第十一讲：线性与整数规划问题建模方法

刘保东
山东大学软件学院
baodong@sdu.edu.cn

一、概述

- **优化问题:** 一般是指用"最好"或"最满意" 的方式，使用或分配有限的资源, 如劳动力、原材料、机器、资金等, 使得费用最小或者利润最大.
- 涉及此类问题的数学建模方法包括: 线性规划、整数规划、0-1 规划、非线性规划、动态规划、多目标规划、对策论、博弈论、图论等.
- 建立优化问题数学模型的**基本步骤或三要素**:

  第一步　确定问题的**决策变量**: 一般用 n 维列向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 表示.

  第二步　构造模型的**目标函数**: $f(\mathbf{x})$

  第三步　确定决策变量允许取值的范围即**约束条件**:

$$\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

其中Ω 称可行域, 常用一组不等式(或等式)

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \cdots m$$

来界定, 称为**约束条件**

一、概述

- **优化问题:**一般是指用"最好"或"最满意" 的方式，使用或分配有限的资源, 如劳动力、原材料、机器、资金等, 使得费用最小或者利润最大.
- 涉及此类问题的数学建模方法包括: 线性规划、整数规划、0-1 规划、非线性规划、动态规划、多目标规划、对策论、博弈论、图论等.
- 建立优化问题数学模型的**基本步骤或三要素**:

  第一步 确定问题的**决策变量**: 一般用 n 维列向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 表示.

  第二步 构造模型的**目标函数**: $f(\mathbf{x})$

  第三步 确定决策变量允许取值的范围即**约束条件**:

$$\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$$

  其中Ω 称可行域, 常用一组不等式(或等式)

$$g_i(\mathbf{x})\le 0, i=1,2,\cdots m$$

  来界定, 称为**约束条件**

一、概述

- 优化问题:一般是指用"最好"或"最满意" 的方式，使用或分配有限的资源, 如劳动力、原材料、机器、资金等, 使得费用最小或者利润最大.
- 涉及此类问题的数学建模方法包括: 线性规划、整数规划、0-1 规划、非线性规划、动态规划、多目标规划、对策论、博弈论、图论等.
- 建立优化问题数学模型的基本步骤或三要素:

第一步 确定问题的决策变量: 一般用 n 维列向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 表示.

第二步 构造模型的目标函数: $f(\mathbf{x})$

第三步 确定决策变量允许取值的范围即约束条件:

$$\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$$

其中Ω 称可行域, 常用一组不等式(或等式)

$$g_i(\mathbf{x})\le 0, i=1,2,\cdots m$$

来界定, 称为约束条件

优化问题的一般形式

- **最优化模型:** 一般可表述为如下形式

$$\min_{\mathbf{x}}(\text{or}\max_{\mathbf{x}})\ z = f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad , g_i(\mathbf{x}) \leq (<, =, >, \geq) 0, i = 1, 2, \cdots, m \tag{2}$$

  式中，$f(\mathbf{x})$称为**目标函数**，$g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ 称为**约束条件**

- 称由(1)、(2) 组成的模型为**约束优化模型**，称仅由(1) 式构成的模型为**无约束优化模型**
- 若在优化模型中, **目标函数** $f(\mathbf{x})$ 和约束条件中的$g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \cdots, m$ 都是线性函数, 则称该模型为**线性规划模型**.

二、线性规划(Linear Programming) 模型

- 线性规划(Linear Programming, 简记为 LP) 是优化理论中最重要的一个分支, 是研究较早、理论相对完善、应用也最广泛的一类数学方法.
- 这类方法涉及的研究问题主要包括两个方面：一是对于给定的任务, 如何以最小的成本或费用(如人力、资金、时间等)去完成这项任务; 二是在现有的资源下, 如何组织或安排, 以产生最大的收益.

例1:生产计划安排问题:

某工厂用 3 种原料 P_1, P_2, P_3, 生产3 种产品 Q_1, Q_2, Q_3. 已知的条件如表1 所示，试制订出总利润最大的生产计划.

表1 单位产品所需原材料的数量(千克)

原料	产品			原材料可用量(千克/日)
	Q_1	Q_2	Q_3	
P_1	2	3	0	1500
P_2	0	2	4	800
P_3	3	2	5	2000
单位产品的利润(万元)	3	5	4	

问题分析:

- **决策变量**：设产品Q_j 的日产量为x_j 个单位，$j = 1, 2, 3$，则产品日产量$x_j, j = 1, 2, 3$ 即为决策变量
- **约束条件**：
  1. 非负约束：根据常识，$x_j, j = 1, 2, 3$ 不可能取负值，即必须有$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$;
  2. 原材料约束：三种原料的日消耗量分别不能超过它们的日可用量（供应量），即它们又必须满足：

$$\begin{array}{llll} 2x_1+ & 3x_2 & & \leq 1500 \\ & 2x_2 & +4x_3 & \leq 800 \\ 3x_1+ & 2x_2 & +5x_3 & \leq 2000 \end{array}$$

- **目标函数**： 求x_1，x_2，x_3，使其总利润

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

达到最大

问题分析:

- 决策变量：设产品Q_j 的日产量为x_j 个单位，$j = 1, 2, 3$，则产品日产量$x_j, j = 1, 2, 3$ 即为决策变量
- 约束条件：
  1. 非负约束：根据常识，$x_j, j = 1, 2, 3$ 不可能取负值，即必须有$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$;
  2. 原材料约束：三种原料的日消耗量分别不能超过它们的日可用量（供应量），即它们又必须满足：

$$\begin{array}{llll} 2x_1+ & 3x_2 & & \leq 1500 \\ & 2x_2 & +4x_3 & \leq 800 \\ 3x_1+ & 2x_2 & +5x_3 & \leq 2000 \end{array}$$

- 目标函数：求x_1，x_2，x_3，使其总利润

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

达到最大

问题分析:

- 决策变量：设产品Q_j 的日产量为x_j 个单位，$j=1,2,3$，则产品日产量$x_j, j=1,2,3$ 即为决策变量
- 约束条件：
  1. 非负约束：根据常识，$x_j, j=1,2,3$ 不可能取负值，即必须有$x_j \geq 0, j=1,2,3$;
  2. 原材料约束：三种原料的日消耗量分别不能超过它们的日可用量（供应量），即它们又必须满足：

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 \qquad\quad &\leq 1500 \\
2x_2 + 4x_3 &\leq 800 \\
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 2000
\end{aligned}$$

- 目标函数： 求x_1，x_2，x_3，使其总利润

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

达到最大

数学模型

- **模型描述**

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + & 3x_2 & & \leq 1500 \\ & 2x_2 & +4x_3 & \leq 800 \\ 3x_1 + & 2x_2 & +5x_3 & \leq 2000 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{3}$$

  其中max 是极大化(maximize)的简记符号

- **进一步思考：** 请尝试把该模型延拓到 m 种产品, n 种原材料的情形

例2 运输问题

一个制造厂要把若干单位的产品从A_1, A_2 两个仓库发送到零售点B_1, B_2, B_3, B_4. 已知

1. 若仓库 A_i 能供应产品的数量为 $a_i, i = 1, 2$;
2. 零售点 B_j 所需产品的数量为 $b_j, j = 1, 2, 3, 4$;
3. 从仓库 A_i 运一个单位的产品到 B_j 的运价为 $c_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$.
4. 假设能供应的总量等于需要的总量, 即

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j.$$

问应如何组织运输才能使总的运输费用最小?

- **问题分析:** 确定运输方案和运输费用, 寻求运输总费用最小的运输方案
- **决策变量:** 从发点往收点的运输量.
  设$x_{ij}, i = 1, 2, \ j = 1, 2, 3, 4$ 表示从仓库A_i 运往零售点B_j 的产品数量.
- **目标函数:** 总运费. 总的运输费用为

$$
\begin{aligned}
z &= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} \\
&\quad + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}.
\end{aligned}
$$

- **约束条件：**
  1. 供应点约束：从A_1,A_2 两仓库运往四地的产品数量总和应该分别是a_1 单位和a_2 单位,所以x_{ij} 应满足

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2$$

  2. 需求点约束：运输到 B_1,B_2,B_3,B_4 四地的产品数量应该分别满足它们的需求量,即x_{ij} 还应该满足以下条件：

$$x_{11} + x_{21} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} = b_2$$
$$x_{13} + x_{23} = b_3$$
$$x_{14} + x_{24} = b_4$$

  3. 非负约束：x_{ij} 表示运量,不能取负值,即 $x_{ij} \geq 0 (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4)$

数学模型：

$$
\begin{aligned}
\min z \quad = \quad & c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{14}x_{14} \\
& +c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}+c_{24}x_{24}
\end{aligned}
$$

$$
s.t. \quad \begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=a_1, \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=a_2, \\
x_{11}+x_{21}=b_1, \\
x_{12}+x_{22}=b_2, \\
x_{13}+x_{23}=b_3, \\
x_{14}+x_{24}=b_4, \\
x_{ij}\geq 0, i=1,2; j=1,2,3,4.
\end{cases}
$$

运输问题的一般模型

1. 在本例题中供应量与需求量两者相等。这一类问题称为**收发平衡型的运输问题**。反之,称两者不等的情形为**收发不平衡型运输问题。**
2. 一般的运输问题可表述如下：
   - 要把某种物资从 m 个发点 $A_i, i = 1, 2 \cdots, m$, 调运给需要这种物资的 n 个收点 $B_j, j = 1, 2, \cdots, n$;
   - 发点 A_i 拥有物资量为 $a_i, i = 1, 2, \cdots, m$; 收点B_j 的需求量是 $b_j, j = 1, 2, \cdots, n$.
   - 已知 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, 从 A_i 运一个单位物资到 B_j 的运价是 c_{ij}.
3. 现在要确定一个调运方案, 即确定由 A_i 到 B_j 的运输量 $x_{ij}, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$, 在满足供需要求的条件下, 使总运输费用最省.

运输问题的一般模型

- 类似于上述示例的分析,易得一般收发平衡型运输问题的数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min z &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. & \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n \end{cases}
\end{aligned}
$$

- 尽管类似问题有许多,但归结出的数学模型却属于同一类问题, 即在一组线性等式或不等式的约束之下, 求一个线性函数的最大值或最小值的问题, 我们将这类问题称为**线性规划问题**.

例3 一家广告公司想在电视、广播上做广告，其目的是尽可能多地招徕顾客.下面是市场调查结果:

	电视			
	白天	最佳时间	无线电广播	杂志
费用(万元/次)	4	7.5	3	1.5
受影响顾客数(万人/次)	40	90	50	20
受影响女顾客数(万人/次)	30	40	20	10

这家公司希望广告费用不超过80(万元)，还要求:

1. 至少要有二百万妇女收看广告;
2. 电视广告费用不超过50(万元);
3. 电视广告白天至少播出3 次，最佳时间至少播出2 次
4. 通过广播、杂志做的广告要重复5 到10 次。

例3 广告问题

- **问题分析**: 确定广告策略, 即广告类型和次数
- **决策变量**: 令x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示白天电视、最佳时间电视、广播、杂志广告的次数.
- **约束条件**:
  1. 广告经费约束:
     $4x_1 + 7.5x_2 + 3x_3 + 1.5x_4 \leq 80;$
  2. 受广告影响的女顾客数约束:
     $30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 \geq 200$
  3. 电视广告的约束条件为:
     $4x_1 + 7.5x_2 \leq 50, \quad x_1 \geq 3, \quad x_2 \geq 2$
  4. 广播和杂志广告次数约束:
     $5 \leq x_3 \leq 10, \quad 5 \leq x_4 \leq 10$
  5. 非负条件：广告次数$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- **目标函数**:尽可能多地招徕顾客，即潜在的顾客数尽可能地多

$$Z = 40x_1 + 90x_2 + 50x_3 + 20x_4.$$

线性规划模型描述如下:

$$
\begin{aligned}
\max Z &= 40x_1 + 90x_2 + 50x_3 + 20x_4 \\
s.t. &\quad \left\{
\begin{array}{rl}
4x_1 + 7.5x_2 + 3x_3 + 1.5x_4 & \leq 80 \\
30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 & \geq 200 \\
4x_1 + 7.5x_2 & \leq 50 \\
x_1 & \geq 3 \\
x_2 & \geq 2 \\
10 \geq x_3 & \geq 5 \\
10 \geq x_4 & \geq 5 \\
x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 &
\end{array}
\right.
\end{aligned}
$$

2.2 线性规划模型的形式

线性规划问题的**一般形式**为

$$
\begin{aligned}
\min z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. & \left\{ \begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, p \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \ \ i = p+1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, q \\ x_j \lesseqgtr 0, j = q+1, \cdots, n \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

- 称$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ 为**目标函数**
- 向量$\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ 称为**价值向量**, $c_j(j = 1, \cdots, n)$ 称为**价值系数**
- 向量$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ 称为**右端向量**
- 条件$x_j \geq 0$ 称为**非负约束**;
- 符号$x_j \gtrless 0$ 表示变量x_j 可取正值、负值或零值, 称该类变量为**符号无限制变量** **或自由变量**.

基本概念：

- 一个满足所有约束条件的向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 称为线性规划问题的**可行解或可行点**
- 所有的可行点组成的集合称为线性规划问题的**可行区域**,记为 D
- 由线性代数和微分学中求条件极值的知识知，给定一个线性规划问题，下列三种情况必居其一
  1. $D = \emptyset$, 称该问题**无解或不可行**
  2. $D \neq \emptyset$, 但目标函数在D 上无界，此时称该问题**无界**；
  3. $D \neq \emptyset$, 且目标函数有有限的最优值，此时称该问题**有最优解**，在可行域中使目标函数达到最优值的点，称为LP问题的最优解,在最优点处的目标函数值即为最优值.

基本概念：

- 一个满足所有约束条件的向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 称为线性规划问题的**可行解或可行点**
- 所有的可行点组成的集合称为线性规划问题的**可行区域**,记为 D
- 由线性代数和微分学中求条件极值的知识知，给定一个线性规划问题，下列三种情况必居其一
  1. $D = \emptyset$，称该问题**无解或不可行**
  2. $D \neq \emptyset$，但目标函数在D 上无界，此时称该问题**无界**；
  3. $D \neq \emptyset$，且目标函数有有限的最优值，此时称该问题**有最优解**，在可行域中使目标函数达到最优值的点，称为LP问题的最优解,在最优点处的目标函数值即为最优值.

基本概念:

- 一个满足所有约束条件的向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 称为线性规划问题的**可行解或可行点**
- 所有的可行点组成的集合称为线性规划问题的**可行区域**,记为 D
- 由线性代数和微分学中求条件极值的知识知，给定一个线性规划问题，下列三种情况必居其一
  1. $D = \emptyset$，称该问题**无解或不可行**
  2. $D \neq \emptyset$，但目标函数在 D 上无界，此时称该问题**无界**；
  3. $D \neq \emptyset$，且目标函数有有限的最优值，此时称该问题**有最优解**，在可行域中使目标函数达到最优值的点，称为LP问题的最优解,在最优点处的目标函数值即为最优值.

LP模型的规范形式和标准形式

在很多时候,我们往往考虑的是LP问题的某些特殊情况。

- 当$p=0, q=n$ 时, 相应的LP问题变为

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

  称为LP的**规范形式**

- 当$p=m, q=n$ 时, 问题变为

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

  称为LP的标准形式.

LP模型的规范形式和标准形式

在很多时候,我们往往考虑的是LP问题的某些特殊情况。

- 当$p=0, q=n$ 时，相应的LP问题变为

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

称为LP的规范形式

- 当$p=m, q=n$ 时，问题变为

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

称为LP的**标准形式**.

LP模型形式的等价性

1. 一般形式变换为规范形式：必须消除等式约束和符号无限制变量，
   - 任一等式约束 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ 可用下述两个不等式约束去替代

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij})x_j \geq (-b_i)$$

   - 任意一个符号无限制变量 $x_j \gtrless 0$，可通过引进两个非负变量 $x_j^+ \geq 0$ 和 $x_j^- \geq 0$，并设

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

   这样就把LP 的一般形式变换为规范形式。

LP模型形式的等价性

1. 把一般形式变换为标准形式：
   - 把不等式约束变换为等式约束，
     - 剩余变量法：如对一个不等式约束$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ 引入一个非负变量(称为**剩余变量**) s_i, 用

       $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i,\ s_i \geq 0$$

       代替上述的不等式约束.
     - 松弛变量法：对如下形式的不等式约束$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ 可引进非负变量(称为**松弛变量**), 用

       $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i,\ s_i \geq 0$$

       代替相应不等式约束s_i
   - 对任意一个符号无限制变量的变换方法同前.

1.图解法

如果一个线性规划问题只有两个变量,则它的可行区域可以在平面上具体画出。这便于我们直观地了解可行区域 D 的结构,同时又可方便地利用目标函数与可行区域的关系用图解法求解该问题。

例4 解线性规划

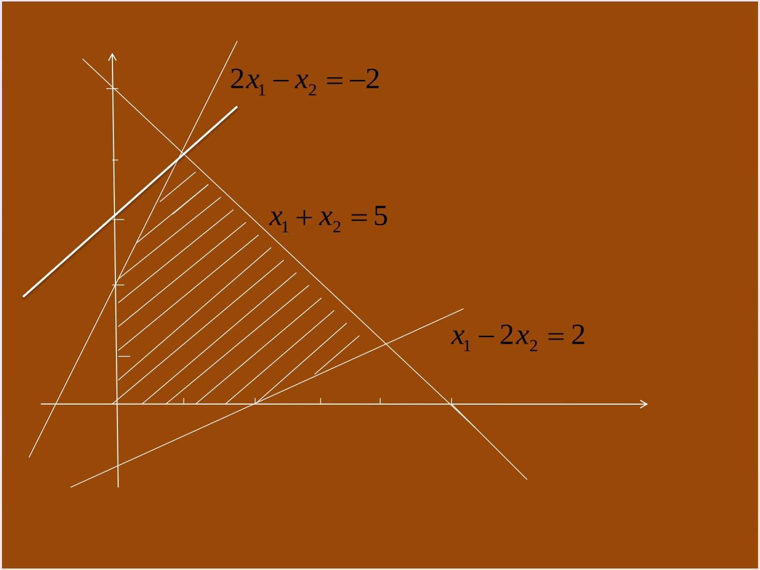
$$
\begin{aligned}
\max z &= -x_1 + x_2 \\
s.t. &\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

解 这一问题的可行区域如图1 所示,

- 变量x_1, x_2 的非负约束决定了可行区域必须在第一象限;
- 不等式约束$2x_1 - x_2 \geq -2$ 决定了以直线$2x_1 - x_2 = -2$ 为边界的右下半平面
- 其他两个不等式也决定了两个半平面

所以,可行区域D 是由三个不等式约束所决定的三个半平面在第一象限中的交集,即图1 中的的阴影部分。

- 在阴影部分所在的区域中的内部及边界上的每一个点都是可行点
- 目标函数的等值线束$z = -x_1 + x_2$ (z 取定某一个常值)沿着它的法线方向$(-1, 1)^T$ 移动,当移动到点$(1, 4)$ 时,再继续移动就与区域D 不相交了
- 点$(1, 4)$ 就是最优解,而最优值为$z = -1 + 4 = 3$


$2x_1 - x_2 = -2$
$x_1 + x_2 = 5$
$x_1 - 2x_2 = 2$

从图解法的几何关系，直观观察，容易得到下面重要结论：

1. 线性规划的可行区域D 是若干个半平面的交集,它形成了一个有界的或无界的凸多边形
2. 对于给定的线性规划问题,如果它有最优解,最优解总可以在D 的某个顶点上达到
3. 图解法适合二维问题，对高维情形不适用.
4. 对高维问题的求解，一般采用单纯型方法，详见有关“运筹学”等方面的书籍.

图解法

从图解法的几何关系，直观观察，容易得到下面重要结论：

1. 线性规划的可行区域D 是若干个半平面的交集,它形成了一个有界的或无界的凸多边形
2. 对于给定的线性规划问题,如果它有最优解,最优解总可以在D 的某个顶点上达到
3. 图解法适合二维问题，对高维情形不适用.
4. 对高维问题的求解，一般采用单纯型方法，详见有关“运筹学”等方面的书籍.

从图解法的几何关系，直观观察，容易得到下面重要结论：

1. 线性规划的可行区域D 是若干个半平面的交集,它形成了一个有界的或无界的凸多边形
2. 对于给定的线性规划问题,如果它有最优解,最优解总可以在D 的某个顶点上达到
3. 图解法适合二维问题，对高维情形不适用.
4. 对高维问题的求解，一般采用单纯型方法，详见有关“运筹学”等方面的书籍.

从图解法的几何关系，直观观察，容易得到下面重要结论：

1. 线性规划的可行区域D 是若干个半平面的交集,它形成了一个有界的或无界的凸多边形
2. 对于给定的线性规划问题,如果它有最优解,最优解总可以在D 的某个顶点上达到
3. 图解法适合二维问题，对高维情形不适用.
4. 对高维问题的求解，一般采用单纯型方法，详见有关“运筹学”等方面的书籍.

三、整数线性规划模型

基本概念： 在LP 问题中, 若所有决策变量要求必须取整数，则该LP 模型称为**整数线性规划模型**；若部分决策变量要求必须取整数, 则该LP 模型称为**混合整数线性规划模型**,

一般形式:

$$\max(\min) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \cdots, m; \\ x_j \text{为整数,} \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

问题求解： 分枝定界法,割平面法（略）

0-1整数规划模型

- 如果整数线性规划问题的所有决策变量 x_i 仅限取 0 或 1 ,则此类整数线性规划问题称为**0-1整数规划问题**, 简称**0-1 规划**, 相应的变量称为0-1 变量.
- **0-1 规划模型形式:**

$$\max(\min) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \cdots, m; \\ x_j = 0, \text{or} \quad x_j = 1, (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

例5：背包问题

- **问题提出：** 一个旅行者外出旅行，携带一背包，装一些最有用的东西，共有 n 件物品供选择，已知每件物品的"使用价值" c_j 和重量 a_j，要求
  1. 最多携带 b kg 物品
  2. 每件物品只能整件携带

  问携带哪些物品使总使用价值最大？
- **决策变量:** 设决策变量 $x_j, j = 1, 2, \ldots, n$ 为是否携带第 j 件物品，则

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{携带第 } j \text{ 种物品时;} \\ 0, & \text{不携带第 } j \text{ 种物品时.} \end{cases}$$

- **目标函数：** 使用价值最大，即 $\max = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.
- **约束条件：**
  - 重量限制：最多只能携带 b kg，即 $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$.
  - 携带方式限制：$x_j = 0$，或1，$j = 1, 2, \cdots, n$
- **数学模型：**

$$\max = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b; \\ x_j = 0, \text{or} \quad x_j = 1, (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

例6：指派问题

- **问题提出：**
  - 某单位有 n 项任务，正好需 n 个人去完成. 要求每项任务安排一个人完成，每个人只能安排一项任务.
  - 由于每件任务的性质和每个人的能力和专长的不同，每个人完成任务的效益不同.
  - 若设c_{ij}—表示分配第i 个人去完成第j 项工作的效益(时间，费用等).
- 问应如何指派，使完成任务的总效益最高？

- **决策变量:** 设x_{ij} 表示指派第i 个人完成第j 项任务, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. 显然

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若指派第} i \text{ 个人完成第} j \text{ 项任务时;} \\ 0, & \text{若不指派第} i \text{个人完成第} j \text{ 项任务时.} \end{cases}$$

- **目标函数:** 总效益最大

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

- **约束条件:**
  - 每个人只能安排1 项任务: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \cdots, n;$
  - 每项任务只能指派1 个人完成: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \cdots, n;$

- **数学模型：**

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \cdots, n; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} = 0, \texttt{or} \;\; 1, \;\; i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

四、用 MATLAB 优化工具箱解线性规划

- **格式I：** x=1inprog(c,A,b)
  格式说明：用于求解模型

$$\begin{aligned} \min\ z &= cX \\ \text{s.t.}\quad AX &\le b \end{aligned} \tag{5}$$

- **格式II:** x=linprog(c,A,b,Aeq,beq)
  格式说明：用于求解模型

$$\begin{aligned} \min\ z &= cX \\ \text{s.t.}\quad AX &\le b \\ Aeq \cdot X &= beq \end{aligned} \tag{6}$$

- 若不等式 $AX \le b$ 不存在, 则令 $A = [\ \ ]$,$b = [\ \ ]$.

四、用 MATLAB 优化工具箱解线性规划

- **格式I:** x=linprog(c,A,b)
  格式说明：用于求解模型

$$\begin{aligned} \min\ z &= cX \\ \text{s.t.}\quad AX &\le b \end{aligned} \tag{5}$$

- **格式II:** x=linprog(c,A,b,Aeq,beq)
  格式说明：用于求解模型

$$\begin{aligned} \min\ z &= cX \\ \text{s.t.}\quad AX &\le b \\ Aeq \cdot X &= beq \end{aligned} \tag{6}$$

- 若不等式 $AX \le b$ 不存在，则令 $A = [\ \ ], b = [\ \ ]$.

- **格式III：** x=linprog(c,A,b,Aeq ,beq,vlb,vub)
  说明： 用于求解模型:

$$\min\ z = cX \tag{7}$$
$$\text{s.t.}\quad AX \le b$$
$$Aeq \cdot X = beq$$
$$vlb \le X \le vub$$

  若没有等式约束:$Aeq \cdot X = beq$, 则令$Aeq = [\ \ ]$,$beq = [\ \ ]$.

- **格式IV：** `x=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub,`X_0`)`
  说明： 用于求解模型(7), 其中X_0表示初始点.

- **格式V：** [x,fval]=linprog(...)
  说明： 返回最优解 x 及 x 处的目标函数值(最优值) fval.

- **格式III：** x=linprog(c,A,b,Aeq ,beq,vlb,vub)
  说明： 用于求解模型:

$$\begin{aligned} \min\ z &= cX \\ \text{s.t.}\quad AX &\le b \\ Aeq \cdot X &= beq \\ vlb \le X &\le vub \end{aligned} \tag{7}$$

  若没有等式约束:$Aeq \cdot X = beq$, 则令$Aeq = [\ \ ]$,$beq = [\ \ ]$.

- **格式IV：** `x=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub,`X_0`)`
  说明： 用于求解模型(7), 其中X_0表示初始点.

- **格式V：** [x,fval]=linprog(...)
  说明： 返回最优解 x 及 x 处的目标函数值(最优值) fval.

- **格式III**： x=linprog(c,A,b,Aeq ,beq,vlb,vub)
  说明：用于求解模型:

$$
\begin{aligned}
&\min\ z = cX \\
\text{s.t.}\quad & AX \le b \\
& Aeq \cdot X = beq \\
& vlb \le X \le vub
\end{aligned}
\tag{7}
$$

  若没有等式约束:$Aeq \cdot X = beq$, 则令$Aeq = [\ \ ]$,$beq = [\ \ ]$.

- **格式IV**： `x=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub,`X_0`)`
  说明：用于求解模型(7), 其中X_0表示初始点.

- **格式V**：[x,fval]=linprog(...)
  说明：返回最优解 x 及 x 处的目标函数值(最优值) fval.

例7 求解线性规划模型

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 0.4x_1 + 0.28x_2 + 0.32x_3 + 0.72x_4 + 0.64x_5 + 0.6x_6 \\
\text{s.t.}\ & 0.01x_1 + 0.01x_2 + 0.01x_3 + 0.03x_4 + 0.03x_5 + 0.03x_6 \le 850 \\
& 0.02x_1 + 0.05x_4 \le 700 \\
& 0.02x_2 + 0.05x_5 \le 100 \\
& 0.03x_3 + 0.08x_6 \le 900 \\
& x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

解:用命令格式III, 编写m 文件如下:

```
% 将极大值问题转变为求极小值问题
c=[-0.4 -0.28 -0.32 -0.72 -0.64 -0.6];
A=[0.01 0.01 0.01 0.03 0.03 0.03;
0.02 0 0 0.05 0 0;0 0.02 0 0 0.05 0;
0 0 0.03 0 0 0.08];
b=[850;700;100;900];
Aeq=[ ];
beq=[ ];
vlb=[0;0;0;0;0;0];
vub=[ ];
[ x, fval ]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
```

x=

1.0e+004

3.5000

0.5000

3.0000

0.0000

0.0000

fval=

-2.5000e+004

即模型的最优解为 $(3.5\times10^4 \quad 0.5\times10^4 \quad 3.0\times10^4 \quad 0.0 \quad 0.0)^T$,
目标函数最优值为25000.

例7 求解线性规划模型

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 = 120 \\
& x_1 \ge 30 \\
& 0 \le x_2 \le 50 \\
& x_3 \ge 20
\end{aligned}
$$

解: 把模型改写为

$$
\min z = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

应用实例

s.t.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=120,\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\leq 50$$

$$\begin{bmatrix}30\\0\\20\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

用命令格式III, 编写 m 文件如下:

```
C=[6 3 4];
A=[0 1 0];
b=[50];
Aeq=[1 1 1];
beq=[120];
vlb=[30,0,20];
vub=[ ];
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
```

结果为:

```
x=
    30.0000
    50.0000
    40.0000
fval=
    490.0000
```

例8 任务分配问题: 某车间有甲、乙两台机床, 可用于加工三种工件.假定这两台车床的可用台时数分别为800 和900, 三种工件的数量分别为400 、600 和500, 且已知用三种不同车床加工单位数量不同工件所需的台时数和加工费用如下表。

车床类型	单位工件所需加工台时数			单位工件的加工费用			可用台时数
	工件1	工件2	工件3	工件1	工件2	工件3	
甲	0.4	1.1	1.0	13	9	10	800
乙	0.5	1.2	1.3	11	12	8	900

问怎样分配车床的加工任务, 才能既满足加工工件的要求, 又使加工费用最低?

解:设在甲车床上加工工件1、2、3 的数量分别为x_1, x_2, x_3，在乙车床上加工工件1、2 、3 的数量分别为x_4, x_5, x_6. 可建立以下线性规划模型:

$$\min \ \ z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 600 \\ x_3 + x_6 = 500 \\ 0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \le 800 \\ 0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \le 900 \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, 6 \end{cases}$$

解:把模型改写为

$$\min\ z = [13\quad 9\quad 10\quad 11\quad 12\quad 8] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{bmatrix} 0.4 & 1.1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.2 & 1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 800 \\ 900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$0 \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

编写 m 文件如下:

```
c=[13 9 10 11 12 8];
A=[0.4 1.1 1 0 0 0
0 0 0 0.5 1.2 1.3];
b=[800;900];
Aeq=[1 0 0 1 0 0;0 1 0 0 1 0; 0 0 1 0 0 1];
beq=[400;600;500];
vlb=zeros(6,1);
vub=[ ];
[x,fval]=linprog(c, A, b, Aeq, beq, vlb, vub)
```

运行结果:

x=

0.0000
600.0000
0.0000
400.0000
0.0000
500.0000

fval=

1.3800e+004

即在甲机床上加工 600 个工件2, 在乙机床上加工 400 个工件1、500 个工件3, 可在满足条件的情况下使总加工费最小, 为 13800.

五、利用Lingo 求解线性规划问题

1. **开发商:**美国Lindo 系统公司开发, 专门用于求解最优化问题, 公司网址: http://www.lindo.com.
2. **功能:** 可用于求解线性规划、整数规划，0-1 规划、二次规划、非线性规划问题，也可以用于求解一些线性和非线性方程组的求解.
3. **产品:** What's Best, Lingo, Lindo, GINO 等
4. **应用:** 广泛应用于生产线规划、运输、财务金融、投资分派、资本预算、混合排程、库存管理、资源配置等. 在教学、科研和工业界得到广泛应用.
5. **下载:**学生版和演示版可从http://www.lindo.com 免费下载. 有些国外运筹学方面的教科书随书光盘中附有LINGO/LINDO 软件的学生版本

What's Best 概述

- What's Best 是一个MS-Excel的插件. 它允许你在Excel 电子表格中以自由组合的方式建立大型优化模型.
- What'sBest的特点：
  1. 可求解大型的线性、整数、非线性规划问题.
  2. 借助于电子表格，What's Best 允许用户以表格的方式运行最优化应用程序.
  3. 建立模型迅速，容易
  4. 广泛的文档帮助,及众多实际范例供实践练习

Lingo 概述

- LINGO 是一个设计用来创建和求解线性、非线性(凸规划、非凸规划、全局最优化)、整数、二次规划、随机规划等的专用优化问题工具软件, 它使得优化问题的建模与求解更加快速、容易和高效率
- LINGO 提供了一个完全整合的软件包, 包括强大的内置的建模语言, 和可编程、可编辑调试的环境, 还有一套快速的内建求解器. 它允许以简练, 直观的方式描述较大规模的优化问题, 模型中所需的数据可以以一定格式保存在独立的文件中.

Lindo 概述

- LINDO是Linear Interactive and Discrete Optimizer 字首的缩写形式. 由Linus Schrage 首先开发, 集众多专业优化软件GINO, LINGO, LINGO NL (又称LINGO2) 和"what's best！"等于一体的统称.
- Lindo 可以用来求解线性规划(LP-Linear Programming), 整数规划(IP-Integer Programming) 和二次规划(QP-Quadratic Programming)问题.
- GINO 是General Interactive Optimizer字首的缩写形式, 可以用来求解非线性规划（NLP——Non-Linear Programming）问题, 也可用于求解一些线性和非线性方程(组) 以及代数方程求根等。GINO中包含了各种一般的数学函数（包括大量的概率函数）,可供使用者建立问题模型时调用.

- LINGO求解线性规划的过程采用单纯形法,一般是首先寻求一个可行解,在有可行解情况下再寻求最优解。
- 用LINGO 求解一个LP问题会得到如下的几种结果：不可行(No feasible) 或可行(Feasible)；可行时又可分为：有最优解(Optimal Solution)和解无界(Unbounded Solution)两种情况
- 例：求解如下的LP 问题：

$$\max z = 2x + 3y$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x + 3y \le 10, \\ 3x + 5y \le 12, \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

- LINGO求解线性规划的过程采用单纯形法,一般是首先寻求一个可行解,在有可行解情况下再寻求最优解。
- 用LINGO 求解一个LP问题会得到如下的几种结果：不可行(No feasible) 或可行(Feasible)；可行时又可分为：有最优解(Optimal Solution)和解无界(Unbounded Solution)两种情况
- 例：求解如下的LP 问题：

$$\max z = 2x + 3y$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x + 3y \leq 10, \\ 3x + 5y \leq 12, \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

初试LINGO

- LINGO求解线性规划的过程采用单纯形法,一般是首先寻求一个可行解,在有可行解情况下再寻求最优解。
- 用LINGO 求解一个LP问题会得到如下的几种结果：不可行(No feasible) 或可行(Feasible)；可行时又可分为：有最优解(Optimal Solution)和解无界(Unbounded Solution)两种情况
- 例：求解如下的LP 问题：

$$\max z = 2x + 3y$$

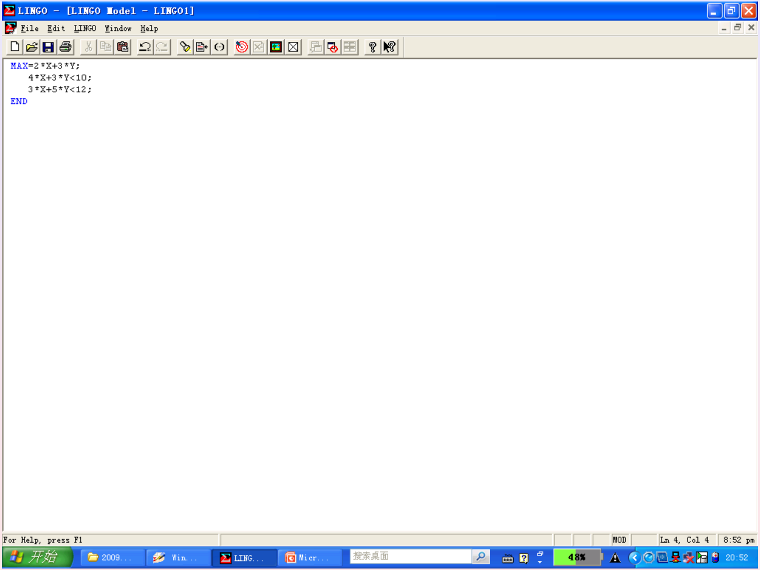
$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x + 3y \le 10, \\ 3x + 5y \le 12, \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

- 打开Lingo 界面，编写程序如下：

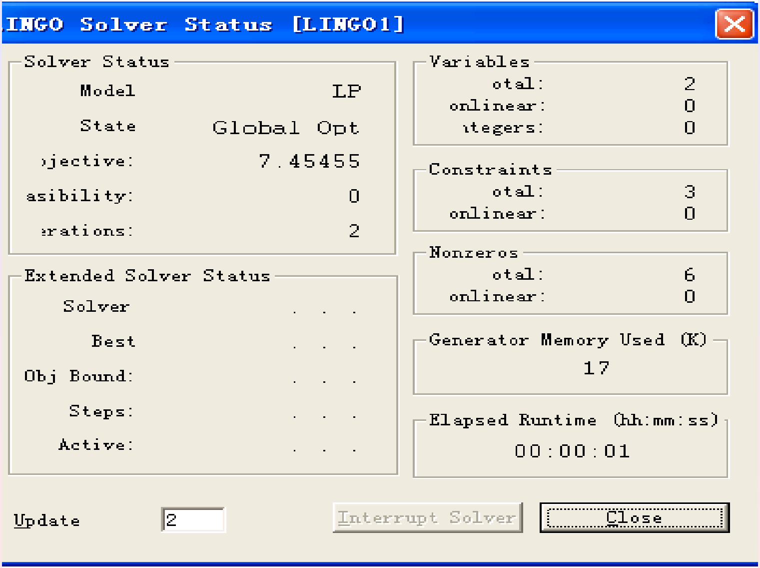
```
MAX=2*X+3*Y;
4*X+3*Y<10;
3*X+5*Y<12;
END
```

- 点击"File" 菜单，选择"save as", 选择保存文件路径，输入程序文件名，点击“保存”.
- 点击"LINGO" 菜单，选择"Solve"求解器求解.
- 备注：LINGO中假设所有的变量是非负的, 非负约束不必再输入到计算机中; LINGO 也不区分变量中的大小写字符(任何小写字符将被转换为大写字符)；约束条件中的"≤" 及"≥" 可用"<" 及">" 代替

求解结果


LINGO - [LINGO Model - LINGO1]
File Edit LINGO Window Help
MAX=2*X+3*Y;
4*X+3*Y<10;
3*X+5*Y<12;
END
For Help, press F1
MOD
Ln 4, Col 4
8:52 pm
开始
2009...
Win...
LING...
Micr...
搜索桌面
48%
20:52

求解结果



.INGO Solver Status [LINGO1]
Solver Status
Model LP
State Global Opt
›jective: 7.45455
asibility: 0
›rations: 2
Extended Solver Status
Solver
Best
Obj Bound:
Steps:
Active:
Variables
otal: 2
onlinear: 0
ıtegers: 0
Constraints
otal: 3
onlinear: 0
Nonzeros
otal: 6
onlinear: 0
Generator Memory Used (K)
17
Elapsed Runtime (hh:mm:ss)
00:00:01
Update 2
Interrupt Solver
Close

求解结果

LINGO - [Solution Report - LINGO1]

File Edit LINGO Window Help

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          7.454545
Total solver iterations:                         2


                Variable           Value        Reduced Cost
                       X        1.272727            0.000000
                       Y        1.636364            0.000000

                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                       1        7.454545            1.000000
                       2        0.000000           0.9090909E-01
                       3        0.000000           0.5454545
```

Solution Report

1. REDUCED COST—-给出最优单纯形表中第1行中变量的系数(max 型问题)。其中基变量的reduced cost值应为0, 对于非基变量, 相应的reduced cost值表示当该非基变量增加一个单位时(其他非基变量保持不变)目标函数减少量。本例中此值均为 0
2. SLACK OR SURPLUS–给出松弛变量的值：第 2 , 3 行松弛变量均为 0 ,说明对最优解来讲,两个约束(第 2 , 3 行)均取等号
3. DUAL PRICES—给出对偶价格的值：第 2 , 3 行对偶价格分别为0.090909, 0.545455

Solution Report

1. LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0—-表示单纯行法在零次迭代(旋转)后得到最优解
2. OBJECTIVE FUNCTION VALUE 7.454545— 表示最优目标值为7.4545450 。
3. VALUE—- 给出最优解中各变量（VARIABLE）的值：X=1.272727, Y=1.636364

利用Lingo软件解ＬＰ问题的一般步骤及例子

1. 输入一个LP 问题(模型)
2. 存储模型
3. 求解得到LP 问题的最优解

DAKOTA **例9** 家具公司制造书桌(DESK),桌子(TABLE)和椅子(CHAIR), 所有的资源有三种：木料,木工和漆工, 生产数据如下表所示：

	每个DESK	每个TABLE	每个CHAIR	资源量
木料(单位)	8	6	1	48
漆工(单位)	4	2	1．5	20
木工(单位)	2	1．5	0．5	8
销售利润(单位)	60	30	20	

若要求桌子的生产量不超过5件,如何安排三种产品的生产可是利润最大?

Lingo 程序

在LINGO中输入程序

```
MAX=60*DESKS+30*TABLES+20*CHAIRS;
 8*DESKS+6*TABLES+CHAIRS<48;
4*DESKS+2*TABLES+1.5*CHAIRS<20;
2*DESKS+1.5*TABLES+0.5*CHAIRS<8;
TABLES<5;
 END
```

求解结果: desk=2, TABLES=0, CHAIRS=8

最大利润: 280

使用LINGO编程说明

1. 目标函数及约束条件各语句之间要用分号";", 如果两个语句之间没有分号, LINGO把此两个语句看成是一个语句
2. 使用Look 或Generate 命令会为你在屏幕上显示你的模型
3. 如想获得模型的敏感性分析结果，可用RANGE 命令
4. LINGO文件中常有注释间杂于各命令之中, 前面注有"!"符号, 例如：! This is a comment
5. LINDO 将目标函数所在行作为第一行,从第二行起为约束条件, 行号自动产生。

利用LINGO求解整数线性规划

1. LINGO可用于求解单纯的或混合型的整数规划(IP) 问题
2. LINGO求解IP 问题用的是分枝定界法,但目前无相应完善的敏感性分析理论
3. IP问题与LP问题编程方法类似, 但在程序中需定义变量为整型变量
4. 整型变量定义方法：@GIN(X)—-声明x 是整型变量.

六、建模案例：投资的收益和风险

问题的提出

- 市场上有 n 种资产 $S_i(i=1,2,\ldots,n)$ 可以选择作为投资项目
- 现用数额为 M 的相当大的资金作一个时期的投资
- 这 n 种资产在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i, 风险损失率为 q_i.
- 投资越分散, 总的风险越小, 总体风险可用投资的 S_i 中最大的一个风险来度量.
- 购买 S_i 时要付交易费(费率 p_i), 当购买额不超过给定值u_i时, 交易费按购买 u_i 计算.
- 假定同期银行存款利率是 $r_0(r_0=5\%)$, 既无交易费又无风险.

已知 $n=4$ 时相关数据如下:

S_i	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	u_i(元)
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案, 即用给定的资金 M, 有选择地购买若干种资产或存银行生息, 使**净收益尽可能大**, 且**总体风险尽可能小**.

II 基本假设和符号规定

基本假设:

1. 投资数额 M 相当大, 为了便于计算, 可假设$M = 1$;
2. 投资越分散, 总的风险越小;
3. 总体风险用投资项目 S_i 中最大的一个风险来度量;
4. n 种资产 S_i 之间是相互独立的;
5. 在投资的这一时期内,r_i, p_i, q_i, r_0 为定值, 不受意外因素影响;
6. 净收益和总体风险只受 r_i, p_i, q_i 影响, 不受其他因素干扰.

符号规定:

S_i — 第 i 种投资项目, 如股票, 债券

r_i, p_i, q_i — 分别为S_i的平均收益率、交易费率、风险损失率

u_i — S_i的交易定额

r_0 — 同期银行利率

x_i — 投资项目 S_i 的资金

a — 投资风险度

Q — 总体收益

ΔQ — 总体收益的增量

III 问题分析与模型建立

- **决策变量:** 用于购买第 i 种资产的投资额度 $x_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$. 其中, $i = 0$ 表示存银行.
- **目标函数:**
  - (1) 总体风险损失最小: 用所投资的 S_i 中最大的一个风险来衡量, 即 $\max\{q_i x_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$.
  - (2) 总体收益最大: 投资额度为 x_i 的第 i 种资产, 其收益为 $r_i x_i$, 同时按照规定, 需交付一定额度的手续交易费, 而所付交易费是一个分段函数, 即

$$\text{交易费} = \begin{cases} p_i x_i, & x_i > u_i \\ p_i u_i, & x_i \le u_i \end{cases}$$

由题目所给定的定值 u_i(单位: 元) 相对总投资 M 很小, $p_i u_i$更小, 可以忽略不计, 这样购买 S_i 的净收益为$(r_i - p_i)x_i$. 事实上目标函数中的常量对最优解策略并无影响.所以总体收益为

$$\max \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i.$$

III 问题分析与模型建立

- 约束条件:
  - (1)非负约束: 对所有项目的投资额度不应为负值, 即 $x_i \geq 0, i = 0, 1, \cdots, n$.
  - (2)总投资约束: 所有用于投资的总资金额度为 M, 注意到对投资某一个项目 S_i 而言, 实际费用由两部分组成, 一部分为产生收益的纯粹投资x_i, 其收益为 $r_i x_i$, 另一部分为上交的交易费, 即无论是否获益, 而必须缴纳的手续费. 其费用大小与投资额度有关, 为 $p_i x_i$, 因此实际用于项目 S_i 的总投资额度为: $x_i + p_i x_i = (1 + p_i)x_i$. 故总体投资约束为

$$\sum_{i=0}^{n} (1 + p_i)x_i.$$

模型建立:

满足净收益尽可能大, 总体风险尽可能小的数学模型描述为:

$$\text{目标函数} \quad \begin{cases} \max \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i \\ \min\{\max\{q_i x_i\}\} \end{cases}$$

$$\text{约束条件} \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = M \\ x_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$$

这是一个多目标规划模型, 实际求解时通常通过某种方法化为单目标问题求解.

IV 模型简化:

1. 在实际投资中, 投资者承受风险的程度不一样. 若给定风险一个界限a, 使最大的一个风险$q_i x_i / M \leq a$, 可找到相应的投资方案. 这样把多目标规划变成单目标的线性规划问题.

模型1: 固定风险水平, 优化收益

$$\text{目标函数:} \quad Q = \max \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i$$

$$\text{约束条件:} \quad \begin{cases} \frac{q_i x_i}{M} \leq a, i = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = M, \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$$

2、若投资者希望总盈利至少达到水平k 以上, 在风险最小的情况下寻找相应的投资组合.

模型2: 固定盈利水平, 极小化风险

目标函数: $R = \min\{\max\{q_i x_i\}\}$

约束条件: $$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i \geq k, \\ \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = M, \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$$

3、投资者在权衡资产风险和预期收益两方面时, 希望选择一个令自己满意的投资组合. 因此对风险、收益赋予权重$\lambda(0 < \lambda \leq 1)$, λ 称为投资偏好系数.

模型3

$$\text{目标函数:}\quad \min\ \ \lambda\{\max\{q_i x_i\}\} - (1-\lambda)\sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i$$

$$\text{约束条件:}\quad \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M,$$

$$x_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

V 模型1 的求解 对表中给定的数据, 模型1 为:

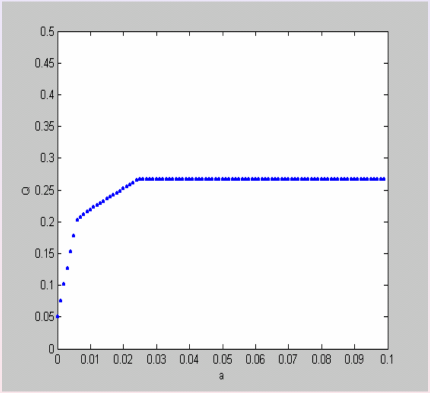
$$\min f = (-0.05, -0.27, -0.19, -0.185, -0.185)(x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_0 + 1.01x_1 + 1.02x_2 + 1.045x_3 + 1.065x_4 = 1 \\ 0.025x_1 \leq a \\ 0.015x_2 \leq a \\ 0.055x_3 \leq a \\ 0.026x_4 \leq a \\ x_i \geq 0 (i = 0, 1, \dots, 4) \end{cases}$$

由于 a 是任意给定的风险度, 到底怎样给定没有一个准则, 不同的投资者有不同的风险度。因此我们从 $a = 0$ 开始, 以步长 $\triangle a = 0.001$ 进行循环搜索, 编制程序如下:

```
a=0:0.001:0.1;
n=length(a);
Q=zeros(1,n);
for i=1:n
c=[-0.05 -0.27 -0.19 -0.185 -0.185];
Aeq=[1 1.01 1.02 1.045 1.065];
beq=[1];
A=[0 0.025 0 0 0;0 0 0.015 0 0;
0 0 0 0.055 0;0 0 0 0 0.026];
b=[a(i);a(i);a(i);a(i)];
vlb=[0,0,0,0,0]; vub=[];
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub);
x=x'; Q(i)=-fval;
end
plot(a,Q,'.')
xlabel('a'),ylabel('Q')
```

建模案例



0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
Q
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
a

VI 结果分析

由计算结果及分析图, 可得以下结论:

1. 风险大, 收益也大
2. 当投资越分散时, 投资者承担的风险越小, 这与题意一致. 即冒险的投资者会出现集中投资的情况, 保守的投资者则尽量分散投资
3. 图中曲线上的任一点都表示该风险水平的最大可能收益和该收益要求的最小风险. 对于不同风险的承受能力, 选择该风险水平下的最优投资组合
4. 在$a = 0.006$ 附近有一个转折点, 在这一点左边, 风险增加很少时, 利润增长很快; 在这一点右边, 风险增加很大时, 利润增长很缓慢. 即改点为使 $\Delta Q/Q$ 取最小值得点.

建模案例

对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说，应该选择曲线的拐点作为最优投资组合，大约是$a^* = 0.6\%$, $Q^* = 20\%$，所对应投资方案为:

风险度	收益	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0.0060	0.2019	0	0.2400	0.4000	0.1091	0.2212