

POLYTECH SORBONNE

Projet Analyse numérique d'instruments à cordes



BENELKATER MOHAMED
BURBANO PAULA
COMBARET Léo
FIDA CYRILLE RUDIO
PREVOT ALEXIA
RAKOTOVAO JONATHAN

Encadrant :
Yann TEYTAUT
MAIN3
2020/2021

Table des matières

I Présentation du projet	1
1 Mise en contexte	2
2 Sujet	2
3 Objectifs	2
4 Idée de la démarche générale	2
II Etude de l'équation des ondes	3
1 Etude de l'équation des ondes	4
1.1 Présentation de l'équation	4
2 Etude physique de la corde	4
3 Démarche	4
III Discrétisation et modélisation	6
1 Principe	7
2 Euler	7
2.1 Explicite	7
2.2 Implicite	8
3 Runge-Kutta	10
IV Analyse des résultats	12
1 Stabilité	13
1.1 Méthode d'Euler	13
1.1.1 Euler explicite	13
1.1.2 Euler implicite :	16
1.2 Runge-Kutta	18
2 Comparaison des méthodes	19
2.1 Etude des erreurs	20
2.2 Ordre des erreurs	22
3 Conditions initiales	23
3.1 Variation des conditions initiales	23
3.2 Implémentation des variations des conditions initiales dans les modèles	24
3.2.1 Méthodes d'Euler	24
3.2.2 Runge-Kutta	25
V Conclusion	26
1 Conclusion du projet	27
2 Compétences acquises	27
Annexes	29

Première partie

Présentation du projet

1 Mise en contexte

Une onde est la propagation d'une perturbation qui se déplace à une certaine vitesse et possédant des propriétés physiques. Sans s'en rendre compte, nous avons à faire à ces ondes tous les jours lorsque nous regardons les ondulations d'une flaue d'eau produites par des gouttes d'eau, ou simplement dès lors qu'on ouvre les yeux et qu'on capte la lumière provenant des objets qui nous entourent. Ainsi, en savoir plus sur ces ondes et comprendre comment elles fonctionnent semble être un travail intéressant.

Lors de ce projet pluridisciplinaire, on se penche sur l'étude d'ondes mécaniques se propageant sur le long d'une corde d'un instrument à cordes.

2 Sujet

Dans cette présentation, nous cherchons à analyser numériquement un instrument à corde. En effet, on peut se demander comment nous pouvons modéliser une corde de guitare.

3 Objectifs

L'objectif premier est de se familiariser avec le domaine physique des ondes et de chercher comment modéliser l'onde se propageant le long d'instruments à cordes. Nous serons confrontés à une équation dite équation d'onde ou équation de d'Alembert. Il sera alors nécessaire de l'étudier, la comprendre et utiliser des méthodes d'analyse numérique afin d'approcher une solution à cette équation. Par ailleurs, il sera intéressant de comparer différentes méthodes d'analyse numérique en prenant en compte des critères de stabilité, rapidité, efficacité, etc.

4 Idée de la démarche générale

Pour cela, nous allons étudier et comprendre différentes méthodes d'analyse numérique puis les appliquer mathématiquement pour notre équation. Ensuite on les implémentera en code python et visualisera les résultats. Nous pourrons alors comparer ces résultats mais aussi, en choisissant une méthode, nous ferons varier les paramètres comme par exemple le changement des conditions initiales, la tension de la corde ou sa longueur.

Deuxième partie

Etude de l'équation des ondes

1 Etude de l'équation des ondes

1.1 Présentation de l'équation

L'équation de d'Alembert (appelée aussi équation d'onde ou équation des ondes) est l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde, qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec :

Δu : le déplacement de l'onde

Δt : l'ordre de grandeur du pas pour la discrétisation du temps

Δx : l'ordre de grandeur du pas pour la discrétisation de l'espace

Pour la résoudre, nous avons besoin de la condition de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x)$$

et de la condition de Diriclet : $u(0, x) = f(x)$

où f est une fonction quelconque d'une seule variable.

Cette équation peut être résolue mathématiquement (solution dite exacte) pour des modèles simples tels que celui d'une corde que l'on étudiera.

La solution exacte de l'équation d'onde est de la forme : $u(t, x) = f(x-ct) + g(x+ct)$ avec f et g des fonctions quelconques d'une seule variable.

Cependant, dans ce projet, on s'intéressera à appliquer des méthodes d'analyse numérique pour résoudre l'équation d'onde (solutions approchées).

Des ondes stationnaires sont créées sur la corde par le musicien. Comme dans le problème, la corde est fixée, il faut que la fonction $u(x, t)$ s'annule sur ses bornes.

On obtient alors les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases}$$

2 Etude physique de la corde

La vitesse de propagation de l'onde sur la corde dépend de la tension de celle-ci :

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

avec

τ qui représente la tension,

ρ la masse par unité de longueur, ou densité linéique.

Plus une corde est tendue, plus la vitesse de propagation d'une onde y sera élevée.

On prendra par la suite comme valeurs 0,65 m pour la longueur l de cette corde et $5,8 \cdot 10^{-3}$ kg.m⁻¹ pour la densité linéique ρ .

On pourra alors faire varier la tension de la corde et en observer les conséquences.

3 Démarche

Nous allons donc discréteriser l'équation des ondes dite équation de d'Alembert à l'aide de méthodes différentes : la méthode d'Euler implicite et explicite et la méthode de Runge-Kutta.

Nous implémenterons ensuite les méthodes en utilisant Python pour visualiser numériquement les résultats.

Nous analyserons alors la stabilité des résultats, en faisant varier le temps et la durée dans l'équation de d'Alembert.

Enfin, nous confronterons les méthodes de discréétisation en comparant les résultats, les erreurs et nous ferons varier les conditions initiales.

Troisième partie

Discrétisation et modélisation

1 Principe

On considère une équation différentielle ordinaire (EDO) $u'(t) = f(t, u(t))$. Lorsqu'on ne connaît pas de solution exacte à cette EDO, on essaye d'en avoir une bonne approximation par des méthodes numériques.

Cette équation écrit comment varie une fonction, en un point donné (un instant ou un point de l'espace), connaissant la valeur de cette fonction mathématique, le problème à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t = t_0) = u_0 \end{cases}$$

Nous allons par exemple observer u sur un intervalle de temps régulier de pas h . Nous allons essayer d'obtenir une suite d'approximations u_n de $u(t_n)$.

Considérons le problème monodimensionnel de la vibration d'une corde de guitare. Le schéma de la vibration de guitare vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où c est la vitesse de l'onde.

Ici, il ne s'agit pas d'une EDO mais d'une EDP (Equation aux Dérivées Partielles). Nous allons donc utiliser la méthode des différences finies.

La première étape consiste à discréteriser l'espace monodimensionnel en un nombre fini d'intervalles de dimension connue (appelé pas de discréétisation). C'est le maillage.

On remplace ensuite les dérivées apparaissant dans l'équation par des quotients aux différences obtenus à partir d'un développement de Taylor à un ordre fixé selon la précision recherchée.

A cette équation s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la corde $u(0, t) = u_g$ et $u(L, t) = u_d$ (avec L , la longueur de la corde) ainsi qu'une condition initiale $u(x, 0) = u_0$.

Notations :

Dans la suite, on prendra pour notations : u_i^n : i-ème noeud dans l'espace lors de la discréétisations temporelle n-ième

2 Euler

L'intervalle $[0, L]$ est discréétisé en $N + 1$ noeuds de coordonnées x_i (i variant de 0 à N) régulièrement espacés. Notons Δx le pas d'espace. Le temps est discréétisé quant à lui en intervalles de pas constant Δt . Notons u_i^n l'amplitude de la corde au noeud $x_i = i\Delta x$ et à l'instant $t = n\Delta t$

2.1 Explicite

La méthode d'Euler explicite consiste à considérer que, d'un point t_i au point t_{i+1} , la fonction évolue linéairement, avec une trajectoire qui est celle qu'on peut calculer au point t_i .

On peut alors approximer la suite (u_n) en calculant u_{n+1} connaissant u_n .

Le problème se résout donc de la façon suivante :

- on connaît la fonction f , un point t_n où on connaît u_n
- on peut donc calculer $u'(t) = f(t, u(t))$
- on estime alors la valeur de u au point $t_{n+1} = t_n + \Delta t$: $u_{n+1} \approx u_n + u'_n \Delta t$
- on peut alors itérer (résoudre pas à pas) pour passer au point suivant. Le problème est initialisé en partant de t_0 où on connaît u_0 (condition à la limite).

Schéma centré d'ordre 2 pour les dérivées spatiale et temporelle :

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})_i^n = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}$$

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

On pose :

$$\lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

ce qui donne

$$u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} = \lambda^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_i^{n+1} = \lambda^2 u_{i+1}^n + (2 - 2\lambda^2)u_i^n - u_{i-1}^{n-1} + \lambda^2 u_{i-1}^n}$$

$$\text{Posons } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} (2 - 2\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & (2 - 2\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda^2 & (2 - 2\lambda^2) & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^2 & (2 - 2\lambda^2) \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} u_{l0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{IN} \end{pmatrix}$$

alors

$$U^{n+1} = A.U^n - U^{n-1} + C$$

On va donc résoudre cette équation en prenant des conditions initiales cohérentes. La corde de guitare est fixée à ses extrémités et admet un momentum initial lorsque $t=0$ (que l'on définira lors des expérimentations).

Conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0^n = 0 & \forall n \\ u_L^n = 0 & \forall n \end{cases}$$

Donc $C = 0$

Soit

$$\boxed{U^{n+1} = A.U^n - U^{n-1}}$$

On a donc la formule de récurrence cherchée pour approximer la suite u_n .

2.2 Implicite

On reprend ici les mêmes notations. La méthode d'Euler implicite consiste à chercher la valeur approchée à l'instant t_{n+1} avec la relation suivante : $u_{n+1} \approx u_n + u'_{n+1}\Delta t$

On va donc utiliser une approche pour discréteriser l'équation au noeud x_i et à l'itération $n + 1$:

$$(\frac{\partial u}{\partial t})_i^{n+1} = c^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})_i^{n+1}$$

Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 2 pour évaluer la dérivée seconde temporelle :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}$$

Ainsi qu'un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

On pose :

$$\lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Alors d'après l'équation de discréétisation :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+1} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} &= c^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ \Leftrightarrow u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} &= \lambda^2 (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \\ \Leftrightarrow u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} &= \lambda^2 (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \\ \Leftrightarrow -2u_i^n &= \lambda^2 (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) \\ \Leftrightarrow u_i^n &= \frac{-\lambda^2}{2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{2} (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) \\ \Leftrightarrow u_i^n &= \boxed{\frac{-\lambda^2}{2} u_{i+1}^{n+1} + (\lambda^2 + \frac{1}{2}) u_i^{n+1} - \frac{\lambda^2}{2} u_{i-1}^{n+1} + \frac{1}{2} u_i^{n-1}} \end{aligned}$$

Ecriture de l'équation sous forme matricielle :

Posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} (\lambda^2 + \frac{1}{2}) & \frac{-\lambda^2}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{-\lambda^2}{2} & (\lambda^2 + \frac{1}{2}) & \frac{-\lambda^2}{2} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{-\lambda^2}{2} & (\lambda^2 + \frac{1}{2}) & \frac{-\lambda^2}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-\lambda^2}{2} & (\lambda^2 + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} u_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_d \end{pmatrix}$

alors

$$U^n = A.U^{n+1} - \frac{\lambda^2}{2}.C + \frac{1}{2}.U^{n-1}$$

On va donc résoudre cette équation en prenant des conditions initiales cohérentes.

La corde de guitare est fixée à ses extrémités donc les points lorsque $x = 0$ et $x = L$ gardent leur position initiale.

Conditions initiales sur x :

$$\begin{cases} u(0, t) = u_g = 0 & \forall n \\ u(L, t) = u_d = 0 & \forall n \end{cases}$$

Donc $C = 0$

Soit

$$\boxed{A.U^{n+1} = U^n - \frac{1}{2}.U^{n-1}}$$

D'autre part, la corde admet un momentum initial $\forall x$ à l'instant $t = 0$. La position de la corde à $t = 0$ sera définie lors de l'expérimentation car il existe plusieurs modèles de momentum initial qui peuvent faire varier

les résultats.

De plus, nous avons besoin de déterminer $u(x, 1)$ pour utiliser notre schéma implicite. Ainsi, on dérive $u(x, 0)$ pour obtenir la condition initiale sur $u(x, 1)$

Conditions initiales sur t :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t} &= \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t} \\ \Leftrightarrow u_i^1 &= \Delta t \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + u_i^0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} u(x, 0) & \forall n \\ u(x, 1) = \Delta t \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + u(x, 0) & \forall n \end{cases}$$

3 Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des schémas numériques à un pas qui permettent de résoudre des équations différentielles ordinaires. Elles sont appréciées pour leur précision grâce à des ordres plus élevés : 2 ou 4.

Dans le cas de l'équation d'onde, l'utilisation d'une méthode de Runge Kutta n'est pas évidente étant donné qu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles d'ordre 2. Cependant, en utilisant le schéma d'Euler d'ordre 2 et quelques astuces, il est possible de la résoudre avec les méthodes de Runge-Kutta.

1. Discrétisation de l'espace avec un pas Δx

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

et donc l'équation d'onde devient :

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} = \left(\frac{c}{\Delta x}\right)^2 (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

2. Réécrire l'équation sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Soit z une fonction de \mathbb{R} telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = z(t) \\ \frac{dz}{dt} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases}$$

Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} telles que

$$\begin{cases} g(t, u, z) = z(t) \\ f(t, u, z) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{c}{\Delta x}\right)^2 (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) \end{cases}$$

On obtient alors le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^n}{\partial t} = g(t, u, z) \\ \frac{dz}{dt} = f(t, u, z) \end{cases}$$

On peut résoudre ces deux équations par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4.

3. Résolution du système par Runge Kutta d'ordre 4 avec un pas Δt

La méthode de Runge Kutta d'ordre 4 nous permet d'obtenir les schémas itératifs suivants :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{6}((k_0)_i + (k_1)_i + (k_2)_i + (k_3)_i) \\ z_i^{n+1} = z_i^n + \frac{1}{6}((l_0)_i + (l_1)_i + (l_2)_i + (l_3)_i) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} (k_0)_i = \Delta t \times g(tn, u_i^n, z_i^n) \\ (k_1)_i = \Delta t \times g(tn + \frac{\Delta t}{2}, u_i^n + \frac{(k_0)_i}{2}, z_i^n + \frac{(l_0)_i}{2}) \\ (k_2)_i = \Delta t \times g(tn + \frac{\Delta t}{2}, u_i^n + \frac{(k_1)_i}{2}, z_i^n + \frac{(l_1)_i}{2}) \\ (k_3)_i = \Delta t \times g(tn + \Delta t, u_i^n + (k_2)_i, z_i^n + (l_2)_i) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (l_0)_i = \Delta t \times f(tn, u_i^n, z_i^n) \\ (l_1)_i = \Delta t \times f(tn + \frac{\Delta t}{2}, u_i^n + \frac{(k_0)_i}{2}, z_i^n + \frac{(l_0)_i}{2}) \\ (l_2)_i = \Delta t \times f(tn + \frac{\Delta t}{2}, u_i^n + \frac{(k_1)_i}{2}, z_i^n + \frac{(l_1)_i}{2}) \\ (l_3)_i = \Delta t \times f(tn + \Delta t, u_i^n + (k_2)_i, z_i^n + (l_2)_i) \end{cases}$$

4. Conditions initiales

Pour les méthodes de Runge-Kutta, les conditions initiales sont également très importantes. Dans le cas de l'équation d'onde, il faut que les valeurs de u_i^n et de $(\frac{\partial u_i^n}{\partial t})_i^0$ en $t=0$ soient connues afin de pouvoir calculer le reste des valeurs.

A partir de ces résultats mathématiques, il devient possible de construire un algorithme de calcul pour l'équation d'onde (code complet en python disponible en annexe).

1. Initialisation des pas Δx et Δt

Initialisation de la durée T et de la distance D

2. Calculs des conditions initiales u_i^0 et de $(\frac{\partial u_i^0}{\partial t})_i^0$

3. Tant que $n < T$ faire :

Tant que $i < D$ faire :

- Calcul de $((k_0)_i)$

- Calcul de $((l_0)_i)$

- Calcul de $((k_1)_i)$

- Calcul de $((l_1)_i)$

- ...

- Calculs de u_i^{n+1} et $(\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial t})_i^n$

Quatrième partie

Analyse des résultats

1 Stabilité

Dans cette partie, nous allons évaluer la stabilité de chaque modèle numérique qui nous permettra d'étudier les conditions de convergence de ces différents modèles expérimentaux à partir des conditions initiales de la solution exacte.

En effet, la stabilité dépend du Courant-Friedrichs-Lowy (CFL), condition suffisante de la stabilité liant les pas d'espace Δx et de temps Δt . Le CFL est une condition de convergence pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles.

Le CFL est défini de la façon suivante :

$$\alpha = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

v : vitesse dans la direction x
 Δx : Pas d'espace
 Δt : Pas de temps

1.1 Méthode d'Euler

Pour étudier la stabilité de cette méthode, nous allons faire varier d'abord Δt puis Δx pour obtenir les graphiques les plus précis pour chaque schéma explicite et implicite, l'objectif étant de trouver un compromis entre l'efficacité et la précision.

1.1.1 Euler explicite

▷ Variation de Δt (en secondes) à Δx (en mètres) fixé :

a) $\Delta x = 10^{-4} m$

$\Delta t = 1 s$

$\alpha = 6,8 * 10^5$

⇒ On obtient aucune représentation.

b) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$\Delta t = 10^{-2} s$

$\alpha = 6,8 * 10^3$

⇒ On obtient aucune représentation.

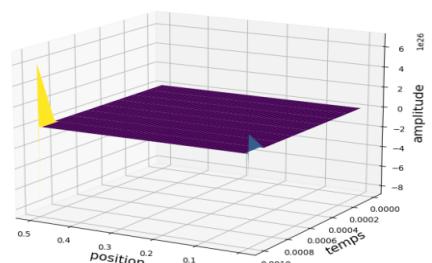
c) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$\Delta t = 10^{-4} ms$

$\alpha = 68$

⇒ On obtient une surface plane.

Temps d'exécution = 0,018s



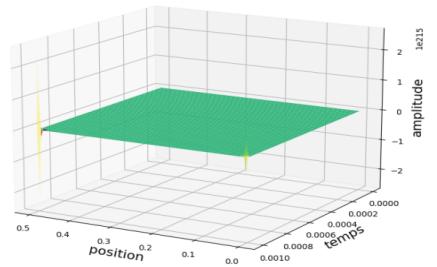
d) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$\Delta t = 10^{-5} s$$

$$\alpha = 6,8$$

\implies On obtient une surface plane.

Temps d'exécution = 0,11s



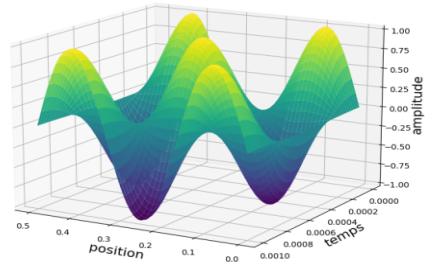
e) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$\Delta t = \frac{10^{-6}}{6,8}$$

$$\alpha=1$$

\implies On obtient une courbe parfaitement sinusoïdale.

Temps d'exécution = 1s



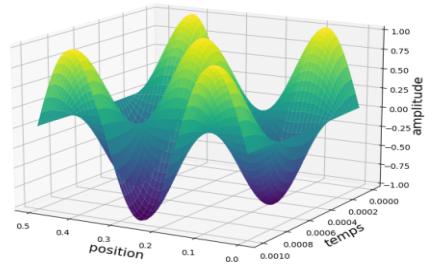
f) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$\Delta t = 10^{-6} s$$

$$\alpha = 6,8 * 10^{-1} s$$

\implies On obtient une courbe parfaitement sinusoïdale.

Temps d'exécution = 1,24s



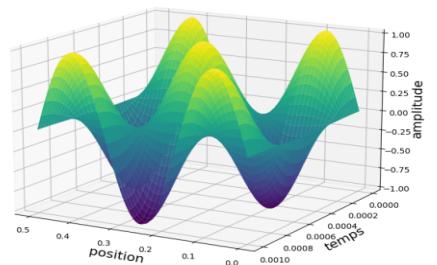
g) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$\Delta t = 10^{-8} s$$

$$\alpha = 6,8 * 10^{-3} s$$

\implies On obtient une courbe parfaitement sinusoïdale.

Temps d'exécution = 122s



D'après ces différents tests, on peut remarquer que le schéma est de plus en plus sinusoïdale lorsque le CFL se rapproche de 1.

▷ Variation de Δx à Δt fixé :

On fixe Δt à différentes valeurs :

- Pour $\Delta t = 10^{-3}$

a) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$\Delta t = 10^{-3}$

$\alpha = 680$

⇒ On obtient aucun affichage.

c) $\Delta x = 7 * 10^{-3} m$

$\Delta t = 10^{-3}$

$\alpha = 48 s$

⇒ On obtient aucun affichage.

b) $\Delta x = 9 * 10^{-2} m$

$\Delta t = 10^{-3}$

$\alpha = 3,77 s$

⇒ On obtient aucun affichage.

d) $\Delta x = 10^{-1} m$

$\Delta t = 10^{-3} s$

$\alpha = 3,4 s$

⇒ On obtient aucun affichage.

- Pour $\Delta t = 10^{-4}$

a) $\Delta x = 3,4 * 10^{-2} m$

$\Delta t = 10^{-4}$

$\alpha = 1$

⇒ On obtient aucun affichage.

b) $\Delta x = 7 * 10^{-2} m$

$\Delta t = 10^{-4}$

$\alpha = 4,8 * 10^{-1} m$

⇒ On obtient aucun affichage.

- Pour $\Delta t = 10^{-6}$

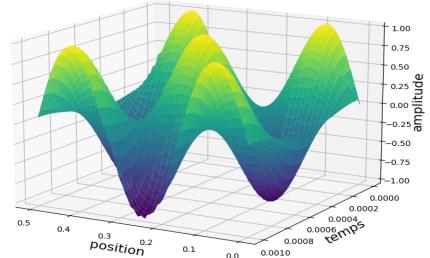
a) $\Delta x = 4 * 10^{-3} m$

$\Delta t = 10^{-6}$

$\alpha = 0,85$

⇒ On obtient la représentation d'une onde parfaitement sinusoïdale.

Temps d'exécution = 0,043s



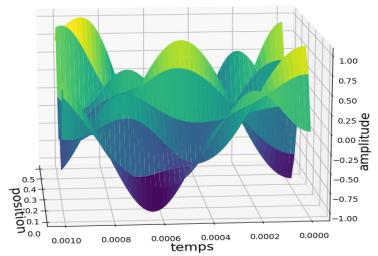
b) $\Delta x = 4 * 10^{-2} m$

$\Delta t = 10^{-6}$

$\alpha = 0,0085$

⇒ On obtient une figure sinusoïdale.

Temps d'exécution = 0,016s



On constate à travers ces différents tests concernant la variation de l'espace à Δt fixé, que les représentations se modélisent de mieux en mieux lorsque notre α décroît.

1.1.2 Euler implicite :

▷ Variation de Δt (en secondes) à Δx (en mètres) fixé :

a) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$\Delta t = 1 s$$

$$\alpha = 6,8 * 10^5$$

⇒ Représentation non supportée donc aucun affichage car α est trop grand.

b) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$t = 10^{-2} s$$

$$\alpha = 6,8 * 10^3$$

⇒ Avec une valeur de Δt plus basse, α reste toujours très grand et assez loin de 1 donc on obtient aucune représentation de l'onde.

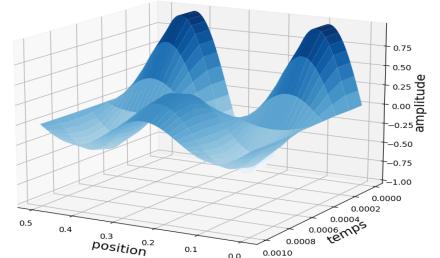
c) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$\Delta t = 10^{-4} ms$$

$$\alpha = 68$$

⇒ En ayant un α qui se rapproche de 1, on obtient une onde partiellement sinusoïdale.

Temps d'exécution = 0,207s



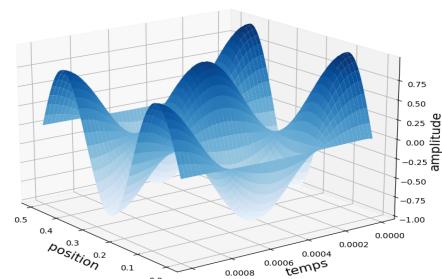
d) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$\Delta t = 10^{-5} s$$

$$\alpha = 6,8$$

⇒ On obtient une surface parfaitement sinusoïdale lorsque le pas de temps est plus petit et donc par conséquent un α plus petit se rapprochant de 1.

Temps d'exécution = 0,302s



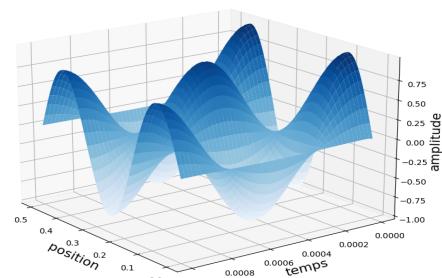
e) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$

$$\Delta t = \frac{10^{-6}}{6,8}$$

$$\alpha = 1$$

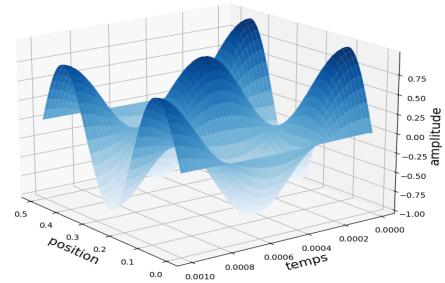
⇒ Comme précédemment, on obtient une onde parfaitement sinusoïdale.

Temps d'exécution = 1,13s



f) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$
 $\Delta t = 10^{-6} s$
 $\alpha = 6,8 * 10^{-1} s$

⇒ On a toujours une surface parfaitement sinusoïdale mais avec un affichage lent avec un temps d'exécution d'environ 13s.



g) $\Delta x = 5 * 10^{-4} m$
 $\Delta t = 10^{-8} s$
 $\alpha = 6,8 * 10^{-3} s$

⇒ On obtient aucune représentation de l'onde car le pas de α est trop petit.

Le coefficient CFL joue un rôle très important dans la stabilité du modèle, ce dernier liant les pas de temps et d'espace nous permet d'avoir des représentations plus ou moins sinusoïdales en fonction de la variation de Δt .

▷ Variation de Δx à Δt fixé :

On fixe Δt à différentes valeurs :

- Pour $\Delta t = 10^{-1}$

⇒ On obtient aucune figure.

- Pour $\Delta t = 10^{-3}$

a) $\Delta x = 5 * 10^{-3} m$
 $\Delta t = 10^{-3}$
 $\alpha = 680$

⇒ On obtient aucun affichage.

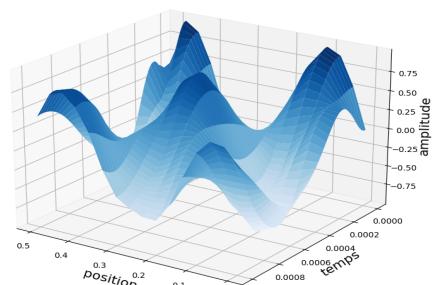
b) $\Delta x = 1,2 * 10^{-2} m$
 $\Delta t = 10^{-3}$
 $\alpha = 28,33 s$

⇒ On obtient aucun affichage.

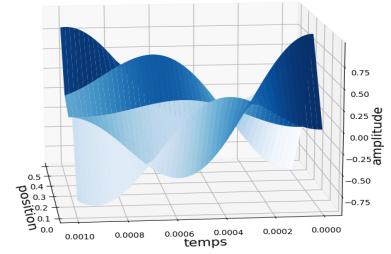
- Pour $\Delta t = 10^{-5}$

a) $\Delta x = 3 * 10^{-2} m$
 $\Delta t = 10^{-5}$
 $\alpha = 1,1 * 10^{-1}$

⇒ On a une représentation sinusoïdale.



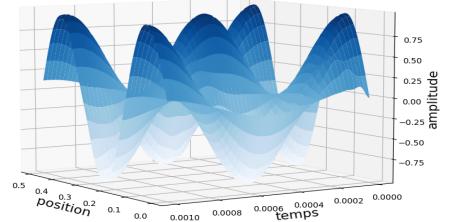
b) $\Delta x = 9 * 10^{-2} m$
 $\Delta t = 10^{-5}$
 $\alpha = 0,03$



- Pour $\Delta t = 10^{-6}$

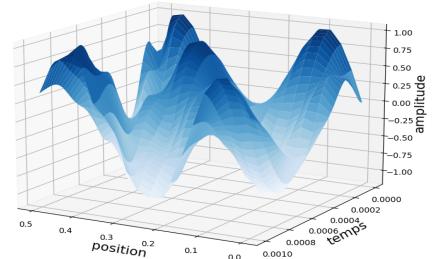
a) $\Delta x = 7 * 10^{-3} m$
 $\Delta t = 10^{-6}$
 $\alpha = 0,048 s$

⇒ On obtient une représentation parfaitement sinusoïdale.



b) $\Delta x = 2,4 * 10^{-2} m$
 $\Delta t = 10^{-6}$
 $\alpha = 1,4 * 10^{-2}$

⇒ On a une représentation sinusoïdale.



On obtient comme précédemment, une modélisation représentative de la corde lorsque le pas de temps diminue mais également en ayant un pas d'espace d'ordre 10^{-2}

Conclusion : On peut remarquer d'après cette série de tests, que la stabilité est obtenue généralement avec un coefficient CFL proche de 1 par conséquent un pas d'espace Δx de l'ordre 10^{-2} au minimum et un pas de temps de l'ordre 10^{-5} au minimum.

1.2 Runge-Kutta

Le principe d'étude de la stabilité du modèle reste le même que pour les schémas d'Euler. Il faut donc faire varier les pas Δx et Δt de manière à avoir les meilleures graphiques. Mais, il apparaît assez évident que le modèle risque de diverger avec le terme $(\frac{c}{\Delta x})^2$.

Les tests ont été effectués avec des valeurs de référence :

- $c=340 \text{ m/s}$ (vitesse d'une onde dans l'air)

- L=0.5 m (longueur moyenne d'une corde de guitare)
- Durée=0.001 s

Et avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u_i^0 = \sin\left(\frac{n\pi}{L} \times i \times \Delta x\right) \\ \frac{\partial u_i^0}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

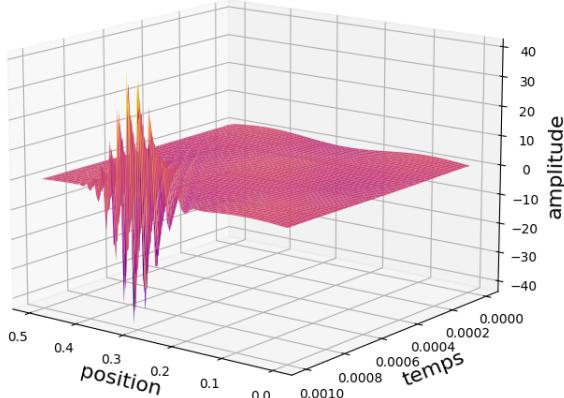


FIGURE 1 – $\Delta x = 5^{-3}m$
 $\Delta t = 10^{-6}s$

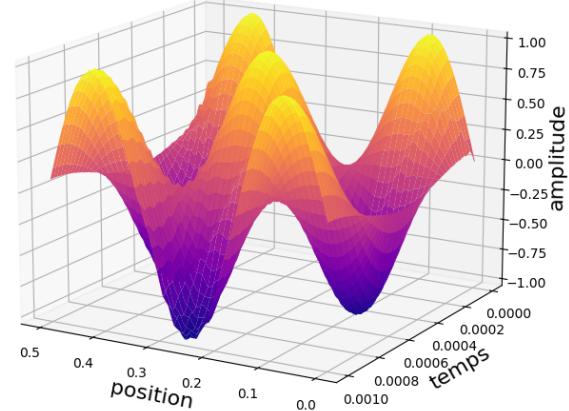


FIGURE 2 – $\Delta x = 5^{-3}m$
 $\Delta t = 10^{-6}s$

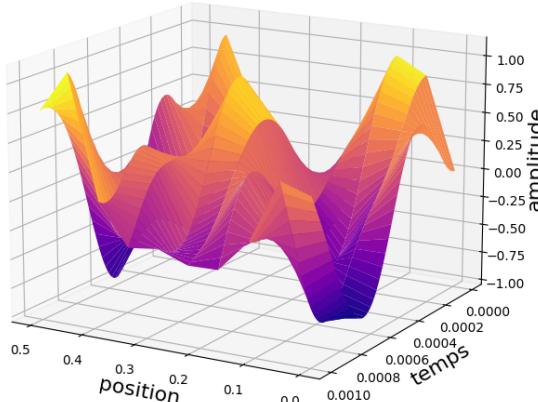


FIGURE 3 – $\Delta x = 5^{-2}m$
 $\Delta t = 10^{-7}s$

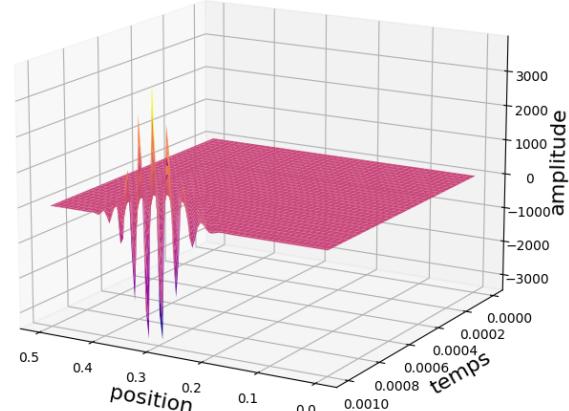


FIGURE 4 – $\Delta x = 5^{-2}m$
 $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}s$

A partir des simulations effectuées, est possible d'observer expérimentalement les conditions de stabilité du modèle construit.

1. Par rapport au CFL : $\alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$
 On peut remarquer que le modèle est "correct" uniquement lorsque $\alpha < 1$ (Figure 2).
 Dans les autres cas, le résultat est loin de ce qui attendu. Cela est logique étant donné qu'il s'agit ici d'une méthode à deux pas, donc le CFL est un paramètre important.
2. Par rapport à la valeur de Δt
 On peut remarquer que la stabilité du modèle augmente lorsque le pas Δt diminue.
 Cela découlerait de l'utilisation de la méthode de Runge-Kutta pour la résolution de l'équation.

2 Comparaison des méthodes

L'objectif principal du projet est de comparer les différentes méthodes de résolution numérique pour l'équation d'onde appliquée à une corde de guitare. Pour cela, nous allons dans un premier temps comparer expéri-

mentalement les erreurs obtenues pour chaque modèle pour des conditions de stabilité optimales et pour une solution exacte donnée. Dans un second temps, nous pouvons également comparer les modèles en terme de performance, en considérant la durée d'exécution.

2.1 Etude des erreurs

Pour effectuer les calculs d'erreurs, nous avons choisi la fonction suivante :

$$u_{exact}(x, t) = \cos\left(\frac{3\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

Et donc l'erreur numérique est simplement donnée par : $E = |u_{exact} - u_{num}|$

Ainsi, on obtient comme conditions initiales pour les trois modèles :

$$\begin{cases} u_i^0 = \sin\left(\frac{n\pi}{L} \times i \times \Delta x\right) \\ \frac{\partial u_i^0}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Et les paramètres des modèles sont les suivants :

- $c=340$ m/s (vitesse d'une onde dans l'air)
- $L=0.5$ m (longueur moyenne d'une corde de guitare)
- Durée=0.001 s

Et les paramètres de discrétisation pour les méthodes d'Euler sont :

- $\Delta x = 0.0005$
- $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$

Ceux de la méthode de Runge-Kutta sont :

- $\Delta x = 0.005$
- $\Delta t = 0.000001$

Tout d'abord, voici les solutions données par les 4 différentes méthodes de calcul de solution :

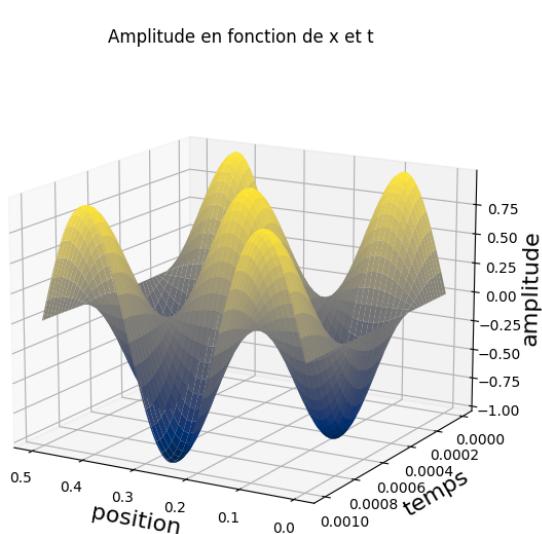


FIGURE 5 – Solution exacte

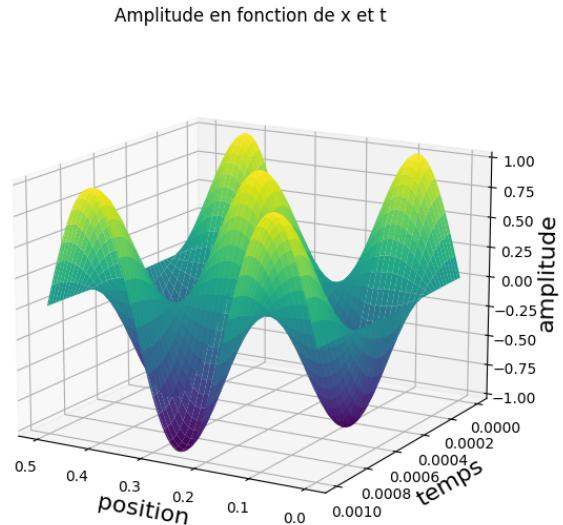


FIGURE 6 – Euler explicite

Amplitude en fonction de x et t

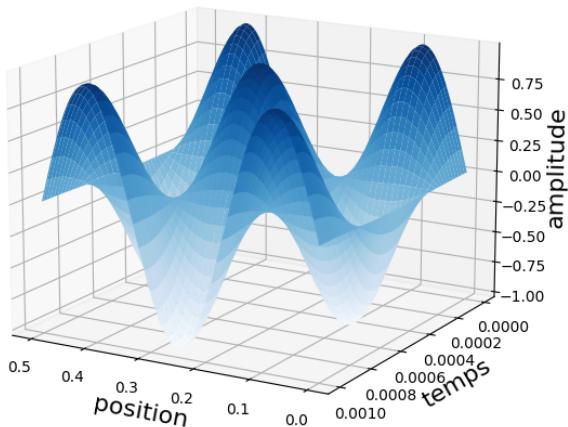


FIGURE 7 – Euler implicite

Amplitude en fonction de x et t

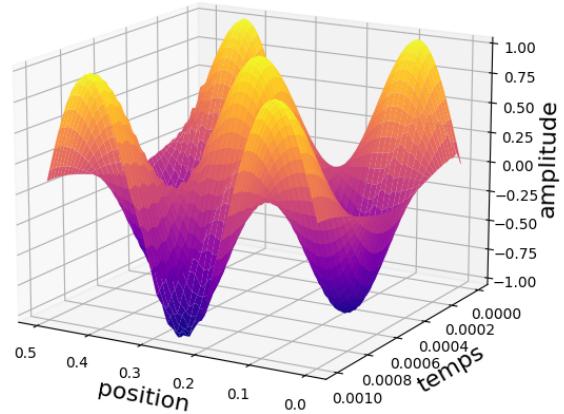


FIGURE 8 – Runge-Kutta

On peut déjà remarquer que pour les 3 modèles, les solutions numériques sont très proches de la solution exacte en terme de forme de surface mais aussi en terme d'amplitude.

Voici les résultats donnés par les calculs d'erreurs numériques en 3 dimensions.

Erreur en fonction de x et t pour Euler explicite

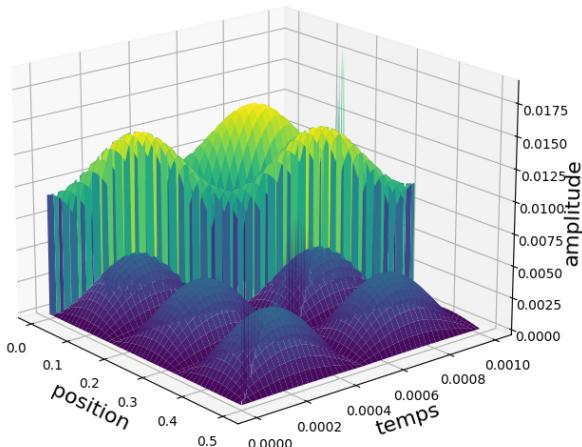


FIGURE 9 – Euler explicite

Erreur en fonction de x et t pour Euler implicite

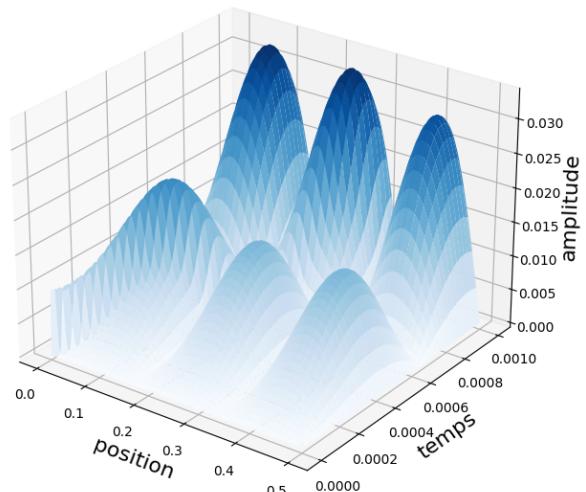


FIGURE 10 – Euler implicite

Erreur en fonction de x et t pour Runge-Kutta

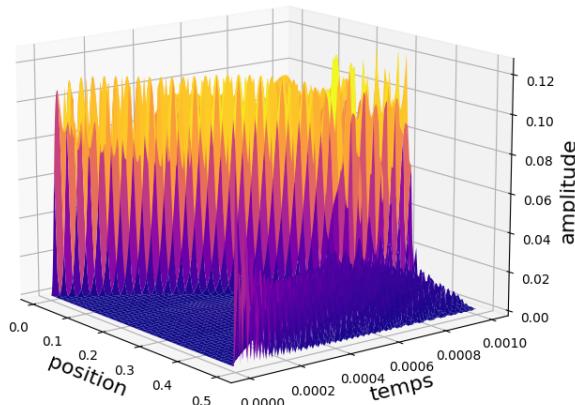


FIGURE 11 – Runge-Kutta

Les erreurs pour chaque modèle prennent des formes différentes. Pour les méthodes d'Euler, on peut observer des structures "sinusoïdales" quasiment périodiques. On peut cependant observer sur le schéma explicite une diminution générale de l'erreur à partir d'une certaine position. Pour le schéma de Runge-Kutta, on retrouve une forme similaire à celle de la méthode d'Euler explicite avec également la même diminution de l'erreur.

Mais il est plus intéressant d'évaluer les erreurs en 2 dimensions selon le temps. Ainsi, nous avons étudié les moyennes des erreurs pour chaque temps donné.

Les moyennes des erreurs pour chaque t donnés nous donnent alors les graphiques suivants :

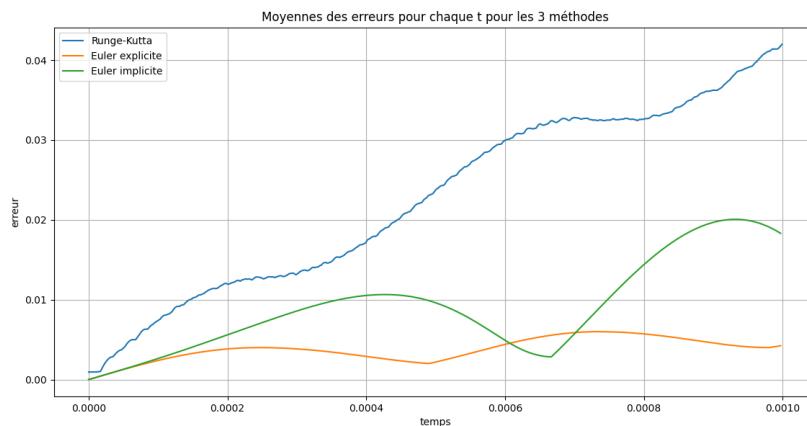


FIGURE 12 – Les erreurs pour les 3 méthodes

Les erreurs en fonction de t nous permettent de voir que le modèle le plus précis est le modèle d'Euler explicite.

Globalement les erreurs ont bien des profils sinusoïdaux mais elles augmentent en fonction du temps, ce qui montre que les modèles présentent des facteurs de propagation d'erreur. Le modèle le moins précis est le modèle de Runge-Kutta.

L'ordre des erreurs est de 10^{-2} pour les modèles mais le modèle de Runge-Kutta a une erreur qui croît beaucoup plus vite.

2.2 Ordre des erreurs

Pour finir la comparaison des modèles, nous pouvons déterminer et comparer l'ordre de leurs erreurs. Pour cela, nous pouvons étudier les expressions suivantes :

1. $\max|e_i^n|$ pour $0 < i < Nx$ et $0 < n < Nt$ en faisant varier le nombre de point de temps Nt
2. $\max|e_i^n|$ pour $0 < i < Nx$ et $0 < n < Nt$ en faisant varier le nombre de point de temps Nx

Voici les résultats obtenus :

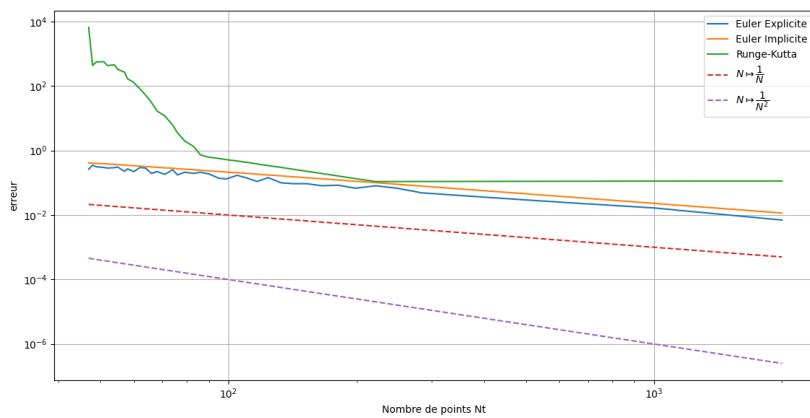


FIGURE 13 – Les erreurs pour des variation de Nt

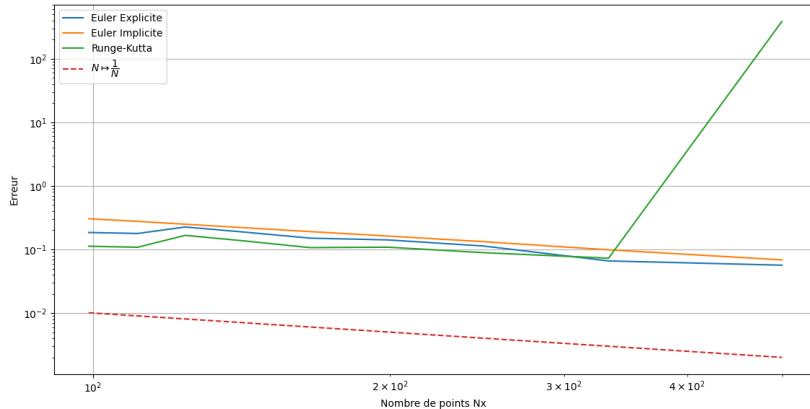


FIGURE 14 – Les erreurs pour des variation de Nx

A partir de ces résultats, on peut déduire les ordres des erreurs :

- Les méthodes d'Euler ont des erreurs selon x et t d'ordre $O(N)$
- La méthode de Runge-Kutta a des erreurs d'ordre $O(N^2)$ selon t et d'ordre $O(N)$ selon x . On peut remarquer que selon x , l'erreur augmente brutalement au bout d'une certaine valeur, cela est dû au fait que la condition de stabilité du modèle n'est plus respectée.
- Globalement la méthode d'Euler explicite est celle qui donne la meilleure précision.

Au final, on peut déduire que, dans notre cas, la méthode d'Euler explicite est la plus intéressante puisqu'elle produit l'erreur la plus petite mais est également efficace en terme d'algorithme contrairement à la méthode de Runge-Kutta qui demande beaucoup plus de calculs pour avoir un résultat cohérent.

3 Conditions initiales

3.1 Variation des conditions initiales

L'analyse des méthodes utilisés pour la modélisation d'une onde de corde de guitare repose aussi sur le choix des conditions initiales comme vu précédemment. Un bon choix des conditions initiales est donc indispen-

sable pour avoir une modélisation la plus proche de la réalité ou tout simplement celle qu'on souhaite.

Dans cette partie, l'objectif est de tester les différents schémas pour différents profils initiaux de l'onde, qu'on obtiendra en modifiant les conditions initiales.

Ainsi, on pourra vérifier les réactions des différents modèles par rapport aux variations de conditions initiales et constater que, tant que les conditions initiales respectent les conditions imposées par le problème ($u(t, x = 0) = u(t, x = L) = 0$), on obtient une solution numérique cohérente.

Dans un premier temps, on peut considérer une corde pincée en point de l'espace, qui est bien attachée sur les bords. On peut établir 2 modèles mathématiques différents pour la corde pincée du schéma suivant :

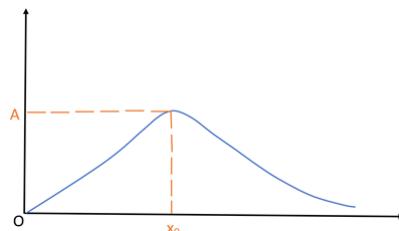


FIGURE 15 – Schéma d'une corde pincée

1. Modèle triangulaire

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} A \frac{x}{x_0} & x \leq x_0 \\ A \frac{x}{x_0} & x \geq x_0 \end{cases} \quad (1)$$

2. Modèle complète (harpe)

$$u(x, t = 0) = A \frac{x}{x_0} \frac{L - x}{L} \quad (2)$$

Dans un deuxième temps, nous allons étudier un troisième modèle où la corde n'est pas accrochée aux bords, c'est-à-dire que, $u(t = 0, x = 0)$ on a une amplitude A différente de 0.

3. Modèle "pas accroché aux bords"

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

3.2 Implémentation des variations des conditions initiales dans les modèles

3.2.1 Méthodes d'Euler

Euler explicite

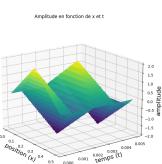


FIGURE 16 – Modèle (1)

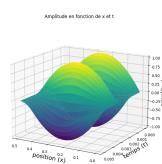


FIGURE 17 – Modèle (2)

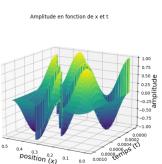


FIGURE 18 – Modèle (3)

Euler implicite

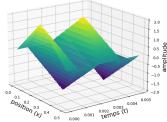
Amplitude en fonction de x et t 

FIGURE 19 – Modèle (1)

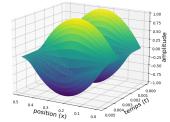
Amplitude en fonction de x et t 

FIGURE 20 – Modèle (2)

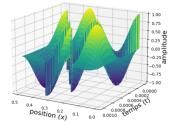
Amplitude en fonction de x et t 

FIGURE 21 – Modèle (3)

3.2.2 Runge-Kutta

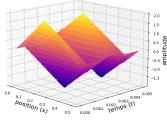
Amplitude en fonction de x et t 

FIGURE 22 – Modèle (1)

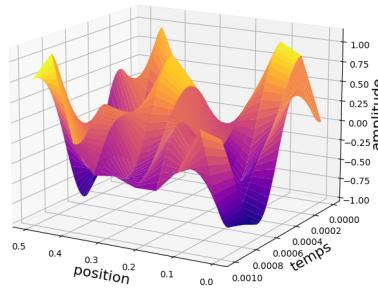


FIGURE 23 – Modèle (2)

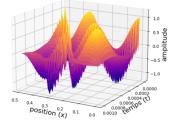
Amplitude en fonction de x et t 

FIGURE 24 – Modèle (3)

Cinquième partie

Conclusion

1 Conclusion du projet

2 Compétences acquises

Durant ces mois de travail sur ce projet, nous avons beaucoup appris et évolué :

* Travailler en équipe n'est pas chose aisée et cela nécessite une bonne organisation, coordination et cohésion d'équipe! Cette expérience aura été bénéfique pour nous tous et chacun a su amener ses qualités personnelles.

* Nous avons complété notre bagage scientifique avec de nouvelles connaissances comme par exemple savoir discréteriser une équation différentielle, appliquer différents schémas d'analyse numérique, coder ces méthodes sur Python et aussi écrire en LaTex un compte rendu.

Annexes

Pour la méthode des différences finies, on a utilisé les tableaux suivants pour les schémas des différents ordres, tirés de "Méthodes Numériques, Équations aux Dérivées Partielles (EDP)" de l'institut d'optique Paris- tech.

Différences finies avant, ordre 1

	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
$\Delta xu'_i$	-1	1			
$\Delta x^2 u''_i$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u'''_i$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies arrière, ordre 1

	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i
$\Delta xu'_i$				-1	1
$\Delta x^2 u''_i$			1	-2	1
$\Delta x^3 u'''_i$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 2

	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2\Delta xu'_i$		-1		1	
$\Delta x^2 u''_i$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u'''_i$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 4

	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$12\Delta xu'_i$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u''_i$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u'''_i$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta x^4 u^{(4)}_i$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

Bibliographie

- [1] Méthode de runge-kutta. <<https://femto-physique.fr/analyse-numerique/runge-kutta.php>>, 2004.
- [2] Marc BUFFAT. Équation des ondes. <https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/COURSDF_HTML/node27.html>, 2008.
- [3] Institut d'optique Paritech. Méthodes numériques, Équations aux dérivées partielles (edp). <<http://www.url2.org/>>.
- [4] Dominique Lefebvre. L'équation de d'alembert. <<http://www.tangentex.com/EquationAlembert.htm>>, 2016.