

投资收益与风险的优化模型

曾劲松 俞 杰 薛大雷

指导教师: 雷英杰

(华北工学院理学系, 太原 030054)

编者按 本文将二目标优化问题, 对两个目标作加权组合化成单目标优化问题, 寻找最优解时采用了净收益率排序, 风险固定时净收益率大者优先的原则, 逐项确定各投资项目的投资额, 对这一解法的合理性, 文章给出了理论证明, 对试验题给出的数据解出了最佳投资方案, 解题步骤、理论依据均简明、清晰.

摘 要 本文以投资效益为目标, 对投资问题建立了一个优化模型. 由于不同的投资方式具有不同的收益和风险损失, 该模型根据优化组合的原理, 提出了两个准则, 并根据准则从众多投资方式中选出若干种投资, 组合成非劣投资, 使在投资额一定的情况下, 经济效益尽可能最大, 风险尽可能最小.

一、符号说明

m_i — 购买 s_i 的购买资金; G — 总体净收益; F — 总体风险; A — 投资效益;

$(r_i - p_i)/(1 + p_i)$ — 投资效率¹

s_k — 在所有的投资项目中 $(r_i - p_i)/(1 + p_i)$ 最大的那一投资项;

$g_i(m_i)$ — 购买 s_i 的投资资金为 m_i 时的净收益; t — 投资项目数.

二、模型的建立与求解

银行存款可视为对 s_0 的投资, 其平均收益率为 $r_0 = 5\%$, 风险损失率 q_0 、购买费率 p_0 皆为 0. 由于各项投资量都比较大, 为追求最大投资效益, 对第 i 项的投资至少应大于等于 u_i .

$$\begin{aligned} A &= G - K \cdot F \\ &= \sum_{i=0}^n g_i(m_i) - K \cdot \max\{q_i \cdot m_i\} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \\ &= \sum_{i=0}^n (r_i - p_i) \cdot m_i - K \cdot \max\{q_i \cdot m_i\} \\ &= \sum_{i=0}^n m_i(r_i - p_i) - k \cdot \max\{q_i \cdot m_i\} \end{aligned}$$

其中

$$\sum_{i=0}^n m_i(1 + p_i) = M.$$

准则一 当总体风险一定, 即 $F = \max\{q_i \cdot m_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 一定时, 投资效益 A 取最大的必要条件是 $(r_i - p_i)/(1 + p_i)$ 值最大的那一项投资的购买额为 $F/q_k (F \leq M \cdot q_k/(1 + p_k))$.

¹ 投资效率应为 $(m_i r_i - m_i p_i)/(m_i + m_i p_i) = (r_i - p_i)/(1 + p_i)$, 见 [2].

证 (略)

准则二 若总体风险 F , 总的资金 M 和投资项目为 s_k 的风险损失率 q_k , 购买费率 p_k 满足 $F \geq M \cdot q_k / (1 + p_k)$ 且所有投资都用来购买 s_k 时, 投资效益 A 最大.

证 (略)

根据准则一, 当给定 $F (F \leq q_k \cdot M / (1 + p_k))$ 时, 若要求 A 最大, 需把 $(r_i - p_i) / (1 + p_i)$ 值最大的一项投资 s_k 作为优先投资项目, 对该项投资 F / q_k 后, 在后面的投资中仍需将 $(r_i - p_i) / (1 + p_i)$ 值较大者作为优先投资项目, 如此将得到一个在 F 一定时的最优投资方案.

根据准则二, 当 $F > q_k M$ 时所有资金都用来购买 s_k , 对于题 (1) 所给的数据, 计算投资效益率 $(r_i - p_i) / (1 + p_i)$ 得

$$\begin{aligned}(r_0 + p_0) / (1 + p_0) &= 0.05 & (r_1 + p_1) / (1 + p_1) &= 0.2673 \\(r_2 + p_2) / (1 + p_2) &= 0.1853 & (r_3 + p_3) / (1 + p_3) &= 0.1770 \\(r_4 + p_4) / (1 + p_4) &= 0.1737\end{aligned}$$

将投资效益率从大到小排列得

$$\frac{r_1 - p_1}{1 + p_1} > \frac{r_4 - p_4}{1 + p_4} > \frac{r_3 - p_3}{1 + p_3} > \frac{r_2 - p_2}{1 + p_2} > \frac{r_0 - p_0}{1 + p_0}$$

于是优先投资项的先后顺序为 s_1, s_2, s_3, s_4, s_0 , 假定所给 M 为 1 时, 根据此方案, 对于不同风险的最佳投资方案如附表一 (略).

对于一般的情况, 可以对投资效益率排序, 按优先顺序先后投资, 且各投资量以不超过给定风险为限, 则可得最佳投资方案. 具体的计算过程如下

首先, 由 $\sum_{j=0}^{t-1} n \frac{F}{q_j} (1 + p_j) \leq M \leq \sum_{j=0}^t \frac{F}{q_j} \cdot (1 + p_j)$ 来确定 t 的值, 则

$$G = \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (r_j - p_j) + \frac{M - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (1 + p_j)}{1 + p_t} \cdot (r_t - p_t)$$

其各项购买额 m_j 为当 $j < t$ 时, $m_j = \frac{F}{q_j}$; 当 $j = t$ 时,

$$m_j = \left[M - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{F}{q_j} \cdot (1 + p_j) \right] \cdot \frac{1}{1 + p_t},$$

当 $j > t$ 时, $m_j = 0$.

如对题中给定的数据, 利用我们建立的模型, 进行了最佳投资方案的计算, 所得结果可见附表二 (略).

以上计算过程中所使用的程序我们已附于文后, 详见附录一至四 (略).

模型评价与推广 (略)

参 考 文 献

- [1] 赵国杰, 技术经济学, 天津大学出版社, 天津.
- [2] 庄俊鸿等, 投资经济学, 华南理工大学出版社, 广州.
- [3] 荆新等, 财务管理学, 中国人民大学出版社, 北京.