

关于眼科病床的合理安排模型

摘 要

病床是医院医疗设备的重要组成部分,随着我国医疗制度的深化改革和医疗市场的持续发展,许多医院已进入市场经济的运行模式。各医院之间的竞争日益激烈,医院要想在新的市场条件下保持竞争优势且兼顾社会效益,病床的合理安排就显得尤其重要。

本文就不同的问题确立了不同的病床安排模型。我们首先通过分析确定了合理的评价指标体系,包括病床使用率,病床周转次数,平均逗留时间和平均住院时间以及病人的不满意度。通过对题给的数据分析和合理的评价指标体系的建立,我们回答了问题一。针对问题二,我们建立了如下四个模型。

模型一:基于病人平均逗留时间的线性规划模型,并应用层次分析的方法确定了该模型目标函数的权重系数。考虑到该模型的某些不足之处,我们改进了模型一,得到了模型二。

模型二:通过对时间的两种不同的划分,我们确立了两个目标参数,进而建立了基于病人等待的不满意度模型。

模型三:应用TOPSIS法对病床工作效率综合评价。通过选择合适的评价指标体系,进行指标同趋势化处理和指标归一化处理,我们得到了反映接近最优程度的量。

模型四:基于综合指标评价体系的模型,即考虑了全部的评价指标体系得到了病床安排模型的综合指标评价体系的系数,并用它来评价该问题的病床安排模型的优劣。

针对问题三,根据当时住院病人以及等待病人的统计情况,我们使用了曲线拟合的方法,使得病人门诊时即可得知其大致入住的时间区间。

针对问题四:针对不同类型疾病的特点,我们确立了5条原则,从总体上改变了医院的手术时间安排,确定了病人在一周内每天入院的最优方案。并重新回答了问题二。

针对问题五:基于M/M/C排队模型,建立了使得所有病人在系统内的平均逗留时间最短的病床比例分配模型。

关键词: 周转次数; 平均逗留时间; 病床工作效率; 不满意度系数

问题重述

医院就医排队是大家都非常熟悉的现象，患者到门诊就诊、等待住院等，往往需要排队等待接受某种服务。

该医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张。该医院眼科手术主要分四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。附录中还提供了 2008 年 7 月 13 日至 2008 年 9 月 11 日这段时间里各类病人的情况。

笔者希望确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型的优劣。并就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并用所确立的评价指标对我们所建的模型作出评价。然而作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院。我们根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间。

若该住院部周六、周日不安排手术，怎样建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院，医院的手术时间安排是否应作出相应调整？

从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型。

模型假设

针对本问题，建立如下合理的假设：

- (1)假设白内障手术较简单，而且没有急症；
- (2)每周一、三做白内障手术，此类病人的术前准备时间只需 1、2 天。
- (3)如果要做双眼是周一先做一只，周三再做另一只。
- (4)外伤在病床有空时立即安排住院，住院后第二天便会安排手术。
- (5)对于青光眼和视网膜疾病，不考虑急症。
- (6)白内障手术与其他眼科手术（急症除外）不安排在同一天做。
- (7)对全体非急症病人是按照 FCFS（First come, First serve）规则安排住院。
- (8)假设医院不增加床位。
- (9)医院眼科手术条件比较充分，可以不考虑手术条件的限制。

符号说明

符号	说明	单位
a_1	外伤病人权重系数	/
b_1	白内障病人权重系数	/
g_1	白内障（双眼）病人权重系数	/
d_1	视网膜和青光眼病人权重系数	/
p_1	外伤病人人数	人
p_2	白内障病人人数	人
p_3	白内障（双眼）病人人数	人
p_4	青光眼病人人数	人
x_1	病人周转次数	次
x_2	病床工作效率	/
x_3	病人逗留时间和平均等待时间	天
x_4	病人等待的不满意度	/
t_1	外伤平均逗留时间	天
t_2	白内障平均逗留时间	天
t_3	白内障（双眼）平均逗留时间	天
t_4	视网膜和青光眼平均逗留时间	天

模型建立与求解

问题一

一 评价指标体系的建立

病床是医院收治病人的基本装备，是医院规模的计量单位，也是医院经济效益的基本核算单位。医院各类工作人员的配备、医疗技术设备和经济的分配等，都是根据病床的数目来确定的。针对病床安排模型，我们考虑的合理的评价指标体系主要有：

1. 病床使用率

病床使用率是指实际占用总床口数占实际开放总床日数的百分比。

$$\text{病床使用率} = \frac{\text{实际占用总床日数}}{\text{实际开放总床日数}} \times 100\%$$

病床使用率是反映一定时期内使用的病床与开放的病床之比，是反映病床利用的指标。它是用相对数表示的。一般认为该指标以 85%~93% 为宜。使用率过低，说明病床有空闲。尚有潜力未能充分发挥；太高说明病床负担过重，不能有足够的时间用于对病床的消毒处置，容易增加医院感染，临时加床会影响病房管理，可能给医疗质量带来不利影响，应尽量避免。所以认为使用率越高越好

的观点是错误的。

2. 病床周转次数

病床周转次数是衡量医院管理质量的主要指标。加快病床周转次数是目前医院充分利用现有床位多收治病人的有效措施，也是医院积极参医疗市场竞争，提高效益的重要途径。病床周转次数的多少和收容病人的病种、病情轻重有密切关系。收容慢性病人、重症病人多的病区则病床周转较慢。一段时间内病床的周转次数可以由下面的公式计算。

$$\text{病床周转次数} = \text{出院人数} / \text{平均开放床位数}$$

3. 病床工作效率

根据文献[1]可知病床工作效率的计算公式为：

$$\text{病床工作效率} = \text{病床周转次数} \times \text{平均床位工作日} = (\text{出院人数} / \text{平均开放床位数}) \times (\text{实际占用总床日数} / \text{平均开放床位数}) = \text{出院人数} \times \text{实际占用总床日数} / \text{平均开放床位数}^2$$

4. 病人的平均逗留时间和病人的平均住院时间

病人的平均逗留时间是指病人从门诊到出院的时间间隔。病人的平均逗留时间越短，医院资源的平均利用率越高，相应的病床的使用率和病床的周转次数都会提高。病人的平均住院时间是指病人从入院到出院的时间间隔。同理病人的平均住院时间越短，相应的病床的使用率和病床的周转次数都会提高。所以使得病人在系统内的平均逗留时间最短是合理安排病床模型的重要评价指标。

5. 不满意度系数

由于病人等待入院的时间越长,其不满意度系数就越高,此时医院应优先安排他们住院,否则会影响医院的经济效益和声誉。所以不满意度系数也是评价病床安排模型的一个重要指标。

二 原病床安排模型

我们对2008年7月13日至2008年9月11日这段时间里各类病人的情况进行了分析。得到如下一些表格。

表 1

时间	门诊人数	拟入院人数	拟出院人数	等待入院人数	院内人数
7-13	7	0	0	7	0
7-14	9	1	0	15	1
7-15	10	0	0	25	1
7-16	7	0	0	32	1
7-17	12	1	0	43	2
7-18	12	1	0	54	3
7-19	10	2	1	62	4

7-20	9	1	0	70	5
7-21	9	2	0	77	7
7-22	6	2	1	81	8
7-23	16	1	0	96	9
7-24	7	2	0	101	11
7-25	5	4	2	102	13
7-26	4	8	1	98	20
7-27	9	11	1	96	30
7-28	12	11	3	97	38
7-29	5	9	2	93	45
7-30	6	9	5	90	49
7-31	11	8	1	93	56
8-01	11	7	2	97	61
8-02	6	12	5	91	68
8-03	11	6	2	96	72
8-04	6	6	2	96	76
8-05	5	5	4	96	77
8-06	14	9	8	101	78
8-07	15	8	7	108	79
8-08	8	15	15	101	79
8-09	4	20	20	85	79
8-10	8	9	9	84	79
8-11	6	6	6	84	79
8-12	7	2	2	89	79
8-13	13	6	6	96	79
8-14	6	9	9	93	79
8-15	10	8	8	95	79
8-16	7	13	13	89	79
8-17	8	6	6	91	79
8-18	12	4	4	99	79
8-19	14	7	7	106	79
8-20	9	10	10	105	79
8-21	3	4	4	104	79
8-22	5	8	8	101	79
8-23	8	18	18	91	79
8-24	7	11	11	87	79
8-25	9	6	6	90	79
8-26	7	3	3	94	79
8-27	8	8	8	94	79
8-28	9	12	12	91	79
8-29	11	10	10	92	79
8-30	9	14	14	87	79
8-31	8	2	2	93	79
9-01	11	6	6	98	79
9-02	6	2	2	102	79
9-03	9	5	5	106	79
9-04	15	9	9	112	79
9-05	13	13	13	112	79
9-06	5	17	17	100	79
9-07	3	10	10	93	79
9-08	9	4	4	98	79
9-09	7	5	5	100	79
9-10	9	13	13	96	79
9-11	13	7	7	102	79

表 2

疾病种类	疾病人数	疾病所占比	病床周转次数	平均排队时间	平均住院时间	平均逗留时间	平均入院人数 (/天)	平均出院人数 (/天)
白内障	72	0.2063	0.8481	12.67	5.43	18.10	1.28	1.18
白内障(双眼)	82	0.2350	1.0380	12.51	8.66	21.17	1.34	1.44
视网膜疾病	101	0.2894	1.2785	12.53	12.54	25.07	1.66	1.66
青光眼	39	0.1117	0.4051	12.26	10.23	22.49	0.64	0.64
外伤	55	0.1576	0.5443	1	7.09	8.09	0.90	0.90

病床使用率高、病床周转率快、工作效率高，可以多收病人，但不能越高越好，两者必须保持在一个适当的比例关系，两者过高，过低都不宜。从表一中可知从8月7日到9月11日，院内人数都是79人，即病床使用率是100%。超过了标准值85%~93%。但我们不清楚在7月13日之前院内有多少人。从附录表中我们还可以看出患白内障（双眼）病的人在7月28日，29日，30日，31日以及8月1日，2日住院的人却都在8月4日接受第一次手术，这样对于时间靠前的入院病人来说，他们等待手术的时间就非常的长，从这里可以看出白内障病人在医院里的平均逗留时间没有达到最短。在这段时间内工作效率可以如下计算得到

$$\text{病床工作效率} = \frac{349 \times 60}{79^2} = 3.3552$$

其他相关指标的数据见表二。

问题二 病床安排模型的建立与求解

模型的基本假设如下：

- (1) 将准予住院治疗的病人分为急诊病人和一般病人两种(以下简称“急诊病人”及一般病人”)。
- (2) 预先给定一个病床占用限制数B（规定B小于拥有的最大病床79）。当实际占用的病床数 $C < B$ 时，无论何种类型的病人均可立即住院；当 $B \leq C < 79$ 时，则急诊病人被允许住院，而一般病人则登记排队等待住院， $C=79$ 时，急诊病人立即转院（被拒收）。而一般病人则登记排队等待住院。病人源一般认为是无限源。

模型一 基于平均逗留时间的线性规划模型

一、模型一的建立

考虑到外伤属于急诊，白内障（双眼）的手术时间一般只安排在星期一和星期三，为了缩短病人在医院的逗留时间，即门诊时间到出院时间的时间差。我们将病人入院的优先顺序按照一周的时间划分分为如下三种情形，其中由于外伤属于急诊，所以病床有空时立即安排住院。

假设 p_1, p_2, p_3, p_4 分别表示拟安排入院的外伤、白内障、白内障双眼、视网膜疾病和青光眼的病人人数。分别表示外伤、白内障、白内障双眼、视网膜疾病

和青光眼的病人在医院的平均逗留时间。

对附录中 2008 年 7 月 13 日至 2008 年 9 月 11 日这类时间各类病人的逗留时间的统计分析，可以得到该段时间类各类病人的平均逗留时间，

表 3

疾病种类	疾病人数	疾病所占比	病床周转率	平均排队时间	平均住院时间	平均逗留时间	平均入院人数 (/天)	平均出院人数 (/天)
白内障	72	0.2063	0.8481	12.67	5.43	18.10	1.28	1.18
白内障(双眼)	82	0.2350	1.0380	12.51	8.66	21.17	1.34	1.44
视网膜疾病和青光眼	140	0.4011	1.6836	12.40	11.39	23.78	1.15	1.15
外伤	55	0.1576	0.5433	1	7.09	8.09	0.90	0.90

从上表可知 $t_1 = 8.09, t_2 = 18.10, t_3 = 21.17, t_4 = 23.78$ ，其中 t_4 是取视网膜疾病和青光眼的逗留时间的平均值。

针对情形一到三，我们以病人在医院的总体逗留时间最少作为目标函数，分别确定如下三个目标函数。

情形1，在周六和周日时，安排病人的优先顺序依次为如下图



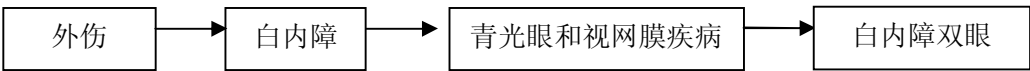
在安排完外伤病人外，如果还有空床位，就安排给白内障双眼病人，因为在星期六或星期天安排他们入院，他们就可以在周一先做一只，周三再做另外一只。这样就可以减少白内障双眼病人的入院与手术之间的等待时间。其次如果还有空床位，就安排给白内障单眼病人，最后在青光眼和视网膜病患中采取先来先服务机制安排病床。目标函数为

$$f(t_i, p_i, a_1, b_1, g_1, d_1) = a_1 p_1 t_1 + b_1 p_3 t_3 + g_1 p_2 t_2 + d_1 p_4 t_4,$$

$$\text{约束条件为} \begin{cases} 0 \leq p_i \leq n \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n, \text{ 其中 } a_1, b_1, g_1, d_1 \text{ 分别为外伤、白内障双眼、白} \\ a_1 > b_1 > g_1 > d_1 \end{cases}$$

内障、青光眼和视网膜疾病的权重系数， n 为拟出院的总病人数。

情形2、在周一和周二时，安排病人的优先顺序如下图



在安排完外伤病人外，如果还有空床位，就安排给白内障单眼病人，他们就可以在星期三做完手术。在青光眼和视网膜病患中还是采取先来先服务机制安排病

床。其次对白内障双眼病人而言，如果先给他们安排床位，他们在周三先做一只，另外一只还得等到下周一再做，这样就延长了等待手术的时间。目标函数为

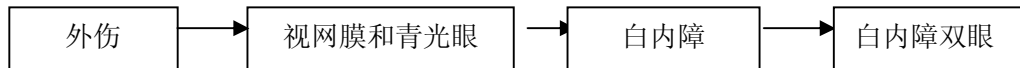
$$f(t_i, p_i, a_2, b_2, g_2, d_2) = a_2 p_1 t_1 + b_2 p_2 t_2 + g_2 p_4 t_4 + d_2 p_3 t_3,$$

约束条件为

$$\begin{cases} 0 \leq p_i \leq n \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n, \text{ 其中 } a_2, b_2, g_2, d_2 \text{ 分别为外伤、白内障、青光眼和视网膜} \\ a_2 > b_2 > g_2 > d_2 \end{cases}$$

疾病、白内障双眼的权重系数， n 为拟出院的总病人数。

情形3、在周三到周五时，安排病人的优先顺序如下图



目标函数为

$$f(t_i, p_i, a_3, b_3, g_3, d_3) = a_3 p_1 t_1 + b_3 p_4 t_4 + g_3 p_2 t_2 + d_3 p_3 t_3,$$

$$\text{约束条件为} \begin{cases} 0 \leq p_i \leq n \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n, \text{ 其中 } a_3, b_3, g_3, d_3 \text{ 为外伤、青光眼和视网膜疾} \\ a_3 > b_3 > g_3 > d_3 \end{cases}$$

病、白内障、白内障双眼的权重系数， n 为拟出院的总病人数。

二、模型一的求解

(一) 权重系数 a_i, b_i, g_i, d_i 的确定

模型一中最重要的是如何确定 a_i, b_i, g_i, d_i ，($i=1, 2, 3$) 使得所得的逗留时间是客观的，公正的，普遍可以接受的。在我们的模型中，常常需要合理地确定所考虑的几个因素的权重。这个权重用一个概率向量表示，例如，对于 n 个因素的情形，要用 n 维概率向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ ，其中 w_1, w_2, \dots, w_n 为非负数且满足 $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$ 。权重向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 的第 i 个分量的含义是第 i 个因素重要性的百分比。可以借助层次分析方法来确定权重向量，其具体做法是：在向有关专家或广大群众征求意见基础上形成一个 n 行 n 列的成对比较矩阵 $A = (a_{ij})$ ，其中 $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$, $a_{ij} > 0, 1 \leq i, j \leq n$, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ 。若 x_i 与 x_j 的重要性之比乘上 x_j 与 x_k 的重要性之比为 x_i 与 x_k 的重要性之比，即 $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$, $1 \leq i, j, k \leq n$ ，称这样的比较矩阵为一致矩阵。由于人的思维活动不可避免地带有主观性和片面性，人们构造地比较矩阵 A 常常不是一致矩阵，所以需要检验所构造的矩阵的一致性，再利用 MATLAB 计算其权向量。

1. 权重参数 a_1, b_1, g_1, d_1 的确定

(1) 比较矩阵的确定

面临的决策问题是：要比较 4 个元素外伤 x_1 ；白内障双眼 x_2 ；白内障 x_3 ；青光眼和视网膜疾病 x_4 对目标—病人平均逗留时间 $f(p_i, a_i, b_i, g_i, d_i)$ 的影响。

我们要确定它们在病人平均逗留时间 $f(p_i, a_i, b_i, g_i, d_i)$ 中所占的比重，即 4 个元素对目标 $f(p_i, a_i, b_i, g_i, d_i)$ 的相对重要性。我们用两两比较的方法将各因素重要性的定性部分数量化。每次取两个条件（因素），用正数 a_{ij} 表示 x_i 与 x_j ($1 \leq i, j \leq 4$) 的重要性之比。由全部的比较结果得到矩阵 $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq 4$ ，称为对比矩阵。显然 $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}, a_{ij} > 0, 1 \leq i, j \leq 4$ 。在

广泛征求专家及群众意见基础上，建立如下比较矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 7/4 & 7/3 \\ 5/7 & 1 & 5/4 & 5/3 \\ 4/7 & 4/5 & 1 & 4/3 \\ 3/7 & 3/5 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 一致性检验问题

如果决策人对 4 个决策对象的比较具有逻辑的绝对一致性，即不会出现任何矛盾的结论，即 x_i 与 x_j 的重要性之比乘上 x_j 与 x_k 的重要性之比应该为 x_i 与 x_k 的重要性之比，即 $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, 1 \leq i, j, k \leq 4$ 。我们称这样的比较矩阵 A 为一致矩阵。然而，实际情况是，由于人的思维活动不可避免地带有主观性和片面性，人们构造地比较矩阵 A 常常不是一致矩阵，即可能出现 $a_{ij}a_{jk} \neq a_{ik}, 1 \leq i, j, k \leq 4$ 。因此，在分析 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 对目标 s 地影响时，必须对比较矩阵进行一致性检验。可以证明：4 阶比较矩阵 A 是一致矩阵当且仅当 A 的最大特征值 $I_{\max} = n$ 。因此，只需计算 A 的最大特征值就可以判断 A 是否是一致矩阵。如果 A 具有一致性，可以证明 $I_{\max} = 4$ 。而且 I_{\max} 越大，不一致程度越严重。此时 $I_{\max}(A)$ 对应的特征向量 Y 就不能真实反映 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在目标 s 中所占的比重。令 $CI = \frac{I_{\max}(A) - 3}{3}$ ，将 CI 作为衡量一个成对比较阵 A 的不一致程度的标准，称 CI 为一致性指标。

当判断矩阵 A 的最大特征值 $I_{\max}(A)$ 稍大于 4，这时称 A 具有满意的一致性。用这样方法定义的一致性是不严格的，还必须给出度量指标。莎蒂提出用平均随机一致性指标 RI 检验成对比较阵 A 是否具有满意的一致性。平均随机一致性指标 RI 是这样定义的：对于 $n = 4$ ，随机构造成对比较阵 A' ，其中 a_{ij} 是随机选取的，这样的 A' 是不一致的，取充分大的子样得到 A' 的最大特征值的平均值 $I_{\max}(A)$ ，定义 $RI = \frac{I'_{\max} - 4}{3}$ 。莎蒂用大小为 500-1000 的子样，对于不同的 n 算出 RI 的值如下表 4：

表 4

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

令 $CR = \frac{CI}{RI}$ ，则称 CR 为随机一次性检验的临界值。当 $CR < 0.1$ 时，认为对比较阵具有满意的一致性，否则就必须重新调整成对比较阵 A ，直至达到满意的一致性为止。利用 MATLAB 可以计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 7/4 & 7/3 \\ 5/7 & 1 & 5/4 & 5/3 \\ 4/7 & 4/5 & 1 & 4/3 \\ 3/7 & 3/5 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \text{ 的 } CI > 0, CR < 0.1,$$

认为比较矩阵具有满意的一致性。我们利用 MATLAB 计算出 A 对应的权重向量为

$$(a_1, b_1, g_1, d_1) = (0.3684, 0.2632, 0.2105, 0.1579)$$

从而得在周一和周二时病人平均逗留时间的计算公式为

$$f(p_i, a_i, b_i, g_i, d_i) = 2.98p_1 + 4.76p_2 + 4.46p_3 + 3.75p_4,$$

2. 参数 a_2, b_2, g_2, d_2 的确定

面临的决策问题是：外伤 y_1 、白内障 y_2 、青光眼和视网膜疾 y_3 病、白内障双眼 y_4 目标一病人平均逗留时间 $f(p_i, a_2, b_2, g_2, d_2)$ 的影响。

在广泛征求专家及群众意见基础上，建立如下比较矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7/5.5 & 7/4.5 & 7/4.2 \\ 5.5/7 & 1 & 5.5/4.5 & 5.5/4.2 \\ 4.5/7 & 4.5/5.5 & 1 & 4.5/4.2 \\ 4.2/7 & 4.2/5.5 & 4.2/4.5 & 1 \end{pmatrix},$$

利用 MATLAB 可以计算矩阵 B 的 $CI > 0$ ， $CR < 0.1$ ，认为比较矩阵具有满意的一致性。我们利用 MATLAB，确定了它们的权重系数向量为：
(0.3302, 0.2594, 0.2123 0.1981)，

3. 权重系数 a_3, b_3, g_3, d_3 的确定

面临的决策问题是：外伤 m_1 、青光眼和视网膜疾病 m_2 、白内障 m_3 、白内障双眼 m_4 4 个层次对目标一病人平均逗留时间 $f(p_i, a_3, b_3, g_3, d_3)$ 的影响。

在广泛征求专家及群众意见基础上建立如下的比较矩阵

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 7/4.5 & 7/3.6 & 7/3 \\ 4.5/7 & 1 & 4.5/3.6 & 4.5/3 \\ 3.6/7 & 3.6/4.5 & 1 & 3.6/3 \\ 3/7 & 3/4.5 & 3/3.6 & 1 \end{pmatrix}$$

利用 MATLAB 可以计算此矩阵的 $CI > 0$ ， $CR < 0.1$ ，认为比较矩阵具有满意的一致性。计算出相应的权重系数向量为：(0.3867, 0.2486, 0.1989, 0.1657)，

(二) 新的分配模型

利用我们建立的模型，我们重新对 8 月 7 日到 8 月 28 日的病人入院情况进行分配（因为这些天医院里的病床被使用数都是 79 张，即病床使用率为 100%），我们求解得出如下病人入院分配方案，见表 5：

表 5

星期	病人入院时间	病人入院前门诊序号	入院病人类型	星期	病人入院时间	病人入院前门诊序号	入院病人类型
星期四	8 月 7 日	214	外伤	星期日	8 月 17 号	304	外伤
	8 月 7 日	107	外伤		8 月 17 号	305	外伤
	8 月 7 日	230	外伤		8 月 17 号	308	外伤
	8 月 7 日	233	外伤		8 月 17 号	227	白内障 (双眼)
	8 月 7 日	108	视网膜		8 月 17 号	229	白内障 (双眼)
	8 月 7 日	109	视网膜		8 月 17 号	232	白内障 (双眼)
	8 月 7 日	111	青光眼	星期一	8 月 18 号	311	外伤
	8 月 7 日	112	视网膜		8 月 18 号	316	外伤
	8 月 7 日	114	视网膜		8 月 18 号	128	白内障
	8 月 7 日	116	视网膜		8 月 18 号	148	白内障
	8 月 7 日	118	视网膜	星期二	8 月 19 号	150	白内障
	8 月 7 日	120	青光眼		8 月 19 号	152	白内障
	8 月 7 日	123	青光眼		8 月 19 号	181	白内障
	8 月 7 日	125	青光眼		8 月 19 号	189	白内障
	8 月 7 日	129	视网膜		8 月 19 号	200	白内障
星期五	8 月 8 号	236	外伤		8 月 19 号	203	白内障
	8 月 8 号	99	视网膜		8 月 19 号	204	白内障
	8 月 8 号	101	视网膜	星期三	8 月 20 号	325	外伤
	8 月 8 号	102	青光眼		8 月 20 号	326	外伤
	8 月 8 号	103	视网膜		8 月 20 号	184	青光眼
	8 月 8 号	104	视网膜		8 月 20 号	186	青光眼
	8 月 8 号	114	视网膜		8 月 20 号	193	视网膜
	8 月 8 号	131	视网膜		8 月 20 号	194	视网膜
星期六	8 月 9 号	98	白内障 (双眼)		8 月 20 号	196	视网膜
	8 月 9 号	105	白内障 (双眼)		8 月 20 号	201	视网膜
	8 月 9 号	117	白内障 (双眼)		8 月 20 号	202	视网膜
	8 月 9 号	119	白内障 (双眼)		8 月 20 号	205	青光眼
	8 月 9 号	127	白内障 (双眼)	星期四	8 月 21 号	328	外伤
	8 月 9 号	132	白内障 (双眼)		8 月 21 号	206	视网膜
	8 月 9 号	141	白内障 (双眼)		8 月 21 号	210	视网膜
	8 月 9 号	146	白内障 (双眼)		8 月 21 号	215	视网膜
	8 月 9 号	154	白内障 (双眼)	星期五	8 月 22 号	331	外伤
	8 月 9 号	161	白内障 (双眼)		8 月 22 号	219	视网膜
	8 月 9 号	169	白内障 (双眼)		8 月 22 号	220	视网膜
	8 月 9 号	171	白内障 (双眼)		8 月 22 号	221	视网膜
	8 月 9 号	172	白内障 (双眼)		8 月 22 号	224	视网膜

	8月9号	177	白内障 (双眼)		8月22号	225	视网膜
	8月9号	183	白内障 (双眼)		8月22号	234	青光眼
	8月9号	185	白内障 (双眼)		8月22号	235	视网膜
	8月9号	188	白内障 (双眼)		8月23号	333	外伤
	8月9号	195	白内障 (双眼)		8月23号	239	白内障 (双眼)
	8月9号	197	白内障 (双眼)		8月23号	246	白内障 (双眼)
	8月9号	199	白内障 (双眼)		8月23号	248	白内障 (双眼)
星期六	8月10号	250	外伤	星期六	8月23号	252	白内障 (双眼)
	8月10号	251	外伤		8月23号	259	白内障 (双眼)
	8月10号	190	白内障 (双眼)		8月23号	262	白内障 (双眼)
	8月10号	208	白内障 (双眼)		8月23号	263	白内障 (双眼)
	8月10号	212	白内障 (双眼)		8月23号	265	白内障 (双眼)
	8月10号	213	白内障 (双眼)		8月23号	273	白内障 (双眼)
	8月10号	217	白内障 (双眼)		8月23号	275	白内障 (双眼)
	8月10号	218	白内障 (双眼)		8月23号	276	白内障 (双眼)
	8月10号	226	白内障 (双眼)		8月23号	277	白内障 (双眼)
星期一	8月11号	100	白内障	星期日	8月23号	278	白内障 (双眼)
	8月11号	106	白内障		8月23号	284	白内障 (双眼)
	8月11号	110	白内障		8月23号	285	白内障 (双眼)
	8月11号	113	白内障		8月23号	286	白内障 (双眼)
	8月11号	115	白内障		8月23号	289	白内障 (双眼)
	8月11号	121	白内障		8月24号	293	白内障 (双眼)
二	8月12号	122	白内障	星期日	8月24号	298	白内障 (双眼)
	8月12号	126	白内障		8月24号	299	白内障 (双眼)
星期三	8月13号	133	青光眼	星期日	8月24号	300	白内障 (双眼)
	8月13号	134	视网膜		8月24号	306	白内障 (双眼)
	8月13号	136	青光眼		8月24号	309	白内障 (双眼)
	8月13号	138	视网膜		8月24号	310	白内障 (双眼)
	8月13号	139	青光眼		8月24号	312	白内障 (双眼)
	8月13号	140	视网膜		8月24号	317	白内障 (双眼)
星期四	8月14号	281	外伤	星期一	8月24号	320	白内障 (双眼)
	8月14号	142	青光眼		8月24号	207	白内障
	8月14号	143	视网膜		8月25号	336	外伤
	8月14号	144	视网膜		8月25号	209	白内障
	8月14号	145	青光眼		8月25号	211	白内障
	8月14号	147	视网膜		8月25号	216	白内障
	8月14号	149	青光眼		8月25号	222	白内障
	8月14号	151	视网膜		8月25号	223	白内障
	8月14号	157	青光眼		8月26号	338	外伤
星期五	8月15号	158	视网膜	星期三	8月26号	339	外伤
	8月15号	159	青光眼		8月26号	228	白内障
	8月15号	160	青光眼		8月27号	341	外伤
	8月15号	162	视网膜		8月27号	342	外伤
	8月15号	164	视网膜		8月27号	343	外伤
	8月15号	165	青光眼		8月27号	238	视网膜
	8月15号	166	视网膜		8月27号	240	视网膜
	8月15号	168	视网膜		8月27号	241	视网膜
星	8月16号	296	外伤	星期三	8月27号	242	青光眼
	8月16号	170	青光眼		8月27号	243	视网膜

8月16号	173	视网膜	8月28号	245	视网膜
8月16号	174	视网膜	8月28号	249	青光眼
8月16号	178	视网膜	8月28号	254	视网膜
8月16号	179	视网膜	8月28号	255	视网膜
8月16号	180	视网膜	8月28号	256	青光眼
8月16号	182	视网膜	8月28号	257	视网膜
8月16号	184	青光眼	8月28号	258	视网膜
8月16号	186	青光眼	8月28号	260	视网膜
8月16号	187	视网膜	8月28号	267	视网膜
8月16号	191	视网膜	8月28号	268	视网膜
8月16号	192	视网膜	8月28号	270	视网膜
			8月28号	271	视网膜

三 模型一的分析与评价

1. 模型的优点:

(1) 为减少不同类型的病人在医院的逗留时间,我们将一个星期划分为三个时间段,即周一周二,周三周四周五,周六星期天。在这三个不同的时间段里,我们将不同类型的病人按照优先级别的高低依次安排其入院。

(2) 在确定每个目标函数的权重系数时,为避免人的主观性。我们采用了层次分析的方法分别确定了它们的权重系数。

(3) 操作起来比较方便。

2. 模型的缺点: 可能导致某几类病人的等待时间太长,导致病人的不满意度很高而影响医院的声誉。

基于模型一的特点,我们提出了下面的改进模型。

模型二 病人等待入院的不满意度模型

一 模型的建立

我们首先将时间施行如下两种划分:

1. 时间的第一种划分方式见表 6:

表 6

第一个时间区间	第二个时间区间	第三个时间区间
星期一、星期二	星期三、星期四、星期五	星期六、星期日

2. 时间的第二种划分方式:

对题给数据的统计分析,我们可得到不同病人的等待时间长度,统计结果见表 7。

表 7

疾病种类	最短住院时间	最迟住院时间	平均排队时间
白内障	10	16	12.67
白内障双眼	10	14	12.51
青光眼和视网膜	10	15	12.53
外伤	1	1	1

根据上述数据，我们发现除外伤以外，大致等待时间为 12 天左右，等待时间的区间为[10, 16]，所以我们以第 i 种病人等待入院的时间长度作为划分标准，以 4 天为一个时间单位，将等待时间划分为 4 个时间段，具体的时间划分如下：

等待 0~4 天的为第一个时间段；等待 4~8 天的为第二个时间段；

等待 8~12 天的为第三个时间段；等待 12~16 天的为第三个时间段。

然后我们引入如下两个参数：

p_{ij} ：表示患第 i 种疾病的人在第 j 个时间区间里应该住院的紧急程度。 t_{ik} ：表示患第 i 种疾病的人在第 k 个时间段里还在等待的不满意度。其中 $i=1,2,3,4; j,k=1,2,3,4$ 。

我们根据病人的个人属性情况确定下列两组数据，见表 8，表 9：

表 8

疾病类型	p_{ij}		
外伤	p_{11}	p_{12}	p_{13}
白内障	p_{21}	p_{22}	p_{23}
白内障双眼	p_{31}	p_{32}	p_{33}
青光眼和视网膜	p_{41}	p_{42}	p_{43}

表 9

疾病类型	t_{ik}		
外伤	t_{11}	t_{12}	t_{13}
白内障	t_{21}	t_{22}	t_{23}
白内障双眼	t_{31}	t_{32}	t_{33}
青光眼和视网膜	t_{41}	t_{42}	t_{43}

对于第 m 个人来说，我们可以根据他的门诊时间和所患疾病情况，确定该人的三个属性，即： i, j, k ，分别表示该人所患疾病的种类、该病人门诊时间在一个星期中所属的区间划分、该病人等待时间所属的等待时间段，然后依据上述数据和上述两个表格来确定该人的 p_{ij} 和 t_{ik} 。最后我们引入下列目标函数：

$$f = ap_{ij} + (1-a)t_{ik}, \text{ 约束条件 } 0 < a, p_{ij}, t_{ik} < 1$$

二 模型的求解

由于 p_{ij} 表示患第 i 种疾病的人在第 j 个时间区间里应该住院的紧急程度，所以，紧急程度越高的病人优先级越大，而 t_{ik} 表示患第 i 种疾病的人在第 k 个时间区间里等待的不满意度，不满意度越大，其优先级越高，因此，如果上述两个优先级在 a 算法^[2]的调整下值越大，那么，表明该病人的入院优先级越高，如果

我们对所有的等待住院的病人根据其门诊时间和所患疾病情况，确定出其所对应的 f 值，然后对所有的等待住院的人所具有的 f 值进行排序，我们将等待住院的病人按照优先级的高低依次安排其住院。如果优先级相同，我们根据 FCFS(先来先服务)的规则进行安排，具体某天安排入院人数尽量保持与当天的出院人数相等，因为这样将会使得病房使用率较高，这样我们就可以确定在具体一天中合理的安排病人入院的情况。

三 模型的评价与分析

- 1. 模型的优点：**改进了模型一的缺点，是一种人性化的病床安排模型。不至于由于考虑逗留时间短而全部安排某一类或几类病人先住院，而忽略了一些病人等待时间太长导致不满意度高而影响医院的声誉。
- 2. 模型的缺点：**在计算上述两个表格中的数据的时候,需要根据其自身所具有的特点,即所得疾病的类型，门诊时间所属的时间区间，等待时间所属的时间区间的属性确定该种病人的属性，其可能不具有一定的普适性。

模型三 应用 TOPSIS 法对病床工作效率的综合评价

第一步 评价指标的选择反映病床工作效率的出院人数、出院者平均住院日病床使用率、病床周转次建立原始数据表。

表10 各病种综合评价指标值

类型	出院人数	出院者平均住院日	病床使用率%	病床周转次数
外伤	55	7.09	1	0.54
白内障双眼	82	8.66	1	1.04
白内障	72	5.43	1	0.85
青光眼	39	10.23	1	0.41
视网膜疾病	101	12.54	1	1.28

第二步 指标同趋势化 出院人数、病床使用率、病床周转次为高优指标出院者平均住院日为低优指标。为达到相同趋势的要求，将表1中低优指标 X_{ij} 通过 $X'_{ij} = 1 / X_{ij}$ 变换而转化成高优指标 然后建立同趋势化后的原始数据矩阵。

第三步 指标归一化处理对同趋势化后的原始数据矩阵进行归一化处理，并建立相应矩阵。数据归一化按下列公式计算： $a_{ij} = X'_{ij} / \sum X_{ij}^2$ 其中 $i=1, 2, 3, 4, 5$;
 $j=1, 2, 3, 4$ 。

第四步 根据A矩阵得到最优方案(最优值向量)和最劣方案(最劣值向量) A^+ , A^-
 $A^+ = (0.130, 0.113, 0.17, 0.092, 0.079)$
 $A^- = (3.3 \times 10^{-4}, 1.6 \times 10^{-4}, 4.4 \times 10^{-4}, 2.3 \times 10^{-4}, 0.63 \times 10^{-4})$

其中 $A_{ij}^+ = \max_{1 \leq i \leq 5} |A_{ij}|$ $A_{ij}^- = \min_{1 \leq i \leq 5} |A_{ij}|$ $i=1,2,3,4,5; j=1,2,3,4$

第五步 计算 (1)各科室指标值与最优方案及最劣方案的距离 D_i^+ , D_i^-

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (a_{ij}^+ - a_{ij})^2} , \quad D_i^- = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (a_{ij}^- - a_{ij})^2}$$

第六步 按接近程度 $C_i = D_i^- / D_i^+ + D_i^-$ 大小将各种类型眼科疾病进行评价，结果见表10。 C_i 值在0与1之间，该值越接近1，表示评价对象越接近最优水平；反之，该值越接近0，表示评价对象越接近最劣水平。

表11 各病种指标值与最优值相对接近度

类型	D_i^+	D_i^-	C_i
外伤	0.197	0.135	0.406
白内障双眼	0.352	0.114	0.244
白内障	0.257	0.176	0.406
青光眼	0.143	0.095	0.400
视网膜疾病	0.131	0.079	0.376

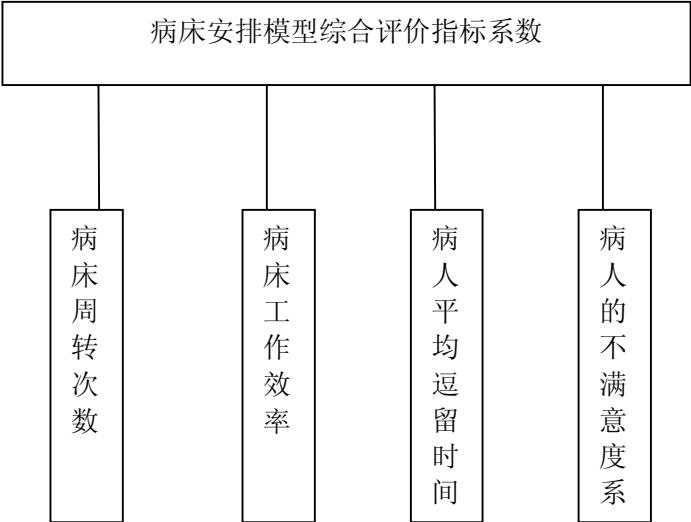
结果分析：由表11可知，按照医院当前方案分配病床，按接近程度 C_i 值较接近0，即对病床工作效率进行评价接近最劣水平。

模型四 基于综合指标评价体系的模型

一 模型的建立与求解

1. 目标函数与系统要素的确定

构造目标函数为：病床安排模型的综合指标评价体系系数，记为 h ，
系统要素分别为：病床周转次数 x_1 ，病床工作效率 x_2 ，病人平均逗留时间与平均等待时间 x_3 ，病人等待的不满意度 x_4



$$h = ax_1 + bx_2 + gx_3 + dx_4$$

2. 比较矩阵的确定

面临的决策问题是病床平均周转次数 x_1 ，病床工作效率 x_2 ，病人平均逗留时间与平均等待时间 x_3 ，病人等待的平均不满意度 x_4 对目标—病床安排模型的综合指标评价体系系数 h 的影响。

在广泛征求专家及群众意见基础上，建立如下比较矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5/4 & 5/6 & 5/3 \\ 4/5 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 6/5 & 3/2 & 1 & 2 \\ 3/5 & 3/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

利用 MATLAB 可以计算此矩阵的 $CI > 0$ ， $CR < 0.1$ ，认为比较矩阵具有满意的一致性。计算出相应的权重系数向量为：(0.2778, 0.2222, 0.3333, 0.1667)，

$$h = ax_1 + bx_2 + gx_3 + dx_4 = 0.2778x_1 + 0.2222x_2 + 0.3333x_3 + 0.1667x_4$$

二 模型的应用

根据表 2 可以计算出 $x_1=0.19992$ ， $x_2=0.3552$ ， $x_3=13.887$ ， $x_4=0.5$ 可以得到 $h=3.08$ 。

同样，我们可以对我们自己给出的安排方案（见表 5）计算其相应的评价指标，具体的计算结果值如下：

$$x_1=0.2100, \quad x_2=0.4000, \quad x_3=11.667, \quad x_4=0.4$$

最后得出 $h=3.18$ ，根据得到的数据统计概况，我们可以看出使用我们的分配模型将会减少病人的平均等待时间 x_3 ，降低病人的平均不满意度 x_4 ，增加病床工作效率 x_2 ，增加病床平均周转次数 x_1 ，由此可以看出我们的模型是具有优点的。

问题三 作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院。能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间呢？

我们根据统计表中每天住院病人和等待住院病人的情况，得出每天等待住院病人的平均等待时间以及每种病人的每天平均等待时间，根据每天的平均等待时间的情况，我们模拟出六条曲线，如下图 1 所示：

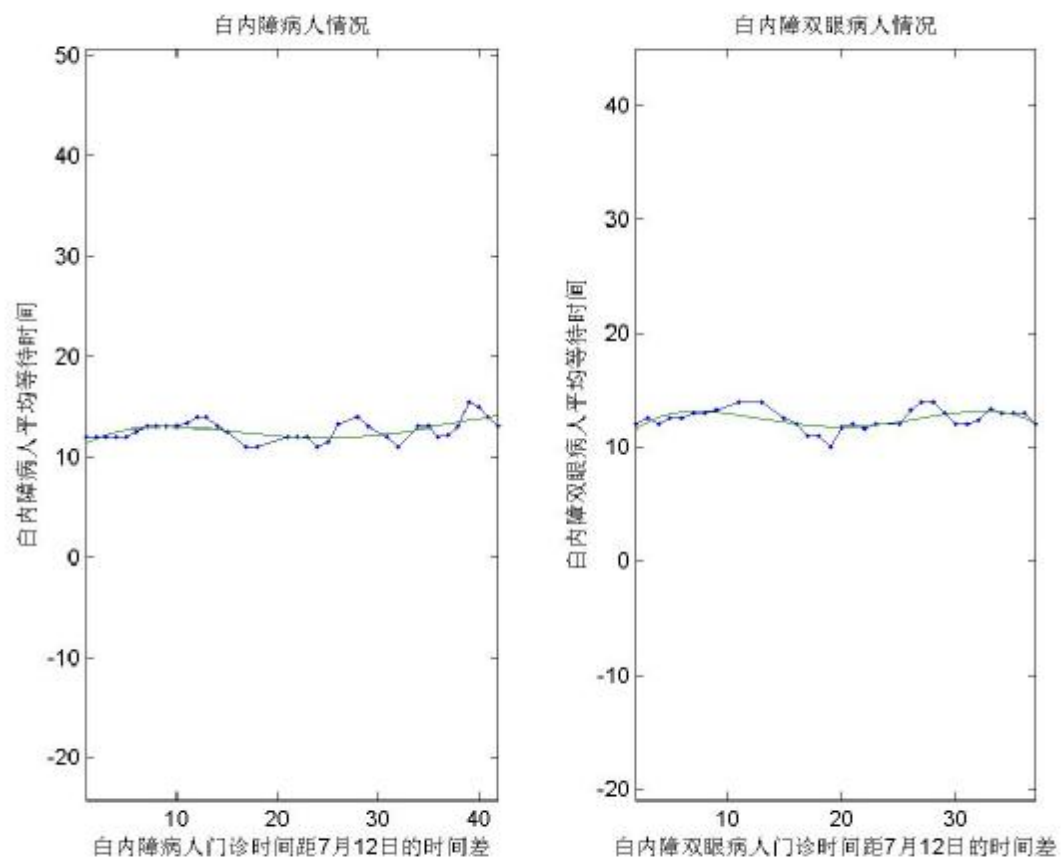


图 1

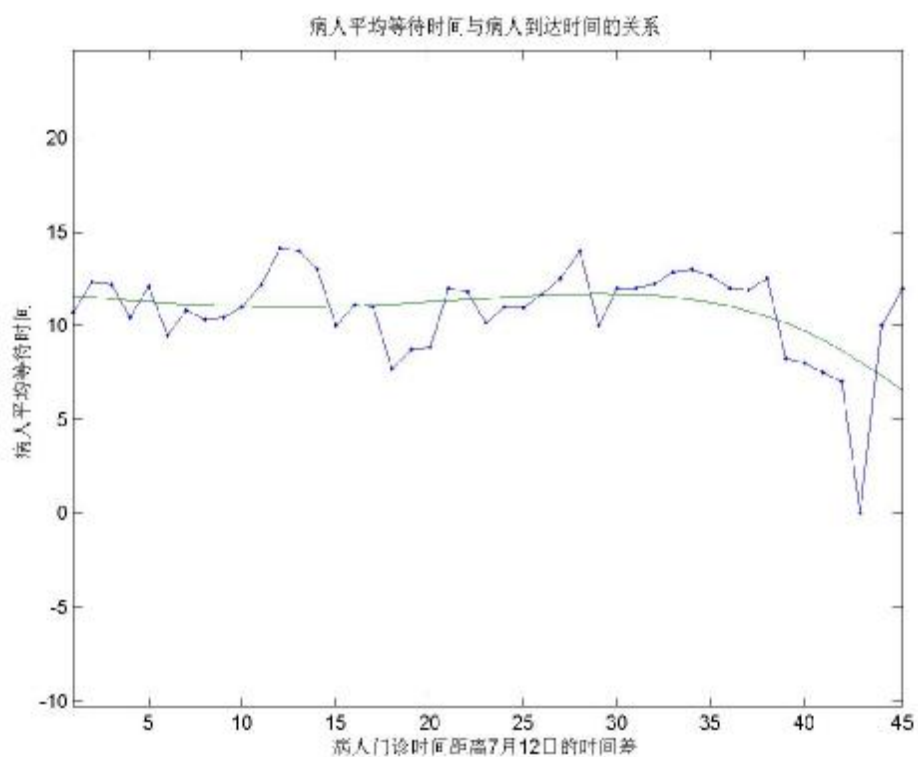


图 2

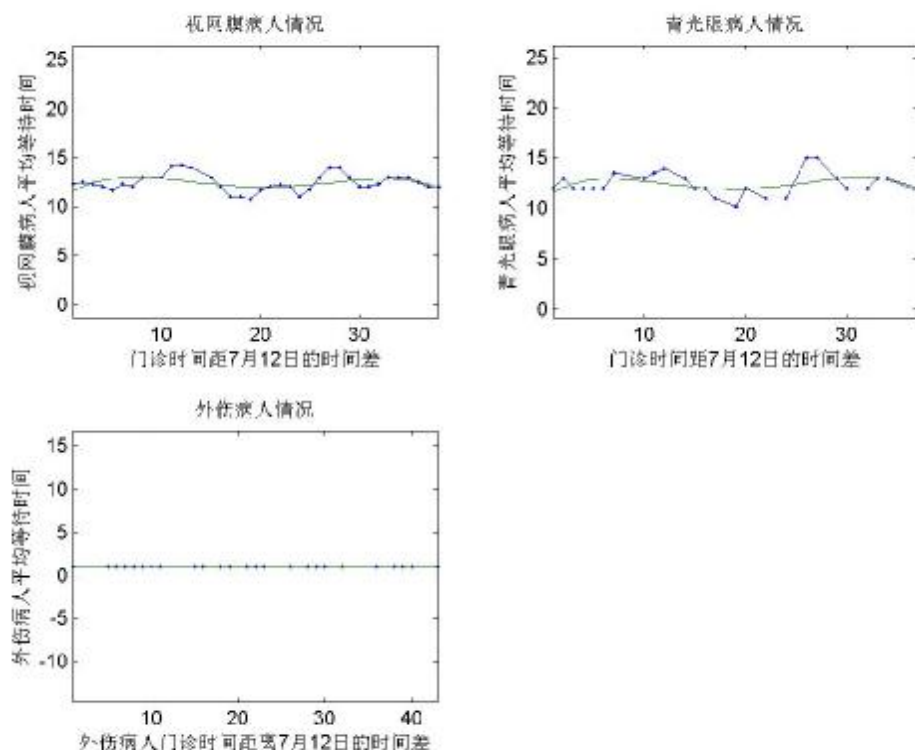


图 3

并且我们给出了这六条曲线的函数表达式：

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -0.0045x^2 - 0.1593x + 10.3433 \\
 y_2 &= 0.0003x^3 - 0.00163x^2 + 0.2478x + 11.6631 \\
 y_3 &= 0.0001x^3 - 0.0016x^2 - 0.0117x + 12.6616 \\
 y_4 &= 0.0001x^3 - 0.0039x^2 + 0.053x + 12.3041 \\
 y_5 &= 0.0008x^2 - 0.0188x + 12.4979 \\
 y_6 &= 1
 \end{aligned}$$

其中函数 y_1 表示在第 x 天 (x 表明病人的门诊时间与 7 月 12 日间的时间差,下同) 门诊病人需要等待入院的平均等待时间; 函数 y_2 表示在第 x 天白内障病人需要等待的平均等待时间; 函数 y_3 表示在第 x 天白内障双眼病人需要等待的平均等待时间; 函数 y_4 表示在第 x 天视网膜病人需要等待的平均等待时间; 函数 y_5 表示在第 x 天青光眼病人需要等待的平均等待时间; 函数 y_6 表示对应第 x 天外伤病人需要等待的平均等待时间。

为了在病人门诊时就告知其大致入住时间区间, 我们首先使用上述平均等待时间函数表达式进行计算, 根据病人的门诊时间, 可以计算出该病人的门诊时间距离 7 月 12 日的时间差 x , 然后根据病人所得病的类型, 利用上述相应的公式 ($y_2 \sim y_6$) 进行求解, 可以基本得出该病人的平均等待时间, 然后再使用公式 y_1 计算当天所有门诊病人的平均等待时间。根据以上计算出的两个等待时间。一个是无论那种类型病人, 我们都可以根据等待住院病人的统计情况, 告知门诊病人其大致入住时间区间, 另一个是对于不同类型的病人, 我们可以告知门诊病人其

大致入住时间区间。其具体置信区间如下表 11:

表 11

疾病类型	置信度为 95% 的置信区间
外伤	$[0.95y_6(x), 1.05y_6(x)]$
白内障	$[0.95y_2(x), 1.05y_2(x)]$
白内障 (双)	$[0.95y_3(x), 1.05y_3(x)]$
视网膜疾病	$[0.95y_4(x), 1.05y_4(x)]$
青光眼	$[0.95y_5(x), 1.05y_5(x)]$

我们依据上述模型, 对题目中所给的第三个表, 即入院时间、手术时间和出院时间都未确定的表, 进行计算, 使用程序计算可以得到对应的门诊病人的住院时间, 具体情况如下表 12:

表 12

序号	类型	门诊时间	入院时间	序号	类型	门诊时间	入院时间
1	白内障 (双眼)	2008-8-30	9-13	52	白内障 (双眼)	2008-9-5	9-20
2	视网膜疾病	2008-8-30	9-12	53	白内障 (双眼)	2008-9-5	9-20
3	青光眼	2008-8-30	9-12	54	视网膜疾病	2008-9-5	9-18
4	视网膜疾病	2008-8-30	9-12	55	白内障 (双眼)	2008-9-5	9-20
5	视网膜疾病	2008-8-30	9-12	56	青光眼	2008-9-5	9-19
6	白内障 (双眼)	2008-8-30	9-13	57	白内障 (双眼)	2008-9-5	9-20
7	白内障	2008-8-31	9-15	58	白内障	2008-9-5	9-21
8	青光眼	2008-8-31	9-13	59	白内障 (双眼)	2008-9-5	9-20
9	白内障 (双眼)	2008-8-31	9-14	60	白内障 (双眼)	2008-9-5	9-20
10	视网膜疾病	2008-8-31	9-13	61	白内障 (双眼)	2008-9-6	9-21
11	视网膜疾病	2008-8-31	9-13	62	视网膜疾病	2008-9-6	9-19
12	视网膜疾病	2008-8-31	9-13	63	青光眼	2008-9-6	9-20
13	青光眼	2008-8-31	9-13	64	白内障 (双眼)	2008-9-6	9-21
14	白内障	2008-8-31	9-15	65	视网膜疾病	2008-9-7	9-20
15	视网膜疾病	2008-9-1	9-14	66	白内障 (双眼)	2008-9-7	9-22

16	视网膜疾病	2008-9-1	9-14	67	视网膜疾病	2008-9-7	9-20
17	青光眼	2008-9-1	9-14	68	白内障	2008-9-8	9-24
18	白内障(双眼)	2008-9-1	9-15	69	视网膜疾病	2008-9-8	9-21
19	白内障(双眼)	2008-9-1	9-15	70	视网膜疾病	2008-9-8	9-21
20	白内障(双眼)	2008-9-1	9-15	71	白内障	2008-9-8	9-24
21	视网膜疾病	2008-9-1	9-14	72	白内障(双眼)	2008-9-8	9-23
22	白内障	2008-9-1	9-16	73	白内障	2008-9-8	9-24
23	视网膜疾病	2008-9-1	9-14	74	视网膜疾病	2008-9-8	9-21
24	视网膜疾病	2008-9-1	9-14	75	白内障	2008-9-8	9-24
25	白内障	2008-9-2	9-17	76	青光眼	2008-9-9	9-23
26	白内障	2008-9-2	9-17	77	青光眼	2008-9-9	9-23
27	白内障(双眼)	2008-9-2	9-16	78	视网膜疾病	2008-9-9	9-22
28	白内障	2008-9-2	9-17	79	白内障	2008-9-9	9-25
29	视网膜疾病	2008-9-2	9-15	80	白内障	2008-9-9	9-25
30	视网膜疾病	2008-9-3	9-16	81	视网膜疾病	2008-9-10	9-23
31	视网膜疾病	2008-9-3	9-16	82	白内障	2008-9-10	9-26
32	白内障(双眼)	2008-9-3	9-18	83	白内障(双眼)	2008-9-10	9-26
33	白内障	2008-9-3	9-18	84	白内障	2008-9-10	9-26
34	视网膜疾病	2008-9-3	9-16	85	白内障	2008-9-10	9-26
35	白内障	2008-9-3	9-18	86	白内障(双眼)	2008-9-10	9-26
36	视网膜疾病	2008-9-3	9-16	87	白内障	2008-9-10	9-26
37	视网膜疾病	2008-9-3	9-16	88	青光眼	2008-9-10	9-24
38	白内障(双眼)	2008-9-4	9-19	89	白内障(双眼)	2008-9-10	9-26
39	白内障	2008-9-4	9-19	90	视网膜疾病	2008-9-11	9-24
40	青光眼	2008-9-4	9-18	91	视网膜疾病	2008-9-11	9-24

41	视网膜疾病	2008-9-4	9-17	92	青光眼	2008-9-11	9-25
42	视网膜疾病	2008-9-4	9-17	93	白内障(双眼)	2008-9-11	9-27
43	视网膜疾病	2008-9-4	9-17	94	白内障(双眼)	2008-9-11	9-27
44	青光眼	2008-9-4	9-18	95	青光眼	2008-9-11	9-25
45	白内障(双眼)	2008-9-4	9-19	96	白内障(双眼)	2008-9-11	9-27
46	白内障(双眼)	2008-9-4	9-19	97	外伤	2008-9-11	9-12
47	青光眼	2008-9-4	9-18	98	白内障(双眼)	2008-9-11	9-27
48	青光眼	2008-9-4	9-18	99	视网膜疾病	2008-9-11	9-24
49	视网膜疾病	2008-9-4	9-17	100	白内障	2008-9-11	9-28
50	视网膜疾病	2008-9-4	9-17	101	视网膜疾病	2008-9-11	9-24
51	白内障(双眼)	2008-9-5	9-20	102	视网膜疾病	2008-9-11	9-24

问题四

问题一中的模型是从总体上基于建立目标函数为平均逗留时间并使其最小从而使医院资源得到充分利用。但这样不能让不同病种的病人之间的利益得到较好的协调。

在本问题中，由于星期六和星期日医院不安排手术，必须对现行手术时间安排作出合适调整。为了减少病人住院至接受手术间的逗留时间，从而减少病人住院开销，我们先可以考虑在允许的时间范围内减少手术前准备时间。所以我们认为白内障（含双眼）手术前准备时间为 1 天（原题为 1 或 2 天），青光眼和视网膜病的为 2 天（原题为 2 或 3 天），外伤的为 1 天。我们通过固定术前准备时间来调整病人入院时间从而间接达到调整手术时间的目的。但调整同时仍然应综合考虑到医院和病人双方的利益。医院从职业道德出发应充分利用现有资源以最好的为病人服务；门诊病人则想尽早入院手术。我们综合考虑了各方面的因素，在原有的基础上建立了新的模型来调整病人入院时间，同时较好地协调了不同病种病人之间的利益冲突。

模型五

（一）模型的分析

首先引入两个定义。

最佳入院日期：表示病人入院后马上可以经过术前准备时间而进行手术，即它与手术日期的时间差恰好为此手术术前准备时间。

定义等待系数为：

等待系数=（病人入院至手术之间的等待时间-术前准备时间）/术前准备时间
等待系数越大表示病人等待手术的时间越长，则病人就越不满意。

经过认真分析，我们认为医院应从以下原则出发调整手术时间以制定新方案。

原则 1：由于星期六和星期日不安排手术，并且经统计发现外伤病人有且只能有一天的术前准备时间，所以外伤病人的入院时间除了星期五和星期六外其它时间均可，并且无论以下何种情况他的入院优先级均是最高。

原则 2：经过统计发现医院由于过去时间安排不当，导致住院但未进行手术的患青光眼和视网膜疾病病人积累过多，所以当两者与白内障（含双眼）病人同时出现在最佳入院日期时或只与白内障病人的等待系数相同时，青光眼和视网膜疾病病人入院优先级较高，以减少医院手术压力，提高医院今后工作效率。

原则 3：若青光眼和视网膜病人、白内障双眼病人、白内障病人四种病人只有部分处在最佳入院日期，则他们入院优先级比不处在最佳入院日期的病人要高；当若都不处在最佳入院日期时，等待系数越小的入院优先级越高。

原则 4：同种病患者或按门诊序号入院，序号靠前的优先级高；青光眼患者和视网膜疾病患者同样按门诊序号先后处理。

原则 5：由原题可以知道白内障双眼病人由于要连续做两次手术，医院向白内障双眼病人提供手术的机会一周只有一次（两次手术看成一次机会），而白内障病人有两次机会，患青光眼和视网膜疾病病人均有三次机会，所以当四者都处在最佳入院日期或白内障病人和白内障双眼病人等待系数相同时，白内障双眼病人入院优先级最高。否则若还有未安排好的顺序一律按门诊序号排序。

由于在问题二中星期一、三安排的是白内障（含双眼）手术，当星期六、日安排手术时，只是在原方案上将原本安排在星期六、日的青光眼和视网膜疾病手术转移到星期二、四、五安排，若就此调整，调整方案意义不大。所以按以上几种原则我们从整体上分类重新确定了两个手术调整方案。每次对入院时间排序时对五个原则之间从上而下按递进关系而非并列关系进行考虑，按某原则确定一个排序后，在该原则后面的原则对此不能再改动，直至排序结束。（为了绘表方便，以下青光眼患者和视网膜疾病患者统称为青膜病）

情形 1：星期二、四安排白内障手术(含双眼)，星期一、三、五安排青光眼和视网膜手术。具体入院时间安排如下表 13：

表 13

	病人入院优先顺序（左至右）			
星期六	青膜病	白内障双眼	白内障	
星期日	外伤	白内障双眼	青膜病	白内障
星期一	外伤	白内障双眼	白内障	青膜病
星期二	外伤	青膜病	白内障	白内障双眼
星期三	外伤	青膜病	白内障	白内障双眼
星期四	外伤	青膜病	白内障双眼	白内障

星期五	青膜病	白内障双眼	白内障	
-----	-----	-------	-----	--

注：在星期六安排病人入院。首先按照原则 1，外伤病人不能入院。然后，青膜病人若此时住院，距其最早手术时间（下星期一）差两天，即他恰处在最佳入院日期；白内障病人手术最早要在下星期二进行手术，所以他如果此时入院，要等待 3 天，故非其最佳入院日期，其等待系数= $\frac{3-1}{1}=2$ ；同上，此时非白内障双

眼病人最佳入院日期，其等待系数为= $\frac{3-1}{1}=2$ 。最后根据原则 3，青膜病人优先入院；白内障病人和白内障双眼病人等待系数相同根据原则 5，白内障双眼病人优于白内障病人先入院。其它情况分析类似。

情形 2：星期三、五安排白内障手术（含双眼）；星期一、二、四安排青光眼和视网膜疾病手术，外伤手术除星期五六外均可进行。具体入院时间安排见下表 14。

表 14

	病人入院优先顺序（左至右）			
星期六	青膜病	白内障双眼	白内障	
星期日	外伤	青膜病	白内障双眼	白内障
星期一	外伤	青膜病	白内障双眼	白内障
星期二	外伤	白内障双眼	青膜病	白内障
星期三	外伤	白内障	白内障双眼	青膜病
星期四	外伤	青膜病	白内障双眼	白内障
星期五	青膜病	白内障双眼	白内障	

分析与情形 1 类似。

下面将分析讨论从上两方案中选择其中更优的方案。由于上述两个方案是我们根据五个原则来制定的，所以此五个原则直接影响方案的优劣。另外，五个原则对方案的影响又各不相同，例如对原则一，由于外伤病人必须最快诊治，不能逗留多余时间，所以认为原则一必须要首先考虑，真正的以人为本；再者，原则五是基于白内障双眼病人接受手术机会最小考虑，只是涉及白内障双眼病人的利益，对其它病种病人而言反而不利，故认为其重要性最低。因此，在制定上述两个方案时使用各个原则的个数直接影响两方案的优劣，重要性较高的原则使用次数越多，则方案就越可取；反之，则不然。我们可以先对每个原则赋权重，类似上述做法。我们具体建模如下。

（二）模型的建立与求解

1. 构造目标函数：
$$T = \sum_{i=1}^5 k_i \times I_i$$

(其中 k_i 是第 i 个原则的权重系数, I_i 表示第 i 个原则在某方案中使用的总次数)

$$2. \text{ 构造比较矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 1/3 & 1 & 3/2 & 2 & 7/3 \\ 1/4 & 2/3 & 1 & 4/3 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 3/4 & 1 & 5/3 \\ 1/8 & 3/7 & 1/2 & 3/5 & 1 \end{pmatrix}$$

类似上述做法可以确定其权重向量为:

$$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = (0.9002, 0.3113, 0.2270, 0.1731, 0.1150)$$

经分析方案一所用各原则次数为 $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = (5, 2, 5, 3, 5)$

经分析方案二所用各原则次数为 $(I'_1, I'_2, I'_3, I'_4, I'_5) = (5, 2, 6, 2, 5)$

$$\text{则目标函数值 } T_1 = \sum_{i=1}^5 k_i \times I_i = 7.3529 < T_2 = \sum_{i=1}^5 k_i \times I'_i = 7.4068。$$

最终我们选取方案二为最后的医院手术调整方案。

依据该方案, 我们重新对问题二进行求解, 得到了下述分配方案, 见表 15

表 15

病人入院 时间	病人入院 前门诊序 号	入院病人类型	病人入院 时间	病人入院 前门诊序 号	入院病人类型
8月7日	214	外伤	8月17号	304	外伤
8月7日	107	外伤	8月17号	305	外伤
8月7日	230	外伤	8月17号	308	外伤
8月7日	233	外伤	8月17号	227	白内障 (双眼)
8月7日	108	视网膜	8月17号	229	白内障 (双眼)
8月7日	109	视网膜	8月17号	232	白内障 (双眼)
8月7日	111	青光眼	8月18号	311	外伤
8月7日	112	视网膜	8月18号	316	外伤
8月7日	114	视网膜	8月18号	128	白内障
8月7日	116	视网膜	8月18号	148	白内障
8月7日	118	视网膜	8月19号	145	青光眼
8月7日	120	青光眼	8月19号	147	视网膜
8月7日	123	青光眼	8月19号	149	青光眼
8月7日	125	青光眼	8月19号	151	视网膜
8月7日	129	视网膜	8月19号	157	青光眼
8月8号	236	外伤	8月19号	203	白内障
8月8号	99	视网膜	8月19号	204	白内障
8月8号	101	视网膜	8月20号	325	外伤
8月8号	102	青光眼	8月20号	326	外伤
8月8号	103	视网膜	8月20号	184	青光眼

8月8号	104	视网膜	8月20号	186	青光眼
8月8号	114	视网膜	8月20号	193	视网膜
8月8号	131	视网膜	8月20号	194	视网膜
8月9号	98	白内障 (双眼)	8月20号	196	视网膜
8月9号	105	白内障 (双眼)	8月20号	201	视网膜
8月9号	117	白内障 (双眼)	8月20号	202	视网膜
8月9号	119	白内障 (双眼)	8月20号	205	青光眼
8月9号	99	视网膜	8月21号	328	外伤
8月9号	101	视网膜	8月21号	206	视网膜
8月9号	102	青光眼	8月21号	210	视网膜
8月9号	103	视网膜	8月21号	215	视网膜
8月9号	104	视网膜	8月22号	331	外伤
8月9号	161	白内障 (双眼)	8月22号	248	白内障 (双眼)
8月9号	169	白内障 (双眼)	8月22号	252	白内障 (双眼)
8月9号	171	白内障 (双眼)	8月22号	259	白内障 (双眼)
8月9号	172	白内障 (双眼)	8月22号	262	白内障 (双眼)
8月9号	177	白内障 (双眼)	8月22号	263	白内障 (双眼)
8月9号	106	白内障	8月22号	234	白内障 (双眼)
8月9号	110	白内障	8月22号	235	视网膜
8月9号	113	白内障	8月23号	333	外伤
8月9号	115	白内障	8月23号	239	白内障 (双眼)
8月9号	106	白内障	8月23号	246	白内障 (双眼)
8月9号	199	白内障 (双眼)	8月23号	219	视网膜
8月10号	250	外伤	8月23号	220	视网膜
8月10号	251	外伤	8月23号	221	视网膜
8月10号	190	白内障 (双眼)	8月23号	224	视网膜
8月10号	208	白内障 (双眼)	8月23号	225	视网膜
8月10号	212	白内障 (双眼)	8月23号	265	白内障 (双眼)
8月10号	133	青光眼	8月23号	273	白内障 (双眼)
8月10号	134	视网膜	8月23号	275	白内障 (双眼)
8月10号	136	青光眼	8月23号	276	白内障 (双眼)
8月10号	138	视网膜	8月23号	277	白内障 (双眼)
8月11号	100	白内障	8月23号	278	白内障 (双眼)
8月11号	106	白内障	8月23号	284	白内障 (双眼)
8月11号	110	白内障	8月23号	285	白内障 (双眼)
8月11号	113	白内障	8月23号	286	白内障 (双眼)
8月11号	115	白内障	8月23号	289	白内障 (双眼)
8月11号	121	白内障	8月24号	293	白内障 (双眼)
8月12号	122	白内障	8月24号	298	白内障 (双眼)
8月12号	126	白内障	8月24号	299	白内障 (双眼)
8月13号	213	白内障 (双眼)	8月24号	300	白内障 (双眼)
8月13号	217	白内障 (双眼)	8月24号	306	白内障 (双眼)
8月13号	218	白内障 (双眼)	8月24号	309	白内障 (双眼)
8月13号	226	白内障 (双眼)	8月24号	310	白内障 (双眼)
8月13号	139	青光眼	8月24号	312	白内障 (双眼)
8月13号	140	视网膜	8月24号	317	白内障 (双眼)
8月14号	281	外伤	8月24号	320	白内障 (双眼)
8月14号	142	青光眼	8月24号	207	白内障

8月14号	143	视网膜	8月25号	336	外伤
8月14号	144	视网膜	8月25号	209	白内障
8月14号	137	白内障	8月25号	211	白内障
8月14号	154	白内障	8月25号	216	白内障
8月14号	164	白内障	8月25号	222	白内障
8月14号	170	白内障	8月25号	223	白内障
8月14号	181	白内障	8月26号	338	外伤
8月15号	158	视网膜	8月26号	339	外伤
8月15号	159	青光眼	8月26号	228	白内障
8月15号	160	青光眼	8月27号	341	外伤
8月15号	162	视网膜	8月27号	342	外伤
8月15号	164	视网膜	8月27号	343	外伤
8月15号	165	青光眼	8月27号	238	视网膜
8月15号	166	视网膜	8月27号	240	视网膜
8月15号	168	视网膜	8月27号	241	视网膜
8月16号	296	外伤	8月27号	242	青光眼
8月16号	170	青光眼	8月27号	243	视网膜
8月16号	173	视网膜	8月28号	245	视网膜
8月16号	174	视网膜	8月28号	249	青光眼
8月16号	178	视网膜	8月28号	254	视网膜
8月16号	179	视网膜	8月28号	255	视网膜
8月16号	180	视网膜	8月28号	256	青光眼
8月16号	182	视网膜	8月28号	257	视网膜
8月16号	184	青光眼	8月28号	258	视网膜
8月16号	186	青光眼	8月28号	260	视网膜
8月16号	187	视网膜	8月28号	267	视网膜
8月16号	191	视网膜	8月28号	268	视网膜
8月16号	192	视网膜	8月28号	270	视网膜
			8月28号	271	视网膜

问题五 从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，就此方案，我们将建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型。

模型六 基于 $M|M|C$ 排队模型的病床比例分配模型

$M|M|C(C \geq 2)$ 是多服务台的等待制排队系统，它的各种特征的规定和假设与 $M|M|1$ 排队模型基本相同。并假定 C 个服务台并联排列，各服务台独立工作，其平均服务率相同，即 $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ 。因此，该系统的平均服务率为 Cm 。

在统计平衡状态下，服务强度：
$$\rho = \frac{l}{Cm} < 1$$

此时,系统的稳态概率为：

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{C-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{l}{m} \right)^k + \frac{1}{C!} \left(\frac{l}{m} \right)^C \frac{Cm}{Cm - l} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{I}{m} \right)^n, & n \leq C \\ \frac{1}{C! C^{n-C}} \left(\frac{I}{m} \right)^n P_0, & n \geq C \end{cases}$$

而 $M|M|C$ 模型主要指标为：

(1) 平均队列长 L_q ：

$$L_q = \sum_{n=C+1}^{\infty} (n-C) P_n = \frac{(Cp)^C}{C!(1-p)^2} p P_0$$

(2) 平均队长 L_s ：

$$L_s = L_q + Cp$$

(3) 患者在系统中平均逗留时间 W_s ：

$$W_s = \frac{L_s}{I}$$

(4) 患者在队列中平均等待时间 W_q ：

$$W_q = \frac{L_q}{I}$$

所以，基于上述介绍，我们可以这样考虑问题，由于对系统的总体评价指标是患者在系统中的平均逗留时间 W_s ，而题目中让我们基于所有的病人平均逗留时间最短，求出病床的比例分配方案。如果病床的分配比例与平均服务率有一定的关系的话，我们就可以以病人的平均逗留时间作为我们的目标函数，然后反推出系统的平均服务率。根据系统的平均服务率与病床的分配比例间的关系，得出病床的分配比例。现在，我们就对此问题进行考虑。

我们知道，医院的服务率与病床的分配比例有一定的关系，对于患某种疾病的病人，病床的个数将会直接影响到医院的服务率，病床数越多，无疑这种疾病所属科室的服务率就会越高。现在，我们假设各种类型疾病的病房分配比例如下表 15：

表 15

白内障病人病床分配比例	白内障双眼病人病床分配比例	青光眼病人病床分配比例	视网膜病人病床分配比例	外伤病人病床分配比例
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5

然后，我们知道，医院的服务率不仅与各种疾病病床的分配率有关，而且与其他方面的变量有关，现在，我们假设其他方面的因素对病床的使用率影响比例如下表 16：

表 16

白内障病人其他属性对服务率的影响程度	白内障双眼病人其他属性对服务率的影响程度	青光眼病人其他属性对服务率的影响程度	视网膜病人其他属性对服务率的影响程度	外伤病人其他属性对服务率的影响程度
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

根据如上分析，我们可以列出如下函数表达式：

$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 + b_5c_5 = m$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 1$$

$$b_1c_1 = b_2c_2 = b_3c_3 = b_4c_4 = b_5c_5 = u$$

根据这些函数当我们知道医院的平均服务情况 m 之后，我们就可以求解出对应的病床分配比例 $b_1 \sim b_5$ 。

而我们的目标是所有病人的平均等待时间最短，即：

$$\min W_s = \frac{L_s}{I}$$

对于该种目标规划，我们现在确定其约束条件：

$$L_s = L_q + Cp$$

$$L_q = \sum_{n=C+1}^{\infty} (n-C)P_n = \frac{(Cp)^C}{C!(1-p)^2} pP_0$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{C-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{I}{m} \right)^k + \frac{1}{C!} \left(\frac{I}{m} \right)^C \frac{Cm}{Cm-m} \right]^{-1}$$

$$p = \frac{I}{Cm} < 1$$

根据上述约束条件，我们就可以得出在平均逗留时间最短的情况下算出系统的平均服务率 m ，根据系统的平均服务率我们即可以上述函数表达式求出相应的病床分配率 $b_1 \sim b_5$ 。也就是病床的分配率即可得出。

参考文献：

- [1]张惠芳 吕齐，应用病床工作效率指标分析我院科室床位设置情况[J]，中国医院统计，14(4):351-352，2007.
- [2]赫孝良，戴永红，周义仓，数学建模竞赛赛题简析与论文点评[M]，西安交通大学出版社，2002.
- [3]陈华友，运筹学[M]，中国科学技术大学出版社，2008年5月。
- [4]叶其孝，大学生数学建模竞赛辅导教材，湖南教育出版社[M]，1998第四版。
- [5]袁震东，洪渊，林武忠，蒋鲁敏，数学建模[M]，华东师范大学出版社，1997第一版。
- [6]高丽娟，孙大军和岳增文，应用病床工作效率指标分析医院病床设置情况[J]。中国医药统计，3(16):25-26，2009

附录

一、使用曲线拟合模拟病人等待时间的模拟 matlab 程序实现：

```
[A]=xlsread('C:\MATLAB7\work\问题3数据5');
len=length(A);
```

```

i=1:len;
j=A(:,5);
figure(1);
plot(i,j,'.-');
hold on;
i=i';
p1=polyfit(i,j,2)
f1=polyval(p1,i);
plot(i,j,'.',i,f1,'-');
hold on;
title('病人平均等待时间与病人到达时间的关系');
xlabel('病人门诊时间距离 7 月 12 日的时间差');ylabel('病人平均等待时间');
axis equal;
figure(2);
A1=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 17 18 21 22 23 24 25 26 28 29 31
32 34 35 36 37 38 39 40 41 42];
B1=[12 12 12 12 12 12.5 13 13 13 13 13.4 14 14 13 12.5 11 11 12 12 12 11
11.5 13.25 14 13 12 11 13 13 12 12.25 13 15.5 15 14 13];
subplot(1,2,1);
plot(A1,B1,'.-');
hold on;
p2=polyfit(A1,B1,2)
f2=polyval(p2,A1);
plot(A1,B1,'.',A1,f2,'-');
hold on;
title('白内障病人情况');
xlabel('白内障病人门诊时间距 7 月 12 日的时间差');ylabel('白内障病人平均等待时间');
axis equal;
A2=[2 3 4 5 6 7 8 9 11 13 15 16 17 18 19 20 21 22 23 25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36 37 ];
B2=[12 12.5 12 12.5 12.5 13 13 13.25 14 14 12.5 12 11 11 10 11.75 12 11.67
12 12 13.25 14 14 13 12 12 12.4 13.33 13 13 13 12];
subplot(1,2,2);
plot(A2,B2,'.-');
hold on;
p3=polyfit(A2,B2,2)
f3=polyval(p3,A2);
plot(A2,B2,'.',A2,f3,'-');
hold on;
title('白内障双眼病人情况');
xlabel('白内障双眼病人门诊时间距 7 月 12 日的时间差');ylabel('白内障双眼病人平均等待时间');

```

```

axis equal;
figure(3);
A3=[1 2 3 4 5 6 7 8 10 11 12 13 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 ];
B3=[12.33 12.5 12.3 12 11.67 12.33 12 13 13 14.2 14.25 14 13 12 11 11 10.75
11.67 12 12.25 12 11 11.75 13 14 14 13 12 12 12.33 13 13 13 12.5 12 12];
subplot(2,2,1);
plot(A3,B3,'.-');
hold on;
p4=polyfit(A3,B3,2)
f4=polyval(p4,A3);
plot(A3,B3,'.',A3,f4,'-');
hold on;
title('视网膜病人情况');
xlabel('门诊时间距 7 月 12 日的时间差');ylabel('视网膜病人平均等待时间');
axis equal;
A4=[1 2 3 4 5 6 7 10 11 12 14 15 16 17 19 20 22 24 26 27 29 30 32 33 34
37];
B4=[12 13 12 12 12 12 13.5 13 13.5 14 13 12 12 11 10.25 12 11 11 15 15
13 12 12 13 13 12];
subplot(2,2,2);
plot(A4,B4,'.-');
hold on;
p5=polyfit(A4,B4,2)
f5=polyval(p5,A4);
plot(A4,B4,'.',A4,f5,'-');
hold on;
title('青光眼病人情况');
xlabel('门诊时间距 7 月 12 日的时间差');ylabel('青光眼病人平均等待时间');
axis equal;
A5=[1 43 5 6 7 8 9 10 11 15 16 18 19 21 22 23 26 28 29 30 32 36 38 39 40];
B5=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
subplot(2,2,3);
plot(A5,B5,'.-');
hold on;
p6=polyfit(A5,B5,2)
f6=polyval(p6,A5);
plot(A5,B5,'.',A5,f6,'-');
hold on;
title('外伤病人情况');
xlabel('外伤病人门诊时间距离 7 月 12 日的时间差');ylabel('外伤病人平均等待时间');

```

axis equal;

二、层次分析法的一致性指标判定的 matlab 实现:

```
function H=ff(A)
```

```
t=eig(A)
```

```
w=max(t)
```

```
q=(w-4)/3/.9
```

```
s=[(A(1)+A(5)+A(9)+A(13))/(A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6)+A(7)+A(8)+A(9)+A(10)+A(11)+A(12)+A(13)+A(14)+A(15)+A(16))
```

```
(A(2)+A(6)+A(10)+A(14))/(A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6)+A(7)+A(8)+A(9)+A(10)+A(11)+A(12)+A(13)+A(14)+A(15)+A(16))
```

```
(A(3)+A(7)+A(11)+A(15))/(A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6)+A(7)+A(8)+A(9)+A(10)+A(11)+A(12)+A(13)+A(14)+A(15)+A(16))
```

```
(A(4)+A(8)+A(12)+A(16))/(A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6)+A(7)+A(8)+A(9)+A(10)+A(11)+A(12)+A(13)+A(14)+A(15)+A(16))] ]
```