SAI

Seminar 4 - gr 133

MORFISM = funcție care „se poartă frumos" cu structura

IZOMORFISM = morfism ~~inversabilitatea~~, al cărui invers e și el morfism

STRUCTURI IZOMORFE = structuri între care $\exists$ măcar un izomorfism.

① $\mathcal{F} = \{f: X \to \mathbb{Z}\}$, X = mult. nevidă arbitrară

$f+g: X \to \mathbb{Z}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Ce structură e $(\mathcal{F}, +)$?

Evident, date $f, g \in \mathcal{F}$, $f+g$ e o funcție corect def.

Fie $f, g, h \in \mathcal{F}$. Fie $x \in X$

Atunci $(f+g)+h$, $f+(g+h) : X \to \mathbb{Z}$, iar

$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = ms = md \Rightarrow$

$\Rightarrow$ „+" e asoc pe $\mathcal{F}$ (1)

Fie $f, g \in \mathcal{F}$. Fie $x \in X$. Atunci $(f+g)(x) = (g+f)(x)$

$ms = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = md$

„+" e comut pe $\mathcal{F}$ (2)

Notăm $\mathbb{O}: X \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{O}(x) = 0$, $\mathbb{O} \in \mathcal{F}$. Fie $f \in \mathcal{F}$, $x \in X$

Atunci $(f+\mathbb{O})(x) = f(x) + \mathbb{O}(x) = f(x) + 0 = f(x)$, $f + \mathbb{O} = f$

$\mathbb{O} + f = f + \mathbb{O} = f \Rightarrow \mathbb{O}$ e el. neutru. (3)

Fie $f \in \mathcal{F}$. Considerăm $g: X \to \mathbb{Z}$, $g(x) = -f(x)$; $g \in \mathcal{F}$, $x \in X$

Atunci $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbb{O}(x)$

deci $\left.\begin{matrix} f+g = \mathbb{O} \\ g+f = \mathbb{O} \end{matrix}\right| \Rightarrow g$ e simetricul lui $f \Rightarrow$ „+" admite el. sim. (4)

din (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow$ grup abelian.