**4.** Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_8\}$, unde $P_1 = (-7,-1)$, $P_2 = (-4,\alpha)$, $P_3 = (-3,-1)$, $P_4 = (-2,1)$, $P_5 = (-1,5)$, $P_6 = (0,-2)$, $P_7 = (1,-2)$, $P_8 = (4,0)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\mathcal{L}_i$ (respectiv $\mathcal{L}_s$) lista vârfurilor care determină marginea inferioară (respectiv superioară) a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. (i) Pentru $\alpha = -2$ detaliaţi cum evoluează $\mathcal{L}_i$ pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. **(6p)** (ii) Daţi exemplu de valoare a lui $\alpha$ pentru care $\mathcal{L}_s$ are exact patru puncte (justificaţi!). **(2p)** (iii) Determinaţi mulţimea tuturor valorilor lui $\alpha$ pentru care $\mathcal{L}_s$ are exact patru puncte. Justificaţi! **(2p)**

*(i)* **(6p)** *Lista finală era $P_1P_2P_7P_8$. Am scăzut 1p-2p pentru mici erori în aplicarea Graham's scan (unul sau mai multe puncte incluse în listă, deşi trebuiau eliminate, faptul că $P_6$ nu a fost eliminat, deşi era coliniar cu $P_2$ şi $P_7$, etc.). Pentru erori repetate în aplicarea Graham's scan / necunoaşterea algoritmului am scăzut 3p-4p.*

*(ii) + (iii)* **(2p) + (2p)** *Mulţimea valorilor lui $\alpha$ pentru care era verificată proprietatea era intervalul $(2,8)$, deoarece punctul $P_2$ trebuia să fie la stânga segmentului orientat $P_1P_5$ şi la stânga segmentului orientat $P_8P_5$. Am acordat punctaj pentru raţionamente/calcule, chiar dacă erau mici erori de rezolvare. În general, am scăzut 0.5p pentru erori de calcul / indicarea doar a unei limite a intervalului (omiterea marginii superioare / inferioare) / confuzie între $\mathcal{L}_s$ şi $\mathcal{L}_i$ / compararea poziţiei lui $P_2$ faţă de alte segmente.*

**5.** Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2\ldots P_{12})$, unde $P_1 = (-5,-3), P_2 = (-2,-4), P_3 = (4,-5), P_4 = (5,0), P_5 = (4,4), P_6 = (1,6), P_7 = (-4,4), P_8 = (-2,3), P_9 = (1,5), P_{10} = (3,0), P_{11} = (2,-3), P_{12} = (-2,-1)$. (i) Aplicaţi metoda din teorema galeriei de artă în cazul poligonului $\mathcal{P}$, indicând o posibilă amplasare a camerelor. **(4p)** (ii) Indicaţi două vârfuri concave, două vârfuri convexe neprincipale şi două vârfuri convexe principale ale lui $\mathcal{P}$. **(3p)** (iii) Indicaţi o descompunere a lui $\mathcal{P}$ în poligoane $y$-monotone $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ (i.e. cele trei poligoane sunt $y$-monotone, vârfurile lor sunt dintre vârfurile lui $\mathcal{P}$, interioarele lor sunt disjuncte şi reuniunea interioarelor lor este interiorul lui $\mathcal{P}$). **(3p)** Justificaţi, pe scurt, afirmaţiile făcute!

*(i)* **(4p)** *Am acordat 2p pentru desen, 1p pentru triangulare, 1p pentru aplicarea tri-colorării. Am acordat doar 0.5p pentru răspunsuri în care erau doar indicate o serie de vârfuri, fără nicio justificare/fără desen, etc. (atât modelele de la curs, cât şi din soluţiile problemelor de la seminar se bazau pe desene).*

*(ii)* **(3p)** *Am acordat 0.5p pentru fiecare vârf indicat corect.*

*(iii)* **(3p)** *Am scăzut 1-2p dacă unele poligoane erau indicate greşit sau dacă lipseau justificări.*

**Obs.** *În cazul în care figura era realizată greşit (adică nu era desenat poligonul în mod corect), am acordat punctaj parţial dacă, pe figura realizată, raţionamentele erau corecte.*

**6.** Se consideră problema de programare liniară dată de constrângerile $h_1, h_2, h_3, h_4$ şi de funcţia obiectiv $f$, unde $h_1 : y \leq 3$; $h_2 : x + y \leq 10$; $h_3 : -y \leq 1$; $h_4 : -x \leq 2$, iar $f(x,y) = x$. Determinaţi/desenaţi regiunea fezabilă $\mathcal{R}$, precizaţi dacă este mărginită sau nu şi indicaţi numărul de vârfuri şi numărul de muchii. **(6p)** Stabiliţi dacă problema de maximizare a funcţiei obiectiv $f$ pe $\mathcal{R}$ are soluţie unică. **(2p)** Aceeaşi întrebare pentru funcţia obiectiv $g(x,y) = y$. **(2p)**

*(i)* **(6p)** *Regiunea fezabilă era un trapez dreptunghic. Am acordat 4p pentru desen, 1p pentru indicarea faptului că este mărginită şi 1p pentru indicarea vârfurilor/muchiilor. Am scăzut 1p dacă figura nu era indicată corect (de ex. era indicat un dreptunghi).*

*(ii) + (iii)* **(2p) + (2p)** *Funcţia obiectiv $f$ avea un unic punct de maxim (pe desen: vârful din dreapta, jos), în schimb funcţia $g$ nu avea un unic punct de maxim (pe desen: baza mică a trapezului). Pentru răspunsuri parţial corecte (de exemplu se indica un punct de maxim pentru $g$, dar se afirma că este unic), am scăzut 0.5p-1p.*

**7.** a) Fie $ABCD$ un patrulater cu vârfurile $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$. Justificaţi care este complexitatea algebrică a calculelor pentru: (i) a stabili dacă patrulaterul este paralelogram, **(5p)** (ii) a stabili dacă patrulaterul este dreptunghi. **(5p)**

b) Considerăm algoritmii prezentaţi la curs pentru intersecţii de segmente (alg. Bentley-Ottmann) şi pentru determinarea diagramei Voronoi (alg. Fortune). Comparaţi (indicând punctual asemănări/deosebiri), **pe scurt**, cei doi algoritmi, făcând referire la următoarele elemente: (i) paradigma utilizată, (ii) evenimente (natura evenimentelor / aspecte cantitative), (iii) statut, (iv) complexitatea-timp a algoritmilor. **(15p)**

c) Considerăm $n$ dreptunghiuri $D_1, D_2, \ldots, D_n$ în planul $\mathbb{R}^2$, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Descrieţi, pe scurt, un algoritm cât mai eficient (indicând explicit complexitatea-timp a acestuia) care să determine dreptunghiul de arie minimă care are laturile paralele cu axele de coordonate şi care conţine reuniunea $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$. **(5p)**

*a)* **(5p)** *(i) Faptul că $ABCD$ este paralelogram revine la faptul că punctul de intersecţie a diagonalelor este mijlocul acestora, ceea ce conduce la complexitate algebrică dată de polinoame de gradul I. Am acordat 3p dacă se ajungea la polinoame de gradul II.*

**(5p)** *(ii) Complexitatea algebrică este dată de polinoame de gradul II. De exemplu, pe lângă condiţia de la (i) trebuie ca două laturi să fie perpendiculare. Exprimând condiţia de perpendicularitate folosind produsul scalar,* *se ajunge la complexitatea indicată. Am acordat 4p dacă se ajungea la rapoarte de polinoame. Am acordat doar punctaj parţial în situaţiile în care se considera că dreptunghiul are laturile paralele cu axele de coordonate.*

*Ca principiu, am acordat 2p-4p pentru raţionamente geometrice corecte, în care nu se ajungea însă la complexitate. Am acordat 3p-6p pentru numărarea operaţiilor, fără a face referire la conceptele de complexitate exprimate cu ajutorul polinoamelor. Am acordat punctaj parţial dacă era indicată o complexitate, dar nu existau justificări.*

*b)* **(15p)** *Schema de punctare a fost 4p: paradigma (este vorba de paradigma dreptei de baleiere/line sweep), 4p: descrerea evenimentelor, 4p: descrierea statutului, 3p: complexitatea celor doi algoritmi. Am acordat doar o parte din punctaj dacă se făcea referire doar la unul dintre algoritmi, nu la ambii.*

*c)* **(5p)** *Dreptunghiul cerut era obţinut folosind punctele cu coordonatele $x$ şi $y$ minime, respectiv maxime, ceea ce conducea la complexitatea $O(n)$. Am acordat 3p pentru algoritmi mai puţin eficienţi (de exemplu algoritmi care se bazau pe sortare, aceasta nefiind necesară).*