29.05.2024

Seminar 12

Aplicații ortogonale
Transf. ortog.
Clasif. $n=2$, $n=3$
Conice și cuadrice în sp. vect. euclidiene
⇓
examen

Apl. ortog.

Def: Fie 2 sp. vect. euclidiene $(E_1/\mathbb{R}, \langle , \rangle_1)$ și $(E_2/\mathbb{R}, \langle , \rangle_2)$. O apl. $f: E_1 \to E_2$ a.î. $\langle f(x), f(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ (conservă p.s.) s.n. apl. ortog.

C.P.: $E_1 = E_2 = E$, $f: E \to E$

$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ s.n. transf. ortog.

P: $y = x \Rightarrow \underbrace{\langle x, x \rangle_1}_{\|x_1\|_1} = \underbrace{\langle f(x), f(x) \rangle_2}_{\|f(x)\|_2}$

$\|x_1\|_1 = \|f(x)\|_2$ (f conservă normele)

Teoremă: Fie $f: E \to E$ apl. $(E/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$ sp. vect. eucl. și $B \subset E$ b. ortonormată

f transf. ortog. $\Leftrightarrow$ mat sa asoc în rap. cu o bază $B \subset E$ b. orton. să fie ortog.

$G(n) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = {}^t A \cdot A = I_n \}$

$GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$

↳ grupul general liniar

$(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ grup. multiplicativ/necomut.

↳ op. de înmulțire a mat

Avem $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ subgr. (gr. ortog.)

$O(n) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = {}^t A \}$

$A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$ ($\not\Leftarrow$ reciproca e falsă)

Obs: Dacă B, $\det B \neq \pm 1 \Rightarrow B$ nu e ortog.

Dem: $A^t A = I_n \Rightarrow \det(A^t A) = \det(I_n)$

$\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N$

$(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$

$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = +1 \} \subset O(n)$ subgr. special ortog.

I.G.: $O(n) \rightarrow$ transf. izometrice

$SO(n) \rightarrow$ rotații

Obs: B_0 b. orton. canonică $E^n = (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$

① Fie spațiul vect. eucl. $E_3 = (\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$

$B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E_3$ b. canonică

Stabiliți dacă urm. apl. lin. sunt transf. ortog.

a) $T: E_3 \rightarrow E_3$

$T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = \frac{1}{2} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_3$, $T(e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3$

Avem B_0 b ortog. $\Rightarrow$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$ mat asoc. lui T în rap. cu b. can. B_0 ortog.

Stab. dacă T mat. ortog.

$T^t T = \dots\dots = I_m$ este ortog.

b) și c) TEMĂ | (Hint la b nu e ortog.)

Clasif. transf. ortog

- Pt $n = 2$ (dimensiune 2)

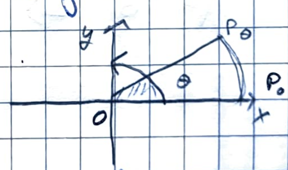
Teorema Fie $f: E_2 \to E_2$ transf. ortog. a unui plan vect. euclidian. Atunci:

$\exists B \subset E_2$ (reper ortog) a.î. mat. asoc transf. ortog. f să aibă una din formele:

a) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\theta \in [0, \pi)$ $\det A = 1$ rotație pr. com.

b) sau $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $\theta \in [0, \pi)$ $\det A = -1$

Pt a) $\Rightarrow$ rotația e în jurul orig O, $\measuredangle\theta$ în sensul direcției trig.



$A_{\theta_1} \cdot A_{\theta_2} = A_{\theta_1 + \theta_2}$

Pt b) $\Rightarrow$ simetrie ortog, $A^2 = I_2$ (mat. involutivă)

P: Într-un plan eucl. vect. orice transf. ortg. se poate descompune într-un produs (compunere) de cel mult 2 simetrii ortog.

- Pt $n=3$

Teoremă: Într-un sp vect. eucl., 3-dimensional cu $f: E_3 \to E_3$ transf. ortg. arbitrare

Atunci $\exists$ $B \subset E_3$ a.î. mat asoc transf. ortog. f să aibă una din formele:

a) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\theta \in [0, \pi)$

det $A = 1$

b) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

det $A = 1$ rotațiile $SO(3)$

b) $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

det $A = -1$

Pt a) $\Rightarrow$ rotație în planul $\langle e_2, e_3 \rangle$, $\measuredangle\theta$ în direcția trig., în jurul axei $\langle e_1 \rangle$

Pt b) $\rightarrow$ o comp. dintre o rotație în pl. $\langle e_2, e_3 \rangle$, în jurul axei $\langle e_1 \rangle$ (+) și o simetrie în rap. cu axa pl. $\langle e_2, e_3 \rangle$ și de-a lungul axei $\langle e_1 \rangle$

[m] **Teoremă (Cardan):**

Orice transf. ortog. într-un sp. eucl. vect. n-dimensional, dif. de apl. identică / identitate, se poate descompune într-un produs (compunere) de cel mult n simetrii ortog. în rap. cu hiperplane (subsp. vect de dim $n-1$ într-un ambiental n dim)

Conice și Cuadrice în sp. vect. eucl.

Fie $E_3 = (\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, <,>)$, E_2

$n=2$ E_2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{2} b_i x_i + c$$

$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mat. sim. $({}^t a = a)$

Γ $f(x_1, x_2) = 0$ sau $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}$

Γ s.m. conică în pl. vect. eucl. E_2

$\delta = \det a$

$\Delta = \det A$ $\Rightarrow$ invarianți relativi

$\frac{\Delta}{\delta}$ = invariant absolut

$r = rg\ a$

$r' = rg\ A \in \{r, r+1, r+2\}$ (th.) $\Rightarrow$ invarianți absoluți

Inv.: coef. pol. caract. (modulo un semn)

$P(\lambda) = \lambda^2 - I\,a\,\lambda + \delta$ (?)

$I = Tr\,a$ $I = a_{11} + a_{22}$

Conicele repr. curbe de ord II

Clasif. izometrică $\rightarrow$ modulo grupul izometriilor resp.

c.p. dr $\rightarrow$ curbă de ord I

②