IX

K. Teleman

M. Florescu
C. Rădulescu
D. Moraru
E. Stătescu

Matematică

manual pentru clasa a IX-a

Geometrie și trigonometrie

Editura didactică și pedagogică,
București, 1980

K. Teleman

M. Florescu
D. Moraru

C. Rădulescu
E. Stătescu

IX

Matematică

manual pentru clasa a IX-a

Geometrie și trigonometrie

Editura didactică și pedagogică, București manualul a fost revizuit pe baza programei şcolare aprobate de Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului cu nr. 39490/1978.

Referenţi: prof. univ. CABIRIA ANDREIAN
prof. univ. ION CUCULESCU
dr. ALEXANDRU BREZULEANU
dr. HOREA BANEA

Indicaţii generale

S-a căutat ca obiecte diferite să fie notate diferit, pentru a se evita confuzii. Astfel se face deosebire, în formulări şi prin notaţii, între dreapta definită de două puncte, între segmentele închis şi deschis avînd aceste puncte ca extremităţi şi între distanţa dintre aceleaşi puncte (care este egală prin definiţie cu lungimea segmentelor menţionate).

Printr-o formulare de tipul: „Fie A, B două puncte..." subînţelegem că punctele A şi B sînt distincte (deoarece altfel nu am avea *două* puncte). Uneori, cînd vrem să subliniem faptul că o anumită formulare are sens numai dacă punctele A, B sînt distincte, folosim şi adjectivul „distincte".

Elevii sînt îndemnaţi să reţină axiomele, teoremele şi formulele încadrate în chenare, după ce au înţeles bine sensul acestora. Se va acorda o atenţie deosebită definiţiilor, care trebuie de asemenea să fie bine însuşite.

Se recomandă ca elevii să înveţe corect demonstraţiile teoremelor cuprinse în manual. Menţionăm că nu toate proprietăţile demonstrate au fost intitulate teoreme.

Unele demonstraţii bazate pe raţionamente logice pot fi înlocuite, din motive metodologice, prin demonstraţii practice. Acestea se vor face prin desene sau modele îngrijit executate. Se recomandă ca demonstraţiile practice să însoţească şi unele demonstraţii logice.

Recomandăm ca elevii să citească un număr cît mai mare de paragrafe din manual, pe baza indicaţiilor date de tovarăşii profesori. Verificarea şi consolidarea cunoştinţelor însuşite prin lectura manualului se va face prin rezolvări de exerciţii şi dialog.

Redactor: prof. EUGENIA PANTELIMON
Tehnoredactor: ILINCA PROSAN
Grafician copertă: N. SÎRBU
Desenator: C. HĂLCESCU

Introducere

Primele cercetări de geometrie, consemnate în documente, datează de patru mii de ani şi erau destinate măsurătorilor de teren, construcţiilor şi calculelor astronomice.

Una din primele cărţi de geometrie, rămasă din acea perioadă, este semnată de matematicianul egiptean Ahmes. Cartea tratează despre dreptunghiuri, triunghiuri isoscele, trapeze isoscele şi unghiuri. *Ahmes* a considerat că aria unui cerc de rază R poate fi aproximată prin aria unui pătrat de latură $\frac{16\,R}{9}$, ceea ce conduce la o aproximare a numărului π egală cu 3,160...

Matematicienii egipteni ştiau că un triunghi cu laturile de 3, 4 şi 5 unităţi este dreptunghic şi foloseau acest triunghi pentru a construi drepte perpendiculare şi, în particular, pentru fixarea direcţiei Est-Vest.

Rezultatele cu caracter experimental ale egiptenilor au fost preluate de matematicienii greci, care au elaborat primele teorii matematice bazate pe demonstraţii.

Astfel *Thales din Milet* (640 î.e.n.—548 î.e.n.) a fost unul dintre primii matematicieni greci care au făcut cunoscută matematica egipteană, lărgind şi adîncind cuceririle acesteia.

Pitagora (580 î.e.n.—500 î.e.n.) a întemeiat o şcoală celebră la Croton. În cadrul acestei şcoli, au fost puse bazele matematicii abstracte, care au rămas valabile pînă astăzi. Şcoala lui Pitagora a arătat necesitatea demonstraţiilor. Tot şcoala lui Pitagora a rezolvat problema împărţirii unui segment la medie şi extremă raţie (diviziunea de aur). Problema revine la a găsi un punct C pe segmentul $|AB|$, astfel ca $\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|AC|}$. Rezolvarea problemei a permis calcularea lungimii laturii unui pentagon regulat înscris într-un cerc de rază R. A se vedea exerciţiul 2, p. 64.

Unul din continuatorii şcolii lui Pitagora, *Aristarc* (310 î.e.n.—230 î.e.n.) a formulat concepţia heliocentrică privind sistemul nostru solar.

După anul 500 î.e.n., centrul cercetărilor matematice greceşti a fost Atena.

Eudoxus şi Teetet, contemporani cu *Platon*, au pus bazele teoriei mărimilor şi a rapoartelor, deosebind mărimile comensurabile de cele incomensurabile, plecînd de la raportul dintre o catetă şi ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel.

Platon (428 î.e.n.—348 î.e.n.) a avut numeroşi elevi şi a înfiinţat o Academie. Unul din elevii săi, *Aristotel* (384 î.e.n.—322 î.e.n.) a pus bazele logicii. La Academia lui Platon s-a introdus necesitatea *diorismului*, adică a cercetării condiţiilor, în care o anumită problemă admite soluţii. În acest fel, au fost eliminate generalizările lipsite de sens.

Epoca de aur a geometriei antice este perioada în care au trăit *Euclid, Arhimede* şi *Apollonius*.

Euclid (300 î.e.n.) s-a format la Atena, la şcoala înfiinţată de Platon. El este foarte des citat şi astăzi, datorită postulatului care-i poartă numele.

Euclid a întemeiat o şcoală în Alexandria şi este celebru prin *Elementele* sale, constînd din 13 cărţi, ce conţin rezultate de geometrie şi aritmetică. La începutul Elementelor sînt date definiţiile, axiomele şi postulatele. Scopul lucrării este de a ordona şi demonstra teoremele descoperite de predecesorii săi. Aici a fost iniţiată tradiţia de a indica sfîrşitul unei demonstraţii prin cuvintele: *ceea ce era de demonstrat.*

Prima carte din Elementele lui Euclid tratează despre congruenţa triunghiurilor, linii paralele, paralelograme, egalitatea ariilor, terminîndu-se cu teorema lui Pitagora.

A doua carte se referă la descompunerea unui pătrat în sume de pătrate şi dreptunghiuri.

În cartea a treia se dau proprietăţile legate de cerc. În cartea a patra se tratează despre poligoane înscrise şi circumscrise unui cerc, despre poligoane regulate şi în particular, despre pentagonul regulat. Cartea a cincea se referă la proporţii şi dezvoltă teoria generală a mărimilor, după Eudoxus.

Cărţile VI, XI, XIII se referă la probleme de geometrie în spaţiu.

Arhimede (287 î.e.n.—212 î.e.n.) şi *Apollonius* din *Perg* (262—200 î.e.n.) s-au format la şcoala lui Euclid.

Spre deosebire de predecesorii săi, Arhimede a fost preocupat de aplicaţiile practice ale geometriei. Lui i se datoreşte obţinerea unei bune aproximări a numărului π. Considerînd lungimea unui cerc ca limită a perimetrelor poligoanelor regulate înscrise şi circumscrise acelui cerc, a obţinut pentru raportul π dintre lungimea cercului şi diametru inegalităţile:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Apollonius a lăsat un tratat important privind teoria conicelor (elipse, hiperbole şi parabole).

După campaniile lui Alexandru cel Mare, grecii au luat cunoştinţă de descoperirile matematicienilor chaldeeni din domeniul Astronomiei. *Hypsikles* (130 î.e.n.) a utilizat sistemul sexagesimal de măsurare a unghiurilor.

Menelaus, care a trăit în jurul anului 100 e.n., a elaborat o trigonometrie sferică extinzînd la triunghiuri sferice teoremele de congruenţă ale triunghiurilor din plan. Este celebru prin rezultatele sale asupra transversalelor într-un triunghi.

Claudius Ptolomeu (140 e.n.) a introdus împărţirea gradelor sexagesimale în minute şi secunde.

Ptolomeu a dat pentru π o aproximare mai bună decît Arhimede, anume

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3\,600} \approx 3{,}141666...$$

De asemenea, el a întocmit table pentru calculul corzilor ce subîntind arce de la $1/2°-90°$ şi a dezvoltat un model pentru descrierea mişcării planetelor din sistemul nostru solar. În acest model, numit sistemul geocentric, planetele se mişcă pe cercuri mobile, ale căror centre descriu cercuri cu centrul în centrul Pămîntului. Sistemul geocentric a fost înlocuit, 14 secole mai tîrziu, prin cel heliocentric, de către Copernic.

Pappus din Alexandria (300 e.n.) a introdus rapoartele anarmonice, patrulaterele complete şi a formulat unele probleme de loc geometric, pe care le-a rezolvat mai tîrziu Descartes.

O contribuţie importantă la dezvoltarea matematicii aplicative au avut-o *matematicienii indieni*. Astfel lor li se datoreşte introducerea funcţiei sinus, care asociază unui arc de cerc jumătate din coarda subîntinsă de dublul arcului. Indienii au descoperit metode ingenioase de calcul.

Matematica greacă şi indiană a fost preluată, începînd din anul 760, *de arabi*, odată cu întemeierea califatului *din Bagdad*. Astfel arabii au tradus un tratat de astronomie indiană, datînd din sec. 5 e.n., Elementele lui Euclid şi Almagestul — opera de bază a lui Ptolomeu.

Muhammed ibn Musa Alchwarizmi a scris, în jurul anului 820, prima carte de algebră.

Albattami (850—926) a completat tablele lui Ptolomeu şi a introdus funcţiile tg şi ctg. A descoperit teorema sinusului într-un triunghi şi a demonstrat formula $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$.

Abul Wafa (940—998) a dezvoltat cercetările lui Pappus relative la construcţii geometrice. Ideile lui Wafa au fost utilizate şi extinse de *Leonardo da Vinci*, *Tartaglia* (1501—1557) şi în Germania de *Albrecht Dürer*.

Odată cu înfiinţarea universităţilor din Europa la Pisa, Paris, Praga (1348), Viena (1365), Heidelberg (1386), Köln (1388), Erfurt (1398), pe continentul nostru au început să fie elaborate numeroase lucrări de matematici superioare. În paralel cu cristalizarea noţiunilor de număr şi elaborarea unor tehnici de calcul, au fost reconsiderate şi lărgite cunoştinţele geometrice.

François Viète (1540—1603) a considerat probleme de construcţii geometrice, care nu se pot rezolva cu ajutorul riglei şi a compasului, deci care corespund la ecuaţii de grad mai mare decît 2. El a obţinut teorema lui Pitagora generalizată şi lui i se datoreşte principiul dualităţii în geometrie, care a avut consecinţe fundamentale pentru dezvoltarea matematicii moderne.

Nicolaus Copernic (1473—1543) începe celebra sa carte *„De revolutionibus orbium coelestium"*, în care fundamentează modelul heliocentric, cu o expunere a trigonometriei.

Girard Desargues (1598—1662) este fondatorul geometriei descriptive şi al geometriei proiective. A considerat dreptele paralele ca drepte concurente la infinit şi a dezvoltat proprietăţile birapoartelor armonice. Deşi a urmărit atît probleme practice cît şi teoretice ideile lui au rămas mult timp izolate, fiind puse în umbră de apariţia geometriei analitice a lui Descartes.

René Descartes (Cartesius, 1596—1650) a creat metoda geometriei analitice în lucrarea *„Géometrie"* apărută în 1637. A mai lăsat lucrări de filozofie, fizică şi matematică.

Descartes a reluat o metodă a lui Apollonius, care definea punctele unei elipse arătînd că ordonata unui punct de pe curbă depinde de abscisa acelui punct. Descartes a utilizat formalismul algebric. El folosea pentru abscisa x denumirea de *segment*, iar ordonata y o numea *aplicata prin ordine*. Descartes a arătat că o curbă este definită de o ecuaţie, care leagă între ele mărimile x, y. Denumirile de abscisă şi ordonată au fost folosite încă de Apollonius. Termenul de *coordonată* a fost folosit prima oară de *Leibniz* în 1692.

Descartes a aplicat metoda coordonatelor la problemele de loc geometric puse de *Pappus* şi a studiat diferite curbe plane, cum ar fi parabola, cicloida, foliumul lui Descartes, spirala logaritmică etc.

Blaise Pascal (1623—1662), unul din creatorii calculului integral, a aprofundat cercetările lui Descartes, cu ajutorul cărora a obţinut teorema care-i poartă numele (teorema hexagonului înscris într-o conică).

Giovanni Ceva a publicat în anul 1678 lucrarea „De lineis rectis".

Wilhelm Leibniz (1646—1716) a introdus termenul de *funcţie.*

Robert Simson (1687—1768) şi *Matthew Stewart* (1717—1785) au continuat cercetările lui Ceva asupra transversalelor.

L. Euler (1707—1783) are lucrări privind toate domeniile matematicii. A elaborat o teorie a mişcării planetelor şi cometelor.

D. Hilbert (1862—1943) are de asemenea cercetări asupra tuturor domeniilor matematicii. A elaborat în cartea „Grundlagen der Geometrie" prima axiomatizare a geometriei euclidiene, conformă cu exigenţele ştiinţei moderne.

Geometria euclidiană este astăzi un domeniu încheiat, atenția matematicienilor fiind acuma îndreptată spre alte geometrii, care ar putea fi utilizate pentru o mai bună înțelegere a proprietăților spațiului în care trăim, ținînd seama de cele mai noi descoperiri ale științei.

La noi în țară, un rol de seamă a jucat publicarea de către *Gh. Lazăr* a primei cărți de trigonometrie. Începînd de la sfîrșitul secolului trecut, s-au remarcat matematicienii de prestigiu *Spiru Haret*, *Gh. Țițeica* și *D. Pompeiu*, care au elaborat lucrări originale de un înalt nivel științific, în diferite domenii ale matematicii, între care și geometria. Acestora trebuie să adăugăm numele lui *Traian Lalescu*, care a adus de asemenea o contribuție importantă la dezvoltarea științei mondiale și care a contribuit la întemeierea unei școli românești de geometrie.

Gh. Țițeica (1873—1939) este renumit pentru cercetările sale în domeniul geometriei diferențiale, lăsînd lucrări privind anumite clase de suprafețe, care-i poartă numele, și de asemenea asupra unor figuri geometrice mai complicate, numite congruențe și rețele în spații cu mai multe dimensiuni. Țițeica s-a ocupat de geometria elementară, lăsînd o culegere apreciată de exerciții de geometrie sintetică.

D. Pompeiu (1873—1954) a publicat lucrări importante de analiză matematică și numeroase note de matematici elementare. Teorema sa, potrivit căreia segmentele care unesc vîrfurile unui triunghi echilateral cu un punct din planul acelui triunghi sînt congruente cu laturile unui triunghi eventual degenerat, a dat naștere la o serie de articole remarcabile din domeniul geometriei elementare și analitice.

Dan Barbilian (1895—1961) a fost un elev al lui Gh. Țițeica, de la care a preluat o gîndire geometrică caracterizată prin profunzime și eleganță. La aceste calități el a adăugat un spirit axiomatic, care l-a îndreptat spre fundamentele matematicii. A lăsat lucrări importante de geometrie superioară, de algebră și de teoria numerelor. Cursurile sale de geometrie axiomatică și de algebră modernă au avut un rol de seamă în formarea unei școli matematice temeinice în țara noastră.

Traian Lalescu (1881—1929) este renumit pentru o monografie asupra ecuațiilor integrale, citată și astăzi, deși a fost publicată prima dată în anul 1911. El a scris un curs magistral de geometrie analitică, o monografie asupra geometriei triunghiului și o frumoasă culegere de probleme de geometrie descriptivă.

Geometria se dezvoltă astăzi, în țara noastră, la nivelul științei mondiale.

Un merit deosebit revine regretatului profesor *Gh. Vrănceanu* (1900—1979), care a lăsat o operă științifică de mare valoare, dedicată geometriei diferențiale moderne. Această operă se referă la teoria spațiilor neolonome, la teoria grupurilor de transformări și la teoria relativității. Cursul său de geometrie analitică, proiectivă și diferențială și tratatul de geometrie diferențială au contribuit la formarea unui mare număr de matematicieni români. Gh. Vrănceanu a fost preocupat în mod deosebit de problemele învățămîntului nostru, insistînd asupra necesității elaborării unor manuale accesibile celor mai mulți elevi.

Generațiile viitoare au datoria să cunoască și să dezvolte realizările matematicienilor români.

Notații folosite

Dreapta ce trece prin punctele A și B $(A \neq B) : AB$ sau BA.

Triunghiul cu vîrfurile A, B, $C : ABC$

Punctul A aparține dreptei $d : A \in d$.

Punctul A este intersecția dreptelor d, d' $(d \neq d')$: $\{A\} = d \cap d'$.

Segmentul deschis de extremitățile A, B $(A \neq B) : |AB| = |BA|$.

Segmentul închis de extremități A, $B (A \neq B) : [AB] = [BA]$.

Semidreapta limitată de punctul A și conținînd punctul $B : |AB$.

Semiplanul limitat de dreapta d și conținînd punctul $A : |dA$.

Semispațiul limitat de planul p și conținînd punctul $A : |pA$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele h, k: $\widehat{hk} = \widehat{kh}$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele $|AB$, $|AC$: $\widehat{BAC}$ sau $\widehat{CAB}$.

Unghiul diedru avînd ca fețe semiplanele u, v: $\widehat{uv}$ sau $\widehat{vu}$.

Unghiul triedru format din semidreptele a, b, c: $\widehat{abc}$.

Segmentul $|AB|$ este congruent cu segmentul $|CD|$: $|AB| \equiv |CD|$.

Unghiul $\widehat{hk}$ este congruent cu unghiul $\widehat{rs} : \widehat{hk} \equiv \widehat{rs}$.

Triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $A'B'C'$: $ABC \equiv A'B'C'$.

Figura F este congruentă cu figura $F' : F \equiv F'$.

Unghiurile triunghiului ABC : $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$.
Segmentul etalon: m.

Lungimea segmentelor $|AB|$, $[AB]$: $\overline{AB} = \overline{BA}$ (dacă etalonul este fixat).
Distanța dintre punctele A, B : $d(A, B)$ (dacă etalonul este fixat).

Vectorul legat cu originea A și extremitatea B : $\overrightarrow{AB}$.

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu vectorul $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Norma vectorului $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{v}\|$ $(\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B))$.

Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Produsul vectorial al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{u} \times \vec{v}$.
Locul geometric al punctelor care au proprietățile P, P', P'', ...: $\{M;\ M$ are proprietățile P, P', P'', ...$\}$.

Măsura unghiului $\widehat{hk}$: măs $\widehat{hk}$ (de fiecare dată se va specifica dacă este vorba de măsura în grade sau în radiani).
Cercul de centru O și rază R (într-un plan fixat): $C(O,R)$.
Figurile F, F' coincid: $F = F'$.
Unghiuri drepte: dr.
Dreapta reală: **R**.
Mulțimea numerelor întregi: **Z**.

Capitolul I

Geometrie euclidiană plană
(segmente, semidrepte, unghiuri, poligoane)

Acest capitol cuprinde o serie de rezultate pe care elevii le-au întîlnit în clasele anterioare, dar puse într-o ordine și formulare adesea diferite de cele din manualele precedente. Dintre acestea, unele rezultate sînt intitulate teoreme și ele trebuie reținute. Celelalte propoziții, necesare pentru deducerea teoremelor, dar mai puțin importante, au fost date pentru a asigura construcția logică a materialului, dar nu se recomandă memorarea lor. Lectura lor este necesară, pentru ca elevii să le poată folosi în raționamente. Este indicat ca elevii să se familiarizeze cu aceste proprietăți, fie făcînd demonstrații, fie prin construcții grafice.

1. Proprietățile figurilor plane

Prin figură înțelegem o mulțime de puncte, drepte, segmente, semiplane, semidrepte, cercuri etc. Unele figuri mai simple conțin numai o parte din aceste elemente. Cele mai simple figuri sînt cele formate din cîte un singur punct, după care urmează figurile formate din cîte două puncte, trei puncte ș.a.m.d.

Elementele unei figuri se notează prin litere, eventual marcate prin unul sau două accente.

Proprietățile figurilor geometrice se exprimă prin propoziții formate fiecare din două părți: *ipoteza* și *concluzia*. Ipoteza cuprinde descrierea tipului de figuri la care se referă proprietatea respectivă și anumite particularități care trebuie impuse acestor figuri. Concluzia conține una sau mai multe particularități ale acestor figuri, care se manifestă la orice figură care îndeplinește condițiile exprimate în ipoteză.

Exemplu. Proprietatea „prin două puncte distincte trece o dreaptă unică" se referă la figurile formate din cîte două puncte, care au particularitatea de a fi distincte. Aceasta este ipoteza. Concluzia afirmă că, pentru astfel de figuri, există cîte o singură dreaptă care să le conțină.

Proprietățile mai simple se împart în cinci grupe: proprietăți de incidență, proprietăți de ordonare, proprietăți de congruență, proprietăți de continuitate și proprietăți de paralelism. Proprietățile mai complicate fac să intervină două sau mai multe proprietăți din grupe diferite.

2. Axiomele sau postulatele geometriei euclidiene plane

Euclid definește *punctul* ca o entitate indivizibilă, *linia* ca o lungime fără lărgime, *suprafața* ca entitate avînd lungime și lărgime, iar *solidul* ca entitate avînd lungime, lărgime și grosime. Aceste definiții nu sînt riguros științifice, dar au calitatea de a fixa noțiunile de bază, prin proprietăți intuitive, care permit purtarea unui dialog.

Corpurile solide au caracter mai intuitiv decît punctele sau liniile și suprafețele. Dacă am admite ca date solidele, am putea defini suprafețele ca limite ale solidelor, liniile ca limite ale suprafețelor și punctele ca limite ale liniilor. Liniile drepte sînt linii particulare, anume ele pot fi considerate ca poziții limită ale unor fire foarte bine întinse. Noțiunea de *linie dreaptă*, care apare în *Elementele* lui Euclid, corespunde noțiunii de *segment*.

Euclid a completat definițiile precedente printr-un sistem de 5 propoziții, pe care le-a admis ca adevărate și pe care le-a numit *postulate*:

1. *Între două puncte se poate duce o linie dreaptă.*
2. *Orice linie dreaptă poate fi prelungită nelimitat.*
3. *Se poate descrie un cerc de centru dat și de rază dată.*
4. *Toate unghiurile drepte sînt congruente între ele.*
5. *Dacă o linie dreaptă, care intersectează alte două linii drepte, formează, de o aceeași parte a sa, două unghiuri interne avînd suma mai mică decît două unghiuri drepte, cele două linii menționate se vor intersecta, dacă sînt prelungite, de partea în care suma unghiurilor este mai mică decît două unghiuri drepte.*

În aceste enunțuri apar termenii de prelungire nelimitată, parte a unei drepte, congruență a două unghiuri și cerc. Pentru aceste noțiuni, Euclid a dat explicații intuitive, dar vagi din punct de vedere științific. De exemplu, noțiunea de congruență, la Euclid, se definește prin posibilitatea de a suprapune o figură peste alta, de exemplu un unghi peste alt unghi sau un segment peste alt segment.

Noțiunile fundamentale ale geometriei sînt acelea de *punct*, *dreaptă*, *plan* și *spațiu*, la care se adaugă relațiile de *ordonare* între punctele unei drepte și de *congruență* între două segmente sau între două unghiuri. Aceste noțiuni au caracter intuitiv, ele fiind extrase din experiențe ce au fost efectuate de oameni de-a lungul multor milenii. Prin Spațiu înțelegem Spațiul în care trăim, care se numește uneori Univers sau Cosmos sau Spațiu fizic. Ansamblul științelor Naturii studiază proprietățile acestui Spațiu. Geometria, ca știință a Naturii, urmărește anumite proprietăți ale acestui Spațiu, neglijînd aspectele fizice, chimice, biologice și geologice și are drept obiect de studiu proprietățile corpurilor rigide (nedeformabile), care au forme mai simple. Geometria experimentală studiază proprietățile corpurilor de dimensiuni direct perceptibile și măsurabile cu ajutorul instrumentelor obișnuite (riglă gradată, raportor, goniometru etc.). Geometria experimentală nu studiază

părți ale materiei, care au dimensiuni subatomice sau planetare. Măsurarea mărimilor de acest fel se face în mod indirect, pe baza unor ipoteze fizice sau chimice, și a unei abstractizări a geometriei experimentale, numită *geometria euclidiană* și *definită prin sistemul de axiome dat de Hilbert*. Sistemul de axiome dat de Hilbert va fi predat în clasa a X-a, deoarece se referă la geometria în spațiu.

3. Proprietăți de incidență ale punctelor și dreptelor dintr-un plan

Vom admite, fără demonstrații, următoarele proprietăți:

1. **Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.**
2. **Orice dreaptă conține cel puțin două puncte.**
3. **În orice plan, există trei puncte care nu sînt situate pe o aceeași dreaptă.**

Cu ajutorul proprietăților indicate, putem demonstra că:

Două drepte distincte dintr-un plan au cel mult un punct comun.

Într-adevăr, dacă ultima afirmație n-ar fi adevărată, atunci ar exista două drepte d și d' astfel încît intersecția $d \cap d'$ conține cel puțin două puncte. Dar proprietatea 1 arată că prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. Deci intersecția $d \cap d'$ conține cel mult un punct.

Observație. Metoda folosită în această demonstrație este metoda reducerii la absurd, care constă în a arăta că negarea unei proprietăți, pe care vrem s-o demonstrăm, conduce la o contradicție cu una sau mai multe proprietăți admise sau demonstrate anterior.

Exercițiu

Folosind metoda reducerii la absurd, demonstrați următoarele proprietăți:

a. *Dacă A este un punct al unei drepte d, atunci dreapta d conține cel puțin un punct diferit de A.*

b. *Dacă d este o dreaptă dintr-un plan p, atunci planul p conține cel puțin un punct nesituat pe dreapta d.*

c. *Dacă A și B sînt două puncte distincte dintr-un plan p, atunci planul p conține cel puțin un punct C, astfel ca punctele A, B, C să fie necoliniare.*

d. *Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, atunci dreptele AB, BC, CA sînt distincte două cîte două.*

4. Proprietăți de ordonare

Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, atunci nici unul dintre aceste puncte nu se găsește între celelalte două.

Dacă A, B, C sînt trei puncte distincte coliniare, atunci unul din aceste puncte se va găsi între celelalte două. În figura I.1, punctul B se găsește între A și C, dar C nu se găsește între A și B.

Fig. I.1

Fenomenele de eclipsă sînt legate de situația exprimată prin cuvîntul „între". De exemplu, eclipsele totale de Soare se produc atunci cînd Luna se găsește între Pămînt și Soare, iar eclipsele totale de Lună se produc atunci cînd Pămîntul se găsește între Soare și Lună. Aceste fenomene se produc cu o periodicitate de 18 ani și 11 zile. Cunoașterea acestei perioade, numită de vechii chaldeeni „saros", a avut o mare importanță pentru dezvoltarea științei despre Spațiul cosmic, deci și pentru dezvoltarea geometriei. Thales cunoștea perioada eclipselor totale de Soare și, pe baza acesteia, a putut anticipa eclipsa ce s-a produs în anul 584 î.e.n. și care a căpătat numele de eclipsa lui Thales.

Vom admite fără demonstrații următoarele proprietăți, numite proprietăți de ordonare:

1. **Dacă punctul B se găsește între punctele A și C, atunci punctele A, B, C sînt coliniare și distincte, și B se găsește între C și A** (fig. I.1).

2. **Dacă A, B sînt două puncte distincte, atunci există cel puțin un punct C astfel ca B să se găsească între A și C** (fig. I.1).

3. **Dacă punctul B se găsește între A și C, atunci A nu se găsește între C și B** (fig. I.1).

4. *(axioma lui Pasch).* **Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare și dacă d este o dreaptă situată în același plan cu aceste puncte, astfel încît d trece printr-un punct situat între C și B, dar nu trece prin nici unul din punctele A, B, C și nu trece prin nici un punct situat între A și C, atunci dreapta d trece printr-un punct situat între A și B** (fig. I.2).

5. *Fiind date trei puncte distincte și coliniare A, B, C, astfel încît A nu este între B și C, iar C nu este între A și B, cu siguranță punctul B se va găsi între A și C* (fig. I.1).

6. *Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare și dacă L, M, N sînt trei puncte astfel încît L este între B și C, M este între C și A și N este între A și B, punctele L, M, N nu pot fi coliniare* (fig. I.3).

7. *Fiind date două puncte distincte A și B, există cel puțin un punct M situat între A și B* (fig. I.4).

8. *Dacă A, B, C, D sînt puncte astfel încît B este între A și C și C este între B și D, punctele B, C se vor găsi între A și D* (fig. I.5).

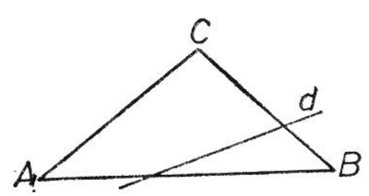

Fig. I.2

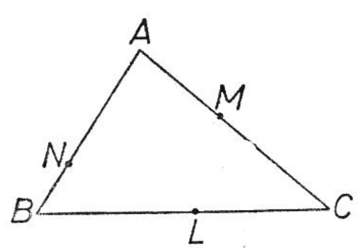

Fig. I.3

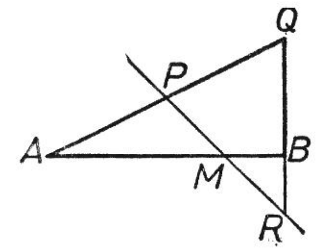

Fig. I.4

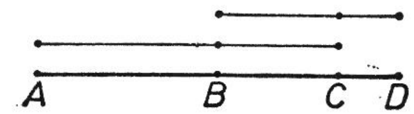

Fig. I.5

9. *Dacă C este între D și A și dacă B este între A și C, atunci B este între A și D, iar C este între B și D* (fig. I.6).

Dacă A și B sînt două puncte distincte, notăm prin $|AB|$ mulțimea punctelor situate între A și B și vom spune că $|AB|$ este *segmentul deschis* limitat de punctele A, B. Avem (fig. I.7):

$$|AB| = |BA|,\quad |AB| \subset AB,\quad A \notin |AB|,\quad B \notin |AB|.$$

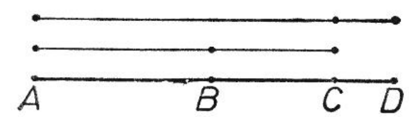

Fig. I.6

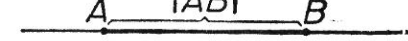

Fig. I.7

Punctelor A, B li se poate asocia și mulțimea $|AB| \cup \{A, B\}$, care va fi notată $[AB]$ și va fi numită *segmentul închis* limitat de punctele A, B. Avem $[AB] \subset AB$, $A \in [AB]$, $B \in [AB]$, $|AB| \subset [AB]$.

Trei puncte necoliniare, luate într-o anumită ordine, definesc un *triunghi*.

Fiind date punctele A, B, C, în ordinea scrisă, necoliniare, triunghiul definit de aceste puncte va fi notat ABC. Punctele A, B, C se numesc *vîrfurile* triunghiului ABC, iar segmentele $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ se numesc *laturile* triunghiului ABC (fig. I.8):

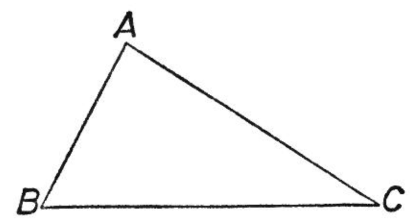

Fig. I.8

Exerciții

1. *Fiind dat un punct A, să se arate că există puncte B, C astfel ca $B \in |AC|$.*

2. *Fie ABC un triunghi și fie punctele $M \in |AB|$, $N \in |AC|$. Să se arate că segmentele $|BN|$, $|CM|$ au un punct comun.*

3. *Ce putem spune despre trei puncte distincte A, B, C, dacă știm că $A \notin |BC|$, $B \notin |CA|$ și $C \notin |AB|$? Dar dacă știm că cele trei puncte sînt coliniare și că $A \notin |BC|$ și $C \notin |AB|$?*

4. *Reformulați axioma lui Pasch, utilizînd noțiunea de triunghi și aceea de latură a unui triunghi.*
(R. Dacă o dreaptă d din planul unui triunghi ABC trece printr-un punct al laturii $|BC|$, dar nu trece prin nici unul din vîrfurile A, B, C și dacă d nu trece prin nici un punct al laturii $|AB|$, atunci dreapta d trece printr-un punct al laturii $|AC|$.)

5. Semidrepte și semiplane

Proprietatea fundamentală 1. Fie O un punct pe o dreaptă d. Există atunci două și numai două mulțimi d' și d'' astfel încît să avem (fig. I.9):

a. $d' \cup d'' = d - \{O\}$.

b. Dacă $A \in d'$, $B \in d'$, $C \in d''$ și $D \in d''$, **atunci**

$O \notin |AB|$, $O \notin |CD|$, $O \in |AC|$.

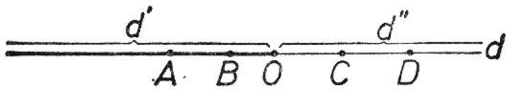

Fig. I.9

Această proprietate se demonstrează plecînd de la observația că dreapta d conține cel puțin un punct P diferit de O și că d mai conține cel puțin un punct Q, astfel încît să avem $O \in |PQ|$.

Să definim atunci mulțimile:

(1) $\quad d' = \{M \in d;\ O \in |QM|\}$, $d'' = \{N \in d;\ O \in |PN|\}$.

În clasa a X-a, se va arăta că mulțimile d' și d'' îndeplinesc condițiile a și b și că d', d'' sînt singurele mulțimi care îndeplinesc aceste condiții.

Definiție. Mulțimile d', d'', care îndeplinesc condițiile a și b din proprietatea fundamentală 1, și care pot fi definite prin formule de forma (1), se numesc semidreptele limitate de punctul O pe dreapta d.

Dacă notăm prin s una din semidreptele d', d'', spunem că O este *originea* semidreptei s, iar d este *suportul* semidreptei s. Două semidrepte, care au același suport și aceeași origine, se numesc *opuse*.

O semidreaptă este complet definită prin originea sa și printr-un punct oarecare aparținînd semidreptei. Dacă semidreapta s are originea O și dacă s conține un punct A, scriem $s = |OA$.

Originea unei semidrepte s nu aparține acelei semidrepte, datorită condiției a. Deci dacă $s = |OA$, atunci $A \neq O$ și $|OA \subset OA$.

Exerciții

1. Fie $s = |OA = |OB$. *Să se arate că* $|OA \subset OA$ *și că dacă* $A \neq B$, *atunci* $|AB| \subset s$.
2. *Dacă* A, B *sînt puncte distincte, atunci* $|AB| = (|AB\rangle \cap (|BA\rangle$ *și* $AB = (|AB\rangle \cup (|BA\rangle$.

Proprietatea fundamentală 2. Fie d o dreaptă într-un plan p. Există atunci două și numai două mulțimi p' și p'' astfel încît să avem (fig. I.10)

a'. $p' \cup p'' = p - d$.

b'. Dacă $A \in p'$, $B \in p'$, $C \in p''$ și $D \in p''$, **atunci**

$|AB| \cap d = \emptyset$, $|CD| \cap d = \emptyset$, $|AC| \cap d \neq \emptyset$.

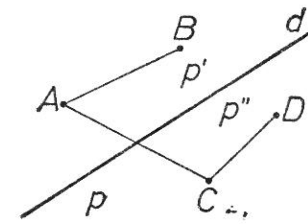

Fig. I.10

Demonstrația se face observînd că există în planul p cel puțin un punct $P \notin d$. Alegînd apoi în mod arbitrar un punct $O \in d$ și apoi un punct Q astfel ca $O \in |PQ|$, vom putea defini mulțimile

(2) $p' = \{M \in p;\ |QM| \cap d \neq \emptyset\}$, $p'' = \{N \in p;\ |PN| \cap d \neq \emptyset\}$.

În manualul de clasa a X-a, se va arăta că aceste mulțimi sînt singurele mulțimi, care verifică condițiile a' și b'.

Definiție. Mulțimile p', p'' care verifică condițiile a' și b' se numesc semiplanele limitate de dreapta d în planul p. Dreapta d se va numi frontieră a fiecăreia din mulțimile p', p''. Vom mai spune că două semiplane, avînd aceeași frontieră și incluse în același plan, sînt opuse.

Pentru a defini un semiplan, este suficient să indicăm frontiera sa și unul din punctele sale. Semiplanul avînd ca frontieră dreapta d și care conține punctul A, va fi notat $|dA$.

Nici un semiplan nu-și conține frontiera.

Exerciții

1. *Fie d, d' două drepte conținute într-un plan p și concurente într-un punct O. Fie p', p'' semiplanele limitate de dreapta d în planul p. Să se arate că mulțimile $d' \cap p'$, $d' \cap p''$ reprezintă semidreptele limitate de punctul O pe dreapta d'.*
2. *Fie d și a două drepte disjuncte situate într-un plan p și fie $A \in a$. Să se arate că $a \subset |dA$.*
3. *Fie semiplanul $S = |dA$ și semidreapta $s = |OA$, unde $O \in d$. Să se arate că $s \subset S$.*
4. *Fie A, B două puncte situate pe o semidreaptă s și într-un semiplan S. Să se arate că $|AB| \subset s$ și $|AB| \subset S$.*

6. Unghiuri

Un *unghi* este o pereche de semidrepte avînd aceeași origine (fig. I.11).

Unghiul format din semidreptele h, k va fi notat $\widehat{hk}$. Originea comună a semidreptelor h, k se numește *vîrful* unghiului $\widehat{hk}$, iar semidreptele h, k se numesc *laturile* acestui unghi.

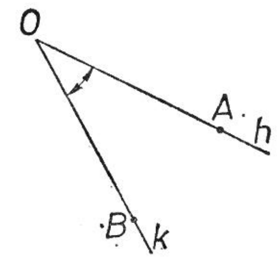

Fig. I.11

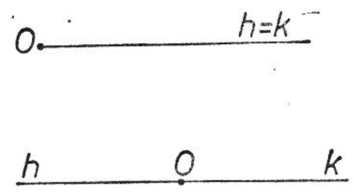

Fig. I.12

Dacă avem punctele $A \in h$ şi $B \in k$, vom mai nota unghiul $\widehat{hk}$ prin $\widehat{AOB}$, unde O este vîrful unghiului $\widehat{hk}$ (fig. I.11).

Dacă $h = k$, spunem că $\widehat{hk}$ este un *unghi nul*, iar dacă h şi k sînt semidrepte opuse, spunem că $\widehat{hk}$ este un *unghi alungit*. (fig. I.12). Un unghi care nu este nici nul, nici alungit, se numeşte *unghi propriu*. Să considerăm un unghi propriu $\widehat{hk}$. Fie a, b suporţii laturilor h şi k ale unghiului $\widehat{hk}$, astfel ca $h \subset a$ şi $k \subset b$. Semidreapta h se găseşte într-un acelaşi semiplan H limitat de dreapta b, iar k se găseşte într-un semiplan K, limitat de dreapta a. Intersecţia $H \cap K$ a celor două semiplane este o mulţime de puncte numită *interiorul unghiului propriu* $\widehat{hk}$. Această mulţime va fi notată Int $\widehat{hk}$ (fig. I.13).

Avem pentru orice unghi, $\widehat{hk} = \widehat{kh}$ şi pentru orice unghi propriu,

$$\text{Int } \widehat{hk} = \text{Int } \widehat{kh}.$$

Două unghiuri proprii care au acelaşi vîrf, o latură comună şi interioarele disjuncte, se numesc unghiuri *adiacente* (fig. I.14).

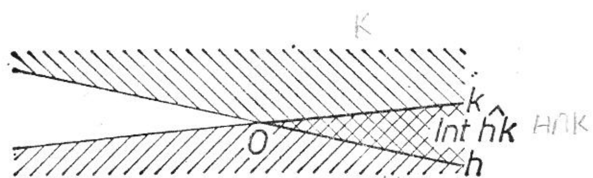

Fig. I.13

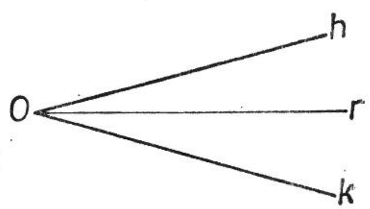

Fig. I.14

Două unghiuri adiacente, care au laturile necomune opuse, se numesc unghiuri *suplementare* (fig. I.15).

Două unghiuri care au acelaşi vîrf şi care au laturile opuse două cîte două, se numesc unghiuri *opuse la vîrf* (fig. I.16).

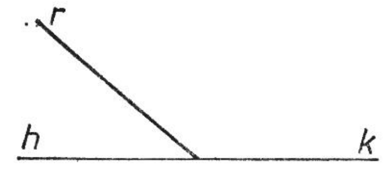

Fig. I.15

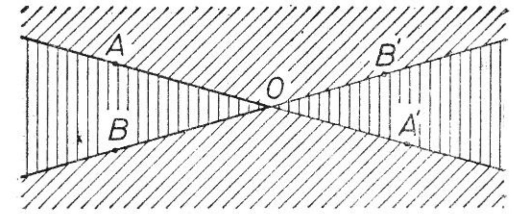

Fig. I.16

Exemple

1. Fie punctele A, B, A', B', O astfel ca $O \in |AA'| \cap |BB'|$. În acest caz, unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOA'}$ sînt suplementare, iar unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ sînt opuse la vîrf (fig. I.16).

2. Fie ABC un triunghi. Unghiurile $\hat{A} = \widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, $\hat{B} = \widehat{ABC} = \widehat{CBA}$ şi $\hat{C} = \widehat{ACB} = \widehat{BCA}$ se numesc *unghiurile triunghiului* ABC, iar suplementele acestor unghiuri se numesc *unghiurile exterioare* ale triunghiului ABC.

3. Intersecţia interioarelor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu intersecţia a trei semiplane, limitate de dreptele AB, BC, CA şi conţinînd vîrfurile C, respectiv A, B. Această intersecţie se numeşte *interiorul* triunghiului ABC şi se notează Int ABC (fig. I.17).

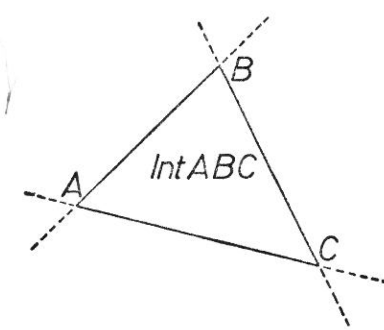

Fig. I.17

Definiţie. Se numeşte mulţime convexă orice mulţime M de puncte, care are următoarea proprietate: dacă A, B sînt două puncte distincte ale mulţimii M, atunci M conţine toate punctele segmentului $|AB|$.

O mulţime formată dintr-un singur punct este convexă, deoarece pentru o astfel de mulţime nu se pune nici o condiţie.

O mulţime formată din două puncte distincte nu este niciodată convexă, deoarece o astfel de mulţime nu conţine nici un punct al segmentului deschis limitat de punctele care o formează. În general, o mulţime finită conţinînd $n > 1$ puncte, nu poate fi convexă.

Planele, dreptele, semidreptele, segmentele deschise sau închise, semiplanele, interiorul unui unghi propriu, interiorul unui triunghi sînt mulţimi convexe. Orice intersecţie de mulţimi convexe este o mulţime convexă.

Exerciţii

1. *Să se arate că două unghiuri opuse la vîrf au un suplement comun.*

2. *Să se arate că interioarele celor patru unghiuri formate de două drepte distincte şi concurente sînt disjuncte două cîte două.*

3. *Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu şi fie punctele $A \in h$, $B \in k$. Să se arate că $|AB| \subset Int\,\widehat{hk}$.*

4. *Fie O un punct pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC şi fie s o semidreaptă cu originea O şi conţinută în interiorul unghiului $\widehat{AOC}$. Să se arate că $s \cap |AC| \neq \emptyset$ şi că $s \cap |AB| = \emptyset$*

5. *Să considerăm un plan p, o dreaptă $d \subset p$ şi un punct $O \in d$. Să se arate că mulţimile $p - d$, $p - \{O\}$, $d - \{O\}$ nu sînt convexe.*

6. *Fie ABC un triunghi în planul p. Să se arate că mulţimile $p - |AB|$, $p -$* Int ABC nu sînt convexe.

7. *Fie O un punct interior triunghiului ABC şi fie d o dreaptă în planul triunghiului ABC, astfel ca $O \in d$. Să se arate că intersecţia $d \cap Int\ ABC$ este un segment.*

7. Proprietăţi de congruenţă

Am arătat că figurile sînt mulţimi de puncte, de segmente, de drepte, de semidrepte, de semiplane, sau de alte mulţimi ce pot fi definite cu ajutorul acestora. De exemplu, un segment este o mulţime de puncte, un unghi este o mulţime formată din două semidrepte; putem considera o mulţime de segmente, care va fi de asemenea o figură, sau o mulţime de unghiuri etc.

Două mulţimi se consideră egale, dacă şi numai dacă ele sînt formate din aceleaşi elemente. Dacă mulţimile A, B sînt egale, se scrie $A = B$. Dacă mulţimile M, N diferă cel puţin printr-un element, deci dacă există $x \in M$ astfel ca $x \notin N$, sau dacă există $y \in N$ astfel ca $y \notin M$, atunci spunem că mulţimile M, N nu sînt egale sau că ele sînt distincte şi scriem $M \neq N$.

În matematica modernă, aproape toate obiectele studiate sînt mulţimi. Prin urmare, dacă vrem să ne încadrăm în matematica modernă, trebuie să folosim cuvîntul egal atunci şi numai atunci cînd ne referim la mulţimi egale, şi să folosim semnul „=" numai în aceste situaţii.

Cărţile mai vechi de geometrie foloseau termenul de egalitate pentru a desemna figuri ce au aceeaşi mărime sau care se pot suprapune una peste cealaltă, fără a deforma vreuna din ele. Astăzi, ne referim la această situaţie, relativă la anumite perechi de figuri, spunînd că figurile sînt *congruente*. Dacă figurile F, F' sînt congruente, scriem

$$F \equiv F'.$$

Două segmente desenate pe o foaie de hîrtie cu ajutorul unei rigle gradate şi avînd fiecare lungimea de 1 cm sînt congruente. Un segment de 1 cm nu este congruent cu nici un segment avînd mai puţin de 1 cm sau mai mult de 1 cm. Două unghiuri de 30° sînt congruente

pentru a explica termenul de congruenţă am dat exemple din geometria experimentală. În geometria abstractă, care nu foloseşte nici rigle, nici raportoare, congruenţa se introduce prin cinci proprietăţi, care o caracterizează şi anume:

1. Fie s o semidreaptă cu originea O şi fie $|AB|$ un segment. Există pe semidreapta s un singur punct M, astfel ca segmentul $|OM|$ să fie congruent cu segmentul $|AB|$ (fig. I.18).

Notaţie. Dacă un segment $|A'B'|$ este congruent cu un segment $|AB|$, se va scrie $|A'B'| \equiv |AB|$.

Definiţie. Se numeşte relaţie de echivalenţă într-o mulţime M orice mulţime $\mathcal{R}$ de perechi de elemente din M astfel încît să fie verificate următoarele proprietăţi:

1) **Dacă x este un element oarecare din mulţimea M, atunci $(x, x) \in \mathcal{R}$.** Această proprietate se exprimă spunînd că orice element al mulţimii M este echivalent cu el însuşi.

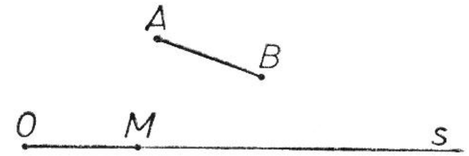

Fig. I.18

Proprietatea 1) este proprietatea de reflexivitate.

2) **Dacă x, y sînt elemente ale mulţimii M astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$, atunci avem şi $(y, x) \in \mathcal{R}$.**

Deci, dacă x este echivalent cu y, atunci şi y este echivalent cu x.

Proprietatea 2) este proprietatea de simetrie.

3) **Dacă x, y, z sînt elemente ale mulţimii M, astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$, şi $(y, x) \in \mathcal{R}$, atunci avem şi $(x, z) \in \mathcal{R}$.**

Deci, dacă x este echivalent cu y şi dacă y este echivalent cu z, atunci x este echivalent cu z.

Proprietatea 3) este proprietatea de tranzitivitate.

Una din cele mai importante proprietăţi ale figurilor în general, şi ale segmentelor în particular, constă în faptul că *relaţia de congruenţă a segmentelor este o relaţie de echivalenţă*.

2. Dacă $|AB|$, $|A'B'|$, $|A''B''|$ sînt trei segmente astfel ca $|AB| \equiv |A'B'|$ şi $|A'B'| \equiv |A''B''|$, atunci avem $|AB| \equiv |AB|$, $|A'B'| \equiv |AB|$ şi $|AB| \equiv |A''B''|$, (fig. I.19).

3. Dacă avem şase puncte A, B, C, A', B', C' astfel ca B' se găseşte între A' şi C', B se găseşte între A şi C şi $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci $|AC| \equiv |A'C'|$ (fig. I.20).

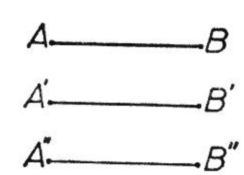

Fig. I.19

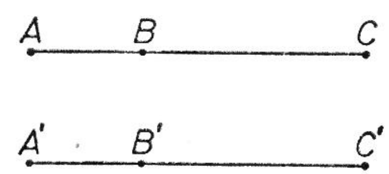

Fig. I.20

4. Fiind date un unghi propriu $\widehat{hk}$ şi o semidreaptă s într-un plan p şi notînd prin p' unul din semiplanele limitate de suportul lui s în planul p, există o singură semidreaptă t în semiplanul p' astfel ca s şi t să formeze un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$. Orice unghi este congruent cu el însuşi.

Dacă $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, atunci $\widehat{h'k'} \equiv \widehat{hk}$.

Notaţie. Pentru a exprima că unghiul $\hat{st}$ este congruent cu unghiul $\widehat{hk}$, vom scrie $\hat{st} \equiv \widehat{hk}$.

5. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ astfel ca $\hat{A} \equiv \widehat{A'}$, $|AB| \equiv |A'B'|$ şi $|AC| \equiv |A'C'|$, avem şi $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$, (fig I. 21).

Proprietatea de congruenţă 1 se numeşte uneori *axioma de purtare congruentă a segmentelor*. Proprietatea de congruenţă 3 se numeşte *axioma de adunare a segmentelor*. Proprietatea 4 se numeşte uneori *axioma de purtare congruentă a unghiurilor*.

Definiţie. **Fie $|AB|$, $|CD|$ două segmente şi fie P, Q, R trei puncte astfel ca punctul Q să se găsească între punctele P, R şi să avem $|AB| \equiv |PQ|$, $|CD| \equiv |QR|$** (fig. I.22).
Se spune atunci că segmentul $|PR|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$ şi $|CD|$ şi se scrie $|PR| \equiv |AB| + |CD|$.

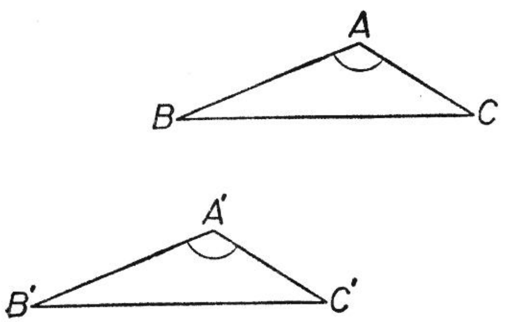

Fig. I.21

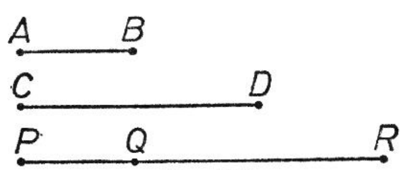

Fig. I.22

Dacă segmentele $|PR|$, $|P'R'|$ reprezintă fiecare suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, atunci $|PR| \equiv |P'R'|$.

Definiţie. **Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ două unghiuri şi fie r, s, t trei semidrepte cu aceeaşi origine, astfel ca $\hat{rt}$ să fie unghi propriu şi s să fie conţinută în interiorul unghiului $\hat{rt}$ şi astfel ca $\hat{rs} \equiv \widehat{hk}$ şi $\hat{st} \equiv \widehat{mn}$. Se spune atunci că unghiul $\hat{rt}$ reprezintă suma unghiurilor $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$** (fig. I.23) **şi se scrie $\hat{rt} \equiv \widehat{hk} + \widehat{mn}$.**

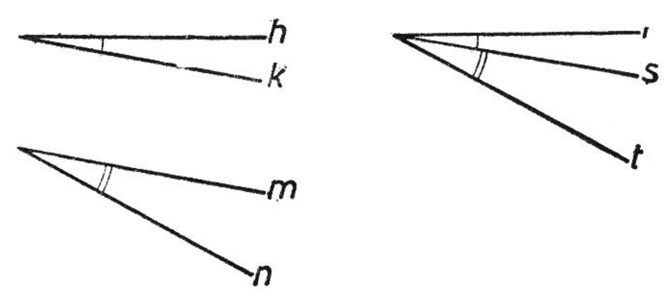

Fig. I.23

Observaţie importantă. Pentru oricare două segmente $|AB|$, $|CD|$ există segmente care reprezintă suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, dar nu orice pereche de unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ admite o sumă. De exemplu, un unghi alungit nu poate fi adunat cu un unghi nenul.

Convenim să spunem că un unghi oarecare $\widehat{hk}$ reprezintă suma unghiului $\widehat{hk}$ cu un unghi nul. Vom mai conveni să spunem că suma a două unghiuri suplementare este un unghi alungit. Dacă unghiul $\widehat{hk}$ reprezintă suma unghiurilor $\widehat{hm}$, $\widehat{mk}$ şi dacă m, m' sînt semidrepte opuse, atunci unghiurile $\widehat{hm'}$, $\widehat{m'k}$ admit o sumă numai dacă $\widehat{hk}$ este alungit.

Următoarele relaţii sînt incompatibile:

$$B \in |AC|,\ C' \in |A'B'|,\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|.$$

Definiţie. **Fie $|AB|$, $|CD|$ două segmente şi fie s o semidreaptă cu originea O. Considerăm punctele P, Q pe semidreapta s, astfel ca $|OP| \equiv |AB|$, $|OQ| = |CD|$** (fig. I.24).
Dacă $P \in |OQ|$, vom spune că segmentul $|AB|$ este mai mic decît segmentul $|CD|$, relativ la semidreapta s, sau că segmentul $|CD|$ este mai mare decît segmentul $|AB|$ relativ la s.

Dacă avem două segmente $|AB|$ şi $|CD|$ şi două semidrepte s, s' şi dacă $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ relativ la s, atunci $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ şi relativ la s'.

Definiţie. **Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, vom spune că $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ sau că $|CD|$ este mai mare decît $|AB|$, şi vom scrie $|AB| < |CD|$ sau $|CD| > |AB|$, dacă $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ relativ la o semidreaptă arbitrară s.**

Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, este adevărată una şi numai una din relaţiile

$$|AB| \equiv |CD|,\ |AB| < |CD|,$$
$$|AB| > |CD|.$$

Fiind date trei segmente $|AB|$, $|CD|$, $|EF|$ astfel ca $|AB| < |CD|$ şi $|CD| < |EF|$, avem $|AB| < |EF|$.

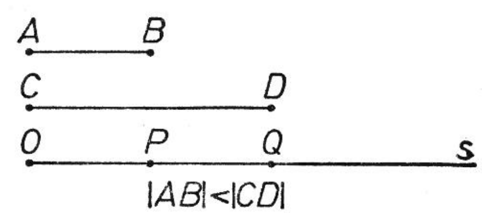

Fig. I.24

Relația de comparare a segmentelor este o relație tranzitivă. Relația $|AB| \lessdot |CD|$ nu este nici reflexivă, nici simetrică.

Să reținem că:

Fie date două segmente $|AB|$, $|CD|$; dacă fixăm o semidreaptă s, cu originea într-un punct O, suma celor două segmente se reprezintă printr-un segment $|OM|$, unde $M \in s$. Două segmente care reprezintă suma a două segmente date sînt congruente între ele.

Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, ele pot fi comparate astfel: alegem o semidreaptă s, cu originea O și luăm punctele $M \in s$, $N \in s$ astfel ca $|OM| \equiv |AB|$, $|ON| \equiv |CD|$. În acest caz, dacă $M \in |ON|$ spunem că $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$. Această regulă de comparare nu depinde de alegerea semidreptei s.

Exerciții

1. *Să se arate că dacă segmentul $|OP|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, atunci $|OP|$ reprezintă și suma segmentelor $|CD|$, $|AB|$ (adunarea segmentelor este comutativă).*

(Indicație. Se construiește suma $|CD| + |AB|$ alegînd ca semidreaptă ajutătoare semidreapta $|PO$.)

2. *Să se arate că dacă segmentul $|OS|$ reprezintă suma*

$$(|AB| + |CD|) + |EF|,$$

atunci $|OS|$ reprezintă și suma

$$|AB| + (|CD| + |EF|)$$

(adunarea segmentelor este asociativă).

3. *Să se arate că dacă segmentul $|AB|$ este mai mic decît segmentul $|CD|$, atunci există un segment $|EF|$ astfel încît $|CD|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$ și $|EF|$.*

4. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca*

$$\hat{A} \equiv \hat{A'},\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|.$$

Să se arate că $\hat{C} \equiv \widehat{C'}$.

8. Teoremele de congruență a două triunghiuri

Definiție. **Se spune că două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt congruente, dacă avem**

$$\hat{A} \equiv \hat{A'}, \hat{B} \equiv \hat{B'}, \hat{C} \equiv \hat{C'},\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,$$
$$|AC| \equiv |A'C'|.$$

În acest caz, notăm: $ABC \equiv A'B'C'$.

Teorema I de congruență. Relațiile

$$\hat{A} \equiv \hat{A'},\ |AB| \equiv |A'B'|,$$
$$|AC| \equiv |A'C'|$$

implică congruența triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ (fig. I.25).

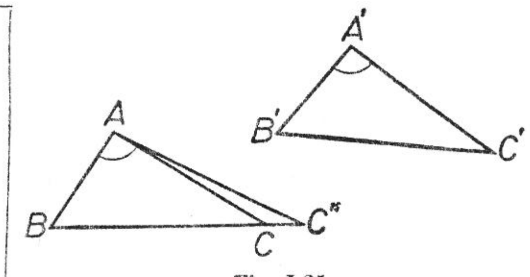

Fig. I.25

Demonstrație. Pe semidreapta $|BC$ se consideră un punct C'' astfel ca $|BC''| \equiv |B'C'|$. Proprietatea 5 de congruență dă $\hat{B} \equiv \hat{B'}$. Aplicînd aceeași proprietate triunghiurilor BAC'', $B'A'C'$ deducem $\widehat{BAC''} = \widehat{B'A'C'}$. Dar $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Din unicitatea purtării congruente a unghiurilor (proprietatea 4) rezultă $|AC'' = |AC$, deci $C'' = C$ și atunci $|BC| \equiv |B'C'|$.

Din proprietatea 5 de congruență deducem apoi $\hat{C} \equiv \hat{C'}$. Deci triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt congruente.

Teorema unghiurilor suplementare. Fie unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ astfel că $\widehat{hk}$ este un suplement al unghiului $\widehat{km}$, $\widehat{h'k'}$ este un suplement al unghiului $\widehat{k'm'}$ și $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$. În aceste condiții, avem $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$.

Demonstrație. Alegem pe semidreptele h, k, m, h', k', m' punctele A respectiv B, C, A', B', C' astfel încît avem $|OA| \equiv |O'A'|$, $|OB| \equiv |O'B'|$, $|OC| \equiv |O'C'|$, unde O și O' sînt originile semidreptelor h respectiv h' (fig. I.26). Din ipoteze rezultă $O \in |AC|$, $O' \in |A'C'|$. Din teorema I de congruență rezultă $|AB| \equiv |A'B'|$, $\hat{A} \equiv \hat{A'}$, iar din proprietatea 3 de congruență deducem că $|AC| \equiv |A'C'|$. Aplicînd teorema I de congruență triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, deducem $|BC| \equiv |B'C'|$ și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$. Apoi din triunghiurile BOC, $B'O'C'$ deducem $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$, deci $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$. Deci am arătat că două unghiuri congruente au suplemente congruente.

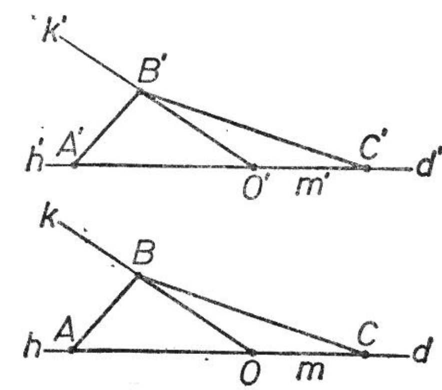

Fig. I.26

Reciproca teoremei unghiurilor suplementare. Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$ două unghiuri suplementare şi fie h', k', m' trei semidrepte cu aceeaşi origine şi astfel că $\widehat{h'k'} \equiv \widehat{hk}$, Int $\widehat{h'k'} \cap$ Int $\widehat{k'm'} = \emptyset$ *şi $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$; atunci semidreptele k', m' sînt în prelungire, deci unghiurile $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ sînt suplementare.*

Demonstraţie. Prin reducere la absurd, folosind teorema unghiurilor suplementare şi proprietatea 4 de congruenţă, care asigură unicitatea purtării congruente a unghiurilor.

Teorema unghiurilor opuse. Dacă avem cinci puncte O, A, A', B, B' astfel ca $O \in |AA'|$ şi $O \in |BB'|$, atunci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$ (fig. 1.27).

Într-adevăr, cele două unghiuri au un suplement comun, anume unghiul $\widehat{AOB'}$. Din ultima teoremă rezultă $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$.

Teorema 1 a triunghiului isoscel. Dacă un triunghi ABC are $|AB| \equiv |AC|$, atunci $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

Demonstraţie. Se aplică teorema 1 de congruenţă triunghiurilor ABC şi ACB şi se ţine seama că $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, deci $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAB}$ (fig. I.28).

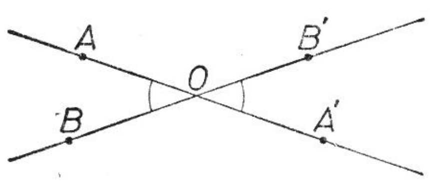

Fig. I.27

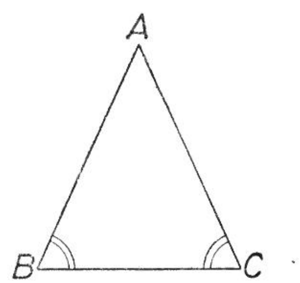

Fig. I.28

Teorema II de congruenţă. Dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ au

$$|BC| \equiv |B'C'|,\ \hat{B} \equiv \hat{B'},\ \hat{C} \equiv \hat{C'},$$

atunci cele două triunghiuri sînt congruente (fig. I.29).

Demonstraţie. Pe semidreapta $|BA$ luăm acel punct A'', pentru care $|BA''| \equiv |B'A'|$. Aplicînd teorema I de congruenţă triunghiurilor $A''BC$, $A'B'C'$ obţinem $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Dar avem şi $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Din pro-

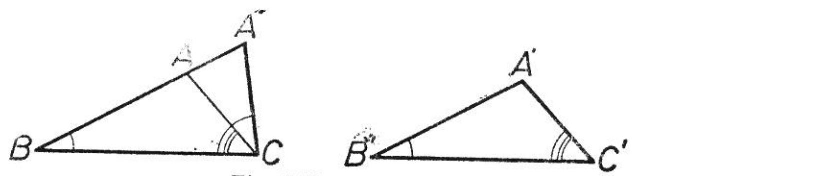

Fig. I.29

prietatea 4 de congruenţă deducem $|CA'' = |CA$, deci avem $A'' = A$ şi $|AB| \equiv |B'A'|$. Putem acum aplica teorema I de congruenţă triunghiurilor ABC, $A'B'C'$.

Teorema 2 a triunghiului isoscel. Dacă un triunghi ABC are $\hat{B} \equiv \hat{C}$, atunci $|AB| \equiv |AC|$.

Demonstraţie. Se aplică teorema II de congruenţă triunghiurilor ABC, ACB şi se foloseşte faptul că avem, prin definiţie, $|BC| = |CD|$, deci $|BC| \equiv |CB|$.

Teorema triunghiurilor simetrice. Fie A, B, C, C' patru puncte într-un plan p, astfel ca $|CA| \equiv |C'A|$ şi $|CB| \equiv |C'B|$ şi astfel ca punctele C şi C' să se găsească în semiplane opuse faţă de dreapta AB. Atunci triunghiurile ABC, ABC' sînt congruente.

Demonstraţie. Punctele C, C' fiind în semiplane opuse faţă de AB, segmentul $|CC'|$ are un punct comun cu dreapta AB; fie O acest punct. Sînt posibile mai multe cazuri:

a) $O = A$. Triunghiul BCC' este isoscel, avînd $|BC| \equiv |BC'|$; deci $\widehat{BCC'} \equiv \widehat{BC'C}$. Triunghiurile ABC, ABC' sînt congruente în virtutea teoremei I de congruenţă a triunghiurilor (fig. I.30).

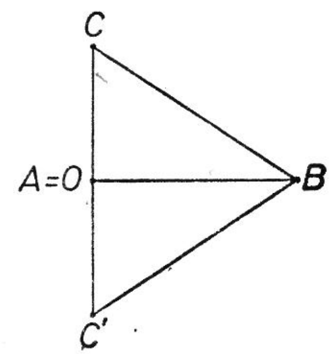

Fig. I.30

b) $O = B$. Demonstraţie analoagă.

c) $O \in |AB|$. Considerînd triunghiurile isoscele ACC', BCC', deducem

$$(1) \qquad \widehat{ACC'} \equiv \widehat{AC'C}, \qquad \widehat{BCC'} \equiv \widehat{BC'C}$$

şi avem prin urmare $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Din teorema I de congruenţă a triunghiurilor, deducem că triunghiurile ABC, ABC' sînt congruente (fig. I.31).

d) $A \in |OB|$. Deducem ca la punctul c) relaţiile (1); considerînd diferenţele unghiurilor ce apar în aceste relaţii, deducem $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Deci avem, şi în acest caz, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ABC'}$ (fig. I.31).

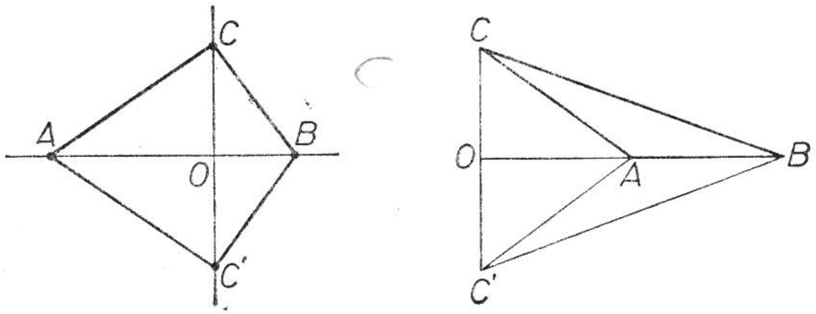

Fig. I.31

> **Teorema III de congruență.** **Dacă două triunghiuri** ABC, $A'B'C'$ **au** $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ **și** $|BC| \equiv |B'C'|$, **atunci cele două triunghiuri sînt congruente.**

Demonstrație. În semiplanul limitat de dreapta BC și conținînd punctul A, se consideră punctul A'' astfel ca $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{B'C'A'}$ și $|CA''| \equiv |C'A'|$ (fig. I.32). În semiplanul opus lui A față de BC se ia apoi punctul A''', astfel ca $\widehat{BCA'''} \equiv \widehat{B'C'A'}$ și $|CA'''| \equiv |C'A'|$. Din teorema I de congruență deducem relațiile $|A''B| \equiv |A'''B| \equiv |A'B'| \equiv |AB|$. Aplicînd teorema triunghiurilor simetrice triunghiurilor ABC, $A'''BC$ și apoi triunghiurilor $A''BC$, $A'''BC$, obținem congruențele $\widehat{BCA} \equiv \widehat{BCA'''}$, $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{BCA'''}$. Din proprietatea de congruență 4 rezultă atunci $CA'' = CA$ deci avem $A'' = A$. Din felul în care a fost ales A'' deducem că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Sîntem în condițiile de aplicabilitate a teoremei I de congruență, din care rezultă ABC congruent cu $A'B'C'$.

Exerciții

1. *Să se arate că dacă un triunghi ABC are $\hat{B} \not\equiv \hat{C}$, atunci $|AB| \not\equiv |AC|$.*

2. *Fie $|AB|$, $|A'B'|$ două segmente congruente și fie punctele $C \in |AB|$, $C' \in |A'B'|$ astfel ca $|AC| \equiv |A'C'|$. Să se arate că $|BC| \equiv |B'C'|$.*

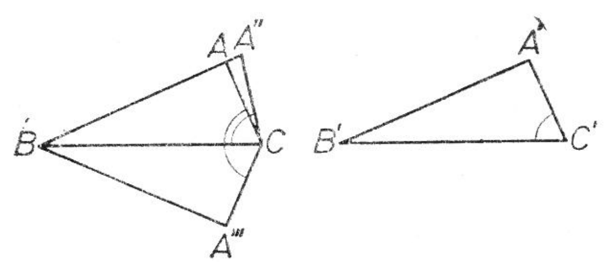

Fig. I.32

3. *Fie OAB, $O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB|$, $C' \in |A'B'|$ astfel ca $|AC| \equiv |A'C'|$. Să se arate că $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'}$ și $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$. Să se arate apoi că $|OC| \in |O'C'|$.*

4. *Fie OAB, $O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB|$, $C' \equiv \mathrm{Int}\, \widehat{A'O'B'}$, astfel ca $|OC| \equiv |O'C'|$ și $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'}$. Să se arate că $C' \in |A'B'|$.*

5. *Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$ și $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ două perechi de unghiuri adiacente, astfel ca $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$ și $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$, $k \subset \mathrm{Int}\, \widehat{hm}$, $k' \subset \mathrm{Int}\, \widehat{h'm'}$. Să se arate că $\widehat{hm} \equiv \widehat{h'm'}$.*

6. *Să se arate că dacă două unghiuri $\widehat{rs}$, $\widehat{r's'}$ reprezintă suma altor două unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, atunci $\widehat{rs} \equiv \widehat{r's'}$.*

7. *Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$ și $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ două perechi de unghiuri adiacente, astfel ca $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, $\widehat{hm} \equiv \widehat{h'm'}$ și $k \subset \mathrm{Int}\, \widehat{hm}$, $k' \subset \mathrm{Int}\, \widehat{h'm'}$. Să se arate că avem $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$.*

8. *Să se dea o interpretare proprietății conținute în exercițiul precedent, folosind noțiunea de diferență a două unghiuri.*

9. *Fie OAB, $O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB$, $C' \in |A'B'$ astfel ca $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'}$. Să se arate că dacă $C \in |AB|$, atunci $C' \in |A'B'|$.*

10. *Fie r, s, h, k patru semidrepte cu aceeași origine O, astfel ca r și s să fie opuse și situate pe o dreaptă d, iar h și k să fie de o aceeași parte a dreptei d, într-un plan p. Să se arate că dacă h nu este interioară unghiului $\widehat{rk}$, atunci: h este interioară unghiului $\widehat{sk}$, r și h se găsesc în semiplane opuse față de suportul lui k și k este interioară unghiului $\widehat{rh}$.*

(*Indicație.* Se consideră puncte $A \in r$, $B \in h$, $C \in s$ și se arată că există punctele $D \in k \cap |AB|$ și $E \in h \cap |CD|$).

9. Compararea unghiurilor

Definiție. **Fie** $\widehat{pq}$, $\widehat{rs}$ **două unghiuri proprii și fie, într-un plan** P, **o dreaptă** d, **un punct** $O \in d$, **o semidreaptă** $t \subset d$ **cu originea** O **și un semiplan** P', **limitat de dreapta** d. **Pentru a compara unghiurile** $\widehat{pq}$, $\widehat{rs}$, **vom construi semidreptele,** m, n, **cu originea** O, **astfel ca** (fig. I.33):

$$m \subset P', \quad n \subset P', \quad \widehat{tm} \equiv \widehat{pq}, \quad \widehat{tn} \equiv \widehat{rs}.$$

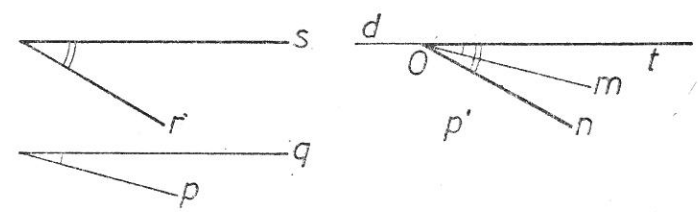

Fig. I.23

Sînt atunci posibile trei cazuri:

a) $m = n$; b) $m \subset \text{Int } \widehat{tn}$; c) $n \subset \text{Int } \widehat{tm}$.

Dacă $m = n$, avem $\widehat{pq} \equiv \widehat{rs}$; dacă $m \subset \text{Int } \widehat{tn}$, vom spune că unghiul $\widehat{pq}$ este *mai mic* decît unghiul $\widehat{rs}$, sau că unghiul $\widehat{rs}$ este *mai mare* decît unghiul $\widehat{pq}$, şi vom scrie $\widehat{pq} < \widehat{rs}$ sau $\widehat{rs} > \widehat{pq}$. Cazul c) se obţine din cazul b), permutînd între ele unghiurile $\widehat{pq}$, $\widehat{rs}$ şi semidreptele m, n. Deci, dacă sîntem în cazul c), vom spune că unghiul $\widehat{pq}$ este mai mare decît unghiul $\widehat{rs}$, sau că unghiul $\widehat{rs}$ este mai mic decît unghiul $\widehat{pq}$.

Regula de comparare a unghiurilor dată mai sus depinde, în aparenţă, de alegerea semidreptei t şi a semiplanului P'. Să presupunem că alegem altfel aceste elemente, luînd o altă semidreaptă t', cu originea într-un punct O', şi apoi un semiplan P'', limitat de suportul semidreptei t'. Să presupunem apoi că, prin această alegere, obţinem semidreptele m', n' avînd originea O' şi astfel ca $m' \subset P''$, $n' \subset P''$, $\widehat{t'm'} \equiv \widehat{pq}$, $\widehat{t'n'} \equiv \widehat{rs}$. Vom avea atunci $\widehat{t'm'} \equiv \widehat{tm}$, $\widehat{t'n'} \equiv \widehat{tn}$. Dacă $m = n$, atunci $m' = n'$. Dacă $m \subset \text{Int } \widehat{tn}$, atunci $m' \subset \text{Int } \widehat{t'n'}$, iar dacă $n \subset \text{Int } \widehat{tm}$, atunci $n' \subset \text{Int } \widehat{t'm'}$.

Rezultă că *regula de comparare a unghiurilor nu depinde de alegerea elementelor auxiliare t şi P'.*

Exerciţii

1. *Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{rs}$ două unghiuri proprii. Să se arate că este adevărată una şi numai una din relaţiile*

$$\widehat{hk} \equiv \widehat{rs};\quad \widehat{hk} < \widehat{rs};\quad \widehat{hk} > \widehat{rs}.$$

2. *Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{pq}$, $\widehat{rs}$ trei unghiuri proprii astfel ca $\widehat{hk} < \widehat{pq}$ şi $\widehat{pq} < \widehat{rs}$. Să se arate că $\widehat{hk} < \widehat{rs}$.*

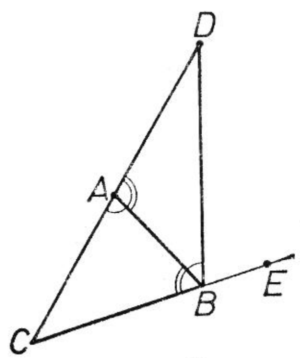

Fig. I.34

Teorema I a unghiului exterior. Dacă ABC este un triunghi, orice suplement al unghiului $\hat{B}$ este mai mare decît unghiul $\hat{A}$ (fig. I.34).

Altfel exprimat: în orice triunghi, fiecare unghi exterior este mai mare decît oricare din unghiurile interioare neadiacente acelui unghi exterior.

Demonstraţie. Fie E un punct astfel ca $B \in |CE|$ şi fie D acel punct de pe dreapta CA, pentru care avem

$$A \in |CD|, \qquad |AD| \equiv |BC|.$$

Să presupunem prin absurd că am avea $\widehat{ABE} \equiv \widehat{BAC}$, (fig. I.34). Din teorema unghiurilor suplementare rezultă $\widehat{CBA} \equiv \widehat{BAD}$. Teorema I de congruenţă arată că triunghiurile ABC, BAD sînt congruente. Avem atunci $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BAC} \equiv \widehat{ABE}$. Dar punctele D, E sînt de aceeaşi parte a dreptei AB. Din proprietatea 4 de congruenţă, care arată unicitatea purtării congruente a unghiurilor, rezultă $BD = BE$, ceea ce nu este posibil, deoarece punctele A, B, C, nu sînt coliniare. Deci nu putem presupune că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{BAC}$. Cazul $\widehat{ABE} < \hat{A}$ (fig. I.35) se elimină considerînd punctul $C' \in |CB|$ astfel ca $\widehat{C'AB} \equiv \widehat{ABE}$. Am avea atunci în ABC', situaţia discutată anterior.

Fie A, B, C, D patru puncte distincte într-un plan, astfel ca punctele C, D să se găsească în semiplane opuse faţă de dreapta AB şi astfel încît să avem $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BAD}$. În acest caz, dreptele AD, BC sînt nesecante (fig. I.36).

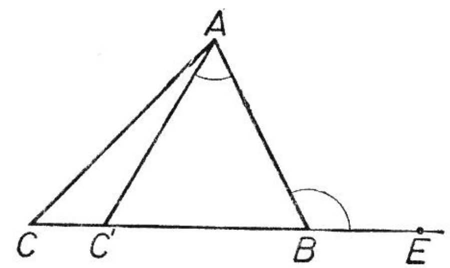

Fig. I.35

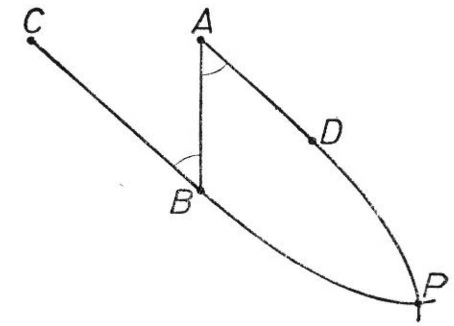

Fig. I.36

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că dreptele AD, BC ar avea un punct comun P. Dacă P este de aceeaşi parte cu D faţă de AB, atunci obţinem un triunghi ABP, care are unghiul exterior $\widehat{ABC}$ congruent cu unghiul interior neadiacent $\widehat{BAP}$. Dacă P este de aceeaşi parte cu C faţă de AB, obţinem o situaţie similară în triunghiul ABP, care va avea unghiul exterior $\widehat{BAD}$ congruent cu $\widehat{ABC}$. În ambele cazuri, am ajuns la o contradicţie.

Reamintim următoarea

Definiţie. Două drepte d, d' situate într-un acelaşi plan şi care nu au nici un punct comun, se numesc drepte paralele.

Notaţie. Dacă dreptele d, d' sînt paralele, se scrie $d \parallel d'$.

Observație. Două drepte paralele sînt în mod necesar distincte.

Aplicație. Proprietatea precedentă ne permite *să construim o dreaptă d, care să treacă printr-un punct dat A și care să fie paralelă cu o dreaptă d', care nu trece prin A.* Construcția este următoarea:

Alegem două puncte B, C pe dreapta d' și apoi considerăm acea semidreaptă s, care are originea A, care este situată în semiplanul opus semiplanului limitat de dreapta AB și care conține punctul C și mai cerem pentru s să verifice relația $\widehat{DAB} \equiv \widehat{ABC}$, pentru $D \in s$.

Deci am demonstrat proprietatea]

Fiind date o dreaptă d' și un punct A nesituat pe d', există cel puțin o dreaptă d, paralelă cu d' și conținînd punctul A.

> **T e o r e m a IV d e c o n g r u e n ț ă. Dacă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au $|BC| \equiv |B'C'|$, $\hat{B} \equiv \hat{B'}$ și $\hat{A} \equiv \hat{A'}$, atunci cele două triunghiuri sînt congruente.**

Demonstrație. Considerăm punctul A'' de pe semidreapta $|BA$, astfel ca $|BA''| \equiv |B'A'|$. Triunghiurile $A''BC$, $A'B'C'$ sînt atunci congruente, în baza teoremei I de congruență. Rezultă $\widehat{BA''C} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Comparînd cu relația $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, admisă în enunț, deducem că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BA''C}$. Din teorema unghiului exterior deducem că $A = A''$. Deci avem $|BA| \equiv |B'A'|$ și putem acum să aplicăm teorema I de congruență triunghiurilor ABC, $A'B'C'$.

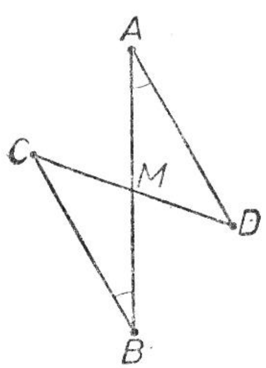

Fig. 1.37

Observație. Dacă se admite postulatul lui Euclid, care va fi reamintit în paginile următoare, teorema IV de congruență se reduce la teorema II de congruență, deoarece suma unghiurilor unui triunghi este congruentă cu suma a două unghiuri drepte.

Orice segment $|AB|$ conține un punct M astfel ca $|AM| \equiv |MB|$. Punctul M este unic determinat prin această condiție.

Demonstrație. Se consideră două puncte C, D, situate în semiplane opuse față de dreapta AB și astfel ca $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ABC}$ și $|AD| \equiv |BC|$. Punctul căutat M este dat de formula $\{M\} = AB \cap CD$ (fig. 1.37). M se numește *mijlocul* segmentului $|AB|$.

Exerciții

1. Fie A, B, C, D *patru puncte într-un plan, astfel ca* $\widehat{CBA} \equiv \widehat{DAB}$ *și* $|BC| \equiv |AD|$ *și astfel ca punctele C, D să se găsească în semiplane opuse față de dreapta AB. Să se arate că segmentele $|AB|$, $|CD|$ au un punct comun.*

Indicație. Din ipoteză rezultă $|CD| \cap AB = \emptyset$. Fie $O \in |CD| \cap AB$. Folosind teorema unghiului exterior, se vor exclude relațiile $A \in |OB|$, $B \in |OA|$, astfel încît va rezulta $O \in |AB|$.

2. *Păstrînd notațiile din exercițiul precedent, să se arate că punctul $O \in |AB| \cap |CD|$ are proprietatea $|OA| \equiv |OB|$.*

(*Indicație.* Se va utiliza teorema a IV-a de congruență.)

3. *Fie $|AB|$ un segment. Să se arate că există un punct $M \in |AB|$ astfel ca $|MA| \equiv |MB|$.*

(*Indicație.* Se construiesc puncte C, D astfel încît să fie verificate condițiile din exercițiul 1.)

4. *Fie A, B două puncte pe o dreaptă d. Să se arate că, dacă un punct $M \in d$ are proprietatea $|MA| \equiv |MB|$, atunci $M \in |AB|$.*

5. *Am arătat că se numește* **mijloc** *al unui segment $|AB|$ un punct $M \in |AB|$ astfel ca $|MA| \equiv |MB|$. Să se arate că orice segment are un mijloc unic.*

(*Indicație.* Existența unui mijloc este arătată de exercițiul 3. Pentru unicitatea mijlocului, se procedează prin reducere la absurd.)

6. *Fie M mijlocul unui segment $|AB|$ și fie P, Q mijloacele segmentelor $|AM|$, $|BM|$. Să se arate că M este mijlocul segmentului $|PQ|$.*

7. *Fie $|AB|$ un segment. Să se arate că există un segment $|EF|$ astfel încît $|AB|$ să reprezinte suma a 64 de segmente congruente cu $|EF|$. Să se generalizeze apoi acest exercițiu.*

8. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri congruente și fie M, N, P, M', N', P' mijloacele segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$, $|B'C'|$, $|C'A'|$, $|A'B'|$, respectiv. Să se arate că triunghiurile MNP, $M'N'P'$ sînt congruente.*

(*Indicație.* Se va arăta că dacă M, M' sînt mijloacele a două segmente congruente $|AB|$, $|A'B'|$ atunci segmentele $|AM|$, $|A'M'|$ sînt de asemenea segmente congruente.)

10. Inegalități într-un triunghi

1. *În orice triunghi, la latura mai mare se opune unghiul mai mare. Deci dacă ABC este un triunghi, atunci avem $|AB| < |BC|$ dacă și numai dacă $\hat{C} < \hat{A}$.*

Demonstrație. Presupunem că $|BC| > |AB|$ și arătăm că $\hat{A} > \hat{C}$.

Fie punctul $A' \in |BC|$ astfel ca $|BA'| \equiv |BA|$ (fig. 1.38). Triunghiul BAA' este isoscel, avînd $|BA| \equiv |BA'|$. Deci $\widehat{BAA'} \equiv \widehat{BA'A}$. Semidreapta $|AA'$ este interioară unghiului $\hat{A}$, deoarece $A' \in |BC|$. Rezultă $\widehat{BAA'} < \hat{A}$.

Din teorema unghiului exterior, $\widehat{BA'A} > \widehat{BCA} = \hat{C}$. Deci avem

$$\hat{A} > \widehat{BAA'} \equiv \widehat{BA'A} > \hat{C}$$

și atunci $\hat{A} > \hat{C}$.

Reciproc, dacă $\hat{A} > \hat{C}$, atunci trebuie să avem $|BC| > |AB|$, deoarece în caz contrar am avea $|BC| \equiv |AB|$ sau $|BC| < |AB|$ și am deduce $\hat{A} \equiv \hat{C}$ sau $\hat{A} < \hat{C}$.

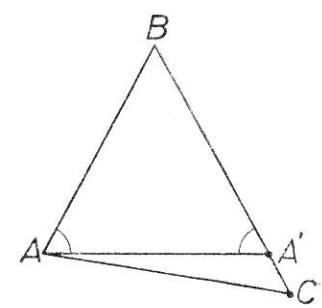

Fig. 1.38

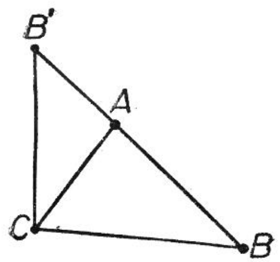

Fig. I.39

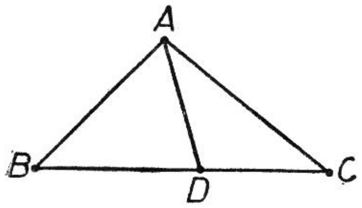

Fig. I.40

2. *În orice triunghi, suma a două laturi este mai mare decît latura a treia. Deci, dacă ABC este un triunghi, atunci* (fig. I.39)

$$|BA| + |AC| > |BC|.$$

Demonstrație. Să considerăm punctul B' pentru care $A \in |BB'|$ și $|AB'| \equiv |AC|$. Atunci segmentul $|BB'|$ reprezintă suma segmentelor $|BA|$, $|AC|$. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu relația $|BB'| > |BC|$ sau cu

$$\widehat{BCB'} > \widehat{BB'C}.$$

Dar $\widehat{BB'C} = \widehat{AB'C} \equiv \widehat{ACB'}$, deoarece triunghiul $AB'C$ este isoscel; apoi avem $\widehat{ACB'} > \widehat{BCB'}$, deoarece semidreapta $|CA$ este interioară unghiului $\widehat{BCB'}$. Rezultă deci că avem $\widehat{BCB'} > \widehat{BB'C}$.

3. *Dacă în triunghiul ABC avem $|AB| \leqslant |AC|$ și dacă $D \in |BC|$, atunci* $|AD| < |AC|$ (fig. I.40).

Demonstrație. Din propoziția 1, ținînd seama că $|AB| \leqslant |AC|$, rezultă că avem (fig. I.40)

$$\hat{C} \leqslant \widehat{ABC},$$

iar din teorema unghiului exterior, deducem $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$. Ultimele două inegalități implică relația $\widehat{ADC} > \hat{C}$. Propoziția 1. dă în sfîrșit $|AD| < |AC|$.

Aplicație

Fie ABC un triunghi echilateral și fie M un punct interior triunghiului ABC. În acest caz, avem inegalitățile

$$|MA| + |MB| > |MC|,\quad |MB| + |MC| > |MA|,$$
$$|MC| + |MA| > |MB| \quad \text{(fig. I.41)}.$$

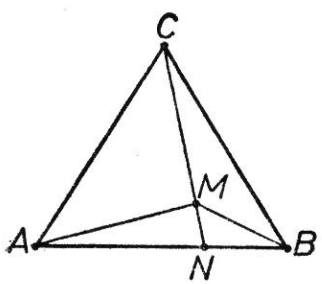

Fig. I.41

Demonstrație. Semidreapta $|CM$ intersectează latura $|AB|$ într-un punct N și avem $|CM| < |CN| < |CA| \equiv |AB|$, deci $|CM| < |AB|$. Dar $|AB| < |MA| + |MB|$, deci $|CM| < |AM| + |BM|$. Celelalte două inegalități se demonstrează în același fel.

11. Unghiuri drepte

Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu cu vîrful O și fie punctele $A \in h$, $B \in k$ astfel ca $|OA| \equiv |OB|$. Să notăm prin M mijlocul segmentului $|AB|$ (fig. I.42). Din teorema a III-a de congruență a triunghiurilor rezultă că triunghiurile OAM, OBM sînt congruente. În particular, avem $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$. Să observăm că unghiurile $\widehat{OMA}$, $\widehat{OMB}$ sînt suplementare și congruente.

Definiție. **Se numește unghi drept orice unghi, care este congruent cu un suplement al său** (fig. I.43).

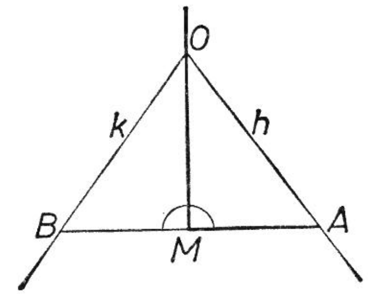

Fig. I.42

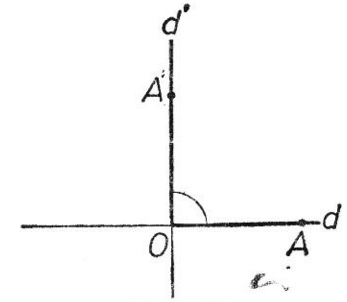

Fig. I.43

Construcția precedentă arată că:

Există unghiuri drepte.

Din teorema unghiurilor suplementare și din teorema unghiurilor opuse rezultă că:

Opusul unui unghi drept și suplementele unui unghi drept sînt unghiuri drepte.

Definiție. **Fie d, d' două drepte concurente într-un punct O. Se spune că dreptele d, d' sînt perpendiculare, sau ortogonale dacă cele patru semidrepte limitate de punctul O pe dreptele d, d' formează patru unghiuri drepte.**

Exemplu. Dacă $\widehat{AOA'}$ este un unghi drept, atunci dreptele OA, OA' sînt perpendiculare. Dacă dreptele d, d' sînt perpendiculare, scriem $d \perp d'$.

Fie $\widehat{pq}$, $\widehat{qr}$ și $\widehat{p'q'}$, $\widehat{q'r'}$ două perechi de unghiuri suplementare astfel ca $\widehat{pq} \equiv \widehat{p'q'}$. Din teorema unghiurilor suplementare rezultă $\widehat{qr} \equiv \widehat{q'r'}$.

Dacă $\widehat{pq}$ este un unghi drept, atunci avem

$$\widehat{pq} \equiv \widehat{qr} \equiv \widehat{q'r'},\ \widehat{pq} \equiv \widehat{p'q'},$$

deci $\widehat{q'r'} \equiv \widehat{p'q'}$. Rezultă că $\widehat{p'q'} \equiv \widehat{q'r'}$ sînt unghiuri drepte. Deci:

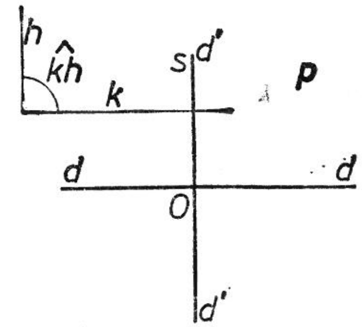

Fig. I.44

Orice unghi congruent cu un unghi drept este unghi drept.

Fie $\widehat{pq}$, $\widehat{qr}$ două unghiuri drepte suplementare cu originea O și fie s o semidreaptă cu aceeași origine O, situată în același semiplan cu semidreapta q față de suportul semidreptei p. Presupunem că avem $s \neq q$. Sînt atunci posibile două cazuri: sau $s \subset \operatorname{Int} \widehat{pq}$, sau $s \subset \operatorname{Int} \widehat{rq}$. În primul caz, avem

$$\widehat{ps} < \widehat{pq} \equiv \widehat{qr} < \widehat{rs},$$

deci $\widehat{ps} < \widehat{rs}$. Dar unghiurile $\widehat{ps}$, $\widehat{rs}$ sînt suplementare. Deci, în cazul $s \subset \operatorname{Int} \widehat{pq}$, unghiul $\widehat{ps}$ nu este drept. La fel se arată că, nici, în cazul $s \subset \operatorname{Int} \widehat{rq}$, unghiul $\widehat{ps}$ nu este drept.

Rezultă că *dacă d, d' d'' sînt drepte coplanare și concurente într-un punct O, astfel încît d' și d'' sînt perpendiculare pe d, atunci $d' = d''$.*

Aplicații

1. *Existența unei perpendiculare, ce trece printr-un punct O, pe o dreaptă ce conține punctul O (într-un plan dat).*

Fie O un punct, d o dreaptă și p un plan, astfel ca $O \in d \subset p$. Vrem să arătăm că există o dreaptă d', astfel ca $O \in d' \subset p$ și d' să fie perpendiculară pe d. În acest scop, construim, într-un mod oarecare, un unghi drept $\widehat{hk}$ și construim apoi o semidreaptă s, cu originea O, astfel ca $s \subset p$ și astfel ca s să formeze, împreună cu una din semidreptele limitate de O pe d, un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$. În acest caz, unghiul format de s cu oricare din semidreptele limitate de O pe d va fi drept, deci suportul d' al lui s va fi o dreaptă perpendiculară pe d. Din $s \subset p$, $s \subset d'$ rezultă $O \in d' \subset p$.

2. *Existența unei perpendiculare ce trece printr-un punct O, pe o dreaptă ce nu conține punctul O (într-un plan dat).*

Fie date, într-un plan p, o dreaptă d și un punct $O \notin d$. Vom arăta că există o dreaptă d' în planul p, perpendiculară pe d și astfel ca $O \in d'$. Fie A, B două puncte oarecare pe d. Construim punctul Q, în semiplanul opus lui O față de d, astfel ca $\widehat{OAB} \equiv \widehat{QAB}$ și $|OA| \equiv |QA|$. Dreapta d intersectează segmentul $|OQ|$ într-un punct M, astfel încît triunghiurile OAM, QAM sînt congruente. Unghiurile $\widehat{OMA}$, $\widehat{QMA}$ fiind suplementare, rezultă că aceste unghiuri sînt și suplementare și congruente, deci sînt unghiuri drepte. Deci dreapta OQ este perpendiculară pe dreapta d. Avem $OQ \subset p$, deoarece $O \in p$ și $Q \in p$.

Notație. Dacă dreptele d, d' sînt perpendiculare, scriem $d \perp d'$.

Reamintim următoarele definiții:

Se numește *unghi obtuz* orice unghi mai mare decît un unghi drept.

Se numește *unghi ascuțit* orice unghi mai mic decît un unghi drept.

Se numește *triunghi dreptunghic* orice *triunghi*, care are un unghi drept. Latura opusă unghiului drept într-un triunghi dreptunghic se numește *ipotenuză*, iar celelalte două laturi se numesc *catete*.

Exerciții

1. *Orice triunghi are cel puțin două unghiuri ascuțite.*
2. *Un triunghi nu poate avea două unghiuri drepte.*
3. *Dacă d, d' d'' sînt drepte situate într-un plan p, astfel ca d' și d'' să fie perpendiculare pe d, atunci dreptele d', d'' sînt fie paralele, fie confundate.*
4. *Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci unghiurile $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sînt ascuțite.*
5. *În orice triunghi dreptunghic, catetele sînt mai mici decît ipotenuza.*
6. *Fie ABC un triunghi și fie punctul $A' \in BC$ astfel ca $AA' \perp BC$. Să se arate că dacă $A' \in |BC|$, atunci unghiurile $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sînt ascuțite; reciproc, dacă unghiurile $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sînt ascuțite, atunci $A' \in |BC|$.*
7. *Fie ABC un triunghi și fie $A' \in BC$ astfel ca $AA' \perp BC$. Ce relație de ordine există între punctele A', B și C, dacă unghiul $\widehat{B}$ este obtuz?*
8. *Fie A, B, C, D patru puncte într-un plan, astfel ca $|BC| \equiv |AD|$ și $AD \perp AB$, $BC \perp AB$. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$. Să se arate că:*

   a) $\widehat{AMD} \equiv \widehat{CMB}$.

   b) *Perpendiculara dusă prin M pe AB trece prin mijlocul N al segmentului $|CD|$.*

   c) $\widehat{MDN} \equiv \widehat{MCN}$, $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BCD}$.

   d) *Dacă unghiul $\widehat{ADC}$ este drept, atunci și unghiul $\widehat{BCD}$ este drept.*
9. *Fie A, B, C, D patru puncte într-un plan p, astfel ca $AB \perp AD$, $AB \perp BC$, $CD \perp$ $\perp AD$ și $CD \perp BC$. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$ și fie d dreapta dusă prin M, perpendiculară pe AB și conținută în planul p. Să se arate că:*

   a) *Dreapta d intersectează segmentul $|CD|$ într-un punct N.*

   b) *Triunghiurile AMN, BMN sînt congruente.*

   c) *Unghiurile $\widehat{DAN}$, $\widehat{CBN}$ sînt congruente.*

   d) *Triunghiurile ADN, BCN sînt congruente.*

   e) $|AD| \equiv |BC|$.

   f) $|AB| \equiv |CD|$.

12. Locuri geometrice

În geometria elementară, o mulțime de puncte caracterizate printr-o proprietate geometrică P se numește uneori *loc geometric*. Pentru a arăta că locul geometric al punctelor dintr-un plan p, care au proprietatea P, este o anumită mulțime M, trebuie să demonstrăm că:

1. Orice punct al mulțimii M are proprietatea P.
2. Orice punct din planul p, care are proprietatea P, aparține mulțimii M.

Enunțul 2 este echivalent cu:

2'. Dacă un punct Q din planul p nu aparţine mulţimii M, atunci Q nu are proprietatea P.

Vom da acuma un exemplu de determinare a unui loc geometric.

Fiind date două puncte distincte A, B într-un plan p, locul geometric al punctelor M din planul p, pentru care $|MA| \equiv |MB|$, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB, trecînd prin mijlocul segmentului $|AB|$.

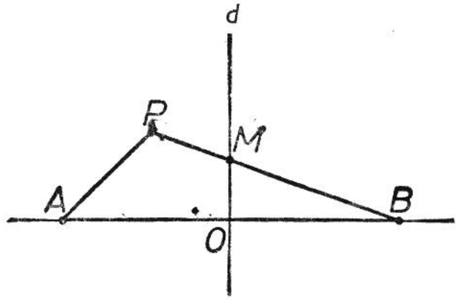

Fig. I.45

Demonstraţie. Fie O mijlocul segmentului $|AB|$ şi fie d perpendiculara dusă prin O pe dreapta AB. Dacă $M \in d$, considerînd triunghiurile dreptunghice OAM, OBM, arătăm că aceste triunghiuri sînt congruente şi deducem $|MA| \equiv |MB|$.

Fie acuma un punct $P \notin d$ (fig. I.45). Punctul P se va găsi în unul din semiplanele limitate de dreapta d. Pentru a fixa ideile, să presupunem că P se află în acelaşi semiplan cu A faţă de d. Atunci există punctul de intersecţie $M \in d \cap |BP|$. În triunghiul PAB avem

$$\widehat{PBA} \equiv \widehat{MBA} \equiv \widehat{MAB} < \widehat{PAB},$$

deci $|PB| > |PA|$.

În mod analog, se arată că orice punct Q, situat de aceeaşi parte cu B, faţă de dreapta d, verifică relaţia $|QA| > |QB|$. Rezultă că punctele dreptei d sînt singurele puncte din planul p, pentru care $|MA| \equiv |MB|$.

Definiţie. Dreapta d, care trece prin mijlocul segmentului $|AB|$ şi care este perpendiculară pe dreapta AB, se numeşte mediatoarea segmentului $|AB|$. Dacă d este mediatoarea segmentului $|AB|$, se spune că A, B sînt puncte simetrice faţă de dreapta d.

Definiţie. Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu. Se numeşte bisectoare a unghiului $\widehat{hk}$ o semidreaptă avînd originea în vîrful unghiului $\widehat{hk}$, interioară acestui unghi şi care face unghiuri congruente cu semidreptele h, k (fig. I.46).

Exerciţii

1. *Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu şi fie punctele $A \in h$, $B \in k$ astfel ca $|OA| \equiv |OB|$, O fiind vîrful unghiului $\widehat{hk}$. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$. Atunci semidreapta $|OM$ este o bisectoare a unghiului $\widehat{hk}$* (fig. I.47).

(*Indicaţie.* Se observă că se formează triunghiurile dreptunghice congruente MOA, MOB, din care rezultă $\widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB}$.)

2. *Orice unghi propriu are o singură bisectoare.*

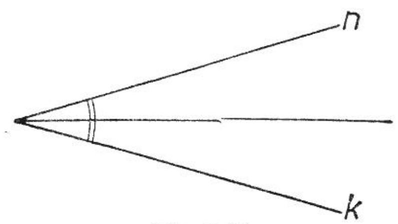

Fig. 1.46

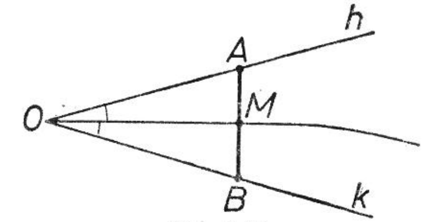

Fig. 1.47

Fie b bisectoarea unghiului propriu $\widehat{hk}$ şi fie d, d' dreptele ce conţin semidreptele h, respectiv k. Fie punctele $M \in b$, $A \in d$, $B \in d'$ astfel ca $MA \perp d$ şi $MB \perp d'$. Atunci avem $|MA| \equiv |MB|$ şi $A \in h$, $B \in k$ (fig. I.48).

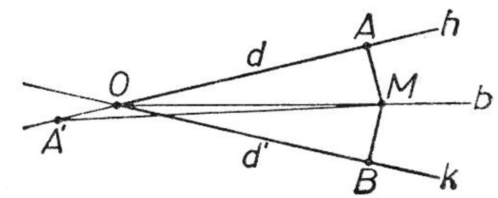

Fig. 1.48

Demonstraţie. Unghiul $\widehat{bh}$ este ascuţit, fiind jumătatea unui unghi propriu. Fie A' un punct pe semidreapta opusă lui h. Atunci din teorema unghiului exterior aplicată triunghiului MOA' deducem $\widehat{MA'O} < \widehat{bh}$, deci şi $\widehat{MA'O}$ este un unghi ascuţit. Deci dreapta MA' nu poate fi perpendiculară pe dreapta d. Avem deci $A \in h$.

La fel se arată că $B \in k$.

Congruenţa $|MA| \equiv |MB|$ se demonstrează considerînd triunghiurile dreptunghice şi congruente AOM, BOM. Congruenţa acestor triunghiuri se obţine din teorema IV de congruenţă.

Vom reţine proprietatea astfel demonstrată sub forma:

Orice punct M situat pe bisectoarea unui unghi $\widehat{hk}$ este egal depărtat de laturile h, k ale acelui unghi.

Bisectoarele a două unghiuri opuse sînt în prelungire, iar bisectoarele a două unghiuri suplementare sînt perpendiculare.

Demonstraţie. Fie punctele O, A, A', B, B', M, M', M'' astfel ca

$\{O\} = |AA'| \cap |BB'| \cap |MM'|$, $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}$, $\widehat{AOM''} \equiv \widehat{B'OM}$ (fig. I.49).

Din teorema unghiurilor opuse rezultă că semidreapta $|OM'$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A'OB'}$. De asemenea rezultă că avem $\widehat{MOA} \equiv \widehat{M'OB'}$. Ţinînd seama că avem şi $\widehat{AOM} \equiv \widehat{B'OM}$, deducem că $\widehat{MOM''} \equiv \widehat{M''OM'}$, deci dreptele OM'', OM sînt perpendiculare.

Fie A, B, C, D patru puncte astfel ca $AB \perp BC$ şi $C \in |BD|$. În aceste condiţii, avem $|AD| > |AC|$ (fig. I 50).

Demonstraţie. În triunghiul ACD avem $\widehat{ACD} > \widehat{ADC}$, deoarece $\widehat{ACD}$ este un unghi obtuz, iar $\widehat{ADC}$ este un unghi ascuţit. Deducem inegalitatea cerută.

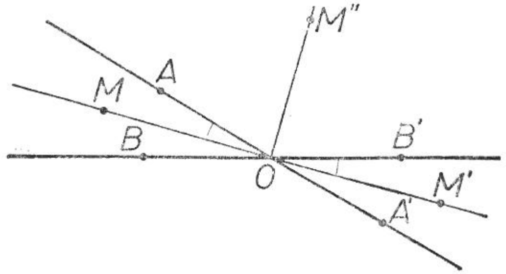

Fig. I.49

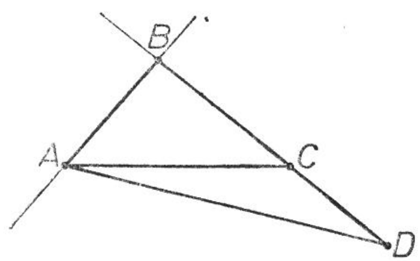

Fig. I.50

Dacă ABC, $A'B'C'$ sînt două triunghiuri dreptunghice în A şi A', astfel ca $|AB| \equiv |A'B'|$ şi $|BC| \equiv |B'C'|$, deci dacă cele două triunghiuri au două catete şi ipotenuzele respectiv congruente, atunci ele sînt congruente (fig. I.51).

Demonstraţie. Luăm pe semidreapta $|AC$ punctul C'' astfel ca $|AC''| \equiv |A'C'|$. Avem atunci $|BC''| \equiv |B'C'| \equiv |BC|$, deci $|BC''| \equiv |BC|$, $C'' = C$.

Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu cu vîrful O şi fie I un punct interior unghiului $\widehat{hk}$. Considerăm punctele $A \in h$, $B \in k$ astfel ca $IA \perp h$, $IB \perp k$. Dacă $|IA| \equiv |IB|$, atunci $|OI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{hk}$.

Demonstraţie. Triunghiurile AOI, BOI sînt în condiţiile proprietăţii precedente, deci avem $\widehat{AOI} \equiv \widehat{BOI}$. Prin urmare, $|OI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB} = \widehat{hk}$ (fig. I.52).

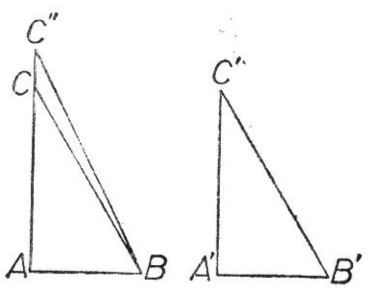

Fig. I.51

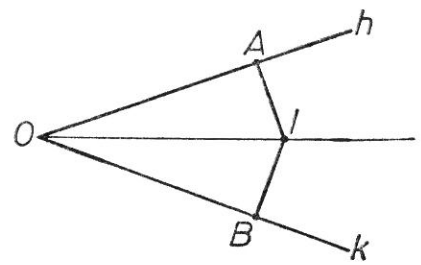

Fig. I.52

Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor I din interiorul unghiului, care sînt egal depărtate de laturile acelui unghi.

13. Postulatul lui Euclid

Am arătat că prin orice punct exterior unei drepte d se poate duce cel puţin o dreaptă paralelă la dreapta d.

Proprietăţile enumerate pînă acuma nu sînt suficiente pentru a demonstra pe baza lor, că printr-un punct A trece o singură paralelă la o dreaptă d ce nu trece prin A. Demonstrarea unicităţii unei astfel de paralele a constituit mult timp o problemă centrală a matematicii. Rezolvarea definitivă a acestei probleme a fost dată în secolul trecut, prin cercetările lui *I.* Bolyai, N. Lobacevski, C. Gauss şi B. Riemann.

Problema fusese formulată de geometrii Greciei antice, care au recunoscut imposibilitatea demonstrării unicităţii unei paralele printr-un punct la o dreaptă. Cel care a formulat corect problema şi a arătat necesitatea introducerii unei axiome a fost Euclid.

După Euclid, un mare număr de matematicieni au încercat să demonstreze unicitatea paralelei printr-un punct la o dreaptă, dar astăzi ştim că o astfel de demonstraţie nu poate fi dată.

Vom admite deci, fără demonstraţie:

Postulatul lui Euclid. Fiind date un punct A şi o dreaptă d, care nu trece prin A, există o singură paralelă la dreapta d, care să treacă prin punctul A (fig. I.53).

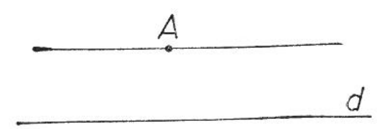

Fig. I.53

O primă consecinţă a postulatului lui Euclid este proprietatea următoare:

Dacă dreptele d', d'' sînt distincte şi dacă fiecare din aceste drepte este paralelă cu o a treia dreaptă d, atunci d' este paralelă cu d'' (fig. I.54).

(*Indicaţie.* Se demonstrează prin reducere la absurd.)

Teorema unghiurilor corespondente şi a unghiurilor alterne interne. Fie A, B, C, D, E, F **puncte distincte, astfel ca dreptele** AC, BD **să fie paralele, ca punctele** C, D **să fie în semiplane opuse faţă de dreapta** AB **şi** $A \in |CF|$, $A \in |BE|$.

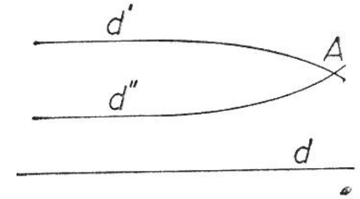

Fig. I.54

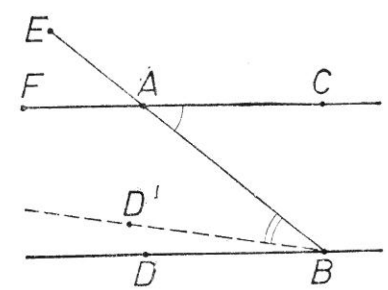

Fig. I.55

Avem atunci:

$$\widehat{EAF} \equiv \widehat{CAB} \equiv \widehat{DBA} \text{ (fig. I.55).}$$

Demonstraţia se face prin reducere la absurd, folosind postulatul lui Euclid. Anume construim unghiul $\widehat{D'BA}$ astfel ca D' să fie de aceeaşi parte cu D faţă de AB şi astfel ca $\widehat{D'BA} \equiv \widehat{CAB}$. Dreapta BD' va fi paralelă cu AC, deci va coincide cu BD.

Exerciții

ÎMPORTANT !

1. *Fie A, B, C, D patru puncte distincte astfel ca $AC \parallel BD$ și $AD \parallel BC$. Avem atunci* $|AC| \equiv |BD|$, $|AD| \equiv |BC|$ (fig. I.56).

2. *Dacă avem patru puncte distincte A, B, C, D astfel ca $AC \parallel BD$, $|AC| \equiv |BD|$ și astfel ca A, D să se găsească de aceeași parte a dreptei BC, atunci $AD \parallel BC$ și $|AD| \equiv |BC|$.*

Indicație. Avem $D \in \operatorname{Int} \widehat{ACB}$, $|AB| \cap CD \neq \emptyset$, $\widehat{ACD} \equiv \widehat{CDB}$, $ACD \equiv BDC$.

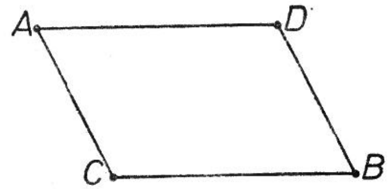

Fig. 1.56

3. *Fiind date patru puncte A, B, C, D astfel încît $A \neq B$ și C, D se găsesc în același semiplan față de dreapta AB și astfel încît $\widehat{CAB} + \widehat{DBA}$ să fie un unghi mai mic decît un unghi alungit, semidreptele $|AC$ și $|BD$ au un punct comun* (fig. I.57).

Indicație. Prin reducere la absurd.

4. *Fie ABCD un paralelogram, avînd $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Avem* (fig. I.58).

$$\widehat{CBA} \equiv \widehat{CDA},\ |AB| \equiv |CD|,\ |AD| \equiv |BC|.$$

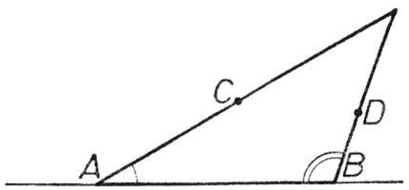

Fig. I. 57

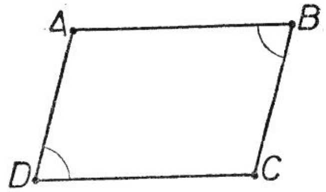

Fig. I.58

5. (*Teorema a doua a unghiului exterior.*) *În orice triunghi ABC, suplementul unui unghi este congruent cu suma celorlalte două unghiuri ale triunghiului.*

Astfel, în figura I.59, $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$.

6. *Într-un triunghi oarecare, orice unghi exterior este congruent cu suma unghiurilor interioare neadiacente.*

7. *Suma unghiurilor interioare ale oricărui triunghi este congruentă cu un unghi alungit, sau cu suma a două unghiuri drepte.*

8. *Dacă două triunghiuri ABC, A'B'C' au $\hat{A} \equiv \hat{A}''$, $\hat{B} \equiv \hat{B}''$, atunci $\hat{C} \equiv \hat{C}''$* (fig. I.60).

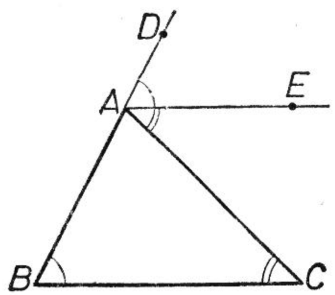

Fig. I.59

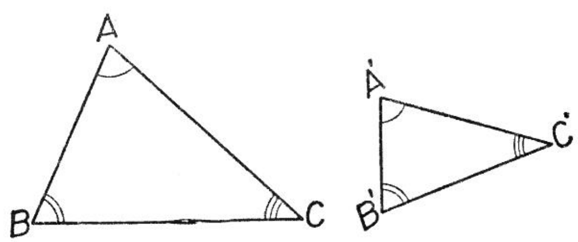

Fig. I.60

Teorema lui Thales restrînsă. *Fie d, d' două drepte distincte într-un plan și fie punctele $A \in d$, $B \in d$, $C \in d$, $A' \in d'$, $B' \in d'$, $C' \in d'$ astfel ca $B \neq B'$, $C \neq C'$, $A \neq A'$, $AA' \parallel BB'$, $B \in |AC|$, $|AB| \equiv |BC|$.*

În aceste condiții, avem $CC' \parallel BB'$ dacă și numai dacă B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$.

Demonstrație. Să presupunem că $BB' \parallel CC' \parallel AA'$ (fig. I.61).

Ipotezele din enunț arată că B este mijlocul segmentului $|AC|$. Să ducem prin punctele A', B' paralelele la dreapta d și să notăm prin P, respectiv Q punctele în care aceste paralele intersectează dreapta BB', respectiv dreapta CC'. Din exercițiul 4, pag. 40, deducem că triunghiurile $A'PB'$, $B'QC'$ sînt congruente, deci $|A'B'| \equiv |B'C'|$. Dreapta AA' fiind paralelă cu BB', punctele A, A' se găsesc în același semiplan față de dreapta BB'. La fel, punctele C, C' se găsesc într-un același semiplan față de BB'. Dar A, C se găsesc în semiplane opuse față de BB', deoarece $B \in |AC|$.

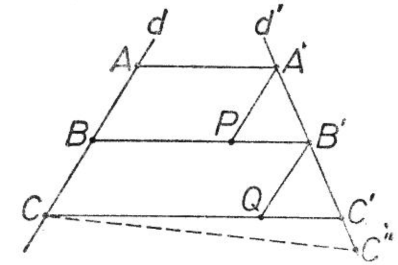

Fig. 1.61

Relațiile $B' \in |A'C'|$, $|A'B'| \equiv |B'C'|$ arată că B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$.

Reciproc, să presupunem acuma că B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$ și să ducem dreapta d'', paralelă cu BB' și trecînd prin punctul C. Dreapta d'' va intersecta dreapta d' într-un punct C'' astfel încît B' este mijlocul segmentului $|A'C''|$. Aceasta înseamnă că $B' \in |A'C''|$ și $|A'B'| \equiv |B'C''|$. Dar și punctul C' are aceste proprietăți, adică $B' \in |A'C'|$ și $|A'B'| \equiv |B'C'|$. Rezultă $C' = C''$, deci $CC' \parallel BB'$. Teorema este demonstrată.

Exerciții

1. *Fie ABC, A'B'C' două triunghiuri astfel ca $AB \parallel A'B'$, $|AB| \equiv |A'B'|$, $AC \parallel A'C'$ și $BC \parallel B'C'$. Să se arate că cele două triunghiuri sînt congruente și că dreptele AA', BB', CC' sînt paralele.*

2. *Să se reformuleze teorema lui Thales restrînsă, considerînd cazurile: $A = A'$; $B = B'$; $C = C'$.*

3. *Fiind dat un segment $|PQ|$, și un număr natural $n > 1$, să se arate că există un segment $|AB|$, astfel ca $|PQ|$ să fie congruent cu suma $|AB| + |AB| + \dots + |AB|$, conținînd n segmente egale cu $|AB|$.*

4. *Să se arate că dacă a, b, a', b' sînt drepte astfel încît $a \perp a'$, $b \perp b'$, $a \cap b \neq \emptyset$, $a \neq b$, atunci $a' \cap b' \neq \emptyset$ și $a' \neq b'$.*

Linii remarcabile într-un triunghi

1. Fie ABC un triunghi într-un plan p. Mediatoarele segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ se numesc *mediatoarele* triunghiului ABC.

Teoremă. Mediatoarele unui triunghi oarecare sînt concurente.

Demonstrație. Fie p, q, r mediatoarele segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ (fig. I.62). Dreptele p, q sînt secante, deoarece dacă p și q ar fi paralele, punctele A, C, B ar fi coliniare, ceea ce nu este adevărat, deoarece ABC este un triunghi. Fie atunci O punctul de intersecție al dreptelor p, q. Aceste drepte fiind mediatoarele segmentelor $|BC|$, $|AC|$, avem $|OA| \equiv |OC|$, $|OB| \equiv \equiv |OC|$, deci $|OA| \equiv |OB|$. Rezultă că O se află pe mediatoarea segmentului $|AB|$, deci $O \in r$. Deci $p \cap q \cap r = \{O\}$.

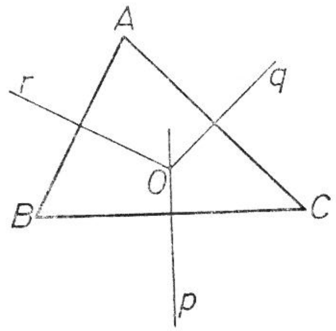

Fig. I.62

Reținem că punctul de intersecție O al mediatoarelor triunghiului ABC are proprietatea

$$|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|.$$

2. Să considerăm acuma bisectoarele l, m, n ale unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ale triunghiului ABC. Semidreptele l, m, n se numesc *bisectoarele* interioare sau bisectoarele triunghiului ABC (fig. I.63).

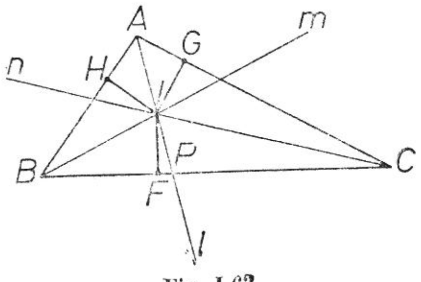

Fig. I.63

Teoremă. Bisectoarele unui triunghi oarecare sînt concurente.

Demonstrație. Bisectoarea l a unghiului $\hat{A}$ intersectează segmentul $|BC|$ într-un punct P, (fig. I.63) deoarece l este interioară unghiului $\hat{A}$ și segmentul $|BC|$ are extremitățile pe laturile unghiului $\hat{A}$. Apoi bisectoarea m a unghiului $\hat{B}$ intersectează segmentul $|AP|$ într-un punct I, din motive asemănătoare. Fie F, G, H picioarele perpendicularelor duse din I pe dreptele BC, CA, AB. Deci $F \in BC$, $G \in CA$, $H \in AB$ și $IF \perp BC$, $IG \perp CA$, $IH \perp AB$. Dintr-o proprietate cunoscută a bisectoarei unui unghi rezultă $|IH| \equiv |IG|$, $|IF| \equiv \equiv |IH|$, deci avem și $|IF| \equiv |IG|$. Punctul I este interior triunghiului ABC și avem $F \in |BC|$, $G \in |AC|$. Relațiile $|IF| \equiv |IG|$, $F \in |BC|$, $G \in |AG|$ arată că I se găsește pe bisectoarea unghiului $\hat{C}$, deci $\{I\} = = l \cap m \cap n$.

Exercițiu. Fie m', n' bisectoarele unghiurilor exterioare în B, C ale triunghiului ABC, și fie l bisectoarea unghiului $\hat{A}$. Dreptele l, m', n' sînt concurente.

Notă. În capitolul II se va arăta că punctul O de intersecție a mediatoarelor unui triunghi ABC este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar punctul I de intersecție a bisectoarelor este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

3. Fie ABC un triunghi. Notăm prin A' punctul în care perpendiculara dusă prin A pe dreapta BC intersectează dreapta BC. Dreapta AA' se numește *înălțimea* din A a triunghiului ABC, iar A' se numește piciorul acestei înălțimi.

Analog se definesc înălțimile BB', CC', avînd picioarele $B' \in AC$ respectiv $C' \in AB$. Folosind postulatul lui Euclid, se demonstrează:

Teoremă. Înălțimile AA', BB', CC' ale unui triunghi oarecare ABC sînt concurente (fig. I.64).

Demonstrație. Ducem prin punctele A, B, C paralelele u, respectiv v, w la dreptele BC, respectiv CA, AB. Notăm $\{A''\} = v \cap w$, $\{B''\} = u \cap w$. $\{C''\} = u \cap v$. Se formează paralelogramele $ABCB''$, $ACBC''$, $ABA''C$, din care rezultă $|AB''| \equiv |BC| \equiv |AC''|$, $|C''B| \equiv |AC| \equiv |A''B|$, $|A''C| \equiv \equiv |AB| \equiv |B''C|$. Rezultă deci că A, B, C sînt mijloacele laturilor $|B''C''|$, $|C''A''|$, $|A''B''|$ și atunci înălțimile AA', BB', CC' apar ca mediatoare ale triunghiului $A''B''C''$. Deci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente.

Punctul de intersecție a înălțimilor unui triunghi se numește *ortocentru* al acelui triunghi și se notează de obicei prin H.

4. Să considerăm acuma mijloacele A'', B'', C'' ale segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Vom arăta că segmentele $|AA''|$, $|BB''|$, $|CC''|$ au un punct comun (fig. I.65).

Fie D mijlocul segmentului $|AB''|$. Din teorema lui Thales restrînsă rezultă că dreapta $C''D$ este paralelă cu BB''. Semidreapta $|BB''$ este interioară unghiului $\hat{B}$, deci intersectează segmentul $|AA''|$ într-un punct G. Dreapta AA'' va intersecta, din motive asemănătoare, segmentul $|BB''|$,

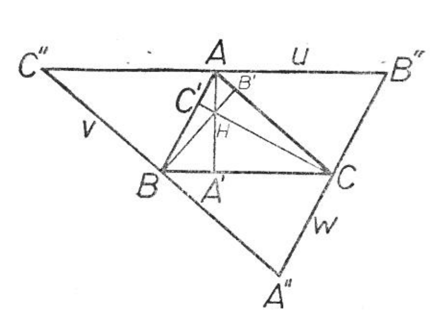

Fig. I.64

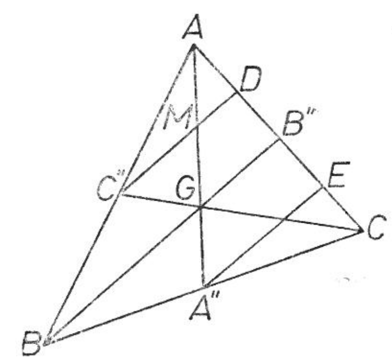

Fig. I.65

într-un punct, care nu poate fi decît G. Dreapta $C''D$ intersectează segmentul $|AG|$ într-un punct M, care este mijlocul segmentului $|AG|$. Fie E mijlocul segmentului $|B''C|$. Avem $|AD| \equiv |DB''| \equiv |B''E| \equiv |EC|$. Din teorema lui Thales restrînsă rezultă $|AM| \equiv |MG| \equiv |GA''|$; deci G împarte segmentul $|AA''|$ în raportul $|GA| / |A''G| = 2$, adică $|GA| \equiv 2 \cdot |A''G|$.

Procedînd în același fel, vom arăta că segmentul $|CC''|$ intersectează segmentul $|AA''|$ într-un punct, care împarte segmentul $|AA''|$ în același raport 2. Dar există un singur punct cu această proprietate. Deci segmentul $|CC''|$ conține punctul G. Aceasta înseamnă că

$$\{G\} = |AA''| \cap |BB''| \cap |CC''|.$$

Deci am demonstrat următoarea:

Teoremă. Segmentele care unesc vîrfurile unui triunghi oarecare cu mijloacele laturilor opuse au un punct comun.

Dreptele AA'', BB'', CC'' se numesc *medianele* triunghiului ABC, iar punctul lor de intersecție G se numește *centrul de greutate* sau *baricentrul* acestui triunghi.

Denumirea este legată de proprietatea fizică următoare:

Dacă avem o placă triunghiulară omogenă cu vîrfurile A, B, C, și dacă suspendăm această placă, alegînd ca punct de suspensie punctul G, atunci placa capătă poziție orizontală.

Mai general, dacă se aplică în punctele A, B, C ale plăcii trei forțe egale, paralele și de același sens cu o forță $\vec{F}$, și dacă se aplică, în același timp, în G, forța $-3\vec{F}$, atunci efectul celor patru forțe este nul.

Punctul G împarte triunghiul ABC în 6 triunghiuri [illegible] egale!

Exerciții

1. *Să se arate că un patrulater $ABCD$, care verifică una oarecare din următoarele proprietăți, este un paralelogram:*

a. *Orice două laturi opuse în patrulaterul $ABCD$ sînt congruente;*

b. *Orice două unghiuri opuse în patrulaterul $ABCD$ sînt congruente;*

c. *Orice două laturi opuse în patrulaterul $ABCD$ sînt paralele;*

d. *Unul din unghiurile patrulaterului $ABCD$ este congruent cu suplementele celor două unghiuri vecine lui;*

e. *Două laturi opuse ale patrulaterului $ABCD$ sînt paralele și congruente;*

f. *Diagonalele patrulaterului $ABCD$ au același mijloc.*

2. *Fie $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$ și fie M, N mijloacele laturilor $|BC|$, $|AD|$. Să se arate că $NM \parallel AB$ și $2\,|NM| \equiv |AB| + |CD|$.*

14. Măsurarea segmentelor

Fiind date două segmente $v = |AB|$ și $m = |EF|$, spunem că v este un *multiplu* al segmentului m, dacă există un număr natural p, astfel ca v să reprezinte suma a p segmente congruente cu m. Scriem în acest caz

$$v \equiv p \cdot m$$

Figura I.66 ilustrează cazul $p = 5$.

Vom spune că segmentul $w = |CD|$ este un *submultiplu* al segmentului m, dacă există un număr natural q, astfel ca $m \equiv q \cdot w$. Scriem atunci

$$w \equiv \frac{1}{q} \cdot m.$$

Figura I.67 ilustrează cazul $q = 3$.

Dacă u și w sînt segmente astfel încît există numere naturale p, q cu proprietatea

$$u \equiv p\left(\frac{1}{q} \cdot w\right).$$

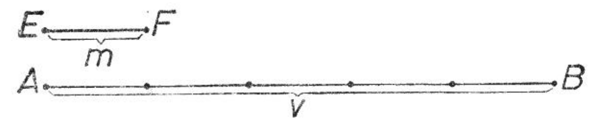

Fig. I.66

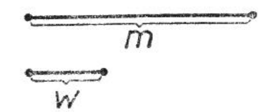

Fig. I.67

atunci spunem că segmentele u, w sînt *comensurabile* și scriem

(1) $$u \equiv \frac{p}{q} \cdot w \text{ sau } \frac{u}{w} = \frac{p}{q}.$$

Multiplii și submultiplii unui segment m sînt segmente comensurabile cu m.

Dacă sînt îndeplinite relațiile echivalente (1), spunem că u este congruent cu produsul dintre numărul rațional $\frac{p}{q}$ și segmentul w, sau că raportul dintre segmentul u și segmentul w este egal cu $\frac{p}{q}$. Vom mai spune că numărul $\frac{p}{q}$ reprezintă măsura segmentului u prin segmentul w sau că $\frac{p}{q}$ este *lungimea* segmentului u, măsurată cu ajutorul lui w.

Fiind dat un segment m, există segmente care nu sînt comensurabile cu m. De exemplu, *diagonala unui pătrat nu este comensurabilă cu laturile acelui pătrat.*

Ne propunem că definim raportul a două segmente arbitrare w și m. Acest raport va fi un număr rațional sau un număr real irațional.

Pentru a defini raportul unui segment w prin segmentul m, vom construi o *riglă gradată zecimal* (fig. I.68).

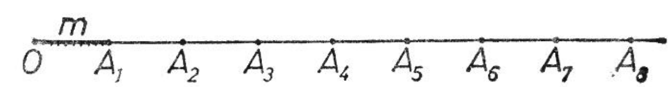

Fig. I.68

Fie s o semidreaptă avînd originea O. Pe semidreapta s construim punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p, A_{p+1}, \ldots$ astfel încît să avem

$$A_1 \in |OA_2|,\ A_2 \in |OA_3|,\ \ldots,\ A_p \in |OA_{p+1}|,\ \ldots$$
$$|OA_1| \equiv |A_1A_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \ldots \equiv |A_pA_{p+1}| \equiv \ldots \equiv m.$$

Pentru orice punct $M \in |A_pA_{p+1}|$, spunem că p reprezintă *partea întreagă* a raportului dintre segmentul $|OM|$ și segmentul m.

Punctele $A_1, A_2, \ldots A_p, A_{p+1}, \ldots$ formează o *gradație de ordinul* 0 pe semidreapta s. Repetînd construcția făcută pentru a obține aceste puncte, dar considerînd, în locul segmentului m, un submultiplu $m_1 \equiv \frac{1}{10} m$, vom obține pe s o *gradație de ordinul* 1. În continuare, vom considera submultiplii zecimali succesivi $m_2 \equiv \frac{1}{10^2} m, \ldots, m_k \equiv \frac{1}{10^k} \cdot m, \ldots$ și vom defini pe s gradații de ordine 2, ..., k, ... Vom putea considera, pentru fiecare indice k, partea întreagă a raportului dintre $|OM|$ și segmentul m_k.

Dacă notăm prin p_k partea întreagă a raportului dintre segmentul $|OM|$ și segmentul m_k, avem

$$\frac{p}{1} \leqslant \frac{p_1}{10} \leqslant \frac{p_2}{10^2} \leqslant \frac{p_3}{10^3} \leqslant \ldots \leqslant \frac{p_k}{10^k} \leqslant \ldots$$

deoarece $m \equiv 10 \cdot m_1 \equiv 10^2 \cdot m_2 \equiv 10^3 \cdot m_3 \equiv \ldots \equiv 10^k \cdot m \ldots$ și deoarece trecerea de la o gradație la gradația următoare permite luarea în considerare a restului rămas, ceea ce implică $p_k\ m_k \geqslant p_{k-1} \equiv m_{k-1} \equiv$.

De exemplu, dacă m este un segment de un metru și dacă segmentul $|OM|$ are 3,213547 metri, atunci

$p = 3,\quad p_1 = 32,\quad p_2 = 321,\quad p_3 = 3\,213,\quad p_4 = 32\,135,\quad p_5 = 321\,354,$
$p_6 = 3\,213\,547.$

Dacă segmentul $|OM|$ nu este comensurabil cu segmentul m, sau dacă $|OM|$ este congruent cu un segment de forma $\frac{p}{q} \cdot m$, unde p, q sînt numere naturale prime între ele, cu q divizibil prin 3 sau 7, atunci operația de măsurare a segmentului $|OM|$ prin m trebuie continuată la infinit, dacă vrem să obținem valoarea exactă a raportului lui $|OM|$ prin m.

Se spune că raportul $p_k/10^k$ reprezintă *aproximația de ordin k, prin lipsă,* a raportului $|OM|/m$.

Exercițiu. *Măsurînd un segment $|OM|$, s-au obținut valorile $p = 9$, $p_1 = 92$, $p_2 = 928$ $p_3 = 9284$, $p_4 = 92845$. Să se determine aproximația de ordinul 3, prin lipsă, a raportului $|OM|/m$.*

Din definiția raportului a două segmente rezultă următoarele proprietăți:

1. *Dacă u, v, w sînt segmente astfel încît w reprezintă suma segmentelor u și v, deci dacă $w \equiv u + v$, atunci avem, oricare ar fi segmentul m,*

$$\frac{u}{m} + \frac{v}{m} = \frac{w}{m}.$$

2. *Dacă u, u', m, m' sînt segmente astfel încît $u \equiv u'$ și $m \equiv m'$, atunci*

$$\frac{u}{m} = \frac{u'}{m'}.$$

3. *Oricare ar fi segmentul u, avem*

$$\frac{u}{u} = 1.$$

4. *Oricare ar fi segmentul u și oricare ar fi numărul real pozitiv x, există un segment w, astfel încît*

$$\frac{w}{v} = x.$$

Se spune atunci că w reprezintă produsul numărului x prin segmentul u și se scrie $w \equiv x \cdot u$.

5. *Dacă w, w' și u sînt segmente astfel încît $\frac{w}{u} = \frac{w'}{u}$, atunci $w \equiv w'$.*

6. *Oricare ar fi segmentele u, v, w, avem*

$$\frac{u}{v} \cdot \frac{v}{w} = \frac{u}{w},\quad \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{u} = 1,\quad \frac{u/w}{v/u} = \frac{u}{v}.$$

7. *Oricare ar fi segmentul u și oricare ar fi numerele reale pozitive x și y, avem*

$$x \cdot (y \cdot u) \equiv (xy) \cdot u,\quad (x + y) \cdot u \equiv x \cdot u + y \cdot u.$$

Exerciții

1. *Dați exemple de perechi de segmente comensurabile.*

2. *Arătați că două segmente comensurabile cu al treilea sînt comensurabile între ele.*

3. *Fiind date segmentele $u = 3{,}5\ w$, $v \equiv 1{,}5\ w$, arătați că există un segment s, astfel încît u și v să fie congruente cu anumiți multipli întregi ai segmentului s. Indicați un segment s, care să fie congruent sau mai mare decît orice alt segment avînd proprietatea indicată.*

4. *Fiind date două segmente comensurabile u și v, arătați că există un segment s, astfel încît u si v să fie congruente cu anumiți multipli întregi ai segmentului s și s să fie multiplu întreg al oricărui segment s', care este un submultiplu comun al segmentelor u și v.*

5. *Fie A, B, C, D patru puncte astfel ca $B \in |AC|$ și $C \in |AD|$. Arătați că sînt adevărate următoarele inegalități:*

a) $$\frac{|AB|}{|AD|} < 1,\ \frac{|AB|}{|BD|} < \frac{|AC|}{|CD|},\ \frac{|AC|}{|AD|} > \frac{|BC|}{|BD|}.$$

6. *Fiind dat un segment $|AB|$, să se construiască punctele M, N și P, aparținînd acestui segment, astfel încît să avem*

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{1}{3},\quad \frac{|AN|}{|BM|} = \frac{3}{5},\quad \frac{|AP|}{|BP|} = 7.$$

7. *Fie A, B, C, D puncte astfel ca $B \in |AD|$ și $C \in |AD|$. Să se arate că dacă $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CD|}$, atunci $B = C$.*

Aplicație. Fie u, v, w trei segmente și fie x, y, a, b patru numere reale astfel ca

$$v \equiv au \equiv yw,\ u \equiv xw \equiv bv,\ y = \frac{v}{w},\ a = \frac{v}{u},\ x = \frac{u}{w},\ b = \frac{u}{v}.$$

Avem atunci

$$v \equiv (ax)w \equiv (ab) \cdot v,\ u \equiv (by) \cdot w$$

și rezultă că avem $y = ax$, $ab = 1$, $by = x$. Aceste relații arată că, *oricare ar fi segmentele* u, v, w, *avem:*

$$\frac{v}{u}\,\frac{u}{w} = \frac{v}{w},\quad \frac{v}{u}\,\frac{u}{v} = 1,\quad \frac{v}{u} : \frac{w}{u} = \frac{v}{w}.$$

Aplicație. Fiind date un segment $|AB|$ *și un număr pozitiv* k, *există un singur punct* $M \in |AB|$ *astfel ca* $|MA| \equiv k \cdot |MB|$ *sau*

$$\frac{|MA|}{|MB|} = k.$$

Demonstrație. Să punem, pentru un punct $P \in |AB|$,

$$x = \frac{|PA|}{|AB|},\quad y = \frac{|PB|}{|AB|}.$$

Avem atunci

$$x + y = 1,\quad \frac{x}{y} = \frac{|PA|}{|PB|}.$$

Rezultă că dacă alegem numerele x și y astfel ca să avem

$$x + y = 1,\ x = ky,$$

și dacă luăm pentru M acel punct de pe segment $|AB|$, pentru care

$$|MA| \equiv x \cdot |AB|;$$

atunci vom avea $|MA| \equiv k \cdot |MB|$.

Exercițiu. *Fiind date două puncte distincte* A, B *și un număr real pozitiv* $k \neq 1$ *să se arate că există un singur punct* N *pe dreapta* AB, *dar exterior segmentului* $|AB|$, *astfel ca* $|NA| \equiv k \cdot |NB|$.

Elevii vor reține următoarea:

Teoremă fundamentală. Fie $s = |OA$ o semidreaptă. Dacă asociem fiecărui număr real pozitiv x acel punct M al semidreptei s, pentru care avem $|OM| \equiv x \cdot |OA$, obținem o corespondență bijectivă de la mulțimea numerelor reale pozitive la mulțimea punctelor semidreptei s, astfel încît relațiile

$$|OM| \equiv x \cdot |OA|,\ |ON| \equiv y \cdot |OA|$$

implică

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{x}{y}.$$

15. Axiomele de continuitate (texte facultative).

Am văzut că segmentele pot fi adunate și pot fi comparate. Suma a două segmente este o *clasă* de segmente congruente. Dacă fixăm o semidreaptă s cu originea O, atunci putem asocia fiecărui segment $|AB|$ un singur segment $|OM|$ astfel ca $|OM| \equiv |AB|$ și $M \in s$. Suma a două segmente $|AB|$, $|CD|$ poate fi reprezentată în mod unic printr-un segment $|PO|$, unde $P \in s$. Rezultă că în mulțimea segmentelor $|OM|$, cu $M \in s$, se poate introduce o lege de compunere internă, considerînd adunarea segmentelor. De asemenea, în aceeași mulțime avem o relație de ordine. Aceste observații arată că există o analogie între segmente și numere. Dar știm că există mai multe feluri de numere. Astfel am întîlnit pînă acuma numere pozitive, numere negative, numere întregi, numere raționale, numere reale, numere complexe. În matematica superioară se construiesc și alte tipuri de numere. Se pune atunci întrebarea:

Care tip de numere prezintă o analogie mai strînsă cu segmentele și cît de departe merge această analogie?

În cadrul geometriei experimentale, răspunsul la această întrebare nu a fost încă dat, datorită aspectelor încă necunoscute privind structura materiei. Într-adevăr, concepția atomistă asupra materiei arată că un segment material nu poate fi divizat oricît de mult. Dar concepția atomistă este astăzi depășită, datorită descoperirii particulelor ce intră în componența atomilor.

Geometria joacă un rol de seamă, atît în cercetările privind structura materiei, cît și în aplicațiile tehnice, care folosesc segmente de mărimi perceptibile. În ambele cazuri, este necesară o abstractizare a noțiunii de segment, așa cum am mai subliniat. Cînd se compară însă segmentele cu numerele, gradul de abstractizare cere un efort mai mare, deoarece numerele sînt mai abstracte decît figurile. De aceea vă cerem și vouă o atenție mai mare.

Măsurarea distanțelor sau a lungimii segmentelor este o operație necesară în toate domeniile activității practice. Fizicianul și chimistul evaluează distanțe între atomii unei molecule sau între moleculele unui gaz sau ale unui corp solid. Inginerii măsoară grinzi, pereți, șosele, poduri, piesele unui aparat sau ale unei mașini. Astronomii măsoară distanțe între planete sau între stele sau galaxii. Fiecare din acești lucrători folosește o anumită unitate de măsură și fiecare dintre ei urmărește un anumit grad de precizie. Odată o unitate de măsură aleasă, apare necesitatea utilizării unităților fracționare, sau a *submultiplilor* acelei unități de măsură.

Să presupunem că un fizician vrea să exprime în ani lumină ststanța între doi atomi ai unei molecule. El va folosi fracții zecimale cu foarte multe cifre. În general numărul acestor cifre crește, dacă vom efectua operații cu numerele obținute. Vedem că numărul cifrelor ce compun o fracție zecimală nu poate fi limitat. Sîntem deci conduși a considera fracții zecimale cu un număr nelimitat de cifre. Astfel s-a ajuns la noțiunea de *număr real*, ca fracție zecimală cu o infinitate de zecimale, pentru a exprima *măsura* unui segment, raportat la un segment fix, ales ca unitate de măsură.

Reamintim că un *număr real pozitiv sau nul* este dat de o *sumă infinită* de forma

(1) $$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + a_k \cdot 10^{-k} + \ldots$$

unde n este un număr întreg pozitiv sau nul, iar $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ sînt *cifre*, adică au fiecare una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dacă pentru o expresie (1) există un indice r astfel ca $a_r < 9$ și $a_s = 9$ pentru orice $s > r$, atunci se convine a se identifica expresia (1) cu numărul real

(2) $$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + (a_r + 1) \cdot 10^{-r} + 0 \cdot 10^{-r-1} + 0 \cdot 10^{-r-2} + \ldots$$

Suma (1) se reprezintă prin simbolul $n, a_1a_2\ldots a_k\ldots$ și se spune că n este partea întreagă a lui x, iar $a_1, a_2, \ldots, a_k \ldots$ sînt zecimalele numărului real x.

De asemenea, se convine să se identifice expresiile de forma

(3) $$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + a_k \cdot 10^{-k} + 0 \cdot 10^{-k-1} + 0 \cdot 10^{-k-2} + \dots$$

cu numerele *raționale*

(4) $$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + a_k \cdot 10^{-k}.$$

Reamintim de asemenea că orice număr rațional poate fi reprezentat printr-o sumă de forma (1). Numerele a_k din această exprimare vor avea atunci o particularitate remarcabilă; există pentru fiecare număr rațional două numere naturale r, s astfel ca cifrele a_k din scrierea zecimală a acelui număr rațional au proprietatea de *periodicitate*:

(5) $$\text{pentru } k > r,\ a_{k+s} = a_k.$$

De exemplu, $\frac{4}{7} = 0{,}571428571428\dots$ are $r = 0$ și $s = 6$.

Reciproc, orice număr real (1) cu proprietatea (5) reprezintă scrierea zecimală a unui număr rațional. Exemplu: $0{,}12533\dots3\dots = \frac{376}{3\,000}$.

Numerele reale se adună și se înmulțesc, făcînd adunări și înmulțiri ale sumelor (1) corespunzătoare și grupînd termenii rezultați, în așa fel încît să obținem sume de forma (1). Exemple: $0{,}11\dots1\dots + 0{,}33\dots3\dots = 0{,}44\dots$; $3 \times 0{,}33\dots3\dots = 1$.

Orice număr real poate fi aproximat prin numere raționale, cu o precizie oricît de mare vrem. De exemplu, dacă aproximăm numărul real (1) prin suma primilor săi $k + 1$ termeni, atunci eroarea făcută este mai mică decît 10^{-k} și eroarea se face *prin lipsă*. Dacă se ia însă suma primilor $k + 1$ termeni, la care se adaugă 10^{-k}, atunci se obține o aproximare cu o eroare de cel mult 10^{-k} *prin adaus*.

Ne propunem acuma să folosim numerele reale pentru a defini *raportul a două segmente* și *produsul unui număr real cu un segment*. Aceste operații ne vor permite să stabilim o corespondență bijectivă între mulțimea numerelor reale pozitive și mulțimea punctelor semidreptei s, astfel ca ordonarea numerelor reale să corespundă ordonării segmentelor de pe s, avînd o extremitate în originea semidreptei s.

Proprietățile date pînă acuma nu sînt suficiente pentru a obține aceste construcții. Numerele reale au două proprietăți importante:

1. *Fiind date două numere reale pozitive x și a, există un număr natural n, astfel ca să avem $x < na$.*

2. *Fiind date două șiruri de numere reale $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ $(y_1, y_2, y_3, \dots)$ astfel ca*

$$x_1 < x_2 < \dots x_k < x_{k+1} < \dots < y_{k+1} < y_k < \dots < y_2 < y_1,$$

există cel puțin un număr a astfel ca să avem

$$x_i < a < y_j$$

pentru orice indici i și j. Numărul a, ce verifică această condiție, este unic, dacă diferențele $y_k - x_k$ tind către zero, deci dacă aceste diferențe devin mai mici decît orice număr pozitiv dat, cînd k este ales suficient de mare.

Aceste proprietăți sînt consecințe ale definiției numerelor reale.

Proprietățile geometrice analoage acestor proprietăți ale numerelor reale se exprimă prin următoarele axiome, numite *axiomele de continuitate*:

Axioma lui Arhimede. Dacă A, P sînt două puncte ale unei semidrepte s, cu originea O, există pe s o mulțime finită de puncte $\{A_2, A_3, \dots, A_k\}$ astfel încît să fie verificate proprietățile (fig. I.69):

$$A \in |OA_2|,\ A_2 \in |OA_3|, \dots,\ A_i \in |OA_{i+1}|, \dots, A_{k-1} \in |OA_k|,$$
$$|OA| \equiv |AA_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \dots \equiv |A_iA_{i+1}| \equiv \dots \equiv |A_{k-1}A_k|,\quad P \in |OA_k|.$$

Fig. I.69

Axioma lui Arhimede mai poate fi formulată în modul următor:

Fiind date pe semidreapta s două puncte A, P, există cel puțin un număr natural k, astfel ca să avem $|OP| < k|OA|$.

Axioma lui Cantor-Dedekind. Fiind date pe o dreaptă d două șiruri de puncte $A_1, A_2, \dots A_i, A_{i+1}, \dots$ și $B_1, B_2, \dots B_i, B_{i+1}, \dots$ astfel ca, pentru orice indice i, segmentul $[A_{i+1}B_{i+1}]$ să fie conținut în segmentul $[A_iB_i]$, există cel puțin un punct P, situat pe fiecare din segmentele $[A_1B_1], [A_2B_2], \dots [A_iB_i], [A_{i+1}B_{i+1}], \dots$ (fig. I.70).

Fig. I.70

Fiind dat un punct A_1 pe semidreapta s, avînd originea O, să asociem lui A_1 șirul de puncte $A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ aparținînd lui s și definite prin relațiile (6), (fig. I.71).

Fig. I.71

(6) $$A = A_1 \in |OA_2|,\ A_n \in |A_{n-1}A_{n+1}|,\ n = 2, 3, \dots$$
$$|OA_1| \equiv |A_1A_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \dots \equiv |A_{n-1}A_n| \equiv \dots$$

În acest caz, segmentul $|OA_n|$ reprezintă suma a n segmente congruente cu segmentul $|OA|$. Vom scrie

(7) $$|OA_n| \equiv n \cdot |OA|$$

și vom spune că $|OA_n|$ este *produsul* dintre numărul natural n și segmentul $|OA|$.

Fie k un număr natural. Folosind teorema lui Thales restrînsă, se poate defini punctul B_k de pe semidreapta s, pentru care (fig. I.72)

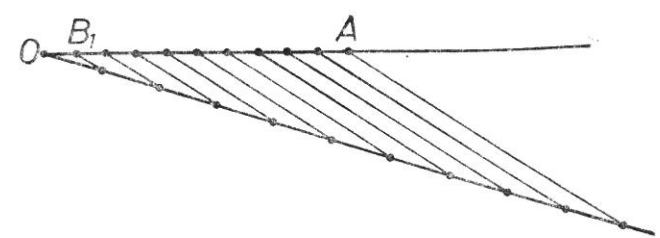

Fig. I.72

(8) $$|OA| = 10^k \cdot |OB_k|.$$

Vom spune că $|OB_k|$ reprezintă *cîtul* împărțirii segmentului $|OA|$ prin 10^k sau *produsul* dintre numărul rațional 10^{-k} și segmentul $|OA|$. Vom scrie

$$|OB_k| = 10^{-k} \cdot |OA|.$$

Să considerăm *segmentele semiinchise*

$$[A_nA_{n+1}| = |A_nA_{n+1}| \cup \{A_n\},\ n = 1, 2, \dots,$$

unde $A_1 = A$. Din formulele (6) rezultă că mulțimile $[A_nA_{n+1}|$ sînt disjuncte două cîte două și că avem egalitatea

(9) $$[OA_n| = |OA| \cup [AA_2| \cup [A_2A_3| \cup \dots \cup [A_{n-1}A_n|$$

pentru orice număr natural n.

Dacă P este un punct oarecare al semidreptei s, axioma lui Arhimede ne asigură că există cel puţin un număr natural n, astfel ca $P \in |OA_{n+1}|$. Dacă n este cel mai mic număr natural cu această proprietate, vom avea

$$P \in [A_n A_{n+1}],$$

unde convenim să notăm

$$A_0 = O, \ A_1 = A.$$

Punctul P fiind un punct arbitrar pe semidreapta s, rezultă că avem egalitatea de mulţimi

(11) $$s = |A_0A_1| \cup [A_1A_2| \cup [A_2A_3| \cup \ldots \cup [A_iA_{i+1}| \cup \ldots$$

şi această egalitate este adevărată pentru orice punct $A \in s$, cu condiţia să definim punctele A_i prin formulele arătate anterior.

Dacă $P \in [A_n A_{n+1}|$, vom spune că segmentul $|A_0A_1|$ se cuprinde de n ori în segmentul $|A_0P|$; n este un număr întreg pozitiv sau nul. Dacă $P = A_n$ putem scrie

$$|A_0P| \equiv |A_0A_n| \equiv n \cdot |A_0A_1|.$$

Dacă $P \in |A_nA_{n+1}|$, avem

(12) $$|A_0P| \equiv |A_0A_n| + |A_nP| \equiv n \cdot |A_0A_1| + |A_nP|,$$

unde

(13) $$|A_nP| < |A_0A_1|.$$

Fie $P_1 \in |A_0A_1|$ acel punct al segmentului $|A_0A_1|$, pentru care avem

(14) $$|A_0P_1| \equiv |A_nP| \text{ (fig. 1.73).}$$

Demonstrație foarte importantă ce arată [illegible] număr poate fi reprezentat pe o dreaptă

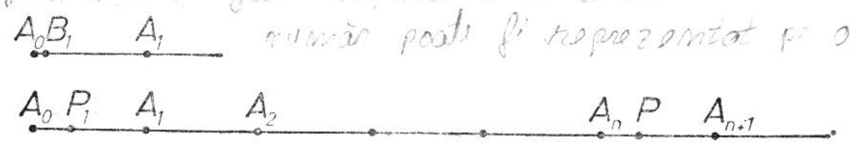

Fig. 1.73

Să presupunem că segmentul $|A_0B_1|$ se cuprinde de a_1 ori în segmentul $|A_0P_1|$, deci că avem

(15) $$|A_0P_1| \geqslant a_1 \cdot |A_0B_1|, \ |A_0P_1| < (a_1 + 1) \cdot |A_0B_1|.$$

Folosind formula

(16) $$|A_0B_1| \equiv 10^{-1} \cdot |A_0A_1|$$

şi formula (12), vom putea scrie

(17) $$|A_0P| \equiv n \cdot |A_0A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0A_1| + |A_0P_2|,$$

unde $|A_0P_2|$ este un segment mai mic decît segmentul $|A_0B_1|$, sau este *segmentul nul*, reprezentat prin $|A_0A_0|$, dacă

(18) $$|A_0P| \equiv n \cdot |A_0A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0A_1|.$$

Din relaţiile (13), (14), (15) rezultă că a_1 este o cifră, deci că are una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Să presupunem acuma că segmentul $|A_0B_2|$ se cuprinde de a_2 ori în segmentul $|A_0P_2|$. Vom avea atunci relaţiile

$$|A_0P_2| \equiv a_2 \cdot |A_0B_2| + |A_0P_3|$$

$$0 \leqslant a_2 \leqslant 9, \ |A_0P_3| < |A_0B_2|, \ |A_0B_2| \equiv 10^{-2} \cdot |A_0A_1|.$$

Deducem din (17) relaţia

$$|A_0P| \equiv n \cdot |A_0A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0A_1| + a_2 \cdot 10^{-2} \cdot |A_0A_1| + |A_0P_3|.$$

Putem scrie ultima relaţie sub forma

$$|A_0P| \equiv (n + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2}) \cdot |A_0A_1| + |A_0P_3|, \ |A_0P_3| < |A_0B_2|.$$

Procedeul poate fi continuat, exprimînd segmentul $|A_0P_3|$ cu ajutorul segmentului $|A_0B_3|$ şi al unui *rest* $|A_0P_4|$, care va fi mai mic decît segmentul $|A_0B_3|$. După k operaţii de acest fel, ajungem la o relaţie de forma

(19) $$|A_0P| \equiv (n + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + a_k \cdot 10^{-k}) \cdot |A_0A_1| + |A_0P_{k+1}|,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sînt cifre, iar $|A_0P_{k+1}|$ este un segment mai mic decît segmentul $|A_0B_k| \equiv 10^{-k} \cdot |A_0A_1|$, putînd fi segmentul nul, dacă nu apare rest după cele k operaţii.

Rezultă că, dacă punctul A este fixat pe semidreapta s, fiecărui punct $P \in s$ i se asociază un număr real,

(20) $$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + a_k \cdot 10^{-k} + \ldots$$

astfel încît să avem, pentru orice număr natural k, o relaţie (19).

Definiţie. **Se spune că numărul real x, definit prin (19 şi 20) reprezintă, abscisa punctului P, faţă de punctul A, pe semidreapta s; x se mai numeşte raportul segmentului $|OP|$ prin segmentul $|OA|$ şi se scrie $x = |OP| / |OA|$ sau $|OP| \equiv x \cdot |OA|$.**

Fie k cel mai mare număr întreg, pentru care avem

(21) $$10^k \cdot |A_0P| \leqslant |A_0A_1|.$$

Vom avea

$$|A_0P| \leqslant 10^{-k} \cdot |A_0A_1|, \ |A_0P| > 10^{-k-1} \cdot |A_0A_1|.$$

Există un număr natural k, pentru care relaţia (21) nu este adevărată. Într-adevăr, din axioma lui Arhimede rezultă că, pentru N suficient de mare, avem $N |A_0P| > |A_0A_1|$.

Rezultă că abscisa (20) a punctului $P \in s$ are cel puţin un coeficient n sau a_k diferit de zero. Deci:

Abscisa oricărui punct P de pe semidreapta s este un număr real diferit de zero.

Fie P, Q două puncte pe semidreapta s, astfel ca $P \in |A_0Q|$ (fig. 1.74). Din axioma lui Arhimede deducem că există un indice k, astfel ca

$$10^k |PQ| > |A_0A_1| \text{ sau } |PQ| > 10^{-k} |A_0A_1|.$$

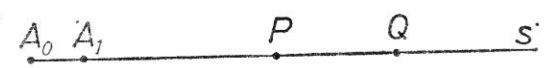

Fig. 1.74

Rezultă că dacă notăm prin x și y abscisele punctelor P, Q, atunci avem $x < y$. Deci am arătat că relația $P \in |A_0Q|$ implică $x < y$. Aceasta arată că:

Abscisele a două puncte distincte de pe o semidreaptă s sînt două numere reale pozitive distincte.

Reținem că punctul A_n are abscisa n, iar punctul B_k are abscisa 10^{-k} ; în particular, $A_1 = A$ are abscisa 1, iar B_1 are abscisa 10^{-1}.

În acest fel, *am construit o aplicație injectivă de la mulțimea s la mulțimea numerelor reale pozitive.*

Se pune problema de a vedea dacă această aplicație este și surjectivă. Vom arăta că răspunsul este afirmativ.

Pentru a arăta că aplicația construită este surjectivă, trebuie să arătăm că fiecărui număr real pozitiv x i se poate asocia un punct M pe semidreapta s, astfel că x să fie abscisa lui M, deci astfel ca $|OM| \equiv x \cdot |OA|$.

Să presupunem că x are expresia (1). Pentru fiecare indice natural k, să notăm prin M_k punctul semidreptei s, care are proprietatea

(23) $$|OM_k| \equiv n \cdot |OA| + a_1 \cdot |OB_1| + a_2 \cdot |OB_2| + \dots + a_k \cdot |OB_k|.$$

Să considerăm apoi punctele $N_k \in s$, pentru care avem

(24) $$|ON_k| \equiv |OM_k| + |OB_k|.$$

Avem relațiile

$$|OM_k| \equiv |OM_{k-1}| + a_k \cdot |OB_k|,$$

$$|ON_k| \equiv |OM_k| + |OB_k| \equiv |OM_{k-1}| + (a_k + 1)\,|OB_k|$$

$$|ON_{k-1}| \equiv |OM_{k-1}| + |OB_{k-1}| \equiv |OM_{k-1}| + 10 \cdot |OB_k|.$$

Din aceste relații rezultă că avem, pentru orice număr natural k,

(25) $$|OM_{k-1}| \leqslant |OM_k| < |ON_k| \leqslant |ON_{k-1}|.$$

Avem de asemenea

(26) $$|M_kN_k| \equiv |OB_k| \equiv \cdot 10^{-k} \cdot |OA|.$$

Relațiile (25), (26) arată că punctele M_k, N_k sînt în condițiile aplicării axiomei lui Cantor-Dedekind. Aceasta înseamnă că există un unic punct M, comun tuturor segmentelor $[M_kN_k]$.

Fie u abscisa punctului M. Din relațiile

$$|OM_k| < |OM| < |ON_k|$$

deducem că avem, pentru orice indice k,

(27) $$x_k < u < x_k + 10^{-k},$$

unde am notat prin x_k abscisa punctului M_k, deci x_k este suma primilor $k+1$ termeni din suma infinită (1). Formula (27) arată că $u = x$, deci abscisa punctului M este numărul dat x.

Figura 1.75 ilustrează cazul $n = 1$, $a_1 = 3$ și $a_2 = 8$.

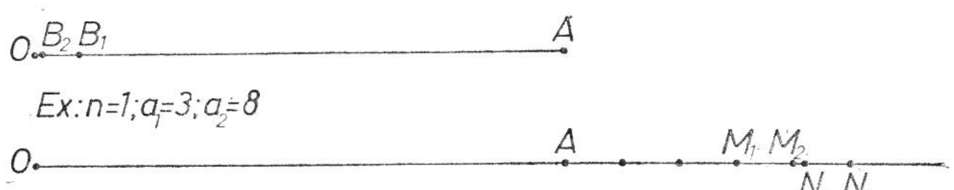

Fig. I.75

În concluzie:

Dacă fixăm un punct A pe o semidreaptă s, avînd originea O, și dacă asociem fiecărui număr real pozitiv x acel punct $M \in s$, pentru care $|OM| \equiv x \cdot |OA|$ obținem o aplicație bijectivă de la mulțimea $\mathbb{R}_+^*$ a numerelor reale pozitive pe mulțimea s.

Proprietățile produsului unui număr real pozitiv cu un segment.

Dacă $u = |OA|$ este un segment și dacă m, n sînt numere naturale, avem

$$(m + n) \cdot u \equiv m \cdot u + n \cdot u, \quad (mn) \cdot u \equiv m \cdot (n \cdot u) \text{ (fig. I.76)}$$

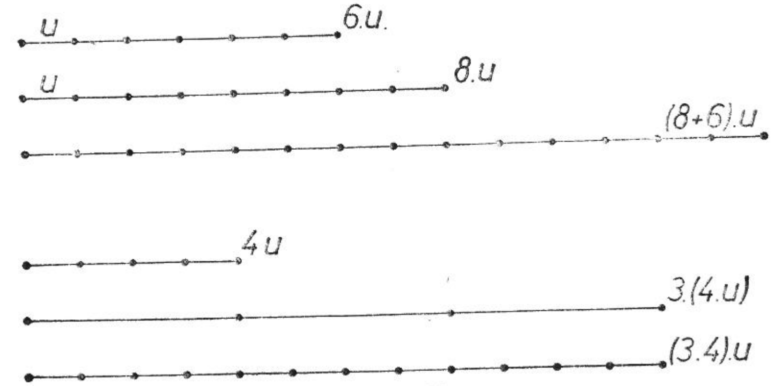

Fig. I.76

Fie $u_k = 10^{-k} \cdot u$ și fie k, r, s numere naturale. Putem scrie

$$(m \cdot 10^{-r} + n \cdot 10^{-s}) \cdot u \equiv (m \cdot 10^{-r} + n \cdot 10^{-s}) \cdot (10^{r+s} \cdot u_{r+s}) \equiv (m \cdot 10^s + n \cdot 10^r) \cdot u_{r+s} \equiv$$
$$\equiv m \cdot 10^s \cdot u_{r+s} + n \cdot 10^r \cdot u_{r+s} \equiv m \cdot u_r + n \cdot u_s \equiv m \cdot 10^{-r} \cdot u + n \cdot 10^{-s} \cdot u.$$

În mod analog se demonstrează că

$$(m \cdot 10^{-s} \cdot n \cdot 10^{-r}) \cdot u \equiv m \cdot 10^{-r} \cdot ((n \cdot 10^{-s}) \cdot u).$$

Combinînd aceste egalități, deducem că dacă x_k este un număr real avînd cel mult k zecimale nenule și dacă y_h este un număr real avînd cel mult h zecimale nenule, atunci

$$(x_k + y_h) \cdot u \equiv x_k \cdot u + y_h \cdot u, \quad (x_k \cdot y_h) \cdot u \equiv x_k \cdot (y_h \cdot u).$$

În general, se demonstrează următoarea

Teoremă. Pentru orice segment u și orice numere reale pozitive x, y avem

$$\boxed{(x + y) \cdot u \equiv x \cdot u + y \cdot u, \quad (xy) \cdot u \equiv x \cdot (y \cdot u).}$$

Demonstrația se face aproximînd numerele x, y prin numere x_k, y_h avînd k, respectiv h zecimale diferite de zero.

Fie $u = |OA|$, $v = |OB|$ și fie m un număr natural. Avem evident

$$m \cdot (u + v) \equiv m \cdot u + m \cdot v \text{ (fig. I.77).}$$

Procedînd cum s-a arătat mai sus, putem demonstra formula

(28) $$\boxed{x \cdot (u + v) \equiv x \cdot u + x \cdot v}$$

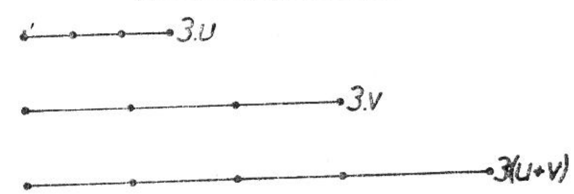

Fig. I.77

pentru orice număr x de forma $m \cdot 10^{-r}$. Formula se extinde apoi la cazul unui număr real pozitiv x arbitrar. Deci:

Teoremă. Pentru orice număr real pozitiv x şi pentru orice segmente u, v are loc egalitatea (28).

16. Măsurarea unghiurilor

Pentru a defini măsura unui unghi, vom folosi unghiul drept ca etalon, împărţirea unui unghi oarecare în două unghiuri congruente cu ajutorul bisectoarei şi scrierea numerelor reale sub forma

(1) $$x = x_0 + x_1 \cdot 2^{-1} + x_2 \cdot 2^{-2} + \dots + x_k \cdot 2^{-k} + \dots = (x_0, x_1 x_2 \dots)_2,$$

unde x_0 este un număr întreg, iar $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ sînt egale fiecare cu 0 sau cu 1. Dacă x aparţine intervalului închis $[0, 1]$, atunci x_0 este de asemenea egal cu 0 sau cu 1. Scrierea (1) se numeşte *scriere binară* şi se deosebeşte de scrierea zecimală prin faptul că puterile negative ale lui 10 sînt înlocuite prin puterile negative ale lui 2. Exemplu: $\frac{1}{5} = (0,001100\dots)_2$.

Fie $D = \widehat{hk}$ un unghi drept şi fie m bisectoarea unghiului D. Se formează unghiurile $D_0 = \widehat{hm}$, $D_1 = \widehat{mk}$ (fig.I.78).

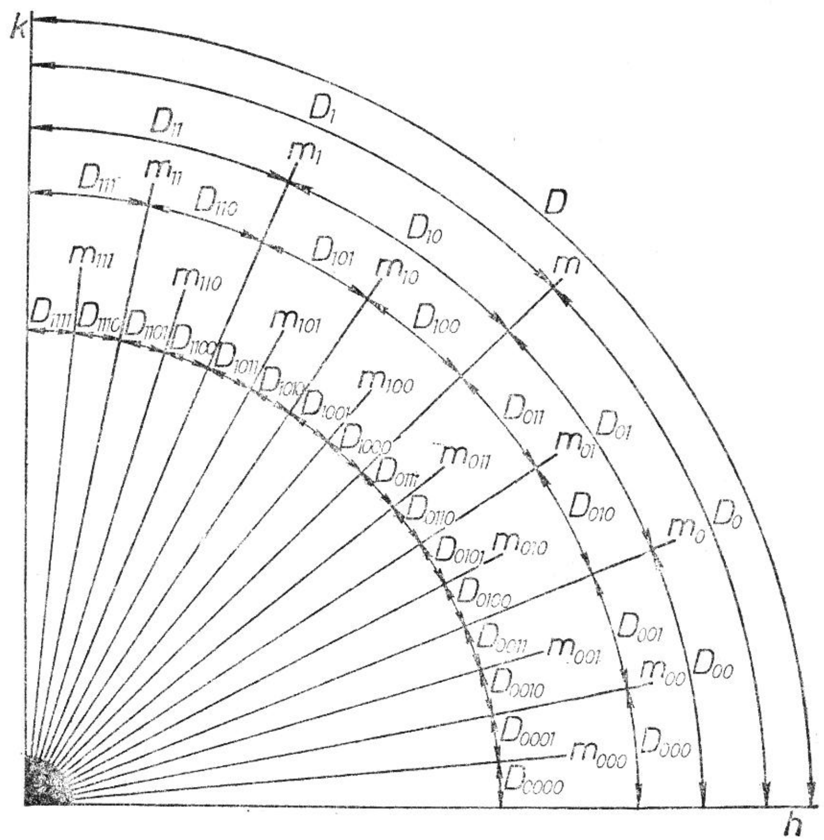

Fig. I.78

Fie m_0, m_1 bisectoarele unghiurilor D_0 respectiv D_1. Se formează unghiurile

$$D_{00} = \widehat{hm_0},\quad D_{01} = \widehat{m_0 m},\quad D_{10} = \widehat{mm_1},\quad D_{11} = \widehat{m_1 k}.$$

Notăm prin m_{ij} bisectoarea unghiului D_{ij}, pentru $i, j = 0$ sau 1. Semidreapta m_{ij} este latură la două unghiuri: unul, conţinut în unghiul $\widehat{hm_{ij}}$, al doilea conţinut în unghiul $\widehat{m_{ij}k}$. Primul din aceste unghiuri va fi notat D_{ij0} iar al doilea va fi notat D_{ij1}. Continuînd acest procedeu, obţinem un sistem de unghiuri

$$D_{i_1 i_2 \dots i_r}; \qquad i_1, \dots, i_r \in \{0, 1\},$$

şi de semidrepte $m_{i_1 \dots i_{r-1}}$, astfel încît:

1. Unghiul D este congruent cu $2^r \cdot D_{i_1 \dots i_{r-1}}$, oricare ar fi indicii $i_1, \dots, i_r$.

2. $m_{i_1 \dots i_{r-1}}$ este bisectoarea unghiului $D_{i_1 \dots i_{r-1}}$ şi este latură la fiecare din unghiurile $D_{i_1 \dots i_{r-1}0}$, $D_{i_1 \dots i_{r-1}1}$.

3. Semidreapta $m_{j_1 \dots j_r}$ este interioară unghiului format de h şi de $m_{i_1 \dots i_r}$ dacă şi numai dacă există un număr natural $s \leq r$ astfel ca

(2) $$j_1 = i_1,\ j_2 = i_2,\ \dots,\ j_{s-1} = i_{s-1},\ j_s < i_s.$$

Această condiţie este echivalentă cu relaţia

$$i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i_r \cdot 2^{-r} > j_1 \cdot 2^{-1} + \dots + j_r \cdot 2^{-r}.$$

Numărul sistemelor de indicii $(j_1, \dots, j_r)$, care verifică relaţiile (2) este egal cu $i_s \cdot 2^{r-s}$, deoarece există i_s valori posibile pentru j_s şi cîte două valori posibile pentru fiecare din indicii $j_{s+1}, \dots, j_r$.

4. Unghiurile $D_{i_1 \dots i_r}$ sînt congruente între ele, pentru fiecare indice r fixat.

Exerciţii

1. *Să se completeze figura 1.78 cu semidreptele $m_{i_1 \dots i_r}$, unde $r \leq 6$. Să se noteze unghiurile formate din cîte două semidrepte succesive din semidreptele desenate.*

2. *Să se reprezinte pe figură unghiurile*

$$D_0,\ D_{00},\ D_{000},\ D_1,\ D_{10},\ D_{11},\ D_{111},\ D_{1111}.$$

Să ne propunem acuma să măsurăm un unghi ascuţit dat $U = \widehat{hs}$, unde s este o semidreaptă interioară unghiului D.

Dacă $s = m$, punem măs $U = 2^{-1}$.

Dacă $s = m_0$, punem măs $U = 2^{-2}$.

Dacă $s = m_1$, punem măs $U = 2^{-1} + 2^{-2}$.

În general dacă

$$s = m_{i_1 \dots i_r}$$

punem

(3) $$\text{măs } \widehat{hm_{i_1 \dots i_r}} = i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i_r \cdot 2^{-r} + 2^{-r-1}.$$

Definiţia măsurii unghiului

(4) $$U_{i_1 \dots i_r} = \widehat{hm_{i_1 \dots i_r}}$$

ține seama de faptul că acest unghi reprezintă suma acelor unghiuri $D_{j_1 j_2 \dots j_r}$, pentru care indicii $j_1, \dots, j_r$ se găsesc în una din situațiile:

1. $j_1 < i_1$, $j_2 = 0$ sau 1, $j_3 = 0$ sau 1, ..., $j_r = 0$ sau 1 (fig. 1.79),

2. $j_1 = i_1$, $j_2 < i_2$, $j_3 = 0$ sau 1, ..., $j_r = 0$ sau 1 (fig. 1.80).

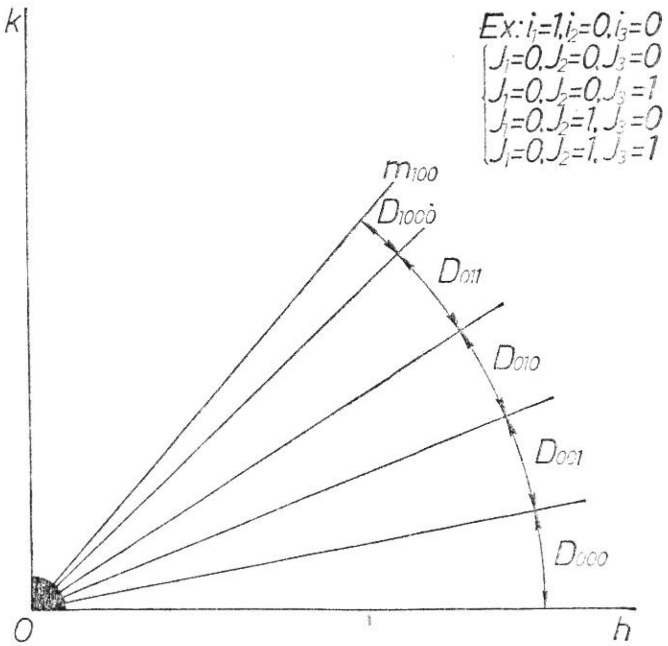

Fig. 1.79

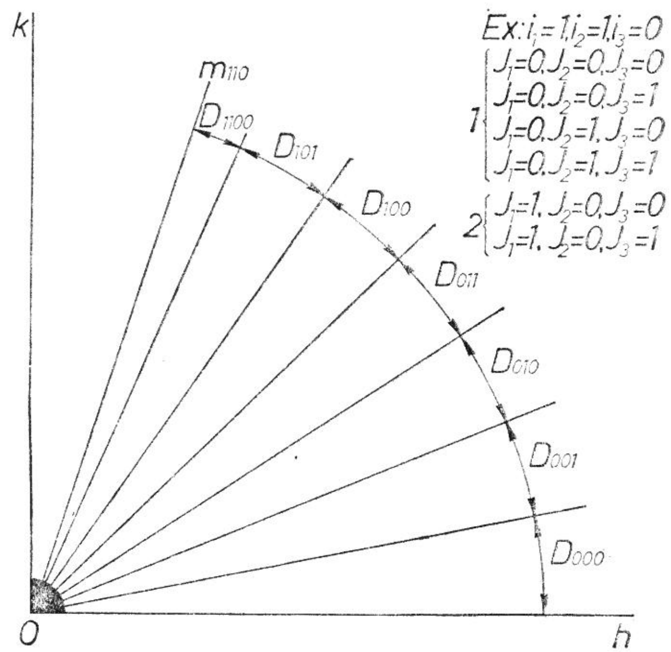

Fig. 1.80

3. $j_1 = i_1$, $j_2 = i_2$, $j_3 < i_3$, $j_4 = 0$ sau 1, ..., $j_r = 0$ sau 1,

....

$r - 1 \cdot j_1 = i_1$, $j_2 = i_2$, ..., $j_{r-2} = i_{r-2}$ $j_{r-1} < i_{r-1}$ $j_r = 0$ sau 1,

$r \cdot j_1 = i_1$, $j_2 = i_2$, ..., $j_{r-1} = i_{r-1}$, $j_r < i_r$,

și a unghiului $D_{i_1 \dots i_r 0}$. Avem $2^{r-k} i_k$ unghiuri de tipul k, pentru $k = 1, 2, \dots, r$, fiecare avînd măsura 2^{-r}; măsura unghiului $D_{i_1 \dots j_r 0}$ este 2^{-r-1}. Suma măsurilor acestor unghiur va fi

$$2^{-r}(i_1 \cdot 2^{r-1} + i_2 \cdot 2^{r-2} + \dots + i_{r-1}\, 2 + i_r) + 2^{-r-1}$$

deci coincide cu suma din (3).

Dacă $U = \widehat{hs}$ este un unghi arbitrar conținut în unghiul D, alegem, pentru fiecare indice r, acea bisectoare $m_{i}, \dots i_r$, pentru care semidreapta s este interioară unghiului $U_{i_1 \dots i_r}$ sau este o latură a acestui unghi și pentru care suma (3) are valoarea minimă. Punem atunci

$$\text{măs}_r(U) = i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i^r \cdot 2^-{}_r.$$

Numărul rațional $\text{măs}_r\,(U)$ va fi numit *aproximația de ordin* r a măsurii unghiului U. Cînd se trece de la aproximația de ordin r la aproximația de ordin $r + 1$, coeficienții $i_1, \dots, i_r$ rămîn neschimbați și se adaugă un termen

$$i_{r+1} \cdot 2^{-r-1},$$

unde i_{r+1} este 0 sau 1. Rezultă că prin considerarea aproximațiilor succesive ale măsurii unghiului U se obține un număr real bine determinat

$$i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i_r \cdot 2^{-r} + \dots$$

care va fi prin definiție *măsura unghiului* ascuțit U.

Dacă unghiul U este obtuz, considerăm unghiul $U_1 = 2^{-1} \cdot U$, obținut cu ajutorul bisectoarei lui U, și definim

$$\text{măs}U = 2 \cdot \text{măs}U_1.$$

Exerciții

1. *Să se arate care sînt măsurile următoarelor unghiuri:*

$$U_0,\ U_1,\ U_{00},\ U_{01},\ U_{10},\ U_{11},\ U_{010},\ U_{111},\ U_{1111}.$$

2. *Să se arate care din următoarele două unghiuri este mai mare decît celălalt*

$$D_{111} \text{ sau } D_0?$$

3. *Să se arate că dacă unghiul U reprezintă suma unghiurilor* U', U'', *atunci* $\text{măs}U = \text{măs}U' + \text{măs}U''$.

4. *Să se arate că dacă* $U' < U$, *atunci* $\text{măs}U' < \text{măs}U$.

În definiția măsurii unui unghi dată mai sus, am presupus că unghiul drept D are măsura 1.

În practică se folosesc însă alte moduri de măsurare a unghiurilor, care se deduc din definiția noastră prin înmulțire cu cîte un factor.

Astfel, pentru a obține măsura unui unghi în *radiani*, înmulțim numărul $\text{măs}U$ prin $\pi/2$, ceea ce corespunde faptului că un unghi drept are $\pi/2$ radiani.

Pentru a obține măsura unui unghi U în *grade sexagesimale*, înmulțim numărul $\text{măs}U$ prin 90, ceea ce corespunde faptului că măsura unghiului drept, în grade sexagesimale, este 90°.

Exerciții

1. *Să se exprime în radiani și apoi în grade sexagesimale măsurile următoarelor unghiuri:*

$$D_0,\ D_1,\ D_{010},\ U_{01},\ U_{101},\ U_{000},\ U_{11101}.$$

2. *Folosind identitatea*

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)$$

să se calculeze sumele

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-n},$$

$$4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \dots + 4^{-n},$$

și să se deducă scrierea binară a numerelor 1/3, 2/3, 4/3.

3. *Să se exprime măsura unui unghi al unui triunghi echilateral, în scriere binară, în radiani și în grade sexagesimale.*

4. *Care este măsura în grade sexagesimale și apoi în radiani, a unghiului D_0? Dar a unghiului U_{010}?*

Să se dea o formulă generală pentru măsurile unghiurilor U_0, U_{00}, U_{000}, U_{0000}, ...

și apoi pentru măsurile unghiurilor U_1, U_{11}, U_{111}, U_{111}, ...

17. Teorema lui Thales

Să începem prin a demonstra următoarea:

T e o r e m ă . Fie OAA' un triunghi și fie $s = |OA$, $s' = |OA'$ laturile unghiului $\widehat{AOA'}$. Să presupunem că punctele $M \in s$, $M' \in s'$ sînt astfel încît

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|}.$$

În acest caz, dreptele AA', MM' sînt paralele (fig. I.81).

Demonstrație. Fie x numărul real, pentru care avem $|OM| \equiv x \cdot |OA|$. Ipoteza din enunț arată că avem și $|OM'| \equiv x \cdot |OA'|$. Să presupunem că

$$x = n,\ a_1a_2a_3\dots a_k\dots$$

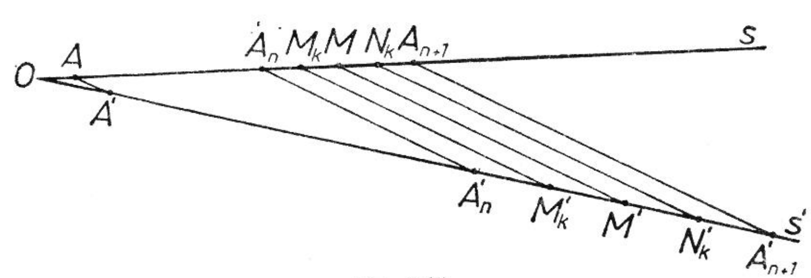

Fig. I.81

și să notăm prin $x_k = n,\ a_1\dots a_k$ aproximarea zecimală prin lipsă, de ordinul k, a numărului x. Considerăm punctele $M_k \in s$, $M'_k \in s'$ date de

$$|OM_k| \equiv x_k \cdot |OA|,\quad |OM'_k| \equiv x_k \cdot |OA'.$$

Fie apoi $y_k = x_k + 10^{-k}$ și fie punctele $N_k \in s$, $N'_k \in s'$ date de

$$|ON_k| \equiv y_k \cdot |OA|,\quad |ON'_k| \equiv y_k \cdot |OA'|.$$

Din teorema lui Thales restrînsă rezultă că avem

$$M_kM'_k \parallel N_kN'_k \parallel AA',$$

oricare ar fi indicele $k = 1, 2, 3, \dots$. Pentru orice k avem

$$x_k \leqslant x < y_k,$$

deci

$$M \in [M_kN_k],\quad M' \in [M'_kN'_k].$$

Fie L_k banda închisă limitată de dreptele paralele $M_kM'_k$, $N_kN'_k$ și fie M'' punctul de intersecție al semidreptei s' cu paralela dusă prin M la AA'. Avem $M \in L_k$, deci $MM'' \subset L_k$, oricare ar fi k. Deci $M'' \in L_k \cap s' = [M'_kN'_k]$. Dar M' este singurul punct comun segmentelor $[M'_1N'_1]$, $[M'_2N'_2]$, ..., $[M'_kN'_k]$, ... Rezultă $M'' = M'$, deci $MM' \parallel AA'$.

Proprietatea demonstrată admite următoarea reciprocă:

T e o r e m ă. Dacă M, M' sînt două puncte situate pe laturile unui unghi propriu $\widehat{AOA'}$, astfel ca $M \in |OA$, $M' \in |OA'$ și astfel ca $MM' \parallel AA'$, atunci avem

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|}.$$

Demonstrație. Fie $x = \dfrac{|OM|}{|OA|}$ și fie punctul $M'' \in |OA'$ dat de relația $|OM''| \equiv x \cdot |OA'|$. Avem atunci, potrivit proprietății precedente, $MM'' \parallel AA'$. Dar prin punctul M se poate duce o singură paralelă la dreapta AA'. Avem deci $MM'' = MM'$. Rezultă $\{M'\} = MM' \cap (|OA') = MM'' \cap (|OA') = \{M''\}$, deci $|OM'| \equiv x \cdot |OA'|$, sau $\dfrac{|OM'|}{|OA'|} = x = \dfrac{|OM|}{|OA|}$.

Cele două proprietăți pot fi strînse într-un singur enunț, sub forma următoare.

T e o r e m a l u i T h a l e s. Fie $\widehat{ss'}$ un unghi propriu cu vîrful O și fie punctele distincte $A \in s$, $M \in s$, $A' \in s'$, $M' \in s'$. În aceste condiții, dreptele AA' și MM' sînt paralele dacă și numai dacă rapoartele $\dfrac{|OM|}{|OA|}$, $\dfrac{|OM'|}{|OA'|}$ sînt egale.

Aceasta este una din teoremele cele mai importante ale matematicii, avînd numeroase aplicații. Să dăm o primă aplicație:

Teoremă. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Atunci, (fig. I.82):

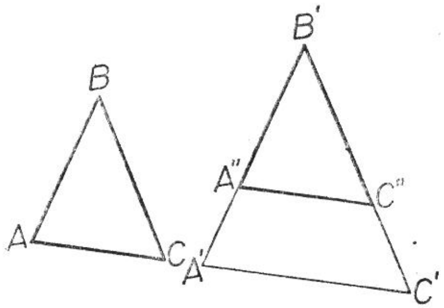

Fig. I.82

(1) $$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Demonstrație. Vom demonstra egalitatea primelor două rapoarte. În acest scop, considerăm punctele $A'' \in |B'A'$, $C'' \in |B'C'$ astfel ca $|B'A''| \equiv |BA|$ și $|B'C''| \equiv |BC|$. Triunghiurile BAC, $B'A''C''$ sînt congruente, în virtutea teoremei I de congruență.

Rezultă $\widehat{B'A''C''} \equiv \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, deci avem $A''C'' \parallel A'C'$. Din teorema lui Thales deducem

$$\frac{|A''B'|}{|A'B'|} = \frac{|B'C''|}{|B''C'|} \text{ sau } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

Egalitatea ultimelor două rapoarte din (1) se demonstrează în mod analog.

Corolar. În condițiile teoremei lui Thales, avem

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|} = \frac{|MM'|}{|AA'|}.$$

Demonstrație. Triunghiurile OMM', OAA' au unghiul $\hat{O}$ comun și $\hat{M} \equiv \hat{A}$, $\hat{M}' \equiv \hat{A}'$.

Teoremă. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Avem atunci $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ (fig. I.82).

Demonstrație. Considerăm punctele $A'' \in |B'A'$, $C'' \in |B'C'$ astfel ca

$$\frac{|A''B'|}{|A'B'|} = \frac{|C''B'|}{|C'B'|} = x,$$

unde x este valoarea comună a rapoartelor din enunț. Atunci vom avea

$$A''C'' \parallel A'C', \quad |A''B'| \equiv |AB|, \quad |B'C''| \equiv |BC|.$$

Din Corolar deducem

$$\frac{|A''C''|}{|A'C'|} = x,$$

deci $|A''C''| \equiv x \cdot |A'C'| \equiv |AC|$. Rezultă că triunghiurile ABC, $A''B'C''$ sînt congruente. Avem deci $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'' \equiv \hat{A}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'' \equiv \hat{C}'$.

Reamintim următoarea

Definiție. Două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ se numesc asemenea, dacă $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ și dacă $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.

Din proprietățile demonstrate mai sus, desprindem următoarele *criterii de asemănare*:

I. *Pentru ca triunghiurile ABC, $A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.*

(Ținînd seama că suma unghiurilor unui triunghi este congruentă cu suma a două unghiuri drepte, va fi suficient ca două din cele trei relații de congruență de unghiuri să fie verificate.)

II. *Pentru ca triunghiurile ABC, $A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ și $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$.*

III. *Pentru ca triunghiurile ABC, $A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.*

Aplicație. Teorema bisectoarei. Fie AA', $A' \in |BC|$, bisectoarea unghiului $\hat{A}$ în triunghiul ABC. Avem (fig. I.83)

(2) $$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

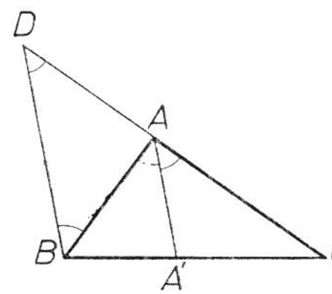

Fig. I.83

Demonstrație. Paralela dusă prin punctul B la bisectoarea $|AA'$ intersectează dreapta AC într-un punct D astfel ca $A \in |CD|$. Din $AA' \parallel BD$ rezultă $\widehat{BDA} \equiv \widehat{A'AC}$.

Avem prin urmare $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ABD} \equiv \frac{1}{2}\hat{A}$. Din teorema a doua a triunghiului isoscel deducem $|AB| \equiv |AD|$. Aplicînd acum teorema lui Thales paralelelor AA', DB și semidreptelor $|CA$, $|CA'$ obținem

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

deci formula (2) este demonstrată.

Deci:

Bisectoarea $|AA'$ a triunghiului ABC împarte latura $|BC|$ într-un raport egal cu raportul laturilor $|AB|$, $|AC|$.

Exerciţii

1. *Să presupunem că în triunghiul ABC avem $|AC| > |AB|$. Să se arate că bisectoarea celor două unghiuri suplementare unghiului $\hat{A}$ intersectează dreapta BC într-un punct A'' astfel ca $B \in |A''C|$ şi*

$$|A''B| / |A''C| = |AB| / |AC|. \qquad (3)$$

(*Indicaţie*. Se va arăta că bisectoarea celor două unghiuri suplementare unghiului $\hat{A}$ nu este paralelă cu BC. Notînd cu A'' punctul de intersecţie al dreptei BC cu această bisectoare, se va observa că $\widehat{AA'C} \equiv \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} > \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2} \equiv \widehat{AA'B}$, deci unghiul $\widehat{AA'C}$ este obtuz. Triunghiul $AA'A''$ este dreptunghic în A, deci nu poate avea nici un unghi obtuz. Aceasta înseamnă că avem $B \in |A''C|$. Relaţia (3) se va demonstra ducînd paralela BD' la AA'', cu $D' \in |AC|$ şi observînd că $|AD'| \equiv |AB|$.)

2. *Paralelele duse prin punctele B, C la bisectoarele AA', AA'' intersectează dreptele AC respectiv AB în punctele D, D' respectiv E, E', astfel ca $D' \in |AC$, $E' \in |AB$. Să se arate că triunghiurile ABC, ADE, $AD'E'$ sînt congruente cîte două şi că $DED'E'$ este un paralelogram.*

Aplicaţie. **Teorema lui Menelaus.** *Fie ABC un triunghi şi fie A', B', C' trei puncte coliniare distincte astfel ca $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Avem atunci:*

$$\frac{|A'B|}{|A'C|}\cdot\frac{|B'C|}{|B'A|}\cdot\frac{|C'A|}{|C'B|} = 1.$$

Demonstraţie. Considerăm perpendicularele AA'', BB'', CC'' duse din punctele A, B, C pe dreapta $A'B'C'$, şi presupunem că A'', B'', C'' sînt pe această dreaptă. Din perechile de triunghiuri asemenea

$$(BB''C', AA''C'), (CC''B', AA''B'), (BB''A', CC''A')$$

deducem egalităţile

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|BB''|}{|CC''|}, \quad \frac{|B'C|}{|B'A|} = \frac{|CC''|}{|AA''|}, \quad \frac{|C'A|}{|C'B|} = \frac{|AA''|}{|BB''|},$$

Înmulţind aceste relaţii membru cu membru, obţinem relaţia indicată.

Exerciţii

1. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea. În aceste triunghiuri, considerăm medianele $|AM|$, $|A'M'|$ şi înălţimile AP, $A'P'$, unde $M \in |BC|$, $M' \in |B'C'|$, $P \in BC$, $P' \in B'C'$. Să se arate că următoarele paranteze conţin perechi de triunghiuri asemenea:*

$$(ABM, A'B'M'), \qquad (ABP, A'B'P').$$

2. *Fie $ABCDE$ un pentagon regulat, deci un pentagon avînd laturile congruente două cîte două şi unghiurile $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, $\widehat{DEA}$, $\widehat{EAB}$ de asemenea congruente două cîte două. Arătaţi că:*

a. *$AD \parallel BC$, $AC \parallel DE$ şi $AE \parallel BD$;*

b. *Segmentele $|AC|$, $|BD|$ au un punct comun F, astfel încît $AFDE$ este un romb, deci un paralelogram cu laturile congruente două cîte două.*

c. $\dfrac{|DF|}{|BF|} = \dfrac{|AD|}{|BC|} = \dfrac{|BD|}{|AE|} = \dfrac{|BD|}{|FD|} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

d. *Unghiul $\widehat{AED}$ are $108°$, iar $\widehat{FCD}$ are $72°$.*

3. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$ şi $CA \perp C'A'$. Să se arate că cele două triunghiuri sînt asemenea.*

18. Linii poligonale şi poligoane

Reamintim că numim *segment închis* orice mulţime care se obţine adăugind unui segment $|AB|$ extremităţile A, B. Notăm $[AB] = |AB| \cup \{A, B\}$.

O *linie poligonală* cu n laturi este o mulţime de forma (fig. I.84):

$$L = [P_1 P_2] \cup [P_2 P_3] \cup \ldots \cup [P_n P_{n+1}].$$

Punctele $P_1 \ldots P_{n+1}$ se numesc *vîrfurile* liniei L, iar segmentele $|P_1 P_2|$, $|P_2 P_3|$, ..., $|P_n P_{n+1}|$ se numesc *laturile* liniei poligonale L.

O linie poligonală este definită prin vîrfurile sale şi prin ordinea în care se succed aceste vîrfuri.

Perimetrul unei linii poligonale este prin definiţie suma laturilor sale.

O linie poligonală L se numeşte *închisă*, dacă primul vîrf şi ultimul vîrf coincid, (fig. I. 85, 86, 87).

O linie poligonală închisă se numeşte *simplu închisă*, dacă numărul laturilor este egal cu numărul vîrfurilor distincte din acea linie şi dacă laturile liniei poligonale sînt disjuncte două cîte două. O linie poligonală simplu închisă se va numi *poligon*, (fig. I.85).

Un poligon va fi notat indicîndu-se vîrfurile sale, în ordinea dată, exceptînd ultimul vîrf P_{n+1}, care coincide cu primul. *Exemplu*: poligonul cu trei laturi $L = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ va fi notat ABC.

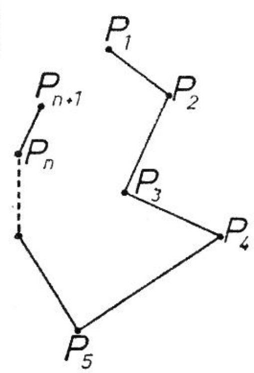

Fig. I.84

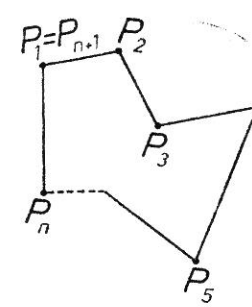

Fig. I.85

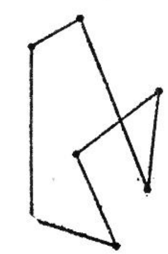
Fig. I.86

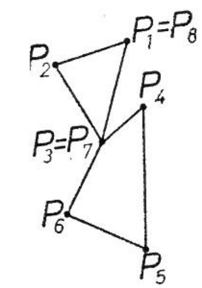

Fig. I.87

Exercițiu. *Să se arate că punctele A, B, C formează un triunghi dacă și numai dacă ele formează un poligon cu trei laturi (trilater).*

Poligoanele cu patru laturi vor fi numite *patrulatere*.

Un patrulater care are două laturi paralele se numește *trapez*. Oricare trei laturi ale unui trapez se găsesc de o aceeași parte a dreptei care conține a patra latură.

Definiție. Două poligoane avînd același număr de laturi, $P = P_1P_2...P_n$, $Q = Q_1Q_2...Q_n$ se numesc asemenea, dacă, oricare ar fi indicii distincți i, j, $k \in \{1, 2, ..., n\}$ avem

$$(1) \quad |P_iP_j| \equiv r\cdot|Q_iQ_j| \quad \text{și} \quad \widehat{P_iP_jP_k} \equiv \widehat{Q_iQ_jQ_k}.$$

r fiind un număr pozitiv.

Din teorema triunghiurilor asemenea rezultă că primele relații, care exprimă proporționalitatea lungimilor laturilor și diagonalelor celor două poligoane, constituie condiții suficiente de asemănare pentru cele două poligoane.

Dacă poligoanele P, Q verifică relațiile (1) cu $r = 1$, se spune că cele două poligoane sînt congruente.

Exercițiu. *Să se indice condițiile pe care trebuie să le îndeplinească patru puncte A, B, C, D dintr-un plan, pentru ca aceste puncte, considerate în ordinea indicată, să formeze un patrulater.*

Poligoanele cu cinci laturi se numesc *pentagoane*. Poligoanele cu șase laturi se numesc *hexagoane*.

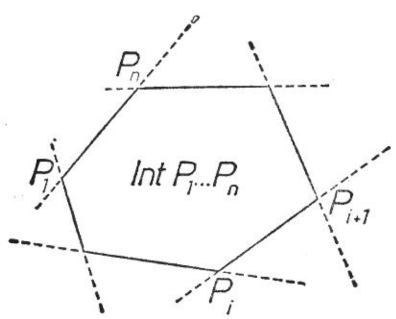

Fig. I.88

Un poligon $P_1P_2...P_n$ se numește *poligon convex*, dacă, pentru orice indice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, toate vîrfurile P_j, cu $j \neq i$ și $i+1$, se găsesc de aceeași parte a dreptei P_iP_{i+1} (pentru $i = n$, convenim să notăm $P_{n+1} = P_1$). *Interiorul* unui poligon convex este intersecția semiplanelor limitate de suporții laturilor poligonului și care conțin vîrfurile nesituate pe suporții indicați, (fig. I.88).

Trilaterele și trapezele sînt poligoane convexe.

Exerciții

1. *Să se arate că interiorul unui poligon convex este o mulțime convexă.*

2. *Să se deseneze poligoane convexe și poligoane care nu sînt convexe.*

3. *Să se arate că suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui patrulater este de 360°.*

(*Indicație.* Unghiurile unui poligon convex sînt unghiurile $\widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}}$ definite de cîte trei vîrfuri consecutive ale poligonului. În cazul patrulaterului, se va considera separat cazul patrulaterului convex și cel al patrulaterului neconvex (concav) și se vor efectua descompuneri în triunghiuri.)

4. *Să se arate că suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este de $(n-2)\cdot 180°$.*

5. *Fie ABC un triunghi și fie $M \in$ Int ABC. Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decît perimetrul triunghiului MBC.*

(*Indicație.* Se consideră punctul $B' \in |BM \cap |AC|$ și se arată că perimetrul $ABC >$ > perimetrul $BB'C >$ perimetrul BMC.)

6. *Fie ABC un triunghi și fie punctele $A' \in |BC|$, $B' \in |CA|$, $C' \in |AB|$. Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decît perimetrul triunghiului $A'B'C'$.*

7. *Fie M un punct interior triunghiului ABC. Să se arate că*

$$\widehat{BMC} > \widehat{BAC} = \hat{A}.$$

(*Indicație.* Se aplică de două ori teorema unghiului exterior.)

8. *Fie A', B', C' trei puncte necoliniare situate în interiorul triunghiului ABC. Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decît perimetrul triunghiului $A'B'C'$.*

(*Indicație.* Prelungind laturile triunghiului $A'B'C'$, se obțin triunghiuri avînd vîrfurile în situațiile din exercițiile precedente.)

9. *Fie P, P' două poligoane convexe astfel ca* Int$P' \subset$ Int$P$. *Să se arate că perimetrul poligonului P este mai mare decît perimetrul poligonului P'.*

(*Indicație.* Se prelungește o latură a poligonului P' pînă cînd latura prelungită intersectează poligonul P în două puncte M, N. Aceste puncte împart poligonul P în două poligoane Q, Q' astfel ca Int $P' \subset$ Int Q și P', Q au două laturi, una conținută în cealaltă. Se observă că perimetrul poligonului Q este mai mic decît perimetrul poligonului P. Problema se reduce la a arăta că perimetrul lui Q este mai mare decît perimetrul lui P'. Se continuă procedeul, considerînd celelalte laturi ale poligonului P'.)

10. *Fie $|AB|$ o latură a unui poligon convex P și fie $|A'B'|$ un segment astfel ca $|AB| \subset |A'B'|$. Să presupunem că P' este un poligon avînd $|A'B'|$ ca latură și astfel ca $P' \cap P = [AB]$ și laturile lui P și ale lui P', diferite de $|AB|$ și de $|A'B'|$, să se găsească de aceeași parte a dreptei $AB = A'B'$. Să se arate că perimetrul lui P' este mai mare decît perimetrul lui P.*

(*Indicație.* Se procedează ca în exercițiul precedent.)

11. *Fie $ABCD$ un patrulater. Să se definească interiorul și exteriorul acestui patrulater și să se arate că dacă P este un punct interior, iar Q un punct exterior patrulaterului $ABCD$, atunci segmentul $|PQ|$ are cel puțin un punct comun cu (reuniunea laturilor) $ABCD$.*

(*Indicație.* Se va considera separat cazul patrulaterului convex și cel al patrulaterului neconvex. În ultimul caz, se descompune $ABCD$ în două triunghiuri și se consideră interioarele celor două triunghiuri, la care se adaugă latura comună.)

12. *Se poate defini interiorul unui poligon cu număr arbitrar de laturi?*

Răspunsul este afirmativ, dar demonstrația este complicată. Elevii vor descrie interioarele unor poligoane particulare și vor verifica că orice dreaptă care are un punct interior unui poligon intersectează cel puțin o latură a poligonului.

13. *Se dă un punct O în planul p. Să se construiască un poligon P, astfel ca O să nu fie interior lui P, dar orice semidreaptă dusă din O să intersecteze cel puțin o latură a lui P.*

(*Indicație.* Se va construi un poligon în formă de melc.)

14. *Care este numărul cel mai mic de laturi ce poate avea un poligon avînd proprietatea din exercițiul precedent?*

R. 6.

19. Funcțiile sinus și cosinus, definite pe mulțimea unghiurilor

Un unghi $\widehat{hk}$ se numește *ascuțit* dacă este mai mic decît un unghi drept și *obtuz*, dacă este mai mare decît un unghi drept. Un unghi este fie ascuțit, fie drept, fie obtuz.

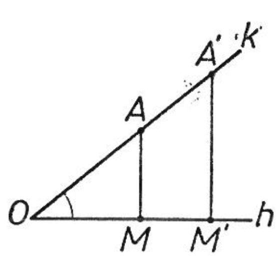

Fig. I. 89

Fie $\widehat{hk}$ un unghi ascuțit cu vîrful în punctul O și fie A un punct pe semidreapta k. Fie d dreapta ce conține semidreapta h și fie k' semidreapta opusă lui $h \subset d$. Să notăm prin M proiecția punctului A pe dreapta d, deci acel punct de pe d, pentru care avem $d \perp AM$ dacă $k \not\subset d$ și $M = A$ dacă $k \subset d$. Fie A' un al doilea punct pe k și fie M' proiecția lui A' pe d. Din teorema lui Thales rezultă egalitățile, (fig. I.89):

(1) $$\frac{|AM|}{|AO|} = \frac{|A'M'|}{|A'O|}, \quad \frac{|OM|}{|AO|} = \frac{|OM'|}{|A'O|}.$$

Aceste egalități arată că putem asocia fiecărui *unghi ascuțit* $\widehat{hk}$ două numere reale

(2) $$\sin \widehat{hk} = \frac{|AM|}{|AO|}, \quad \cos \widehat{hk} = \frac{|OM|}{|AO|}.$$

Aceste definiții au sens și în cazul în care $\widehat{hk}$ este un unghi nul, cînd $k = h$, sau în care $\widehat{hk}$ este un unghi drept, cînd $M = O$. Obținem

(3) $$\sin \widehat{hh} = 0, \ \cos \widehat{hh} = 1,$$

(4) $$\sin(\mathrm{dr}) = 1, \ \cos(\mathrm{dr}) = 0.$$

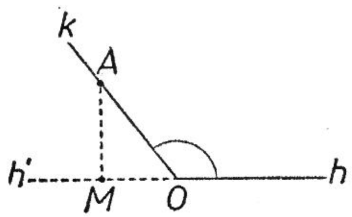

Fig. I.90

Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi obtuz, punctul M aparține semidreptei h'. Definim *pentru unghiuri obtuze*, (fig. I.90):

(5) $$\sin \widehat{hk} = \frac{|AM|}{|AO|}, \quad \cos \widehat{hk} = -\frac{|OM|}{|OA|}.$$

Dacă $k = h'$, obținem

(6) $$\sin \widehat{hh'} = 0, \ \cos \widehat{hh'} = -1$$

Din definițiile date rezultă următoarele proprietăți, ce trebuie reținute:

Dacă $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, atunci

$$\sin \widehat{hk} = \sin \widehat{h'k'}, \ \cos \widehat{hk} = \cos \widehat{h'k'}.$$

Pentru orice unghi, avem

$$0 \leqslant \sin \widehat{hk} \leqslant 1, \ -1 \leqslant \cos \widehat{hk} \leqslant 1.$$

Cosinusul unui unghi ascuțit este pozitiv, iar cosinusul unui unghi obtuz este negativ.

Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A, atunci avem (fig. I.91).

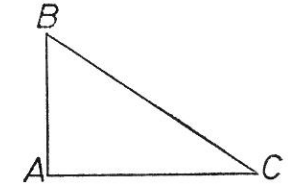

Fig. I.91

(7) $|AC| \equiv |BC| \cdot \cos \hat{C}, \ |AB| \equiv |BC| \cdot \sin \hat{C}$

și, în mod analog,

$|AC| \equiv |BC| \cdot \sin \hat{B}, \ |AB| \equiv |BC| \cdot \cos \hat{B}.$

Comparînd aceste formule, deducem relațiile

(8) $$\cos \hat{C} = \sin \hat{B}, \ \sin \hat{C} = \cos \hat{B}.$$

Din teorema 2 a unghiului exterior rezultă că, în orice triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt ascuțite și au ca sumă un unghi drept, deci sînt *complementare*.

Reciproc, *fiind date două unghiuri complementare, se poate construi un triunghi dreptunghic, avînd unghiurile ascuțite congruente cu unghiurile complementare date.* Deci:

Formulele (8) *sînt verificate de orice pereche de unghiuri ascuțite complementare.*

Formula (7) din stînga poate fi generalizată în modul următor:

Fie date un segment $|BC|$ și o dreaptă d coplanară cu BC. Fie B',C' proiecțiile punctelor B, C pe dreapta d. Presupunînd $C' \neq C$, să notăm prin C'' intersecția dreptei CC' cu paralela dusă prin B' la BC. Figura $BCC''B'$ este un paralelogram, deci $|BC| \equiv |B'C''|$. Din prima formulă (7) deducem (fig. I.92):

(9) $$|B'C'| \equiv |BC| \cdot \cos u, \ u = \widehat{C''B'C'}.$$

Unghiul u poate fi definit ca fiind *unghiul ascuțit* format de dreptele d, BC. Am obținut:

> **Teorema proiecției unui segment. Proiecția unui segment $|BC|$ pe o dreaptă d este un segment congruent cu produsul dintre $|BC|$ și cosinusul unghiului ascuțit format de dreptele d, BC.**

Să revenim la cazul unui triunghi ABC, dreptunghic în A (fig. I.93). Unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ fiind ascuțite, proiecția vîrfului A pe dreapta BC apar-

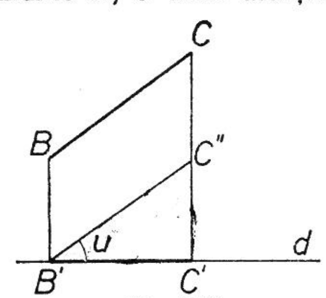

Fig. I.92

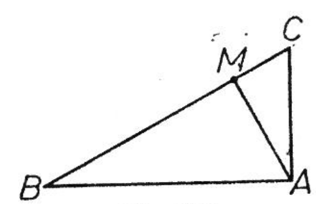

Fig. I.93

ține segmentului $|BC|$. Fie M această proiecție. Din formulele (8) deducem relațiile

$$\sin \hat{C} = \frac{|AB|}{|BC|} = \cos \hat{B} = \frac{|BM|}{|AB|}.$$

Facem convențiile următoare:

$$(\sin \hat{C})^2 = \sin^2\hat{C}, \quad (\cos \hat{C})^2 = \cos^2\hat{C}.$$

Cu aceste convenții, putem scrie

$$|BM| \equiv |AB| \cdot \sin \hat{C} \equiv |BC| \cdot \sin^2 \hat{C}.$$

În mod analog, obținem

$$|CM| \equiv |AC| \cdot \sin \hat{B} \equiv |BC| \cdot \sin^2 \hat{B} \equiv |BC| \cdot \cos^2 \hat{C}.$$

Adunînd ultimele relații membru cu membru, obținem

$$|BC| \equiv |BM| + |CM| \equiv |BC| \cdot (\sin^2 \hat{C} + \cos^2\hat{C}),$$

și avem prin urmare următoarea *identitate fundamentală*

$$\sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1, \tag{10}$$

adevărată pentru *orice* unghi ascuțit $\hat{C}$.

Exercițiu. *Să se arate că relația (10) este adevărată pentru orice unghi, fie el nul, ascuțit, drept, obtuz sau alungit.*

Observație. Relația (10) se mai poate scrie sub forma

$$\left(\frac{|AB|}{|BC|}\right)^2 + \left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2 = 1 \tag{11}$$

și constituie una din formulările posibile ale *teoremei lui Pitagora.*

Exerciții

1. *Fie ABC un triunghi echilateral. Să se calculeze* $\sin \hat{A}$ *și* $\cos \hat{A}$.
(*Indicație.* Se duce înălțimea $|AA'|$ și se observă că $|AB| \equiv 2|A'B|$).

2. *Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel. Să se calculeze* $\sin \hat{B}$ *și* $\cos \hat{B}$.

3. *Să se arate că dacă p, q sînt două numere reale astfel încît*

$$0 \leqslant p \leqslant 1, \quad -1 \leqslant q \leqslant 1, \quad p^2 + q^2 = 1,$$

atunci există un unghi $\widehat{hk}$ astfel ca

$$\sin \widehat{hk} = p \quad \text{și} \cos \widehat{hk} = q.$$

Să se arate apoi că orice unghi $\widehat{h'k'}$, pentru care

$$\sin \widehat{h'k'} = p \quad \text{și} \cos \widehat{h'k'} = q,$$

este congruent cu unghiul $\widehat{hk}$.

4. *Fie h, k, m trei semidrepte cu originea O, astfel ca m să aparțină interiorului unghiului $\widehat{hk}$ și $\widehat{mk}$ să fie un unghi drept. Să se exprime numerele* $\sin \widehat{hk}$, $\cos \widehat{hk}$ *în funcție de* $\sin \widehat{hm}$ *și de* $\cos \widehat{mh}$.

5. *Fie $ABCD$ un patrat ($AB \perp BC \perp CD \perp DA$, $|AB| \equiv |BC|$). Să considerăm punctele $P \in |AB|$, $Q \in |BC|$, $R \in |CD|$, $S \in |DA|$, astfel ca $|AP| \equiv |BQ| \equiv |CR| \equiv |DS|$. Să se arate că $PQRS$ este un patrat și că triunghiurile ASP, BPQ, CQR, DRS sînt congruente între ele.*

6. *Din exercițiul anterior să se deducă o relație între ariile patratelor construite pe laturile unui triunghi dreptunghic.*

7. *Folosind exercițiul 2 de la p. 64, să se arate că* $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Tabelul următor indică valorile aproximative, cu trei zecimale exacte, ale funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, pentru toate unghiurile, ale căror măsuri în grade sexagesimale se exprimă prin numere întregi, de la 0° la 90°.

Funcțiile secantă, tangentă, cotangentă și cosecantă se definesc prin formulele

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \mathrm{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \mathrm{ctg}\ x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \mathrm{cosec}\ x = \frac{1}{\sin x},$$

presupunînd $\cos x \neq 0$, respectiv $\sin x \neq 0$.

În tabel se ține seama de faptul că sinusul unui unghi ascuțit este egal cu cosinusul unghiului complementar. Denumirile din prima linie corespund unghiurilor indicate în prima coloană, iar denumirile din ultima linie corespund unghiurilor indicate în ultima coloană.

x°	Sin	Tg	Ctg	Cos	90°-x°
0	0,000	0,000		1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
	Cos	Ctg.	Tg.	Sin.	

$x°$	Sin	Tg	Ctg	Cos	$90°$-$x°$
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	Cos.	Ctg.	Tg.	Sin.	

Să reținem că *sinusurile a două unghiuri suplementare sînt egale, iar cosinusurile a două unghiuri suplementare sînt egale în valoare absolută, dar de semne contrare.*

Am arătat că două unghiuri congruente au sinusurile egale și cosinusurile egale; două unghiuri sînt congruente dacă și numai dacă au măsurile egale, oricare ar fi sistemul de măsurare, în grade sau în radiani.

Aceste proprietăți ne permit să reprezentăm sinusul și cosinusul unui unghi sub forma sin $n°$ sau sin x, respectiv cos $n°$ sau cos x, dacă acel unghi are n grade sau x radiani.

Pentru a da unele exemple, să indicăm valorile exacte ale funcțiilor sinus și cosinus, pentru unele unghiuri ce apar mai des în aplicații.

măsura în grade	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$150°$	$180°$
măsura în radiani	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
valoarea funcției sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
valoarea funcției cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Dacă notăm prin U mulțimea unghiurilor, putem scrie

$$\sin\colon U \to [0,1] = \{a \in \mathbf{R};\ 0 \leqslant a \leqslant 1\},$$
$$\cos\colon U \to [-1,1] = \{b \in \mathbf{R},\ -1 \leqslant b \leqslant 1\}.$$

Exerciții

1. *Să se indice valorile aproximative, cu o zecimală exactă, ale numerelor reale* sin u *și* cos u *pentru unghiurile* u *avînd* 15°, 40°, 55°, 70°, 85°, 110°, și $\pi/10$, $3\pi/8$, $3\pi/10$, $4\pi/5$ și $5\pi/8$ *radiani.*

(*Indicație.* Se vor efectua construcții grafice, folosind rigla și raportorul.)

2. *Știind că* u *și* v *sînt două unghiuri complementare, să se exprime* sin v *și* cos v *cu ajutorul numerelor* sin u *și* cos u.

3. *Să se indice interpretările geometrice ale funcțiilor tangentă și cotangentă.*

Observație. Funcțiile sinus și cosinus se numesc *funcții trigonometrice* deoarece au apărut la rezolvarea unor probleme de calcul al unghiurilor și laturilor unui triunghi, dat prin anumite elemente ale sale. Tot funcții trigonometrice sînt funcțiile tangentă, cotangentă, secantă, cosecantă.

20. Relații metrice

În acest paragraf, vom presupune că a fost ales un segment *etalon*, pe care-l vom nota m. Figurile pe care le vom studia vor fi figuri plane. Proprietățile acestor figuri, ale căror formulări necesită considerarea etalonului m se numesc *proprietăți metrice*.

Ca prim exemplu de proprietate metrică, să considerăm un triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, şi să presupunem că avem

$$|BC| \equiv a \cdot m, \quad |AC| \equiv b \cdot m, \quad |AB| \equiv c.m,$$

unde a, b, c sînt numere reale pozitive.

Din relaţiile demonstrate în paragraful precedent deducem

$$|AC| \equiv b \cdot m \equiv |BC| \cdot \cos \hat{C} \equiv a \cos \hat{C} \cdot m,$$

$$|AB| \equiv c \cdot m \equiv |BC| \cdot \sin \hat{C} \equiv a \sin \hat{C} \cdot m.$$

Aceste formule conduc la egalităţile

(1) $$b = a \cos \hat{C}, \; c = a \sin \hat{C},$$

(2) $$b^2 + c^2 = a^2.$$

Ultima relaţie constituie *formularea uzuală a teoremei lui Pitagora.*

Exerciţii

1. *Să se demonstreze, folosind notaţiile indicate, următoarele egalităţi:*

$$b = a \sin \hat{B}, \; c = a \cos \hat{B}.$$

2. *Fie A' proiecţia vîrfului unghiului drept pe ipotenuza BC. Fie h, b', c' numerele reale pozitive, pentru care avem*

$$|AA'| \equiv h \cdot m, \; |BA'| \equiv c' \cdot m, \; |CA'| \equiv b' \cdot m.$$

Să se arate că avem

$$h^2 = b'c', \; b^2 = ab', \; c^2 = ac'.$$

D e f i n i ţ i e. **Fie A, B două puncte distincte şi fie d numărul real pozitiv, pentru care avem $|AB| \equiv d \cdot m$. Vom spune atunci că d este lungimea segmentului $|AB|$ şi de asemenea distanţa dintre punctele A, B, exprimate cu ajutorul etalonului, sau mai simplu, lungimea segmentului $|AB|$, respectiv distanţa dintre punctele A, B.**

Potrivit definiţiei date, lungimile şi distanţele sînt numere reale pozitive, dar vom ţine seama că aceste numere urmează a fi înmulţite cu segmentul etalon m, pentru a obţine mărimea segmentului $|AB|$, a cărui lungime se consideră.

Dacă $A = B$, distanţa dintre A şi B este prin definiţie 0.

În general, distanţa dintre punctele A, B, cînd etalonul a fost fixat, va fi notată $d(A, B)$. Dacă $A \neq B$, atunci

$$|AB| \equiv d(A, B) \cdot m.$$

Prin *mărimea* unui segment înţelegem mulţimea formată din toate segmentele congruente cu acel segment.

Dacă avem două segmente u, v, notînd prin x raportul lor şi prin a, b lungimile lor, vom avea

$$u \equiv x \cdot v, \; u \equiv a \cdot m, \; v \equiv b \cdot m,$$

deci $a \cdot m \equiv x \cdot (b \cdot m) \equiv (bx) \cdot m$. Rezultă $a = bx$ sau $x = \frac{a}{b}$. Am arătat că:

Raportul a două segmente este egal cu raportul lungimilor celor două segmente.

T e o r e m ă. **Funcţia distanţă d, care asociază fiecărei perechi de puncte A, B distanţa $d(A, B)$ dintre aceste puncte, are proprietăţile:**

a) $d(A, B) = 0$ dacă şi numai dacă $A = B$.

b) $d(A, B) = d(B, A)$, oricare ar fi punctele A, B.

c) $d(A, B) + d(B, C) \geqslant d(A, C)$, oricare ar fi punctele A, B, C.

Primele două relaţii se deduc din definiţia funcţiei d. Pentru a demonstra ultima proprietate, se consideră separat cazurile $A \in |BC|$, $B \in |AC|$, $C \in |AB|$, $A = B$, $B = C$, $C = A$ şi cazul în care A, B, C sînt necoliniare. Primele din aceste cazuri sînt uşor de tratat. Să presupunem că punctele A, B, C formează un triunghi. Avem atunci $|AB| + |BC| \geqslant |AC|$, deci $d(A, B) + d(B, C) \geqslant d(A, C)$.

Avem $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ dacă şi numai dacă $B \in [AC]$.

Problemă rezolvată. Fie $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = (A, B)$ lungimile laturilor unui triunghi şi fie $|AA'$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$ cu $A' \in |BC|$. Notînd $x = d(B, A')$ şi $y = d(C, A')$, să se calculeze x şi y în funcţie de a, b, c.

Rezolvare. Din teorema bisectoarei, rezultă

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

şi din relaţia $A' \in |BC|$ rezultă $x + y = a$. Rezolvînd sistemul celor două ecuaţii în x şi y, obţinem

$$x = \frac{ac}{b + c}, \; y = \frac{ab}{b + c}.$$

Exerciţii

1. *Să se determine x şi y în cazul $a = 21$ cm, $b = 16$ cm, $c = 14$ cm.*

2. *Dacă $|AA''$, $A'' \in BC$ este o bisectoare exterioară a triunghiului ABC, să se calculeze lungimile segmentelor $|A''B|$, $|A''C|$ în funcţie de lungimile laturilor triunghiului ABC.*

A p l i c a ţ i i. **1.** Fie ABC un triunghi cu unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ ascuţite şi fie A' punctul de pe dreapta BC, pentru care $AA' \perp BC$. Să notăm

$a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$, $h = d(A, A')$, $u = d(A', B)$, $v = d(A', C)$. Avem $A' \in |BC|$, deci $a = u + v$. Din teorema lui Pitagora rezultă

$$b^2 = h^2 + v^2, \; c^2 = h^2 + u^2,$$

deci $b^2 - c^2 = v^2 - u^2 = (v + u)(v - u) = a(v - u)$. Comparînd cu relația $a^2 = a(v + u)$, deducem $2av = a^2 + b^2 - c^2$. Deci avem formula

$$d(A', C) = v = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

care dă distanța de la punctul A' la vîrful C, în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC.

2. Fie a, b, c trei numere reale pozitive, astfel ca

$$c \leqslant b \leqslant a < b + c. \tag{3}$$

Vom arăta că există un triunghi, avînd ca lungimi ale laturilor numerele a, b, c.

Demonstrație. Considerăm un segment $|BC|$ de lungime a și fie, pe acest segment, punctul A' astfel ca $d(A', C) = (a^2 + b^2 - c^2)/2a$. Un astfel de punct există, deoarece avem $b^2 - c^2 < a^2$, deci $a^2 + b^2 - c^2 < 2a^2$, $v = (a^2 + b^2 - c^2)/2a < a$. Avem apoi $a < b + c$, deci $a - b < c$, $(a - b)^2 < c^2$, deci $2ab > a^2 + b^2 - c^2$, sau $b > v$. Aceasta înseamnă că există un număr real pozitiv h astfel ca să avem $h^2 = b^2 - v^2$. Fie A un punct pe perpendiculara dusă prin A' la BC, astfel ca $d(A, A') = h$. În triunghiul ABC avem $d(B, C) = a$, $d(A, C) = \sqrt{(h^2 + v^2)} = b$, $d(A, B)^2 = h^2 + (a - v)^2 = b^2 - v^2 + (a - v)^2 = b^2 + a^2 - 2av = c^2$, deci $d(A, B) = c$. Deci triunghiul ABC îndeplinește condițiile cerute.

Observație. Fiind date trei numere reale pozitive, aceste numere pot fi notate cu literele a, b, c astfel încît să fie verificate inegalitățile $c \leqslant b \leqslant a$. Dacă cele trei numere reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, vom avea și $a < b + c$.

Exerciții

1. *Să presupunem că lungimile laturilor triunghiului ABC au valorile $a = 7$, $b = 5$, $c = 4$. Să se calculeze lungimea înălțimii $|AA'|$, $A' \in BC$, și lungimile segmentelor $|A'B|$, $|A'C|$.*

2. *Fie ABC un triunghi avînd unghiul $\hat{B}$ obtuz și fie $A' \in BC$ astfel ca $AA' \perp BC$. Să se arate că $B \in |A'C|$ și să se calculeze lungimile segmentelor $|AA'|$, $|A'B|$, $|A'C|$ în funcție de lungimea laturilor triunghiului ABC. Caz particular: $d(A, C) = 7. d(A, B) = 3$, $d(B, C) = 5$.*

3. *Se consideră un triunghi avînd lungimile laturilor*

$$a = d(B, C),\ b = d(C, A),\ c = d(A, B).$$

Să se arate că unghiul $\widehat{ABC}$ este obtuz dacă și numai dacă $b^2 > c^2 + a^2$.

4. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un șir de n puncte într-un plan. Să se arate că are loc inegalitatea*

$$d(A_1, A_n) \leqslant d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \ldots + d(A_{n-1}, A_n).$$

5. *Fie AA', BB', CC', înălțimile triunghiului ABC, cu $A' \in BC$, $B' \in CA$ și $C' \in AB$. Să se arate că*

$$d(A, A')d(B, C) = d(B, B')d(C, A) = d(C, C')d(A, B),$$

6. *Fie s, s' două semidrepte cu originea O și fie punctele A, B pe s și A', B' pe s' astfel ca $d(O,A)\ d(O,B) = d(O,A')\ d(O,B')$. Să se arate că triunghiurile OAB' și $OA'B$ sînt asemenea.*

7. *Pe laturile unghiului propriu $\widehat{hk}$, avînd originea O, se iau punctele $A \in h$, $A' \in h$, $B \in k$, $B' \in k$ astfel ca $A \neq A'$, $|OA| \equiv |OB|$ și $|OA'| \equiv |OB'|$. Să se arate că punctul de intersecție al dreptelor AB', $A'B$ aparține bisectoarei unghiului $\widehat{hk}$.*

8. *Fie AD bisectoarea unghiului $\hat{A}$ în triunghiul ABC, cu $D \in |BC|$. Perpendicularele din B și C pe AD intersectează dreptele AC și AB în punctele E și F. Să se demonstreze că triunghiurile ABC, AEF sînt congruente și că $D \in EF$.*

9. *Se consideră triunghiul ABC și triunghiurile echilaterale $AB'C$, $A'BC$ exterioare lui ABC. Să se arate că $|AA'| \equiv |BB'|$ și că măsurile unghiurilor formate de dreptele AA', BB' sînt egale cu 60° și 120°. Extindeți aceste proprietăți, considerînd cazul în care punctele A, B, C sînt coliniare.*

10. *Pe laturile pătratului $ABCD$ se iau punctele $J \in |AB|$, $E \in |BC|$, $F \in |CD|$, $G \in |DA|$ astfel ca $|AJ| \equiv |BE| \equiv |CF| \equiv |DG|$. Să se arate că $JEFG$ este un pătrat. Extindeți proprietatea, considerînd puncte exterioare laturilor pătratului.*

11. *Arătați că dacă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ și dacă mediana din A în triunghiul ABC este congruentă cu mediana din A' în triunghiul $A'B'C'$, atunci cele două triunghiuri sînt congruente.*

12. *În triunghiul ABC, unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ au măsurile de 70° respectiv de 60°. Fie BB', CC' înălțimi și BD bisectoare în triunghiul ABC. Să se determine unghiurile triunghiului determinat de dreptele BB', CC', BD.* **R.** 5°, 50°, 125°.

13. *Să se determine unghiurile triunghiului determinat de bisectoarele exterioare ale unui triunghi ABC, cunoscînd unghiurile lui ABC. Caz particular: $m\breve{a}s\ \hat{B} = 70°$, $m\breve{a}s\ \hat{C} = 60°$.*

R. $\mathrm{dr} - \frac{\hat{A}}{2}$, $\mathrm{dr} - \frac{\hat{B}}{2}$, $\mathrm{dr} - \frac{\hat{C}}{2}$; 55°; 60°; 65°.

14. *Să se determine măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sînt proporționale cu numerele 3, 4, 6, 11.* **R.** 45°, 60°, 90°, 165°.

15. *Suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui poligon convex este egală cu 2 880°. Cîte laturi are acel poligon?* **R.** 18.

16. *Să se arate că dacă unul din unghiurile unui patrulater convex este egal cu media aritmetică a celorlalte trei unghiuri, atunci acel unghi este drept.*

17. *În paralelogramul $ABCD$ notăm prin M mijlocul lui $|CD|$ și cu N mijlocul lui $|AB|$. Arătați că AM și CN taie diagonala $|BD|$ în trei segmente congruente.*

18. *Diagonalele unui trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, se întîlnesc în punctul O. Paralela la AB dusă prin O taie laturile $|AD|$, $|BC|$ în punctele $E \in |AD|$, $F \in |BC|$. Arătați că $|OE| \equiv |OF|$ și*

$$\frac{|AB|}{|OE|} = 1 + \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Arătați de asemenea că punctul O, punctul de intersecție al dreptelor AD, BC și mijloacele laturilor $|AB|$, $|CD|$ sînt patru puncte coliniare.

19. *Se consideră un romb $ABCD$ și un punct $F \in |BC|$. Fie $E \in DF \cap AB$ și fie H, G mijloacele segmentelor $|DF|$, $|EF|$. Să se arate că*

$$\frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|BE|}{|AD|}, \quad \frac{|BC|}{|CH|} = \frac{|BE|}{|BG|}.$$

20. *Să se arate că dacă triunghiul ABC are unghiul $\hat{A}$ drept și dacă $|AD|$ este înălțime în acest triunghi, atunci $2|AD| \equiv |BC| \sin 2\hat{B} \equiv |BC| \sin 2\hat{C}$. Caz particular: B este a șasea parte dintr-un unghi drept.*

(*Indicație.* Se consideră simetricul punctului C față de A. În cazul particular indicat, se obține $4|AD| = |BC|$.)

21. *În triunghiul ABC, notăm prin D mijlocul laturii $|AB|$ și considerăm punctul E astfel ca $|CE| \equiv |AD|$ și $C \in |BE|$. Fie $F \in DE \cap AC$. Arătați că*

$$\frac{|DF|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|AB|},$$

(*Indicație.* Se aplică teorema lui Menelaus.)

22. *În triunghiul ABC, avem $d(B, C) = 3$ dm, $d(A, B) = d(A, C) = 11{,}5$ dm; se consideră punctele $M \in |BC|$, $E \in |AC|$ astfel ca $|BM| \equiv |MC|$ și ME este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$. Să se calculeze $d(A, E)$.*

R. $\dfrac{23\sqrt{130}}{3 + 2\sqrt{130}}$

23. *Fie ABC un triunghi și $M \in |AC|$. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{AMB}$, $\widehat{CMB}$ intersectează laturile $|AB|$ respectiv $|BC|$ în punctele P, Q. Avem PQ paralelă cu AC dacă și numai dacă M este mijlocul lui $|AC|$.*

24. *Dacă două dreptunghiuri au bazele și înălțimile proporționale, atunci ele sînt asemenea.*

25. *Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ două trapeze astfel ca $AB \parallel CD$, $A'B' \parallel C'D'$ și*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|AD|}{|A'D'|}, \quad \widehat{CDA} \equiv \widehat{C'D'A'}.$$

Să se arate că cele două trapeze sînt asemenea, deci că au laturile proporționale și unghiurile congruente două cîte două.

26. *Dacă două pentagoane convexe $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ au laturile proporționale și dacă două unghiuri consecutive $\hat{A}$, $\hat{B}$ sînt congruente respectiv cu unghiurile $\hat{A}'$, $\hat{B}'$, atunci cele două pentagoane sînt asemenea.*

27. *Pe o hartă întocmită la scara* 1/10 000, *un teren este reprezentat printr-un patrulater cu laturile de* 1,7 dm; 2,1 dm; 2,2 dm *și* 1,9 dm. *Aflați perimetrul acelui teren.*

R. 7,9 km.

28. *Dacă lungimile laturilor unui triunghi, notate prin a, b, c, verifică relația $b^3 + bc^2 + ca^2 = a^2b + b^2c + c^3$, atunci acel triunghi este fie isoscel, fie dreptunghic.*

29. *Dacă două triunghiuri au medianele congruente două cîte două, atunci cele două triunghiuri sînt congruente.*

30. *În triunghiul ABC cu laturile de lungimi $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm, să se ducă două paralele la latura $|BC|$, astfel ca aceste paralele să împartă triunghiul în trei arii egale. Să se calculeze rapoartele în care aceste paralele împart latura $|AB|$.*

R. $\dfrac{|AE|}{|EB|} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}, \dfrac{|AF|}{|FB|} = 2 + \sqrt{6}.$

31. *Într-un hexagon regulat se unesc mijloacele laturilor consecutive, și se formează un nou hexagon. Să se determine raportul ariilor celor două hexagoane.* R. $\dfrac{3}{4}$.

21. Coordonate pe o dreaptă și într-un plan

1. Fie O, A două puncte pe o dreaptă d, astfel ca segmentul $|OA|$ să fie congruent cu segmentul m, care a fost ales ca etalon. Notăm prin d' semidreapta $|OA$ și prin d'' semidreapta opusă lui d'. Fie $A' \in d''$ punctul pentru care $|OA'| \equiv m$. Vom spune că tripletul (d, O, A) constituie o *axă*, d fiind *dreapta suport*, O *originea*, iar A *punctul unitate* al acestei axe.

Am arătat cum putem asocia fiecărui punct $M \in d'$ un număr real x, astfel ca $|OM| \equiv x\,|OA| \equiv x \cdot m$. Asociind punctelor $M \in d'$ numerele pozitive x, prin această regulă, am obținut o corespondență bijectivă între punctele semidreptei d' și mulțimea numerelor reale pozitive.

Urmînd o metodă descoperită de Descartes, putem stabili o corespondență bijectivă între mulțimea tuturor punctelor dreptei d și mulțimea tuturor numerelor reale. Această corespondență se obține asociind punctelor de pe d' numere reale pozitive, așa cum s-a arătat, punctului O numărul real zero și punctelor N de pe semidreapta d'' numere negative, astfel ca lui $N \in d''$ să i se asocieze un număr $x' < 0$ cu proprietatea

$$|ON| \equiv (-x') \cdot m.$$

Dacă unui punct $P \in d$ i s-a asociat numărul real x, scriem $P(x)$ și citim: Punctul P are abscisa x pe axa (d, O, A) sau mai scurt: punctul P de abscisă x (dacă axa este subînțeleasă).

Teoremă. Dacă avem pe o axă punctele $P(x)$, $P'(x')$, atunci distanța $d(P, P')$ este dată de formula

$$d(P, P') = |x - x'|. \qquad (1)$$

Demonstrație. Trebuie să distingem cazurile: $P = P'$; $P = O$; $P' = O$; $P \in |OP'|$; $P' \in |OP|$; $O \in |PP'|$. În fiecare din aceste cazuri, egalitatea (1) este o consecință a felului în care am asociat fiecărui punct $P \in d$ abscisa sa.

Teoremă. Dacă avem pe o axă punctele $P(x)$, $P'(x')$, $P''(x'')$, atunci relația $P' \in |PP''|$ are loc în unul din următoarele cazuri și numai în aceste cazuri: a) $x < x' < x''$ sau b) $x'' < x' < x$.

Demonstrație. Relația $P' \in |PP''|$ este echivalentă cu formula

$$d(P, P'') = d(P, P') + d(P', P''),\ P \neq P' \neq P''.$$

Aplicînd teorema precedentă, această formulă va fi echivalentă cu

$$|x'' - x| = |x' - x| + |x'' - x'|,\ x \neq x' \neq x'',$$

care are loc dacă și numai dacă diferențele $x' - x$, $x'' - x'$ au același semn. Dacă cele două diferențe sînt pozitive, sîntem în cazul a), iar dacă diferențele sînt negative, sîntem în cazul *b*).

Exerciții

Fie P, Q două puncte distincte pe o axă (d, O, A) și fie p, q abscisele lor. Să se determine abscisa punctului $M \in |PQ|$, care împarte segmentul $|PQ|$ în medie și extremă rație, deci pentru care avem

$$\frac{|MQ|}{|MP|} = \frac{|PQ|}{|MQ|}.$$

2. *Fie OAB un triunghi dreptunghic isoscel într-un plan p, astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv m$. Considerăm axele*

$$X = (OA, O, A),\ Y = (OB, O, B).$$

Vom spune că X, Y constituie un *sistem de axe carteziene ortogonale* în planul p. Un astfel de sistem permite să asociem fiecărui punct M din planul p două numere reale x și y, astfel încît corespondența

$$M \to (x, y)$$

să fie bijectivă. Pentru a defini numerele x și y, procedăm astfel:

Considerăm punctele $M' \in OA$ și $M'' \in OB$ astfel ca paralelele duse prin M' și M'' la OB respectiv OA să treacă prin M. Fie x abscisa lui M' pe axa X și fie y abscisa lui M'' pe axa Y. Atunci x și y vor fi numerele asociate lui M; aceste numere se numesc *coordonatele* punctului M față de axele carteziene ortogonale X și Y. Numărul x se mai numește *abscisa* lui M, iar y se mai numește *ordonata* lui M față de axele X, Y.

Exerciții

1. *Să notăm prin A' și B' simetricele punctelor A, B față de punctul O. Să presupunem că un punct $M \in p$ are coordonatele x și y față de sistemul de axe (X, Y). Să se arate că:*
$M \in OA \Leftrightarrow y = 0$; $M \in OB \Leftrightarrow x = 0$; $M \in |OA \Leftrightarrow y = 0$ și $x > 0$.

$M \in \operatorname{Int}\widehat{AOB} \Leftrightarrow x > 0$ *și* $y > 0$; $M \Leftrightarrow \operatorname{Int}\widehat{A'OB'} \Leftrightarrow x < 0$ și $y < 0$.

Notație. Scrierea $M(x, y)$ exprimă faptul că M este punctul de coordonate x și y, dintr-un plan p, în care a fost ales un sistem de axe carteziene ortogonale.

2. *Fiind date punctele $M(x, y)$ și $M'(x', y')$ să se arate că*

$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

(*Indicație.* Se formează un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $|MM'|$.)

3. *Să se calculeze distanța dintre punctele $M(3, 2)$ și $M'(-1, 7)$.*

4. *Să se determine condițiile pe care trebuie să le verifice coordonatele x, y ale unui punct $M \in p$, pentru ca să avem*

$$\mathrm{d}(M, P) = \mathrm{d}(M, Q)$$

știind că $P(u, v)$ și $Q(u', v')$. Caz particular: $P(0, 1)$, $Q(-6, 8)$.

5. *Folosind faptul că orice dreaptă poate fi considerată ca mediatoare a cel puțin un segment, să se arate că, oricare ar fi dreapta $d \subset p$, putem găsi trei numere reale a, b, c astfel ca*

$$d = \{M(x, y);\ ax + by + c = 0\}.$$

• **Locul geometric definit de o ecuație de forma $ax + by + c = 0$.** Vom studia locul geometric al punctelor $P(x, y)$, care verifică o ecuație de forma

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

examinînd toate cazurile posibile referitor la coeficienții a, b, c.

Cazul $a = b = c = 0$. În acest caz, toate punctele planului verifică ecuația (1), deci locul căutat este întreg planul.

Cazul $a = b = 0 \neq c$. În acest caz, nici un punct al planului nu verifică ecuația (1), deci locul geometric căutat este mulțimea vidă.

Cazul $a = 0 \neq b$. Ecuația (1) se scrie $by + c = 0$ sau

$$y = -\frac{c}{b}$$

și definește o dreaptă paralelă cu axa OA, deci cu axa absciselor. Dacă $c = 0$, se obține chiar ecuația axei absciselor.

Cazul $a \neq 0 = b$. Ecuația (1) se scrie $ax + c = 0$ sau

$$x = -\frac{c}{a}$$

și definește o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor. Pentru $c = 0$ se obține chiar axa ordonatelor.

Cazul $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Ecuația (1) se poate scrie

$$y = mx,\ m = -\frac{a}{b}, \tag{2}$$

sau

$$(3) \qquad \frac{x}{-b} = \frac{y}{a}.$$

Ecuația (2) definește o dreaptă care trece prin originea O și prin punctul $M(1, m)$. Dacă notăm prin A punctul de coordonate 1 și 0, triunghiul OMA este dreptunghic în A și avem tg $\widehat{AOM} = |m|$. Se spune că m este coeficientul unghiular al dreptei definită de ecuația (2).

Cazul $b \neq 0$. Ecuația (1) se poate scrie sub forma

$$(4) \qquad y = mx + n, \ m = -\frac{a}{b}, \ n = -\frac{c}{b}$$

sau

$$(5) \qquad \frac{x}{1} = \frac{y - n}{m}.$$

Dacă $n \neq 0$, ecuația (4) definește o dreaptă, care este paralelă cu dreapta definită de ecuația (2), deoarece intersectînd cele două drepte, obținem mulțimea vidă. Se spune că ecuația (4) definește o dreaptă de coeficient unghiular m. Această dreaptă trece prin punctul $P(0, n)$ și prin punctul $Q(1, m + n)$.

În rezumat, *o ecuație de forma (1) definește întreg planul dacă* $a = b = c = 0$, *mulțimea vidă dacă* $a = b = 0 \neq c$ *și o dreaptă în toate celelalte cazuri.*

Exerciții

A. *Să se reprezinte grafic dreptele definite de ecuațiile:*

1. $x + y + 1 = 0$;
2. $2x - 3y - 5 = 0$;
3. $3x + 4 = 0$;
4. $4y + 3 = 0$;
5. $2x - 7y = 0$;
6. $y - 2x - 1 = 0$;
7. $y = x + 1$;
8. $y = 8x$;
9. $y = 4x - 4$;
10. $y = 2$.

B. **1.** *Să se arate că ecuațiile*

$$(1) \qquad y = mx + n, \ y = -\frac{1}{m}x + p$$

au o soluție comună unică:

$$(2) \qquad x_0 = \frac{m(p - n)}{m^2 + 1}, \quad y_0 = \frac{m^2p + n}{m^2 + 1}.$$

2. *Se consideră punctele* $A(u, mu + n)$, $B(\varphi, -\frac{1}{m}\varphi + p)$, $M(x_0, y_0)$, *unde* x_0 *și* y_0 *sînt dați de (2). Să se arate că*

$$(3) \qquad d(A, M)^2 + d(B, M)^2 = d(A, B)^2.$$

3. *Din exercițiul precedent să se deducă că ecuațiile (1) reprezintă două drepte perpendiculare, avînd punctul comun* $M(x_0, y_0)$.

4. *Să se deducă din ex. 3 că orice ecuație de forma* $y = mx + n$ *reprezintă o dreaptă, oricare ar fi coeficienții* m *și* n, *reali.*

5. *Să se arate că ecuațiile*

$$(4) \qquad y = mx + n, \ y = m'x + n'$$

reprezintă două drepte paralele dacă și numai dacă $m = m'$ *și* $n \neq n'$.

6. *Să se arate că ecuațiile* (4) *reprezintă două drepte perpendiculare dacă și numai dacă*

$$mm' + 1 = 0.$$

7. *Fie* $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ *două puncte distincte și fie* k *un număr real diferit de* **1**. *Considerăm punctul* $P(x', y')$ *de coordonate*

$$(6) \qquad x' = \frac{x_0 - kx_1}{1 - k}, \quad y' = \frac{y_0 - ky_1}{1 - k}.$$

Să se arate că:

$$(7) \qquad \mathrm{d}(M_0, P) = \left|\frac{k}{1 - k}\right| \mathrm{d}(M_0, M_1), \ \mathrm{d}(M_1, P) = \left|\frac{1}{1 - k}\right| \mathrm{d}(M_0, M_1).$$

și să se deducă implicațiile:

$k < 0 \Rightarrow \mathrm{d}(M_0, P) + \mathrm{d}(P, M_1) = \mathrm{d}(M_0, M_1), \ P \in | M_0M_1 |$.

$0 < k < 1 \Rightarrow \mathrm{d}(M_1, P) - \mathrm{d}(P, M_0) = \mathrm{d}(M_0, M_1), \ M_0 \in | M_1P \}$.

$k > 1 \Rightarrow \mathrm{d}(M_0, P) - \mathrm{d}(P, M_1) = \mathrm{d}(M_0, M_1, M_1 \in | M_0P |$.

8. *Să se arate că, oricare ar fi numărul real* $k \neq 1$, *formulele (6) definesc coordonatele unui punct* P *situat pe dreapta* M_0M_1, *astfel încît*

$$(8) \qquad \mathrm{d}(M_0, P) = |k| \, \mathrm{d}(M_1, P).$$

Deci punctul P *împarte segmentul* $| M_0M_1 |$ *în raportul* $| k |$.

Definiție. **Dacă o dreaptă** d **este definită printr-o ecuație de forma** $y = mx + n$, **se spune că** m **reprezintă coeficientul unghiular al dreptei** d.

22. Aplicații practice

1. Determinarea raportului distanțelor de la Pămînt la Lună și Soare

Prima determinare a acestui raport a fost făcută de Aristarch, care a măsurat unghiul $\widehat{SPL}$ într-un moment în care Luna se vede luminată nu-

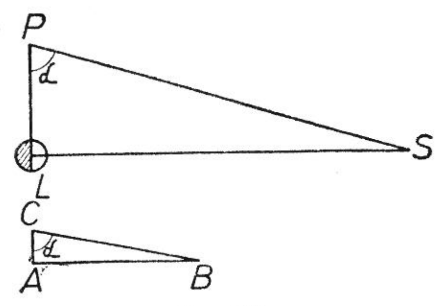

Fig. I.94

mai jumătate (în primul pătrar, 7 zile după luna nouă, sau în ultimul pătrar, 14 zile după primul pătrar).

Considerînd un triunghi dreptunghic ABC, avînd $\hat{C} \equiv \widehat{SPL}$, vom avea (fig. I.94)

$$\frac{|SP|}{|PL|} = \frac{|CB|}{|AC|} = \frac{1}{\cos \widehat{SPL}}$$

2. Măsurarea înălțimii unui edificiu cu ajutorul umbrei lăsate de razele solare

Să presupunem că vrem să măsurăm înălțimea unui edificiu $[AB]$ cu ajutorul umbrei $[AM]$ lăsate de razele solare. În acest scop, utilizăm un stîlp vertical $[CD]$ de înălțime cunoscută, care lasă umbra $[CN]$. Razele solare fac cu suprafața pămîntului unghiuri congruente între ele. Se formează deci două triunghiuri dreptunghice asemenea ABM și CDN, din care deducem (fig. I.95)

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AM|}{|CN|},$$

deci avem

$$|AB| \equiv \frac{|AM|}{|CN|} \cdot |CD|.$$

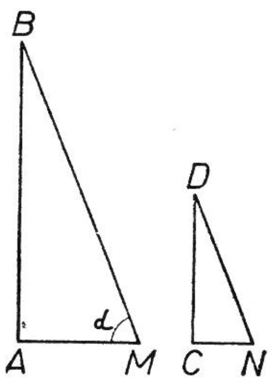

Fig. I.95

Segmentele $|AM|$, $|CN|$ pot fi calculate prin măsurători și deducem mărimea înălțimii $[AB]$.

Această metodă a fost folosită de *Thales* pentru calcularea înălțimii piramidelor.

3. Măsurarea razei Pămîntului

Fie A și S două puncte pe un meridian C al suprafeței Pămîntului. Dacă S se găsește pe Tropicul nordic, va exista un moment al anului (21 iunie, ora 12) în care razele solare cad în S exact pe direcția razei $|OS|$, deci vertical. Dacă, la același moment, razele Soarelui fac cu verticala lui A un unghi de $\alpha°$,

atunci unghiul $\widehat{AOS}$ va avea aceeași măsură de $\alpha°$. Cunoscînd distanța D de la A la S, vom putea calcula raza R a Pămîntului din formula (fig. I.96)

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{D}{2\pi R}$$

sau

$$2\pi R = \frac{360}{\alpha} D.$$

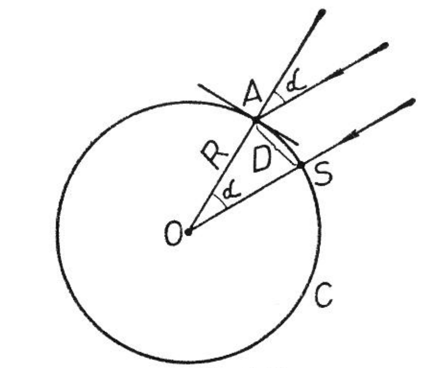

Fig. I.96

Eratostene a utilizat această metodă, considerînd orașele *Alexandria* (A) și *Syene (Assuan)* (S). Avînd prin măsurători $\alpha° = 7°12'$ și $D = 5\,000$ stadii, a obținut $2\pi R = 250\,000$ stadii. Un stadiu egiptean fiind de 157,5 m, aceasta dă $2\pi R = 39\,375$ km, valoare foarte apropiată de cea adevărată: 40 009 152 m.

În același timp, *Eratostene* a determinat poziția tropicelor, ca fiind la latitudinea de 23°51′20″, făcînd o eroare de numai 24′.

Menționăm că astăzi orașul Assuan, fostul Syene, nu se mai găsește pe Tropic.

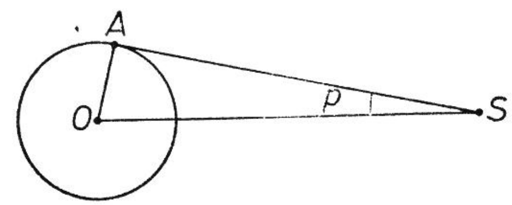

Fig. I.97

4. Determinarea distanței de la Pămînt la Soare

Fie A un punct pe suprafața Pămîntului. Dacă se cunoaște unghiul p făcut de linia orizontului AS cu dreapta OS, care unește centrul Pămîntului cu Soarele, putem calcula distanța $d(O, S)$ din formula (fig. I.97)

$$|OS| \equiv \frac{|OA|}{\sin p}.$$

Unghiul p, numit *paralaxă orizontală*, este de aproximativ 8″, 780 și se obține

$$d(O, S) = 149\,500\,000 \text{ km}.$$

5. Efectul Doppler

Un mobil M se deplasează pe o dreaptă cu viteză constantă v emițînd cîte un semnal sonor la intervale de timp de T secunde. Se întreabă la ce intervale T' sînt recepționate semnalele în punctul fix O, cunoscînd viteza sunetului $V = 340$ m/s și admițînd că O este pe dreapta pe care se deplasează M.

Răspuns. La momentul $t_n = nT$, mobilul se va găsi la distanța $d(O, M_n) = a + nTv$, unde am notat cu a distanța $d(O, M)$ la momentul $t = 0$ (fig. I. 98). Semnalul emis la momentul t_n va ajunge în punctul O la momentul $t'_n = t_n + \frac{a + nTv}{V}$. Semnalul emis la momentul t_{n+1} va ajunge în punctul O la momentul $t'_{n+1} = t_{n+1} + \frac{a + (n+1)Tv}{V}$.

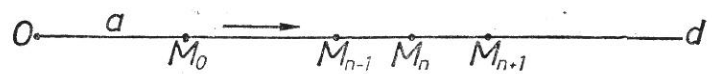

Fig. I.98

Avem

$$T' = t'_{n+1} - t'_n = T + \frac{Tv}{V} = T\frac{V + v}{V} = T\frac{v + 340}{340} = T\left(1 + \frac{v}{340}\right).$$

Dacă M se depărtează de O, $(v > 0)$ avem $T' > T$, iar dacă M se apropie de M, $(v < 0)$, avem $T' < T$. Dacă $v = -340$ m/s, toate semnalele vor fi recepționate în același moment.

Exerciții

1. *Să se arate că semiplanele limitate de dreapta $d : ax + by + c = 0$ sînt definite de formulele $p' = \{M(x, y);\ ax + by + c < 0\}$ și $p'' = \{M(x, y);\ ax + by + c > 0\}$.*

2. *Să se arate că punctele $M(x, y)$, care verifică un sistem de inecuații liniare*

$$ax + by + c \geqslant 0,\quad a'x + b'y + c' \geqslant 0,\quad a''x + b''y + c'' > 0,\ \ldots$$

formează o mulțime convexă.

3. *Să se arate că interiorul unui triunghi poate fi definit printr-un sistem de trei inecuații liniare. Să se scrie aceste inecuații în cazul în care vîrfurile triunghiului sînt $A(1, -8)$, $B(-2, 3)$ și $C(1, 1)$.*

4. *Să se arate că proiecția interiorului unui triunghi pe o dreaptă este un segment.*

5. *Trei centrale electrice situate în orașele A, B, C furnizează curent electric la prețul de $(ad + b)$ lei/kw unde a, b sînt constante pozitive date, iar d reprezintă distanța de la centrala respectivă la consumator. Să se indice pe o figură zonele deservite de fiecare din cele trei centrale, în condițiile în care consumatorii caută să obțină curentul electric la prețul minim.*

6. *Se va trata aceeași problemă, presupunînd că sînt disponibile patru centrale electrice, în patru orașe A, B, C, D. Cazuri particulare: $ABCD$ este un pătrat, un paralelogram sau un trapez.*

7. *Un călător dorește să pătrundă în interiorul unui teren, împrejmuit de un hotar avînd forma unui poligon. Cum își va alege punctul de acces, astfel încît, mergînd în linie dreaptă, să parcurgă drumul minim pînă la hotar?*

Capitolul II Cercul

1. Definiții

Vom presupune, ca și în capitolele precedente, că a fost ales un segment etalon m, cu ajutorul căruia asociem fiecărui segment $|AB|$ raportul $|AB|/m$, ce va fi numit *lungimea*, în unități m, a segmentului $|AB|$, sau mai simplu, lungimea segmentului $|AB|$. Lungimea unui segment este un număr real pozitiv, care poate fi notat $\overline{AB}$.

Fiind date două puncte A, B, *distanța* între aceste puncte, în unități m, este numărul real 0 dacă $A = B$ și numărul pozitiv $\overline{AB}$, dacă $A \neq B$. Distanța între punctele A, B va fi notată $d(A, B)$.

Toate figurile considerate sînt luate într-un plan fixat.

Definiție. **Fie O un punct și R un număr pozitiv. Se numește cerc de centru O și rază R locul geometric (mulțimea) al punctelor M, pentru care $d(O, M) = R$. Notînd prin $C(O, R)$ acest loc geometric,** avem deci (fig. II.1)

$$C(O,R) = \{M;\ d(O, M) = R\}.$$

Interiorul cercului $C(O, R)$ este mulțimea (fig. II.2)

$$\text{int } C(O, R) = \{P;\ d(O, P) < R\},$$

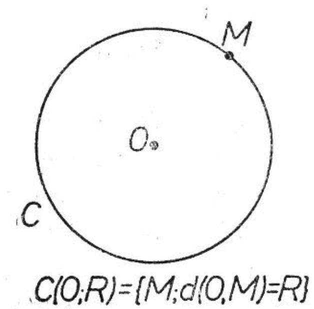

Fig. II.1

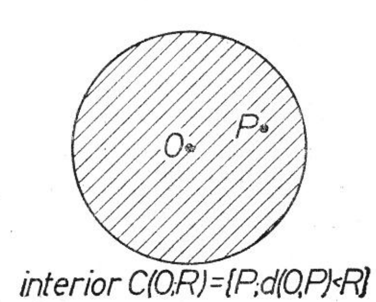

Fig. II.2

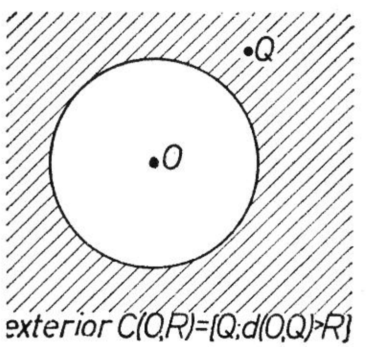

Fig. II.3

iar *exteriorul* cercului $C(O,\ R)$ (fig. II.3) este definit prin formula

$$\text{ext } C(O,\ R) = \{Q;\ d(O,\ Q) > R\}.$$

Discul de centru O și rază R este mulțimea

$$D(O,\ R) = \{A;\ d(O,\ A) \leqslant R\} = $$
$$= \text{int } C(O,\ R) \cup C(O,\ R).$$

Din axioma de purtare congruentă a segmentelor rezultă că:

Orice dreaptă d, care trece prin punctul O, intersectează cercul $C(O,\ R)$ în două puncte A, B astfel ca O să fie mijlocul segmentului $|AB|$ (fig. II.4).

Rezultă că *cercul $C(O,\ R)$ este o figură simetrică față de centrul O.*

Dacă o dreaptă d trece prin centrul cercului $C(O,\ R)$ și taie acest cerc în punctele A, B, se spune că segmentul $|AB|$ este *diametrul* determinat de dreapta d în cercul $C(O,\ R)$.

Orice punct al segmentului $|AB|$ este un punct interior cercului $C(O,\ R)$, deoarece pentru $Q \in |AB|$, avem $d(O,\ Q) < d(O,\ A) = d(O,\ B) = R$.

Fie Q un punct pe diametrul $|AB|$ și fie d' perpendiculara ridicată în Q pe dreapta $d = AB$ (fig. II.5). Pe dreapta d' există două puncte M, N

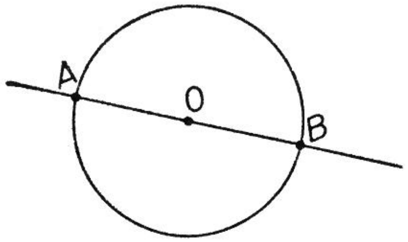

Fig. II.4

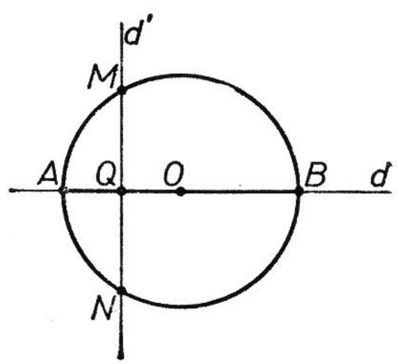

Fig. II.5

astfel ca $d(Q,\ M) = d(Q,\ N) = \sqrt{R^2 - d(O,\ Q)^2}$ și $Q \in |MN|$. Vom avea, aplicînd teorema lui Pitagora, $d(O,\ M) = d(O,\ N) = R$, deci punctele M, N aparțin cercului $C(O,\ R)$. Punctele M, N sînt simetrice față de dreapta d. Cînd punctul Q descrie diametrul $|AB|$, punctele M, N descriu cercul $C(O,\ R)$, exceptînd punctele A, B. Deci punctele cercului $C(O,\ R)$ se împart în perechi de puncte simetrice față de diametrul $|AB|$, cu excepția punctelor A, B, care sînt fiecare propriul său simetric față de AB.

Teoremă. Interiorul unui cerc este o mulțime convexă.

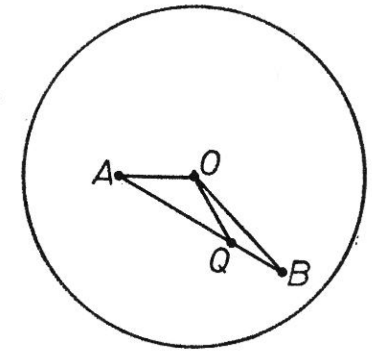

Fig. II.6

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că, dacă A, B sînt două puncte interioare cercului $C = C(O,\ R)$ (fig. II.6) atunci pentru orice punct $Q \in |AB|$ avem $Q \in \text{int } C$. Deci trebuie să demonstrăm implicația

$$d(O,\ A) < R,\ d(O,\ B) < R.$$
$$Q \in |AB| \Rightarrow d(O,\ Q) < R.$$

Dar la pag. 32 am demonstrat că segmentul care unește un vîrf al unui triunghi cu un punct situat pe latura opusă acelui vîrf este mai mic decît cea mai mare din laturile ce pornesc din vîrful considerat. Implicația precedentă este deci dovedită.

Intersecția unei drepte cu un cerc

Vom presupune cercul $C = C(O,\ R)$ fixat și vom studia intersecția unei drepte d cu cercul C, considerînd toate cazurile posibile.

Dacă dreapta d trece prin centrul O, intersecția $d \cap C$ este formată din două puncte simetrice față de punctul O (fig. II.4).

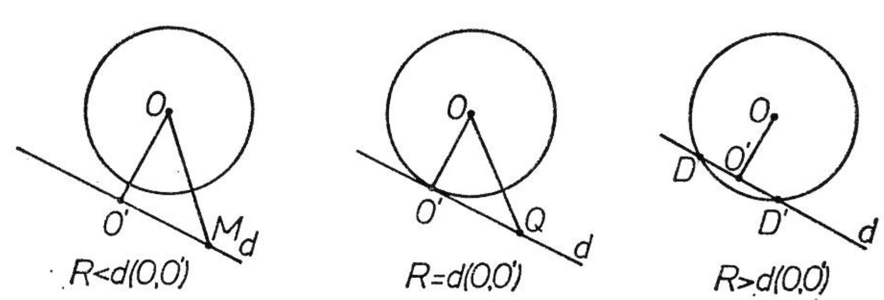

Fig. II.7

Să presupunem atunci că d nu trece prin O și să notăm prin O' proiecția ortogonală a punctului O pe dreapta d. Dreapta $d' = OO'$ este atunci perpendiculară pe d. Pentru un punct oarecare $M \in d$ avem $d(O,\ M) = \sqrt{d(O,\ O')^2 + d(O',\ M)^2} \geqslant d(O,\ O')$.

Rezultă că dacă $d(O,\ O') > R$, atunci toate punctele dreptei d sînt exterioare cercului C și intersecția $C \cap d$ este vidă (fig. II.7).

Dacă $d(O,\ O') = R$, O' aparține cercului C și, pentru orice punct $Q \in d$ diferit de O', avem $d(O,\ Q) > R$, deci $Q \notin C$. Aceasta înseamnă că, în cazul