$\boxed{\text{SAI}}$

31.10.2023

Seminar 5

$f(e\circ e) = f(e)\,\Delta\, f(e) \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} f(e)^{-1\Delta}$ $\quad f(e_0)\,\Delta\, f(e_0)^{-1\Delta} = (f(e_0)\,\Delta\, f(e_0))\,\Delta\, f(e_0)^{-1\Delta}$

$\overset{\shortparallel}{f(e)}$ $\qquad\qquad \cancel{f\Delta}\ \overset{\shortparallel}{e_\Delta} = f(e)\,\Delta\, e_0 = f(e_0)$

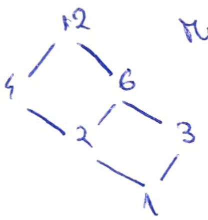
φ

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Δ	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	γ	α
γ	γ	α	β

sunt aceleași lucruri $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ izomorfe

$\varphi(1\oplus 2) = \alpha = \varphi(0) = \beta\,\Delta\,\gamma = \varphi(1)\,\Delta\,\varphi(2)$



Mulț. D_{12} după divizibilitate ordonată

Mulț. D_{12} după ord. naturală

$1 \to 2 - 3 - 4 - 6 - 12$

nu ~~sunt~~ morfisme inversabil

Morfisme inversabile = morfisme ale căror inverse au morf.

① Fie $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$

Atunci $f(a+b) = a+b = f(a) + f(b)$

Ca urmare f e morfism de grupuri

② Fie $f \in \mathrm{End}_{Grp}(\mathbb{Z})$ $\quad \mathbb{Z}$ grup, $+$

Notăm $\alpha = f(1)$

Atunci $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2\alpha$

$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3\alpha$

Inducție (TEMĂ) $f(n) = n\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $m \in \mathbb{Z}$. Atunci $f(0) = 0 = f(m + (-m)) = f(m) + \underset{-\alpha m}{\underset{\shortparallel}{f(-m)}}^{\in \mathbb{N}} =$

$= f(m) - \alpha m \Rightarrow$

$\Rightarrow f(m) = \alpha m$

Concluzie: $\forall m \in \mathbb{Z} \quad f(m) = \alpha m$

Ca urmare: $\boxed{End_{Grp}(\mathbb{Z}) = \{f_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\}}$ unde, pt $\alpha \in \mathbb{Z}$ fixat, $f_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

(3) Pe $M = End_{Grp}(\mathbb{Z})$ considerăm op. „$*$" def. prin

$(f * g)(m) = f(m) \cdot g(m)$

$\forall f, g \in M \ \forall m \in \mathbb{Z}$

Atunci $(M, *)$ este monoid comutativ (vezi argumentele din tema dirijată)

Arătați că $(M, *) \simeq (\mathbb{Z}, \cdot)$ (izomorfe)

Considerăm funcția $\phi : M \to \mathbb{Z}$, $\phi(f) = f_1$

Fie $f, g \in M$. Atunci $\phi(f * g) = (f * g)_1 = f_1 \cdot g_1 = \phi(f) \cdot \phi(g)$, iar notând $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $u(m) = 1 \Rightarrow \phi(u) = u(1) = 1$

Ca urmare, ϕ e morfism de monoizi

Acum vreau să arătăm că ϕ e izomorfism. În acest scop, fie arătăm că e bij (temă!), fie că e inversabilă, iar inversul său e morfism de monoizi. Mai acum ~~arătăm~~ vom folosi a doua abordare

---

Considerăm $\psi : \mathbb{Z} \to M$, $(\psi(k))(m) = km$

Este imd faptul că $\psi(k) \in End_{Grp}(\mathbb{Z}) = M$, deci ψ e corect definită.

Fie $m, k, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi(kl)(m) = klm$

$(\psi(k) * \psi(l))(m) = \psi(k)(m) * \psi(l)(m) =$

Fie ~~fg~~ $f, g \in M$ și $m, n \in \mathbb{Z}$

Atunci $(f \circ g)(m+n) = f(g(m+n))$

$g \in End(\mathbb{Z}) \Rightarrow f(g(m) + g(n)) = f(g(m)) + f(g(n)) = (f \circ g)(m) + (f \circ g)(n)$

Deci $f \circ g \in End(\mathbb{Z})$

Verif asoc $\Rightarrow$ ... e asoc.

Fie $f \in M$. Atunci $f \circ 1_{\mathbb{Z}} = f$, și $1_{\mathbb{Z}} \circ f = f$, $1_{\mathbb{Z}}$ e element neutru pt $\circ$.

Ca urmare, $(M,\circ)$ e monoid comutativ. Considerăm $\phi: M \to \mathbb{Z}$

$\phi(f) = f(1)$

Atunci: Fie $f, g \in M$. Avem: $\phi(f\circ g) = (f\circ g)(1) = f(g(1)) =$

$= f(g(1)\cdot 1) = g(1)\cdot f(1)$

$\phi(f)\cdot\phi(g) = f(1)\cdot g(1)$ $\Bigg| \Rightarrow$ $\phi(f\circ g) = \phi(f)\cdot\phi(g)$

$\phi(1_{\mathbb{Z}}) = 1_{\mathbb{Z}}(1) = 1$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi$ e morfism de monoizi (4)

Considerăm $\psi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\psi(k)(m) = km$

Fie $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\psi(k)(m+n) = k(m+n) = km + kn =$

$= \psi(k)(m) + \psi(k)(n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi(k) \in End_{Grp}(\mathbb{Z}) = M$

Ca urmare, ψ e corect definită

Fie $k, l \in \mathbb{Z}$. Fie $m \in \mathbb{Z}$. $\psi(kl)(m) = kl\cdot m$ (1)

$(\psi(k)\circ\psi(l))(m) = \psi(k)(\psi(l)(m)) =$

$= \psi(k)(lm) = k(lm)$ (2)

din (1) + (2) $\Rightarrow \psi(kl)(m) = (\psi(k)\circ\psi(l))(m)$

Dar m a fost ales arbitrar, iar fct. au același codomeniu și domeniu, deci obținem: $\psi(kl) = \psi(k)\circ\psi(l)$ $\Big| \Rightarrow$

În plus $\psi(1)(m) = 1\cdot m = m$, deci $\psi(1) = 1_{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow \psi$ e morfism de monoizi (5)

$\phi\circ\psi: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$; $\phi\circ\psi(k) = \phi(\psi(k)) = \phi$ (acea fct din $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ce duce fiecare m în km) $=$

$=$ (acea fct. ... km) $(1) = k$

Deci $\phi\circ\psi = 1_{\mathbb{Z}}$

$\psi\circ\phi: M\to M$, $(\psi\circ\phi)(f) = \psi(\phi(f)) = \psi(f_1) = f$ (1)

Pt $m \in \mathbb{Z}$, $[(\psi\circ\phi)(f)](m) = [\psi(f(1))](m) = f(1)\cdot m = f(m)$

$\psi\circ\phi = 1_M$ (2)

din (1) și (2) $\Rightarrow \psi = \phi^{-1}$ (3)

din (4), (5), (3) $\Rightarrow (M,\circ) \simeq (\mathbb{Z}, \cdot)$

TEMĂ DIRIG. EMAIL