# SEMINAR 9

## FUNCȚII DIFERENȚIABILE

**EXERCIȚIUL 1** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Să se studieze continuitatea și existența derivatelor parțiale în $(0,0)$.

**REZOLVARE** f funcție continuă pe $\mathbb{R}^2$ (compunere de funcții elementare) $\Rightarrow$ f este continuă în $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1)-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot(1,0))-f((0,0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((t,0))-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{|t|}{t} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{-t}{t} = -1 \\ \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{|t|}{t} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{t}{t} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} . \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f nu admite derivată parțială în raport cu variabila x din $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_2)-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1))-f((0,0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,t))-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \nexists \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f nu admite derivată parțială în raport cu variabila y în $(0,0)$

CONCLUZIE: Funcția este continuă în $(0,0)$, dar nu admite nicio derivată parțială în $(0,0)$

EXERCIȚIUL 2 Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 ; (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

. Să se studieze continuitatea și existența derivatelor parțiale în $(0,0)$.

REZOLVARE $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1)-f((0,0))}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f((t,0))-f((0,0))}{t}$

$$=\lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0^2}{t^2+0^4}-0}{0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_2)-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,t))-f((0,0))}{t} =$$

$$=\lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t^2}{0^2+t^4}-0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x,y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$).

Testăm existența limitei funcției în $(0,0)$ cu ajutorul șirurilor de vectori.

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{n^2+1}{n^4}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ nu este continuă în $(0,0)$.

CONCLUZIE: $f$ admite toate derivatele parțiale în $(0,0)$, dar $f$ nu este continuă în $(0,0)$.

OBSERVAȚIE Nu există nicio legătură între continuitatea unei funcții $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$ într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ și existența derivatelor parțiale ale funcției $f$ în punctul $x_0$

EXERCIȚIUL 3 Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definită prin ~~f(x) = (...~~ $f(x) = (\sqrt{1-x}, \arcsin x)$ $\forall x \in [-1,1]$.

REZOLVARE $f: [-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sqrt{1-x}, \arcsin x)$

$f$ este diferențiabilă în $x_0 \in D \cap D' \Leftrightarrow f$ este "derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$"

Afirmația este valabilă în cazul în care $D \subseteq \mathbb{R}$ (funcția $f$ depinde de o singură variabilă reală)

Vom studia derivabilitatea funcției $f$.

$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

$f_1, f_2 : [-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = \sqrt{1-x} \quad \forall x \in [-1,1]$

$f_2(x) = \arcsin x \quad \forall x \in [-1,1]$

$f_1$ este derivabilă pe $[-1,1)$
$f_2$ este derivabilă pe $(-1,1)$ $\Rightarrow f$ este derivabilă

pe $(-1,1) \cap [-1,1) \Rightarrow f$ este derivabilă pe $(-1,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este diferențiabilă pe $(-1,1)$

Fie $x_0 \in (-1,1)$

$df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$df(x_0)(x) = x \cdot f'(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$df(x_0)(x) = x \cdot \left( \frac{-1}{2\sqrt{1-x_0}}, \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$df(x_0) = dx \cdot \left( \frac{-1}{2\sqrt{1-x_0}}, \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \right)$ (descrierea prescurtată a diferențialei funcției $f$ în punctul $x_0 \in (-1,1)$)

<u>EXERCIȚIUL 4</u> Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : [-2,2] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$f(x) = \left( \arcsin \frac{x}{2}, \frac{|1-x^2|}{x} \right) \quad \forall x \in [-2,2] \setminus \{0\}.$$

Calculați $df\left(\frac{1}{2}\right)$ și $df\left(-\frac{3}{2}\right)$.

EXERCIȚIUL 5 Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Rezolvare • Se studiază continuitatea funcției

f funcție continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x,y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

$$= 0$$

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+0^2}} = 0$$

Demonstrăm că $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = l = 0$ cu ajutorul criteriului cleștelui pentru limite de funcții.

$$0 \le |f(x,y) - l| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}} =$$

$$= \frac{|xy|}{|x|} = |y|$$

Avem că $\quad 0 \le |f(x,y) - l| \le |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^*$

$$0 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 \xleftarrow{(x,y)\to(0,0)} |y|$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - l| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l = 0$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f$ este continuă în $(0,0)$.

$f$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$

- Se studiază existența derivatelor parțiale ale funcției $f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(xy)'_x\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot(\sqrt{x^2+y^2})'_x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{(xy)'_y\sqrt{x^2+y^2} - xy(\sqrt{x^2+y^2})'_y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y}{x^2+y^2} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x(x^2+y^2) - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{aligned}\right\} (1)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (2)

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mulțime deschisă (3)

Din (1), (2), (3) deducem că $f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Rămâne să studiem diferențiabilitatea în $(0,0)$. Inițial, se studiază existența derivatelor parțiale în $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot(1,0)) - f((0,0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((t,0)) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t e_2) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f((0,0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,t)) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{0^2+t^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$f$ admite toate derivatele parțiale în $(0,0)$. Mulțimea $\{(0,0)\}$ este închisă, dar nu este mulțime deschisă. Funcția $f$ este continuă în $(0,0)$. În această situație, diferențiabilitatea se studiază în (0,0) folosind definiția.

Fie $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T((x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y =$
$= 0\cdot x + 0\cdot y = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|_2} =$$

$$= \lim_{x,y\to 0} \frac{\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - T((x,y))\right|}{\|(x,y)\|_2} = \lim_{x,y\to 0} \frac{\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{x,y\to 0} \frac{|xy|}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \lim_{x,y\to 0} \frac{|xy|}{x^2+y^2}$$

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\cdot 0\right|}{\frac{1}{n^2}+0^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\cdot 0\right|}{\frac{1}{n^2}+0^2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|_2}$$

$\Rightarrow f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$

<u>EXERCIȚIUL 6</u> Să se calculeze $df(x_0, y_0)$ în cazul $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ pentru funcția de la exercițiul 5.

<u>REZOLVARE</u> $(x_0, y_0) \neq (0,0) \overset{ex.5}{\Rightarrow}$ f este diferențiabilă în $(x_0, y_0)$

$df(x_0, y_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$df(x_0, y_0)(x,y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =$

$$= x \cdot \frac{y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}} + y \cdot \frac{x_0^3}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$df(x_0, y_0) = \frac{y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\,dx + \frac{x_0^3}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\,dy.$$

EXERCIȚIUL 7 Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln(x^2+y^2); & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

EXERCIȚIUL 8 Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Rezolvare $f$ este funcție continuă pe $\mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3-3xyz)'_x = 3x^2 - 3yz \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3-3xyz)'_y = 3y^2 - 3xz \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3-3xyz)'_z = 3z^2 - 3xy \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă

Din toate afirmațiile precedente rezultă că $f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$.

$df(x_0, y_0, z_0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$df(x_0,y_0,z_0)(x,y,z) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = x(3x_0^2 - 3y_0 z_0) + y(3y_0^2 - 3x_0 z_0) +$$

$+z(3z_0^2-3x_0y_0)\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$df(x_0,y_0,z_0)=(3x_0^2-3y_0z_0)dx+(3y_0^2-3x_0z_0)dy+$
$+(3z_0^2-3x_0y_0)dz$

EXERCIȚIUL 9 Să se determine punctele critice ale funcției $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x,y,z)=$
$=x^3+y^3+z^3-3xyz\ \ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

REZOLVARE Știm din Exercițiul 8 că funcția $f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$.
Pentru a identifica punctele critice trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\end{cases}$$ pe mulțimea $\mathbb{R}^3$ (mulțimea unde funcția este diferențiabilă)

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0\\ 3y^2-3xz=0\\ 3z^2-3xy=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-yz=0\ |\cdot 2\\ y^2-xz=0\ |\cdot 2\\ z^2-xy=0\ |\cdot 2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x^2-2yz=0\\ 2y^2-2xz=0\\ 2z^2-2xy=0\end{cases}\ \oplus$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2xy-2xz=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\Rightarrow x=y=z\in\mathbb{R}$$

Mulțimea punctelor critice este $\{(x,x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

EXERCIȚIUL 10 Să se determine punctele critice ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Rezolvare Se studiază diferențiabilitatea funcției f apoi se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$$ pe mulțimea unde funcția este diferențiabilă.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1)'_x = 4x^3 - 4x + 4y$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1)'_y = 4y^3 + 4x - 4y$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

Din toate afirmațiile precedente deducem că f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$$(\mathbb{R}^2)\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \oplus$$

$$4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow$$

$x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x^3 = -y^3 \Rightarrow x = -y$

$4x^3 - 4x + 4y = 0 \Rightarrow -4y^3 + 4y + 4y = 0 \Rightarrow 8y - 4y^3 = 0$

$\Rightarrow 4y(2 - y^2) = 0$

$4y(2-y^2)=0 \Rightarrow y_1=0, y_2=\sqrt{2}, y_3=-\sqrt{2}$

$y_1=0 \Rightarrow x_1=0$

$y_2=\sqrt{2} \Rightarrow x_2=-\sqrt{2}$

$y_3=-\sqrt{2} \Rightarrow x_3=\sqrt{2}$

$(0,0), (-\sqrt{2},\sqrt{2}), (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow C=\{(0,0), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$ este mulțimea punctelor critice.

<u>EXERCIȚIUL 11</u> Să se determine punctele critice ale următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z)=x^2+2xy+y^2+z^2-1$

b) $f:(0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2xy$

c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y)=x^4+4x^2y^2+y^2$.