第29卷第1期　　数学的实践与认识　　Vol. 29 No. 1
1999年1月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1999

投资组合模型

伍仕刚　　孟宪丽　　胡子昂
指导教师：　数学建模教练组
(杭州电子工业学院，杭州 310027)

编者按　该文正确建立了数学模型——多目标决策模型，用以解决 A 题的投资组合问题. 通过偏好系数加权法将多目标决策问题化为单目标决策模型——非线性规划，并简化为线性规划问题求解，还用参数规划技术解出了 $n=4$ 的详细结果. 本文的特点在于考率了一个问题：到底 M 多大时，非线性规划与其简化形式有相同解？这文中定理 1 给出一个充分条件，可以对于具体问题作出判定，所得简化的线性规划问题的最优解也是原来非线性规划问题的最优解.

摘　要　本文建立了考虑交易费用情况下的市场资产组合投资模型，并采用偏好系数加权法对资产的预期收益和总风险进行评价，给出在不同偏好系数下的模型最优解. 然后模型讨论了一般情况下的最优投资求解方法，给出定理，在总金额大于某一量值时，可化为线性规划求解.

一、问题提出（略）

二、基本假设（略）

三、符号说明

n：市场上可用于投资的资产数；　M：投资者拥有的总投资额；
x_0：投资于银行的存款额；　x_i 对第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 种资产 S_i 的实际投资额；
w_i：对第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 种资产的投资比重；　R 投资者最终所获得的净收益；
Q：投资者的风险损失金额；　ξ_i：资产 S_i 在该段时期内的预期收益率；

$$r_i=E[\xi_i],\qquad q_i=\sqrt{D[\xi_i]};$$

p_i：购买资产 S_i 时所需付的交易费率.

四、问题分析

由于资产预期收益的不确定性，导致它的风险特性，资产的风险用预期收益率的方差来表示. 在这里，投资 S_i 的平均收益为 x_ir_i 风险损失为 x_iq_i.

要使投资者的净收益尽可能大，而风险损失尽可能小，一个解决办法就是进行组合投资，分散风险，以期获得较高的收益，模型的目的就在于求解最优投资组合. 当然最优投资还决定于人的因素，即投资者对风险、收益的偏好程度，怎样解决二者的相互关系也是模型要解决的一个重要问题.

五、模型建立及求解

投资者的净收益为购买各种资产及银行的总期望收益除去在此过程中的交易费用.

在对资产 S_i 进行投资时，对于投资金额 x_i 的不同，所付的交易费用也有所不同：不投资时不付费，投资额大于 u_i 时交易费为 $x_i p_i$，否则交易费为 $u_i p_i$. 记

$$\varphi_i=\begin{cases}0, & 当\ x_i=0,\\ u_i & 当\ 0<x_i\le u_i,\ (i=1,2,\cdots n)\\ x_i & 当\ x_i>u_i,\end{cases} \tag{1}$$

则购买资产 S_i 所付的交易费为 $p_i\varphi_i$. 由于投资银行时勿需交易费，所以总交易费用为 $\sum_{i=1}^{n}p_i\varphi_i$. 投资者的净收益

$$R=x_0r_0+\sum_{i=1}^{n}x_iE[\xi_i]-\sum_{i=1}^{n}p_i\varphi_i. \tag{2}$$

在对单个资产进行投资时，风险损失金额为风险损失率与投资数额的乘积. 组合投资时，投资者所要承担的风险采用所投资产中风险损失金额的最大值来度量，即

$$Q=\max_{1\le i\le n}\{x_iq_i\} \tag{3}$$

- 多目标投资决策模型

问题的目标在于使净收益尽可能大，总体风险尽可能小，根据上面的讨论，可建立存在无风险投资（即存银行生息）时，资产组合投资决策的多目标数学模型：

$$\begin{aligned}
&\max\ R=x_0r_0+\sum_{i=1}^{n}x_iE[\xi_i]-\sum_{i=1}^{n}p_i\varphi_i.\\
&\min\ Q=\max_{1\le i\le n}\{x_iD[\xi_i]\}.\\
&\text{s.t.}\quad x_0+\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\varphi_ip_i=M,\\
&\qquad \varphi_i=\begin{cases}0, & (x_i=0),\\ u_i & (0<x_i\le u_i),\\ x_i, & (x_i>u_i)\end{cases}\\
&\qquad x_0\ge 0,\ x_i\ge 0,\qquad (i=1,2,\cdots,n).
\end{aligned} \tag{4}$$

为便于以后的求解和论证，将目标函数 $\min Q$ 变换成等价形式， $\min Q=Q$ 并且附加约束条件

$x_iD[\xi_i] \le Q(i=1,2,\cdots,n)$. 上述模型可化为等价的多目标规划模型:

$$
\begin{aligned}
&\max\ R = x_0r_0 + \sum_{i=1}^{n} x_iE[\xi_i] - \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i, \\
&\min\ Q = Q, \\
&\text{s.t.}\quad x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i p_i = M, \\
&\qquad \varphi_i = \begin{cases} 0, & (x_i = 0), \\ u_i & (0 < x_i \le u_i), \\ x_i, & (x_i > u_i) \end{cases} \\
&\qquad x_0 \ge 0,\ x_i \ge 0, \qquad (i = 1,2,\cdots,n).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

- 偏好系数加权法

在实际投资中，投资者总是权衡资产风险和预期收益两个方面，选择一个令自已满意的资产组合进行投资，这种满意的资产组合称为有效资产组合. 因此分别对目标函数 R 和 Q 赋予权重 $1-\lambda$ 和 $\lambda,(0<\lambda\le 1)$, 将 (5) 式化为单目标规划模型:

$$
\begin{aligned}
&\min\ W = \lambda\cdot Q - (1-\lambda)\left[x_0r_0 + \sum_{i=1}^{n} r_ix_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right], \qquad (0<\lambda\le 1), \\
&\text{s.t.}\quad x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i p_i = M, \\
&\qquad \varphi_i = \begin{cases} 0, & (x_i = 0), \\ u_i & (0 < x_i \le u_i), \\ x_i, & (x_i > u_i) \end{cases} \\
&\qquad x_iq_i \le Q \\
&\qquad x_0 \ge 0,\ x_i \ge 0, \qquad (i = 1,2,\cdots,n)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

加权系数 λ 称为投资偏好系数，代表了投资者对风险的厌恶程度，实际计算中，λ 的值由投资者自已来决定.

(6) 式是一个带约束条件的非线性规划问题，一般可用罚函数法化为无约束非线性规划，再利用多维空间的单纯形法，通过计算机编程进行求解. 不过这种方法过于复杂且缺乏一定的稳定性，因此有必要寻求一种较为简单的方法.

由于交易费用的分段性，造成目标规划 (6) 的非线性，如果考虑所投总资产数量相当大的情况，认为对某种资产 S_i, 只存在不投资和投资额大于 u_i 两种情况，即不考虑 u_i 对交易费用的影响，而且后面有定理可以证明，当 M 大于某一值时，投资额的确只有以上两种情况. 如以投资权重 w_i 为

变量，这时 (6) 式可化如下的为线性规划模型：

$$\min Z = \lambda \cdot Q - (1-\lambda)\left[w_0 r_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i w_i - \sum_{i=1}^{n} p_i w_i\right], \qquad (0 < \lambda \le 1),$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{i=1}^{n} p_i w_i = M, \\ & w_i q_i \le Q, \\ & w_0 \ge 0,\ w_i \ge 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{7}$$

对此线性规划模型进行求解．给定投资偏好值 λ，利用数学软件 Maple V4.0 进行求解，代码如下 (以问题 1 的数据为例且取 $\lambda = 0.7$)：

```
with(simplex);
cnsts := {w1 + w2 + w3 + w4 + w0 + 0.01*w1 + 0.02*w2 + 0.045*w3 + 0.065*w4 = 1};
obj := -0.3*(w1*0.28 + w2*0.21 + w3*0.23 + w4*0.25 + w0*0.05
        - 0.01*w1 - 0.02*w2 - 0.045*w3 - 0.065*w4) + 0.7*Q; 4
 minimize(obj, cnsts  union {w1 >= 0, w2 >= 0, w3 >= 0, w4 >= 0, w0 >= 0,
        Q >= 0, w1 * 0.025 - Q <= 0, w2*0.015 - Q <= 0, w3*0.055
           - Q <= 0, w4*0.026 - Q <= 0});
```

输出结果为 $\{w1 = 0.99009, w0 = 0, w2 = 0, w3 = 0, w4 = 0, Q = 0.024753\}$.

六、模型扩展 (略)

参 考 文 献

[1] 文显武，国际投资，武汉大学出版社，武汉， 1998.

[2] [美] J.P. 伊格尼齐著，李毅华译，单目标和多目标系统线性规范，同济大学出版社，上海， 1986.

[3] 管梅谷，线性规划，山东科学技术出版社，济南， 1983.

附 录 (略)