SEMINAR 13, SERIA 13

Mulțimi măsurabile Jordan. Integrala în $\mathbb{R}^n$.

Exercițiul 1 Se consideră mulțimea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1, |y|\le x^2\}$. Să se arate că A este mulțime măsurabilă Jordan și să se calculeze $\mu(A)$.

Rezolvare $|x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$

$|y|\le x^2 \Leftrightarrow -x^2\le y\le x^2$

Fie $\alpha,\beta:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definite prin $\alpha(x)=-x^2$, $\beta(x)=x^2$ $\forall x\in[-1,1]$.

α,β funcții continue pe $[-1,1]$; $[-1,1]\subseteq\mathbb{R}$ interval compact

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-1,1],\ \alpha(x)\le y\le\beta(x)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ mulțime simplă în raport cu axa Oxy

$\Rightarrow A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

$$\mu(A)=\iint_A 1\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}1\,dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x^2}^{x^2}1\,dy\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(y\Big|_{-x^2}^{x^2}\right)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+x^2)\,dx=\int_{-1}^{1}2x^2\,dx=$$

$$=\frac{2x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

Exercițiul 2 Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le r^2\} =$
$= B[(0,0), r]$, unde $r>0$. Să se demonstreze că A este mulțime măsurabilă Jordan și să se calculeze $\mu(A)$.

Rezolvare $x^2+y^2 \le r^2 \Leftrightarrow x^2 \le r^2-y^2$.

$x^2 \le r^2-y^2 \Rightarrow r^2-y^2 \ge 0 \Rightarrow y^2 \le r^2 \Rightarrow -r \le y \le r \Rightarrow$
$\Rightarrow y \in [-r,r]$

$x^2 \le r^2-y^2 \Leftrightarrow -\sqrt{r^2-y^2} \le x \le \sqrt{r^2-y^2}$.

Fie $\alpha, \beta : [-r,r] \to \mathbb{R}$ date de $\alpha(y) = -\sqrt{r^2-y^2}$, $\beta(y) =$
$= \sqrt{r^2-y^2}$ $\forall y \in [-r,r]$.

α, β funcții continue pe $[-r,r]$.

$[-r,r] \subseteq \mathbb{R}$ interval compact în $\mathbb{R} \Rightarrow [-r,r] \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-r,r],\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow A$ mulțime simplă în raport cu axa Oy
$\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

$$\mu(A) = \iint_A 1\,dx\,dy = \int_{-r}^{r}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} 1\,dx\right)dy = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 1\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-r}^{r}\left(x\Big|_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\right)dy = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-y^2}\,dy = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy$$

$y = r\sin t$
$dy = r\cos t\,dt$

$y=-r \Rightarrow +r\sin t=-r \Rightarrow \sin t=-1 \Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$

$y=r \Rightarrow r\sin t=r \Rightarrow \sin t=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,r\cos t\,dt=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2\cos^2 t}\,r\cos t\,dt$$

$$=2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,dt=2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\,dt$$

$$=r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=r^2\left(t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin 2t}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\pi r^2.$$

<u>Exercițiul 3</u> Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}$. Să se arate că A este mulțime măsurabilă Jordan și să se calculeze $\mu(A)$.

<u>Exercițiul 4</u> Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2\le y\le 2x+3\}$. Să se calculeze $\iint_A xy\,dx\,dy$.

<u>Rezolvare</u> $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2\le y\le 2x+3\}$

$x^2\le y\le 2x+3 \Rightarrow x^2\le 2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3\le 0 \Rightarrow x\in[-1,3]$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-1,3],\ x^2\le y\le 2x+3\}$

$[-1,3]\subseteq\mathbb{R}$ interval compact în $\mathbb{R} \Rightarrow [-1,3]\in\mathcal{J}(\mathbb{R})$

Fie $\alpha,\beta:[-1,3]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=x^2$ și $\beta(x)=2x+3\ \forall x\in[-1,3]$.

α,β funcții continue pe $[-1,3]$.

A mulțime simplă în raport cu axa $Oxy \Rightarrow$

$\Rightarrow A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

Fie $f: A \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = xy$

f funcție continuă pe A

A mulțime simplă în raport cu axa Oxy $\Big\Vert \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ funcție integrabilă Riemann pe A.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx =$$

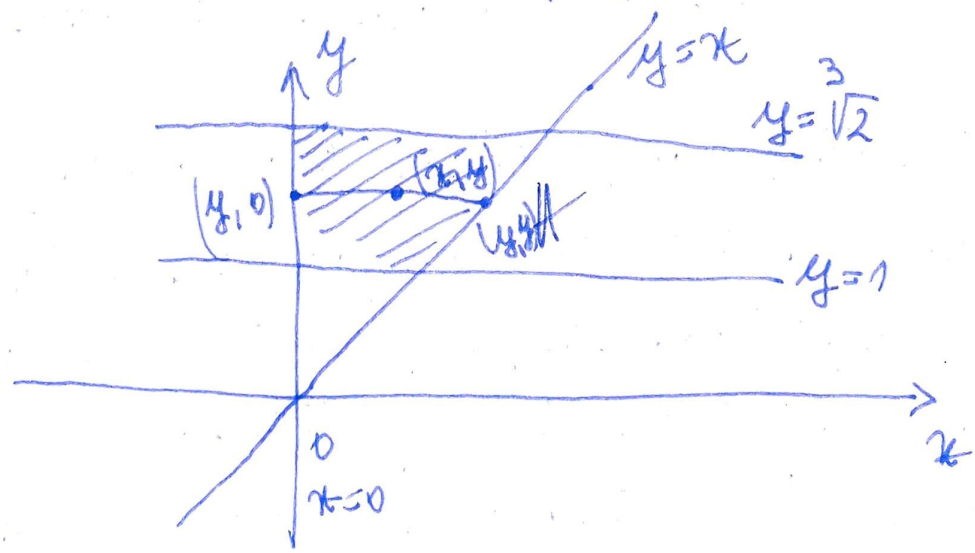
$$= \int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{2x+3} xy\,dy\right)dx = \int_{-1}^{3}\left(\frac{xy^2}{2}\Big|_{x^2}^{2x+3}\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{3}\frac{x}{2}\left[(2x+3)^2 - x^4\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} x\left(4x^2+12x+9-x^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\left(-x^5+4x^3+12x^2+9x\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^6}{6}\Big|_{-1}^{3} + x^4\Big|_{-1}^{3} + 4x^3\Big|_{-1}^{3} + \frac{9x^2}{2}\Big|_{-1}^{3}\right) = \frac{160}{3}$$

<u>Exercițiul 5</u> Să se calculeze $\iint_A x\,dx\,dy$, unde A este mulțimea mărginită de ~~parabola~~ dreptele de ecuații $x=0$, $y=1$, $y=\sqrt[3]{2}$ și $y=x$.

<u>Rezolvare</u>



Se observă că $1 \le y \le \sqrt[3]{2}$ și că $0 \le x \le y$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [1, \sqrt[3]{2}],\ 0 \le x \le y\}$

$[1, \sqrt[3]{2}]$ interval compact în $\mathbb{R} \Rightarrow A \in J(\mathbb{R})$

Funcțiile $\alpha, \beta : [1, \sqrt[3]{2}] \to \mathbb{R}$, $\alpha(y) = 0$ și $\beta(y) = y$ sunt funcții continue pe $[1, \sqrt[3]{2}]$.

A mulțime simplă în raport cu axa Ox.

$f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$ funcție continuă pe A. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este funcție integrabilă Riemann pe A.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\int_0^y f(x,y)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\int_0^y y\,dx \right) dy = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(yx \Big|_0^y \right) dy = \int_1^{\sqrt[3]{2}} y^2\,dy =$$

$$= \frac{y^3}{3} \Big|_1^{\sqrt[3]{2}} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

<u>Exercițiul 6</u> Fie $A = [0,1] \times [1,2] \subseteq \mathbb{R}^2$ și funcția $f : A \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = x^2 y^3$ $\forall (x,y) \in A$.

<u>Rezolvare</u> $A = [0,1] \times [1,2] \subseteq \mathbb{R}^2$ interval închis, mărginit 2-dimensional $\Rightarrow A \in J(\mathbb{R}^2)$

f funcție continuă pe $A \Rightarrow f$ este funcție integrabilă Riemann pe A.

În cazul intervalelor mărginite n-dimensionale, ordinea de integrare nu este impusă, ci aleatorie.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 f(x,y)\,dy\right) dx$$

Alegem una dintre variante pentru calculul integralei duble.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2 y^3\,dx\right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left(y^3 \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) dy = \int_1^2 \frac{y^3}{3}\,dy = \frac{y^4}{12}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2^4-1}{12} = \frac{16-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

<u>Exercițiul 7</u> Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_A (x-y)\,dx\,dy$, unde $A = [-1,1]\times[0,2]$.

b) $\iint_A y\,dx\,dy$, unde A este mulțimea mărginită de dreptele de ecuații $y=x$, $y=1$ și parabola de ecuație $y^2=-x$.

c) $\iint_A xy\,dx\,dy$, unde A este mulțimea mărginită de parabolele de ecuații $x=y^2$ și $x=2-y^2$.

d) $\iint\limits_A y\sqrt{x}\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană limitată de ΔOBC cu $O(0,0)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$

e) $\iint\limits_A y\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2,\ x\le y^2,\ x\ge -y^2,\ y\le 0\}$.

f) $\iint\limits_A xy\,dx\,dy$, unde A este mulțimea limitată de curbele de ecuații $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$

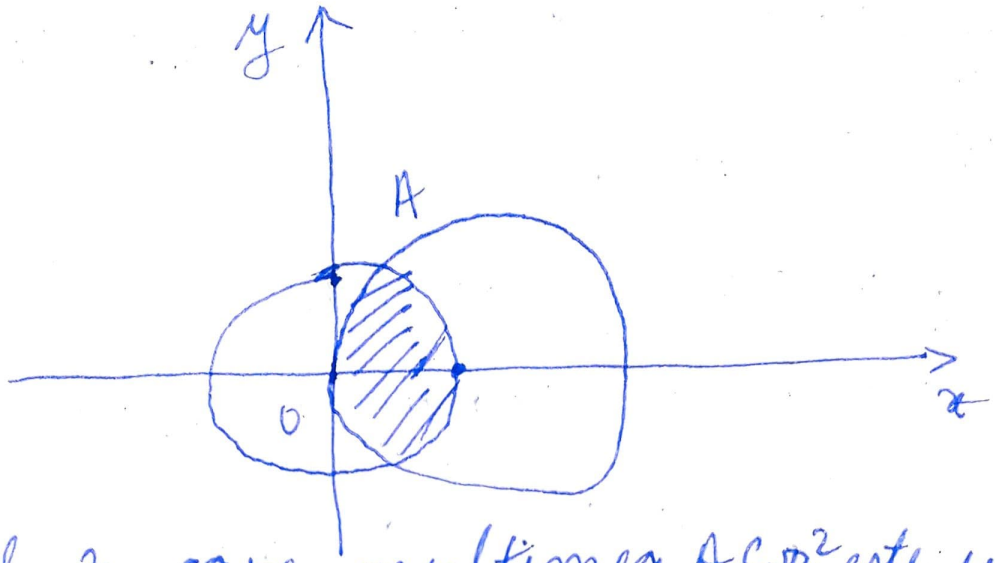
h) $\iint\limits_A \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,dy$, unde A este mulțimea descrisă în felul următor $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2\le 8x,\ y\le 2x,\ y+4x\le 24\}$

<u>Exercițiul 8</u> Să se calculeze, folosind metoda schimbării de variabilă, următoarele integrale duble:

a) $\iint\limits_A \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 2x\}$

b) $\iint\limits_A e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$

Rezolvare a) Mulțimea A este mulțimea limitată de cercurile de ecuații $x^2+y^2=1$ și $x^2+y^2=2x$.



În cazurile în care mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ este un disc sau o porțiune a unui disc se folosește, de obicei, trecerea la coordonate polare.

Fie $\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha. \end{cases}$

$\varphi : [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(R, \alpha) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$

$\det J_\varphi(R, \alpha) = R$.

$A: \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+y^2 \leq 2x. \end{cases}$

$A_1: \begin{cases} R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha \geq 1 \\ R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha \leq 2R\cos\alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} R^2 \geq 1 \\ R^2 \leq 2R\cos\alpha \\ R \geq 0 \\ R \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R \geq 1 \\ R \leq 2\cos\alpha \\ \alpha \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

$$1 \leq R \leq 2\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\alpha \geq 1 \\ \alpha \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha \geq \frac{1}{2} \\ \alpha \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$A_1 : \begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \\ 1 \leq R \leq 2\cos\alpha \end{cases}$$

$$A_1 = \left\{ (R, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right],\ 1 \leq R \leq 2\cos\alpha \right\}$$

$$\iint_A \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy = \iint_{A_1} \frac{R^2 \sin^2\alpha}{R^2\cos^2\alpha} \left| \det J_\varphi(R, \alpha) \right| dR\, d\alpha$$

$$= \iint_{A_1} tg^2\alpha \cdot |R|\, dR\, d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2\cos\alpha} |R|\, tg^2\alpha\, dR \right) d\alpha$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2\alpha \cdot \left(\int_1^{2\cos\alpha} R\, dR \right) d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2\alpha \cdot \left(\frac{R^2}{2} \Big|_1^{2\cos\alpha} \right) d\alpha$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2\alpha \left(\frac{4\cos^2\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\, tg^2\alpha \cos^2\alpha - \frac{tg^2\alpha}{2} \right) d\alpha$$

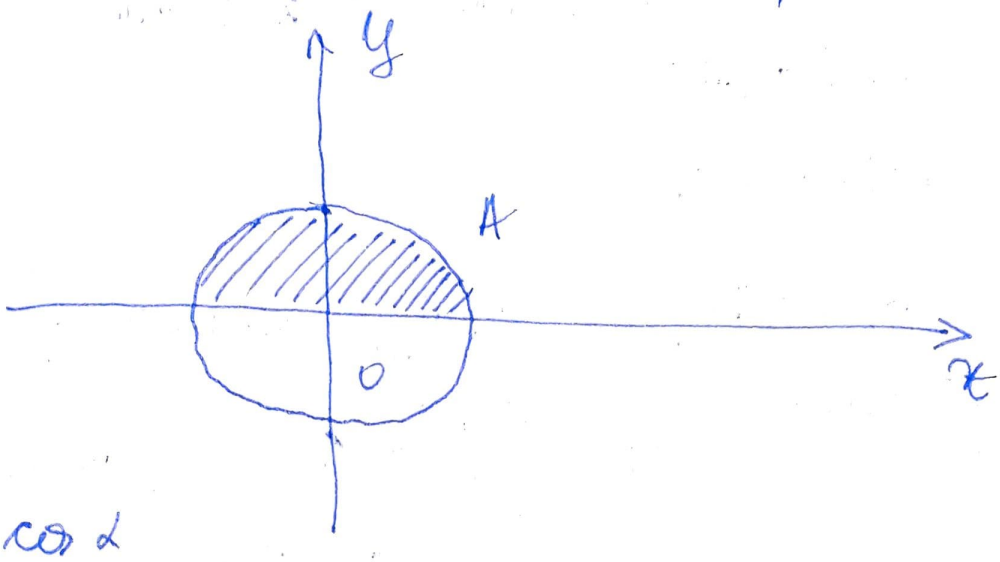
$$= 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\alpha\, d\alpha - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2\alpha\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\alpha)\, d\alpha - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (tg^2\alpha + 1)\, d\alpha + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 1\, d\alpha$$

$$= \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \pi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}.$$

b) Mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ este limitată de curbele de ecuații $x^2+y^2=1$ și $y=0$



$$\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{cases}$$

$\varphi : [0,+\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(R,\alpha) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$

$\det J_\varphi(R,\alpha) = R.$

$$A: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$A_1: \begin{cases} R^2\cos^2 + R^2\sin^2\alpha \le 1 \\ R\sin\alpha \ge 0 \\ R \ge 0 \\ \alpha \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^2 \le 1 \\ R\sin\alpha \ge 0 \\ R \ge 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R \in [0,1] \\ \sin\alpha \ge 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R \in [0,1] \\ \alpha \in [0, \pi]. \end{cases}$$

$A_1 = [0,1] \times [0, \pi]$.

$$\iint_A e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{A_1} e^{R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha} \,|\det J_f(R,\alpha)|\,dR\,d\alpha$$

$$= \iint_{A_1} e^{R^2} \cdot |R|\,dR\,d\alpha = \int_0^1 \left(\int_0^\pi e^{R^2} \cdot R\,d\alpha \right) \cdot dR =$$

$$= \int_0^1 Re^{R^2} \left(\int_0^\pi 1\,d\alpha \right) dR = \int_0^1 Re^{R^2} \cdot \left(\alpha \Big|_0^\pi \right) dR =$$

$$= \int_0^1 \pi R e^{R^2}\,dR = \pi \int_0^1 Re^{R^2}\,dR = \frac{\pi}{2} \int_0^1 2Re^{R^2}\,dR$$

$R^2 = t$

$dt = 2R\,dR$

$R = 0 \Rightarrow t = 0$

$R = 1 \Rightarrow t = 1$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^1 2Re^{R^2}\,dR = \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^t\,dt = \frac{\pi}{2} \cdot e^t \Big|_0^1 = \frac{\pi(e-1)}{2}.$$

<u>Exercițiul 9</u> Să se calculeze, folosind metoda schimbării de variabilă, următoarele integrale duble:

a) $\iint_A (1 + \sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, unde

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-y \le 0,\ x \ge 0 \}$.

b) $\iint\limits_A \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le e^2,\ y\le x\sqrt{3},\ y\ge \frac{x\sqrt{3}}{3},\ x\ge 0\}$.

c) $\iint\limits_A x\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le xy\le 2,\ 1\le \frac{y}{x}\le 2,\ x\ge 0\}$.

d) $\iint\limits_A (x^2+y^2+xy-x-y)\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge x\ge 0\}$.

e) $\iint\limits_A y\,dx\,dy$, unde $A\subseteq\mathbb{R}^2$ este mulțimea delimitată de curbele de ecuații $x^2+y^2=2x$, $y=0$ și $y=x$.

f) $\iint\limits_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x\le x^2+y^2\le 4x,\ y\ge 0\}$

h) $\iint\limits_A \frac{1}{\sqrt{2-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1,\ 2y\le 3x\}$

Exercițiul 10 Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint\limits_A (xyz+y^2)\,dx\,dy\,dz$, unde $A=[-1,1]\times[2,3]\times[0,1]$

b) $\iiint\limits_A xyz\,dx\,dy\,dz$, unde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 9\le x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 5\}$.

Rezolvare a) $A=[-1,1]\times[2,3]\times[0,1]\subseteq\mathbb{R}^3$ interval închis, mărginit 3-dimensional $\Rightarrow A\in J(\mathbb{R}^3)$

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xyz+y^2$ $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

f funcție continuă pe $A \Rightarrow f$ integrabilă Riemann pe A

Când integrăm funcții continue pe intervale închise, mărginite n-dimensionale nu contează ordinea de integrare. În cazul nostru, alegem ordinea de integrare dz, dy, dx.

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}\left(\int_2^3\left(\int_0^1 f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\int_2^3\left(xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^1+y^2z\Big|_0^1\right)dy\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\int_2^3\left(\frac{xy}{2}+y^2\right)dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{xy^2}{4}\Big|_2^3+\frac{y^3}{3}\Big|_2^3\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{5x}{4} + \frac{38}{6} \right) dx = \frac{5x^2}{8}\Big|_{-1}^{1} + \frac{38x}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{38}{3}.$$

b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9 \le x^2+y^2 \le z^2;\ 0 \le z \le 5\}$

$$\begin{cases} 9 \le x^2+y^2 \le z^2 \\ 0 \le z \le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \ge 9 \\ z \ge \sqrt{x^2+y^2} \\ z \le 5 \end{cases}$$

$9 \le x^2+y^2$

$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 5 \Rightarrow x^2+y^2 \le 25 \Rightarrow 9 \le x^2+y^2 \le 25.$

Fie $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 \le x^2+y^2 \le 25\}$.

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in K,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 5\}$

$K \subseteq \mathbb{R}^2$ mulțime compactă

$K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

Fie $\alpha, \beta : K \to \mathbb{R}$, $\alpha(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ și $\beta(x,y) = 5$.

α, β funcții continue pe K.

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in K,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$

$\Rightarrow$ A mulțime simplă în raport cu axa Oz (1)

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

f funcție continuă pe mulțimea A (2)

Din (1) și (2) rezultă că f este funcție integrabilă Riemann pe A.

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_K \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_K \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} xyz\,dz \right) dx\,dy = \iint_K \left(xy\frac{z^2}{2}\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} \right) dx\,dy$$

$$= \iint_K xy\left[\frac{25}{2} - \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\right] dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_K xy(25-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

Calculul integralei duble $\iint_K xy(25-x^2-y^2)\,dx\,dy$ se efectuează folosind metoda schimbării de variabilă (TEMĂ).

<u>Exercițiul 11</u> Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint_A z\,dx\,dy\,dz$, unde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 1\}$

b) $\iiint_A \frac{1}{(1+x+y+z)^4}\,dx\,dy\,dz$, unde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.