Rappels et compléments de probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1 Les différents types de convergence

1.1 Convergence en probabilité, presque sûre, en loi

Définitions.

1. On dit qu'une suite $(X_n, n \geq 1)$ de variables aléatoires converge en probabilité vers X (noté $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) si pour tout $\epsilon > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$
2. On dit qu'une suite $(X_n, n \geq 1)$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers X (noté $X_n \xrightarrow{p.s} X$) si
$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = \mathbb{P}(\{w, \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\}) = 1$$

Définition. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dit que X_n converge en loi vers X (noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si
$$\mathbb{P}(X_n \leq x) = F_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$
en tout point x de continuité de F. La convergence en loi correspond donc à la convergence des fonctions de répartition.

1.2 Lien entre les différents types de convergence

Propriétés.

1. CV ps $\Rightarrow$ CV en probabilité $\Rightarrow$ CV en loi
2. cas particulier où la limite est une constante a (non aléatoire) :
$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$$

1.3 Somme et produits

Propriétés.

1. Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, alors
$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y \quad \text{et} \quad X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$$
2. Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s} Y$, alors
$$X_n + Y_n \xrightarrow{p.s} X + Y \quad \text{et} \quad X_n Y_n \xrightarrow{p.s} XY$$
3. C'est faux pour le convergence en Loi.
4. **Théorème de Slutsky**
Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ avec a une constante $\in \mathbb{R}$ et si $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ alors
$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a + Y \quad \text{et} \quad X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aY$$

2 Théorèmes limites

2.1 Loi des grands nombres

Théorèmes.

1. **LfGN : Loi faible des Grands Nombres**
   Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d d'espérance μ finie. Alors quand $n \to \infty$
   $$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$
2. **LFGN : Loi Forte des Grands Nombres**
   Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d d'espérance μ finie. Alors quand $n \to \infty$
   $$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mu$$

2.2 Théorème central Limite

Théorème. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d, d'espérance μ et de variance σ^2. On suppose que les X_i ont un moment d'ordre 2 i.e que $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$. Soit $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ la moyenne empirique. Alors quand $n \to \infty$,

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

2.3 Deux théorèmes très utiles

1. **Théorème de continuité**
   Soit g une fonction <u>continue</u> définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et soient $X_1, X_2, \ldots$ et X des variables aléatoires à valeurs dans D. Alors quand $n \to \infty$,
   (a) $X_n \xrightarrow{p.s} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p.s} g(X)$
   (b) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$
   (c) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$

2. **Méthode Delta**
   Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires et $(r_n)_{n \geq 1}$ une suite déterministe positive telle que lorsque $n \to \infty$ on a $r_n \to \infty$.
   S'il existe un réel a et une variable aléatoire X tels que quand $n \to \infty$
   $$r_n(X_n - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} X,$$
   et si g est une fonction dérivable au point a, alors quand $n \to \infty$
   $$r_n(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g'(a)X$$
   En particulier si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors
   $$r_n(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(a)\sigma)^2)$$