

飞越北极的数学模型

钟绍军, 骆凤银, 王国刚

指导老师: 数模组

(黄冈师范学院, 黄冈 438000)

编者按: 本文为这次竞赛中 C 题的优秀答卷之一. 在将地球视为旋转球体时, 论文给出了多种近似计算旋转椭圆面上两点之间短程线的方法, 其中的模拟搜索法有一定的新意. 论文对模型的验证做得很好. 在将地球近似作为球体的情况, 用互联网上获得的数据与模型的计算结果进行了对照检验. 在将地球近似为旋转椭圆体的情形又用数学软件中求近似测地线的程序的计算结果对模型计算结果进行了检验, 这是值得提倡的.

摘要: 本文针对扬子晚报提出的飞机飞越北极的最节时航线问题作了详尽、细致、深入的分析, 从而验证了在将地球考虑为球体和椭圆体两种情况下, “飞机从北京直飞到底律特要节省 4 小时”的结论. 文中利用微分几何的知识建立了合理解释该报道的数学模型, 解决了空间任意两点间的曲面最短距离的算法问题, 同时又阐述了求曲面上两点之间的最短距离 (特别是椭圆面) 的近似计算方法: 压缩比率法、曲线射影法和模拟搜索法. 另外, 本文针对空间曲面上的最短程问题所建立的数学模型可以求解出地球上任意两点间的最短距离, 具有很强的推广性.

关键词: 数学模型; 测地线; 压缩比率法; 曲线射影法; 模拟搜索法

1 问题的提出 (略)

2 问题的分析

首先分析当地球是一个半径为 R 的均匀球体时的情况. 先在曲面上建立直角坐标系, 以地心为坐标原点 O , 以赤道平面为 XOY 平面, 以 0 度经线 (即本初子午线) 圈所在的平面为 XOZ 平面. 那么, 我们就可以写出球面的参数方程如下:

$$\begin{cases} X = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \cos \varphi \sin \theta \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < \pi) \quad (1)$$

根据解析几何的基础知识可以解出球面上任意两点 P_1, P_2 间的圆心角 $\angle P_1OP_2$ 的度数. 由微分几何的知识可知道, 球面上任意两点 (不是一条直径的两个端点) 之间的最小距离就是过这两点的大圆 (即经过球心的圆) 的劣弧长. 根据这一方法, 我们就可以确定任意两点之间的飞行最短航线.

再来分析一下地球为旋转椭圆体时的情形, 这比球体的情况要复杂得多. 我们无法确定在未改变航道时的情况下飞机的最短航线, 也无法确定球面上任意两点之间的测地线方程. 但是, 我们可以假定椭圆面上任意两点 A, B 之间的测地线在通过 A, B 两点的一个平面内. 因此, 我们可以写出过直线 AB 的平面族 (含一个参数). 下面就要求出过直线 AB 的平面与椭圆面的交线. 我们可以利用解析几何知识来完成这些工作. 最后我们就可以利用搜索的方法求出交线上 A, B 两点之间的劣弧长. 然后求出弧长的最小值. 在本文后面的模型建立和求解过程中有该法的详细解答过程.

对于椭球面上任意两点的最短曲面距离的求解, 目前还没有精确的方法, 但从问题的可行性出发, 我们采用了近似计算的方法, 运用数学类推的思想, 在球体的基础上进行类推, 算出旋转椭球面上两点之间的最短距离. 在后面的求解过程中我们给出了详细的解答过程.

3 问题的假设

- 1) 飞机从机场起飞与降落过程的时间忽略不计. 飞机从 A 地到 B 地的飞行时间只考虑 A 地上空(10 千米高度)和 B 地上空(10 千米高度)两点之间的测地线长;
- 2) 飞机在飞行过程中, 途经各站起飞、降落及中途加油和等待调度所用的时间均忽略不计;
- 3) 飞机总在地球的引力场内飞行, 而地球的自转和公转对飞机的绝对飞行速度和大小的影响忽略不计, 飞机的飞行速度只考虑飞机相对于地球的速度;
- 4) 飞机的航线始终满足最短路线原则. 即飞机从 A_i 站到 A_j 站的航线是曲面上点 A_i 与 A_j 之间的最短路线, 即飞机从一目的地到另一目的地不绕道飞行的路线;
- 5) 飞机飞行过程中的飞行速度保持不变.

4 符号的说明

(x_i, y_i, z_i)	球面(或椭球面)上的点 A_i 的三维直角坐标;
(θ, φ)	球面(或椭球面)上的点 A_i 的经度与纬度;
t	飞机的飞行时间;
Δt	飞机飞行所节省的时间;
l_i	城市 A_i 与 A_{i+1} 之间的最短路程;
$l_{\text{总}}$	飞机分段飞行路程相加的总路程;
R	地球半径;
h	飞机飞行高度;
(a, b)	旋转椭球体的长半轴与短半轴;
r_i	城市 A_i 离地心的距离(即径长);

5 模型的建立

基于以上对问题的详细分析, 我们可以建立以下的数学模型来验证“从北京至底特律可节省 4 小时”的结论.

情形一、假设地球是半径为 6371 公里的球体

此时 A 、 B 是地球上空相距地面 10 公里的两点, 由微分几何知识我们可以知道: 过 A 、 B 两点的大圆的劣弧长即为两点的最短距离, A 、 B 两点的坐标分别为:

$$A((R+h)\cos\theta\cos\varphi, (R+h)\sin\theta\cos\varphi, (R+h)\sin\varphi)$$

$$B((R+h)\cos\theta\cos\varphi, (R+h)\sin\theta\cos\varphi, (R+h)\sin\varphi)$$

$$\text{从 } A \text{ 地到 } B \text{ 地的飞行路程 } l_{AB} = (R+h) \arccos\left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}\right)$$

$$\text{从 } A \text{ 地到 } B \text{ 地的飞行时间 } t_{AB} = \frac{l_{AB}}{980}$$

情形二、假设地球是一个旋转椭球体(赤道半径为 6378km, 子午线短半轴为 6357km)

此时 A 、 B 是地球上空距地面 10km 的任意两点, 坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) . 在 x 轴上任取一点 $C(m, 0, 0)$, 则过 A 、 B 两点的椭圆曲线方程为:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - m & y & z \\ x_1 - m & y_1 & z_1 \\ x_2 - m & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \frac{x^2 + y^2}{(6378 + 10)^2} + \frac{z^2}{(6357 + 10)^2} = 1 \end{cases} \quad (2)$$

由此方程组可解得: $\begin{cases} y = y(x, m) \\ z = z(x, m) \end{cases}$. 那么由解析几何知识可知 A 与 B 之间的弧长:

$$l(m) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^2 + z_x^2} dx$$

我们可求出 $l(m)$ 的最小值, 即为 AB 的曲面最短路线长

6 模型的求解

情形一、假设地球是一个半径为 $R = 6371$ 千米的球体

以地心为坐标原点, 以赤道平面为 XOY 面, 以 0 度经线(即本初子午线)圈所在的平面为 XOZ 平面, 建立三维直角坐标系, 球面上各点向量可表示为:

$$\vec{OA}_i = (R + h)(i \cos \theta_i \cos \varphi_i + j \sin \theta_i \cos \varphi_i + k \sin \varphi_i)$$

$$\vec{OA}_{i+1} = (R + h)(i \cos \theta_{i+1} \cos \varphi_{i+1} + j \sin \theta_{i+1} \cos \varphi_{i+1} + k \sin \varphi_{i+1})$$

则两地之间的距离可表示为:

$$AA_{i+1} = (R + h) \cdot \arccos \left(\frac{|\vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_{i+1}|}{|\vec{OA}_i| \cdot |\vec{OA}_{i+1}|} \right)$$

沿飞行路线飞行总时间是 $t = \sum_{i=0}^{11} \frac{AA_{i+1}}{980}$, 飞机从北京直达底特律的航行时间为, 则 $t =$

$\frac{AA_{11}}{980}$, 则飞机直达所节省的时间为: $\Delta t = t - t$. 从图 1 的飞行路线示意图中我们可以基本了解飞机的航线:

以上我们给出了解题的数学模型, 现在用 C 程序设计语言(程序略)计算出具体结果(单位: 公里):

“北京”与 A_1 之间的距离是: 1113.191576 A_1 与 A_2 之间的距离是: 1758.78953
 A_2 与 A_3 之间的距离是: 4624.407995 A_3 与 A_4 之间的距离是: 1339.08267
 A_4 与 A_5 之间的距离是: 641.162553 A_5 与 A_6 之间的距离是: 538.594244
 A_6 与 A_7 之间的距离是: 651.536106 A_7 与 A_8 之间的距离是: 497.569491
 A_8 与 A_9 之间的距离是: 227.843664 A_9 与 A_{10} 之间的距离是: 2810.85917
 A_{10} 与“底特律”之间的距离是: 331.924046
 “北京”直达“底特律”的距离是: 10684.861107
 沿飞行原路线飞行总时间 $t = 14.831600$ (小时)

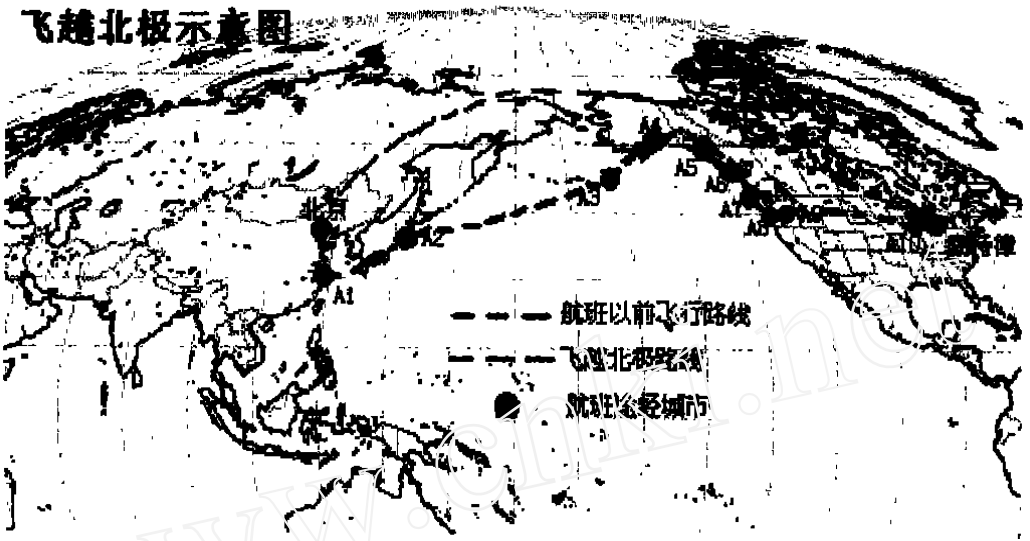


图 1

飞机从北京直达底特律的航行时间 $t = 10\ 902912$ (小时)

飞行节省的时间 $\Delta t = 3\ 928681$ (小时)

通过网上查询, 我们在美国一家权威地理网站(<http://www.indo.com/distance/>) 查询到本题所涉及到的地点的距离, 查询结果如下: (单位: 公里)

- | | |
|------------------------|------------------------|
| “北京”与A 1 之间的距离是: 1112 | A 1 与A 2 之间的距离是: 1759 |
| A 2 与A 3 之间的距离是: 4627 | A 3 与A 4 之间的距离是: 1340 |
| A 4 与A 5 之间的距离是: 642 | A 5 与A 6 之间的距离是: 539 |
| A 6 与A 7 之间的距离是: 651 | A 7 与A 8 之间的距离是: 498 |
| A 8 与A 9 之间的距离是: 228 | A 9 与A 10 之间的距离是: 2814 |
| A 10 与“底特律”之间的距离是: 325 | |

“北京”直达“底特律”的距离是: 10681

沿飞行路线飞行总时间 $t = 14\ 822$ (小时)

飞机从北京直达底特律的航行时间 $t = 10\ 89898$ (小时)

飞行节省的时间 $\Delta t = 3\ 9230$ (小时)

通过对比我们发现以上方法求解的结果与实际情况基本吻合, 这说明“北京至底特律的飞行时间可节省 4 小时”的报道是有科学根据的

情形二、假设地球是一个旋转椭球体, 赤道半径为 6378 公里, 子午线短半轴为 6357 公里

此时过空间任意两点A , B (A , B 距地面 10 公里) 的平面族方程可表示为:

$$\begin{vmatrix} x - m & y & z \\ x_1 - m & y_1 & z_1 \\ x_2 - m & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

其中 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 分别是 A、B 两点的坐标, m 为参数, 显然平面过 X 轴上的一点 C

$(m, 0, 0)$, 地球球面的方程为 $\frac{x^2 + y^2}{(6378 + 10)^2} + \frac{z^2}{(6357 + 10)^2} = 1$, 则过 A、B 两点的曲线方程为:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-m & y & z \\ x_1-m & y_1 & z_1 \\ x_2-m & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \frac{x^2+y^2}{(6378+10)^2} + \frac{z^2}{(6357+10)^2} = 1 \end{cases}$$

$$A、B \text{ 的弧长: } l_{AB}(m) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^2 + z_x^2} dx \quad (3)$$

求解出 $l_{AB}(m)$ 的极小值即为 $A、B$ 两点的最短曲面距离。由于上面的含参椭圆积分没有显式解析表达式, 所以我们对模型作如下修正

首先我们观察从北京到底特律中途所经城市的纬度关系, 不难发现, 各城市的纬度之差都不会超过 10° ; 可以作这样的近似处理: A_i 与 A_j 之间的曲面最短距离 L_{ij} 可由过 $A_i A_j$ 的平面 (即过最短距离的弧所在的平面) 上的弧 $A_i A_j$ 在赤道上的投影弧的长度来近似计算。虽然此方法计算比较粗糙, 但所得的弧长比实际弧长小, 因此, 节约的时间会更长。

在原模型的基础上, 我们用数学软件 Mathematica 4.0 写出了如下的模拟搜索法的源程序 (略)。当每两个相邻城市之间的最短距离算出来以后, 就可以得到:

原航线的总长度为: 14458.4 公里; 飞行时间为: 14.7535 小时;

飞越北极直达的航线长为: 10605.8 公里; 直达时间为: 10.8222 小时;

节省的时间为: $\Delta t = 3.9313$ 小时

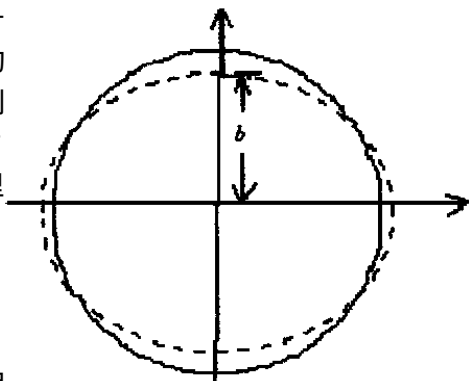
7 模型的改进

前面我们利用空间曲线积分的思想求出了旋转椭球面上的弧线长, 计算所得的结果精度较高, 且结果比较符合实际情况。但对弧长的积分推导计算量大, 表达式很复杂。我们可采用“空间压缩比率法”更直观地计算出大致的结果, 具体改进方案如下:

改进方案一、压缩比率法

(1) 轴向压缩比率法:

当我们假设地球是旋转椭球体时, 由题知长半轴 $a = 6371$ 公里 (R 为地球半径), 而短半轴 $b = 6357$ 公里, 与 R 有差距。若忽视 R 与 a 的微小差距, 我们假设椭球是由球体沿短半轴 b 压缩而得到的, 在球面上的原来各点 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$ 压缩后在椭球面上。且两点间的纬度差越大, 对压缩后的弧长影响也越大, 同一纬度上的点, 压缩后弧长变化很小, 由题目所给的条件可知: A_0, A_1, \dots, A_{11} 各相邻点的纬度差分别为: $8.9^\circ, 5.7^\circ, 9.3^\circ, 4.5^\circ, 3.0^\circ, 5.0^\circ, 0.4^\circ$; 北京与底特律的纬度差为 3° , 差值都很小。由此可见这里我们用压缩法是行之有效的。压缩比率为定值 $k =$



$$k = \frac{b+h}{R+h} = \frac{6357+10}{6371+10} = 0.997806; \text{ 假设地球为球体时,}$$

我们已求出了航线的长度, 在将这一结果乘以 k , 则可得到为椭球体时的航线长。下面是我们利用这一方法得出的结果:

分段飞行时: 总航线的长度 $l=14534.96114$ 公里, 总的飞行时间 $t=14.799$ 小时;
从北京直达底特律的航线长度 $l=10657.6$ 公里, 飞行时间 $t=10.872522$ 小时,
则缩短的路程 $\Delta l=3877.36$ 公里, 节省的时间 $\Delta t=3.9265$ 小时

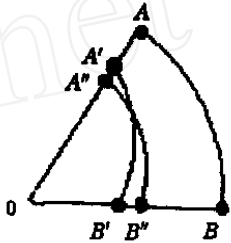
(2) 径向压缩比率法

假设椭球体是球体沿半径方向逐点按比率收缩而得到的, 收缩可看作是沿半径方向进行的, 即球心角在收缩过程中将保持不变, 球面上各点收缩的比率不同 椭球面上的曲线弧长可近似地用下式表示:

$$l=\frac{r_i+r_{i+1}}{2}\times\beta\tag{4}$$

其中 r_i 表示椭球面上点的径长, β 表示各段弧对应的球心角 由已知的经度 θ 和纬度 φ 可用将所附程序(略)中的“ $R+10$ ”分别改为 a 和 b , 得出各点在椭球体上的坐标:

$$\begin{cases} x=a\cdot\cos\theta\cos\varphi \\ y=a\cdot\sin\theta\cos\varphi \\ z=b\cdot\sin\varphi \end{cases}\quad (\text{其中 } a=6388, b=6367)$$



得到 a_0, a_1, \dots, a_{11} 的坐标 球心角 β 可根据下面的公式得到:

$$\beta=\frac{2R^2-\left|r_i\cdot r_{i+1}\right|}{2R^2}$$

根据上面的公式得到一组数据(单位: 弧度): $\beta_0=0.173492, \beta_1=0.27563, \beta_2=0.724716, \beta_3=0.209856, \beta_4=0.100481, \beta_5=0.084405, \beta_6=0.102103, \beta_7=0.0779813, \beta_8=0.035693, \beta_9=0.440504, \beta_{10}=0.0508779$, 将这组数据代入上面的弧长公式(4) 得到分段飞行的数据(表 1), 所以分段飞行的时间: $t=14.8096$ (小时);

飞机直飞时: $\left|A_0A_{11}\right|=9468.31, \beta=1.67184,$

则飞机直飞的航线长度: $l=10664.5$ (公里), 直飞所用的时间: $t=10.8821$ (小时),
所以飞机从北京直飞至底特律可节省的时间:
 $\Delta t=3.9275$ (小时).

改进方案二: 利用现成的软件包求曲面上两点之间的最短路程

本解法的关键是要弄清楚曲面上经过已知两点的测地线长是否就是这两点的最短距离 参考文献[1] 给了我们这一问题一个明确的回答, 有定理证明这是正确的

有了以上的结论, 我们就可以用数学软件“Mathematica4.0”, 执行以下命令可以算出两城市间的航线长度:

```
<<MiscellaneousGeodesy
L=SpheroidalDistance[{ $\varphi_1, \theta_1$ },{ $\varphi_2, \theta_2$ }, Radius->R,
SemimajorAxis->b, Eccentricity->e]/N
```

表 1

径长 r (单位: 公里)	弧长 l (单位: 公里)
6379.37	1107.04
6382.44	1758.96
6380.7	4622.01
6374.61	1337.44
6371.63	640.275
6372.58	537.935
6343.92	650.887
6375.69	497.227
6376.78	227.642
6376.78	2809.42
6378.60	324.531
6378.46	总计: 14513.4

$$t = l/980/\sqrt{N}$$

其中: L 为两点间的弧长, φ_1 为城市 1 的纬度, φ_2 为城市 2 的纬度, θ_1 为城市 1 的经度, θ_2 为城市 2 的经度, e 为地球的离心率, t 为城市 1 到城市 2 的最短飞行时间

根据上面的命令, 我们可以得出各相邻城市间的距离: l_1, l_2, \dots, l_{11} ; 最后得出:

分段飞行的总距离 $l_{\text{总}} = 14503.693$ (公里), 飞行总时间 $T_{\text{总}} = 14.79766$ (小时);

直飞的飞行距离: $l = 10658.8$ (公里), 飞行时间 $t = 10.8763$ (小时);

所以节省的时间 $\Delta t = 3.92136$ (小时).

可见, 改进后的方案运算简便, 且得出的结果: $\Delta t = 3.92136$ 小时与原模型求得值 3.9353 小时比较接近

8 模型的评价与推广

一、模型的评价:

(一) 本模型成功地解决了空中飞行最省时航线问题, 其优点主要在于:

1. 能充分利用地理知识和实物图对路线进行一定的限制, 避免了选择航线的盲目性

2. 运算的效率较低, 我们重新修改后的新算法, 极大地提高了模型的运算效率, 且吻合性能也较好.

3. 本模型在建立过程中, 充分用各种方法来求最省时航线, 体现出了不同算法的利与弊, 具有不同程度的可用性

4. 用 C 语言程序进行大量的计算, 运行效率高, 可推广到多个空间点的计算

(二) 不足以及需要改进的地方在于:

1. 我们的模型只适合空间光滑的凸曲线的最短距离问题的计算. 对于非规则形状的曲面, 它的测地线不一定在一个平面内, 这就超出了本模型的使用范围

2. 本模型内假设飞机只在恒定的高度飞行, 这也是不实际的. 在实际的飞行过程中飞机是不会只在恒定的高度上飞行的, 实际上它在飞行过程中可能会因遇到高山或其他障碍物而不断爬升和下降. 所以如果我们能给出不断变化的海拔高度, 并考虑飞机因为爬升或下降所多用的时间和多飞行的路程, 那我们的模型可能会更实用

二、模型的推广:

本模型在计算空间未知曲线的弧长时, 引入了“曲线射影法”和“压缩比率法”近似算法, 在实际工程中, 将对工程建筑和导弹发射等预测控制都会带来帮助

(1) 对于最初积分算法的模型, 可以推广到多维空间的情况

(2) 对于曲线射影法, 可根据投影值符合率, 选择最佳投影面

(3) 用压缩比率的近似计算方法, 则可将不规则立体转化为规则立体, 从而简化计算

参考文献:

[1] 梅向明, 黄敬之. 微分几何. 高教出版社, 1987.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(第二版). 华东师大出版社, 1997.

[3] 姜启源. 数学模型. 高等教育出版社, 1987.

[4] 谌安琦. 科技工程中的数学模型. 中国铁道出版社, 1988.

[5] 裴宗燕. Mathematica 数学软件系统的应用及其程序设计. 北京大学出版社, 1994.

[6] 谭浩强. C 语言程序设计(第二版). 清华大学出版社, 1998.

Mathematical Model for Flying Across the North Pole

ZHONG Shao-jun, LUO Feng-yin, WANG Guo-gang

(Huanggang Teachers College, Huanggang 438000)

Abstract By carefully analysing we give a definite answer to the question posed in Yang Zi Night News that the time for flying from Beijing to Detroit will be four hours shorter if the plane can fly across the North Pole. A reasonably mathematical model is framed in both cases that the earth is a sphere or an ellipsoid. We also give an algorithm for finding the shortest distance between two points in a surface (especially in an ellipsoid). Two approximate algorithms, constriction ratio method and imitating search method, are added.

“飞越北极”的数学模型

仲银花, 李利军, 张 琴

指导老师: 数模教练组

(连云港化工高等专科学校, 连云港 222001)

编者按: 本文对视地球为椭球的情况采用了测量学中的贝塞尔方法和用积分计算弧长的方法, 针对地球扁率很小的特点对积分求弧长给出了一个方便的近似公式, 使计算大为简化, 这是本文的一个特点. 在处理实际问题时, 在满足一定精度的前提下, 合理地作简化近似可以用较少的计算达到预期的目的. 本文的另一个特点是对大地纬度和归化纬度的关系交待很清楚, 反映了同学查阅背景材料是出色的.

摘要: 本文将“飞行时间节约 4 小时”的问题, 在飞行速度恒定的条件下, 转化为计算飞机航程的问题. 根据题目的要求建立两个模型. 在球体模型 I 中, 利用几何知识推出飞机航程和经纬度之间的直接关系, 进而算得飞行节约的时间为 4.0504 小时. 在旋转椭球体模型 II 中, 解法 I 利用测量学中的贝塞尔方法, 给出了飞机航程的近似计算公式, 算得飞行节约的时间为 4.041 小时. 解法 II 则构造了一个简单的弧长作为两地间的近似航程, 利用积分给出了弧长的精确计算公式和近似计算公式, 算得飞行节约的时间分别为 4.0535 小时和 4.0531 小时. 这些结果解释了原题中“节约 4 小时”的估计.

1 问题的提出(略)

2 模型的假设

1. 不考虑地球的自转
2. 飞机每经相邻两地的航程, 均以曲面上两点间最短距离进行计算
3. 飞机飞行中途不需降落加油, 同时忽略升降时间