13.11.2023

Funcții derivabile

(1) Să se studieze derivabilitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$

f cont pe $\mathbb{R}^*$ (op. f. elem)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\downarrow 0}\cdot \underbrace{\cos\frac{1}{x^2}}_{\in[-1,1]} = 0$$

$f(0) = f(x_0) = \alpha$

I $\alpha=0 \Rightarrow f$ cont în $x=0 \Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}$

II $\alpha\neq 0 \Rightarrow f$ nu e cont în $x=0 \Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}^*$

f deriv pe $\mathbb{R}^*$ (op. f. deriv.)

Dacă $\alpha\neq 0 \Rightarrow f$ nu e deriv în $x=0$

Dacă $\alpha=0 \Rightarrow$ studiem deriv în $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x^2}-\alpha}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x^2} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ deriv în } x=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ deriv pe $\mathbb{R}$ și $f'(0)=0$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)', & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} + x^2\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)', & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} + x^2\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\left(-2\frac{1}{x^3}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} + x^2\frac{2}{x^3}\cdot\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f' nu e cont în $x=0$

② Să se determine pct. de extrem local ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

f cont pe $\mathbb{R}^*$

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

$$l_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 e^{-x} = 0$$

$$f(0) = 0$$

$\Rightarrow f$ cont în $x = 0$ $\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}$

f deriv pe $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\leq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f_s'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\geq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f_d'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\, e^{x}} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ nu e deriv în $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} (-x)', & x<0 \\ (x^2 e^{-x})', & x>0 \end{cases} = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}, & x>0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 = 0; & x<0 \\ x(2e^{-x} - xe^{-x}; & x>0 \end{cases} = \begin{cases} x \in \emptyset \\ xe^{-x}(2-x), & x>0 \end{cases} = \begin{cases} x\in\emptyset \\ \cancel{x_1 = 0} \\ x_2 = 2 \end{cases} ; x>0$$

$\Rightarrow x = 2$ pct. de extrem local, pct. critic

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	|	$+ + +$	0	$- - - - -$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	

$f'(-1) = 1 < 0$; $f'(3) = -3e^{-3} < 0$

$f'(1) = 2e^{-1} - e^{-1} = e^{-1} > 0$

$f(2) = 4 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2}$

pct de coord $A(0,0)$ e pct de min local

pct. de coord $B(2, \frac{4}{e^2})$ e pct de max local

(3) Să se dem. inegalitatea $\sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\forall x \in [0, \pi)$

Îm $x = 0 \Rightarrow \sin 0 \le 0$ adevărat

Fie $f: [0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Derivăm fct. de „gr polim. +1" ori, adică de 6 ori. $\Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow f'''(x) = -\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(IV)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(V)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(VI)}(x) = -\sin x$

$\forall x \in [0, \pi)$, $x \ne 0$ $\exists c \in (0, x)$ a.î. $f(x) = T_5(x) + R_5(x)$

$$T_5(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots + \frac{f^{(V)}(0)}{5!}(x-0)^5$$

$$T_5(x) = 0 + \frac{1}{1} \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!} \cdot (x-0)^6 = \frac{-\sin c}{6!} \cdot x^6$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin c}{6!}x^6 = \sin x$$

dar $\sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin c}{6!}x^6 \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -\frac{\sin c}{6!}x^6 \le 0 \Rightarrow$ adevărat deoarece $\forall c \in (0, x)$ și $\forall x \in [0, \pi)$

(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to \infty} (f(x) + f'(x)) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Arătați că $\exists \lim_{x \to \infty} f(x) = l$

Rezolvare: construim fct. deriv. g și $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)+f'(x) =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

$$g(x) = e^x f(x) \Rightarrow g'(x) = e^x f'(x) + e^x f(x) = e^x (f(x) + f'(x))$$

$$h(x) = e^x \Rightarrow h'(x) = e^x$$

$$l = \lim_{x\to+\infty} (f(x)+f'(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(f(x)+f'(x))}{e^x}$$

$g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriv a.î. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)+f'(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$ $\Rightarrow$

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = f(x) + f'(x)$$

$$\overset{l'H}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \cancel{f(x)} \lim_{x\to\infty} f(x) = l$$