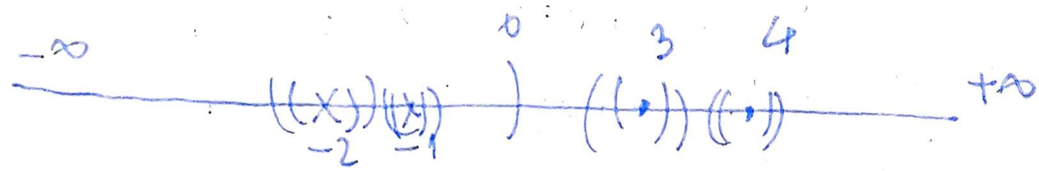
SEMINAR 5

Topologia unui spațiu metric
Funcții continue

EXERCIȚIUL 1 Se consideră mulțimea $A = \left((-\infty, 0) \setminus \{-1, -2\}\right) \cup \{3, 4\}$. Să se determine $\mathring{A}$, $\bar{A}$, $\mathrm{Fr}\,A$, A' și $\mathrm{Izo}\,A$.

Rezolvare $\mathring{A} = ?$



$$\left.\begin{array}{l} (-\infty,-2) \subseteq A \\ (-\infty,-2) \in \tau_{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow (-\infty,-2) \subseteq \mathring{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} (-1,0) \subseteq A \\ (-1,0) \in \tau_{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,0) \subseteq \mathring{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} (-2,-1) \in \tau_{\mathbb{R}} \\ (-2,-1) \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow (-2,-1) \subseteq \mathring{A}$$

$$\Rightarrow (-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \subseteq \mathring{A}$$

$\mathring{A} \subseteq A \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \left((-\infty,0) \setminus \{-2,-1\}\right) \cup \{3,4\}$

Avem că

$(-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \subseteq \mathring{A} \subseteq \left((-\infty,0) \setminus \{-2,-1\}\right) \cup \{3,4\}$.

Se observă că $B(-2,r) \not\subseteq A \ \forall r>0 \Rightarrow 2 \notin \mathring{A}$

Se observă că $B(-1,r) \not\subseteq A \ \forall r>0 \Rightarrow -1 \notin \mathring{A}$

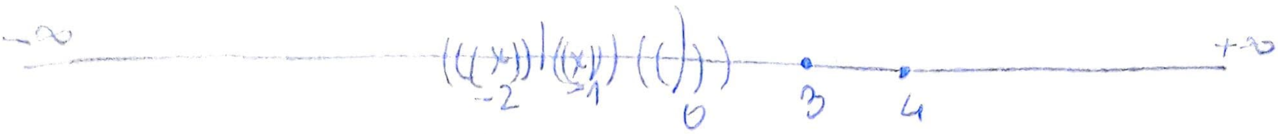
Se observă că $B(3,r) \not\subseteq A \ \forall r>0 \Rightarrow 3 \notin \mathring{A}$

Se observă că $B(4,r) \not\subseteq A \ \forall r>0 \Rightarrow 4 \notin \mathring{A}$

Așadar, $\mathring{A} = (-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0)$

$A \neq \mathring{A} \Rightarrow A \notin \tau_{\mathbb{R}}$

$\bar{A} = ?$



$F = (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$ mulțime închisă
$A \subseteq F$ $\Rightarrow \bar{A} \subseteq F \Rightarrow \bar{A} \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \left((-\infty, 0) \setminus \{-2,-1\}\right) \cup \{3,4\} \subseteq \bar{A}$

$\left((-\infty, 0) \setminus \{-2,-1\}\right) \cup \{3,4\} \subseteq \bar{A} \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$

Se observă că $B(-2,r) \cap A \neq \emptyset \ \forall r>0 \Rightarrow -2 \in \bar{A}$

Se observă că $B(-1,r) \cap A \neq \emptyset \ \forall r>0 \Rightarrow -1 \in \bar{A}$

Se observă că $B(0,r) \cap A \neq \emptyset \ \forall r>0 \Rightarrow 0 \in \bar{A}$

Concluzie: $\bar{A} = (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$

$A = \bar{A} \Rightarrow$ A nu este mulțime închisă

$Fr A = ?$

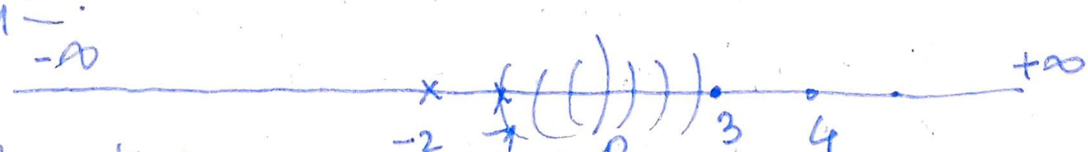
$Fr A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = (-\infty, 0] \cup \{3,4\} \setminus \left((-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0)\right) =$
$= \{-2,-1,0,3,4\}$

$A' = ?$

$A' \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$.

Căutăm punctele de acumulare ale mulțimii A printre punctele de aderență ale mulțimii A.

$0 \in A'$?



Se observă că $B(0,r) \cap (A \setminus \{0\}) \neq \emptyset \ \forall r>0 \Rightarrow 0 \in A'$

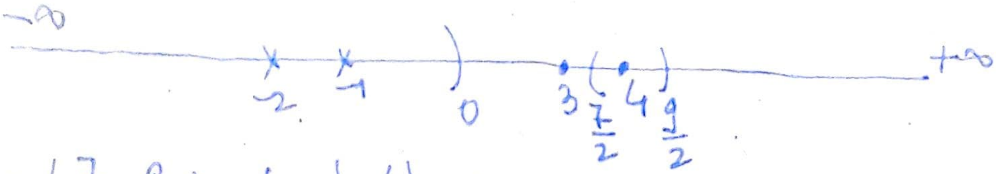
$3 \in A'$?

— „ —

$B(3,\frac{1}{2})=(\frac{5}{2},\frac{7}{2})\cap(A\setminus\{3\})=\emptyset \Rightarrow 3\notin A'$

$4\in A'$?

— „ —

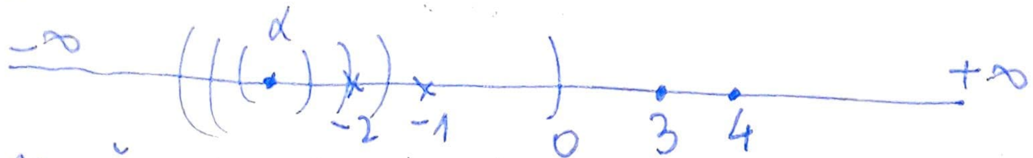


$B(4,\frac{1}{2})=(\frac{7}{2},\frac{9}{2})\cap(A\setminus\{4\})=\emptyset \Rightarrow 4\notin A'$.

Fie $\alpha\in(-\infty,0)$.

$\alpha\in A'$?

— „ —



Se observă că $B(\alpha,r)\cap A\setminus\{\alpha\}\neq\emptyset\ \forall r>0 \Rightarrow \alpha\in A'$

Concluzie: $A'=(-\infty,0]$.

$\text{Izo}\,A=$?

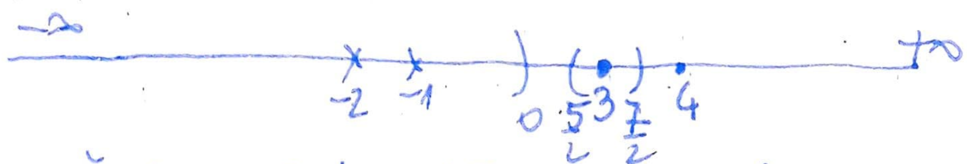
— „ —

$\text{Izo}\,A\subseteq A\setminus A' \Rightarrow \text{Izo}\,A\subseteq((-\infty,0)\setminus\{-2,-1\})\cup\{3,4\}\setminus(-\infty,0]\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Izo}\,A\subseteq\{3,4\}$

$3\in\text{Izo}\,A$?

— „ —



Se observă că $B(3,\frac{1}{2})=(\frac{5}{2},\frac{7}{2})\cap A=\{3\}\Rightarrow 3\in\text{Izo}\,A$.

$4\in\text{Izo}\,A$?

— „ —

$B(4,\frac{1}{2})\cap A=(\frac{7}{2},\frac{9}{2})\cap A=\{4\}\Rightarrow 4\in\text{Izo}\,A$

Concluzie: $\text{Izo}\, A = \{3, 4\}$

EXERCIȚIUL 2 Să se determine $\mathring{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}'$, $\text{Fr}\,\mathbb{Q}$ și $\text{Izo}\,\mathbb{Q}$.

Rezolvare Demonstrăm prin reducere la absurd că $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

Presupun că $\mathring{\mathbb{Q}} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, a \in \mathring{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathbb{Q} \in \underset{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}}{V}(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(a, r) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $(a-r, a+r) \subseteq \mathbb{Q}$.

Între $a-r$ și $a+r$ există cel puțin un număr irațional α.

$\left.\begin{array}{l} \alpha \in (a-r, a+r) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow$ contradicție

$\Rightarrow \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

Știm din curs că $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

$\text{Fr}\,\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

$\text{Izo}\,\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}' \Rightarrow \text{Izo}\,\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \text{Izo}\,\mathbb{Q} \subseteq \emptyset \Rightarrow \text{Izo}\,\mathbb{Q} = \emptyset$.

EXERCIȚIUL 3 a) Să se determine $\mathring{\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}}$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})'$, $\text{Fr}\,\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $\text{Izo}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

b) Se consideră mulțimea $A = (-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Să se determine $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\text{Fr}\,A$, A' și $\text{Izo}\,A$.

EXERCIȚIUL 4 Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2-2\alpha x+\alpha^2}, & x\in[1,2]\\ \alpha x+3, & x>2\end{cases}$$

Să se determine parametrul real α, știind că f este continuă pe $[1,+\infty)$.

Rezolvare Este evident faptul că f este funcție continuă pe $[1,\infty)\setminus\{2\}$.

Cum f este continuă pe $[1,+\infty)$, rezultă că f este continuă în $x_0=2 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=$
$=f(2)$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \alpha x+3=2\alpha+3$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \sqrt{\alpha^2-2\alpha x+x^2}=\sqrt{\alpha^2-4\alpha+4}=\sqrt{(\alpha-2)^2}=|\alpha-2|$$

$f(2)=2\alpha-3$.

Obținem că $|\alpha-2|=2\alpha-3 \Rightarrow \alpha-2=2\alpha-3$ sau $-(\alpha-2)=$
$=2\alpha-3 \Rightarrow \alpha=1$ sau $\alpha=\frac{5}{3}$

EXERCIȚIUL 5 (Funcția lui DIRICHLET)

Fie $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții continue și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}g(x), & x\in\mathbb{Q}\\ h(x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Să se demonstreze că f este continuă în x_0 dacă și numai dacă $h(x_0)=g(x_0)$

REZOLVARE "$\Rightarrow$" f continuă în x_0.

$x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi din $\mathbb{Q}$ şi $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi din $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$.

$\left.\begin{array}{l} \cancel{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0} \\ h \text{ ~~continuă în x_0~~} \end{array}\right\| \Rightarrow \cancel{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)}$

$\left.\begin{array}{l} x_n \to x_0 \\ f \text{ continuă în } x_0 \end{array}\right\| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = f(x_0)$

$\left.\begin{array}{l} x_n \to x_0 \\ g \text{ continuă în } x_0 \end{array}\right\| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$

Avem că $f(x_0) = g(x_0)$ (1)

$\left.\begin{array}{l} y_n \to x_0 \\ f \text{ continuă în } x_0 \end{array}\right\| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = f(x_0)$

$\left.\begin{array}{l} y_n \to x_0 \\ h \text{ continuă în } x_0 \end{array}\right\| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = h(x_0)$

Avem că $f(x_0) = h(x_0)$ (2)

Din (1) şi (2), obţinem că $h(x_0) = g(x_0)$

"$\Leftarrow$" $h(x_0) = g(x_0) \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$.

$f(x) - f(x_0) = \begin{cases} g(x) - g(x_0), & x \in \mathbb{Q} \\ h(x) - h(x_0), & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \begin{cases} |g(x) - g(x_0)|, & x \in \mathbb{Q} \\ |h(x) - h(x_0)|, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Din descrierea $|f(x)-f(x_0)|$ obținem inegalitatea

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |g(x)-g(x_0)| + |h(x)-h(x_0)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

h, g continue în $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)-g(x_0)| =$
$= \lim\limits_{x \to x_0} |h(x)-h(x_0)| = 0$.

Folosind criteriul cleștelui pentru limite de funcții, obținem că $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)-f(x_0)| = 0$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ este continuă în x_0.

EXERCIȚIUL 6 Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Rezolvare a) Pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f se scrie ca o "combinație" de funcții elementare $\Rightarrow$ f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Studiem continuitatea în $(0,0)$ calculând

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Avem cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$.

În cazul limitelor funcțiilor de mai multe variabile reale nu se folosesc limitele laterale și regula lui L'Hospital, ca în cazul funcțiilor care depind de o singură variabilă reală. Metodele acceptate sunt criteriul cleștelui pentru limite de funcții, criteriul majorării pentru limite de funcții, limitele remarcabile de funcții adaptate la calculul limitelor cu mai multe variabile și metoda de justificare a nonexistenței limitei unei ~~limite de~~ funcții.

Testăm cu ajutorul a cel puțin două șiruri de vectori $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ existența limitei funcției.

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ nu este continuă în $(0,0)$

b) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pentru că este o „combinație" de funcții elementare.

$$(x_n, y_n) \Rightarrow \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 0$$

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0$$

Egalitatea de mai sus nu demonstrează riguros că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Ne sugerează acest lucru și afirmația se demonstrează folosind criteriul cleștelui pentru limite de funcții.

Evaluăm $|f(x,y) - f(0,0)|$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2+y^2} = \frac{(|x|+|y|)(x^2 - |xy| + y^2)}{x^2+y^2}$$

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{(|x|+|y|)(x^2-|xy|+y^2)}{x^2+y^2} \leq \frac{(|x|+|y|)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| + |y| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \; 0 \; \xleftarrow{(x,y)\to(0,0)}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0 \Rightarrow \exists \lim_{(x,y)} f(x,y) = f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f funcție continuă în $(0,0)$

c) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ca o combinație de funcții de funcții elementare.

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = 0$$

$$(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+0}} = 0.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 0$ (neconcludent din punct de vedere al rigurozității afirmației $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$)

Evaluăm $|f(x,y) - f(0,0)|$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}}$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|xy|}{|x|} = |y| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| \leq |y| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0, \quad |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow$ f este funcție continuă în $(0,0)$

Exercițiul 7 Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^4}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right); & y \neq 0, x \in \mathbb{R} \\ 0; & y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exercițiul 8 Să se demonstreze că nu există funcții continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(f(x)) = -x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 9 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că f este funcție constantă per.

Exercițiul 10 Fie $f: [a,b] \to [a,b]$ o funcție continuă. Să se arate că $\exists x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

Exercițiul 11 Fie $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă care verifică proprietatea $f(x) = f(x^2)$ $\forall x \in [0,+\infty)$. Să se demonstreze că f este funcție constantă.