用率最大化，得到搜索时间很接近所要求的时间。

② 思路清晰，简洁明了，在复杂情况下具有很强的操作性。

缺点：搜索人员发现目标后通过其他队友互相传递向上报告，可能会造成汇报不及时

问题。

2. 推广:

(1) 战后扫雷: 战时扫雷只需要开辟通路即可, 而战后为保证居民安全, 必须对雷区全面扫描, 排除所有的地雷, 所以可以利用本文得出的搜索方案进行扫雷。

(2) 海上搜救: 如果发生海难, 由于水流等原因, 失事船只位置发生漂移, 进行搜救时必须在一定范围内全面搜索, 也可以利用本文得出的搜索方案。

3. 讨论:

我们在分析题目的时候, 考虑到可能要分两种情况, 一种是搜索人员可以通过自己或者他人联系组长, 另一种是搜索人员只能通过自己联系组长。

搜索人员只能通过自己联系组长的情况, 就必须使得任何搜索组员在任何时刻与组长之间的距离不大于 1000 米, 在保证联系得上的情况下, 运用模型 I 的思想进行求解。

问题一的结果为: 搜索完整个区域的时间是 50.4629 小时, 最大差值为 0.0401 小时, 需要增加到 22 人才可以在 48 小时内完成搜索时间。

问题二的结果为: 搜索完整个区域的时间是 22.9969 小时, 最大差值为 6.0661 小时。

参考文献

- [1] 飞思科技产品研发中心, MATLAB7.0 基础与提高, 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [2] 谷云东, 均衡度公理定义的改进,
<http://www.cqvip.com/qk/98162X/200803/27642318.html###>, 2008 年 9 月 21 日.
- [3] 胡运权, 运筹基础及提高, 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2006.