CURS 5

FUNCȚII DERIVABILE DE O VARIABILĂ REALĂ

- $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ pct. acumulare
- f derivată în $a \Rightarrow \exists f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$ deriv pe $A \subseteq D$
- f derivabilă în $a \Rightarrow f$ cont. în a (reciproca e falsă)

$f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $D_1 = D \cap (-\infty, a)$, $D_2 = D \cap (a, +\infty)$

$\exists f'_s(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists f'_d(a) \in \mathbb{R}$

(T) $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D_1' \cap D_2'$, f deriv în $a \Leftrightarrow f'_s(a) = f'_d(a) = f'(a)$

T Regula lanțului

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale, $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$

f deriv. în $a \in I$, g deriv în $f(a) \in J \Rightarrow (g \circ f): I \to \mathbb{R}$ e deriv în a

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

- Corolar: $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale, $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$, $(g \circ f): I \to \mathbb{R}$

  f cont. e bij., f deriv. în $a \in I$ și $f'(a) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}: J \to I$

  deriv. în $b = f(a)$, $\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$

  $$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

- a = pct. maxim local pt f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V \cap D$
- a = pct. minim local pt f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in V \cap D$

T Teorema lui Fermat

$I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$ pct de extrem (max/min) local $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ deriv. în x_0 și $f'(x_0) = 0$ (reciproca e falsă)

T Teorema lui Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ și deriv. pe (a,b) și

$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$

T Teorema lui Cauchy

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ deriv pe (a,b)
continue pe $[a,b]$ și $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

T Teorema lui Lagrange

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, cont pe $[a,b]$, deriv pe $(a,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Consecințele teoremei lui Lagrange:

1) $f: I \to \mathbb{R}$, deriv., a.î. $f'(x) = 0$ $\forall x \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = c$ (ct.)

2) $f, g: I \to \mathbb{R}$, deriv., a.î. $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) \equiv g(x) + c$

(T) Teorema lui Darboux

$f: I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriv. $\Rightarrow f': I \to \mathbb{R}$ are prop. lui Darboux:
$\forall\, a, b \in I$, $a < b$, $\forall\, \lambda \in (f(a), f(b))$, $f(a) < f(b)$
$\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $f'(c) = \lambda$

• Corolar: $f: I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriv., dacă $\exists\, a, b \in I$ a.î.
$f'(a) < 0$ și $f'(b) > 0 \Rightarrow \exists\, c \in (\min(a,b); \max(a,b))$
a.î. $f'(c) = 0$

• Corolar: $f: I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriv., dacă f' nu se anulează pe $I \Rightarrow$
$\Rightarrow f'$ își păstrează semn ct. pe I (f str. monotonă)

REGULI DE TIP L'HOPITAL

(T) Cauchy

$I \subseteq \mathbb{R}$, interval; $f, g: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = g(x_0) = 0 \\ f, g \text{ deriv în } x_0 \text{ \& } g'(x_0) \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}_{x_0} \text{ a.î. } g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in V \setminus \{x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

T Regula lui L'Hospital

$-\infty \leq a < b \leq \infty$; $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$

f și g sunt deriv pe (a,b) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

sau $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0$

sau $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

(reciproca e falsă)

DIFERENȚIALA UNEI FUNCȚII

- $I \subseteq \mathbb{R}$, interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}$
- f diferențiabilă în $a \in I \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha : I \to \mathbb{R}$, și $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ a.î. $f(x) = f(a) + A(x-a) + \alpha(x) \cdot (x-a)$
- f diferențiabilă pe $I \Rightarrow f$ diferențiabilă în orice pct $a \in I$

T $I \subseteq \mathbb{R}$ interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ atunci f e diferențiabilă în $a \Leftrightarrow f$ deriv în a, $\alpha(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

- Diferențiala funcției f în $a \in I$, fct. $df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow$ ~~d f(a)(h)~~ $\Rightarrow df(a)(h) = f'(a)h$
- Diferențiala unei funcții într-un punct e o funcție

DERIVABILITATEA DE ORDIN SUPERIOR

- $f : \Delta \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f de 2 ori deriv în $x_0 \in \Delta \Rightarrow f$ deriv. într-o vecinătate a lui x_0 și f' deriv în $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = (f')'(x_0)$

- f deriv. de n ori în $x_0 \in \Delta \Rightarrow f$ e de $(n-1)$ deriv. într-o vecinătate a lui x_0 și $f^{(n-1)}$ deriv. în $x_0 \Rightarrow f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$
- f s.n. de <u>clasă C^n</u> pe $\Delta \Rightarrow f$ e de n ori deriv. pe Δ și $f^{(n)}$ continuă pe Δ.
- f <u>indefinit derivabilă</u> pe $\Delta \Rightarrow f$ deriv. de n ori pe Δ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $C^n(\Delta) = \{ f: \Delta \to \mathbb{R},\ f$ de clasă $C^n \}$
- $C^\infty(\Delta) = \{ f: \Delta \to \mathbb{R};\ f$ deriv. de n ori $\forall n \in \mathbb{N} \}$

T $f, g: \Delta \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n ori deriv., $x_0 \in \Delta$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f+g$; λf ; $f \cdot g$ sunt de n ori deriv. în x_0 și:

- $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$
- $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda \cdot f^{(n)}(x_0)$
- $(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot g(x_0) + C_n^1 f^{(n-1)} g'(x_0) + C_n^2 f^{(n-2)} g''(x_0) + \ldots + C_n^{n-1} f'(x_0) \cdot g^{(n-1)}(x_0) + f(x_0) \cdot g^{(n)}(x_0)$

- <u>Formula lui Taylor</u>

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de n ori deriv., $x_0 \in I$

polinomul lui Taylor de grad n asociat lui f în $x_0 \in I$

$$T_n(x_0) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

- funcția $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ e restul de ordin n al lui f.
- <u>Formula lui Taylor cu restul Peano</u>

$f: I \subset \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de n ori deriv., $x_0 \in I \Rightarrow \exists \alpha: I \to \mathbb{R}$ cont., cu $\alpha(x_0) = 0$ a.î. $f(x) = T_n(x) + \alpha(x) \dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$ $\forall x \in I$

- **Formula lui Taylor cu restul Lagrange**

$f: I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de $n+1$ ori deriv., $x_0 \in I \Rightarrow \forall x, x_0 \in I$,

$\exists\, \xi \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0))$ a.î. $f(x) = T_n(x) + f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

- $x_0 = 0 \Rightarrow$ **Formula lui MacLaurin**

$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$

PUNCTE DE EXTREM

(T) $I = \mathring{I} \subseteq \mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$, de n ori deriv, $x_0 \in I$ a.î.

$f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) = 0$
...
$f^{(n)}(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ n par $\Rightarrow x_0$ pct. de extrem local

n impar $\Rightarrow x_0$ nu e pct de extrem local

$f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 pct. minim local

$f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 pct. maxim local

- $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de 2 ori difer. în $x_0 \in \Delta \Rightarrow f$ deriv. pe o vecinătate a lui x_0 și f' difer. în x_0

- $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de n ori difer. în $x_0 \in \Delta \Rightarrow$ diferențială de ordin n al funcției f în $x_0 \Rightarrow f$ e deriv de $n-1$ ori într-o vecinătate a lui x_0 și derivata $f^{(n-1)}$ e difer. în x_0.

$d^n f(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)\, h^n$