CURS 8

GRUPURI CICLICE

T **Teorema de structură a grupurilor ciclice**

Orice G = grup ciclic, $G \cong \mathbb{Z}$ sau $G \cong \mathbb{Z}_m$, $m \geq 1$

- G = grup ciclic, a = generator al său, a = ordin infinit $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ G e izomorf cu $(\mathbb{Z}, +)$
- G = gr. ciclic, a = generator de ordin finit m $\Rightarrow$ G e izomorf cu $(\mathbb{Z}_m, +)$
- Orice subgrup și grup factor al unui gr. ciclic este ciclic
- $G = \langle a \rangle$ grup ciclic de ord m

  Atunci, $\varphi: \mathbb{Z}_m \to G$, $\varphi(\{k\}) = a^k$, unde a^k generator al lui $G \Leftrightarrow$ k e prim cu m
- Rădăcină primitivă de ord m al unității = generator al grupului U_m

GRUPURI DE PERMUTĂRI

- $S(A)$ = grupul permutărilor mulțimii A
- A și A' echipotente $\Rightarrow$ $S(A) \cong S(A')$
- S_m = grupul simetric de grad m / grupul permutărilor
- S_m conține elemente / permutări de m elemente
- e = el. neutru / permutarea identică a lui S_m

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ permutare n elemente
- (i,j) = inversiune a permutării σ dacă $i<j$ și $\sigma(i)>\sigma(j)$
- $inv(\sigma)$ = nr. inversiunilor permutării σ
- $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ signatura / semnul lui σ
- $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$

  $\varepsilon(\sigma) = 1 \Rightarrow$ pară

  $\varepsilon(\sigma) = -1 \Rightarrow$ impară
- $\tau_{kl} = (k\ l)$ transpoziție ; $k, l \in \{1,2,\dots n\}$; $k \neq l$

  $k \neq l$
- S_n ; $n \geq 2 \Rightarrow$ orice transpoziție e impară.
- $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ morfism surj. , $n \geq 2$
- $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} = \frac{n!}{2}$ mulțimea perm. pare

  $A_n \trianglelefteq S_n \Rightarrow A_n$ = grup altern de grad n.
- σ = ciclu de lungime m , unde $\sigma \in S_n$, $2 \leq m \leq n$ dacă

  $\exists$ m nr. $i_1, i_2, \dots i_m \in \{1,2,\dots n\}$ a.î.

  1° $\forall i \notin \{i_1, i_2, \dots i_m\}$, $\sigma(i) = i$

  2° $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, ... $\sigma(i_m) = i_1$
- $C_n^m (m-1)!$ nr. de cicluri de lungime m
- $\sigma = (i_1, i_2, \dots i_m) \in S_n$ ciclu lungime m , atunci

  $\sigma^{-1} = (i_m, i_{m-1}, \dots i_1)$; $ord(\sigma) = m$

- $\sigma, \tau \in S_n$ și A, B submulțimi nevide disjuncte ale lui $\{1, 2, \dots n\}$ a.î.

  - dacă $s \notin A \Rightarrow \sigma(s) = s$
  - $s \in A \Rightarrow \sigma(s) \in A$
  - $t \notin B \Rightarrow \tau(t) = t$
  - $t \in B \Rightarrow \tau(t) \in B$

  $\Rightarrow \sigma\tau = \tau\sigma$ și $\mathrm{ord}(\sigma, \tau) = [\mathrm{ord}(\sigma), \mathrm{ord}(\tau)]$ (cmmmc)

- $\sigma = (i_1, i_2 \dots i_m)$ și $\tau = (j_1, j_2 \dots j_k)$ disjuncte dacă $\{i_1, i_2, \dots i_m\} \cap \{j_1, j_2, \dots j_k\} = \emptyset$

T Orice $\sigma \neq e$, $\sigma \in S_n$ se descompune ca un produs finit de cicli disjuncți

- Orice ciclu din S_n e un produs de transpoziți
- Orice permutare $\sigma \in S_n$ e produs de transpoziți
- $\mathrm{ord}(\sigma) = [$lungimilor ciclurilor$]$ cmmmc, σ = perm