Alg. Liniară

05.03.2024

CURS 2

Determinanți

- $\sigma : \{1, 2, \dots m\} \to \{1, 2, \dots m\}$ permutare

  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(m) \end{pmatrix}$

- O pereche (i, j) s.n. inversiune dacă $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$
- $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ nr. inv a lui $\sigma = m(\sigma)$
- Fie $A \in \mathcal{M}_m(K)$; determinantul matricei A este

  $$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)}$$

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- Fie $A \in \mathcal{M}_m(K)$; s.n. nr. de ord p al lui A det. unei matrici de ord p ale cărei elemente sunt situate la intersecția a p linii cu p col. ale lui A

- $I \cdot \{i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$ $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_p\}$

- $A_{IJ} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ a_{i_2 j_2} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_2 j_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p j_1} & \dots & \dots & a_{i_p j_p} \end{pmatrix}$ $M = \det A_{IJ}$ minor de ord p

- $$A_{I,J} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ \hline i_1 & & & & \\ \hline i_2 & & & & \\ \hline \vdots & & & & \\ \hline i_p & & & & \end{array}$$

- Exemplu: $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $I = \{1,3\}$; $J = \{2,3\}$

minorul corep $= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

- $\bar{I} = \{1,2,\dots,m\} - I$ și $\bar{J} = \{1,2,\dots m\} - J$
- $\bar{M} = \det A_{\bar{I},\bar{J}}$ minorul complementar

Se obț. prin înlăturarea liniilor $i_1, i_2, \dots i_p$ și a col $j_1, j_2, \dots j_p$

- $\bar{M}$ un det de ordin $m-p$ sau complementarul algebric al lui M
- $M' = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_p+j_1+\dots+j_p}$
- Minorii complementari ai elem. mat A sunt det. de ord $m-1$
- $a_{ij} \longrightarrow M_{ij}$ minorul compl.

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ complementul alg al lui a_{ij}

(T) Teorema / Formula lui Laplace

$i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_p$ p linii ; $A \in \mathcal{M}_m(K)$

$I = \{i_1, i_2, \dots i_p\}$

$$\det A = \sum M \cdot M' = \sum \underbrace{\det A_{I,J}}_{M} \cdot \underbrace{(-1)^{i_1+\dots+i_p+j_1+\dots+j_p} \cdot \det A_{\bar{I},\bar{J}}}_{M'}$$

Spații vectoriale

- $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$
- O mulțime nevidă V „n" cu 2 operații, una internă $+ : V \times V \to V$ și una externă $\cdot : K \times V \to V$ s.n. spațiu vectoriale pe K dacă:

  1) $(V, +)$ grup abelian
  2) $\alpha(x+y) = (\alpha x + \alpha y)$ $\forall \alpha \in K$; $x, y \in V$
  3) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ $\forall \alpha \in K, \beta \in K, x \in V$
  4) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\forall x \in V$
  5) $1 \cdot x = x$

- Elementele lui V s.n. vectori & elem. lui K s.n. scalari
- $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i \le i \le n \}$

  1) $(x_1, \dots x_n) + (y_1, \dots y_n) = (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$
  2) $\alpha(x_1, \dots x_n) = (\alpha x_1, \dots \alpha x_n)$

- $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ = matricea cu m linii și n col.
- $C_{[a,b]} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ cont} \} \Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{cases}$
- $\mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$
- $\mathbb{R}_{\le n}[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X], \text{grad } p \le n \}$
- Fie V spațiu vect peste K, V/K

  1) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$
  2) $\alpha(x-y) = \alpha x - \alpha y$
  3) $0 \cdot x = 0 \cdot x$
  4) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$
  5) $\alpha x = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0_V$

- Fie V un K spațiu vect. și $W \subset V$ o submulțime. Spunem că W e subspațiu vect al lui V dacă e înzestrată cu spațiile lui V vecinătatea la W este sp. vect.

- Fie V sp. vectorial peste K și $W \subset V$, $W \neq 0$

  1) W

  2) $\forall x, y \in W$, $\alpha \in K$, avem $x+y \in W$ și $\alpha x \in W$

  3) $\forall x, y \in W$, $\forall \alpha, \beta \in K$ avem $\alpha x + \beta y \in W$

- Exemple: 1) V, K sp. vect. $\{0\}$

  2) $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$ subsp. al lui $\mathbb{R}[X]$

  3) $\{(x_i, 0, \dots, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ subsp. al lui $\mathbb{R}^n$