

# 数码相机定位

## 摘要

本文通过对靶标到像点的成像变换矩阵的研究,进行多次的改进确定一个最优化问题:像坐标点产生两个收敛点、像坐标点与像平面对应点越接近,像坐标点产生的两个收敛点的空间欧式距离就越近和标靶点与像平面点是一一对应这三个特点模型,对标靶点在像平面的像坐标进行搜索,以此找到靶标上圆的圆心在像平面上的像坐标。

在模型一中我们给出了基于空间几何关系的不变性的像坐标计算,本模型考虑了空间几何关系在一般的照相中不变的特征值,通过对像点坐标的三角范围设定,求出在三角范围的重心坐标即为向坐标。

在模型二中我们提出基于成像变换和单摄像机模型的像坐标计算,将成像变换和逆成像变换当作两个互逆的系统进行思考计算,像坐标和标靶圆心的成像变换矩阵在两者相和时是同一的。本模型考虑了照相机的位置对成像的影响。

我们根据题中已知和模型二中的缺陷,改进了模型二,得到了相机模糊成像的像坐标计算模型,即模型三。本模型改进模型二中的未知估计量—焦距 $\lambda$ ,用物距 $d$ 代替焦距 $\lambda$ ,并利用推得到关于成像转换矩阵 $R$ 和 $T$ 的非线性方程。根据方程求出 $R$ 和 $T$ ,带入成像变换中,得到靶标圆心在成像平面的像坐标。

最后,根据模型二中所发现的规律,再对模型二改进,得到了模型四——基于模型二的最优化空间欧式距离的最优化模型。在此模型中,我们假定像坐标与靶标的对应关系是对产生的两个收敛点的空间欧式距离的唯一影响因素,利用模型二或是模型三(我们选择模型二)对像平面的各个像素点进行搜索求解。

以模型二为基础,我们对靶标和像平面进行计算机模拟产生点,以此对模型一到四进行精度的检验。对于此种检验方法,我们对其检验方法进行分析,给出了该方法的检测精度和稳定性。

本文的特色在于在分析了模型二的成像变换矩阵对不同的对应点产生的影响,给出了以收敛点的空间欧式距离为优化求解目标,建立的成像面搜索成像点的模型。通过对近似点附近进行类似网格法的搜索,并以坐标轮换法为原理给出了求解像坐标的方法。

关键词: 成像变换矩阵模型    最优化距离    对应性

目录

摘要.....1

1. 问题分析.....3

2. 模型假设.....3

3. 符号说明与坐标系统假设.....3

    符号说明.....3

    坐标系统假设.....4

4. 模型建立.....4

    模型一.....4

    模型二.....5

    模型三.....8

    模型四.....9

5. 模型求解.....10

    模型一.....10

    模型二.....12

    模型三.....13

    模型四.....13

6. 模型扩展.....14

7. 问题回答.....15

    第一题的回答.....15

    第二题的回答.....15

    第三题的回答.....15

    第四题的回答.....15

8. 参考文献.....17

## 1. 问题分析

图像处理与图像分析问题是一个庞大的问题，数字图像表现出诸多的特征，涉及到很多影响因素。照相机本身、照相机的空间位置，照相机与靶标的相对位置都会影响到物体成像的形状。由于靶标在成像面的成像坐标的预测，关系到系统标定的实现，因此，靶标上的点在成像平面的像坐标的确定十分重要。

为尽可能准确地、快速地预测靶标的成像坐标，须抓住靶标成像的特点，对靶标与成像平面、镜头中心的几何关系进行刻画与数学形式上的描述。可以分别利用几何形状上的或是数字特征结构上的特征，对已知数据进行分析。可以选用变换矩阵来分析靶标点成像平面坐标的变化。

对于评价的模型的方法，我们可以采用计算模拟照相投点，再利用模型进行求解，与已知的比较。而对于“双目成像”的相机位置，可利用已知的坐标进行几何分析，建出模型求解。

## 2. 模型假设

- 1) 照相机的焦距是固定的，不存在照相机自动调焦的情况
- 2) 两架照相机的相对位置固定且两架照相机在空间中位置固定
- 3) 物平面中圆在像平面中成像产生的形变由照像机姿态参数（如照相机位置和方向或平移、扫视角和倾斜角）决定。照相机本身参数（如镜头径向失真、不确定性图像尺度因子）对成像影响较小，可以忽略不计。
- 4) 标靶上的图像对应物平面上的点。

## 3. 符号说明与坐标系统假设

符号说明：

$A_i'$  ( $i = 1..n$ )—物平面上半径相等的圆

$A_i$  ( $i = 1..n$ )—物平面上圆 $A_i'$  ( $i = 1..n$ ) 在像平面的成像闭合曲线。

$O_i'$  ( $i = 1..n$ )—物平面中圆的圆心

$O_i$  ( $i = 1..n$ )— $O_i'$  ( $i = 1..n$ ) 在像平面的成像

$L_{ij}$ —像平面上圆 $A_i$ 与 $A_j$ 的两条外公切线公切线在 $A_i$ 上的两个切点的连线。

( $i = 1..m, j = 1..m$ )

$L_{ij}'$ —物平面上圆 $A_i'$ 与 $A_j'$ 的两条外公切线公切线在 $A_i'$ 上的两个切点的连线。

( $i = 1..m, j = 1..m$ )

$\lambda$ —该照相机的相距，即光学中心到像平面的距离。

$R$ — $3 \times 3$  旋转矩阵。

$r_i$ —矩阵  $R$  中元素。 $(i=1..9)$

$T$ — $1 \times 3$  平移矢量

$\theta, \Phi, \Psi$ —刚体转动中欧拉角

坐标系统假设：

本文共涉及三个坐标系统：

世界坐标系统  $O_W - X_W Y_W Z_W$ ：以客观世界的绝对坐标表示三维场景，世界坐标系中空间的一点  $P_W$  表示为  $(X_W, Y_W, Z_W)$ 。物平面与  $X_W - Y_W$  面重合并且原点  $O_W$  为物平面的中点。

照相机坐标系统  $O_C - X_C Y_C Z_C$ ：三维空间的点在照像机坐标系中一点  $P_C$  表示为  $(X_C, Y_C, Z_C)$ 。该坐标系的原点为数码照相机镜头的光学中心， $Z_C$  轴为光轴。

像平面坐标系  $O - X Y$ ：像平面坐标系中一点  $P$  表示为  $(X, Y)$ 。其原点是照相机坐标系统的  $Z_C$  轴与图像平面的交点， $X$ 、 $Y$  轴分别平行于照相机坐标系统的  $X_C$  轴、 $Y_C$  轴，即照相机坐标系统的  $X_C - Y_C$  平行于像平面。

以上三个坐标系统的单位都为毫米。

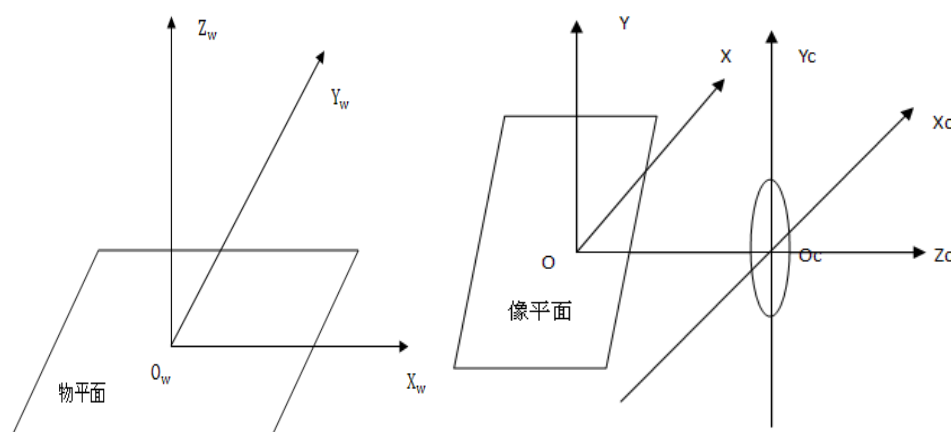


图 1 一坐标系统图

## 4. 模型建立

模型一：利用外公切线确定圆心

原则：像平面上一个圆  $A_i$  与圆  $A_j$  的外公切线的切点连线  $L_{ij}$ ，圆  $A_i$  与圆  $A_k$  的外公切线的切点连线为  $L_{ik}$ ，则  $L_{ij}$  与  $L_{ik}$  的交点即为物平面中圆  $A_i$  的圆心在像平面的成像。

$(i, j, k=1..n)$

原则证明：

如图 2 所示，物平面上一直线经过透镜在像平面的成像仍是直线，则直线上各点经过透镜成像后仍在成像直线上，即不存在某点经透镜成像后不在成像直线

上的情况，也不存在某点在相平面不在该直线上城向后在成像直线上的情况。因此可以推得像平面上两个闭合曲线的外公切线即物平面上对应物像两个圆的外公切线的成像。且物平面两个闭合曲线外公切线的切点对应物像两个圆外公切线的切点的成像。

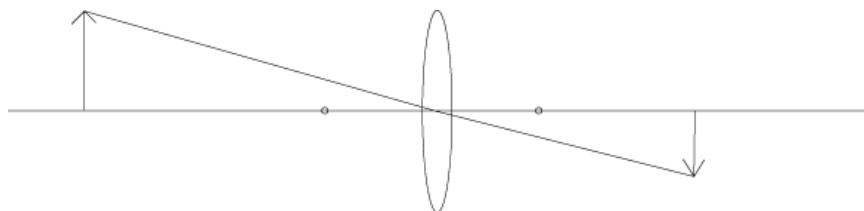


图 2 透镜成像图

因为圆心  $O$  在公切线切点直径交点上、所以成像的闭合曲线上的圆心投影在两条相应切点连线的交点上。

在图 3 中  $A'_1$ 、 $A'_2$ 、 $A'_3$  是物平面内半径相同的圆。 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  是  $A'_1$ 、 $A'_2$ 、 $A'_3$  经过透镜在像平面内成像。

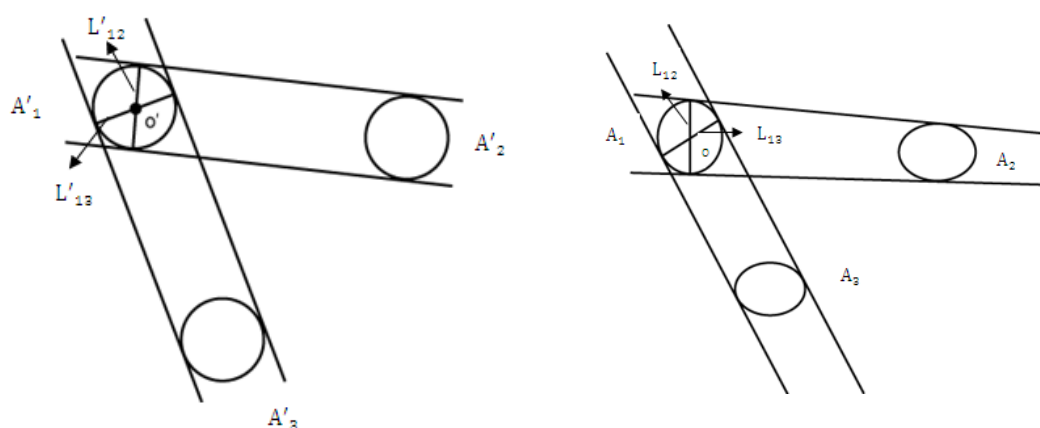


图 3

其中： $L'_{12}$  是  $A'_1$ 、 $A'_2$  外公切线在  $A'_1$  的切点连线， $L'_{12}$  是  $A'_1$  的一条直径。 $L'_{13}$  是  $A'_1$ 、 $A'_3$  外公切线在  $A'_1$  的切点连线，则点  $O'$  即物平面中圆  $A'_1$  的圆心。 $O'$  是  $L'_{12}$  与  $L'_{13}$  的交点，则  $O' \in L'_{12}$ ， $O' \in L'_{13}$ 。 $O$  是  $L_{12}$  与  $L_{13}$  的交点，则  $O \in L_{12}$ ， $O \in L_{13}$ 。因此  $O'$  经过透镜成像即为  $O$  点。

原则推论：

已知任意三个物平面的等半径圆与其经过透镜在像平面的成像闭合曲线，则都可通过原则求出每个圆心成像。

模型二：利用成像变换和照像机模型求解

在忽略照像机的自身产生的形变情况下，照像机的成像变换是唯一确定物体在成像面的形状的。

考虑通用成像模型，从物平面到像平面的成像变换需经过以下变换：

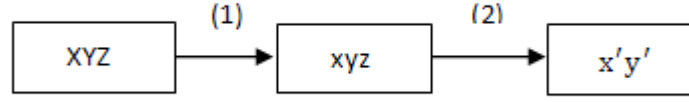


图 4 变换流程

考虑刚体景物的情况，改成像变换可以表示为：

1) 从世界坐标系  $O_w-X_wY_wZ_w$  到照相机坐标系  $O_c-X_cY_cZ_c$  的变换。

由于存在刚体景物的情况，则变换可以表示为：

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T$$

其中， $R$  和  $T$  为从世界系统变换到照相机坐标系统的外部参数。

$R$  为  $3 \times 3$  旋转矩阵，该矩阵实际上是两坐标系统三组对应坐标轴轴间夹角的函数，

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}$$

$T$  是  $1 \times 3$  平移矢量

$$T = [T_x \ T_y \ T_z]^T$$

2) 从照相机三维坐标  $(X_c, Y_c, Z_c)$  到无失真像平面  $(X, Y)$  的变换为

$$X = \lambda \frac{X_c}{Z_c}$$

$$Y = \lambda \frac{Y_c}{Z_c}$$

在已知像点坐标的情况下，可以利用两级标定法[参考文献]求出成像变换矩阵  $R$  和  $T$  可即先标定照相机的外部参数再标定照相机的内部参数。该方法已经广泛应用于工业视觉系统，对三维测量的精度最好可达  $1/4000$ 。

标定步骤：

第一步、计算  $R$  和  $T_x$  与  $T_y$ ，

第二步、计算  $\lambda$ ， $T_z$ 。

计算一组参数  $S_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ )，或  $s=[S_1, S_2, S_3, S_4, S_5]^T$ ，借助这组参数可进一步算出照相机的外部参数。设给定  $M$  个已知世界坐标  $(X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi})$  和它们对应像平面坐标  $(X, Y)$  的点， $i=1, 2, \dots, M$  可以构建一个矩阵  $A$ ，其中的行  $a_i$  可以表示为

$$a_i = [Y_{wi}X, Y_{wi}Y - X_{wi}X - X_{wi}Y, Y_{wi}]$$

再设  $S_i$  与旋转参数  $r_1, r_2, r_4, r_5$  和平移参数  $T_x, T_y$  由如下联系：

$$S_1 = r_1/T_y, S_2 = r_2/T_y, S_3 = r_4/T_y, S_4 = r_5/T_y, S_5 = T_x/T_y$$

设矢量  $\mu = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^T$ ，则由线性方程组

$$AS = \mu$$

可以解出  $s$ 。然后可以根据下列步骤计算各个旋转和平移参数：

步骤一、设  $S=s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2$ , 计算

$$T_y^2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4S_1S_4 - S_2S_3^2}}{2(s_1s_4 - s_2s_3)^2};$$

步骤二、设  $T_y = \sqrt{T_y^2}$  即取正的平方根, 计算

$$r_1 = s_1T_y, r_2 = s_2T_y, r_4 = s_3T_y, r_5 = s_4T_y, T_x = s_5T_y$$

步骤三、选一个世界坐标为  $(X, Y, Z)$  的点, 要求其像平面坐标  $(x, y)$  与图像中心较远, 计算

$$p_x = r_1X + r_2Y + T_x;$$

$$p_y = r_4X + r_5Y + T_y;$$

这相当于将算得的旋转参数应用于点  $(X, Y, Z)$  的  $X$  和  $Y$ 。如果  $p_x$  和  $x$  的符号一致, 且  $p_y$  和  $y$  的符号一致, 则说明  $T_y$  已有正确的符号, 否则对  $T_y$  取负。

步骤四、计算其他旋转参数

$$r_3 = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}, r_6 = \sqrt{1 - r_4^2 - r_5^2}, r_7 = (1 - r_1^2 - r_2r_4)/r_3,$$

$$r_8 = (1 - r_5^2 - r_2r_4)/r_6, r_6 = \sqrt{1 - r_3r_7 - r_6r_8},$$

注意：如果  $r_1r_4 + r_2r_5$  的符号为正, 则  $r_6$  要取负, 而  $r_7$  和  $r_8$  的符号要在计算完焦距  $\lambda$  后调整。

步骤五、建立另一组线性方程来计算焦距  $\lambda$  和  $z$  方向的平移参数  $T_z$ 。可先构建一个矩阵  $B$ , 其中的行  $b_i$  可表示为

$$b_i = [r_4X_i + r_5Y_i + T_y \quad y_i]$$

式中,  $[\bullet]$  表示向下取整。

设矢量  $v$  的行  $v_i$  可表示为

$$v_i = (r_7X_i + r_8Y_i) y_i$$

则由线性方程组

$$Bt=v$$

可解出  $t=[\lambda \quad T_z]^T$ 。这里得到的仅是对  $t$  的估计。

步骤六、如果  $\lambda < 0$ , 要使用右手坐标系统, 需将  $r_3, r_6, r_7, r_8, \lambda$ , 和  $T_z$  取负。

经过数学实验的验证, 当找到两两对应点时, 利用两级标定法求出的成像变换矩阵  $R$  和  $T$  是确定的, 但如果找到的两点不对应, 这里用两级标定法求出的成像变换矩阵  $R$  和  $T$  是不确定, 而是在经过不断的来回调整后趋于两个稳定的对应值, 而这两个稳定的  $R$  和  $T$  对应的坐标的中点基本是不变的。由此, 我们认定这两个稳定坐标的中点就是其在像平面的对应点。

由此，我们给出了有已知的像点和与其不对应的物平面圆的圆心（利用五个圆心的坐标），求出物平面圆的圆心在成像平面的对应像点的坐标的方法：在两个坐标系之间反复利用两级标定法和成像变换，求出稳定的两点的中点。

模型三：基于模型二考虑相机的模糊成像的变换模型：

由于模型二中对焦距  $\lambda$  和  $T_z$  的求解是估计的，这会对收敛点产生影响，而且固定的相机的焦距是固定不动的，也就是镜头中心到成像平面的距离不是焦距，而是题中所给的物距  $d$ ，于是，我们利用物距  $d$  代替焦距  $\lambda$ ，并通过推倒成像变换的过程，给出了如下的改进模型：

由模型二的坐标系统理论，得到：

$$X = \lambda \frac{X_c}{Z_c}$$

$$Y = \lambda \frac{Y_c}{Z_c}$$

上式可变换为：

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{x}{z} = \frac{r_1 * X_w + r_2 * Y_w + r_3 * Z_w + T_x}{r_7 * X_w + r_8 * Y_w + r_9 * Z_w + T_z} \quad (1.1)$$

$$\frac{Y}{\lambda} = \frac{y}{z} = \frac{r_4 * X_w + r_5 * Y_w + r_6 * Z_w + T_y}{r_7 * X_w + r_8 * Y_w + r_9 * Z_w + T_z} \quad (1.2)$$

即：

$$\frac{X}{Y} = \frac{r_1 * X_w + r_2 * Y_w + r_3 * Z_w + T_x}{r_4 * X_w + r_5 * Y_w + r_6 * Z_w + T_y} \quad (1.3)$$

其中：  $X, Y, \lambda$  是已知给定的

外部参数求解：

矩阵  $R$  一共有 9 未知个元素，但实际上只有 3 个自由度，可借助刚体转动的 3 个欧拉角来表示。如图所示：

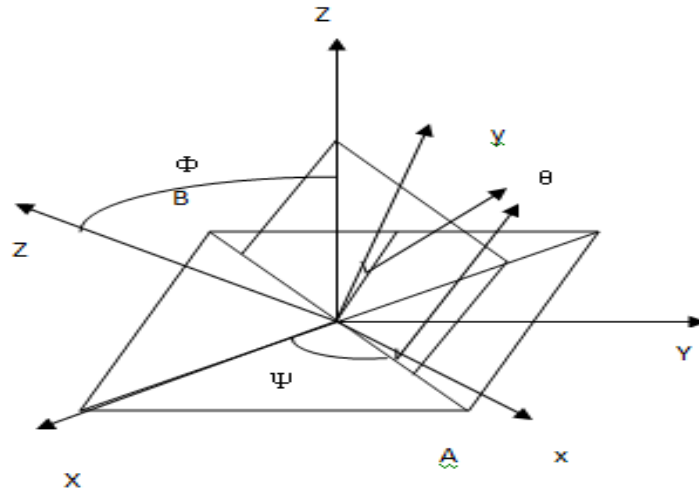


图 5 欧拉角

其中  $XY$  平面和  $xy$  平面的交线  $AB$  称为节线， $AB$  和  $x$  轴间的夹角  $\theta$  是第一个欧拉角，称为自转角，这是绕  $z$  轴旋转的角； $AB$  和  $x$  轴间的夹角  $\Psi$  是第二个欧



拉角,称为进动角,这是绕 Z 轴旋转的角;Z 和 z 轴间的夹角  $\Phi$  是第三个欧拉角,称为章动角,这是绕节点旋转的角。

利用欧拉角可将旋转矩阵表示成  $\theta$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  的函数如下:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \Psi \cos \theta & \sin \Psi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \Psi \cos \Phi + \cos \Psi \sin \theta \sin \Phi & \cos \Psi \cos \Phi + \sin \Psi \sin \theta \sin \Phi & \cos \theta \sin \Phi \\ \sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \theta \cos \Phi & -\cos \Psi \sin \Phi + \sin \Psi \sin \theta \cos \Phi & \cos \theta \cos \Phi \end{bmatrix}$$

这样,共有 6 个独立的外部参数,即 R 中的 3 个欧拉角  $\theta$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  和 T 中的 3 个元素  $T_x, T_y, T_z$ 。[1]

由此,我们建立了由 6 个未知量  $\theta$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $T_x, T_y, T_z$  构成的非线性方程,联立方程组 (1.1) (1.3):

$$\begin{cases} \frac{X}{\lambda} = \frac{x}{z} = \frac{r1 * Xw + r2 * Yw + r3 * Zw + Tx}{r7 * Xw + r8 * Yw + r9 * Zw + Tz} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \frac{X}{Y} = \frac{r1 * Xw + r2 * Yw + r3 * Zw + Tx}{r4 * Xw + r5 * Yw + r6 * Zw + Ty} \end{cases} \quad (1.3)$$

该方程组由 6 个未知量  $\theta$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $T_x, T_y, T_z$  十个方程组构成,可以求得非线性方程组的解。将  $\theta$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  的函数代入方程组 (1.1), (1.3) 可得如下方程组:

$$\begin{aligned} & [\cos \Psi \cos \theta * X_{wi} + \sin \Psi \cos \theta * Y_{wi} + (-\sin \theta) * Z_{wi} + T_x] * Y_i = \\ & [(-\sin \Psi \cos \Phi + \cos \Psi \sin \theta \sin \Phi) * X_{wi} + \\ & (\cos \Psi \cos \Phi + \sin \Psi \sin \theta \sin \Phi) * Y_{wi} + (\cos \theta \sin \Phi) * Z_{wi} + \\ & (\cos \theta \sin \Phi) * Z_{wi} + T_y] * X_i \quad (i=1, 2, 3, 4, 5); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\cos \Psi \cos \theta * X_{wi} + \sin \Psi \cos \theta * Y_{wi} + (-\sin \theta) * Z_{wi} + T_x] * \lambda = \\ & [(\sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \theta \cos \Phi) * X_{wi} + \\ & (-\cos \Psi \sin \Phi + \sin \Psi \sin \theta \cos \Phi) * Y_{wi} + (\cos \theta \cos \Phi) * Z_{wi} + T_z] * X_i \\ & (i=1, 2, 3, 4, 5); \end{aligned}$$

对上述非线性方程组进行求解最后得到变换矩阵 R 与 T。

由上述步骤代替模型二中的两级标定法,得到变换矩阵 R 与 T,在利用此 R 和 T 利用模型二的方法进行圆心的求解。

模型四、基于模型二改进的最优化模型:

对于模型二中,对收敛的两点进行处理,我们假定离正确的对应点越近,两点之间的空间欧式距离就越小,以此,我们建立了基于模型二改进的最优化搜索模型:

$$\text{Min } d(x,y) = |(x_1'', y_1''), (x_2'', y_2'')|;$$

$$S. T. \quad |(x_1'', y_1''), (x_2'', y_2'')| = \sqrt{(x_1'' - x_2'')^2 + (y_1'' - y_2'')^2}$$

$$(X_n, Y_n, Z_n)^T = R_{n-1} * (X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi})^T + T_{n-1}^T;$$

$$(x_1'', y_1'') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{X_{2n-1}}{Z_{2n-1}}, \frac{Y_{2n-1}}{Z_{2n-1}} \right);$$

$$(x_2'', y_2'') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{X_{2n}}{Z_{2n}}, \frac{Y_{2n}}{Z_{2n}} \right);$$

$$R_{n-1} = f(x, y);$$

$$T_{n-1} = g(x, y);$$

该模型中我们对每个像素点进行搜索，如果我们的假设是正确的，那么，在成像平面内就存在一个最优的（收敛点的欧式距离最小），这样搜索出来最优点的就是对应点。

为了提高搜索速度，我们利用内切圆的圆心开始，对五个点采用轮换定解，对单个圆心采用网格搜索，这样，一直到对应像点坐标不在动为止。

## 5. 模型求解

### 模型一

步骤一、求两个闭合曲线外公切线的切点坐标

求两个闭合曲线外公切线的切点坐标算法：

算法描述：

- a) 取任曲两个闭合 L1, L2 曲线上任意两点 A, B 连线。
- b) 以点 A 为轴顺时针旋转连线，B 点的位置随着直线的旋转而变动，直到直线与 L2 有且仅有一个交点时停止旋转，此时 B 点为该交点。
- c) 以点 B 为轴逆时针旋转连线，A 点的位置随着直线的旋转而转动，直到直线与 L1 有且仅有一个交点时停止旋转，此时 A 点为该交点。转 b)。
- d) 直到直线与 L1, L2 各有且仅有一个交点时停止旋转，此时该直线为 L1, L2 的一条外公切线，交点 A, B 即为公切线的切点。
- e) 以点 A 为轴逆时针旋转连线，B 点的位置随着直线的旋转而变动，直到直线与 L2 有且仅有一个交点时停止旋转，此时 B 为该交点。
- f) 以点 B 为轴顺时针旋转连线，A 点的位置随着直线的旋转而转动，直到直线与 L1 有且仅有一个交点时停止旋转。此时 A 点为该交点，转 e)。
- g) 到直线与 L1, L2 各有且仅有一个交点时停止旋转，此时该直线为 L1, L2 的另一条外公切线，交点 A, B 即为该公切线的切点。

执行条件限定：

为了简化算法，减小该算法的时间复杂度。限制旋转轴改变的最大次数 k 为  $k \leq 2000$ 。在搜索过程中，点的个数是有限的，旋转轴改变的最大次数的限定，可以有效的避免因点数不足，导致精确解不存在而使得搜索进入死循环。使得基于存在搜索结果的前提下，搜索结果的准确性最高。

算法评价：

该算法可有效的避免在公切线切点坐标搜索中,误将内公切线当做外公切线搜索出来的现象。只有分别以 A, B 为轴时两直线同向旋转,得到的才是内公切线与闭合曲线切点坐标。

依照以上算法用 matlab 编程求得的切点坐标:

	第一组	第二组	第三组
E	(-66.4021, -56.0847)	(-69.5767 -60.0529)	(-70.3704 -62.6984)
	(-53.7037 -69.8413)	(-50.2646 -65.3439)	(-49.7354 -63.7566)
D	(9.7884, -62.963)	(24.3386, 14.0212)	(26.7196, -57.4074)
	(27.7778, -64.0212)	(10.582, -68.7831)	(11.1111, -69.5767)
C	(28.3069, 20.8995)	(24.3386, 14.0212)	(37.3016, 23.2804)
	(39.418, 5.8201)	(24.3386, 14.0212)	(32.2751, 3.1746)
B	(-22.2222, 28.3069)	(-13.7566, 23.0159)	(-33.0688, 21.6931)
	(-26.7196 , 7.1429)	(-33.0688, 12.1693)	(-13.7566, 13.7566)
A	(-47.8836, 30.4233)	(-60.8466, 21.4286)	(-41.2698, 26.9841)
	(-51.8519, 8.7302)	(-38.8889, 18.254)	(-58.7302, 12.4339)

表一

步骤二、求交点坐标区域

求交点坐标区域算法:

每两个连线都有一个交点,那么三个连线构成三个交点,则交点就在这三个点所构成的三角形区域内。

依照以上算法用 matlab 编程求得的交点坐标区域为:

	每个闭合曲线的圆心在像平面的像坐标(单位: 毫米)		
E	(-60.4246, -62.5603)	(-59.7966, -63.2407)	(-57.5142, -63.3577)
D	(18.90413, -63.4992)	(18.90606, -63.4993)	(18.91534, -63.4921)
C	(34.1809, 12.92757)	(34.57849, 12.38802)	(34.69899, 12.87)
B	(-24.6462, 16.89979)	(-24.3859, 18.12481)	(-23.2767, 17.66897)
A	(-49.8206, 19.83444)	(-49.8154, 19.86283)	(-49.8452, 19.83802)

表二

由于各点的单位均为毫米,且相差不大,则三点围成的三角形面积足够小,可以准确定位圆心在像平面的位置。

步骤三、求交点坐标

取步骤二中求得的区域三角形的重心坐标,该重心坐标即为所求交点坐标。

其中,若已知 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ 则其重心坐标为

$$\left( \frac{X_1+X_2+X_3}{3}, \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3} \right)$$

根据以上算法用 matlab 编程求得交点坐标为

E	(-59.2451, -63.0529)
D	(18.9085, -63.4969)
C	(34.4861, 12.7285)
B	(-24.1029, 17.5645)
A	(-49.8271, 19.8451)

表三

## 模型二

## 步骤一、求闭合曲线内最大内切圆的圆心

假如实物所在的平面与相机坐标的  $z$  轴垂直时，因凸透镜成像的原理，将会在像平面上得到一个和实物大小成比例但形状相同的像，此时实物是五个圆，如果相机坐标的  $z$  轴与这五个圆所在的平面相垂直时，我们应该得到的是五个圆的像，但此时我们得到的是五个类似椭圆的像，所以相机的镜头并没正对着这五个实物圆所在的平面，而是有一定的倾斜。

对于这个类似椭圆的像，我们可以这样理解，相机本来正对着实物所在的平面，得到的也是五个圆的像，但是随着相机的一定倾斜，这五个像的有些部分被拉长了，有些部分没有变化，圆心所成的像往像拉长的方向发生了一定的偏移，这样，我们就猜测，圆心所成的像移动后可能就落在该像最大内切圆的圆心附近处。求闭合曲线内最大内切圆圆心算法：

已知封闭曲线由  $n$  个点  $(x_k, y_k) (k=1 \cdots n)$  连接构成，则  $C_{ij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n-1)$  为封闭曲线上任意两点  $(x_i, y_i), (x_j, y_j) (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n)$  的连线。每个连线  $C_{ij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n)$  都能够构成以  $O_{ij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n-1)$  为圆心， $r_{ij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n-1)$  为半径的圆。设  $d_{kij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n-1, k=1 \cdots n-2)$  为其余各点  $(x_k, y_k) (k=1 \cdots n-2)$  到圆心  $O_{ij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n-1)$  的距离。若  $d_{kij} \geq r_{ij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n-1, k=1 \cdots n-2)$ ，则该连线有内切圆，若  $d_{kij} < r_{ij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n-1, k=1 \cdots n-2)$ ，则该连线没有内切圆。取所有内切圆的最大半径，则该半径所对应的圆即为封闭曲线的最大内切圆，该半径中点的坐标即该闭合曲线内最大内切圆圆心的坐标。

其中： $O_{ij} (i=1 \cdots n, j=1 \cdots n-1)$  的坐标为  $(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{(x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2}}{2}$$

$$d_{kij} = \sqrt{(x_k - \frac{x_i+x_j}{2})^2 + (y_k - \frac{y_i+y_j}{2})^2}$$

根据以上算法用 matlab 编程求得的五个闭合曲线最大内切圆圆心坐标为：

E	(-59.9206, -62.8307)
D	(18.9153, -63.0952)
C	(34.127, 13.7566)
B	(-24.0741, 17.1958)
A	(-49.4709, 20.1058)

表四

步骤二、利用此圆心进行两极标定法对变换矩阵 R 和 T 进行迭代求解  
用 matlab 编程求得 R 和 T 分别为：

$$R = \begin{bmatrix} -0.9829 & 0.0862 & -0.1628 \\ -0.1258 & -0.9597 & 0.2514 \\ -0.2750 & -0.3575 & 0.9302 \end{bmatrix}$$

$$T = [30.3085 \quad 16.7925 \quad -330.5800]^T$$

步骤三、求解物平面中圆心坐标对应的像坐标

求解物平面中圆心坐标对应的像坐标算法：利用成像原理，对标靶圆心利用 R 和 T 进行变换求出其在成像面的像点坐标。当成像点与前两个不同，转步骤二，且将成像点作为新的圆心。在迭代过程中，像平面中的成像点收敛于两个点，求出收敛两点的中点作为解，即为物平面中圆心坐标对应的像坐标

根据以上算法用 matlab 求解像坐标为：

E	(-53.6061, -56.2096)
D	(18.6739, -62.29)
C	(28.5825, 11.5216)
B	(-22.218, 15.87)
A	(-43.7338, 17.7741)

表五

### 模型三

步骤一、求最大内切圆的圆心

求法同模型三

步骤二、利用此圆心进行方程对变换矩阵 R 和 T 进行求解  
用 matlab 编程求得 R 和 T 分别为：

$$R = \begin{bmatrix} 0.9583 & 0.1616 & -0.2359 \\ -0.0687 & 0.9308 & 0.3589 \\ 0.2776 & -0.3277 & 0.9031 \end{bmatrix}$$

$$T = [-15.7962 \quad -29.6407 \quad 496.887]^T$$

步骤三、利用成像原理，忽略相机的本身畸变影响，对标靶圆心利用 R 和 T 进行变换求出其在成像面的像点坐标当成像点与前两个不同，则将成像点作为新的步骤二中的圆心，继续迭代直到求出收敛两点的中点作为解，即为标靶的圆心对应的像坐标。

根据以上算法用 matlab 进行编程解得像坐标为

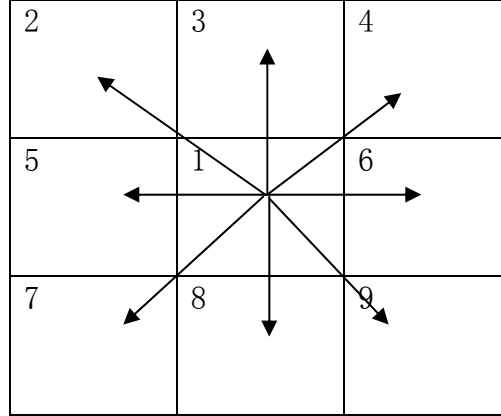
E	(-59.9683, -60.7694)
D	(19.0198, -63.0035)
C	(33.9192, 11.3643)
B	(-23.6090, 16.0509)
A	(-49.7305, 18.1790)

表六

### 模型四

利用多维坐标搜索最优坐标点：

固定四个圆心,对剩下一个圆心周围的像素点进行网格法搜索,找出最优解,从一个圆开始对五个圆反复进行。



图六网格法搜索最优解

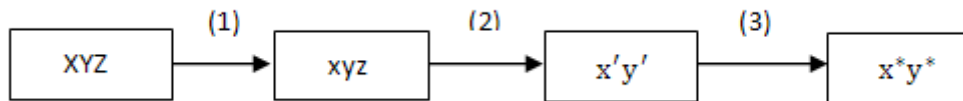
到圆心不动时,便是所求的圆心的像坐标。

## 6. 模型扩展

在以上模型中并没有考虑镜头径向失真(畸变)、不确定性图像尺度因子影响下成像的偏移。由于多数镜头都存在一定的径向失真,但一般对人类视觉的影响不大,不过进行光学测量时还是需要校正的,否则会产生较大的误差。从理论上讲镜头会有两类失真,即径向的和切向的。由于切向失真比较小,一般在工业机器视觉中只需考虑径向失真即可。对于模型三分别引入径向失真因子  $k$  和不确定性图像尺度因子  $s$ , 分别建立数学模型。

基于模型三的引入径向失真因子  $k$  模型:

从物平面到像平面的成像要经过如下阶段:



图七流程图

(1), (2) 两步同模型三的变换方式。(3) 变换为:

从无失真的像平面坐标  $(y', x')$  到受镜头径向失真(畸变)影响而便宜的实际像平面坐标  $(x^*, y^*)$  的变换为

$$x^* = x' - R_x$$

$$y^* = y' - R_y$$

其中,  $R_x$ 和 $R_y$ 代表镜头的径向失真。径向失真可以表示为:

$$R_x = x^*(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \approx x^* k r^2 \quad (1)$$

$$R_y = y^*(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \approx y^* k r^2 \quad (2)$$

其中，

$$r = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}$$

式（1）和（2）中  $k=k_1$ ，这种近似简化的原因是实际中  $r$  的告辞项可以忽略，所以可以步考虑  $k_2$  等，仅考虑  $k_1$  即可。

## 7. 问题回答

第一题的回答：

建立模型一、模型二、模型三、模型四给出了物平面上圆的圆心对应应在像平面上的像坐标的方法。

第二题的回答：

根据模型一、模型二、模型三分别可以求出了物平面上圆的圆心对应应在像平面上的像坐标。

第三题的回答：

检验模型方法：利用在投点的方法对模型进行再求解，比较求解结果与已知结果。

具体方法：将 B 圆在正方形标靶的 AC 边上移动，到据 C 圆圆心 30mm 处。固定新的标靶，人为的给出变换矩阵 R 和 T。在新的标靶的五个圆上分别取 200 个点，利用变换矩阵 R 和 T 给出它们在成像面的坐标。利用我们的模型对这些点进行处理，给出圆心在成像面的像坐标。比较模型求出的像坐标和利用变换矩阵 R 和 T 变换原来圆心，利用空间欧式距离定义模型的精度。

以下给出了一组的模拟值：

	实际坐标	像坐标
E	(-59.9695, -60.7668)	(-59.9698, -60.7669)
D	(19.023, -63.0034)	(19.0229, -63.0034)
C	(33.9197, 11.3611)	(33.9198, 11.3613)
B	(-23.6112, 16.0498)	(-23.6112, 16.0498)
A	(-49.7341, 18.1788)	(-49.4964, 17.3714)

表七

精确度分析：这种检验方式利用照相机的变换矩阵进行逆投影，在假设不考虑相机产生的畸变，这种逆投影是精确的，对模型的检验的精度是足够高的。

稳定性分析：通过对不同的数据的检验，每次的结果的误差都不大，由此可见，这种检验模型的方法是稳定有效的。

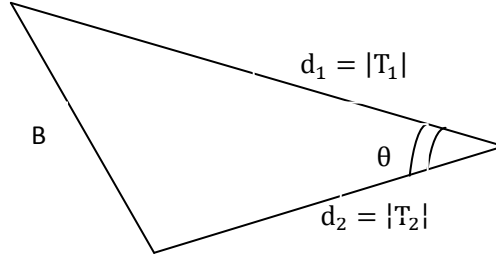
第四题的回答：

1) 利用模型二求解：

利用模型二给出两个相机的变换矩阵 R 和 T，有

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \end{bmatrix} + T;$$

分别给出标靶原点在两个相机镜头的坐标：T 和 T'。



图八

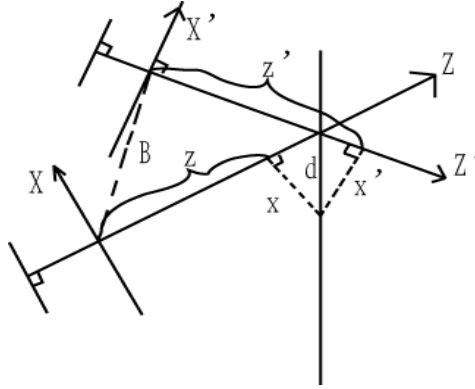
由上图的空间几何结构得到：

$$B^2 = |T|^2 + |T'|^2 - 2 * T \cdot T'$$

2) 分别利用 XOZ 平面和 YOZ 平面上的投影：

利用模型二，可以给出靶标中心点在两个相机的坐标系上坐标  $(x, y, z)$  和  $(x', y', z')$ 。

利用几何图形，给出了如图的简化三角形模型，



图九

由余弦定理，得到：

$$B_x^2 = \left( Z + \sqrt{d^2 - x^2} \right)^2 + \left( Z' - \sqrt{d^2 - x'^2} \right)^2 - 2 * \left( Z + \sqrt{d^2 - x^2} \right) * \left( Z' - \sqrt{d^2 - x'^2} \right) * \cos \theta;$$

其中

$$\theta = 2\Pi - \arccos \frac{x}{d} - \arccos \frac{x'}{d};$$

同理，得到

$$B_y^2 = \left( Z + \sqrt{d^2 - y^2} \right)^2 + \left( Z' - \sqrt{d^2 - y'^2} \right)^2 - 2 * \left( Z + \sqrt{d^2 - y^2} \right) * \left( Z' - \sqrt{d^2 - y'^2} \right) * \cos \varphi;$$

其中



$$\varphi = 2\Pi - \arccos \frac{y}{d} - \arccos \frac{y'}{d};$$

结合上述的两个正交平面的投影，得到：

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

## 8. 参考文献

- [1] 章毓晋，图像工程（上、中、下），北京：清华大学出版社，2006