CURS 5

SUBGRUPURI

- H subgrup al lui G => op. alg. din G induce pe H o op. alg. față de care H e grup (not: $H \leq G$)

H = submulț. nevidă a lui G.

- G = grup și $H \subseteq G$:
  - H subgrup a lui G
  - $\forall x, y \in H$, xy (în G) $\in H$
  - e = elem. neutru G => $e \in H$
  - $\forall x \in H$, $x^{-1} (\in G) \in H$
- G = grup abelian => H = subgrup abelian
- H = subgrup al grupului aditiv $\mathbb{Z}$ => $\exists\, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$ a.î. $H = m\mathbb{Z}$
- Subgrupul generat de X în G:

G = grup, $X \subset G$ => $\cap$ tuturor subgr. care conțin X.

Not: $\langle X \rangle = \cap K$, $X \subseteq K$, $K \leq G$ subgr.

- Sistem de generatori:

X s.g. pt H => $\langle X \rangle = H$.

- $\langle X \rangle$ cel mai mic subgr al lui G care îl are pe X
- Subgr. generat de X = subgr trivial $\{e\}$ => $X = \emptyset$
- H = subgr. al lui G admite sist. finit de generatori =>

=> H e subgr. finit generat

- $H = \langle a \rangle$, $a \in H$ => subgr. ciclic, H subgr. s.g. cu 1 elem.

(T) $X \neq \emptyset$ submulțime a lui G => $\langle X \rangle$ e format din mulț. elementelor lui G:

$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}$ unde $k \geq 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $x_i \in X$, $1 \leq i \leq k$

- G = grup comutativ:
  - → $\langle X \rangle = \{x \in G \mid x = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k};\ k \geq 0,\ m_i \in \mathbb{Z},\ x_i \in X,\ i = \overline{1,k}\}$
  - → $\langle X \rangle = \{x \in G \mid x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k;\ k \geq 0,$ — " — $\}$
  - → $H = \langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$
  - → $H = \langle a \rangle = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$, a = generator al subgr. ciclic H

NUCLEUL ȘI IMAGINEA UNUI MORFISM DE GRUPURI

- G, G' grupuri, $f: G \to G'$ morfism de grupuri
  $H \leq G$ și $H' \leq G'$ subgrupuri
- imaginea directă a lui H prin f: $f(H) = \{x' \in G' \mid \exists\, x \in H$ a.î. $x' = f(x)\}$
- imaginea reciprocă a lui H' prin f: $f^{-1}(H') = \{x \in G \mid f(x) \in H'\}$
- nucleul morfismului: $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{e'\})$
  imaginea morfismului: $\operatorname{Im} f = f(G)$
- $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$
- $\operatorname{Im} f = \{x' \in G \mid \exists\, x \in G$ a.î. $x' = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in G\}$
- $f(H)$ e subgrup al lui G, H subgrup al lui G
- $f^{-1}(H')$ subgrup al lui G, $\operatorname{Ker} f$ subgrup al lui G
  $f: G \to G'$ morfism inj <=> $\operatorname{Ker} f = \{e\}$

(T) $f: G \to G'$ morf. surj => $\exists$ coresp. bij între mulț. subgr. G care conțin $\operatorname{Ker} f$ și mulț. tuturor subgr. lui G' prin $H \to f(H)$