

## 制动器试验台驱动电流控制方法的设计

### 摘要

转动惯量的电模拟技术在汽车制动器试验台系统中有着广泛的应用，其中，驱动电流的控制方法是该技术的核心。本文通过合理假设和仔细分析，对题目提出的六个相关问题做了详细解答。

对问题一，直接利用题中已给出的数据，根据相关物理知识，计算求解出等效的转动惯量为  $52.0\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。

对问题二，根据转动惯量计算公式，分别计算出三组飞轮的转动惯量依次为  $30.0083\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ， $60.0166\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ， $120.0332\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ，并根据飞轮的不同组合共列出了 8 组机械惯量的值，取其中与问题一等效转动惯量最接近的一组作为机械惯量，计算出需要补偿的惯量为  $11.99\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。

对问题三，首先根据理论情况下制动过程中制动力矩和电动机产生力矩恒定的假设，以能量补偿为依据，根据物理学中功能关系，建立了确定电动机驱动电流的基本能量补偿模型。在此基础上，将理论情形推广到实际情形，通过将能量补偿过程分段，根据观测值确定每小段时间实际补偿能量与理论上应补偿能量的差值，对每一时间段内的实际补偿能量尽行修正，建立确定电动机驱动电流的分段能量补偿模型。然后通过已建立的基本能量模型，对问题三求解，得到制动过程中驱动电流为  $174.75\text{A}$ ，并作了简要的结果分析和敏感性分析。最后，在模型改进中就实际情况中制动时间不能事先准确估计的情形，对基本能量模型进行了分析和改进，建立了能量非均匀补偿模型。

对问题四，首先对已给出的控制执行的直观结果进行了简要的定性评价，然后就该试验结果与路试过程的理论结果间的能量误差、角速度误差、角加速度误差等评价指标做了定量的计算，得到能量相对误差为 5.5%，角速度平均相对误差为 1.06%，平均角加速度相对误差为 3.71%。最后，根据计算得到的评价指标，对该控制方法的结果作了综合评价。

对问题五，首先根据问题三建立的基本能量补偿模型，通过将控制过程离散许多小段，并通过比较每小段起始角速度观测值与理论值的差距，对该时间段的角速度进行实时修正。然后，由此设计出每个小时间段内，驱动电流依赖前一段时间瞬时转速和瞬时扭矩的角速度实时矫正控制方案。最后，对该方案做了定性评价。

对问题六，首先分析了问题五中设计的控制方案存在角速度向理想值方向矫正不足的缺陷，在此基础上采用灰色理论中的 GM(2,1)模型预测下一段时间角速度与理想值的差距，然后通过预测出来的差距对该段时间的角速度进行修正，设计出基于 GM(2,1)的角速度误差预测控制方案。然后对此方案做了定性评价。最后，将该方案与基于神经网络的误差预测控制方案和单神经元自适应 PID 控制方案进行了比较。

**关键词：**转动惯量模拟 能量补偿 实时控制 GM(2,1)灰色预测

## 一、问题重述

汽车的行车制动器（以下简称制动器）直接关系到车辆和驾车人员的安全。为了检验制动器的优劣，需要在各种不同情况下对其进行大量路试。但是，车辆设计阶段无法路试，只能在专门的制动器试验台（以下简称试验台）上对所设计的路试进行模拟试验。

制动器试验台一般由安装了飞轮组的主轴、驱动主轴旋转的电动机、底座、施加制动的辅助装置以及测量和控制系统等组成。被试验的制动器工作时会使主轴减速（通常试验台仅安装、试验单轮制动器）。模拟试验的原则是试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。

当施加的制动力矩一定时，路试车辆车轮的等效转动惯量和模拟实验中主轴以及安装在其上的飞轮的转动惯量基本决定了各自的运动情况，因此转动惯量的等效模拟是模拟试验的关键。

路试车辆车轮的等效转动惯量可依能量等效由车辆平动时具有的能量得出。传统的试验台模拟的转动惯量只有机械转动惯量，由在主轴上安装飞轮实现，但这种传统方法存在许多缺点。为此，可由电动机在电流控制下产生扭矩模拟出一部分转动惯量来达到转动惯量等效，电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比。

在制动过程中，电动机驱动电流与时间之间的精确关系是很难得到的。原题给出了一种工程实际中常用的计算机控制方法：把整个制动时间离散化为许多小的时间段，然后根据前面时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩，设计出本时段驱动电流的值，这个过程逐次进行，直至完成制动。

评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小。题目对误差的来源也作了说明。

要求解答以下问题：

1. 设车辆单个前轮的滚动半径为  $0.286\text{ m}$ ，制动时承受的载荷为  $6230\text{ N}$ ，求等效的转动惯量。
2. 飞轮组由 3 个外直径  $1\text{ m}$ 、内直径  $0.2\text{ m}$  的环形钢制飞轮组成，厚度分别为  $0.0392\text{ m}$ 、 $0.0784\text{ m}$ 、 $0.1568\text{ m}$ ，钢材密度为  $7810\text{ kg/m}^3$ ，基础惯量为  $10\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，求可能组合成的机械惯量。设电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为  $[-30, 30]\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，对于问题 1 中得到的等效的转动惯量，求需要电动机补偿的惯量。
3. 建立电动机驱动电流依赖于可观测量的数学模型。并在问题 1 和问题 2 的条件下，假设制动减速度为常数，初始速度为  $50\text{ km/h}$ ，制动  $5.0\text{ s}$  后车速为零，计算驱动电流。
4. 对于与所设计的路试等效的转动惯量为  $48\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，机械惯量为  $35\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，主轴初转速为  $514\text{ 转/分钟}$ ，末转速为  $257\text{ 转/分钟}$ ，时间步长为  $10\text{ ms}$  的情况，用某种控制方法试验得到的数据见附表。对该方法执行的结果进行评价。
5. 按照第 3 问导出的数学模型，给出根据前一个时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩，设计本时间段电流值的计算机控制方法，并对该方法进行评价。
6. 第 5 问给出的控制方法是否有不足之处？如果有，请重新设计一个尽量完善的计算机控制方法，并作评价。

## 二、问题分析

问题一与问题二只需通过题目中给出的相关提示，就问题中给出的数据直接求解即可。

问题三要求建立电动机驱动电流依赖可观测值的数学模型。可观测值为试验台工作时主轴的瞬时转速和瞬时扭矩，模型中还可能含有转轴起始转速和末转速等已知量。电流与电动机产生的扭矩成正比，电动及扭矩做的功用来试验台试验过程中由于机械能不足而缺损的能量。若能通过已知数据计算出试验台由于机械能不足而缺少的能量，即可通过力学规律计算出扭矩，从而确定驱动电流。

问题四要对通过某种控制方法得到的试验台执行结果进行评价，就要确定进行评价的定量指标。题目中已经告诉我们，评价一个控制方法优劣的重要数量指标就是试验的能量误差，因此可以通过计算能量误差这一指标对该控制方法进行定量评价。鉴于此，还可以通过数据表中已经给出的数据，计算诸如角速度误差等指标进行定量评价。

问题五需要根据问题三建立的数学模型，根据控制过程中前一个时间段可观测的瞬时转速和瞬时扭矩，设计出本段时间内电动机驱动电流的控制方案。对于本问题，由于试验制动时间非常短，因此控制过程必须是以当前参数为调整依据的动态实时过程。所谓控制，应该包括观测当前参数，计算比较当前参数值与理论值的差距，以及通过这一差距作出调整这三个过程。因此，本问题的控制方案应该遵循这一原则进行设计。

问题六要求分析问题五中设计的控制方案的不足，就如何改进不足设计一个更加完善的方案。

## 三、模型假设

1. 汽车在制动过程中作匀减速运动。
2. 车轮平动时的载荷所具有的能量仅考虑其平动的动能，不记车轮转动时的动能。
3. 重力加速度值取  $9.8 N/kg$ ，对求解本问题是准确的。
4. 电动机产生的扭矩仅与电流成正比，不考虑其他外界因素影响。
5. 模拟实验中，认为主轴的角速度与车轮的角速度始终相等。
6. 理论情况下制动过程中制动力矩和电动机产生力矩恒定
7. 控制方案的电流计算时间可以忽略，电动机的电流可根据前一段时间的转速等指标在一瞬间改变，即不考虑控制过程的延时。
8. 观测值测得的数据是准确的。
9. 试验台轴承摩擦等外界机械损耗忽略不记。
10. 设计控制方案时，不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

## 四、符号系统

符号	意 义	单位
$F$	汽车车轮平动时受到的载荷	$N$
$g$	重力加速度	$N/kg$
$R$	汽车车轮半径	$m$
$r_1, r_2$	$r_1$ —飞轮的外径, $r_2$ —飞轮的内径	$m$
$h_i$	第 $i$ 个飞轮的厚度	$m$
$\rho$	飞轮密度	$kg/m^3$
$J_i$	第 $i$ 个飞轮绕轴心的转动惯量	$kg \cdot m^2$
$J_d$	等效惯量	$kg \cdot m^2$
$J_e$	机械惯量	$kg \cdot m^2$
$\omega_b$	试验台制动过程转轴起始角速度	$rad/s$
$\omega_e$	试验台制动过程转轴末角速度	$rad/s$
$k$	电动机驱动电流与其产生的扭矩的比例系数	$A/N \cdot m$
$I$	电动机驱动电流	$A$
$M$	试验台制动过程中制动力的扭矩	$N \cdot m$
$M_e$	试验台制动过程中电动机产生的扭矩	$N \cdot m$
$W$	电动机补偿的能量	$J$
$W_1$	路试时制动器制动过程中消耗的能量	$J$
$W_2$	试验台上制动器制动过程中消耗的能量	$J$
$T$	理想路试条件下制动过程总时间	$s$
$n$	将总制动时间分为的段数	——
$T_i$	第 $i$ ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 段时间的长度	$s$
$t_i$	第 $i$ ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) 时刻的时间	$s$
$\omega_i$	$t_i$ 时刻的理想角速度	$rad/s$
$\omega'_i$	$t_i$ 时刻测量的角速度	$rad/s$
$M_i$	$t_i$ 时刻测量的制动力力矩	$N \cdot m$
$M_{ei}$	$T_i$ 时间段控制电流生产的电动力力矩	$N \cdot m$
$\beta_i$	实际过程中 $T_i$ 时间段的预期角加速度	$rad/s^2$

## 五、问题一与问题二的求解

### 5.1 问题一的求解

汽车单个车轮会受到作用在上面的垂直向下的载荷, 该载荷的大小为  $F$ 。当汽车平

动时, 该载荷具有动能。当在试验台上对汽车制动过程进行模拟试验式, 需要将这部分能量等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量。

设制动时承受的载荷的等效质量为  $m$ , 则

$$F = mg$$

其中  $g$  为重力加速度。

载荷平动时具有的动能与飞轮和主轴等机构转动时具有的能量, 则有

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J_d\omega^2 \quad (1.1)$$

其中  $J$  为飞轮和主轴等构件的转动惯量,  $\omega$  为飞轮转动的角速度,  $v$  为汽车平动的速度。

试验台为模拟汽车制动过程, 需要保证飞轮的角速度  $\omega$  与汽车车轮的角速度相等, 从而  $v = \omega R$ , 其中  $R$  为汽车车轮半径。将  $v = \omega R$  代入上式有

$$\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 = \frac{1}{2}J_d\omega^2$$

从而得到等效转动惯量表达式为

$$J_d = \frac{FR^2}{g} \quad (1.2)$$

由车轮载荷  $F = 6230N$ , 车轮半径  $R = 0.286m$ , 取重力加速度为  $9.8N/kg$ , 代入上式计算得等效转动惯量为

$$J_d = 52.0kg \cdot m^2$$

## 5.2 问题二的求解

三个飞轮均为空心圆盘, 由物理知识知道, 质量为  $m$ , 内外半径分别为  $r_2$  和  $r_1$  的空心圆盘绕中心轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$$

从而三飞轮的转动惯量为

$$J_i = \frac{1}{2}m_i(r_1^2 + r_2^2), i = 1, 2, 3$$

其中  $m_i (i = 1, 2, 3)$  为三个飞轮的质量, 三个飞轮的厚度为  $h_i$ , 则

$$m_i = \rho V_i = \pi(r_1^2 - r_2^2)h_i\rho$$

将上式代入  $J_i$  得表达式, 得到三个飞轮的转动惯量为

$$J_i = \frac{1}{2}\pi(r_1^4 - r_2^4)h_i\rho, i = 1, 2, 3$$

根据题目给出数据,  $h_1 = 0.0392m, h_2 = 0.0784m, h_3 = 0.1568m$ , 飞轮外径  $r_1 = 1m/2 = 0.5m$ , 内径  $r_2 = 0.2m/2 = 0.1m$ , 密度  $\rho = 7810kg/m^3$ , 计算得三个飞轮的转动惯量分别为

$$J_1 = 30.0083kg \cdot m^2$$

$$J_2 = 60.0166kg \cdot m^2$$

$$J_3 = 120.0332kg \cdot m^2$$

共三个飞轮, 因此可以组成  $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8$  组机械惯量, 分别为: 10, 40.0083, 70.0166, 100.0249, 130.0332, 160.0451, 190.0498, 220.0581  $kg \cdot m^2$ 。

第一问等效转动惯量为  $52.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，应使机械惯量尽可能接近该等效转动惯量，因此机械转动惯量取  $40.0083 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，从而电动机补偿的惯量大小为

$$52.00 - 40.0083 = 11.99 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

## 六、问题三模型的建立与求解

### 6.1 建模前的分析

通常情况下机械惯量是小于等效惯量的，对于不足的机械惯量需要通过电动机在电流作用下产生扭矩进行补充。而扭矩与电流是成正比关系的，因此只需计算出扭矩即可得到要加给电动机的驱动电流。

可观测量包括试验台工作时主轴的瞬时转速与瞬时扭矩，因此可以得到某一固定时间段内试验主轴的初始转速，若已知这一时间段末的转速，由于等效惯量和机械惯量是确定的，根据功能关系即可得出这段时间内电动机应该补偿的能量大小。

再根据电动机产生的扭矩与这段时间内应补偿的能量小之间的关系，即可计算出扭矩大小，从而计算出电动机驱动电流值。

### 6.2 模型的建立

#### 6.2.1 基本能量补偿模型的建立

根据物理学中的基本的功能关系，确定理想情况下的基本能量补偿模型。该理想情况为整个制动过程中制动力矩  $M$  恒定，电动机扭矩  $M_e$  恒定。

##### 1. 由于机械惯量不足而缺少的能量 $\Delta E$ 的确定

根据题意，电动机需要补偿由于试验台制动过程中由于机械惯量不足而缺少的能量，这部分能量应等于制动过程中等效惯量的能量变化与机械惯量的能量变化之差。

制动过程中，等效惯量的能量变化为等效惯量起始时刻的动能与末时刻动能之差，即

$$E_1 = \frac{1}{2} J_d (\omega_b^2 - \omega_e^2)$$

其中  $J_d$  为等效惯量， $\omega_b$  为制动过程初始时主轴的转速， $\omega_e$  为制动过程末尾时主轴的转速。

同理，机械惯量的能量变化为

$$E_2 = \frac{1}{2} J_e (\omega_b^2 - \omega_e^2)$$

式中  $J_e$  为机械惯量。

因此，这一制动过程中等效惯量的能量变化与机械惯量的能量变化之差，即为制动过程中由于机械惯量不足而缺少的能量。这部分能量为

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{1}{2} (J_d - J_e) (\omega_b^2 - \omega_e^2) \quad (3.1)$$

##### 2. 角速度 $\omega$ 、角加速度 $\beta$ 、制动力矩 $M$ 之间关系确定

由物理学知识，扭矩等于角加速度与转动惯量的乘积。因此制动力产生的扭矩  $M$  应

等于等效惯量  $J_d$  与角加速度  $\beta$  的乘积, 即

$$M = J_d \beta \quad (3.2)$$

根据汽车制动过程为制动扭矩  $M$  恒定的假设, 可以判断这一制动过程中车轮的角加速度  $\beta$  为定值。

制动初始时刻转轴的角速度为  $\omega_b$ , 则经过时间  $t$  后主轴转速为

$$\omega = \omega_b - \beta t \quad (3.3)$$

### 3. 电动机补偿的能量 $W$ 的确定

制动过程经历的时间为  $T$ , 期间电动机产生的扭矩  $M_e$  做的功为

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_e d\theta = \int_0^T M_e \omega dt \quad (3.4)$$

### 4. 电动机产生的扭矩 $M_e$ 的确定

电动机应全部补偿由于机械惯量不足而缺少的能量, 因此  $W = \Delta E$ , 即

$$\frac{1}{2}(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2) = \int_0^T M_e \omega dt \quad (3.5)$$

制动过程中  $M_e$  不随时间变化, 可从积分号中提出。从而由(3.1)~(3.4)即可解得电动机产生的扭矩为

$$M_e = \frac{J_d(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2)}{2\omega_b T J_d - M T^2} \quad (3.6)$$

再由末角速度

$$\omega_e = \omega_b - \frac{M}{J_d} T$$

代入(3.6)式, 得到

$$M_e = M \left(1 - \frac{J_e}{J_d}\right) \quad (3.7)$$

### 5. 驱动电流基本能量补偿模型的确定

由于电动机驱动电流与扭矩  $M_e$  成正比, 比例系数  $k = 1.5 A / (N \cdot m)$ , 即

$$I = k M_e \quad (3.8)$$

根据(3.7)~(3.8)即可得到如下确定电动机驱动电流的基本能量补偿模型

$$I = k M \left(1 - \frac{J_e}{J_d}\right) \quad (3.9)$$

#### 6.2.2 分段能量补偿模型的建立

通过模型(3.9)所求解出来的电流的只是理论上的结果。

实际情况中制动力扭矩  $M$  并不恒定, 电动机提供的扭矩  $M_e$  也不恒定。而且电动机通过电流补充能量的过程中可能会因为电路和器件对能量的损耗或不可预知的外力做功等原因, 导致电动机补偿的能量不够或过剩, 从而给试验结果和实际情况产生较大的误差。在此, 可运用瞬时转速与瞬时扭矩这两种可测量对输入电流进行动态调整。

按如下步骤, 建立电动机驱动电流分段能量补偿模型。

#### 1、将能量补充过程分段

将总制动时间  $T$  分为  $n+1$  段(不必均分, 但为便于控制, 可进行均分), 电动机补偿的能量  $\Delta E$  分为  $n+1$  份(不必均分)。设每小段的制动时间为  $T_i (i=1, \dots, n, n+1)$ , 其中  $T_i = [t_{i-1}, t_i]$ ,  $t_{i-1} (1, \dots, n, n+1)$  为时间段  $T_i$  的起始时间点和时间段  $T_{i-1}$  末时间点, 每个时间段  $T_i$  内的电动机补偿能量为  $\Delta E_i (i=1, \dots, n, n+1)$ 。

前  $n$  段时间电动机补偿的能量的理想值  $\Delta \tilde{E}_i (i=1, \dots, n)$  为  $\frac{1}{2n}(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2)$ , 第  $(n+1)$  段时间补偿的能量的理想值  $\Delta \tilde{E}_{n+1}$  为零。

## 2. 根据理想能量值对实际能量值修正

每段时间实际补偿的能量与理论值不一定相等, 设  $\varepsilon_i (i=1, \dots, n)$  为前  $i$  个阶段的电动机理想补偿能量与电动机实际补偿能量的差值。

对理想值进行误差修正得到实际补偿的能量  $\Delta E_i$  为:

$$\Delta E_i = \begin{cases} \frac{1}{2n}(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2), & i=1 \\ \frac{1}{2n}(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2) + \varepsilon_{i-1}, & i=2, \dots, n \\ \varepsilon_n, & i=n+1 \end{cases} \quad (3.10)$$

## 3. 计算前 $i$ 个阶段实际补偿能量与理想补偿能量的差值

设第  $i$  段制动时间  $T_i$  内的测量出初始角速度为  $\omega_{i-1}$ , 末角速度为  $\omega_i$ , 其中第 1 段制动时间  $T_1$  内的初始角速度  $\omega_0 = \omega_b$ , 第  $n+1$  段制动时间  $T_{n+1}$  内的末速度为  $\omega_{n+1} = \omega_e$ 。

设前  $i$  段制动时间实际补偿能量值共为  $\Delta E_i^s (i=1, \dots, n)$

由初始角速度  $\omega_b$  和时间段  $T_i$  的末角速度  $\omega_i$  可以得到实际补偿的能量为

$$\Delta E_i^s = \frac{1}{2n}(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_i^2) \quad (3.11)$$

从而得到计算前  $i$  个阶段实际补偿能量与理想补偿能量的差值  $\varepsilon_i$  的表达式为

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{i}{2n}(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2) - \Delta E_i^s \\ &= \frac{i}{2n}(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2) - \frac{1}{2}(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_i^2), i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.12)$$

## 4. 计算每小段时间的电动机驱动电流, 并由此得到分段能量补偿模型

当制动时间被分的足够细时, 每小段时间  $T_i$  很小, 这段时间内将制动力产生的扭矩  $M$  及电动机产生的扭矩  $M_e$  可视为恒定, 并设这一小段时间内的驱动电流为  $I_i$ 。

则可根据基本能量补偿模型建立过程中的表达式  $\Delta E_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} M_e \omega dt$ 、 $\omega = \omega_b - \frac{M}{J_d}t$  和  $I_i = kM_e$  可以计算得到

$$I_i = \frac{2kJ_d \Delta E_i}{2\omega_b T_i - M(T_i^2 - 2T_i t_{i-1})}, (i=1, 2, \dots, n+1) \quad (3.13)$$

联立(3.11)、(3.12)以及(3.13), 可计算得到每个时间段  $T_i$  电动机驱动电流值  $I_i$ , 由此确定驱动电流的分段能量补偿模型为



$$I_i = \begin{cases} \frac{kJ_d(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2)}{n[2\omega_b T_i - M(T_i^2 - 2T_i t_{i-1})]}, i=1 \\ \frac{kJ_d(J_d - J_e)\left[\frac{n+i+1}{n}\omega_b^2 - \frac{i+1}{n}\omega_e^2 - \omega_{i-1}^2\right]}{2\omega_b T_i - M(T_i^2 - 2T_i t_{i-1})}, i=2, \dots, n \\ \frac{kJ_d(J_d - J_e)(2\omega_b^2 - \omega_e^2 - \omega_n^2)}{2\omega_b T_i - M(T_i^2 - 2T_i t_{i-1})}, i=n+1 \end{cases} \quad (3.14)$$

## 6.4 模型的求解

由于题目已假设制动减速度为常数，因此可确定制动扭矩恒定，为理想情况，因此可直接利用基本能量补偿模型(3.9)式进行求解。

初始速度  $v = 50 \text{ km/h}$ ，末速度为零，制动时间  $T = 5 \text{ s}$ ，车轮半径  $R = 0.286 \text{ m}$ ，从而初始角速度

$$\omega_b = \frac{v}{R} = 48.56 \text{ rad/s}$$

末角速度

$$\omega_e = 0$$

角加速度

$$\beta = \frac{\omega_b - \omega_e}{T}$$

再由(3.3)式  $M = J_d \beta$ ，代入模型(3.7)得

$$I = \frac{k}{T}(J_d - J_e)(\omega_b - \omega_e) \quad (3.15)$$

等效惯量  $J_d = 52.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，机械惯量  $J_e = 40.0083 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，计算得电动机驱动电流  $I = 174.75 \text{ A}$ 。

## 6.5 模型的分析

### 6.5.1 结果分析

1. 计算得驱动电流为  $I = 174.75 \text{ A}$ ，这一驱动电流在整个制动过程中维持不变。这是由于题目假设与基本能量补偿模型的理论前提一致，可直接求解。

2. 由(3.15)式及  $I = kM_e$ ，可以得到

$$M_e = (J_d - J_e) \frac{\omega_b - \omega_e}{T} = (J_d - J_e) \beta$$

上式的物理意义非常明显，即可以认为电动机扭矩提供了一个惯量，该惯量的值为等效惯量  $J_d$  与机械惯量  $J_e$  之差。因此，在理论情况下，能量补偿与惯量补偿实质上是等价的。

### 6.5.2 敏感性分析

由驱动电流基本能量补偿模型(3.9)式知道,驱动电流  $I$  与等效惯量  $J_d$ 、机械惯量  $J_e$ 、制动力产生的扭矩  $M$  和驱动电流与其产生的扭矩的比例系数  $k$  直接决定。由(3.9)式直接看出驱动电流  $I$  与制动力产生的扭矩  $M$  以及比例系数  $k$  成正比。

等效惯量  $J_d$  由车轮承受的载荷平动时所具有的能量转化而来,计算式为(1.2)式,即  $J_d = \frac{FR^2}{g}$ , 本题中计算中取重力加速度  $g = 9.8 N/kg$ , 而不同地区重力加速度一般有微小的差异,有必要对其做敏感性分析。

下面对等效惯量  $J_d$  和机械惯量  $J_e$  以及重力加速度  $g$  作敏感性分析。

#### 1、等效惯量 $J_d$

利用 MATLAB 软件<sup>[1]</sup>作出电动机驱动电流随等效惯量变化关系图如下:

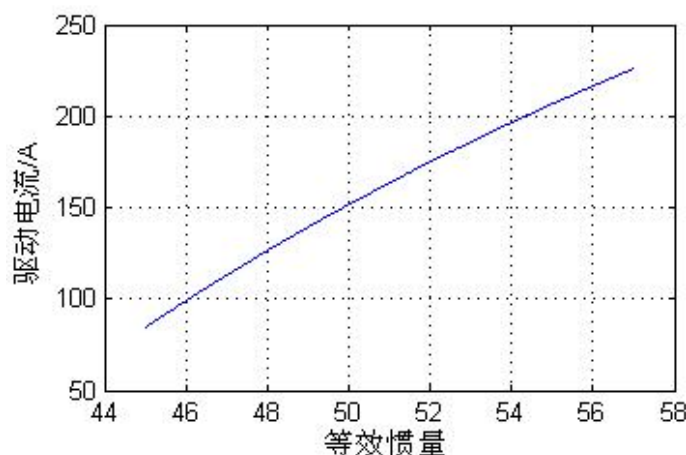


图1 等效惯量变化对驱动电流大小的影响

由图 1 看出,驱动电流值随等效惯量  $J_d$  的增大而增大,且等效惯量  $J_d$  有较小变化时,驱动电流变化幅度特别大,因此驱动电流对等效惯量特别敏感。

#### 2、机械惯量 $J_e$

作出电动机驱动电流随机械惯量变化关系图如下

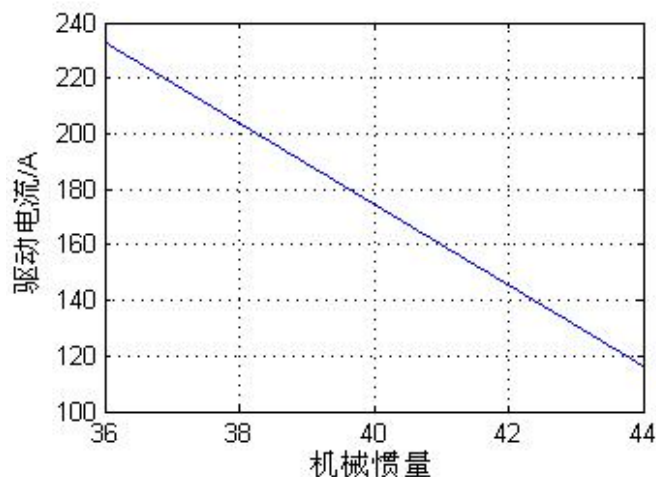


图2 机械惯量变化对驱动电流大小的影响

由图 2 看出, 驱动电流值随机械惯量  $J_e$  的增大而减小, 而者变化关系是线性的, 且机械惯量  $J_e$  有较小变化是, 驱动电流变化很大。因此, 驱动电流对机械惯量  $J_e$  也是很敏感的。

### 3、重力加速度 $g$

作出电动机驱动电流与重力加速度变化关系图如下

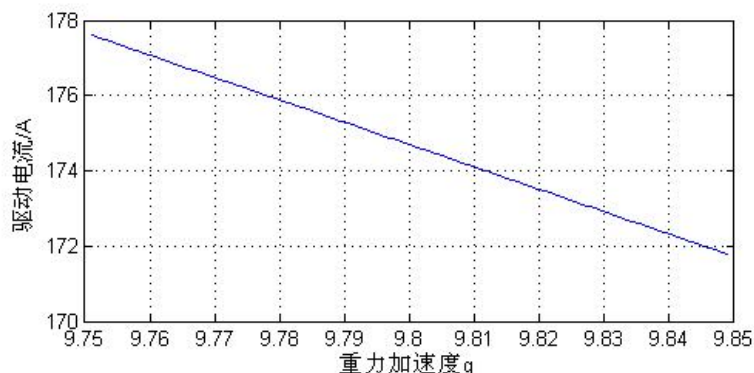


图3 驱动电流大小相对重力加速度大小的关系图

由图 3 可以看出, 驱动电流对重力加速度较敏感, 当重力加速度为  $9.75 \text{ N/kg}$  (相对  $9.8 \text{ N/kg}$  减小  $0.5\%$ ) 时, 计算得到的驱动电流约增大  $3\text{A}$  左右 (相对于  $174.75\text{A}$  增大  $0.5\%$ )。

综合上述分析, 试验台所需驱动电流随等效惯量  $J_d$  和机械惯量  $J_e$  很敏感, 对重力加速度的值也是较为敏感。因此, 准确得到等效惯量  $J_d$  以及机械惯量  $J_e$  的值, 对提高试验的准确度有及其中要的意义。由于等效惯量的值要通过重力加速度计算得到, 准确测量试验台所在地的重力加速度值, 对于提高试验的准确性也具有重要意义。

## 6.6 模型的改进

模型(3.9)是在整个制动时间段  $T$  内能量进行均匀补充,  $T$  在进行能量补偿之前已经准确确定。但在实际的许多情况中, 只知道制动前的初速度和制动后的末速度, 整个制动时间  $T$  未知, 只能通过预测得到  $T$  的估计值。准确预测制动时间  $T$  是比较困难的, 在整段制动时间内进行能量的均匀补充可能导致最终能量补偿不够<sup>[2]</sup>。

如果只考虑能量误差最小, 那么只要在制动过程中将需要电动机补偿的能量补充进去即可, 并不需要整个制动时间段  $T$  内能量进行均匀补充。

### 1. 计算补偿的能量 $W$

设补偿的起始时间为  $T_b$ , 补偿总时间与制动时间  $T$  的比例为  $\eta$ , 则补偿时间为  $\eta T$ , 与式(3.4)类似, 可得到补偿的能量为:

$$W = \int_{T_b}^{T_b + \eta T} M_e \omega dt$$

### 2. 计算电动机产生的扭矩 $M_e$

在这种情况下, 由补偿的能量与缺损的能量相等, 即

$$\Delta E = W = \frac{1}{2} (J_d - J_e) (\omega_b^2 - \omega_e^2) = \int_0^T M_e \omega dt$$

可计算电动机产生的扭矩为

$$M_e = \frac{J_d(J_d - J_e)(\omega_b^2 - \omega_e^2)}{2\omega_b\eta TJ_d - M(\eta^2 T^2 + 2\eta TT_b)} \quad (3.16)$$

### 3. 补偿时间 $\eta T$ 、补偿起始时间 $T_b$ 及二者之间的关系分析

在制动力矩恒定，且不考虑外力的情况下，实际情况为匀减速运动，整个制动过程中主轴的角速度均匀减小，如图 4 的 AB 段。直线 AB 与坐标轴围成的区域即为试验的制动距离。在电动机通过电流补偿由于机械惯量不足而缺少的能量时，制动过程分为了 3 个阶段，AC 段为能量未补偿阶段，CE 段为能量补偿阶段，EB 段为能量补偿结束阶段。为了保证两者的制动距离和制动时间一致，则多边形 OACEB 的面积于三角形 OAB 的面积相等，因此  $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BED}$ 。又由于飞轮减速恒定，故 AC 平行于 EB，因此三角形 ACE 全等于三角形 BED。

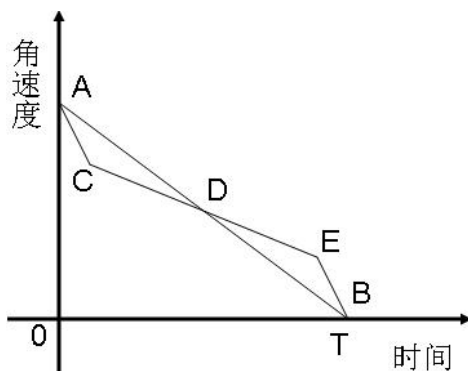


图4 角速度随时间变化示意图

由此得到补偿的起始时间为：

$$T_b = \frac{1}{2}(T - \eta T) \quad (3.17)$$

### 4. 最终改进模型确定

将(3.17)代入(3.16)，并根据  $I = kM_e$  即可得到如下改进的能量非均匀补偿模型：

$$I = \frac{1}{\eta} kM \left(1 - \frac{J_e}{J_d}\right) \quad (3.18)$$

$\eta$  为补偿时间所占中制动时间的百分比，当  $\eta=1$  时，即为原基本能量补偿模型。

### 5. 模型缺陷

由于该模型确定的前提是制动过程中补偿的能量尽可能完全，能量误差尽量小。但这样无疑破坏了试验过程与实际制动过程的一致性，这是该模型的缺陷所在。

### 6.7 模型优缺点

驱动电力基本能量补偿模型(3.9)是用理想的试验台的试验情况去模拟理想的路试情况得出的简单模型。

**优点：**

1、该模型推导简单，对于与理想较相近的实际情况，可用该模型简便快捷地求得制动过程中电动机的驱动电流。

2、该模型的处理方法及理想假设对解决实际复杂的情况提供了理论基础，并且具

有重要的指导意义。实际复杂情况的处理方法是：将连续的制动过程化分为足够小的时间段，然后将每一小段时间内，制动力矩、驱动电流值的大小以及其产生的电动力矩、角加速度的值均看成是常数。对每一小段内的驱动电流值进行计算或控制。所以，模型(3.9)为解决实际复杂问题提供了理论基础和指导思想。

#### 缺点：

- 1、模型推导处理过程中，将制动力矩，驱动电流及其产生的扭矩，角加速度当作常数，不符合实际情况。
- 2、理想情况在实际过程中是不存在的，因而，模型(3.9)直接应用范围有限。
- 3、驱动电流值从一开始就设为定值，不能在控制过程中根据出现的各种可能情况进行实时控制。
- 4、要求制动力矩一直为定值，对施加力矩的设备要求较高，实施困难。

## 七、问题四的求解

### 7.1 问题分析

要对题中已给的某种方法得到的试验执行结果进行评价，即需要对该控制方法得到的结果所反映的制动过程与实际路试制动过程的一致性进行比较。一致性程度有多个评判指标，其中一个重要的数量指标就是能量误差的大小，该能量误差是指实际制动过程(路试)中制动器在制动过程中消耗的能量与相对应的试验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差。除能量误差外，还有路试与试验台试验的角速度误差，角加速度误差，制动距离误差，制动时间误差等评价指标。

因此，计算出能量误差、角速度误差等指标后，即可评价该方法的执行结果。

### 7.2 方案执行结果评价

#### 7.2.1 总体结果定性分析

首先根据题目给出的数据，作出试验台实验过程中主轴转速和制动器扭转力矩随时间变化关系图(如下图)，根据图可对试验解过作定性的判断。

##### 1. 主轴转速与时间的变化关系分析

由图 5 可看出，主轴转速总体上随时间是匀速减小的，前 1 秒钟的线性性不明显，可能是由于试验台处于调整过程而不稳定引起的。但总体上和实际路试制动过程中汽车云减速的过程是比较符合的。

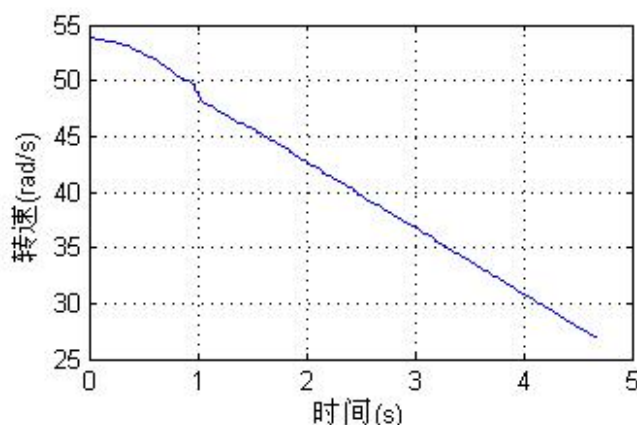


图5 主轴转速随时间变化图

## 2.制动力产生扭矩随时间变化关系分析

由图 6 可看出,制动器产生的扭矩在制动过程前 1 秒钟随时间迅速增大,1 秒钟过后扭矩基本上随时间在一个确定值附近做幅度较小的波动。制动过程前一秒钟制动器开始对飞轮起制动作用,这以过程并不是瞬间完成,而是需要一定时间的;约一秒钟之后,制动器以恒定的力作用在飞轮上,由图看出该力产生的扭矩随时间做小幅度波动。理论上扭矩应该是保持恒定的,但实际情况下会产生波动,有关研究表明<sup>[3]</sup>,产生制动力矩波动的主要原因是制动盘的厚度不均匀。因此,测量制动力矩出现波动也是符合实际情形的。

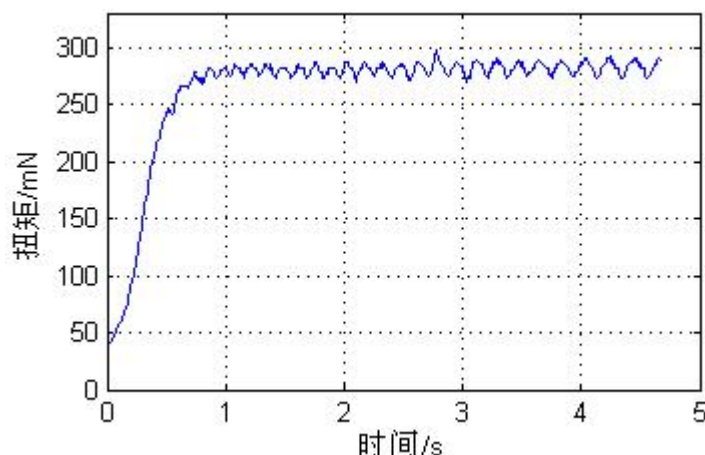


图6 制动器扭矩随时间变化图

定性分析结论:以上通过定性分析,大致判断试验结果与实际路试时的制动过程基本符合。

下面就试验结果相对路试制动过程的能量误差、主轴(车轮)角速度误差等指标定量分析。

### 7.2.1 能量误差

路试时制动器在制动过程中消耗的能量与试验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差即为能量误差,它是评价控制方法优劣的一个重要数量指标。

#### 1.路试过程中制动器消耗能量的计算

路试过程中制动器消耗的能量 $W_1$ 为车轮载荷平动时动能的减小量,因此也等于等效惯量的动能减小量,即

$$W_1 = \frac{1}{2} J_d (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (4.1)$$

式中 $\omega_2$ 和 $\omega_1$ 分别为试验过程中起始角速度和末角速度,由给出的数据

$$\omega_b = \frac{2\pi}{60} \times 514 \text{ rad/s} = 53.8605 \text{ rad/s}$$

$$\omega_e = \frac{2\pi}{60} \times 257 \text{ rad/s} = 26.9308 \text{ rad/s}$$

等效惯量 $J_d = 48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,代入(4.1)式,得 $W_1 = 5.215 \times 10^4 \text{ J}$ 。

#### 2.试验台上制动器消耗能量的计算

试验台上制动器在制动过程中消耗的能量 $W_2$ 应为电动机产生的扭矩做的功 $W_E$ 与飞

轮转动时的动能减小量  $\Delta E_k$  之和, 即

$$W_2 = W_E + \Delta E_k \quad (4.2)$$

由动能定理, 电动机产生的扭矩做的功  $W_E$  与制动力产生扭矩做的功  $W_M$  之和, 由于制动力产生的扭矩做负功, 因此有

$$W_E - W_M = -\Delta E_k \quad (4.3)$$

由(4.2)和(4.3)得到

$$W_2 = W_M \quad (4.4)$$

制动力产生的扭矩做的功  $W_M$  为

$$W_M = \int_0^T M(t)\omega(t)dt$$

式中  $M(t)$  表示  $t$  时刻制动力矩大小,  $\omega(t)$  表示  $t$  时刻主轴的转速,  $T$  为整个制动过程的总时间。然而,  $M(t)$  和  $\omega(t)$  随时间的变化关系是未知的。考虑到每隔  $\Delta t = 0.01s$  时间段各时刻的制动力扭矩  $M_i$  和转速  $\omega_i$  已经测出并在数据表中给出, 联系 Riemann 积分定义, 当  $\Delta t$  足够小时有

$$W_M = \int_0^T M(t)\omega(t)dt \approx \sum_i M_i \omega_i \Delta t \quad (4.5)$$

此时  $\Delta t = 0.01s$  相对于总制动时间  $T = 4.67s$  已足够小, 因此制动力产生的扭矩做的功可通过(4.5)式近似求出, 根据给出的数据, 计算出制动力产生的扭矩做的功为

$$W_M \approx \sum_i M_i \omega_i \Delta t = 4.929 \times 10^4 J$$

再由(4.4)式, 试验台上制动器在制动过程中消耗的能量  $W_2$  与制动力产生扭矩做的功相等, 因此  $W_2 \approx 4.929 \times 10^4 J$ 。

### 3. 能量误差计算

计算出  $W_1$  和  $W_2$  后, 即可计算该空控制方法的绝对能量误差为

$$|W_2 - W_1| = 2.87 \times 10^3 J$$

相对能量误差为

$$\left| \frac{W_1 - W_2}{W_1} \right| \times 100\% = 5.5\%$$

#### 7.2.2 角速度误差

由于试验台上要模拟的是路试过程中, 制动力矩恒定, 车轮做匀减速运动的情况, 因此, 可以把试验台上的情况与匀减速运动情况的相合程度作为评判控制方法优劣的一个方面。

因此, 对试验数据可作如下分析:

##### 1. 考虑试验数据与理想情况的偏差

理想路试情况下, 初始角速度与末角速度分别为  $\omega_b = 53.8605 rad/s$ ,  $\omega_e = 26.9308 rad/s$ 。

理想情况下角速度与时间的关系为直线  $\omega = 53.8605 - 5.7665t$ , 其确定的序列点为  $(t_i, \omega_i), (i=1, 2, \dots, 468)$ ; 试验数据为:  $(t_i, \varpi_i), (i=1, 2, \dots, 468)$ , 作图如下。



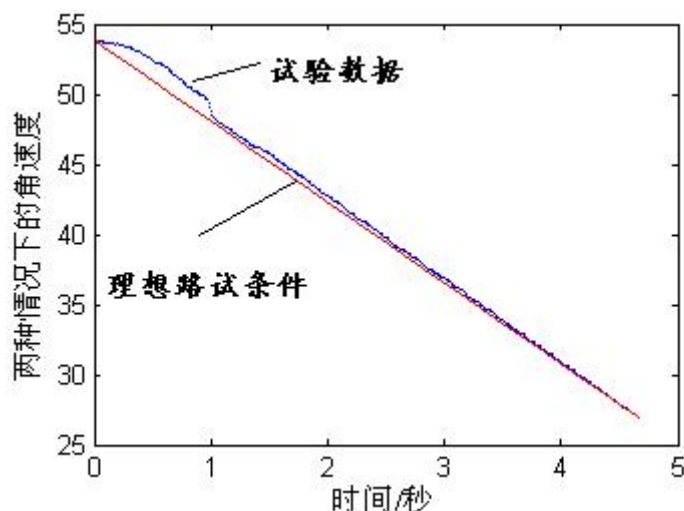


图7 理想路试条件与试验情况角速度比较图

对图形的分析:

- 试验数据角速度与理想角速度变化虽然在总趋势上大体一致,但基本上都比理想情况偏大。
- 在刚开始的一段时间,偏差量很大。可以认为初始偏差量较大的那段时间为试验台的调整阶段,由图中情况,调整阶段大约为 1 秒钟以前的一段。因此,调整阶段占到整个模拟制动时间的 20%以上。可见,该控制方法调整过于滞后,反应不够敏捷。

## 2、试验情况与理想路试情况下角速度相对偏差计算

为得到试验数据与理想情况的进一步关系,定义角速度与理想角速度的相对偏差。

定义:  $t_i$  时刻试验角速度与理想路试角速度的相对偏差:  $s_i = \frac{\omega_i - \omega_i}{\omega_i}$

计算并作出  $s_i$  与  $t_i$  的关系图,如下:

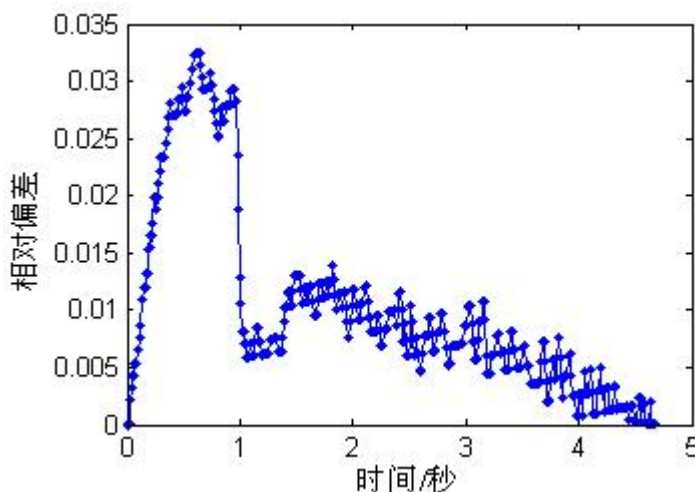


图8 各时刻试验角速度与理想路试角速度的相对偏差

对上图分析:

- 初始时间段: 起始时刻角速度的相对偏差较小,在短时间内,角速度的相对偏差越来越大。其原因是:在刚开始一段时间,制动力矩从 40 开始逐渐增大,它达



到大致与理想恒定值相等需要一段时间，而在这段时间内，制动力矩不够，电动力矩不用补偿主轴转动的能量，也没有作负功减速主轴的转动。因而试验中角速度减小缓慢，而相对均匀减小的理想情况，偏差越来越大，这段时间对应于图中，相对偏差近似直线上升的情况，大约从开始到 0.4 秒。

● 随后，相对偏差上下波动，并且总的趋势越来越小，这个过程是控制方法作用的结果。在绝大部分时间内，相关偏差都为正，只在最后的一小段时间，相对偏差才出现负值。

### 角速度平均误差计算

根据角速度相对偏差定义式，可确定角速度平均相对误差计算式为

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n}, (n = 468)$$

计算得角速度平均相对误差  $\alpha = 1.06\%$ 。

## 7.2.3 角加速度误差

### 1. 对各时间点的角速度进行线性回归拟合

通过对各时间点的角速度进行线性回归拟合，得到如下拟合图形：

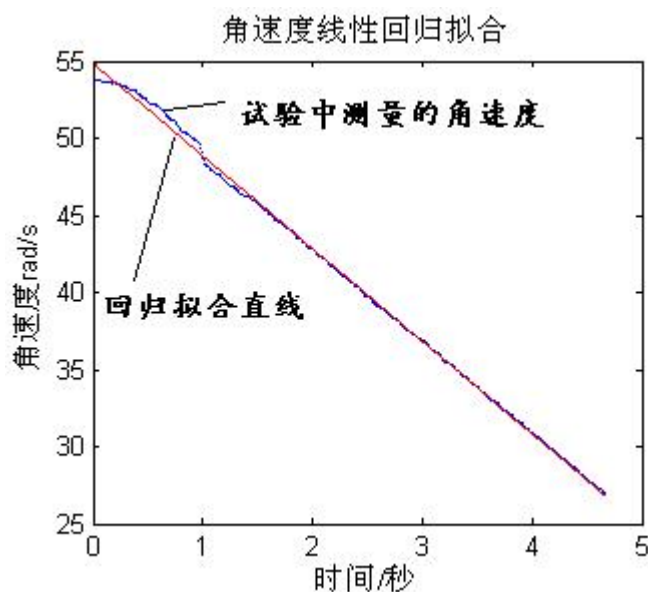


图9 对角速度随时间变化的线性拟合图

设拟合直线方程： $\omega = \hat{\beta}t + \hat{\omega}_b$

进行回归拟合得到的回归方程为： $\omega = -6.0103t + 54.889$

### 2. 回归分析与检验：

平均角加速度为  $\bar{\beta} = -6.0103 \text{ rad} / \text{s}^2$

标准误差： $8.3226 \times 10^{-4}$ ，较小。

95%的置信区间：

平均角速度  $\bar{\beta}$ ： $[-6.03, -5.991]$ 。

$\hat{\omega}_b$ ： $[54.84, 54.94]$

判定系数：0.9987，与 1 很接近。

相关系数：-0.9993，绝对值与 1 很接近。

角加速度平均相对误差：

$$\alpha_1 = \left| \frac{\bar{\beta} - \beta}{\beta} \right| \times 100\% = \left| \frac{-6.0103 - (-5.7951)}{-5.7951} \right| \times 100\% = 3.71\%$$

**结论：**1、试验情况下，角速度与时间之间的线性相关性较好。

2、角速度与时间之间的相关系数为负数，说明角加速度减小的趋势。

#### 7.2.4 综合评价：

由上述分析，该方法执行结果的不足之处在于，试验初始的一小段时间内，与路试理想情况的偏差较大。但各项误差指标：能量相对误差：5.5%，角速度相对误差：1.06%，角加速度平均相对误差：3.71% 均较小。可以认为，该实验结果能较好地模拟路试情况。

## 八、问题五的求解

### 8.1 问题分析

在进行试验台制动试验中，通过电动机产生扭矩做功来补偿由于机械惯量不足而缺少的能量。然而由于控制器的复杂性，电动机的驱动电流与时间的精确关系很难得到，只能通过计算及控制方法对电流进行调整。该调整过程应该是一个动态的、实时的调整过程。即先观测当前的参数值，根据观测到的参数值与理论情况下的值进行比较判断，然后由比较判断结果给出适时调整方案，以减小实际观测值与理论值之间的差距。因此控制方案总体上应该包括检测、比较判断、改变执行这三步。

为使控制方案的控制结果尽可能精确，可通过减小控制的时间周期实现，即减小控制时间离散化后的时间段的值。由于技术条件和设备条件的限制，控制的时间周期能太小。

对本问题，控制过程中实际情况和理论情况中可进行的比较指标主要有电动机补偿的能量、转轴的角速度等。电动机补偿的能量可通过观测得到的扭矩计算得到，然而由第四问给出的某控制方案的控制结果知道，扭矩的值是随时间在某一值范围内以较小的幅度波动的，而角速度随时间的变化基本上是线性。因此，通过观测得到的角速度的值进行控制，且控制结果与实际情况更一致。

### 8.2 控制方案设计

**关于理想路试条件下，总制动时间确定性的说明：**假设试验台模拟的都是理想的路试情况，即路试情况为，初始角速度、终止角速度确定，制动器施加给车轮的制动力矩恒定。现用试验台模拟理想的路试情况。为检测制动器的性能，需要对制动器做大量的测试，每次设计确定的制动力矩，检测在设计的条件下，制动器的性能。那么，对每一次试验测试，施加的制动力矩都是恒定已知的，带入理想的路试情况，由于，初、末角速度已知，等效转动惯量已知，理想的制动总时间也可以随之确定，设为  $T$ 。

本问题中，可以观测到的数据为前一个时间段的试验台主轴的瞬时转速  $\omega$  和瞬时扭矩  $M$ 。现在设计根据前一时间段的这两个量，设计本时间段的电流值的控制方法。

#### 1. 确定驱动电流 $I$ 的计算式

根据第三问建立的基本模型，一段控制时间内，当满足制动力矩  $M$  或角加速度  $\beta$  恒定的条件时，电动机驱动电流可通过

$$I = kM(1 - \frac{J_e}{J_d})$$

或

$$I = \frac{k}{T}(J_d - J_e)(\omega_b - \omega_e)$$

进行计算。本文题采用角速度进行控制，即取第二个式子。

## 2. 将制动时间分段

假设控制为  $\Delta T$ ，即将整个控制过程离散化为许多个小段，每  $\Delta T$  时间为一段。当  $\Delta T$  足够小时，可认为这段时间内制动力矩  $M$  或角加速度  $\beta$  恒定，因此可通过以上两式计算这段时间内电动机驱动电流的值。

整个制动时间为  $T$ ，设将这短时间均匀离散化为  $n$  段，依次为  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ，则每段时间长  $T_i = T/n = [t_{i-1}, t_i]$ ，其中  $t_{i-1}$  和  $t_i$  分别为时间段  $T_i$  的起始时刻和终止时刻，对应的理论情况下初始角速度和末速度分别为  $\omega_{i-1}$  和  $\omega_i$ ，实际观测值为  $\omega'_{i-1}$  和  $\omega'_i$ 。则  $T_i$  内理论上应提供的驱动电流

$$I'_i = \frac{k}{T_i}(J_d - J_e)(\omega_{i-1} - \omega_i)$$

然而由于存在能量补偿不完全以及其他外界对试验台损耗的存在，不能直接用上计算应提供的驱动电流值。

## 3. $t_i$ 时刻理想角速度 $\omega_i$ 的确定

车轮的初始角速度为  $\omega_b$ ，终止角速度为  $\omega_e$ ，总制动时间为  $T$ 。又由于理想情况车轮的转动是均减速运动，设  $t_i$  时刻的车轮角速度为  $\omega_i$ ，则有  $\omega_0 = \omega_b$ ， $\omega_n = \omega_e$ ，

$$\omega_i = \omega_b - \frac{i}{n}(\omega_b - \omega_e)。$$

## 4. $T_i$ 时段的角加速度 $\beta_i$ 的确定

设  $M_i$  为  $t_i$  时刻测量的制动力矩，由于时间间隔  $\Delta T$  很小，可将  $M_{i-1}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 当作在第  $i$  段时间内制动力矩的平均值。

设  $\omega'_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) 为  $t_i$  时刻测量的主轴的转动角速度。

设  $M_{ei}$  为第  $i$  段时间内控制电流需要产生的平均电动力矩。

按照模拟试验的原则，即试验台上制动器的制动过程与路试车辆制动器的制动过程尽可能一致。可以选取  $t_i$  时刻电流的控制原则为：调整电流使其产生的力矩能让下一时刻主轴的角速度与理想路试条件下的角速度一样。

现在考虑第  $i$  段时间  $T_i$  的情况，起始时间为  $t_{i-1}$ ，这段时间内的初始角速度测量值为  $\omega'_{i-1}$ ，这段时间的终止角速度理想值为  $\omega_i$ 。因此，电动力矩的调整应当使这段时间内的角加速度  $\beta_i$  为

$$\beta_i = \frac{\omega_i - \omega'_{i-1}}{\Delta T} = \frac{n(\omega_i - \omega'_{i-1})}{T} \quad (5.1)$$

### 5. $t_i$ 时刻电动机产生扭矩 $M_{ei}$ 的确定

由转动定律：

$$M_{ei} - M_{i-1} = J_e \beta_i \quad (5.2)$$

由此可得：

$$M_{ei} = J_e \frac{n(\omega_i - \omega'_{i-1})}{T} + M_{i-1} \quad (5.3)$$

再根据  $\omega_i = \omega_b - \frac{i}{n}(\omega_b - \omega_e)$ ，代入上式得

$$M_{ei} = J_e \frac{[(n-i)\omega_b + i\omega_e] - n\omega'_{i-1}}{T} + M_{i-1} \quad (5.4)$$

式中  $\omega'_{i-1}$  和  $M_{i-1}$  分别为  $t_{i-1}$  时刻的瞬时角速度和瞬时扭矩的观测值。

### 6. 最终控制方案的确定

根据(3.8)式  $I = kM_e$ ，将(5.1)式代入，得到如下时间  $T_i$  内电动机驱动电流  $I_i$  的角速度实时矫正控制方案：

$$I_i = kJ_e \frac{[(n-i)\omega_b + i\omega_e] - n\omega'_{i-1}}{T} + kM_{i-1} \quad (5.5)$$

该控制方案中只需要确定时间段  $T_i$  的起始时刻  $t_{i-1}$  时的瞬时角速度观测值  $\omega'_{i-1}$  和瞬时扭矩的观测值  $M_{i-1}$ 。当  $\Delta T$  较小时，可通过这种方法实时调整电动机驱动电流来改变电动机产生的扭矩大小，保证试验过程中角速度与路试时的角速度尽量保持一致，这样便能使得试验台上制动过程与路试车辆制动过程尽可能一致。

## 8.3 控制方案评价

**优点：**

1. 该方案计算过程简单，仅需根据表达式带入具体数据进行计算，因此计算机所需的计算时间可忽略，从而不会对控制本身造成时间延迟误差。
2. 所依赖观测量简单，仅需要每个时间段起始时可得主轴瞬时角速度  $\omega'_i$  和瞬时扭矩  $M_i$ ，这两个值由直接观测得到。
3. 可对主轴角速度进行实时修正，从而直接控制试验台制动过程与实际制动过程的一致性。理论上整个控制时间被分得越细(即所分时间段的段数  $n$  越大)修正效果越好，与实际制动器制动过程越一致。

**缺点：**

1. 用一段时间初始时刻角速度的观测值与理论值的偏差来控制本段时间的平均电流值，对误差的修正不充分。
2. 将一段时间初始时刻观测的制动力力矩当做整段时间的平均制动力力矩，忽略了实际中制动力力矩随时间变化的事实。

## 九、问题六的求解

### 9.1 对第五问控制方案的改进分析

第五问的控制方案中，主要思想是根据  $t_{i-1}$  时刻的实际角速度与理想值的误差，然后通过改变电流修正这个误差，使  $t_i$  时刻的角速度接近理想值。事实上，由于整个系统所产生误差的原理未知，当在时间段  $[t_{i-1}, t_i]$  对  $t_{i-1}$  时刻的误差进行修正时，这段时间内会有一些系统产生新的不可知的误差，而对此误差没有进行修正，这就可能会导致  $t_i$  时刻的角速度接近理想值的效果不尽如人意。在本问中，可以通过  $t_i$  时刻前连续几个时刻的实际角速度于理想值的误差，来预测  $t_i$  时刻实际角速度与理想值的误差。如果预测方法恰当，所得到  $t_i$  时刻的角速度会更接近理想值。

例如，图 10 所示的情况，如果只对  $t_{i-1}$  时刻 C 点的角速度与理想值的误差进行修正，最终得到修正后 F 点对应的角速度为  $t_i$  时刻的测量值。而如果通过某种较准确预测方法，用  $t_{i-3}$ 、 $t_{i-2}$  和  $t_{i-1}$  时刻的角速度与理想值的误差来预测  $t_i$  时刻的误差，并对其进行修正，得到 G 点对应的角速度为  $t_i$  时刻的测量值，可知 G 点比 F 点更接近理想值。但如果误差预测的不准确，控制的效果会非常差。

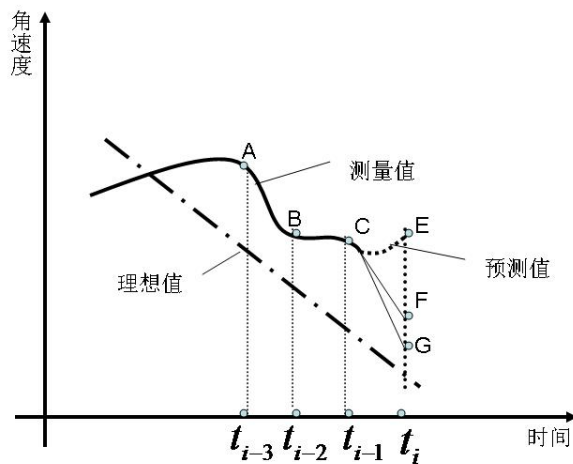


图 10 角速度误差分析示意图

### 9.2 新控制方案的提出

通过分析，控制方案可以分为预测误差和误差修正两步

由于不考虑随机误差，则角速度的理想值与测量值产生误差均为系统误差。一般情况下，系统误差是有规律的，可用代数多项式、三角多项式或其他正交多项式来描述。考虑到实际情况中系统的复杂性，其误差的变化一般不会呈单调变化，采用灰理论中的 GM(2,1) 模型<sup>[4]</sup>，该模型能对非单调的摆动发展序列进行预测，对误差的预测可以起到较好的效果。

#### 1. GM(2,1) 模型对角速度的理想值与测量值产生误差的预测

设要预测的时间点  $t_i$  前  $m$  个时间点的角速度与理想值的误差序列为：

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))。$$

其 1-AGO 序列  $x^{(1)}$  和 1-IAGO 序列  $\alpha^{(1)}x^{(0)}$  分别为

$$x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$$

和

$$\alpha^{(1)}x^{(0)} = (\alpha^{(1)}x^{(0)}(2), \alpha^{(1)}x^{(0)}(3), \dots, \alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$$

其中

$$\alpha^{(1)}x^{(0)} = x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)$$

$x^{(1)}$  的紧邻均值生成序列为

$$z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))$$

得到GM(2,1)模型为:

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k) + a_1x^{(0)}(k) + a_2z^{(1)}(k) = b$$

GM(2,1)模型的白化方程为:

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_2x^{(1)} = b$$

GM(2,1)模型的参数列  $\hat{a} = (a_1, a_2, b)^T$  的最小二乘估计:

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

其中矩阵  $B$  和  $Y$  为:

$$B = \begin{bmatrix} -x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1 \\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -x^{(0)}(n) & -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)}x^{(0)}(2) \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

利用边界条件便可求出  $x^{(1)}$  的关于时间  $t$  的函数, 离散化和IAGO还原后便得到离散序列  $\hat{x}^{(0)}$ , 对这个序列中前  $n$  为模拟数据, 用模拟数据和实际数据相减得到残差序列, 并计算相对误差。如果相对误差可以接受, 则序列  $\hat{x}^{(0)}$  中第  $n+1$  个数据可以当作  $t_i$  时刻角速度与理想值误差的预测值。

## 2.通过角速度与理想值误差的预测值对电流进行控制

令  $t_i$  时刻角速度与理想值误差的预测值为  $\delta_i$ 。

根据第五问, 要计算电流首先需要确定  $T_i$  时间段的角加速度, 如图11角加速度的确定是通过  $t_{i-1}$  时刻角速度的测量值于假想的理想值确定的, 即AD线段的斜率就是所要求的  $T_i$  时间段的角加速度  $\beta_i$ 。

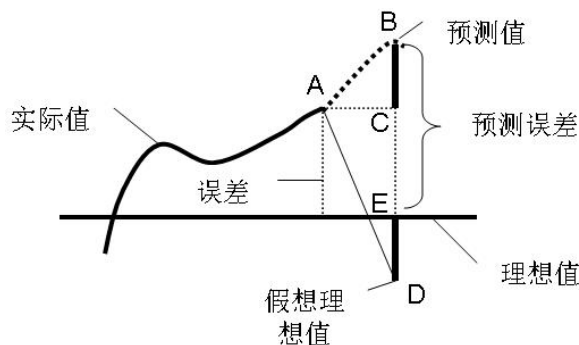


图11角加速度求解示意图

由此得到:

$$\beta_i = \frac{n(\omega_i - \omega_{i-1} - \delta_i)}{T}$$

然后根据第五问的(5.2)~(5.4)式可以得到实时角速度控制方案的  $T_i$  时间段电动机驱动电流:

$$I_i = kJ_e \frac{\omega_b - \omega_e - n\delta_i}{T} + kM_{i-1} \quad (6.1)$$

### 9.3 控制方案评价

**优点:**

1. 相比于第五问, 通过比较准确预测的角速度与理想值误差, 可以使对角速度的控制效果更好。

2. 该方案的实时性较好, 预测角速度误差的过程中主要只需求解一个微分方程, 因此于预测角速度误差需要的时间不多, 能够很快得到每段时间内电流的变化情况。

**缺点:**

1. 制动开始时, 最初的一段时间内每个角速度的修正只能按第五问的控制方法进行修正, 在这段时间内会有误差修正不充分而导致这段时间内控制效果较差。

2. 该方案的容错性较差, 由于系统或传感器故障导致一些测量值变化非常奇异, 而灰色预测GM(2,1)模型很难对这些错误值进行剔除或矫正。

### 9.4 从其他角度考虑的控制方案

#### 9.4.1 基于神经网络对角速度与理想值误差的预测的控制方案

当  $t_i$  时刻前一段时间内每个时间点角速度与理想值的误差的变化很不规则, 即系统误差规律性不强时, 一般的方法很较为准确的预测出  $t_i$  时刻角速度与理想值误差的预测值为  $\delta_i$ 。这种情况下由于神经网络有很强的容错性和鲁棒性, 可以考虑神经网络模型对  $\delta_i$  进行预测, 下面采用最常用的BP网络模型<sup>[5]</sup>进行简要说明。

该问题中BP网络的结构如图12

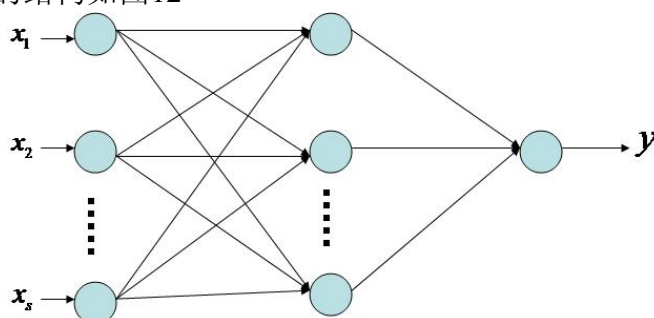


图12 BP神经网络结构图

取预测的时间点  $t_i$  前  $m$  个时间点的角速度与理想值的误差序列:

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$$

在网络的学习过程中, 网络的输入样本组为:

$$\begin{cases} P_1 = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(s)) \\ P_2 = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(s+1)) \\ \dots \\ P_{m-s} = (x^{(0)}(m-s), x^{(0)}(m-s+1), \dots, x^{(0)}(m-1)) \end{cases}$$

对应的目标值样本为:  $T = (x^{(0)}(s+1), x^{(0)}(s+2), \dots, x^{(0)}(m))$

根据实际情况判断是否进行归一化处理, 然后通过合适的传递函数和训练规则对各层间的权值和阈值进行修正, 完成对网络的训练。

对训练好的网络输入向量  $T = (x^{(0)}(m-s+1), x^{(0)}(m-s+2), \dots, x^{(0)}(m))$ , 便可得到  $t_i$  时刻角速度与理想值误差的预测值为  $\delta_i$ 。将此时得到的  $\delta_i$  代入(6.1)便得到电流  $I_i$  的值。

#### 9.4.2 单个神经元自适应 PID 控制方案

由于电动机驱动电流的控制系统需要较强的实时性, 需要在很短的预测出角速度与理想值误差, 而神经网络一般需要较长时间的用来对网络进行训练, 才能进行误差的预测, 有文献[6][7]提出用单个神经元自适应PID控制方案。

单神经元自适应PID控制的基本原理是, 选取单神经元的输入输出函数为比例函数, 通过某种学习规则得到的神经元的连接权重  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  和  $\omega_3$  便直接反应了PID的3个参数的大小, 然后得到的控制增量。

单神经元自适应PID控制结构如图13, 其中系统给定值  $r$  与系统输出  $y$  经变换后得神经元输入信号,  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  神经元输出PID 控制增量  $\Delta u$ 。

单个神经元PID控制算法为:

$$\Delta u = K \sum_{i=1}^3 \omega_i(k) x_i(k), \quad u(k) = u(k-1) + \Delta u$$

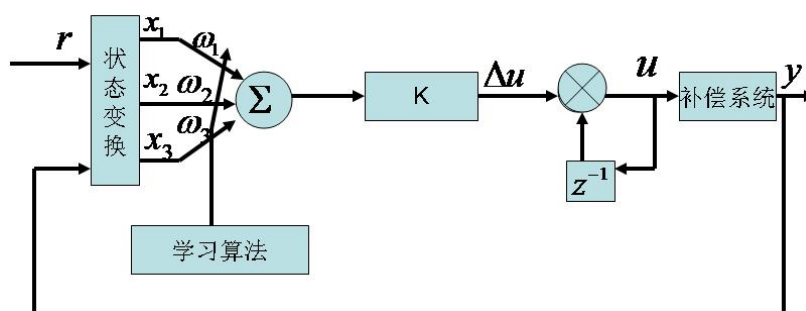


图13 单神经元自适应PID控制结构图

#### 9.5 控制方案的比较

以上控制方案各有优缺点。

基于GM(2,1)的控制方案中由于预测角速度误差的过程中主要只需求解一个微分方程, 因此于预测角速度误差需要的时间不多, 能够很快得到每段时间内电流的变化情况, 所以该方案的实时性很好。而鲁棒性和容错性较差, 对系统误差变化的规律要求也较强。

基于神经网络的控制方案具有很好的鲁棒性和容错性, 对系统误差变化规律的要求较低。但由于训练网络的时间较长, 所以该方案的实时性不好。

单神经元自适应PID控制方案个种特性的好坏则居于以上两个方案之间。

对它们的实时性、鲁棒性（参数摄动下维持性能的特性）、容错性、对系统误差变化规律的要求以及各个方案自身的特征等量进行定性比较, 得到下表:



表1 控制方案比较表

	基于GM(2,1)的控制方案	基于神经网络的控制方案	单神经元自适应PID控制方案
实时性	好	差	较好
鲁棒性	差	好	较好/好
容错性	差	好	较好/好
对系统误差变化规律的要求	较高	较低	较低

由于在本问题中要求控制时间间隔为10ms左右，即要求控制方法的实时性非常好，而且在合理假设情况下系统误差变化规律性也是较高的，因此综合来看基于GM(2,1)的控制方案最符合要求。

#### 参考文献：

- [1] 薛定宇, 陈阳泉, 高等应用数学问题的 MATLAB 求解, 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [2] 马继杰, 吴博达, 刘笑羽等, 制动器惯性台架电模拟惯量的研究, 汽车技术, 2009 年 4 期, 49-52.
- [3] 宁国宝, 张力军, 尹东晓等, 制动盘端面跳动引起制动力矩波动的建模分析, 同济大学学报, 第 34 卷第 8 期, 2006.8.
- [4] 邓聚龙, 灰预测与灰决策, 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.
- [5] 葛哲学, 孙志强, 神经网络理论与 MATLAB R20007 实现, 北京: 电子工业出版社 2007.
- [6] 孙林军, 智能 PID 控制研究, 浙江工业大学硕士学位论文, 2003.
- [7] 徐小军, 陈循, 尚建忠等, 单神经元 PID 的波浪补偿系统自适应控制与仿真, 机械电子, 2009.8.