SAI

24.10.2023

Seminar 4

① Considerăm pe $\mathbb{Z}$ legea de comp. $x \Delta y = xy - 7x - 7y + 56$

Arătați că $(\mathbb{Z}, \Delta)$ este ~~un grup~~ monoid comutativ. și det. el. sim.

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$. Atunci $xy \in \mathbb{Z}$, $7x \in \mathbb{Z}$, $7y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \Delta y = xy - 7x - 7y + 56 \in \mathbb{Z}$

Ca urmare, Δ e o operație corect definită pe $\mathbb{Z}$

Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$ a.î. $(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$

$$ms = (x \Delta y) \Delta z = (xy - 7x - 7y + 56) \Delta z = [(x-7)(y-7)+7] \Delta z =$$

$$= (x-7)(y-7)z + \cancel{7z} - 7(x-7)(y-7) + 49 - \cancel{7z} + 56 =$$

$$= (x-7)(y-7)(z-7) + 7 = md \Rightarrow \text{„}\Delta\text{" e asoc (1)}$$

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \Delta y = y \Delta x$

$$md = x \Delta y = xy - 7x - 7y + 56 = yx - 7y - 7x + 56 = ms \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ „Δ" e comut. (2)

Fie $x \in \mathbb{Z}$, $\exists\, e \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \Delta e = x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

$$x \Delta e = x \Leftrightarrow x \cdot e - 7x - 7e + 56 = x$$

$$e(x-7) + 56 - 7x = x$$

$$e(x-7) = 8x - 56$$

$$e(x-7) = 8(x-7)$$

$$e = 8 \cdot \frac{x-7}{x-7} \Leftrightarrow e = 8 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow e = 8$ este el. neutru $\Rightarrow$ „Δ" admite el. neutru (3)

~~$x \Delta 8 = x$ și $8 \Delta x = x$~~

~~Fie $x \in \mathbb{Z}$, $\exists\, x' \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \Delta x'$~~

din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}, \Delta)$ e monoid comutativ.

El. sime = el. care admite simetric

Simetric lui a = el. care compus cu a dă e

Fie $x \in \mathbb{Z}$, $\exists x' \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \Delta x' = e$

$x \Delta x' = e \iff xx' - 7x - 7x' + 56 = 8$

$(x-7)(x'-7) + 7 = 8 \quad |-7$

$(x-7)(x'-7) = 1$

$x' - 7 = \frac{1}{x-7}$

$\cancel{x' = \frac{1+x+7}{x-7} = \frac{x+8}{x-7}}$

$x' = \frac{1 + 7x - 49}{x-7} = \frac{7x-48}{x-7}$

dar $x' \in \mathbb{Z}$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow (7x-48) \vdots (x-7) \Rightarrow (x-7) \in \{-1, 1\} \Rightarrow x \in \{6, 8\}$

$6 \Delta 6 = (6-7)(6-7)+7 = 8 \Rightarrow$ deci 6 e simetrizabil, e propriul lui simetric.

analog $8 \Delta 8$.....

Ca urmare $U((\mathbb{Z}, \Delta)) = \{6, 8\}$

Temă (nu pe foaie): aceeași cerință dar pe $\mathbb{R}$

---

(2) Care sunt el. sim. în rap cu $\square$ pe $\mathbb{R}$?

Fie $x \in \mathbb{R}$ simetrizabil în rap cu $\square$. Atunci $\exists x' \in \mathbb{R}$, $x \square x' = 8$,

adică $\exists x' \in \mathbb{R}$ $(x-7)(x'-7)+7 = 8$, ceea ce se rescrie $\exists x \in \mathbb{R}$ $(x-7)(x-7) = 1$,

deci $x \neq 7$

Ca urmare, $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$

Reciproc, fie $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$ (a doua parte a dublei incluziuni)

Notăm $\cancel{x\ast}$ $x' = 7 + \frac{1}{x-7}$. Atunci $x \square x' = (x-7)(x'-7) + 7 =$

$\cancel{= (x-7)\frac{1}{x-7} + 7(x-7)}$

$= (x-7)\left(\cancel{7} + \frac{1}{x-7} - \cancel{7}\right) + 7 = 1 + 7 = 8 \Rightarrow x' \square x = x \square x' = 8$

Ca urmare, x' e simetricul lui x

Deci x e sim. în rap. cu $\square$. Ca urmare $U((\mathbb{R}, \square)) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$

Obs: Conform rezultatului corespunzător din curs $\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{7\}, \square)$ este grup abelian

③ Considerăm pe $\mathbb{R}$ op. $x \circ y = 3x - 5y$

a) Este asoc.? b) Comut.?

c) Are el. n.?

a) Ce mă gândesc?

$\frac{x^3 - y^3}{x - y} \Rightarrow x^2 + xy + y^2$, $\mathbb{R} \setminus \{(x, y) : x = y\}$

$(x \circ y) \circ z = (3 \cdot 5y) \circ z = 9x - 15y - 5z$

$x \circ (y \circ z) = \cancel{x}\, 3x - 15y + 25z$

Ce scrie pe caiet?

$\left.\begin{array}{l}(1 \circ 0) \circ 0 = 3 \circ 0 = 9 \\ 1 \circ (0 \circ 0) = 1 \circ 0 = 3\end{array}\right| \Rightarrow$ „$\circ$" nu e asoc. $\Rightarrow \exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$ a.î. $(x \circ y) \circ z \neq x \circ (y \circ z)$

b) $1 \circ 0 = 3 \neq -5 = 0 \circ 1 \Rightarrow$ „$\circ$" nu e comut

c) Presupunem că „$\circ$" admite el. n. $= e \Rightarrow e \circ 0 = 0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 3e - 5 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow e = 0 \Rightarrow \\ \text{și } e \circ 1 = 1 \Rightarrow 3e - 5 = 1 \Rightarrow e = 2\end{array}\right| \Rightarrow$ afs $\Rightarrow$ „$\circ$" nu admite el. n.

Dacă „$\circ$" nu admite el. n. $\Rightarrow$ nu ad. el. sim.

Temă: $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \}$ (pe foaie)

Pe $\mathcal{F}$ definim. op. astfel: $f * g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(f * g)(a) = f(a) \cdot g(a)$

Arătați că $(\mathcal{F}, *)$ este monoid comut și det elementele simetrizabile