其中 $f(\triangle\alpha)$ 为目标函数方向角改变量的绝对值和(或平方和),DIST$(A_i,A_j)$为飞机 $A_i$ 和 $A_j$ 之间的距离。

**方法一**(基本思路):

首先在 $\Omega'$ 中以较大跨度均匀地取 N 个点,通过遍历计算找到其中使 $F(\triangle\alpha)$取最小值的点,然后以该点为中心,找一个较小的区域,在其中再取 $N$ 个点,在这 $N$ 个点中找到使 $F(\triangle\alpha)$取最小值的点。如此迭代下去,当区域足够小,或者连续两次找到的点非常接近时(即如果连续两次迭代所得结果位置相邻且目标函数之差小于 0.1°),我们就认为找到了较优的解,此时停止迭代。

此方法的优点在于:它是一个注重全空间的算法。较其它方法,如逐次调整法等,它比较有效地避免了局部行为(即迭代过程中结果收敛到一个局部极小值而非全局最小值的现象)。当点数 N 选取适当时,时间消耗很少,但它仍有一些不足,主要问题是:$N$ 取得较小时,样本点在空间中的分布过于稀疏,仍然有可能出现局部行为。为此,我们在方法一的基础上做了改进,得到方法二。

**方法二**(改进思路):

首先在 $\Omega'$ 中均匀地取 $N$ 个点,通过遍历计算找到其中使 $F(\triangle\alpha)$取最小的 $M$ 个点。以这 $M$ 个点为中心作 $M$ 个小区域,在每一个小区域中均匀地取 $N$ 个点,计算出这 $MN$ 个点中使 $F(\triangle\alpha)$取最小值的 $M$ 个点,如此迭代下去,直到找到较优的解(关于较优的解的判别方法同方法一)关于方法二的细节问题参见算法描述,方法二所用时间约为方法一的 M 倍(实际上略少于 $M$ 倍),而在 $M$ 值与小区域的选取方法较好时,可有效地避免局部行为。这个优点在算法描述一节中得到了很好的体现。

# 飞行管理模型的能量梯度求解法

刘 学　胡 晨　陈 涵
(清华大学,北京 100084)
**指导教师:高策理**

**编者按**:本问题建模后构成一个非线性规划,求最优解有相当难度,针对本问题本文用一个表征全局性质的能量来表达飞机位置,当达到最佳位置时能量取最小,从而构成能量梯度调整模型,按此模型获得了本问题最优解。本文为作者原论文中部分内容。

**关键词**:能量梯度,同步算法,异步算法

针对以上问题,我们考虑利用一个能够表征全局性质的量来辅助调节每架飞机的位置。由于最优解对应于一个函数的极值,我们设想用能量来表达飞机的位置,当达到最佳

位置时，能量最小。由此我们可以设想，每架飞机的方向角在其调整方向上的能量梯度表达了这架飞机的调整趋势。通过比较这些趋势并在趋势上逐步搜索。我们有理由相信其调整过程将向一个较优的结果运动。

为此，我们定义$[\triangle\theta_1,\triangle\theta_2,\cdots,\triangle\theta_6]$空间的能量函数如下：

$$E=\sum_i\sum_{j>i}E_{ij}$$

其中 $E_{ij}=0,\qquad d_{min,ij}\geqslant 8$

$E_{ij}=8-d_{min,ij},\quad d_{min,ij}<8$

当 $i,j$ 两架飞机之间的最小距离 $d_{min,ij}\geqslant 8$ 时，$E_{ij}=0$ 表示它们之间无碰撞产生；而当 $d_{min,ij}<8$ 时，定义 $E_{ij}=8-d_{min,ij}$，这反映了碰撞的严重程度。很明显，此能量函数 $E$ 表示了在$\triangle\theta_1,\triangle\theta_2,\cdots,\triangle\theta_6$ 的调节量作用下，当前飞机航向所引起的碰撞严重程度。

我们在$[\triangle\theta_1,\triangle\theta_2,\cdots,\triangle\theta_6]$空间上，只要找到 E 的零点，便可符合题目的要求。为此，我们提出了能量梯度法。

对于各梯度的计算为：

$$d_{min,jk}=|\triangle\vec{P}_{jk}|\cdot\left|sin(\varphi_{\triangle v,jk}-\varphi_{\triangle P}+\frac{\triangle\theta_j+\triangle\theta_k}{2})\right|$$

$$\frac{\partial E}{\partial\triangle\theta_k}=\sum_{j\neq k}\frac{\partial E_{jk}}{\partial\triangle\theta_k}$$

而$\frac{\partial E_{jk}}{\partial\triangle\theta_k}=0,\qquad E_{jk}=0;$

$\frac{\partial E_{jk}}{\partial\triangle\theta_k}=-\frac{\partial d_{min,jk}}{\partial\triangle\theta_k}=\pm|\triangle\vec{P}_{jk}|\left|cos(\varphi_{\triangle v,jk}-\psi_{\triangle P}+\frac{\triangle\theta_j+\triangle\theta_k}{2})\right|\frac{1}{2}E_{jk}\neq 0;$

当 $sin(\varphi_{\triangle v,jk}-\varphi_{\triangle P}+\frac{\triangle\theta_j+\triangle\theta_k}{2})>0$ 时，上式中的$\pm 1$ 取$+1$；反之，取$-1$。

每次调整的步长由下式决定：$step_k=\frac{threshold}{\frac{\partial E}{\partial\triangle\theta_k}}$ 其中，threshold 为能量下降的期望值，$-30^\circ\leqslant\triangle\theta_i\leqslant 30^\circ,\triangle\vec{p}_{jk}=\vec{p}_i-\vec{p}_j,\psi_{\triangle v}=\frac{1}{2}(\pm\pi+\theta_i+\theta_j)\theta_i>\theta_j$ 取 $+1,\theta_i\leqslant\theta_j$ 取 $-1$。

## 一、同步调整

在此我们首先采用同步调节的方法。在此方法中，每次对六架飞机均做调整，如算法(3,4)所示(参见后文)。

在调节过程中，如果有两架飞机之间距离较小，则此两架飞机在梯度方向上的调整幅度应加大。我们建立如下的函数以说明这种思想：

## 二、异步顺序调整

同步调节不可避免地带来一种局限性，即当一架飞机调节后，再调整另一架飞机时，是按前一飞机未调整之前的参数计算的，因此同步调节时，总体性质的体现不很好，不能多架飞机相互兼顾。为此，我们认为，在调节一架飞机后，就更新所有参数，再利用梯度调节下一架飞机的方法更为合理。由此我们提出了异步顺序梯度调节方法。

## 三、异步优化顺序调整

但是由上述模型可以看出，每个飞机调节的梯度值是不同的，有的飞机方向角的变化对最后能量的减小起着明显的作用，因此我们没有理由不先考虑这些飞机。我们改进梯度模型为异步优化顺序模型，即每次调节后更新参数并计算每个飞机调节的梯度，找到梯度绝对值最大的飞机优先进行调整。

## 四、同步梯度算法

1）计算当前总能量 $E$，若 $E=0$，则已符合要求，转 6；

2）对于 $k=1,2,\cdots,6$，分别计算$\frac{\partial E}{\partial \triangle\theta_k}$，即能量 $E$ 在$\triangle\theta_k$ 方向上的梯度；（计算方法参见 2.5 节）。

3）根据$\frac{\partial E}{\partial \triangle\theta_k}$决定$\triangle\theta_k$ 的变化量 $\mathrm{step}_k$；（见 2.5 节）

4）令 $\triangle\theta_k = \triangle\theta_k + step_k$；

5）转 1；

6）算法结束，此时$(\triangle\theta_1,\triangle\theta_2,\cdots,\triangle\theta_6)$即为所求的各架飞机航向角度的偏移量。

## 五、异步顺序梯度算法

0）$k=0$

0.1）$k=k+1$；如果 $k>6$ 则令 $k=1$；

1）计算当前总能量 $E$，若 $E=0$，则已符合要求，转 6；

2）对于当前的 $k$，计算$\frac{\partial E}{\partial \triangle\theta_k}$，即能量 $E$ 在$\triangle\theta_k$ 方向上的梯度；（计算方法参见 2.5 节）

3）根据$\frac{\partial E}{\partial \triangle\theta_k}$决定$\triangle\theta_k$ 的变化量 $\mathrm{step}_k$；（见 2.5 节）

4）令$\triangle\theta_k=\triangle\theta_k+step_k$；

5）转 0.1；

6）算法结束，此时$(\triangle\theta_1,\triangle\theta_2,\cdots,\triangle\theta_6)$即为所求的各架飞机航向角度的偏移量。

## 六、异步优化顺序梯度算法

1）计算当前总能量 $E$，若 $E=0$，则已符合要求，转 6；

2）对于 $k=1,2,\cdots,6$，分别计算 $\frac{\partial E}{\partial \triangle \theta_k}$，即能量 $E$ 在 $\triangle \theta_k$ 方向上的梯度；（计算方法参见 2.5 节）。

2.1）从 $\frac{\partial E}{\partial \triangle \theta_k}$，$k=1,\cdots,6$，中选出梯度的最大值，及其对应的 $k$

3）根据 $\frac{\partial E}{\partial \triangle \theta_k}$ 决定 $\triangle \theta_k$ 的变化量 $step_k$；（见 2.5 节）

4）令 $\triangle \theta_k = \triangle \theta_k + step_k$；

5）转 1；

6）算法结束，此时（$\triangle \theta_1, \triangle \theta_2, \cdots, \triangle \theta_6$）即为所求的各架飞机航向角度的偏移量。

## 七、同步梯度模型

我们选取阈值为 0.1，用同步梯度模型对三组数据计算结果如下：

| 数据组号 | 飞机 1 | 飞机 2 | 飞机 3 | 飞机 4 | 飞机 5 | 飞机 6 | 总角度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2.338 | −0.298 | 0.521 | 1.369 | 4.53 |
| 2 | −6.761 | 0 | 1.862 | −1.644 | 0.464 | 2.257 | 12.98 |
| 3 | 2.114 | 6.104 | 2.659 | −6.429 | −1.364 | 2.424 | 21.00 |

## 八、异步顺序梯度模型

我们选取阈值为 0.1，用异步顺序梯度模型对三组数据计算结果如下：

| 数据组号 | 飞机 1 | 飞机 2 | 飞机 3 | 飞机 4 | 飞机 5 | 飞机 6 | 总角度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2.498 | −0.149 | 0.464 | 1.163 | 4.27 |
| 2 | −6.199 | 0 | 2.389 | −1.123 | 0.407 | 1.776 | 11.89 |
| 3 | 2.149 | −6.010 | 2.126 | −6.354 | −1.255 | 2.401 | 20.29 |

## 九、异步优化顺序梯度模型

我们选取阈值为 0.1，用异步优化顺序梯度模型对三组数据计算结果如下：

| 数据组号 | 飞机 1 | 飞机 2 | 飞机 3 | 飞机 4 | 飞机 5 | 飞机 6 | 总角度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2.819 | 0 | 0 | 0.819 | 3.63 |
| 2 | 0.922 | 0 | 1.541 | −2.544 | 0 | 3.610 | 8.61 |

# 飞行管理问题约束条件的线性化

徐元军　　曾九林　　韩伟群
（中南林学院，株洲 412000）
指导教师：潘冬光

**编者按**：本文从相对运动出发，给出了两架飞机不碰撞条件的几何描述，得到了两机不碰撞的方向角范围，并对有关条件作了线性化处理，从而使原来的非线性约束化为线性约束。其特点在于：对约束条件的简化，注意了保留在区域内不碰，在区域外碰撞的角度范围，考虑较为全面。当然，对这一条件还可有其他处理方式。此处发表的是该文有关部分的摘录，编者只增添了极少的语句，使文意联贯。

**关键词**：碰撞条件，约束条件。

$$x_i = vtCos(\theta'_i + \triangle\theta_i) + x_{i0} \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant 160$$
$$y_i = vtSin(\theta'_i + \triangle\theta_i) + y_{i0} \qquad 0 \leqslant y_i \leqslant 160$$

则飞机 $i$ 与 $j$ 间距离

$$d = \sqrt{(x_i - j_i)2 + (u_i - y_j)2}$$

$(x_i, y_i)$表示第 $i$ 架飞机在 $t$ 时刻的坐标

$(x_{i0}, y_{i0})$表示第 $i$ 架飞机在 $t=0$ 时的坐标（$i=1,2,3,4,5$；$j=i+1, i+2\cdots\cdots 6$）新进入飞机编号为 6。

考虑利用两架飞机在区域内的相对速度来判断飞机的碰撞条件。

$\theta_i$ 表示两点的连线为始边，$i$ 为圆心逆时针旋转到 $v_i$ 的角（在两点连线的左端反向为负）。

$\theta_j$ 表示以两点的连线为始边，$j$ 为圆心顺时针旋转到 $v_j$ 的角（在两点连线的右端），反向为负。