Examen Algoritmi Avansaţi. 11.06.2025.

1. Considerați un Filtru Bloom cu 16 biți și 3 funcții hash: h_1, h_2, h_3, cu proprietatea că $h_i(A) = h_i(B) \iff A = B$ (nu avem coliziune pe fiecare dintre cele 3 funcții hash).

a. După inserarea a 5 elemente, care va fi numărul minim de 0 rămase în filtru? Dar numărul maxim? Justificați! **(5p)**

b. Fie 5 elemente A, B, C, D, E. Elementul A are cele 3 valori de hash $(5, 9, 14)$, respectiv elementului B îi corespund valorile $(10, 11, 4)$. Dați exemplu de valori asociate lui C, D, E astfel încât după inserarea doar lui A,B,C filtrul să arate în mod corect că elementul E nu este inserat, dar după inserarea și lui D filtrul să returneze un *false positive* atunci când este interogat cu privire la E. Afișați valorile filtrului după inserarea lui A, B, C, respectiv după inserarea lui A, B, C, D. **(5p)**

2. Numim *minimum degree spanning tree* pentru un graf conex G, un arbore parțial cu proprietatea ca gradul maxim al nodurilor este minimizat.

Teoremă: Problema de decizie daca un graf conex admite un arbore partial cu noduri de grad cel mult 2 (lant hamiltonian) este **NP-Completă**.

Cerință: Aratati ca nu poate exista un algoritm aproximativ pentru problema gasirii unui *minimum degree spanning tree* pentru un graf conex cu factorul de aproximare $< 3/2$, in ipoteza că $P \neq NP$. **(10p)**

3. Dați exemplu de o problemă de decizie pe grafuri care să fie în clasa **NP** dar nu și în clasa **NP-C**. Justificați! **(10p)**

4. Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_8\}$, unde $P_1 = (-7, -1)$, $P_2 = (-4, \alpha)$, $P_3 = (-3, -1)$, $P_4 = (-2, 1)$, $P_5 = (-1, 5)$, $P_6 = (0, -2)$, $P_7 = (1, -2)$, $P_8 = (4, 0)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\mathcal{L}_i$ (respectiv $\mathcal{L}_s$) lista vârfurilor care determină marginea inferioară (respectiv superioară) a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. (i) Pentru $\alpha = -2$ detaliaţi cum evoluează $\mathcal{L}_i$ pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. **(6p)** (ii) Daţi exemplu de valoare a lui α pentru care $\mathcal{L}_s$ are exact patru puncte (justificaţi!). **(2p)** (iii) Determinaţi mulţimea tuturor valorilor lui α pentru care $\mathcal{L}_s$ are exact patru puncte. Justificaţi! **(2p)**

5. Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1 P_2 \ldots P_{12})$, unde $P_1 = (-5, -3)$, $P_2 = (-2, -4)$, $P_3 = (4, -5)$, $P_4 = (5, 0)$, $P_5 = (4, 4)$, $P_6 = (1, 6)$, $P_7 = (-4, 4)$, $P_8 = (-2, 3)$, $P_9 = (1, 5)$, $P_{10} = (3, 0)$, $P_{11} = (2, -3)$, $P_{12} = (-2, -1)$. (i) Aplicaţi metoda din teorema galeriei de artă în cazul poligonului $\mathcal{P}$, indicând o posibilă amplasare a camerelor. **(4p)** (ii) Indicaţi două vârfuri concave, două vârfuri convexe neprincipale şi două vârfuri convexe principale ale lui $\mathcal{P}$. **(3p)** (iii) Indicaţi o descompunere a lui $\mathcal{P}$ în poligoane y-monotone $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ (i.e. cele trei poligoane sunt y-monotone, vârfurile lor sunt dintre vârfurile lui $\mathcal{P}$, interioarele lor sunt disjuncte şi reuniunea interioarelor lor este interiorul lui $\mathcal{P}$). **(3p)** Justificaţi, pe scurt, afirmaţiile făcute!

6. Se consideră problema de programare liniară dată de constrângerile h_1, h_2, h_3, h_4 şi de funcţia obiectiv f, unde $h_1 : y \leq 3$; $h_2 : x + y \leq 10$; $h_3 : -y \leq 1$; $h_4 : -x \leq 2$, iar $f(x, y) = x$. Determinaţi/desenaţi regiunea fezabilă $\mathcal{R}$, precizaţi dacă este mărginită sau nu şi indicaţi numărul de vârfuri şi numărul de muchii. **(6p)** Stabiliţi dacă problema de maximizare a funcţiei obiectiv f pe $\mathcal{R}$ are soluţie unică. **(2p)** Aceeaşi întrebare pentru funcţia obiectiv $g(x, y) = y$. **(2p)**

7. a) Fie $ABCD$ un patrulater cu vârfurile $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$. Justificaţi care este complexitatea algebrică a calculelor pentru: (i) a stabili dacă patrulaterul este paralelogram, **(5p)** (ii) a stabili dacă patrulaterul este dreptunghi. **(5p)**

b) Considerăm algoritmii prezentaţi la curs pentru intersecţii de segmente (alg. Bentley-Ottmann) şi pentru determinarea diagramei Voronoi (alg. Fortune). Comparaţi (indicând punctual asemănări/deosebiri), **pe scurt**, cei doi algoritmi, făcând referire la următoarele elemente: (i) paradigma utilizată, (ii) evenimente (natura evenimentelor / aspecte cantitative), (iii) statut, (iv) complexitatea-timp a algoritmilor. **(15p)**

c) Considerăm n dreptunghiuri $D_1, D_2, \ldots, D_n$ în planul $\mathbb{R}^2$, cu laturile paralele cu axele de coordonate. Descrieţi, pe scurt, un algoritm cât mai eficient (indicând explicit complexitatea-timp a acestuia) care să determine dreptunghiul de arie minimă care are laturile paralele cu axele de coordonate şi care conţine reuniunea $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$. **(5p)**