CDI

CURS 6

Serii de puteri

Def. O serie de forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

s.n. serie de puteri

$\{a_n\}$ $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n$ a_n - s.n. coeficienții seriei de puteri

Notații: $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Th Prima teoremă a lui Abel

Fie seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Atunci

1.) Dacă seria $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ este convergentă pt $x_0 \neq 0$ atunci $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă [$\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ convergentă] $\forall x$ cu $|x| < |x_0|$

2) Dacă seria $\sum_{n\geq 0} a_n x_1^n$ este divergentă atunci $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e divergentă $\forall x$; $|x| > |x_1|$

Obs. Putem întâlni urm. situații

1. Seria $1 + 1!x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots$ este convergentă în $x = 0$ și divergentă în $\forall x \neq 0$

2. Seria exponențială

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ este convergentă în } \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Seria $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

Seria e convergentă în $x = -1$ $\Rightarrow$ Seria absolut convergentă $|x| < 1$

Seria e divergentă în $x=1$ $\Rightarrow$ seria divergentă $|x|>1$

Th. ~~Fie~~ $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Atunci $\exists\, r \in [0;+\infty]$ a.î. seria

1. $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă $\forall\, |x|<r$

2. $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este divergentă $\forall\, |x|>r$

Def. S.n. raza de convergență a seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $r \in [0;+\infty]$ a.î.

1) Seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e absolut convergentă dacă $|x|<r$

2) Seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e divergentă dacă $|x|>r$

Obs. Nu putem preciza nimic în $x=r$ și $x=-r$

$\sum_{n\geq 0} f_n$

Mulțimea de convergență a seriei e formată din punctele x în care $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplu/punctual.

Ex.: 1) seria geometrică:

$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

$r=1$

Mult. Conv.: $(-1;1)$

2) $1+\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$

$r=1$

Mult. Conv: $[-1;1]$

3) $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

$r=1$

Mult. Conv.: $[-1;1)$

4) $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\ldots$

$r=1$

M.C.: $(-1;1]$

(Th) Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ și fie $\rho := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

Atunci:

1) Dacă $\rho = 0$, seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e absolut convergentă $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Dacă $\rho = \infty$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e convergentă doar în $x = 0$.

3) Dacă $0 < \rho < +\infty$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e absolut convergentă pt $|x| < \frac{1}{\rho}$ și divergentă pt $|x| > \frac{1}{\rho}$

4) $r = \frac{1}{\rho}$ e raza de convergență a seriei
[convenție: $\frac{1}{0_{(+)}} = \infty$; $\frac{1}{\infty} = 0$]

Corolar Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Atunci

1) Dacă $\exists \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\rho :=}$ atunci $r = \begin{cases} 0, & \rho = \infty \\ \infty, & \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & \text{altfel} \end{cases}$ este raza de convergență a seriei

2) Dacă $\exists \rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ atunci $r = \begin{cases} 0, & \rho = \infty \\ \infty, & \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{altfel} \end{cases}$

este raza de convergență a seriei

Ex $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{2^n}$; $r = ?$

$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{2} \to r = 2$ GREȘIT! (ar fi mers pt $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^n}$)

$a_{3n} = \frac{1}{2^n}$; $a_{3n+1} = 0$; $a_{3n+2} = 0$

$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[3k]{a_{3k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[3k]{\frac{1}{2^k}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{2}$!

Convergența uniformă a seriilor de puteri

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \rightarrow$ raza de convergență: r

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad ; \quad x \in (-r, r)$$

? f continuă ? f derivabilă ? f integrabilă

(Th) Dacă seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ are raza de convergență r, atunci $\forall \rho \in (0, r)$, seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e uniform convergentă pt $x \in (-\rho, \rho)$

(Th) Dacă $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pt $x \in (-r, r)$ atunci f e continuă pe $(-r, r)$

Teorema a II-a a lui Abel

Dacă $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e convergentă în $x = r$ (sau $-r$), atunci f este continuă în $x = r$ (respectiv $x = -r$)

(Th.) Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r

Atunci următoarele serii de puteri

$$\begin{cases} (1) & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \\ (2) & a_0 x + \dfrac{a_1 x^2}{2} + \dfrac{a_2 x^3}{3} + \dots + \dfrac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} + \dots \end{cases}$$

au aceeași rază de convergență r.

Dem. (1) $r_1 = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r$

(Th) Fie $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \; ; \; x \in (-r, r)$

Atunci $\forall x \; ; \; |x| < r$ avem

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

Ex. Seria geometrică $\frac{1}{1-x} = 1+x+\dots+x^n+\dots$; $x\in(-1;1)$

Th → Integrez $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$

Teorema II Abel în $x=-1$.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \ln(1-x) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \dots$$

(am. dm. ant. că e convergentă) ???

Th Fie $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $x\in(-r,r)$

Atunci $f'(x) = a_1 + 2a_1x + 3a_2x^2 + \dots + (n+1)\cdot a_n\cdot x^n + \dots$
$\forall x\in(-r,r)$

Mai mult f este de clasă C^∞ pe $(-r,r)$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \quad \forall x\in(-r,r)$$

$f^{(k)}(0) = k!\cdot a_k \ \forall k=0,1,2\dots$

Ex $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $x\in[-1;1)$

Th → derivez termen cu termen

$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$ $\quad x\in(-1;1)$

$x=-1$; seria divergentă

Th (Unicitatea seriilor de puteri)

Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ și $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$

Dacă cele două serii au ac. rază de convergență și ac. sumă atunci ele coincid

Dem $k!a_k = f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = k!b_k \to a_k = b_k \ \forall k$

Operații cu serii de puteri

Th Fie seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r_1 și seria $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ cu raza de convergență r_2. Atunci $\sum_{n\geq 0} (a_n+b_n)x^n$ va avea raza de convergență $r\geq \min\{r_1, r_2\}$

Ex. $\sum_{n\geq 0} nx^n$ are $r=0$

$\sum_{n\geq 0} -nx^n$ are $r=0$ $\Bigg| \Rightarrow \sum_{n\geq 0} (n-n)x^n = \sum_{n\geq 0} 0$ cu $r=\infty$

(Te) Fie seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r și $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

Atunci seria $\sum_{n\geq 0} \lambda(a_n x^n)$ are raza de convergență r

Produsul a două serii

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad \sum_{n\geq 0} b_n x^n$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} \left(a_0 b_n x^n + a_1 x \cdot b_{n-1} x^{n-1} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + a_{n-1} x^{n-1} \cdot b_1 x + a_n x^n \cdot b_0\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0\right) x^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} c_n x^n \quad ; \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

(Te). Fie seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergență r_1 și seria $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ cu raza de convergență r_2. Atunci seria produs are raza de convergență $r \geq \min\{r_1, r_2\}$, iar suma seriei produs este produsul sumelor celor două serii pe intersecția celor două domenii de convergență.

Seria binomială

Def: s.n. seria binomială urm. serie de puteri

$$1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$

raza de convergență: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1 \to r=1$

$\downarrow$

$(-1,1)$

Fie $f(x) = 1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$

pt $x\in(-1;1)$

$$f'(x) = \frac{\alpha}{1!}+\frac{\cancel{2}\alpha(\alpha-1)}{\cancel{2}}x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots$$

Calcul $\longrightarrow$ $(1+x)f'(x) = \alpha f(x) \quad \forall x\in(-1,1)$

(ecuație diferențială)

$$(1+x)f'(x) = \alpha\cdot f(x) \,\Big|\cdot (1+x)^{\alpha-1}$$

$$(1+x)^{\alpha}f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x) \,\Big|\cdot\frac{1}{(1+x)^{2\alpha}}$$

$$\frac{(1+x)^{\alpha}f'(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{\left[(1+x)^{\alpha}\right]^2} = 0$$

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}\right)' = 0 \quad \forall x$$

$\Downarrow$

$\exists\, c\in\mathbb{R}$ a.î.

$$\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}} = c \quad \forall x\in(-1,1)$$

$$f(x) = c(1+x)^{\alpha} \quad \forall x\in(-1,1)$$

$f(0)=1 \Rightarrow c=1$

$\Rightarrow f(x) = (1+x)^{\alpha}$

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

generalizare a binomului lui Newton

(de aici vine denumirea)

$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\alpha}{1+x}$ pt $f(x)\neq 0$

$(\ln f(x))' = \alpha \ln(1+x) + k$ ← constantă

$k = \ln C$, $C > 0$

$(\ln f(x))' = \ln(1+x)^{\alpha} + \ln C = \ln C(1+x)^{\alpha}$

$\Rightarrow f(x) = C(1+x)^{\alpha}$ ...

Trebuie dem. că $f(x) \neq 0 \ \forall x$

P.p. $f(x_0) = 0$; $f'(x_0) = \dots, f^{(n)}(x_0) = \dots$

Cazuri particulare

$\alpha = -1, x \to -x \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad x \in (-1,1)$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$ (*)

$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} x - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!} \cdot x^n + \dots$; $x \in (-1,1)$

$\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \cdot x^n + \dots$ (**)

în (*) $x \to x^2$; $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \dots$

Integrez termen cu termen $\quad x \in (-1,1)$

$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

în (**) $x \to -x^2$; $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \dots$

$\dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} + \dots$

Integrez termen cu termen

$\arcsin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 2} \cdot x^5 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1} + \dots$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

$x \to 1$
$x < 1$ relația adev. pe $[-1,1]$

$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$

$\to$ aproximare a lui π!

Dezvoltarea în serii de puteri a unei funcții

Def $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval, $0 \in \mathring{I}$, f C^∞ în 0 s.n. seria Taylor asociată funcției f în punctul 0, urm. serie de puteri:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$

? $r = ?$ în ce condiții $f(x)$ coincide cu seria sa Taylor $f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$

Ex 1): $f(x) = e^x$; $f^{(n)}(x) = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1$ OK

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Răspuns afirmativ)

2): $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in (-1, 0] \end{cases}$

$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \to \infty} y e^{-y} =$

$= \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^y} = 0 \Rightarrow f'(0) = f'_d(0) = f'_s(0) = 0$

$\ldots f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$ (inducție) $\overset{?}{\Rightarrow} f(x) = 0$ NU!

Th $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval, $0 \in \mathring{I}$; f $C^\infty(I)$.

Atunci

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$\Leftrightarrow$ şirul $\{R_n(x)\}$ este convergent la 0, $x \in I$ unde $R_n(x)$ e restul din formula lui MacLaurin (forma particulară Lagrange) $\left[R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \right.$

$$\left. = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right]$$

Corolar $I \subseteq \mathbb{R}$ simetric faţă de origine, $f: I \to \mathbb{R}$ de clasă $C^\infty(I)$

Dacă $\exists M \geq 0$ a.î. $|f^{(n)}(x)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in I$,
(o constantă poz.)

atunci $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots +$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad \forall x \in I$$

Ex. 1) $f(x) = e^x$; $|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^M$ $\forall x \in (-M, M)$

$$\Rightarrow e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2) $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n = 1, 5, 9 \dots \\ -\sin x & n = 2, 6, \dots \\ -\cos x & n = 3, 7, \dots \\ \sin x & n = 0, 4, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n = 1, 3, 5, 9 \\ -1 & n = 3, 7, 11 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$$

Seria Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Din Corolar $|f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad \forall x \forall n \Rightarrow \sin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

<u>Def.</u> $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $x_0 \in \mathring{I}$ (un pct. din interiorul intervalului real), $f: I \to \mathbb{R}$ de clasă $C^\infty(I)$

s.n. <u>seria Taylor</u> asociată lui f în pct. x_0 urm. serie de puteri:

$$f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

<u>Obs.</u> rezultatele anterioare rămân valabile și pt. seria Taylor în x_0.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$