Probabilități & Statistică

14.10.2024

Seminar 1

$(\Omega, K, P) \Rightarrow$ Ω spațiu stărilor/probelor

K σ-alg. (mulț. evenimentelor pos)

P f. de prob

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ Luăm $K = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \dots \Omega\}$

$1,3,5 \longrightarrow$ DA

$2,4,6 \longrightarrow$ NU

$K_0 = \{\emptyset, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$

$\mathbb{P} : K \to [0,1]$

⊛ Dacă vrem să fol. zarul pentru 3 opțiuni? (Cum arată K_0?)

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$1,4 \to$ Opțiunea 1

$2,5 \to$ Opțiunea 2

$3,6 \to$ Opțiunea 3

$\Rightarrow K_0 = \{\emptyset, \Omega, \{1,4\}, \{2,5\}, \{3,6\}\}$

① (Ω, K, P) , A, B, C , $\mathbb{P} \cdot K \to [0,1]$

1) $A \cap B$

2) $A \cup B \cup C$ și 3) $A \cup B \cup C$

4) $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

5) $A \cap C \cap \bar{B}$

6) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = E$

7) $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

② $A \rightsquigarrow$ nr: 2

$B \rightsquigarrow$ nr: 3

$C \rightsquigarrow$ nr: 10

a) $C \cap (A \cup B)$ înseamnă: nr : 10 și nr : 3

b) $(A \cap B) \cup C$ înseamnă: nr : 6 sau nr : 10

c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ înseamnă: nr : 6 sau (nr : 2 și nr : 10)

⊛ { O mamă are 3 copii, sunt 10 mame
Se alege o pereche de o mamă și un copil
Câte candidaturi avem?

Orice mamă cu oricare 3 copil => $10 \cdot 3$

⊛ Câte nr. de înmatriculare se pot forma cu 3 l și 3 cfr.

$10^3 \cdot 26^3$

⊛ Voce $4!$

Baobab $\frac{6!}{3!\,2!}$ $\Big| \Rightarrow \frac{m!}{m_1!\, m_2! \cdot m_r!}$ permutări unde par repetiții

r = nr. elem. distincte

$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m$

⊛ comitet = 2 femei și 3 b

5 femei și 7 bărbați

$C_5^2 \cdot C_7^3$

Dacă 2 bărbați sunt într-o ceartă și nu vor să facă parte din același comitet?

$C_5^2 (C_5^2 \cdot C_2^1 + C_5^3 \cdot C_2^0)$

⊛ Considerăm un set de antene n, din care m sunt defecte. Vrem să le înșiruim a.î. să nu avem 2 antene defecte una lângă alta.

28.10.2024

Seminar 3

Probabilități condiționate

● Dacă $A \in K$, $A \neq \emptyset$ este posibilă $\mathbb{P}(A) = 0$?

Pp. r.a. că $\exists A \neq \emptyset$, $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 \Rightarrow \bar{A} = \Omega$ ab

$A, B \in \mathbb{K}$, $B \neq \emptyset$ $\quad \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Bayes (pt $A \neq \emptyset$)

Obs: A, B ies atunci $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\cancel{\mathbb{P}(BA)}\ \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Poincare: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Obs. A, B inc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
(incompatibile)

④ A, B, X ev

$P(A|X) = 0{,}22$

$P(A \cap X) = 0{,}11$

$P(X \cap B) = 0{,}16$

$P(B \cup X) = 0{,}76$

$P(A) = 0{,}31$

a) $P(B|X) = ?$

$$P(X) = \frac{P(A \cap X)}{P(A|X)} = \frac{0{,}11}{0{,}22} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|X) = \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{0{,}16}{1/2} = 0{,}32$$

b) $P(B) = ?$

$P(X \cup B) = P(X) + P(B) - P(X \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(X) - P(X \cap B) - P(X \cup B) =$
$= 1/2 - 0{,}16 - 0{,}76$

c) $P(X) =$

d) $P(A \cup X) = ?$

$P(A \cup X) = P(A) + P(X) - P(A \cap X) = P(A) + 1/2 - 0{,}11 = 2 - 0{,}5 - 0{,}11$

$$P(A) = \frac{P(A \cap X)}{P(A|X)} = \frac{0{,}22}{0{,}11} = 2$$

⑤ (Ω, K, P) câmp probabilitate   a) $P(A), P(B) = ?$

$A, B \in K$

$P(A \cap B) = 0{,}01$

$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}03$

$P(A|B) = 0{,}05$

$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = 0{,}01 + 0{,}03 = 0{,}04 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = 0{,}04 \Leftrightarrow$

pt. că $A \cap B$ și $A \cap \overline{B}$ sunt ev. incompatibile

$\Leftrightarrow P(A \cap (B \cup \overline{B})) = 0{,}04 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}04$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0{,}01}{0{,}05} = 0{,}2$$

b) $P(A \cup B), P(\overline{A} \cap \overline{B}) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}04 + 0{,}2 - 0{,}01 = 0{,}24 - 0{,}01 = 0{,}23$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}23 = 0{,}77$$

c) $P(B|A), P(A|\overline{B}) = ?$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}01}{0{,}04} = 0{,}25$$ ~~sau $P(B|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} =$~~

~~$P(A|\overline{B})$~~   sau

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}2}{0{,}04} = 0{,}25$$

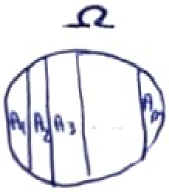
$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}03}{1 - 0{,}2} = \frac{0{,}03}{0{,}8} = 0{,}037$$

d) $P(B|\overline{A}), P(\overline{A}/\overline{B}) = ?$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}19}{1 - P(A)} = \frac{0{,}19}{0{,}96} = 0{,}197$$

$$\underbrace{P(B \cap \overline{A}) + P(B \cap A)}_{\text{inc.}} = P(B) \Leftrightarrow P(B \cap \overline{A}) = 0{,}2 - 0{,}01 = 0{,}19$$

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - 0{,}23}{1 - 0{,}2} = \frac{0{,}77}{0{,}8} = 0{,}96$$



$A_1, A_2, \ldots A_m$ sist. complet de evenimente

$A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i, j$

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$$

Formula prob. totale: $P(X) = \sum_{i=1}^{m} P(X|A_i) P(A_i)$

Obs: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

$P(A|\bar{B}) \neq 1 - P(A|B)$

$$= \frac{(1-P(X|A_1))P(A_1) + (1-P(X|A_2))P(A_2)}{1-P(X)} = \frac{(1-0,02)\cdot 0,3 - (1-0,04)\cdot 0,5}{1-0,036} =$$

$$= \frac{0,98\cdot 0,3 - 0,96 \cdot 0,5}{0,964} = \frac{0,294 - 0,48}{0,964} = 0,18$$

⊛ A_i - avem 2 la aruncarea i (zar)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{7} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{7} \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{7} \bar{A}_i = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

⊛ Aruncăm 2 zaruri

X = primul mai mare decât al doilea

Y = — " — mic — " ———

Z = primul egal cu al doilea

X, Y, Z = sist. complet de evenimente $\Rightarrow P(X) + P(Y) + P(Z) = 1$

$P(Z) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(X) = P(Y)$

$\Rightarrow 2P(X) + \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow P(X) = P(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}$

⊛ Se ar. simultan 2 zaruri $\Rightarrow$ suma să fie 5 sau 8

A_m = ev. că 5 apare la a m-a încercare și 5 și 8 nu apar la $m-1$ încerc

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{m-1} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{m-1} = \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{m} = \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{26}{36}}$$

⑩ 100 calculatoare

F_1 F_2 F_3 furnizori

30 50 20 calc. de la furn.

2% 4% 5% defc în per. de garanție

X = ev. care arată că un calculator ~~de~~ se defectează în perioada de garanție

A_i = ev. că un calc. provine de la un furnizor F_i, $i \in \{1,2,3\}$

$P(A_1) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

$P(A_2) = \frac{50}{100} = 0{,}5$

$P(A_3) = \frac{20}{100} = 0{,}2$

~~$P(X|A_1)$~~ $P(X|A_1) = 0{,}02$ (acel 2%)

$P(X|A_2) = 0{,}04$

$P(X|A_3) = 0{,}05$

a) probabilitatea ca un calculator din magazin să se defecteze.

$P(X) = ?$

A_1, A_2, A_3 formează sist. compl. de ev.

~~$P(X) = P(X|A_1) + P(X|A_2) + P(X|A_3) = 0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}05 =$~~

$P(X) = P(X|A_1) \cdot P(A_1) + P(X|A_2) \cdot P(A_2) + P(X|A_3) \cdot P(A_3)$

$P(X) = 0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}04 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 \cdot 0{,}2 =$ ~~0,36~~ $0{,}036$

b) $P(A_2|X) = \frac{P(X|A_2) \cdot P(A_2)}{P(X)} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}5}{0{,}36} \approx 0{,}55$

c) $P(X | A_1 \cup A_3) = \frac{P(X \cap (A_1 \cup A_3))}{P(A_1 \cup A_3)} = \frac{P(\overbrace{(X \cap A_1) \cup (X \cap A_3)}^{\text{inc.}})}{P(\underbrace{A_1 \cup A_3}_{\text{incompatibile}})} =$

$= \frac{P(X \cap A_1) + P(X \cap A_3)}{P(A_1) + P(A_3)} = \frac{P(X|A_1) \cdot P(A_1) + P(X|A_3) \cdot P(A_3)}{P(A_1) + P(A_3)} =$

$= \frac{0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}2}{0{,}3 + 0{,}2} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}01}{0{,}5} = \frac{0{,}006 + 0{,}01}{0{,}5} = \frac{0{,}016}{0{,}5} = \frac{16}{500} = 0{,}32$

d) $P(A_1 \cup A_2 | \bar{X}) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap \bar{X})}{P(\bar{X})} = \frac{P((A_1 \cap \bar{X}) \cup (A_2 \cap \bar{X}))}{1 - P(X)} =$

$= \frac{P(A_1 \cap \bar{X}) + P(A_2 \cap \bar{X})}{1 - P(X)} = \frac{P(\bar{X}|A_1) \cdot P(A_1) + P(\bar{X}|A_2) \cdot P(A_2)}{1 - P(X)} =$

Probabilități și Stat.

04. 11. 2024

Seminar 4

Scheme de probabilitate

① Schema binomială (a lui Bernouli) (cu bila revenită) (2 culori)

$$P(n; k, n-k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

prob. ca din n extrageri ca k să fie cul. dorită și n-k cea nedorită

p - succesului și q - eșecului

prob. la o extragere

② Schema cu bila revenită cu r culori

$$P(n; n_1, n_2, \dots n_r) = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \cdots n_r!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$$

③ Schema hipergeometrică (cu bila nerevenită)

$$P(n; k, n-k) = \frac{C_{N_1}^{k} \cdot C_{N_2}^{n-k}}{C_N^{n}}$$

n bile fără revenire

$N = N_1 + N_2$

④ Schema cu bila nerevenită cu r culori

$$P(n; n_1, n_2, \dots n_r) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2} \cdots C_{N_r}^{n_r}}{C_N^{n}}$$

⑤ Schema lui Pascal (geometrică)

$$P(„k") = p \cdot q^{k-1}$$

⑥ Schema lui Poisson

$P(n; k, n-k)$ coef. lui t^k

din pol. $Q(t) = \prod_{i=1}^{n} (p_i \cdot t + q_i)$

① a) $p_1 = \frac{5}{30}$ $p_2 = \frac{10}{30}$ $p_3 = \frac{4}{30}$

$T = 30$ $T = 30$ $T = 30$

$s = 5$ $S = 10$ $S = 4$

$q_1 - \frac{25}{30}$ $q_2 = \frac{21}{30}$ $q_3 = \frac{26}{30}$

$P(3;0,3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$

$Q(t) = (p_1 t_1 + q_1)(p_2 t_2 + q_2)(p_3 t_3 + q_3)$

b) $P(3;1,2) = p_1 q_2 q_3$ ~~[illegible]~~ $q_1 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2$

c) $P(C) = P(3;0,3) + P(3;1,2) + P(3;2,1)$

~~$P(3;2,1) = p_1 p_2 q_3 + p_2 \cdot p_3$~~ $P(3;2,1)$ pt t^2

t^2

d) $P(D) = P(C)$

② $p = \frac{2}{10}$

a) $P(8;4,4) = C_8^4 \cdot p^4 \cdot q^4 = C_8^4 \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^4$

b) $P(8;5,3) = C_8^5 \left(\frac{2}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^3$

c) $P(C) =$ ~~P(~~ $8;\ \sum_{k=6}^{8} P(8;k;8-k)$

d) x = ev. cel puțin 3 să cumpere   („pare „știind că")

y = ev. minim 2 nu vor cumpăra

$$P(D) = P(x|y) = \frac{P(x \cap y)}{P(y)} = \frac{\sum_{k=3}^{6} P(8;k,8-k)}{\sum_{k=0}^{6} P(8;k,8-k)}$$

x ⇒ 3, 4, 5, 6, 8

y ⇒ 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

$\cap$

e) M = ev. să cumpere mai puțin de 4 persoane   0, 1, 2, 3

N = ev. 2 au cumpărat deja $\cap$ 2

$$P(E) = \frac{P(M|N)}{P(N)} = \frac{P(N)}{P(N)} = 1$$

⑥ 49 bile, prob. ca 4 din nr. extrase să fie 7, 26, 14, 8, 3 sau 22
6 extrageri fără a se pune bila înapoi
chit că bilele sunt numerotate NU aplicăm schema cu r culori.
Aplicăm schema hipergeometrică

$$\left.\begin{array}{l} N = 49 \\ N_1 = 6 \\ N_2 = 43 \\ n = 6 \end{array}\right| \Rightarrow P(6;4,2) = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6} \simeq 0,000968$$

⑪ monedă

a) $P(„7") = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$

b) $P(„1") + \dots + P(„6") = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

Obs. Dacă am fi avut o monedă măsluită nu ar mai fi fost $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{2}$

~~c) $P_c = \sum_{k=5}^{\infty} P(„k") = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^{k-1}$~~ nu e bine

d) $P_d = \sum_{k=6}^{\infty} P(„k") = \sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^{k-1}$

c) $P_c = \sum_{k=1}^{5} P(„k") = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^{k-1}$

Probabilitate & Statistică

18.11.2024

Seminar 5

- variabile aleatoare -

① Fie variabila aleatoare discretă $X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3p & 4p & 2p & p & p \end{pmatrix}, p\in\mathbb{R}$

a) $p = ?$

c.e. $p > 0$ $\Big| \Rightarrow 3p + 4p + 2p + p + p = 1 \to p = \frac{1}{11}$

c) $X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

$Y \overset{not}{=} 16X - 23$ $\quad E(Y), E(Z)$

$Z \overset{not}{=} 3X - 2$ $\quad Var(Y), Var(Z)$

$$E(X) = -2\left(\frac{3}{11}\right) + (-1)\left(\frac{4}{11}\right) + 0\cdot\frac{2}{1} + 1\cdot\frac{1}{11} + 2\,\frac{1}{1}$$

$$E(X) = \frac{-6-4+0+1+2}{11} = -\frac{7}{11}$$

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} \cancel{\Rightarrow E(X^2)}$$

$$E(X^2) = 0\cdot\frac{2}{11} + 1\cdot\frac{5}{11} + 4\cdot\frac{4}{11} = \frac{21}{11}$$

$$Var(X) = \frac{21}{11} - \left(-\frac{7}{11}\right)^2 = \frac{11\cdot 21 - 49}{121} = \frac{231-49}{121} = \frac{182}{121}$$

Răspuns final: $E(X) = -\frac{7}{11}$; $Var(X) = \frac{182}{121}$

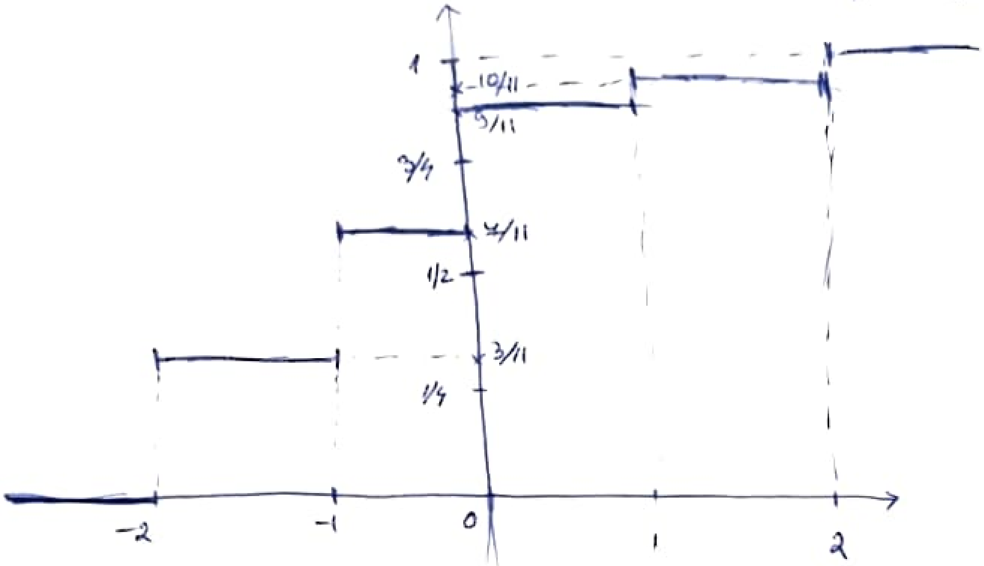
$E(16X-23) = 16E(X) - 23 = 16\frac{-7}{1} - 23$

$Var(16X-23) = 16^2 \cdot Var(X = \ldots$

~~$E(x)$~~ $E(3X-2) = 3E(X) - 2$

$Var(3X-2) = 3^2 E(X) = \ldots$

b) Funcția di repartiție : [redacted] $P(X \le x) = F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 3/11, & x \in \{-2, -1) \\ 7/11, & x \in (-1, 0) \\ 9/11, & x \in \{0, 1) \\ 10/11, & x \in [1, 2) \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$



d) (cerință suplimentară)

$P(-1,5 < X < 1,5) = \frac{4}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{1} = \frac{7}{11}$ (m-am folosit de funcția de repartiție)

SAU

$= F(1,5) - F(-1,5) - P(X=1,5) = \frac{10}{11} - \frac{3}{1} - 0 = \frac{7}{11}$

$$\boxed{P(a < X \le b) = F(b) - F(a)}$$

$P(\underbrace{X<0}_{A} \mid \underbrace{X>-2}_{B}) = \frac{P((X<0) \cap X > -2))}{P(X>-2)} = \frac{4/11}{1 - P(X \le -2)} = \frac{4/11}{1 - F(-1)} = \frac{1}{2}$

⑫ $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \ldots & k \ldots & 10 \\ p & p_2 & p_3 \ldots & p_k \ldots & p_{10} \end{pmatrix}$ $p = \frac{1}{3}$ (monedă măsluită)

a) $P_k = C_{10}^k p^k (1-p)^{10-k}, \forall k = \overline{0,10}$ (schema cu bila revenită)

b) $E(X) = \sum_{k=0}^{10} k \cdot P_k = \sum_{k=0}^{10} k \cdot C_{10}^k p^k (1-p)^{10-k} = \ldots$ temă $= 10 \cdot \frac{1}{3}$

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dots = 10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

⑥ $X: \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 6 \\ 6p & 2p & 9p & p \end{pmatrix} \quad p\in\mathbb{R}$

c.e. $p>0 \Rightarrow 6p+2p+9p+p=1 \Rightarrow 18p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{18}$

$X: \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 6 \\ \frac{6}{18} & \frac{2}{18} & \frac{9}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$

$a, b = ?$

$$\begin{cases} E(aX+b)=57 \\ \operatorname{Var}(aX+b)=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aE(X)+b=57 \\ a^2\operatorname{Var}(X)=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=57 \Rightarrow b=57\pm 6 \\ \frac{25}{3}a^2=75 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$$E(X) = -2\frac{6}{18}+3\frac{2}{18}+\frac{4\cdot 9}{18}+6\cdot\frac{1}{18}=\frac{36}{18}=2$$

$$E(X^2) = (-2)^2\frac{6}{18}+3^2\cdot\frac{2}{18}+4^2\frac{9}{18}+6^2\cdot\frac{1}{18}=\frac{24+18+16\cdot 9+36}{18}=\frac{222}{18}$$

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2)-(E(X))^2=\frac{222}{18}-4=\frac{37}{3}-4=\frac{25}{3}$$

$\Rightarrow a\in\{+3,-3\}$ și $b\in\{51,63\}$

Probabilități și Statistică

02.12.2024

Seminar 6

- variabile aleatoare -

③ $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ $Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

a)

X\Y	-1	1	p_i
0	0,5-k	k-0,1	0,4
1	k	0,6-k	0,6
q_j	0,5	0,5	1

$E(X) = 0,6$

$E(Y) = 0$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$

$= 0,6 - 0,6^2 = 0,24$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - 0 = 1$

$E(X \cdot Y) = -1 \cdot k + 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot (0,6-k) = 0,6 - 2k$

$X \cdot Y : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0,5-k & k-0,1 & k & 0,6-k \end{pmatrix}$

$X \cdot Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ k & 0,4 & 0,6-k \end{pmatrix}$

b) $\rho(X,Y) = \dfrac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \dfrac{0,6-2k - 0,6 \cdot 0}{\sqrt{0,24 \cdot 1}} = \dfrac{0,6-2k}{\sqrt{0,24}}$

c) X, Y necorelate $\Leftrightarrow \rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow 0,6 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 0,3$

pt. $k = 0,3$

$\pi_{ij} =$

X\Y	-1	1	p_i
0	0,2	0,2	
1	0,3	0,3	
q_j	0,5	0,5	1

⑧

$X \backslash Y$	-2	-1	0	1	p_i
-1	$1/80$	$2/80$	$3/80$	$14/80$	$1/4 = 20/80$
0	$2/80$	$3/80$	$14/80$	$1/80$	$20/80$
1	$3/80$	$14/80$	$1/80$	$2/80$	$1/4 = 20/80$
2	$14/80$	$1/80$	$2/80$	$3/80$	$20/80$
q_j	$1/4 = 20/80$	$20/80$	$1/4 = 20/80$	$20/80$	1

a) $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ $\quad Y : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$E(X) = -1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4$

$E(X) = 1/2$

$E(X^2) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 2/4 + 4 \cdot 1/4$

$E(X^2) = 3/2$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$

$= 3/2 - 1/4 = 5/4$

$E(Y) = -2 \cdot 1/4 + (-1)\, 1/4 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/4 =$

$E(Y) = -1/2$

$E(Y^2) = 3/2$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 =$

$= 3/2 - 1/4 = 5/4$

$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ $\quad Y^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$E(X \cdot Y) = (-1)(-2) \cdot \frac{1}{80} + (-1)(-1) \cdot \frac{2}{80} + 0 + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{14}{80} + 0 - \frac{6}{80} - \frac{14}{80} + \frac{2}{80} -$

$- \frac{56}{80} - \frac{2}{80} + \frac{6}{80} = -1$

b) $\rho(X, Y) = \frac{E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{-1 + 1/4}{\sqrt{(5/4)^2}} = -\frac{3}{5}$

c) $X \backslash Y = 0 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{3/80}{20/80} & \frac{14/80}{20/80} & \frac{1/80}{20/80} & \frac{2/80}{20/80} \end{pmatrix}$ $\quad X \backslash Y = 0 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{20} & \frac{14}{20} & 1/20 & 2/20 \end{pmatrix}$

$Y \backslash X = 2 \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{14/80}{20/80} & \frac{1/80}{20/80} & \frac{2/80}{20/80} & \frac{3/80}{20/80} \end{pmatrix}$ $\quad Y \backslash X = 2 : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{14}{20} & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$

$E(X \setminus Y=0) = -1 \cdot 3/20 + 0 \cdot 14/20 + 1 \cdot 1/20 + 2 \cdot 2/20$

$E(Y \setminus X=2) = \cdots \cdot\cdot$

d) $\text{Var}(-3Y+3) =$

Probabilitate & stat

09.12.2024

Seminar 7

- variabilele aleat. continue -

$$X : \begin{pmatrix} 1 & \dots & 2 & \dots & 3 & \dots & m & \dots \\ p_1 & & p_2 & & p_3 & \dots & p_m & \dots \end{pmatrix}$$

$p_m = \frac{1}{2^m}$; $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}$ serie geom. cu $q \in (-1,1)$ ş serie conv.

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = 1$$

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} k(x^3+x) , & x \in [1,2] \\ 0 , & x \notin [1,2] \end{cases}$

a) Det. $k = ?$ a.î. f să fie o densitate de probabilitate

f dens. prob. $\Rightarrow f(x) \geq 0$ pt $\forall x$; în plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow k(x^3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow kx(x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 k(x^3 - x)\, dx = 1 \Leftrightarrow k \int_1^2 x^3 - x\, dx = 1 \Leftrightarrow k \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_4^1 = 1 \Leftrightarrow$

$\mathrm{supp}(f) = \{x \in D \mid f(x) \neq 0\}$

$1_f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = k(x^3 - x) \cdot 1_{[1,2]}(x)$

$\Leftrightarrow k\left(2 + \frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{4}{9}$

b) $E(X) = ?$, $Var(X) = ?$ (media şi varianta)

$f(x) = \begin{cases} 4/9\,(x^3 + x) , & x \in [1,2] \\ 0 , & x \notin [1,2] \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \quad ; \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx \\ Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \end{array}}$$

$$E(X) = \int_1^2 x \cdot 4/9\,(x^3 - x)\, dx = \frac{4}{9}\int_1^2 (x^4 - x^2)\, dx = \frac{4}{9}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{93-35}{15} = \frac{4}{9} \cdot \frac{58}{15} = \frac{232}{135}$$

$$E(x^2) = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{4}{9}(x^3 - x)\, dx = \frac{4}{9}\int_1^2 (x^5 - x^3)\, dx = \frac{4}{9}\left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2$$

$$E(x^2) = 3$$

$$Var(X) = 3 - \left(\frac{232}{135}\right)^2 = 3 - (1{,}71\ldots)^2$$

$$E(2-3x) = 2 - 3E(x)$$

$$Var(2-3x) = 3^2\, Var(X) = Var(-3x+2)$$

$$P(0{,}5 \le X \le 1{,}5) = \int_{0{,}5}^{1{,}5} f(x)\, dx = \int_{1/2}^{3/2} \frac{4}{9}(x^3 - x)\, dx = \frac{4}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1/2}^{3/2} = \left(\frac{5}{12}\right)^2$$

$$\boxed{P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx}$$

$$P(x > \tfrac{5}{4} \mid x \le 1{,}5) = \frac{P(5/4 < x \le 3/2)}{P(x \le 3/2)} = \frac{\int_{5/4}^{3/2} \frac{4}{9}(x^3 - x)\, dx}{\int_1^{3/2} \frac{4}{9}(x^3 - x)\, dx} = \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{5/4}^{3/2}}{\frac{4}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^{3/2}}$$

$P(x > 5/4 \mid x \le 1{,}5) = \frac{319}{411}$ (probabil)

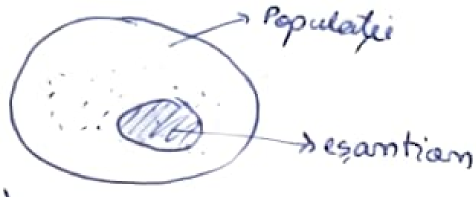
d) funcția de repartiție

Probab. & Stat.

13.01.2025

Seminar 9
-statistică-

$X \sim \overset{\xrightarrow{\text{știu}}}{F_\theta}$; $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots \theta_k)$
↳ vreau să aflu



$X_1, X_2, X_3 \dots X_m$ v.a.i.i.d (virtual)

$x_1, x_2, x_3, \dots x_m$ (efectiv) se mai numese observații

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots X_m)$ estimator pentru θ (este tot o var. al.)

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots x_m)$ estimație pentru θ (este un nr.)

$\overline{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$ media de selecție ($\overline{X}$ = v.a.)

$\overline{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i$, unde $\overline{x}$ = nr.

=> construcția estimatorilor

Cele 2 metode nu dau același estimator (met. momentelor; met. verosimilității maxime).

I. Metoda momentelor

Vom analiza doar cazul în care θ este unic

$E(X) = \overline{X}$

↳ media teoretică ↳ media empirică

$1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ funcția indicator

$1\!\!1_{(0,\infty)}(x)$ la exerciții

——— ex ———

j) caz ca var. continuă pt. că $1\!\!1_{(0,\infty)}(x)$
era var. al. dacă $x \in \mathbb{N}$

$f_\theta(x) = \frac{2}{\theta} \cdot x \cdot e^{-x^2/\theta} \cdot 1\!\!1_{(0,\infty)}$; $\theta > 0$

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{2}{\theta} \cdot x^2 \cdot e^{\frac{-x^2}{\theta}} dx = \frac{2}{\theta} \int_0^\infty x^2 e^{\frac{-x^2}{\theta}} dx$

S.V. $\frac{x^2}{\theta} = t \Rightarrow x^2 = \theta t \Rightarrow x = \sqrt{\theta t} \Rightarrow dx = \sqrt{\theta}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$$E(x) = \frac{2}{\theta}\int_0^\infty \theta t e^{-t} \sqrt{\theta}\,\frac{1}{2} t^{-1/2}\,dt = \sqrt{\theta}\int_0^\infty t^{1/2} e^{-t}\,dt = \sqrt{\theta}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{\theta}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\theta}}{2}\sqrt{\pi}$$

$$E(x) = \bar{X} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\theta\pi}{4}} = \bar{X} \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{4\bar{X}^2}{\pi}$$

II Metoda verosimilității maxime

$$\underbrace{L(\theta}_{\text{var.}} | \underbrace{x_1, x_2, \dots x_m}_{\text{știu}}) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{54\theta^3} \cdot e^{-\frac{x_i}{3\theta}}, & x_i > 0\ \forall i \\ 0, & x_i = 0 \end{cases}$$

funcția de verosimilitate

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{54\theta^3}\right)^m \cdot \prod_{i=1}^{m} x_i^m \cdot e^{-\frac{1}{3\theta}\cdot \boxed{\sum_{i=1}^{m} x_i}} \longrightarrow m\bar{x}$$

~~$\ln(L(\theta)$~~) $\ln L(\theta) = m \ln \frac{2}{\theta} + \ln \prod_{i=1}^{m} x_i - \frac{1}{\theta} m\bar{x} = m \ln 2 - m \ln \theta + \ln \prod_{i=1}^{m} x_i - \frac{1}{\theta} \cdot n \cdot \bar{x}$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow -\frac{m}{\theta} + m\bar{x}\cdot\frac{1}{\theta^2} = 0 \cdot \frac{\theta^2}{m} \Leftrightarrow -\theta + \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \bar{x} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \bar{x}}$$

$$\frac{\lambda^2 \ln L}{\partial \theta^2}\bigg|_{\theta=\bar{x}} = \frac{m}{\theta^2} - 2m\bar{x}\cdot\frac{1}{\theta^3}\bigg|_{\theta=\bar{x}} = \underbrace{\frac{m}{\theta^2}}_{>0}\underbrace{\left(1 - 2\bar{x}\frac{1}{\theta}\right)}_{<0}\bigg|_{\theta=\bar{x}} < 0$$

Prob & Stat

16.12.2024

Seminar 8

$X \sim Geom(p)$ $\quad q = 1-p$

$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots & \dots \\ & & & & pq & & \end{pmatrix}$ încercări până la primul succes (independente)

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p & pq & pq^2 & \dots & pq^{n-1} & \dots \end{pmatrix}$ eșecuri până la primul succes

$X \sim Norm(m, \sigma^2)$

$X \sim Binom(n, p)$

câte succese avem în n încercări (nr. prestabilit)

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix}$ $\quad P_k = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$

$X \sim Exp(\lambda)$, $\quad f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

"alexamaricoarei.quarto.pub" are tot ce trb pt. legendă în R

histogramă =

e funcţii corespunde cu histograma, dacă linia ∩ fiecare bară la jum x.