Alg. Liniară

12.03.2024

Curs 3

Spații vectoriale - continuare

- Fie V un sp. vect. cu $V_1, V_2 \subset V$ subspații vect. ale lui V. Atunci:

1) $V_1 \cap V_2$ este subspațiu vect al lui V

2) $V_1 + V_2 = \{ x+y \mid x \in V_1, y \in V_2 \}$ subspațiu al lui V

- Dem: 1) $x, y \in V_1 \cap V_2$; $\alpha, \beta \in K$

$x, y \in V_2 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V_i, i = 1,2 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V_1 \cap V_2$

2) Fie $v_1, v_2 \in V_1 + V_2$ $\exists\ x_1, x_2 \in V_1$ $y_1, y_2 \in V_2$ a.î.

$v_1 = x_1 + y_1$

$v_2 = x_2 + y_2$

$\alpha, \beta \in K$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) = \underbrace{\underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)}_{V_1} + \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}_{V_2}}_{\in V_1 + V_2}$$

- Obs: În general $V_1 \cup V_2$ nu este subsp. al lui V

$V_1 = \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$

$V_2 = \{ (0,y) \mid y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$

$V_1 \cup V_2$ nu este subsp. al lui $\mathbb{R}^2$

Fie V un K-sp. vect și V_1, V_2 subsp. vect în V a.î. $V = V_1 + V_2$

1) $V_1 \cap V_2 = \{ 0_V \}$

2) $\forall x \in V, \exists\ x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$ a.î. $x = x_1 + x_2$

- Dem: 1) ⇒ 2) Fie $x \in V$. Pp. că $\exists\, x_1, y_1 \in V_1$; $x_2, y_2 \in V_2$

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow \underbrace{\underset{\substack{\Downarrow \\ V_1}}{x_1 - y_1} = \underset{\substack{\Downarrow \\ V_2}}{y_2 - x_2}}_{V_1 \cap V_2 = \{0_V\}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

2) ⇒ 1) $x \in V_1 \cap V_2$; $x \in V_1$ și $(-x) \in V_2$

$$0_V = x + (-x) = 0_V + 0_V \Rightarrow x = 0_V$$

- Fie V un K-sp vect și $V_1, V_2 \subset V$ subsp. vect.
Spunem că V este suma directă a sp. V_1 și V_2 dacă $V = V_1 + V_2$ și $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$
$\Leftrightarrow \forall\, x \in V$, $\exists\, x_1 \in V_1$ și $x_2 \in V_2$ a.î. $x = x_1 + x_2$
Scriem $V = V_1 \oplus V_2$

- Fie V un K-sp. vect. Spunem că un vector $v \in V$ este combinație liniară a vect $v_1, v_2, \dots v_m$ dacă $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha \in K$ a.î.
$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$
$\langle v_1, v_2, \dots v_m \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m \}$ - mulț. tuturor comb. liniare ale vect. $v_1, v_2 \dots v_m$

- Dacă $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$ atunci notăm $\langle v_1, v_2, \dots v_m \rangle = \langle \mathcal{S} \rangle$

- Dacă $\mathcal{S} \subset V$ este mulțime oarecare (nu neapărat finită), atunci:
$\langle \mathcal{S} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \;\middle|\; v_i \in \mathcal{S}_1, \alpha_i \in K, \forall\, i = 1, 2, \dots m \right\}$

- Fie V un K-sp vect și $\mathcal{S} \subset V$. Atunci $\langle \mathcal{S} \rangle$ este un subsp. vect. al lui V. Mai mult $\langle \mathcal{S} \rangle$ este cel mai mic subsp. al lui V care-l conține pe $\mathcal{S}$.

- $\langle \mathcal{S} \rangle$ = subsp. generat de $\mathcal{S}$

- $<\mathcal{S}> = \bigcap\limits_{\substack{W \subset V \text{ subsp} \\ S \subset W}} W$

- Exemplu: $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$

  $<e_1, e_2> = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

- Fie K- sp. vect. și $\mathcal{S} \subset V$. Spunem că $\mathcal{S}$ este un sistem de generatori pt. V dacă $<\mathcal{S}> = V$

- Obs: Dacă $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots v_m\} \subset V$. Atunci:

  $\mathcal{S}$ sist. de generatori pt. $V \Leftrightarrow \forall v \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \in V$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$

- Spunem că sp. vect. V este finit generat dacă $\exists v_1, v_2, \dots v_m \in V$ a.î. $V = <v_1, v_2, \dots v_m>$

  Exemplu: $\mathbb{R}[X]$ nu e finit generat

  $\mathbb{R}[X] = <1, x, x^2, \dots x^m, \dots>$

- Exemplu: 1) $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$

  K^m $\quad (x_1, x_2, \dots x_m) = x_1 \underbrace{(1,0,0,\dots 0)}_{e_1} + x_2 \underbrace{(0,1,0\dots 0)}_{e_2} + \dots$

  $\dots + x_m \underbrace{(0,0,\dots 1)}_{e_m}$

  $K^m = <e_1, e_2, \dots e_m>$

  2) $M_2(K)$, $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{12}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{21}} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{22}}$$

  $M_2(K) = <e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}>$

- Fie un K-sp. vect $= V$ și $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, v \dots v_m\} \subset V$

1) Spunem că vectorii $v_1, v_2, \dots v_m$ sunt liniar independenți sau că $\mathcal{S}$ = sist. liniar independent dacă din faptul că $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V$, unde $\alpha_1, \dots \alpha_m \in K$ rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

2) Spunem că $v_1, v_2, \dots v_m$ sunt liniari dependenți sau că $\mathcal{S}$ = sist. liniar dependent dacă $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \in K$ nu toți ~~nuli~~ nuli a.î. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V$

- Obs: $\mathcal{S}$ = sist. liniar dependent dacă $\mathcal{S}$ nu este sist. lin. indep.

- Obs: $V = K$-sp. vect.
  1) $\mathcal{S} = \{0_V\}$ sist liniar dependent
  2) $\mathcal{S} = \{v\}$ sist. liniar. independent $\Leftrightarrow v \neq 0_V$
     $\alpha v = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $v = 0_V$
  3) Dacă $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq 0_V$, $v_2 \neq 0_V$. v_1, v_2 liniar dep. $\Leftrightarrow v_1, v_2$ sunt proporționali
     v_1, v_2 lin. dep. $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2$ nu toți nuli a.î.
     $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V$; $v_1 = (-\alpha_1^{-1}\alpha_2) v_2$

- Fie un K-sp. vect. $= V$. O submulț. $S \subset V$ (poate fi infinită) se numește liniar indep. dacă orice submulț. finită a ei este un sist. liniar. indep.

- Fie V un K-sp. vect și $S = \{v_1, v_2, \dots v_m\} \subset V$

1) Dacă $\mathcal{S}$ = sist. lin. indep. $\Rightarrow v \neq 0_V$, $\forall v \in \mathcal{S}$

2) Dacă $\mathcal{S}$ = sist. lin indep $\Rightarrow \forall\ \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \neq 0 \Rightarrow \mathcal{S}'$ = sist. lin. indep.

3) $\mathcal{S}$ = sist. lin. dependent $\Rightarrow \forall \mathcal{S}' \subset V$ cu $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, $\mathcal{S}'$ = sist. l. dep.

• <u>Exemplu</u>: 1) K^m, $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, \dots e_m\}$ sist. lin. indep.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m = 0_{K^m} \\ \quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m) \quad\quad\quad (0, 0, 0, \dots 0) \end{array}\right| \Rightarrow \alpha_i = 0, \ \forall i = \overline{1,m}$$

2) $M_2(K)$ $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ sist. lin. indep.

3) $\mathbb{R}(K)$ $\{1, X, X^2 \dots X^m, \dots\}$ —— " ——

4) $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{S} = \{v_1 = (1,1) \ ; v_2 = (1,-1)\}$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (1,-1) = (0,0) \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}\right| \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{S}$ = sist. lin. indep.

• Fie $V = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Vrem să vedem dacă $\exists \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a.î. ~~$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$~~
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = V$

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = a \\ \alpha_1 - \alpha_2 = b \end{cases}\right| \Rightarrow \alpha_1 = \frac{a+b}{2}, \ \alpha_2 = \frac{a-b}{2} \Rightarrow V = \frac{a+b}{2} v_1 + \frac{a-b}{2} v_2$$

$\mathcal{S}$ = sist de generatori

• Fie V = K-sp. vect. Spunem că $B \subset V$ bază a lui V dacă
1) B = sist. lin indep
2) B = sist. de generatori

• <u>Exemplu</u>: 1) K^m $\{e_1, e_2, \dots e_m\}$ bază

2) $M_{m,m}(K)$ $\{e_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le m\}$

3) $\mathbb{R}_{\le m}[X] = \{1, X, \dots X^m\}$

Arătați că $\{1; 1+X; 1+X+X^2; \dots; 1+X+X^2+\dots X^m\}$ este bază în $\mathbb{R}_{\le m}[X]$

T Teorema schimbului

Fie V = K-sp. vect. Fie $\mathcal{Y} = \{u_1, u_2 \dots u_s\} \subset V$ un sist. lin indep și

fie $\mathcal{Y}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$ sist. de gen.

1) $s \leq m$

2) după o eventuală reindexare a elem. lui $\mathcal{Y}'$

$\mathcal{Y}'' = \{u_1, u_2, \dots u_s, v_{s+1}, \dots v_m\}$

T Orice sp. vect. admite o bază.