Algoritmi avansaţi - Seminar 7 (săpt. 13 şi 14)

Mihai-Sorin Stupariu

1. *Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ din $\mathbb{R}^2$ astfel ca diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}$ să conţină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ să conţină exact cinci semidrepte. Justificaţi alegerea făcută.*

2. *a) Fie o mulţime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalităţile*

$$n_v \leq 2n - 5, \qquad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei şi n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi $\mathcal{D}$ asociată unei mulţimi cu cinci puncte din $\mathbb{R}^2$ ştiind că $\mathcal{D}$ are exact cinci semidrepte? Analizaţi toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5$)? Justificaţi!

3. *Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de α, numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulţimii $\{O, A, B, C, D\}$.*

4. *(i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeţi două drepte distincte d, g care trec prin A, determinaţi dualele A^*, d^*, g^* şi verificaţi că A^* este dreapta determinată de punctele d^* şi g^*.*

(ii) Determinaţi duala următoarei configuraţii: Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct M. Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M şi se consideră dreapta determinată de cele două puncte. *Desenaţi ambele configuraţii. Completaţi configuraţia iniţială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obţineţi o configuraţie autoduală (i.e. configuraţia duală să aibă aceleaşi elemente geometrice şi aceleaşi incidenţe ca cea iniţială).*

5. *a) Fie semiplanele $H : x + y - 3 \leq 0$ şi $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. Daţi exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecţia $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.*

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuaţiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \qquad H_2 : y - 5 \leq 0; \qquad H_3 : -x \leq 0; \qquad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de parametrul a, natura intersecţiei $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

6. *Scrieţi inecuaţiile semiplanelor corespunzătoare şi studiaţi intersecţia acestora, dacă normalele exterioare ale feţelor standard sunt coliniare cu vectorii*

$$(0, 1, -1),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, -1),\ (0, -1, 0),\ (0, -1, -1).$$

7. ***(Suplimentar)*** *Demonstraţi că arborele parţial de cost minim al lui $\mathcal{P}$ este un subgraf al triangulării Delaunay.*