Str. alg. în info

17.10.2023

Seminar 3

(1) Considerăm pe $\mathbb{R}$ relația de mai jos. Arătați că e o rel. de echiv.

$x \sim y \overset{def.}{\iff} x^2+5x = y^2+5y$

a) Fie $a \in \mathbb{R}$. Evident, $a^2+5a = a^2+5a \Rightarrow a \sim a$. Deci „$\sim$" e reflexiv. (1)

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. a.î. $a \sim b$.

Atunci $a^2+5a = b^2+5b$, de unde $b^2+5b = a^2+5a \Rightarrow b \sim a$

Ca urmare, „$\sim$" e simetrică (2)

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a \sim b$ și $b \sim c$

Atunci $\left.\begin{array}{l} a^2+5a = b^2+5b \\ b^2+5b = c^2+5c \end{array}\right| \Rightarrow a^2+5a = c^2+5c \Rightarrow a \sim c \Rightarrow$

$\Rightarrow$ „$\sim$" e tranzitivă (3)

din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ „$\sim$" e rel. de echivalență

b) Determinați $\frac{7}{\sim}$ (clasa de echivalență a lui 7)

Clasa de echivalență = nr. mulțimilor echiv.

$\boxed{\frac{7}{\sim} = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \sim x\}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 7^2+5\cdot 7 = x^2+5x\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+5x-84=0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \{7; -12\}\} = \{7; -12\}$

c) Pt. „a" fixat, $a \in \mathbb{R}$, det. $\frac{a}{\sim}$

$\frac{a}{\sim} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \sim x\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+5x = a^2+5a\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-a^2+5(x-a) = 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-a)(x+a)+5(x-a) = 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-a)(x+a+5) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x-a=0 \text{ sau } x+a+5=0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x=a \text{ sau } x=-a-5\} = \{a; -a-5\}$

Obs: Dacă $a = -\frac{5}{2} \Rightarrow \left|\frac{a}{\sim}\right| = 1$, altfel $\left|\frac{a}{\sim}\right| = 2$.

În contextul unei rel. de echiv., mulț. factor e mulțimea claselor de echiv.

MULȚIMEA FACTOR = mulț. cls. de echiv.

d) Determinați $\frac{\mathbb{R}}{\sim}$ (mulțimea factor)

$$\frac{\mathbb{R}}{\sim} = \left\{ \frac{a}{\sim} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} \overset{?}{=} C$$

Obs: Cu scrierea de mai sus e o mică problemă de redundanță.

$\{7, -12\}$ apare de 2 ori: $\begin{cases} a = 7 & \{7, -7-5\} \\ a = -12 & \{-12, +12-5\} \end{cases}$

De fapt avem: $\frac{\mathbb{R}}{\sim} = \left\{ \{a; -a-5\} \,\middle|\, a \geq -\frac{5}{2} \right\}$ (iredundantă)

Demonstrăm prin „$\subset$".

Fie $A \in \frac{\mathbb{R}}{\sim}$. Atunci $\exists a \in \mathbb{R}$ a.î. $A = \{a, -a-5\}$.

Dacă $\begin{cases} a \geq -\frac{5}{2}, & A \in C \\ a < -\frac{5}{2}, & \text{atunci } -a-5 > \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2} \end{cases}$

Ca urmare, $A = \{-a-5, a\} = \{-a-5, -(-a-5)-5\} \Rightarrow A \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\sim} \subset C$ și Incluziunea $C \subset \frac{\mathbb{R}}{\sim}$ e evid. din def $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\sim} = C$

Dacă $a, b \geq -\frac{5}{2}$ și $\{a, -5-a\} = \{b, -5-b\}$ $\Rightarrow$ fie $\begin{cases} a = b \\ -5-a = -5-b \end{cases} \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow$ fie $\begin{cases} a = -5-b \\ b = -5-a \end{cases} \Rightarrow -5-a = b$ dar $b \geq -\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \geq -\frac{5}{2} \Rightarrow -a \leq +\frac{5}{2} \Rightarrow -5-a \leq -\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\frac{5}{2} = b$

Deci scrierea din C e iredundantă.

În contextul unei rel. de echiv. pe o mulț. = M, SISTEMUL COMPLET ȘI INDEPENDENT DE REPREZENTANȚI = SUBMULȚIME A LUI „M" FORMATĂ CU CÂTE EXACT UN ELEMENT DIN FIECARE CLS. DE ECHIV.

---

e) Determinați 3 sist. complet. & ind. de repr. (ale mulț. lui $\mathbb{R}$ în rap. cu rel „$\sim$")

Alegând elementul mai (maxim) mare din fiecare el. $\{a, -a-5\}$ al mulțimii C de la subpct. d) în speță a, obț. ca prin s.c.i.R.

$[-\frac{5}{2}, +\infty) = \{ a \mid a \in [-\frac{5}{2}, +\infty) \}$

Un alt SCIR se obține alegând elementul minim, $-5-a$, din care $\{a, -a-5\} \in C$, iar acest SCIR este $(-\infty, -\frac{5}{2}]$

Un alt exemplu SCIR: $(-\infty; 5] \cup [-\frac{5}{2}, 0)$; pt. putea a-l obț., am ales din $\{a, -a-5\} \in C$ el. min pt $a>0$ (deci pe $-a-5$), respectiv pe cel maxim, (pe a) pt $a \in [-\frac{5}{2}, +\infty)$.

(2) Pe $\mathbb{C}$ considerăm rel. $z \rho w \overset{def}{\iff} |z| = |w|$

Det. un SCIR.

Afirm că un SCIR e $[0, +\infty)$. Fie $z \in \mathbb{C}$. Atunci $|z| = ||z||$, deci $z \sim |z| \in [0, +\infty)$. Deci ~~SCIR~~ $[0, +\infty)$ e complet

Fie $z, w \in [0, +\infty)$ a.î. $z \sim w$

Atunci $z = |z| = |w| = w$

Deci deci S.R. e i.

Revenind la rel. $x \sim y \overset{def}{\iff} x^2 + 5x = y^2 + 5y$ (de pe $\mathbb{R}$).

Dacă considerăm: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(u) = u^2 + 5u$

Atunci: $x \sim y$ înseamnă $f(x) = f(y)$


← eu

$f: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}$, $f(\hat{x}) = 5x+1$

$g: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$, $g(\hat{x}) = \bar{x}$ → e corectă

$f(\hat{0}) = 1$, $f(\hat{1}) = 6$, $f(\hat{2}) = 11$, $f(\hat{3}) = 16$, $f(\hat{6}) = 31$

dar $f(\hat{0}) \neq f(\hat{3})$ dar $\hat{0} = \hat{3}$ deci nu sunt definite bine

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi(a) = \hat{a}} \mathbb{Z}_6$, $f(m) = \bar{m}$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, $g: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$

în urmare $\rho \subset \rho_f \Rightarrow \exists\, g: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$, $f = g \circ \pi$