

眼科病床的合理安排

摘 要

本文研究的是眼科医院病床合理安排的问题。我们首先分别从医院和病人两个角度出发，制订出了医院病床周转率和病人公平偏离指数两个评价指标。

而后，我们综合运用数据分析、泊松过程、参数估计、排队论、最优化等一系列方法最终建立了病人最短等待时间、医院高效运转、单队多服务台三个病床安排模型，以及建立在医院高效运转模型基础上的病人预约病床模型。并对这些模型的优劣性在 P12 的“模型的求解与结果分析”中做出了评价。

I、病人最短等待时间模型

对于病人而言，他们当然会依照自己等待入院时间的长短评判病床安排的合理性，即认为自己等待入院的时间越短，病床安排就越合理。这种想法也十分自然，因此我们就顺应这种想法，定义出了最短等待时间的目标函数。以当天入院人数不能超过当天的空床数作为此函数的约束条件，建立起了病人最短等待时间模型（见 P7）。

II、医院高效运转模型

对于医院而言，要使医院高效的运作，病床的合理安排起着至关重要的作用。我们根据每天入院的人数来制定周一到周日七天病人的入院安排准则，并制定了五类疾病优先次序原则。以该入院安排准则和疾病类别优先次序原则，在医院天天可以进行手术以及周六、周日不进行手术两种情况下建立了两个医院高效运转模型（见 P7 和 P9）。

III、单队多服务台模型

我们将四类病人看作是四条“单队列多服务台”的排队系统，定义了平均逗留时间作为目标函数，建立了病人在系统内的平均逗留时间最短的病床固定比例分配模型（见 P9），并应用搜索法求出了模型的最优解——白内障、视网膜疾病、青光眼以及外伤病房数的比例安排应该分别为 34 个床位、23 个床位、10 个床位以及 12 个床位。

IV、病床预约模型

我们重点分析了两个最大的影响病人正常入院时间的因素——外伤病人“插队”的影响以及在其之前病人术前准备时间的影响。在医院高效运转模型的基础上，运用了参数估计和泊松过程的相关知识，最终给出了针对于不同置信水平上，等待时间区间的求解公式（见 P8）。并给出了更加便于使用的简单估算方法（见 P9）。

关键词：病房安排；泊松过程；排队论

一、问题的重述

医院就医排队是大家都非常熟悉的现象，它以这样或那样的形式出现在我们面前，例如，患者到门诊就诊、到收费处划价、到药房取药、到注射室打针、等待住院等，往往需要排队等待接受某种服务。

我们考虑某医院眼科病床的合理安排的数学建模问题。

该医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张。该医院眼科手术主要分四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。当前手术安排情况如下所示：

	病名		术前住院时间	执行手术时间	术后住院时间
非急症	白内障	双眼	1-2 天	周一 1 只，周三 1 只	短（手术简单）
		单眼		周一或者周三	
	视网膜疾病		2-3 天	除周一和周三	长（手术复杂）
	青光眼		2-3 天		
急症	外伤疾病		1 天	每天	不定

当前该住院部对全体非急症病人是按照 FCFS（First come, First serve）规则安排住院，但等待住院病人队列却越来越长，医院方面希望你们能通过数学建模来帮助解决该住院部的病床合理安排问题，以提高对医院资源的有效利用。

问题一：试分析确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型的优劣。

问题二：试就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并对你们的模型利用问题一中的指标体系作出评价。

问题三：作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院。能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间。

问题四：若该住院部周六、周日不安排手术，请你们重新回答问题二，医院的手术时间安排是否应作出相应调整？

问题五：有人从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，试就此方案，建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型。

二、问题的背景

医院就医排队是一种经常遇见的非常熟悉的现象。它每天以这样或那样的形式出现在我们面前。医院是一个复杂的系统，病人从挂号、就诊、划价、取药每个服务机构，当某项服务的现有需求超过提供该服务的现有能力时，排队现象就会发生，由于患者到达的时间和诊治患者所需时间的随机性，可控性小，排队几乎是不可避免的，当诊室不足时，常出现患者排队等待时间太长，患者满意度下降，医务人员工作过于忙乱，易出差错引起医患纠纷，对患者和社会都会带来不良影响。因此如何合理科学安排医护人员及其医疗设备，使医院不会盲目增加医生和设备造成不必要的空闲，造成资源浪费，又使患者排队等待时间尽可能减少，如何在这两者之间取得平衡，以便提高服务质量，降低服务费用，这是现代医院管理者必须面对的课题。

我们必须要对医院就医情况有一个合理的评价指标体系，用以评价医院综合服务质量的优劣。其中，医院的运转效率、病人就医的公平偏离度和病人的等待时间是影响这个

评价体系的重要因素。提高医院的运转效率能够使医院尽可能大的对资源有效利用，更有效的去救死扶伤；病人就医的公平偏离度越小，公平性就越高；缩短病人的等待时间可以提高病人对医院的满意度。

如果医院增添服务人员和设备，就要增加投资或发生空闲浪费；如果减少服务设备，排队等待时间太长，对患者和社会都会带来不良影响。因此，医院管理人员要考虑如何在这两者之间取得平衡，以便提高服务质量，降低服务费用。医院排队论，就是为了解决上述问题而发展起来的一门科学，患者和提供各种形式服务的服务机构组成一个排队系统，称为随机服务系统。如果在排队论的基础上，对医院门诊、诊室的排队系统的结构和行为进行科学的模拟和系统的研究。从而对诊室和医生安排进行最优设计，以获得反映其系统本质特征的数量指标结果，进行预测、分析或评价，最大限度地满足患者及其家属的需求，将有效避免资源浪费。

三、符号系统

\overline{P}_{in}	医院每天平均入院人数
\overline{P}_{out}	医院每天平均出院人数
\overline{P}_{shift}	医院每天平均周转人数
ω	医院床位周转率
ψ	病人公平就医偏离指数
x	某一天病人的入院总人数
m	某一天等待入院病人的总人数
x_i	某一天第 <i>i</i> 类病人的入院人数
m_i	某一天中第 <i>i</i> 类病人等待入院的总人数
\overline{t}_{wi}	第 <i>i</i> 类病人等待入院的平均时间
p_e	某一天的总空床数
$p_{wi}(j)$	星期 <i>j</i> 第 <i>i</i> 类病人等待入院人数
$p_{oi}(j)$	星期 <i>j</i> 第 <i>i</i> 类病人出院人数
$p_v(j)$	星期 <i>j</i> 空床数
$p_e(j)$	星期 <i>j</i> 病人出院后总空床数
$p_w(j)$	星期 <i>j</i> 等待入院的总人数
λ	外伤病人所服从的泊松流中的参数
σ	单位外伤病人延迟系数
N_j	星期 <i>j</i> 的入院人数
θ	病人等待入院时间
P_w	某位病人门诊时前面排队等待入院的人数
P_s	某位病人门诊时，住院部已有的住院人数

λ_i	第 <i>i</i> 类病人日平均门诊人数
μ_i	第 <i>i</i> 类病人日平均出院人数
ρ_i	第 <i>i</i> 类病人日平均就诊强度
c_i	第 <i>i</i> 类病人占用病床位数
P_{oi}	第 <i>i</i> 类病人门诊时床位空闲的概率
P_{ni}	第 <i>i</i> 类病人门诊时前有 <i>n</i> 个病人等待入院的概率
L_{si}	第 <i>i</i> 类病人平均住院人数
L_{qi}	第 <i>i</i> 类病人等待入院平均人数
T_{si}	第 <i>i</i> 类病人在院平均逗留时间

四、名词解释与合理假设

（一）名词解释

1、泊松分布是一种统计与概率学里常见到的离散机率分布，由法国数学家西莫恩·德尼·泊松在 1838 年时发表。适合于描述单位时间内随机事件发生的次数。如某一服务设施在一定时间内到达的人数，电话交换机接到呼叫的次数，汽车站台的候客人数，机器出现的故障数，自然灾害发生的次数等。^[2]

2、排队论又称为随机服务系统理论，是通过研究各种服务系统在排队等待现象中的概率特性，从而解决服务系统最优设计与最优控制的一门学科，是运筹学的一个重要分支。1909 年丹麦工程师爱尔朗发表的“概率与电话通话理论”，主要研究的就是服务时间和服务排队的现象，它开创了排队论研究的历史。该理论自产生后不断完善，特别是计算机技术的飞速发展，为其应用开拓了广阔的前景，现已广泛应用于交通、医疗、商场购物、码头等行业排队过程。^[3]

（二）合理假设

- 1、病人入院仅受到病床安排的限制而不受手术条件和医生安排的限制；
- 2、外伤病人属于急症，无须等待即可入院；
- 3、白内障、视网膜疾病、青光眼的急症病例数量比较少，所以此三类疾病都被认为是严格的慢性疾病，它们的急症情况不再考虑；
- 4、同一类病人按照 FCFS（First come, First serve）规则被安排住院；
- 5、同一类病人的手术前准备时间和手术后恢复时间均为定值；
- 6、四类病人的到达过程是四个不同强度的泊松流。

五、问题分析

（一）问题的性质

本文研究的是眼科医院病床合理安排的问题。先从医院和病人两个角度出发，制订出医院病床周转率和病人公平偏离指数两个评价指标。再综合运用数据分析、泊松过程、参数估计、排队论、最优化等一系列方法建立了病人最短等待时间、医院高效运转、单队多服务台三个病床安排模型，以及建立在医院高效运转模型基础上的病人预约病床模型。并对各个模型的优劣性做出了评价。

(二)解决问题的难点和关键

- 1、该问题的难点在于医院病人进出的数目都是不确定的量，而进出医院病人的类别更是不确定的，如何在这么多确定合理的病床安排模型是本问题最大的难点。
- 2、解决该问题的关键是病床安排合理性评价体系的确定，以及对大量给出数据的处理。

(三)解决问题的思路

1、思路一——确立评价指标体系

合理的评价病床指标体系应该是肯定医院对资源有效利用的同时，还须慎重地考虑到病人利益的评价体系。因此，我们需要从医院和病人两个方面来确立评价指标。

(1) 医院病床的周转

根据对数据表格的观察，该眼科医院住院部长期处于动态饱和状态，住院部满员已经成为了不争的事实，即住院部病床的利用率一直都维持在 100%。根据通行的办法，即按照住院部病床使用率作为医院对资源利用做评判，显然不再适宜！

在这个背景下，我们应从另一个角度重新考虑审视医院资源有效利用的问题——

住院部在某一天可以有多少病人出院也就意味着它在这一天又可以接收看过门诊，等待入院的病人。医院在某一段时间内，能否尽快地为正在住院的病人采取手术，并尽快地让他们康复出院，以接收更多的已经看过门诊等待入院的病人，才是对床位资源是否得到了有效利用的体现。病床周转率越高，则表明医院可以承载的病人数越多，医院有限的床位资源得到了更加有效的利用。

(2) 病人公平就医

急症病人的住院享有最高的优先级，没有公平不公平的问题。现在要声明的是这里所谓的“病人公平就医”是针对其他三类非急症病人而言的。

病人公平就医，即根据某类病人“排队”的长度应该与其可以入院的成正比比例。就是某类病人门诊数越多，则医院应该安排其更多的住院人数，此时对于每一类病人而言他们各自地利益都得到了相应的保障。

每类病的病人入院的人数都可以与该类病等待入院的人数比例大致相当，那么医院方面也可以保证各类病人排队的队列前进步调同整体队伍前进的步调基本保持一致，这是最理想的一种情况。

其中，整体队伍前进的步调设置是判断床位安排是否合理的关键。

2、思路二——病人最短等待时间

对于病人而言，他们当然会依照自己等待入院时间的长短评判病床安排的合理性，即认为自己等待入院的时间越短，病床安排就越合理。这种想法也十分自然，因此我们就顺应这种想法，定义出了最短等待时间的目标函数。以当天入院人数不能超过当天的空床数作为此函数的约束条件，建立起了病人最短等待时间模型。

3、思路三——天天手术的条件下，医院高效运转

对医院而言，病床是非常重要的资源，合理地分配病床，才能合理有效地利用有限的病床资源，有效地提高人力、物力资源的利用率，提高医疗质量。

我们根据每天入院的人数来制定周一到周日七天病人的入院安排准则。以该入院安排准则以及疾病类别优先次序来建立医院高效运转模型。

我们制定的四种疾病类别优先次序原则如下：

(1) 由于外伤疾病的优先性，每天必须首先安排外伤病人入院；如果当天外伤病人人数多于当天空床数时，将多出的外伤病人安排在第二天入院；

(2) 白内障疾病分单眼疾病和双眼疾病，手术必须安排在周一和周三，术前准备为 1、2 天，这样单眼白内障病人适合在周一、周二、周六、周日入院；

(3) 按手术机会少的优先安排；

(4) 入院等待手术时间超过正常术前准备时间的不安排；

(5) 我们制定了一个公平性原则来分配视网膜病人和青光眼病人入院次序。

我们以周日为例来说明类别优先安排次序：首先安排外伤病人，然后安排双眼白内障病人，再安排单眼白内障病人，最后安排视网膜疾病和青光眼病人。

4、思路四——预约床位

当前住院部对全体非急症病人是按照 FCFS (First come, First serve) 规则安排住院的。因此病人在门诊处完成就诊之后，理论上说他的入院次序仅仅就是由当前已经入院的病人人数 P_s 和在自己之前开始排队的病人的人数 P_w 决定了。然而实际上，排队的时间还受道种种不确定的因素影响！

比如，在等待入院期间，由于医院会优先安排眼外伤住院，外伤病人的“插队”将使其他非急症的病人就诊次序就将有所推后；再比如，在之前排队等待入院的病人术前准备时间的影响。

针对这些问题，我们可以暂不放下外伤病人的影响因素，分别在他之前入院病人术前手术准备时间最短和最长两种情况下，大致计算出病人等待入院时间的下界与上限，再根据外伤病人分布的特点，采用概率论中矩估计的手段计算得到病人等待的大致时间区间；确定外伤病人对等待时间的影响，将二者相结合，最终可以得到可信的等待时间区间。

5、思路五——周末不手术条件下，医院高效运转

住院部周六、周日不安排手术（外伤急症手术除外），但依然会有病人出院，所以依然医院方面依然需要在周六、周日为等待入院的病人安排病床。

我们继续依据思路三所列的五条原则，按类别优先的次序对周一到周日七天的病人入院安排作出调整。我们发现在周四、周五安排除外伤急症以外的病人入院并没有意义，手术均不会及时展开。这样的安排显然会影响到医院的高效运转，因此我们认为有必要对医院手术时间进行调整。

外伤作为急症有最高的优先权，没有任何调整的余地。因此手术时间的调整应从其他几类非急症疾病上着手。在原手术时间安排中，白内障手术的当天，不做视网膜疾病和青光眼手术。因此我们可以考虑调整白内障手术的时间安排，这样视网膜疾病和青光眼手术的时间安排也相应得到调整，最后达到调整整体手术时间的目的。

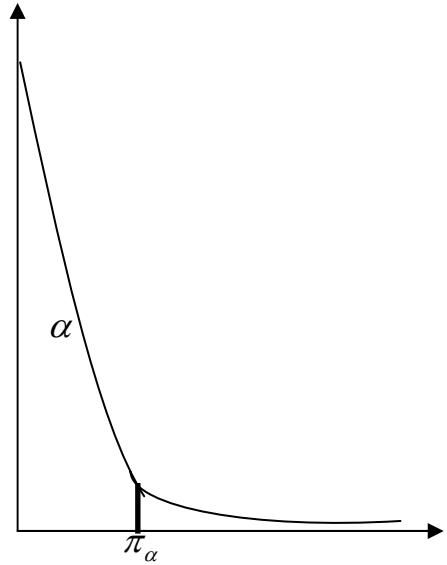
白内障手术分单眼白内障手术和双眼白内障手术。双眼白内障手术分两天完成，因此我们必须确定两天来做白内障手术，从周一到周五五天的时间内抽出两天作为白内障手术时间，这是一个排列组合问题，其排列方法有 C_5^2 种。

但实际中，双眼白内障手术需间隔一天，这样周四、周五不能进行双眼白内障手术的第一只眼的手术。所以实际存在的排列方法只有三种：周一和周三、周二和周四、周三和周五。

周一、周三白内障手术在上面分析中已排除。我们对周二、周四和周三、周五白内障手术安排分别制定了入院次序准则，并进行综合性的比较。最后确定一个合适的手术安排时间。

6、思路六——单队多服务台

为了便于医院管理，可以采用使各类病人占用病床的比例大致固定的方案来安排病床。由于该医院眼科手术主要分白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤四大类，为此我们



将医院所有的 79 张病床分为四大部分，每部分只为相应的病人服务，这样就形成了四个“单队多服务台”的排队系统。

根据排队论的知识，我们将某类病人所占病床数作为决策变量，以某类病人在系统内平均逗留时间为目标函数，建立单队多服务台模型，对平均逗留时间进行优化。在确定了每类病人所占病床数后，即可确定每类病人占用病床的比例。

六、模型建立

一、评价指标体系

定义一：病床周转率。

$$\omega = \frac{\text{每天病床周转数}}{\text{医院病床的总数}} = \frac{\overline{P_{shift}}}{79} \times 100\% = \frac{\overline{P_{out}}}{79} \times 100\% \text{ 或者 } \frac{\overline{P_{in}}}{79} \times 100\%。$$

性质：医院病床周转率 ω 越高，病床安排愈加合理；医院病床周转率 ω 越低，病床安排愈加不合理，需要改进病床安排方案。

定义二：公平偏离指数。

$$\psi = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{\sum_{k=1}^3 x_k}{\sum_{k=1}^3 m_k} \right)^2。$$

公平偏离指数的定义主要是根据最小二乘法的思想。

我们首先设置了一个整体队伍前进的步调 $\frac{x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^3 x_k}{\sum_{k=1}^3 m_k}$ ，以它作为标准。

性质：病人公平偏离指数 ψ 越小，病床安排愈加合理；病人公平偏离指数 ψ 越大，病床安排愈加不合理，需要改进病床安排方案。

二、病人最短等待时间模型

在某天第 i 类病人等待入院的总时间为 $\sum_{i=1}^4 \overline{t_{wi}} x_i$ ，为了使病人总体的等待时间达到最短，我们建立了病人总体等待时间最短的目标函数 $\min \sum_{i=1}^4 \overline{t_{wi}} x_i$ ；又因为每天每类病人入院的人数不能超过当天的空床数，因此还有约束条件 $\sum_{i=1}^4 x_i \leq p_e$ 。

综上所述，模型的建立如下：

$$\begin{aligned} \min T(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \sum_{i=1}^4 \overline{t_{wi}} x_i \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \sum_{i=1}^4 x_i \leq p_e \\ x_i \text{ 为正整数, } i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

三、医院高效运转一般模型

医院病床合理的安排，能使医院高效的运转。我们根据第二天拟出院病人数来确定第二天入院病人的类型和人数。

根据思路三的分析，我们制定周一到周日七天病人的入院安排准则，通过准则来排列每天的入院人数的类别优先次序。

首先确定几个参数：

$$\text{星期 } j \text{ 病人出院后的总空床数 } p_e(j) = \sum_{i=1}^4 p_{oi}(j) + p_v(j-1) \quad (i=1,2,3,4; j=1, \dots, 7)$$

$$\text{星期 } j \text{ 等待入院的总人数 } p_w(j) = \sum_{i=1}^4 p_{wi}(j) \quad (i=1,2,3,4; j=1, \dots, 7)$$

下面制定周一到周日七天的病人入院安排准则——

$$\text{星期 } j \text{ 的入院人数 } N_j = \min\{p_w(j-1), p_e(j)\} \quad (j=1, \dots, 7)$$

($p_w(0), p_v(0)$ 中时间的表示为前一一周的周日)

以思路二所罗列的原则对星期 j 的入院人数按类别优先次序来安排，如下表：

	类别优先安排次序
周一	$W \rightarrow SQ \rightarrow B_1$
周二	$W \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$
周三	$W \rightarrow SQ$
周四	$W \rightarrow SQ$
周五	$W \rightarrow SQ$
周六	$W \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$
周日	$W \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$

注： B_1 表示单眼白内障病人； B_2 表示双眼白内障病人； W 表示外伤病人； SQ 表示视网膜疾病以及青光眼病人。特别地，对于患有视网膜和青光眼这两类疾病的病人，应当先按当前视网膜疾病等待入院人数与青光眼等待入院人数的比例 $\frac{m_2}{m_3}$ 安排各自的住院人数，再依照 FTFS 的规则，分别安排两种疾病的入院次序。

四、预约模型

影响实际入院时间的两大因素——外伤和之前入院病人术前准备时间。

首先，我们在不考虑第一个因素的前提下计算病人大致等到入院时间记作 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ ：

其中 $\underline{\theta}$ 取之前各类病人术前准备天数都取最短的条件下，依据医院高效运转模型，计算出的病人最短等待入院时间； $\bar{\theta}$ 取之前各类病人术前准备天数都取最长的条件下，依据医院高效运转模型，计算出的病人最长把等待入院时间。

其次，我们再考虑加入了第一条因素后，时间区间所会产生扰动状况。

从对门诊记录和实际的情况统计观察我们可以了解到，外伤病人的到达服从泊松分布。那么某段时间内外伤病人到达的人数便可视为一个随机变量，记为 $X \sim \pi(\lambda \frac{\bar{\theta} + \underline{\theta}}{2})$ 。

再根据矩估计的思想（样本矩依概率收敛于总体矩），结合给定数据，我们可以估计出参数 $\hat{\lambda}$ 。

根据病人不同的精度要求，我们可以拟定出相应的置信度 α （一般比较大）。令 $P\{0 \leq x \leq \pi_\alpha\} = \alpha$ ，则可以解出 π_α ，即 x 的置信度为 α 的置信区间为 $[0, \pi_\alpha]$ ，得外伤病人等待时间的扰动范围为 $[0, \pi_\alpha \cdot \sigma]$ ，即每天外伤就诊入院的人数范围在 0 到 $\pi_\alpha \cdot \sigma$ 。

（其中 σ 为单位外伤病人所延迟整体进度的时间，根据统计我们可以知道，一天之内周转的病人数目大体为 7，8 人，而外伤病人至多不过 3 人，因而这个 σ 我们大体可以将它控制到 0.2 到 0.3 之间）

最后我们结合以上两大因素的影响，便可轻松地得到病人等待时间区间为 $[\theta, \bar{\theta} + \pi_\alpha \cdot \sigma]$ ，其置信水平为 α 。

注：在实际操作中，若要告知病人大致入住的时间区间并不十分的精确，也可以直接对每天外伤病人数进行统计，在取得均值之后，将 0 至每天外伤病人数最大值作为每天外伤病人数的可能区间，加至不考虑第一个因素的等待时间区间内。

例如在本题目中，经过统计我们可以发现，医院一天之内接收到外伤病人数目最多也没有超过 3 人，甚至最少时候一天之内连一个外伤病人也没有。因此我们可以将外病人的区间就定为 $[0, 3]$ 的区间。

如若其中有极个别的天数中有非常多的外伤病人就诊，那么我们可以认定其为小概率时间，可以忽略不计。

五、医院高效运转退化模型

若该住院部周六、周日不安排手术，但据常识，外伤急症还是得正常手术。因此我们按类别优先次序对周一到周日病人的入院安排准则重新调整，如下表：

	类别优先安排次序
周一	$W \rightarrow SQ \rightarrow B_1$
周二	$W \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$
周三	$W \rightarrow SQ$
周四	W
周五	W
周六	$W \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$
周日	$W \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$

从表中可以看出，周四、周五除了急症病人外没有安排任何种类的病人入院，而从题给出的数据知道外伤急症的人数很少，这样安排就影响了医院的高效运转。因此我们认为医院应对手术时间安排作出必要的调整。

由分析思路五可知：急症天天都是最高的优先权，调整只会在非急症的三个疾病上面。双眼白内障手术分两天完成，并且隔天进行；在规定的白内障手术当天不安排视网膜疾病和青光眼手术。因此我们可以确定另外两种手术时间安排，即在周二、四做白内障手术和在周三、五做白内障手术，其他条件与题相同。

为方便观察、比较，我们作出两种手术时间安排的类别优先安排次序表：

	类别优先安排次序	
	周二、四白内障手术	周三、五白内障手术
周一	$W \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$	$W \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$
周二	$W \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$	$W \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$
周三	$W \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$	$W \rightarrow B_1$
周四	W	$W \rightarrow B_1$
周五	$W \rightarrow SQ$	$W \rightarrow SQ$
周六	$W \rightarrow SQ$	$W \rightarrow SQ$
周日	$W \rightarrow B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow SQ$	$W \rightarrow SQ$

注： B_1 表示单眼白内障病人， B_2 表示双眼白内障病人， W 表示外伤病人， SQ 表示视网膜疾病和青光眼病人。

假设表中每天安排入院的疾病类别都存在，病床数都足够。这样我们可以统计出两种手术时间安排医院每天可能接到的手术任务数；并用周二、四白内障手术时间安排的一天为例进行说明：周四接到的手术任务数为周二的 B_1 和周三的 W 、 B_1 的三类任务。因此，这两种安排每天可能接到的手术任务数可如下表：

	医院接到的手术任务数		
	周二、四	周三、五	
周一	3	3	2
周二	5	2	3
周三	3	5	5
周四	3	3	3
周五	3	3	3
周六	1	1	1
周日	1	1	1

其中，周三、五白内障手术时间安排有两套方案，周一和周二的任务数可由当天手术的情况进行调整；周六、周日只做外伤急症手术。

由以上表述，我们可以得到一下结论：

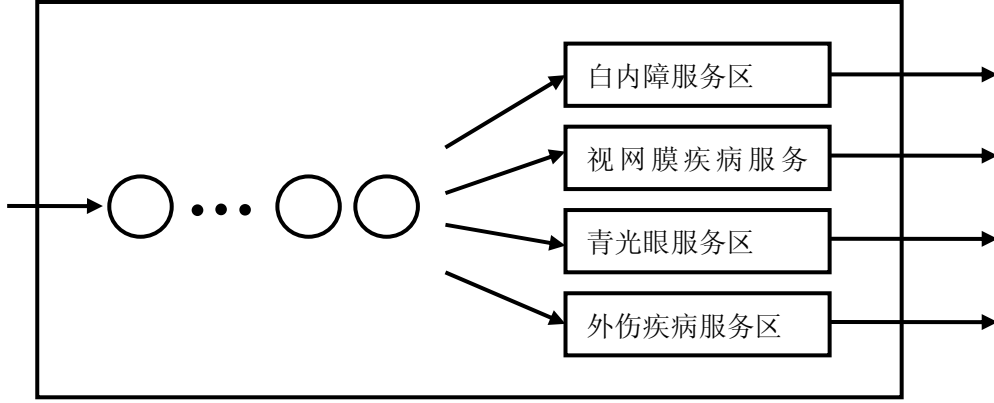
- (1) 周三、五白内障手术时间安排更具灵活性；
- (2) 周三、五白内障手术时间安排的 task 数较周二、四的少；
- (3) 周三、五白内障手术时间安排的入院安排分布较周二、四均匀。

因此，我们认为在该住院部周六、周日不安排手术的情况下，医院应将白内障手术安排在周三、周五做，并且视网膜疾病和青光眼不安排在周三、周五。

六、单队多服务台模型

为了便于管理，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案。

眼科医院的病人主要是患有白内障、视网膜疾病、青光眼以及外伤的四类病人，因此我们将眼科医院中所有的 79 张病床位分为四大部分，每一部分的病床位只供给指定的一类病人使用，所以就形成了四个“单队多服务台”的排队系统。



它们分别可记为 $M/M/C_i$ ($i=1,2,3,4$) (病人服从泊松分布, 病人从入院到出院时间服从负指数分布、每类眼病有 C_i ($i=1,2,3,4$) 个并联的服务台), 并规定各服务台工作相互独立, 且平均服务率相同。则根据排队论的知识, 计算其相关指标:

$$\text{第 } i \text{ 类病人日平均就诊强度 } \rho_i = \frac{\lambda_i}{c_i \mu_i};$$

$$\text{第 } i \text{ 类病人门诊时床位空闲的概率 } P_{oi} = \left[\sum_{k=0}^{c_i-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^k + \frac{1}{c_i!} \cdot \frac{1}{1-\rho_i} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{c_i} \right]^{-1};$$

$$\text{第 } i \text{ 类病人门诊时前有 } n \text{ 个病人等待入院的概率 } P_{ni} = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^n P_{oi} & (n \leq c_i) \\ \frac{1}{c_i! c_i^{n-c_i} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^n P_{oi}} & (n > c_i) \end{cases};$$

$$\text{第 } i \text{ 类病人等待入院平均人数 } L_{qi} = \sum_{n=c_i+1}^{\infty} (n-c_i) P_{ni} = \frac{(c_i \rho_i)^{c_i} \rho_i}{c_i! (1-\rho_i)^2} P_{oi};$$

$$\text{第 } i \text{ 类病人平均住院人数 } L_{si} = L_{qi} + \frac{\lambda_i}{\mu_i};$$

$$\begin{aligned} \text{第 } i \text{ 类病人在院平均逗留时间 } T_{si} &= \frac{L_{si}}{\lambda_i} = \left(L_{qi} + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \frac{1}{\lambda_i} = \frac{L_{qi}}{\lambda_i} + \frac{1}{\mu_i} \\ &= \frac{(c_i \rho_i)^{c_i} \rho_i P_{oi}}{c_i! (1-\rho_i)^2 \lambda_i} + \frac{1}{\mu_i} \end{aligned}$$

下面我们的目标是选择最优的 c_1, c_2, c_3, c_4 。在一定的约束条件下使得所有的病人在系统内的平均逗留时间最短, 即求解如下最优化模型:

$$\begin{aligned} \min T(c_1, c_2, c_3, c_4) &= \sum_{i=1}^4 T_{si} \\ \text{s.t. } &\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 79 \\ 0 < c_i < 79 \\ c_i \text{ 为正整数 } \quad i=1,2,3,4 \end{cases} \end{aligned}$$

七、模型的求解与结果分析

一、模型三的求解

我们随机抽取 2008 年 8 月 11 日至 8 月 17 日各类病人的情况为例。

日 期	前一天等待入院人数	病人出院后的总空床数	病床的安排				
			外伤	白内障	白内障 双眼	青光眼	视网膜 疾病
2008-8-11	84	6	2	0	0	1	3
2008-8-12	84	2	0	0	1	0	1
2008-8-13	89	6	0	0	3	1	2
2008-8-14	96	9	0	1	2	2	4
2008-8-15	93	8	1	1	2	0	4
2008-8-16	94	13	0	4	3	1	5
2008-8-17	87	6	1	2	2	0	1

表一：按 FTFS 准则安排病床的情况

我们随机抽取 2008 年 8 月 11 日至 8 月 17 日各类病人的情况为例。

日 期	前一天等待入院人数	病人出院后的总空床数	病床的安排				
			外伤	白内障	白内障 双眼	青光眼	视网膜 疾病
2008-8-11	84	6	2	0	4	0	0
2008-8-12	84	2	0	0	0	1	1
2008-8-13	89	6	0	6	0	0	0
2008-8-14	96	9	0	0	0	2	7
2008-8-15	93	8	1	0	0	1	6
2008-8-16	90	17	0	0	0	4	13
2008-8-17	83	10	0	0	0	2	7

表二：按医院高效运转一般模型安排病床的情况

分析上述二表我们不难发现，在 8 月 16 日以前，FTFS 准则与医院高效运转模型对于床位的运转并没有出现明显的差异，但实际上这两者的差异是优劣是客观存在的，只是还没有显现出来。

到 8 月 16 日、17 日，医院高效运转模型的优势开始显现——8 月 16 日当天，病人出院后总床数由原先的 13 个增长到了 17 个，等待人数从 94 人下降到了 87 人；到了 8 月 17 日，病人出院后总床数又由原先的 6 个增长到了 10 个，等待人数下降到了 83 人。

这足以证明医院高效模型比原方案对病床的安排更加合理。

二、医院高效运转退化模型的求解

我们随机抽取 2008 年 8 月 11 日至 8 月 17 日各类病人的情况为例。

日 期	前一天等待入院人数	病人出院后的总空床数(个)	病床的安排				
			外伤	白内障	白内障双眼	青光眼	视网膜疾病
2008-8-11	84	6	2	0	0	1	3
2008-8-12	84	2	0	0	0	1	1
2008-8-13	89	6	0	0	6	0	0
2008-8-14	96	9	0	0	0	2	7
2008-8-15	93	8	1	7	0	0	0
2008-8-16	92	15	0	0	0	3	12
2008-8-17	85	8	1	0	0	1	6

表三：在周六、周日不安排手术的条件下，医院高效运转退化模型安排病床的情况

分析上述表二和表三我们可以发现，虽然都是基于医院高效运转模型的原则，但是否天天有开展手术活动，对于医院病床的周转还是有相当影响的。

由于周六、周日没有进行手术，8月16日、17日后，医院病床周转的效率有所下降，但依然可以高于原先的FTFS规则。

这足以证明在三种方案中，医院高效模型最为合理。

三、FTFS 规则与两个医院高效运转模型指标对比

日 期	公平偏离指数		
	FTFS 规则	医院高效运转一般模型	医院高效运转退化模型
2008-8-11	0.00686	0	0.00686
2008-8-12	0.00139	0.00074	0.00694
2008-8-13	0.00286	0	0
2008-8-14	0.02679	0.00043	0.00308
2008-8-15	0.00158	0.00151	0
2008-8-16	0.01415	0.03930	0.00002
2008-8-17	0.00618	0.03279	0.00081

表四：三个模型公平偏离指数的比较

日 期	病床周转率(%)		
	FTFS 规则	医院高效运转一般模型	医院高效运转退化模型
2008-8-14	11.39	11.39	11.39
2008-8-15	10.13	10.13	10.13
2008-8-16	16.46	21.52	16.46
2008-8-17	7.59	12.66	7.59
2008-8-18	5.06	10.13	5.06

2008-8-19	8.86	11.39	16.46
2008-8-20	12.66	17.72	21.51

表五：三个模型病床周转率的比较

分析上述表四、表五我们可以发现，两个医院高效运转模型的公平偏离度都要比 FTFS 的规则有所下降，这表明病人就医更公平；而病床周转也有所提高，这使得病人就医等待时间缩短，这表明医院利用有限的资源更有效的为病人进行服务，我们建立的模型是合理的。通过观察可以知道医院高效运转退化模型是相对来说比较好的，医院高效运转一般模型相对是最好的。

四、单队多服务台模型的求解与分析

单队多服务台模型的求解实际就是求解一个有约束的四元非线性方程的问题，我们可以用搜索法对它进行求解。得到 $c_1 = 34, c_2 = 23, c_3 = 10, c_4 = 12$ 。

八、模型的推广

眼科医院作为一类专科医院，很显然，它的病床分配思路不仅可以在其他床位比较紧张的各类专科医院内使用。

参考文献

- [1]姜启源等，数学模型，北京：高等教育出版社，2003。
- [2]百度知道，泊松分布，<http://baike.baidu.com/view/79815.html?wtp=tt>，2009年9月11日。
- [3]陆传赓，排队论，北京：北京邮电学院出版社，1994。
- [4]徐光辉，随即服务系统，北京：科学出版社，1980。