CURS 5

FORMĂ NORMALĂ CONJUNCTIVĂ / DISJUNCTIVĂ

- <u>Literal</u> = variabilă (literal pozitiv) sau negația unei variabile (literal negativ)
- <u>FND</u> = formă normală disjunctivă e o formulă φ care e o disjuncție de conjuncții literale
- $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{ij} \right)$, unde L_{ij} = literal (FND)
- <u>FNC</u> = formă normală conjunctivă e o formulă φ care e o conjuncție de disjuncții de literali
- $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{ij} \right)$, unde L_{ij} = literal (FNC)
- $F_\varphi : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$

  $F_\varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e^{+}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(\varphi)$ pt. orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$
- φ formulă $\Rightarrow$ $\models \varphi \Leftrightarrow F_\varphi$ e funcția constantă 1

  $\Rightarrow \varphi$ nesatisfiabilă $\Leftrightarrow F_\varphi$ e funcția constantă 0
- φ, ψ formule a.î. $Var(\varphi) = Var(\psi) \Rightarrow \varphi \models \psi \Leftrightarrow F_\varphi \leq F_\psi$

  $\Rightarrow \varphi \sim \psi \Leftrightarrow F_\varphi = F_\psi$
- $\exists \varphi, \psi$ formule diferite, $\exists$ a.î. $F_\varphi = F_\psi$
- <u>Funcția booleană</u>: $F : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$, $n \geq 1$ = nr. var. lui F
- φ formulă, F_φ funcție booleană cu n var. $\Rightarrow n = |Var(\varphi)|$

(T) $H: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ funcție booleană

$\exists\ \varphi$ formulă în FND a.î. $H = F_\varphi$ (sau FNC analog)

$\forall\ \varphi$ formulă e echiv. cu φ^{FND} în FND și cu φ^{FNC} în FNC

CLAUZE ȘI REZOLUȚIE

- Clauză = mulțime finită de literali

  $C = \{L_1, L_2, \ldots L_n\}$, L = literali

- dacă $n = 0 \Rightarrow C := \emptyset$ clauză vidă
- C clauză și $e: V \to \{0,1\} \Rightarrow e \vDash C$ dacă $\exists\ L \in C$ a.î. $e \vDash L$
- C clauză $\Rightarrow$ satisfiabilă dacă are un model

  $\Rightarrow$ validă dacă $\forall$ eval. $e: V \to \{0,1\}$ e model a lui C

- $Var(C) := \{x \in V \mid x \in C$ sau $\neg x \in C\}$; $x \in C \Leftrightarrow x$ apare în C
- $S = \{C_1, C_2, \ldots C_m\}$ mulțime finită de clauze, FNC

  $m = 0 \Rightarrow S = \emptyset$

- $e: V \to \{0,1\}$, $e \vDash S$ dacă $e \vDash C_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots m\}$
- S
  - satisfiabilă dacă are un model
  - validă dacă orice $e: V \to \{0,1\}$ e model al lui S (și $\emptyset$)
  - nesatisfiabilă dacă conține clauza vidă $\square$
- $Var(S) = \bigcup_{C \in S} Var(C)$
- $Var(S) = \emptyset \Leftrightarrow S = \emptyset$ sau $S = \{\square\}$
- $e: V \to \{0,1\}$; $e \vDash \varphi \Leftrightarrow e \vDash S_\varphi$

- $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{ij} \right)$; L_{ij} literal

C_i clauza def. considerând toți $L_{ij} \in \{1, \dots k_i\}$

S_φ - mulțimea tuturor clauzelor C_i distincte

$\Rightarrow$ S_φ = forma clauzală a lui φ

- $C = \{L_1, L_2, \dots L_m\}$, $m \geq 1 \longmapsto \varphi_C = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m$

$\square \longmapsto \varphi_\square = V_0 \wedge \neg V_0$

- $S = \{C_1, C_2, \dots C_m\} \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_S = \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_C$
- $e: V \to \{0,1\}$, $e \vDash S \Leftrightarrow e \vDash \varphi_S$
- R = rezolvent ; C_1, C_2 = clauze dacă $\exists L$ a.î. $L \in C_1$, $L^c \in C_2$

și $R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$

- Regula rezoluției: $Rez = \dfrac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}$
- $Res(C_1, C_2)$ = mulțimea rezolvenților clauzelor C_1 și C_2
- O S-derivare prin rezoluție = secvență de clauze $C_1, C_2, \dots C_m$

a.î. pt fiecare $i \in \{1, 2, \dots m\}$ una din cele 2 cond e satisf.

  - C_i din S
  - $\exists\ j, k < i$ a.î. C_i rezolvent al C_j și C_k

- $Res(S) = \bigcup_{C_1, C_2 \in S} Res(C_1, C_2)$
- $e: V \to \{0,1\}$; $e \vDash S \Rightarrow e \vDash Res(S)$

T Teorema de corectitudine a rezoluției

Dacă $\square$ se derivează prin rezoluție din S $\Rightarrow$ S nesatisfiabilă

ALGORITMUL DAVIS-PUTNAM

- Intrare: $i := 1$, $S_1 := S$, S = mulț. finită nevidă
- $P_{i.1}$: $x_i \in S_i$

  $T_i^1 := \{C \in S_i \mid x_i \in C\}$, $T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg x_i \in C\}$
- $P_{i.2}$: if ($T_i^1 \neq \emptyset$ și $T_i^0 \neq \emptyset$) then

  $U_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in T_i^1, C_0 \in T_i^0\}$

  else $U_i = \emptyset$
- $P_{i.3}$: $S'_{i+1} := (S_i \setminus (T_i^0 \cup T_i^1)) \cup U_i$

  $S_{i+1} := S'_{i+1} \setminus \{C \in S'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}$
- $P_{i.4}$: if $S_{i+1} = \emptyset$ then

  S satisfiabilă

  else if $\square \in S_{i+1}$ then

  S nesatisfiabilă

  else

  $\{ i := i+1 ;$ go to $P_{i.1} \}$

- $n = |Var(S)| \Rightarrow$ alg. DP se termină după cel mult n pași
- $\forall i \in \mathbb{N}$, S_{i+1} satisfiabilă $\Leftrightarrow$ S_i satisfiabilă

(T) Algoritmul DP este corect și complet, adică

S nesatisfiabilă $\Leftrightarrow$ $\square \in S_{n+1}$