SEMINAR 7

Funcții derivabile

EXERCIȚIUL 1 Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $x \leq f(x) \leq x + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este derivabilă în 0 și că $f'(0) = 1$.

REZOLVARE $x \leq f(x) \leq x + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$x = 0 \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 0 + 0^2 \Rightarrow f(0) = 0$

$x \leq f(x) \leq x + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq f(x) - f(0) \leq x + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Împărțim inegalitățile cu numărul real x și se împart două cazuri, în funcție de semnul lui x.

CAZUL 1 $x > 0$

$x \leq f(x) - f(0) \leq x + x^2 \ \forall x > 0 \ | : x \Rightarrow 1 \leq \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \leq$
$\leq 1 + x \ \forall x > 0$

$$1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 1 + x \ \forall x > 0 \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$1 \xrightarrow[x>0]{x \to 0} 1, \quad 1 + x \xrightarrow[x>0]{x \to 0} 1$$

$\Rightarrow f$ este derivabilă la dreapta în 0 și $f'_d(0) = 1$.

Cazul 2 $x < 0$

$x \leq f(x) - f(0) \leq x + x^2 \ \forall x < 0 \ | : x \Rightarrow 1 + x \leq \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$
$\leq 1 \ \forall x < 0$

$$1 + x \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 1 \ \forall x < 0 \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$1 + x \xrightarrow[x<0]{x \to 0} 1, \quad 1 \xrightarrow[x<0]{x \to 0} 1$$

$\Rightarrow f$ este derivabilă la stânga în 0 și $f'_s(0) = 1$

$f'_d(0) = f'_s(0) = 1 \Rightarrow f$ este derivabilă în 0 și $f'(0) = 1$.

EXERCIȚIUL 2 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $x + \ln(1+x) \leq f(x) \leq x + e^x - 1 \ \forall x \in (-1, +\infty)$. Să se arate că f este derivabilă în 0 și că $f'(0) = 2$.

EXERCIȚIUL 3 Să se determine parametrul real $a > 0$ astfel ca $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare Se alege functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2^x + a^x - 3^x - 4^x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

f functie derivabilă pe $\mathbb{R}$ (1)

Din ipoteză deducem că $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 2^0 + a^0 - 3^0 - 4^0 = 1$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x_0 = 0$ punct de minim global al funcției f. (2)

$\mathbb{R}$ mulțime deschisă $\Rightarrow x_0 = 0 \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$ (3)

Din (1), (2), (3), aplicând teorema lui FERMAT, obținem că ~~f este derivabilă în~~ $x_0 = 0$ este punct critic al funcției f, adică $f'(x_0) = 0$.

$f'(x) = 2^x \ln 2 + a^x \ln a - 3^x \ln 3 - 4^x \ln 4 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(0) = 2^0 \ln 2 + a^0 \ln a - 3^0 \ln 3 - 4^0 \ln 4 = \ln 2 + \ln a - \ln 3 - \ln 4 = \ln(2a) - \ln 12 = \ln \frac{2a}{12} = \ln \frac{a}{6}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \ln \frac{a}{6} = 0 \Rightarrow \frac{a}{6} = 1 \Rightarrow a = 6$

EXERCIȚIUL 4 Fie $a, b > 0$ astfel încât $a^x + b^x \geq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $a \cdot b = 1$.

ÎNDICAȚIE Se alege funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = a^x + b^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ și se demonstrează că $x_0 = 0$ este punct de minim global al funcției f.

EXERCIȚIUL 5 Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este funcție bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(2)$.

REZOLVARE f funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = x^2 + 2x + 1 + 2x^2 = (x+1)^2 + 2x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este funcție strict crescatoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ este funcție injectivă ①

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Din tabelul de variatie se observă că $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ este funcție surjectivă ②

Din ① și ② rezultă că f este funcție bijectivă.

$y_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = 2$.

f funcție bijectivă $\Rightarrow$ ecuația $f(x) = 2$ are soluție unică

Observăm că $f(0)=2 \Rightarrow$ ecuația $f(x)=2$ are soluția unică $x_0=0$.

f funcție bijectivă
f funcție strict crescătoare
f este derivabilă în $x_0=0$
$f'(0)=1\neq 0$
$\Rightarrow f^{-1}$ este derivabilă în $y_0=2$

$$(f^{-1})'(2) = \cancel{(\ )}(f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

EXERCIȚIUL 6 Fie $f: \mathbb{R} \to (1, +\infty)$ definită prin $f(x) = 5^x + 2^x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este funcție bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(8)$.

EXERCIȚIUL 7 Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Rezolvare f funcție continuă pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow$ f este funcție continuă în $x_0=0 \Rightarrow$ f funcție continuă pe $\mathbb{R}$.

f funcție derivabilă pe $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Studiem derivabilitatea funcției în $x_0=0$ folosind un corolar al teoremei lui Lagrange.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = 0 \Rightarrow \exists f'_d(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1) = -1 \Rightarrow \exists f'_s(0) = -1$

$f'_s(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow f$ nu este derivabilă în 0.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 2xe^{-x} - x^2e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 = 0, & x < 0 \\ xe^{-x}(2-x) = 0, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2$$ singurul punct critic al funcției f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - - -$	| $+ +$	0	$- - - -$
$f(x)$	$\searrow$	0 $\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$

Din tabelul de variație se deduce că $x_0 = 0$ este punct de minim local al funcției f și că $x_1 = 2$ este punct de maxim local al funcției f.

<u>EXERCIȚIUL 8</u> Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $(0, \infty)$ astfel ca $\exists \lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

<u>REZOLVARE</u> Se utilizează teorema lui L'Hospital pentru rezolvarea acestui exercițiu.

Se aleg funcțiile $g, h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $g(x) = e^x f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ și $h(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} = f(x) + f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

g, h funcții derivabile pe $(0,\infty)$

$h'(x) = e^x \neq 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+f'(x)) = l$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

L'H

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x f(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l.$

<u>EXERCIȚIUL 9</u> Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + x f'(x)) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

<u>EXERCIȚIUL 10</u> Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n \leq \dfrac{x^n+y^n+z^n}{3} \ \forall x, y, z \in (0,\infty)$.

<u>Rezolvare</u> Inegalitatea este evidentă pentru $n=1$. Vom presupune că $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Alegem funcția $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^n \ \forall x \in (0,\infty)$.

f este funcție derivabilă de două ori pe $(0,+\infty)$.

$f'(x) = n x^{n-1} \ \forall x \in (0,\infty)$

$f''(x) = (n x^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2} > 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$

$(0,+\infty)$ interval în $\mathbb{R}$

$f''(x) > 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$ $\Rightarrow$ f funcție convexă pe $(0,+\infty)$

Folosim inegalitatea lui Jensen și, ținând cont că f este funcție convexă pe $[0,+\infty)$, obținem că $f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\le \alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma f(z)$ $\forall x,y,z\in[0,\infty)$ și $\forall \alpha,\beta,\gamma\in[0,\infty)$ cu $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Alegem $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$

Avem că $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\le\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$ $\forall x,y,z>0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n\le\frac{x^n+y^n+z^n}{3} \quad \forall x,y,z\in[0,+\infty)$$

<u>EXERCIȚIUL 11</u> Să se demonstreze că

$$e^{\frac{x+y}{2}}\le\frac{e^x+e^y}{2} \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

<u>EXERCIȚIUL 12</u> Să se demonstreze inegalitatea

$$\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \quad \forall x\in[0,\pi).$$

<u>Rezolvare</u> Vom folosi pentru justificarea inegalității formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.

Fie $f:[0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ $\forall x\in[0,\pi)$

f funcție indefinit derivabilă pe $[0,\pi)$

$f'(x)=\cos x \quad \forall x\in[0,\pi)$

$f''(x)=-\sin x \quad \forall x\in[0,\pi)$

$f'''(x)=-\cos x \quad \forall x\in[0,\pi)$

$f^{(4)}(x)=\sin x \quad \forall x\in[0,\pi)$

$f^{(5)}(x) = \cos x \ \forall x \in [0, \pi)$
$f^{(6)}(x) = -\sin x \ \forall x \in [0, \pi)$
Observăm că membrul drept al inegalității este un polinom de grad 5 de forma
$P(x) = (x-0) - \frac{(x-0)^3}{6} + \frac{(x-0)^5}{120}$.
De aceea considerăm că funcția este derivabilă de 6 ori pe $[0, \pi)$.
Elementul fixat din intervalul $[0, \pi)$ este $x_0 = 0$ (vezi descrierea polinomului P).

Aplicăm formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.
$\forall x \in [0, \pi)$, cu $x \neq 0$ $\exists c \in [0, \pi)$ situat între 0 și x (adică $c \in (0, x)$) astfel încât $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)$
$+ \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5$
$+ \frac{f^{(6)}(c)}{6!}(x-0)^6$
Avem că $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin c}{6!} x^6$
$x \in [0, \pi)$, $x \neq 0$ $\Rightarrow x \in (0, \pi)$
$c \in (0, x) \Rightarrow c \in (0, \pi) \Rightarrow \sin c > 0 \Rightarrow \frac{\sin c}{6!} x^6 > 0$ $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \ \forall x \in (0, \pi)$.
Pentru $x = 0$ inegalitatea din exercițiul propus este evidentă (avem chiar egalitate)!
Rezultă că $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \ \forall x \in [0, \pi)$.

EXERCIȚIUL 13 Să se demonstreze inegalitatea

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in [0, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

EXERCIȚIUL 14 Se consideră o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

i) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că f este funcție constantă pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare Demonstrăm afirmația prin reducere la absurd. Presupunem că f este funcție neconstantă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f' este funcție nenulă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $f'(x_0) \neq 0$.

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $f'(x_0) > 0$.

Aplicăm formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$ $\exists c \in \mathbb{R}$ situat între x și x_0 astfel încât $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$

$f''(c) \leq 0 \Rightarrow \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \leq 0$ $\Bigg\| \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$.

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -\infty$ $\Bigg\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Din ipoteză știm că $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \geq 0$

$\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow$ f funcție constantă pe $\mathbb{R}$