Str. Algebrice în Inf.

03. 10. 2023

Seminar 1

(1) $A = \{ a \in \mathbb{Z} \mid \frac{a^2+15}{3a-3} \in \mathbb{Z} \}$

ÎNTOTDEAUNA demonstrația egalității a două mulțimi se face prin

- DUBLĂ INCLUZIUNE

Fie $a \in A$. Atunci $a \in \mathbb{Z}$ și $\frac{a^2+15}{3a-3} \in \mathbb{Z} \overset{\cdot 3}{\Rightarrow} \frac{3a^2+45}{3a-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3a^2-3}{3a-3} + \frac{48}{3a-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{16}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a-1 \mid 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in \{-15, -7, -3, -1, 0, 2, 3, 5, 9, 17\}$

Până aici am arătat că $A \subset B$

Dar $\frac{a^2+15}{3a-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \mid a^2+15 \overset{3 \mid 15}{\Longrightarrow} 3 \mid a^2 \overset{3 \mid a}{\Longrightarrow} 3 \mid a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \{-15, -3, 0, 3, 9\}$

Până aici am arătat $A \subset \{-15, -3, 0, 3, 9\}$

Verif.:

1) $\frac{(-15)^2+15}{3(-15)-3} = \frac{15 \cdot 16}{3 \cdot (-16)} = -5 \in \mathbb{Z}$

2) $\frac{(-3)^2+15}{3(-3)-3} = \frac{24}{-12} = -2 \in \mathbb{Z}$

3) $\frac{0^2+15}{3 \cdot 0-3} = \frac{15}{-3} = -5 \in \mathbb{Z}$

4) $\frac{3^2+15}{3^2-3} = \frac{24}{6} = 4 \in \mathbb{Z}$

5) $\frac{9^2+15}{3 \cdot 9-3} = \frac{81+15}{18} = \frac{27+5}{6} = \frac{32}{6} = 4 \in \mathbb{Z}$

Până aici am verif. ~~că~~

(2) $A = \{ a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ a = \frac{2x+3}{x^2+x+2} \}$

Fie $a \in \mathbb{R}$

Atunci $a \in A \Leftrightarrow \left(\exists x \in \mathbb{R}\ \ a = \frac{2x+3}{x^2+x+2} \right) \xLeftrightarrow[x^2+x+2 \neq 0]{\text{Axiomă}}$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ \ ax^2 + ax + 2a = 2x+3 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ \ ax^2 + (a-2)\cancel{x^3} + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = (a-2)^2 - 4a(2a-3) \geq 0 \Leftrightarrow -7a^2 + 8a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8a - 4 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{4-2\sqrt{11}}{7} ; \frac{4+2\sqrt{11}}{7} \right]$

$\left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ b = 2\beta \text{ (par)} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4ac}}{2a} \neq \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$

Ca urmare: $A = \left[\frac{4-2\sqrt{11}}{7} ; \frac{4+2\sqrt{11}}{7} \right]$

(3) Arătați că pt $\forall$ 2 mulțimi A și B are loc relația ~~$A \setminus (A \setminus B)$~~

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

Dem: Fie o mulțime E care conține A & B

Fie $x \in E$.

Atunci $x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (A \setminus B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in (A \setminus B)) \Leftrightarrow$

$p \wedge \neg(p \wedge \neg q) \equiv p \wedge q$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg x \in A \vee \neg x \notin B) \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \equiv$

$\equiv (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\equiv \cancel{F} \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\equiv x \in A \wedge x \in B$

Conform celor de mai sus (ora un tabel) $\Rightarrow x \in A \cap B$

Ca urmare $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

(mai face cu 133 gr.)

④ Determinați funcția $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ cu propr. că:

~~$\forall x \in \mathbb{R}$, $3f(x) - 5f(2-x) = 4x+1$~~ (s-a plictisit de asta)

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $f(x)^2 - f(x) \cdot f(y) + f(y)^2 = \frac{x+y}{2}$

Presupunem că există (am făcut o implicație)

$$f(x)^2 - f(x) \cdot f(x) + f(x)^2 = \frac{2x}{2} \iff f(x) = \sqrt{x}$$

ex $= \sqrt{1}^2 - \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{0}^2 = 1 \neq \frac{1}{2}$ abs

Ca urmare, $\nexists$ fct. cu astfel de propr.

→ O facem totuși

Presupunem că $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ a.î. $3f(x) - 5f(2-x) = 4x+1$

Fie f și $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3f(\alpha) - 5f(2-\alpha) = 4\alpha + 1 \\ -5f(\alpha) + 3f(2-\alpha) = 9 - 4\alpha \end{cases}$$

Deci $f(\alpha) = -\frac{1}{16} \cdot \begin{vmatrix} 4\alpha+1 & -5 \\ 9-4\alpha & 3 \end{vmatrix} = \frac{8\alpha - 48}{16} = \frac{\alpha}{2} - 3$

Reciproc, considerăm $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} - 3$

Fie $x \in \mathbb{R}$

$$3f(x) - 5f(2-x) = \frac{3x}{2} - 9 - 5\,\frac{2-x}{2} + 15 = \frac{3x}{2} + \frac{5x}{2} - 9 - 5 + 15 =$$

$$= 4x + 1$$

Deci f verif. cond. din enunț.

Ca urmare, singura fct. cu propr. din enunț este $f(x) = \frac{x}{2} - 3$

Str. Alg. în Info.

Semimar 1 - gr 133

- $f: A \to B \supset D$

  $f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$ imaginea inversă / preimag. / contraimag / imag. reciprocă a lui D via f

- $f: A \to B$, $A \supset C$

  $f(C) = \{b \in B \mid \exists c \in C, f(c) = b\}$ imag. lui C via f

Comparând def., constatăm că „preimaginea e mai cumsecade" decât imaginea (directă)

① Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Det:

a) $f((1,4))$ și b) $f^{-1}((1,4))$

a) Fie $y \in f((1,4))$

Atunci $\exists x \in (1,4)$, $f(x) = y$

Deci $\exists x \in (1,4)$, $y = x^2 - 4x + 1$ $\Rightarrow \exists x \in (1,4)$; $y = (x-2)^2 - 3$

Tehnica calculatorie de bază în contextul expresiilor de gradul II este sfânta completare a pătratului

De aici, $y \geq -3$

În plus, $x \in (1,4) \Rightarrow 1 < x < 4 \Rightarrow -1 < x - 2 < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1 < x-2 < 0 \ \vee \ 0 \leq x - 2 < 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow ((x-2)^2 \in (0,1) \ \vee \ (x-2)^2 \in [0,4)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 \in [0,4) \Rightarrow y = f(x) = (x+2)^2 - 3 \in [-3,1)$

În gând până aici $f((1,4)) \subset [-3,1)$

Fie $y \in [-3,1)$. Vreau $y \in f((1,4))$, adică $\exists x \in (1,4)$ a.î. $f(x) = y$

Luăm $x = 2 + \sqrt{y+3}$

Obs: $y \in [-3,1)$, deci $y + 3 \geq 0$, deci $\sqrt{y+3}$ are sens!

Atunci: $y \in [-3,1) \Rightarrow y+3 \in [0,4) \Rightarrow \sqrt{y+3} \in [0,2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in 2+\sqrt{y+3} \in [2,4) \subset (1,4)$

și $f(x) = (x-2)^2 - 3 = (2+\sqrt{y+3}-2)^2 - 3 =$

$= y+3-3 = y$

În concluzie $\Rightarrow f((1,4)) = [-3,1)$

b) Fie $x \in \mathbb{R}$

$x \in f^{-1}((1,4)) \Leftrightarrow f(x) \in (1,4) \Leftrightarrow 1 < f(x) < 4 \Leftrightarrow 1 < x^2-4x+1 < 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x > 0 \\ x^2-4x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,0) \cup (4,+\infty) \\ x \in (2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}) \end{cases} \Bigg| \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (2-\sqrt{7}, 0) \cup (4, 2+\sqrt{7})$

Deci $f^{-1}((1,4)) = (2-\sqrt{7}, 0) \cup (4, 2+\sqrt{7})$

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [0,+\infty)$, $B = (-\infty, 0]$

$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$

$f(A) \cap f(B) = [0,+\infty) \cap \cancel{(-\infty,0]}\ [0,+\infty) = [0,+\infty)$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

(3) $A = \{1,2\}$, $f(A) = \{1,4\}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$f^{-1}(f(A)) = \{-1,1,-2,2\} \Rightarrow A \subsetneq f^{-1}(f(A))$

- Dacă $f: A \to B$ și $C \subset A$. Fie $c \in C \Rightarrow f(c) \in f(C) \Rightarrow$
$\Rightarrow c \in f^{-1}(f(C))$. $\Rightarrow C \subseteq f^{-1}(f(C))$.
- Dacă $f: A \to B$ și $C_1, C_2 \subset A$

Fie $y \in f(C_1 \cap C_2)$

Atunci: $x \in C_1 \cap C_2$ a.î. $f(x) = y$

$x \in C_1$ și $f(x) = y \Rightarrow y \in f(C_1)$

——— " ——— $\Rightarrow y \in f(C_2)$ $\Big| \Rightarrow y \in f(C_1) \cap f(C_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ca urmare: $f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2)$

Se întâmplă bine însă:

Dacă $f: A \to B$, $C_1, C_2 \subset A$, $D_{1,2} \subset B$

$f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$

$f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$