CURS 2

Elemente de topologie

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^m$

$X_i \neq \emptyset, \; i = \overline{1,m}$ $\Big| \Rightarrow X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_m = \{ x = (x_1, \ldots, x_m), \; x_i \in X_i, \; i = \overline{1,m} \}$

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

- **Urma lui $x \in \mathbb{R}^m$**

  $x \in \mathbb{R}^m, \; x = (x_1, \ldots, x_m), \; x_i \in \mathbb{R}, \; i = \overline{1,m}$

  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$

- **Bila deschisă:** $B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^m ; \|y - x\| < r \}$
- **Bila închisă:** $B[x, r] = \{ y \in \mathbb{R}^m ; \|y - x\| \leq r \}$
- **Sfera / coaja bilei:** $S(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^m, \|y - x\| = r \}$
- **Def:** $D \subset \mathbb{R}^m$ s.m. deschisă dacă $\forall x \in D \; \exists \, r = r_x > 0$ a.î. $B(x, r) \subset D$

  ex: $\mathbb{R}, (0,1) \Rightarrow D = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x > 0 \} \Rightarrow D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in \ldots \}$

  $B = (x_0, r)$

  ex: $[0,1]$ nu e deschisă $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \}$

  $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2] \}$

T $\emptyset$ și $\mathbb{R}^m$ sunt mulțimi deschise

T $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^m$ deschise $\Rightarrow D_1 \cap D_2$ deschisă

T $\{D_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^m$ deschise $\Rightarrow \bigcup D_i, \; i \in I$ deschisă

- $D_1, D_2 \ldots D_p \subset \mathbb{R}^m$ deschise $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{p} D_i$ deschisă
- $\mathbb{R}, \; D_m = \left(-\frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m} \right), \; m \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap D_m = [0, 1]$ nu e deschisă
- **Def:** $F \subset \mathbb{R}^m$ s.m. închisă dacă $\mathbb{R}^m \setminus F$ e deschisă

  ex: $(0,1)$ nu e închisă, $[0,1)$ nu e închisă

(T) $\emptyset$, $\mathbb{R}^m$ sunt închise

(T) $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^m$ închise $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ închisă

(T) $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^m$ închise $\Rightarrow \bigcap F_i$, $i \in I$ închisă

- Def: $I \subset \mathbb{R}^m$ s.n. interval deschis dacă
  $I = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_m, b_m) = \{ x = (x_1, \dots, x_m) ; a_i < x_i < b_i \}$
- $J \subset \mathbb{R}^m$ interval închis dacă
  $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] = \{ x = (x_1, \dots x_m) ; a_i \le x_i \le b_i \}$
- $M \subset \mathbb{R}^m$ mărginită dacă $\exists\, I \subset \mathbb{R}^m$ interval a.î. $M \subseteq I$

(T) Teorema de structură a mulțimilor deschise din $\mathbb{R}$

$\forall$ mulț. deschisă și $\neq \emptyset$ se poate scrie ca o reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise, $\neq \emptyset$ și disjuncte 2 câte 2

- Pornind de la orice interval $\longrightarrow$ orice mulț. deschisă
- M = numărabilă dacă $\exists\, f: M \to \mathbb{N}$ bij.
- M = cel mult numărabilă e ori finită ori numărabilă
- Spațiul topologic

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}$ - familia tuturor submulț. lui X care au prop:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$
- $(D_i)_{i \in I} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup D_i \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ = spațiu topologic ; $\mathcal{T}$ = topologie pe X

(T) Structura topologică a lui $\overline{\mathbb{R}}$

$\mathcal{T} = \{ D \mid D \subset \mathbb{R} \text{ deschisă} \} \cup \{ D \cup [-\infty, x) \mid D \subset \mathbb{R} \text{ des}, x \in \mathbb{R} \} \cup \{ D \cup (y, +\infty] \mid D \subset \mathbb{R} \text{ des.}, y \in \mathbb{R} \} \cup \{ D \cup (y, +\infty] \cup [-\infty, x) \mid D \subset \mathbb{R} \text{ des.}; x, y \in \mathbb{R} \}$

Ƶ topologie naturală / uzuală de pe $\overline{\mathbb{R}}$

• Maurice Fréchet: $\exists$ dist între obiecte mat. de același tip

Topologia unui spațiu metric

• **Def**: $X \neq \emptyset$, $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ s.m. distanță/metrică pe X:

→ $d(x,y) = 0 \iff x = y$
→ $d(x,y) = d(y,x)$; $\forall\, x,y \in X$
→ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$; $\forall\, x,y,z \in X$

(X,d) = spațiu metric; elementele (X,d) = puncte

ex: $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$
$X = \mathbb{R}^m$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_m-y_m)^2}$

Vecinătatea unui punct

• **Def**: (X,d) spațiu metric, $x \in X$
$V \subset X$ s.m. vecinătate a lui x dacă $\exists\, r > 0$ a.î.
$B(x,r) \subset V$; V_x = mulț. vecin. lui x

Diametrul unei mulțimi

• **Def**: (X,d) spațiu metric, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$
diametrul mulțimii A = $\delta(A) = \sup\{d(x,y);\ x,y \in A\}$

• A mărginită $\Rightarrow \delta(A) < +\infty$
• A nemărginită $\Rightarrow \delta(A) = +\infty$

T A mărginită $\iff \exists\, x_0 \in X$, $\exists\, r > 0$ a.î. $A \subset B(x_0, r)$

T
- $A \subset B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$; $A, B \neq \emptyset \subset X$
- $\delta(A) = 0 \iff A$ se reduce la un singur element
- $\delta(B(x_0,r)) \leq 2r$, $\delta(B[x_0,r]) \leq 2r$

Interiorul unei mulțimi

• **Def** (X,d) spațiu metric; $A \subset X$, $A \neq \emptyset$
$x \in A$ punct ext al lui A dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \subset A$

- $\mathring{A}$ – mulțimea pct. int. ale lui A / int. lui A.

(T) 1) $\mathring{A} \subset A$
2) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$
3) $\mathring{A} \cap \mathring{B} \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$
4) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$
5) A deschisă $\Rightarrow A = \mathring{A}$
6) $\mathring{A} = \bigcup D$, $D \subset A$, $D \in \mathcal{J}_d$ (reuniunea tuturor mulț. deschise)
ex: $A = [0,1)$, $\mathring{A} = (0,1)$

Închiderea unei mulțimi

- $x \in X$ punct aderent al lui A $\Rightarrow \forall V \in V_x$, $V \cap A \neq \emptyset$
- $\bar{A}$ – mulț. tuturor pct. aderente ale lui A / închiderea mulț.

(T) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
ex: $A = [0,1)$, $\bar{A} = [0,1]$ sau $A = (0,1)$, $\bar{A} = [0,1]$

(T) 1) $A \subset \bar{A}$
2) $A \subset B$, $\bar{A} \subset \bar{B}$
3) $\overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B}$
4) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$
5) $\bar{A}$ mulț. închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$
6) $\bar{A} = \bigcap F$; $A \subset F$, $X \setminus F \in \mathcal{J}_d$

Frontarea unei mulțimi

(T) $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ frontiera mulțimii
ex: $A = [0,1)$, $\mathring{A} = (0,1)$, $\bar{A} = [0,1]$, $\partial A = \{0,1\}$

(T) 1) A deschisă $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$
2) A închisă $\Leftrightarrow \partial A \subset A$
3) $\mathring{A} = A \setminus \partial A$
4) $\bar{A} = A \cup \partial A$

- $x \in X$ pct de acumulare a lui A dacă $\forall V \in V_x$, $V \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$
- A' = mulț pct de acumulare / mulț. derivată
- $A' \subset \bar{A}$

(T) $x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$, $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$