SAi

28.11.2023

# Seminar 9

Permutare a unei mulțimi A pt. a desemna o funcție bijectivă $f: A \to A$

Notând $S(A) = \{f: A \to A \mid f \text{ bij}\}$, $(S(A), \circ)$ grup. El s.n. grupul permutărilor lui A.

În cazul particular $A_n = \{1,2,3,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $S(A_n)$ se notează $S_n$.

Elementele lui $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$

În $S_3$, bijecția $\begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \end{matrix}$ se reprezintă sub forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Când compunem permutările, le aplicăm de la stg la dr!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Citim de jos în sus pentru a inversa permutarea.

Considerăm permutarea:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 2 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \to 5 \to 9 \to 13 \to 1$

$2 \to 6 \to 10 \to 2$

$3 \to 7 \to 11 \to 3$

$8 \to 12 \to 8$

$4 \to 4$

Constatăm că $\sigma$ e „alcătuită din" ciclurii. Pt aceste cicluri avem urm. convenție de reprezentare:

$(1,5,9,13)$ ; $(2,6,10)$ ; $(3,7,11)$ ; $(8,12)$ ; $(4)$

$$(1,5,9,13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 & 13 & 10 & 11 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

O permutare $\sigma \in S_m$ se numește o permutare ciclică (sau ciclu) dacă $\exists \{i_1, i_2, i_3, \dots i_k\} \subset \{1,2,3,\dots m\}$ a.î. $\sigma(i_1) = i_2$ ; $\sigma(i_2) = i_3$ .... $\sigma(i_{k-1}) = i_k$ ; $\sigma(i_k) = i_1$ ; $\sigma(j) = j$, unde $i_j \neq i_k$. Atunci $\sigma$ se va nota: $(i_1, i_2, \dots i_k)$

Obs: În $S_7$, $(1,7,3)(2,4,6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

T Orice permutare $\sigma \in S_m$ se scrie în mod unic (dacă facem abstracție de ordinea factorilor) sub formă de produs de cicluri disjuncte.

Exemplu: Considerăm $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 12 & 9 & 10 & 3 & 2 & 11 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 13 \end{pmatrix}$

a) Descompuneți în produs de cicli disjuncte.

$\sigma = (1,5,3,9,7,11)(2,12,4,10,6)$

T Orice permutare $\sigma \in S_m$ se scrie ca produs de transpoziții

b) Descompuneți în produs de transpoziții

În $S_5$: $(2,5)(5,3) = (2,5,3)$

$(a,b)(b,c) = (a,b,c)$

În $S_m$: $(a,b)(b,c)(c,d)(d,e) = (a,b,c,d,e)$

Obs: În $S_m \Rightarrow (i_1, i_2, \dots i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{k-1}, i_k)$

$\sigma = (1,5)(5,3)(3,9)(9,7)(7,11)(2,12)(12,4)(4,10)(10,6)$

c) Determinați signatura.

Deși în regulă să facem cu $(-1)^{\text{nr. inv.}}$ :

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1,5))\cdot\varepsilon((5,3))\cdot \ldots \cdot \varepsilon((10,6)) = (-1)^9 = -1$$

**Proprietate**: Orice transpoziție e permutare impară!

d) Determinați ordinul

**Proprietate**: Dacă $c_1, c_2, c_3, \ldots c_m \in S_n$ sunt cicluri disjuncte, atunci:
$\operatorname{ord}(c_1 c_2 \ldots c_n) = [\operatorname{ord} c_1, \operatorname{ord} c_2, \ldots \operatorname{ord} c_n]$ c.m.m.m.c.

În $S_7$: $c = (3,2,5,1,6)$ $\quad c^2 = (3,5,6,2,1)$

$c^3 = (3,1,2,6,5)$ $\quad c^4 = (3,6,1,5,2)$ $\quad c^5 = e$

**Obs**: Ca să ridic un ciclu la puterea $p$, îl parcurg din $p$ în $p$!!!

**Corolar**: Ordinul oricărui ciclu coincide cu lungimea sa.

Atunci $\operatorname{ord}(\sigma) = [6,5] = 30$

e) Calculați $\sigma^{2023}$.

$$\sigma^{2023} = \sigma^{30\cdot 67+13} = (\sigma^{30})^{67}\cdot\sigma^{13} = e^{67}\cdot\sigma^{13} = \sigma^{13} =$$
$$= (1,5,3,9,7,11)^{13}(2,12,4,10,6)^{13} =$$
$$= \left[(1,5,3,9,7,11)^6\right]^2\cdot(1,5,3,9,7,11)\left[(2,12,4,10,6)^5\right]^2\cdot$$
$$\cdot(2,12,4,10,6)^3 = (1,5,3,9,7,11)(2,10,12,6,4)$$

f) Rezolvați în $S_{13}$ ecuația: $x^2 = \sigma$

Presupunem că are sol., fie $x$ una din ele. Atunci:

$$1 = \varepsilon(x)^2 = \varepsilon(x^2) = \varepsilon(\sigma) = -1$$

Rămâne deci, că ec. nu are soluții în $S_{13}$