

# Concepte generale. Clasificatorul Bayes Naiv. Măsurarea performanței.

Prof. Dr. Radu Ionescu  
raducu.ionescu@gmail.com

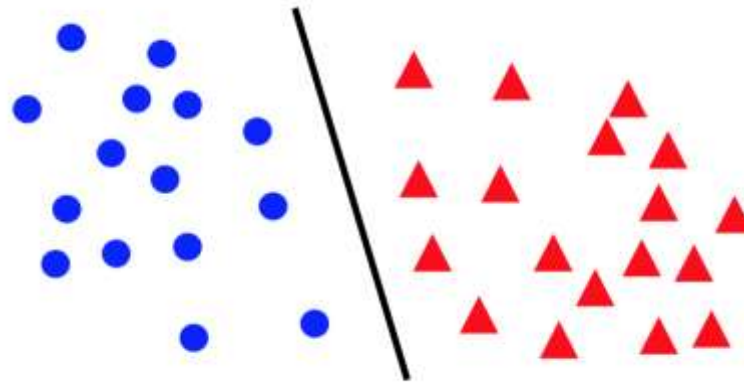
Facultatea de Matematică și Informatică  
Universitatea din București

# Paradigme ale învățării

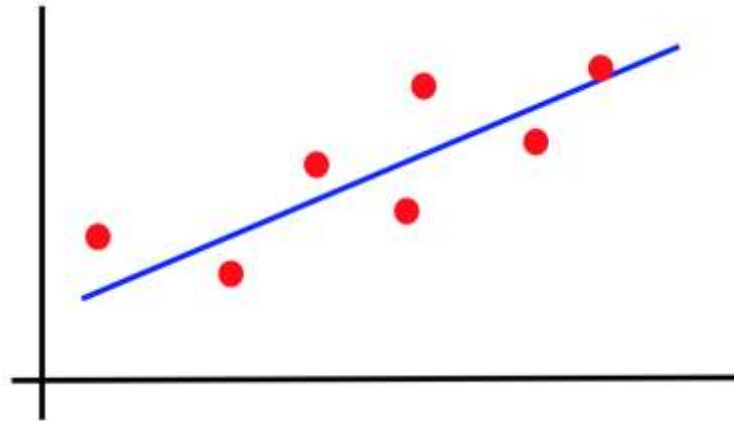
- Învățare supervizată (supervised learning)
- Învățare nesupervizată (unsupervised learning)
- Învățare semi-supervizată (semi-supervised learning)
- Învățare ranforsată (reinforcement learning)
  
- Paradigme non-standard:
  - Învățarea activă (active learning)
  - Învățare prin transfer (transfer learning)

# Formele canonice ale problemelor de învățare supervizată

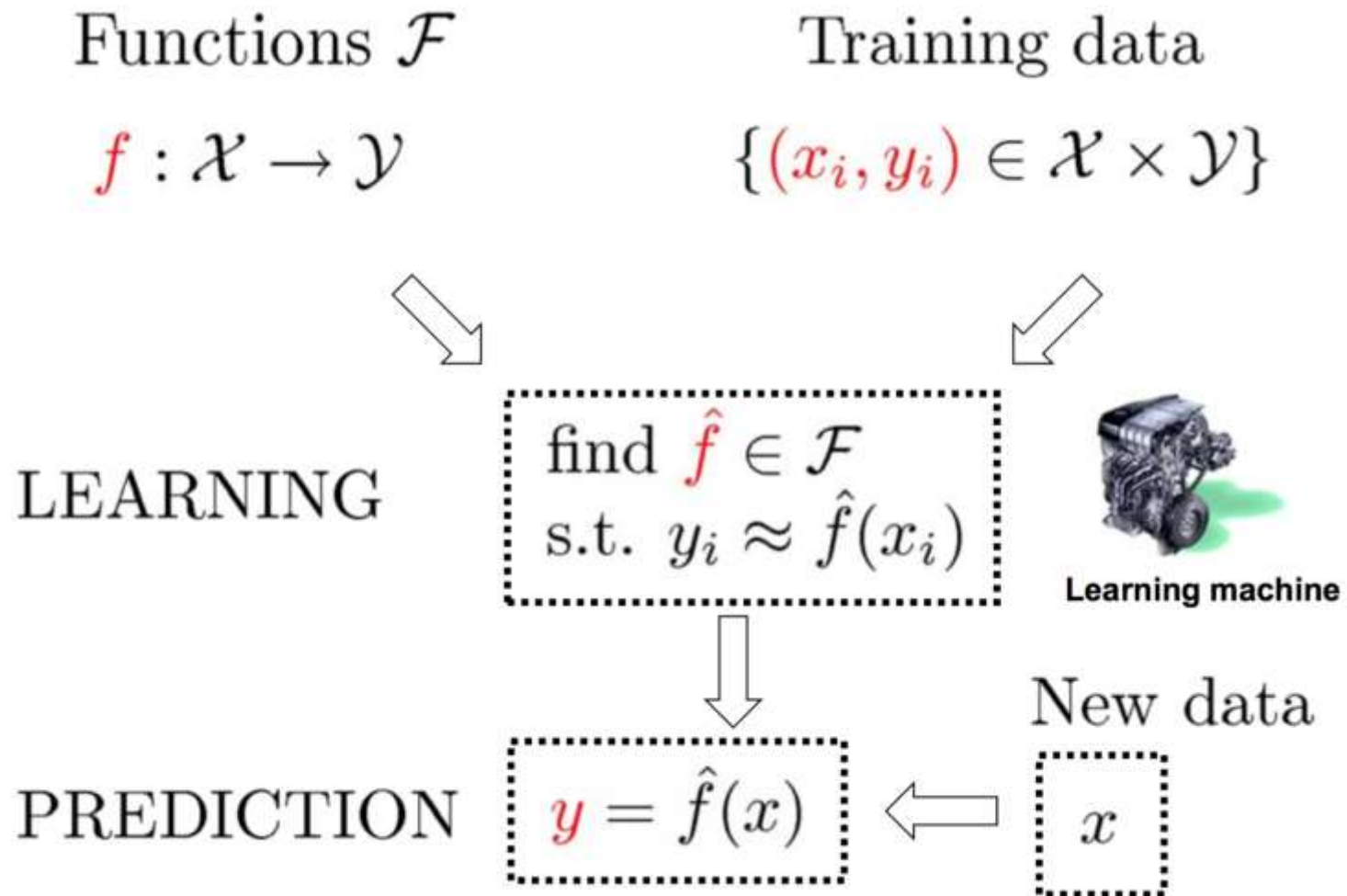
- Clasificare



- Regresie



# Paradigma de învățare supervizată



# Pașii necesari pentru învățare supervizată

- **Definirea** problemei de învățare supervizată

- **Colectarea datelor**

Pornim cu datele de antrenare, pentru care știm etichetele corecte (de la un profesor sau oracol)

- **Reprezentarea datelor**

Alegem cum să reprezentăm datele

- **Modelarea**

Alegerea spațiului de ipoteze:  $H = \{g: X \rightarrow Y\}$

- **Învățarea / Estimarea parametrilor**

Găsirea celei mai bune ipoteze din spațiul ales

- **Selectarea modelului**

Încercăm mai multe modele și îl păstrăm pe cel mai bun

- Dacă rezultatele sunt mulțumitoare atunci ne oprim

Altfel rafinăm unul sau mai mulți pași anteriori

# Clasificare între Banana și Furbish

- **Date de antrenare**
- Banana language:
  - baboi, bananonina, bello, hana, stupa
- Furbish:
  - doo, dah, toh, yoo, dah-boo, ee-tay
- Date de test: gelato
- Care este limba?
- De ce?
- **Învățarea este grea fără a stabili un spațiu de ipoteze H!**



# Antrenare versus testare

- Ce ne dorim?
  - Performanță bună (pierdere scăzută) pe datele de antrenare?
  - Nu, performanță bună pe datele de test (nevăzute)
- Date de antrenare:
  - $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$
  - Sunt folosite pentru a învăța funcția de mapare  $f$
- Date de testare:
  - $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$
  - Folosite pentru a vedea cât de bine am învățat

# Funcția de eroare / de pierdere

- Cum măsurăm performanța?
- Regresie:
  - Media pătratelor erorilor
  - Media erorilor în valoare absolută
- Clasificare:
  - Numărul de clasificări greșite (misclassification error)
  - Pentru clasificare binară:  
True Positive, False Positive, True Negative, False Negative
  - Pentru clasificare în mai multe clase:  
Matricea de confuzie



# Erori

- Eroarea de generalizare (generalization error):

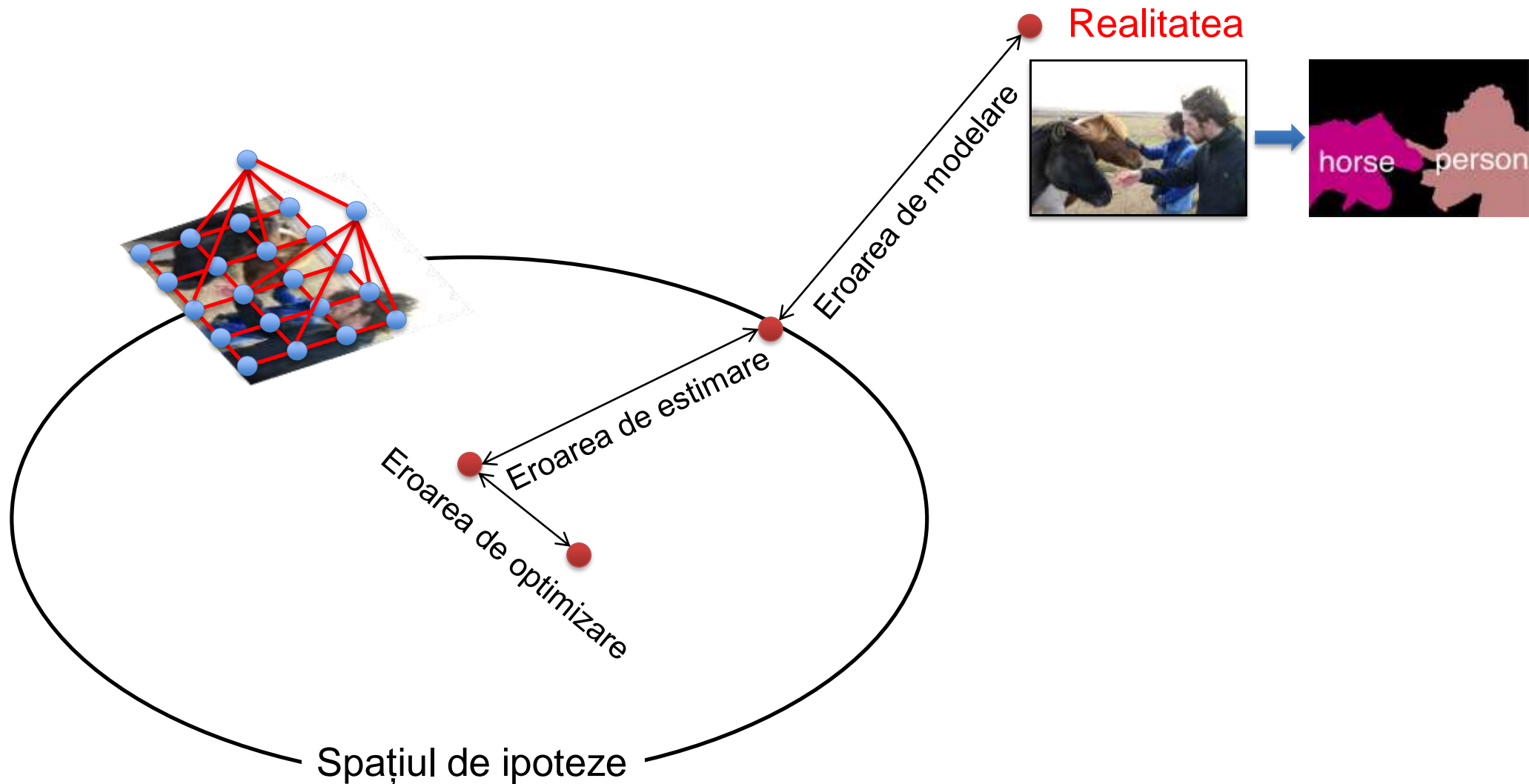
$$\mathcal{E}(h) = \int_{X \times Y} V(h(x), y) \rho(x, y) dx dy$$

- Probabilitatea comună  $\rho(x, y)$  este de obicei necunoscută
- Atunci calculăm eroare empirică (empirical error):

$$E(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(h(x_i), y_i)$$

- Estimăm eroarea empirică pe datele de antrenare sau pe cele de test?
- Nu este corect să raportăm eroarea pe datele de antrenare!

# Descompunerea erorii

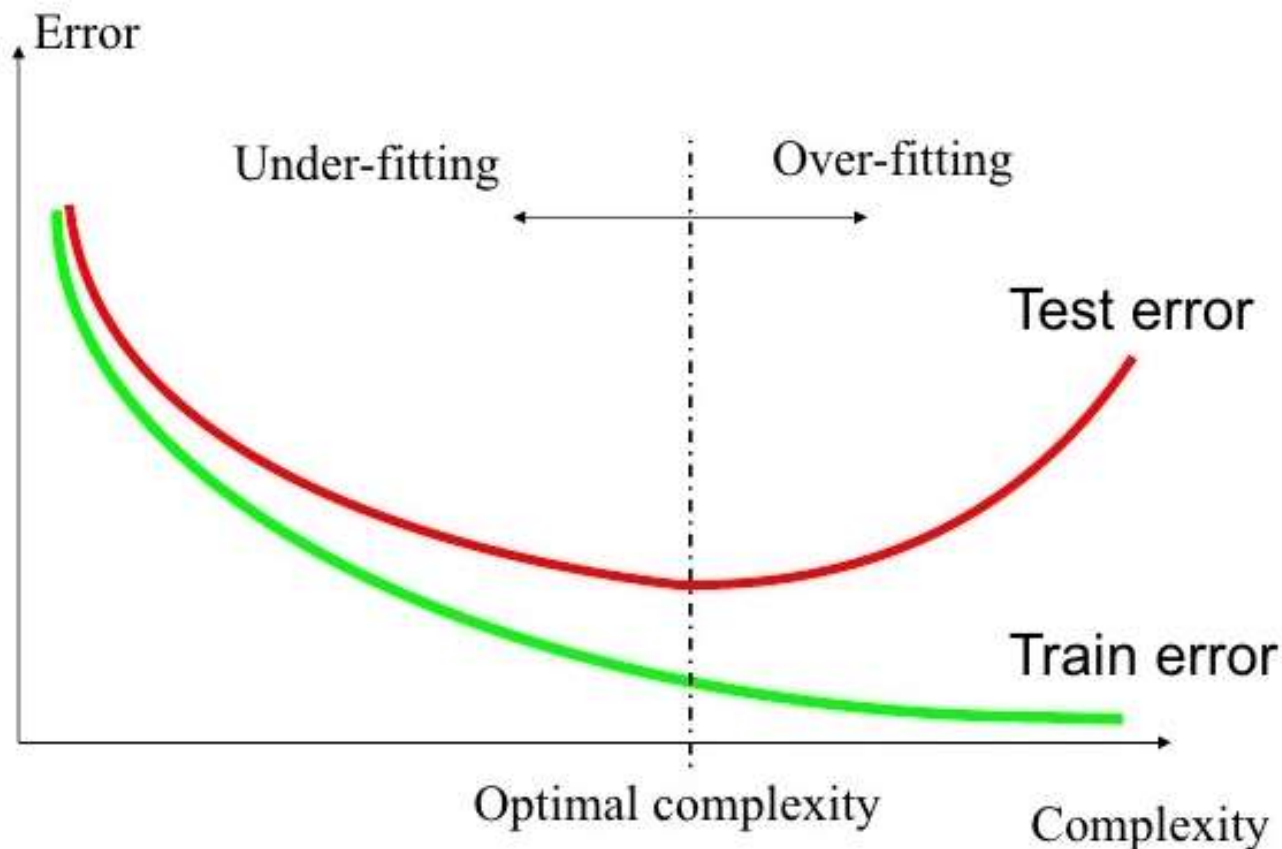


# Descompunerea erorii

- Eroare de modelare
  - Am încercat să modelăm realitatea cu un spațiu de ipoteze
- Eroarea de estimare
  - Am încercat să antrenăm un model cu o mulțime finite de date
- Eroarea de optimizare
  - Nu am reușit să optimizăm funcția până în punctul optim

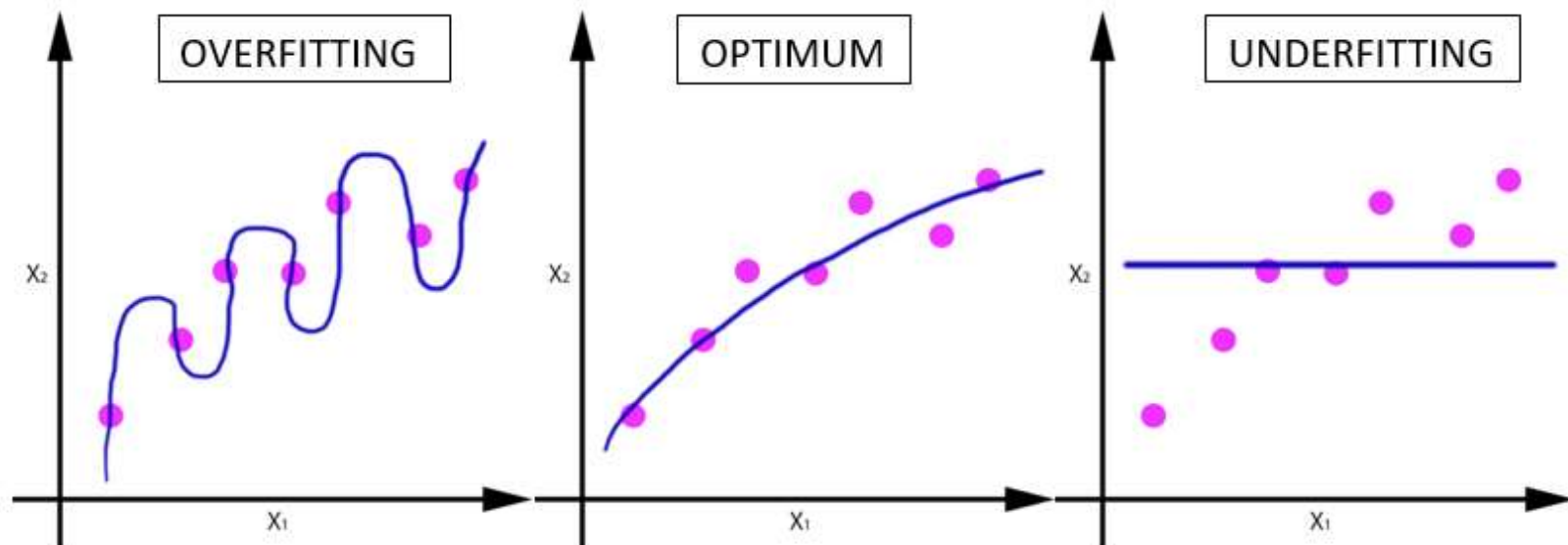
# Underfitting versus overfitting

- Problema cea mai importantă a învățării?
- Îmbunătățirea capacității de generalizare



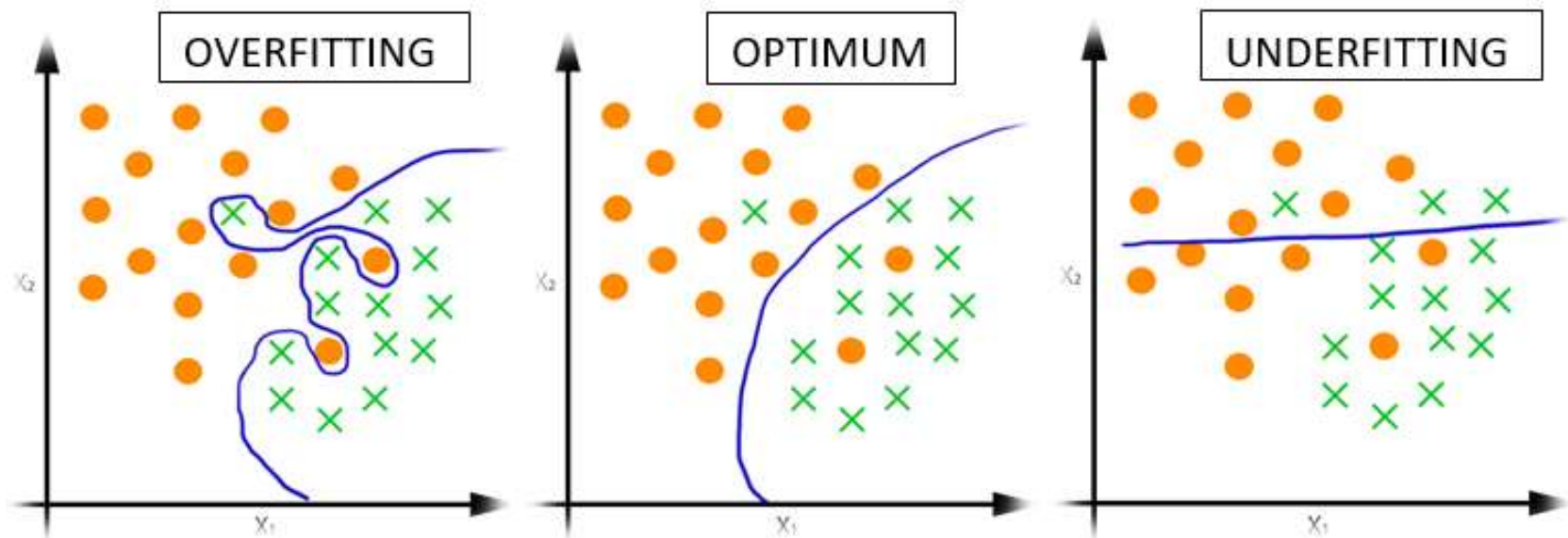
# Underfitting versus overfitting

- Exemplu 1: problemă de regresie



# Underfitting versus overfitting

- Exemplu 2: problemă de clasificare



# Bias-Variance Trade-off

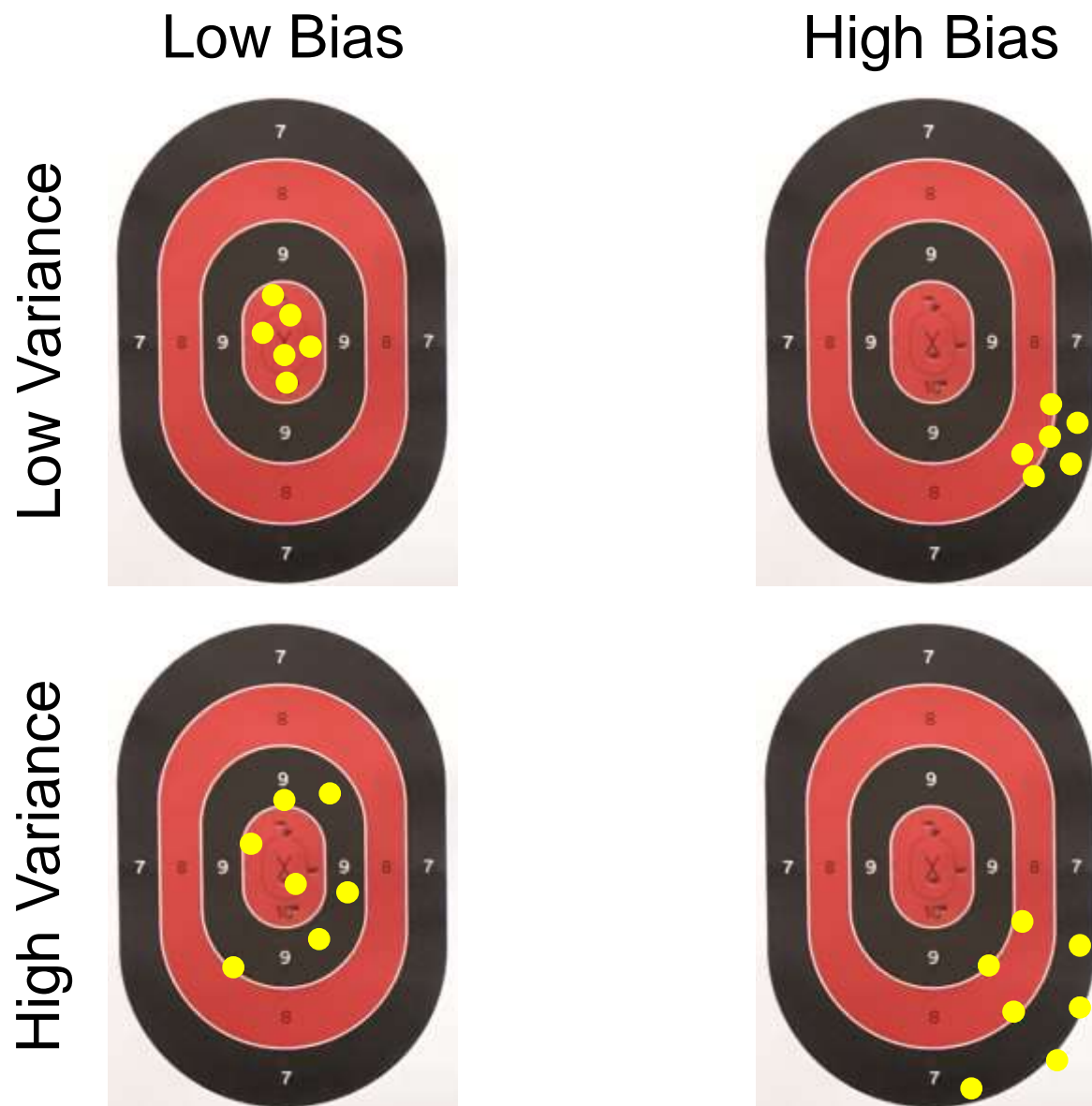
- Bias
  - Eroare sistematică care provine din inabilitatea modelului de a învăța adevărata relație dintre trăsături și etichete (underfitting)
  - Poate fi corectată prin creșterea complexității modelului
- Variance
  - Eroare aleatoare care provine din sensibilitatea ridicată la mici fluctuații din date, cauzată de faptul că modelul a învățat și zgomotul din datele de antrenare (overfitting)
  - Poate fi corectată prin adăugarea de exemple de antrenare sau prin scăderea complexității modelului

# Bias-Variance Trade-off





# Bias-Variance Trade-off



# Abordarea procedurală

- Etapa de antrenare:
  - Date neprelucrate  $\rightarrow x$   
(extragerea trăsăturilor / caracteristicilor = feature extraction)
  - Date de antrenare  $\{(x,y)\} \rightarrow f$   
(învăţare)
- Etapa de testare:
  - Date neprelucrate  $\rightarrow x$   
(extragerea trăsăturilor)
  - Date de testare  $x \rightarrow f(x)$   
(aplicarea funcţiei, calcularea erorii)

# Abordarea statistică

- Folosim probabilități:
  - $x$  și  $y$  sunt variabile aleatoare
  - $D = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N) \sim P(X, Y)$
- Presupunem că datele sunt i.i.d. (independent și identic distribuite):
  - Datele de antrenare și testare sunt generate i.i.d. din  $P(X, Y)$
  - Învățăm pe setul de antrenare
  - Sperăm ca modelul să **generalizeze** pe datele de test

# Concepte

- Capacitatea modelului
  - Cât de larg este spațiul de ipoteze  $H$ ?
  - Este sau nu restrâns spațiul de funcții?
- Supra-învățare (overfitting)
  - $f$  funcționează bine pe datele de antrenare
  - Dar foarte slab pe datele de testare
- Capacitatea de generalizare
  - Abilitatea de a obține eroare mică pe datele noi de test

# Garanții

- Simplificând 20 de ani de cercetare din Teoria Învățării...
- Dacă:
  - Avem suficiente date de antrenare  $D$
  - Și spațiul de ipoteze  $H$  nu este foarte complex
- atunci **probabil** că modelul va avea capacitate de generalizare

# Probabilități (recapitulare)

- A este un eveniment nedeterminist:  
A = “Novak Djokovic va câștiga Roland Garros”

- Ce înseamnă  $P(A)$ ?

- Abordarea statistică:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(A = \text{true})}{N}$$

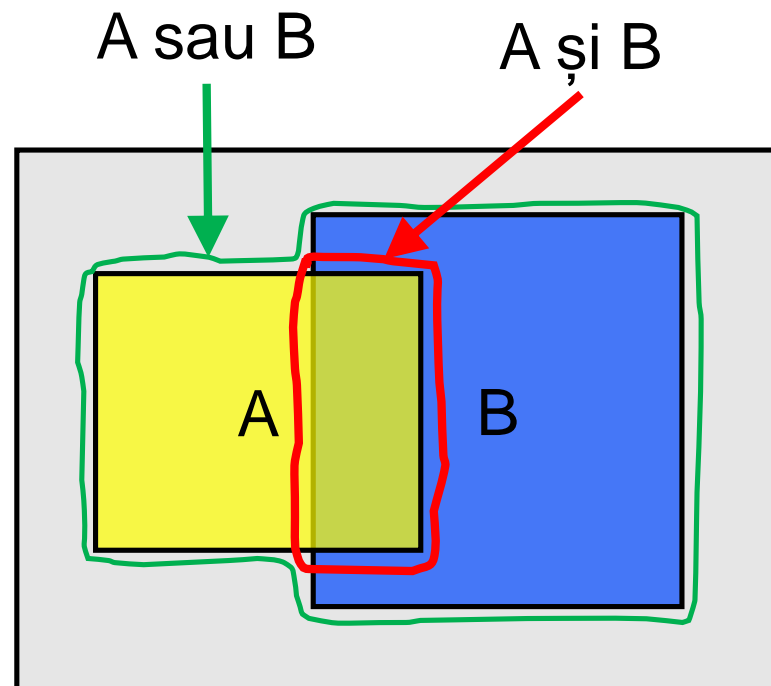
- Frecvența la limită a unui eveniment repetabil și nedeterminist

- Abordarea Bayesiană:

- $P(A)$  este ceea ce “credem” despre A

# Axiomele Probabilității (recapitulare)

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \text{ sau } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ și } B)$



# Probabilități condiționate (recapitulare)

$$P(Y = y \mid X = x)$$

- Ce să credem despre  $Y = y$ , dacă știm că  $X = x$ ?
- $P(\text{Novak Djokovic va câștiga Roland Garros})?$
- Dacă știm următoarele:
  - În 2021, Novak Djokovic a câștigat Roland Garros
  - Novak Djokovic a pierdut patru finale de Roland Garros
  - Novak Djokovic se află pe poziția 1 în clasamentul ATP



# Probabilități condiționate (recapitulare)

- $P(A | B)$  = În cazurile în care B este adevărat, proporția în care A este adevărat

- Exemplu:

➤ D: “Am dureri de cap”

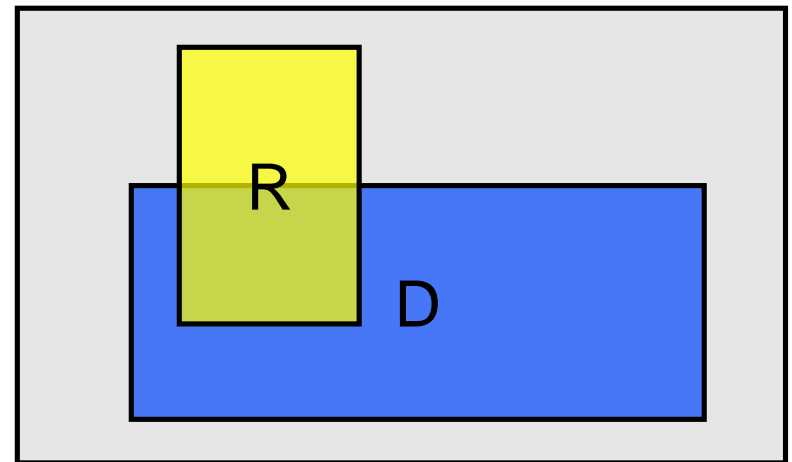
➤ R: “Sunt răcit”

- $P(D) = \frac{1}{10}$

- $P(R) = \frac{1}{40}$

- $P(D | R) = \frac{1}{2}$

- Durerile de cap sunt rare și răceala este și mai rară, dar dacă ești răcit atunci sunt 50% șanse să ai dureri de cap

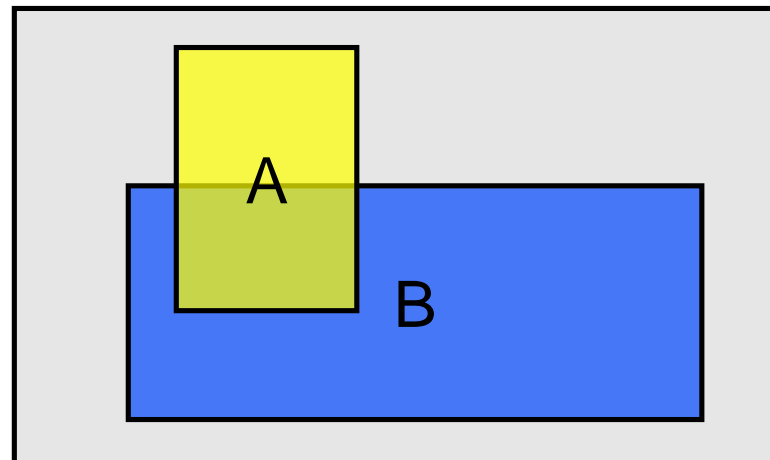


# Regula Bayes

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A | B) P(B)}{P(A)}$$



- Thomas Bayes "An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances" Royal Society, 1763.
- Simplu de înțeles dacă vă gândiți la arii

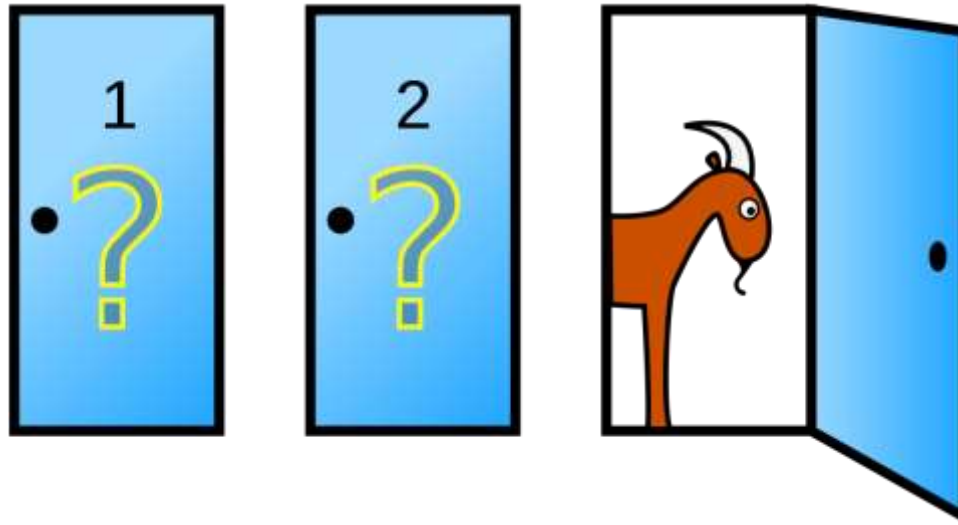


# Regula Bayes

## Concepte:

- Probabilitate
  - Cât de bine explică datele o anumită ipoteză?
- Informații apriori
  - Ce credem înainte de a vedea datele?
- Informații aposteriori
  - Ce credem după ce vedem datele?

# Problema Monty Hall



- Sunt 3 uși numerotate cu 1, 2, 3.
- Un premiu mare (o mașină) este ascunsă în spatele unei uși. Celelalte două uși au câte o capră.
- Trebuie să alegem o ușă.
- Să presupunem că alegem poarta 1. Gazda deschide poarta 3, arătând capra din spate. Ce alegem mai departe?
  - (a) Rămânem cu alegerea inițială (poarta 1);
  - (b) Schimbăm și alegem poarta 2;
  - (c) Este vreo diferență?

# Problema Monty Hall

- $H = i$  denotă ipoteza “premiul este după ușa  $i$ ”. Apriori toate cele 3 uși sunt egal probabile să ascundă premiul:

$$P(H = 1) = P(H = 2) = P(H = 3) = \frac{1}{3}$$

- Alegem poarta 1.
- Dacă premiul este în spatele ușii 1, gazda este indiferentă și va alege ușile 2 sau 3 cu probabilitate egală:

$$P(U = 2 \mid H = 1) = \frac{1}{2}, P(U = 3 \mid H = 1) = \frac{1}{2}$$

- Dacă premiul este în spatele ușii 2 (respectiv 3), gazda alege ușa 3 (respectiv 2):

$$P(U = 2 \mid H = 2) = 0, P(U = 3 \mid H = 2) = 1$$

$$P(U = 2 \mid H = 3) = 1, P(U = 3 \mid H = 3) = 0$$

- Gazda deschide poarta 3 ( $U=3$ ), descoperind capra. Observația este  $U=3$ . Premiul este în spatele ușii 1 sau 2?

# Problema Monty Hall

$$\begin{aligned}P(H = 1) &= P(H = 2) = P(H = 3) = \frac{1}{3} \\P(U = 2 \mid H = 1) &= \frac{1}{2}, P(U = 3 \mid H = 1) = \frac{1}{2} \\P(U = 2 \mid H = 2) &= 0, P(U = 3 \mid H = 2) = 1 \\P(U = 2 \mid H = 3) &= 1, P(U = 3 \mid H = 3) = 0\end{aligned}$$

- Aplicăm regula Bayes:

$$P(H = 1 \mid U = 3) = \frac{P(U = 3 \mid H = 1) P(H = 1)}{P(U = 3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(H = 2 \mid U = 3) = \frac{P(U = 3 \mid H = 2) P(H = 2)}{P(U = 3)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

# Clasificatorul optimal

- **Învățăm:**  $h: \mathbf{X} \rightarrow Y$ 
  - $\mathbf{X}$  – trăsături
  - $Y$  – etichete
- Presupunând cunoscută  $P(Y|\mathbf{X})$ , cum clasificăm datele?
  - Aplicăm clasificatorul Bayes:

$$y^* = h^*(x) = \operatorname{argmax}_y P(Y = y \mid X = x)$$

- **De ce?**

# Clasificatorul optimal

- **Teoremă:** Clasificatorul Bayes  $h_{\text{Bayes}}$  este optim!

- Adică:

$$error_{true}(h_{\text{Bayes}}) \leq error_{true}(h), \forall h$$

- **Eroarea Bayes** este cea mai mica eroare posibilă:

$$error_{\text{Bayes}} = 1 - \sum_{y \neq y^*} \int_{x \in H_i} P(y | x) P(x) dx$$



# Clasificatorul optimal

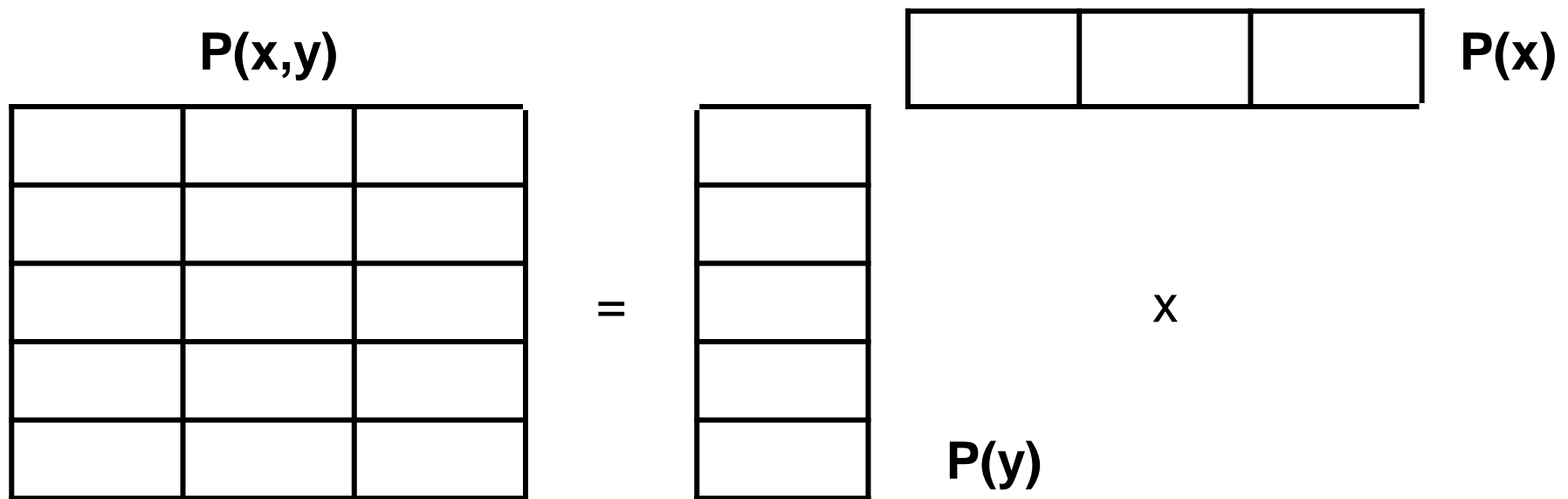
- Cât de greu este să învățăm clasificadorul optimal?
  - Dar pentru date categorice?
- Cum reprezentăm datele? Câți parametrii trebuie estimați?
  - Probabilitatea apriori a claselor  $P(Y)$ :  
Presupunem că  $Y$  este compus din  $k$  clase
  - Probabilitatea  $P(\mathbf{X} | Y)$ :  
Presupunem că  $\mathbf{X}$  este compus din  $n$  trăsături binare

Model complex → Avem varianță mare cu date limitate!

# Soluție: considerăm că trăsăturile sunt independente

- Două variabile sunt independente dacă și numai dacă:

$$P(x, y) = P(x) P(y)$$



- Două variabile sunt independente condiționat dacă, fiind dată o a treia variabilă, avem:

$$P(x, y | z) = P(x | z) P(y | z)$$

# Clasificatorul Naïve Bayes

- Presupunerea Naïve Bayes:

- Trăsăturile sunt independente:

$$P(X_1, X_2 | Y) = P(X_1 | Y)P(X_2 | Y)$$

- Mai general:

$$P(X_1 \dots X_n | Y) = \prod_i P(X_i | Y)$$

- Câți parametrii trebuie estimați acum?

- Presupunem că **X** este compus din n trăsături binare

- Redus de la  $2^n$  la  $2 \cdot n$

# Clasificatorul Naïve Bayes

- Fiind date:
  - Probabilitatea apriori a claselor  $P(Y)$
  - $n$  trăsături independente **X** condiționate de  $Y$
  - Pentru fiecare  $X_i$ , probabilitatea  $P(X_i | Y)$

- Regula de decizie Naïve Bayes este:

$$h_{NB}(x) = \underset{y}{\operatorname{argmax}} P(y) P(x_1, \dots, x_n | y)$$

$$h_{NB}(x) = \underset{y}{\operatorname{argmax}} P(y) \prod_i P(x_i | y)$$

- În practică folosim sumă de log!
- Dacă presupunerea este adevărată, NB este clasificadorul optimal!

# Estimarea parametrilor NB

- Se aplică metoda aproximării verosimilității maxime (Maximum Likelihood Estimation)
  - Fiind dat setul de antrenare, calculăm numărul de exemple pentru care  $A=a$  și  $B=b$ :

`count(A=a, B=b)`

- Estimarea parametrilor:
  - Probabilitatea apriori a fiecărei clase:  $P(Y = y) = \dots$
  - Probabilitatea condiționată de clase:  $P(X_i = x_i | Y = y) = \dots$

# Încălcarea presupunerii NB

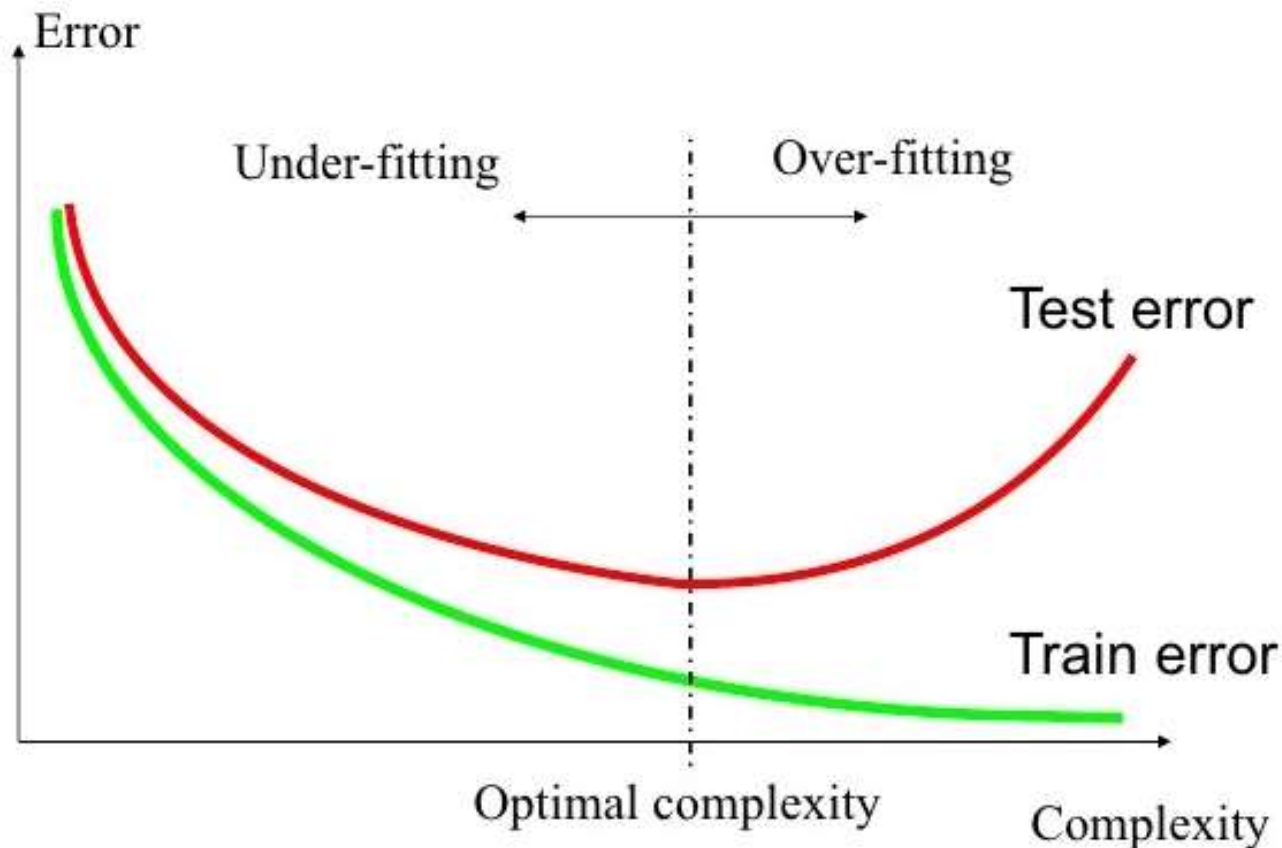
- De obicei, trăsăturile nu sunt independente condiționat:

$$P(X_1 \dots X_n | Y) \neq \prod_i P(X_i | Y)$$

- Probabilitățile  $P(Y|\mathbf{X})$  sunt deseori 0 sau 1
- Totuși, clasificatorul NB este foarte popular
  - Deorece se descurcă bine, chiar dacă presupunerea este încălcată

# Underfitting versus overfitting

- Îmbunătățirea capacității de generalizare



# Împărțirea datelor în date de antrenare, validare și test

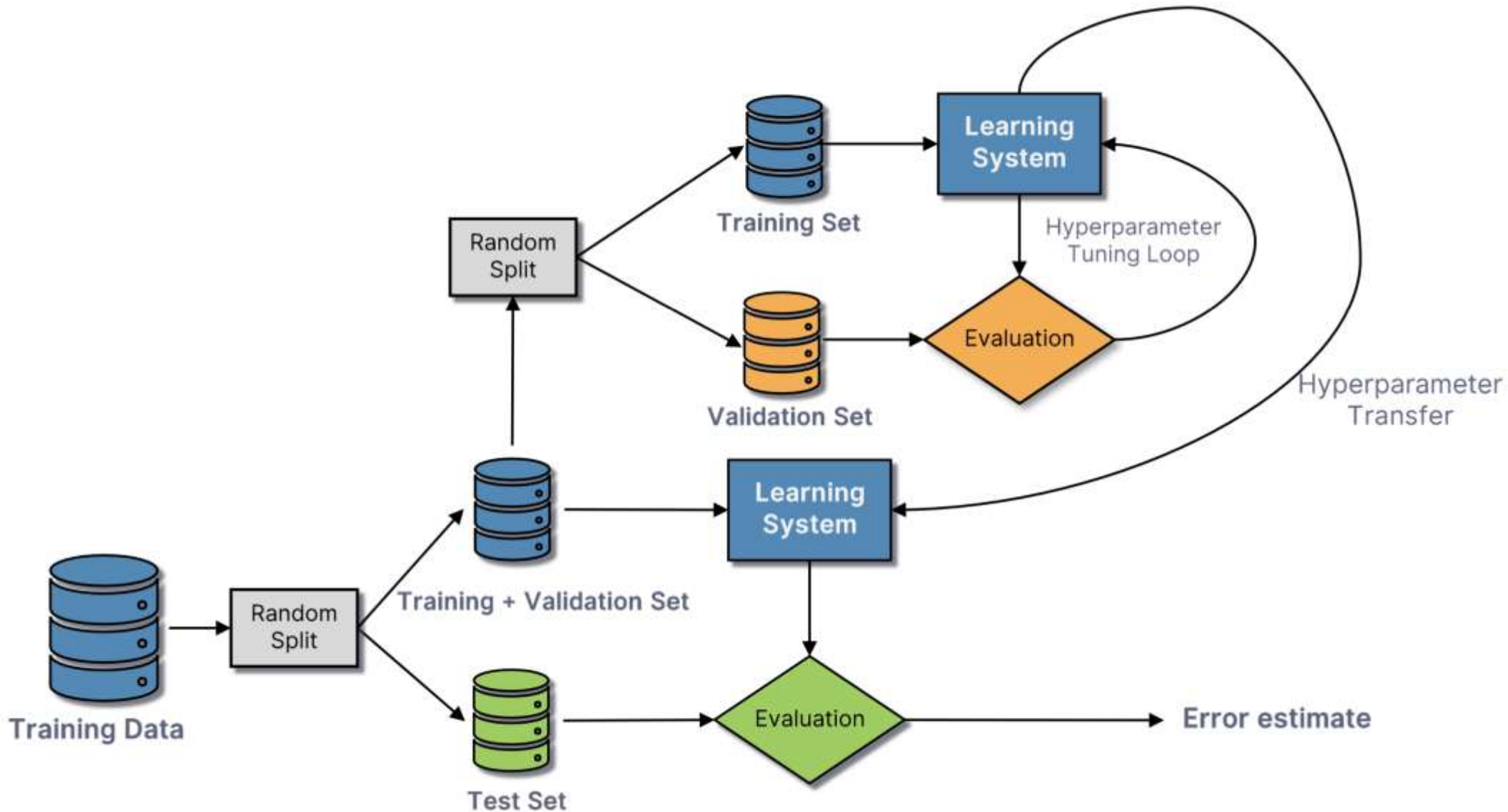
- Pentru a construi un model cât mai performant, trebuie să îl testăm pe date “necunoscute”
  - O posibilă abordare (atunci când avem la dispoziție multe date):
    - 50% exemple pentru antrenare
    - 25% exemple pentru validare
    - 25% exemple pentru testare
- (procentele pot să varieze)



# De ce nu este suficient să împărțim datele în train și test?

- Utilizarea repetată a unei împărțiri atunci când încercăm diverși hiperparametrii poate să “uzeze” setul de test:
  - **Ajungem la overfitting în spațiul hiperparametrilor!**
- Obținem o estimare mai bună a erorii dacă tunăm hiperparametrii pe un set diferit, anume setul de validare

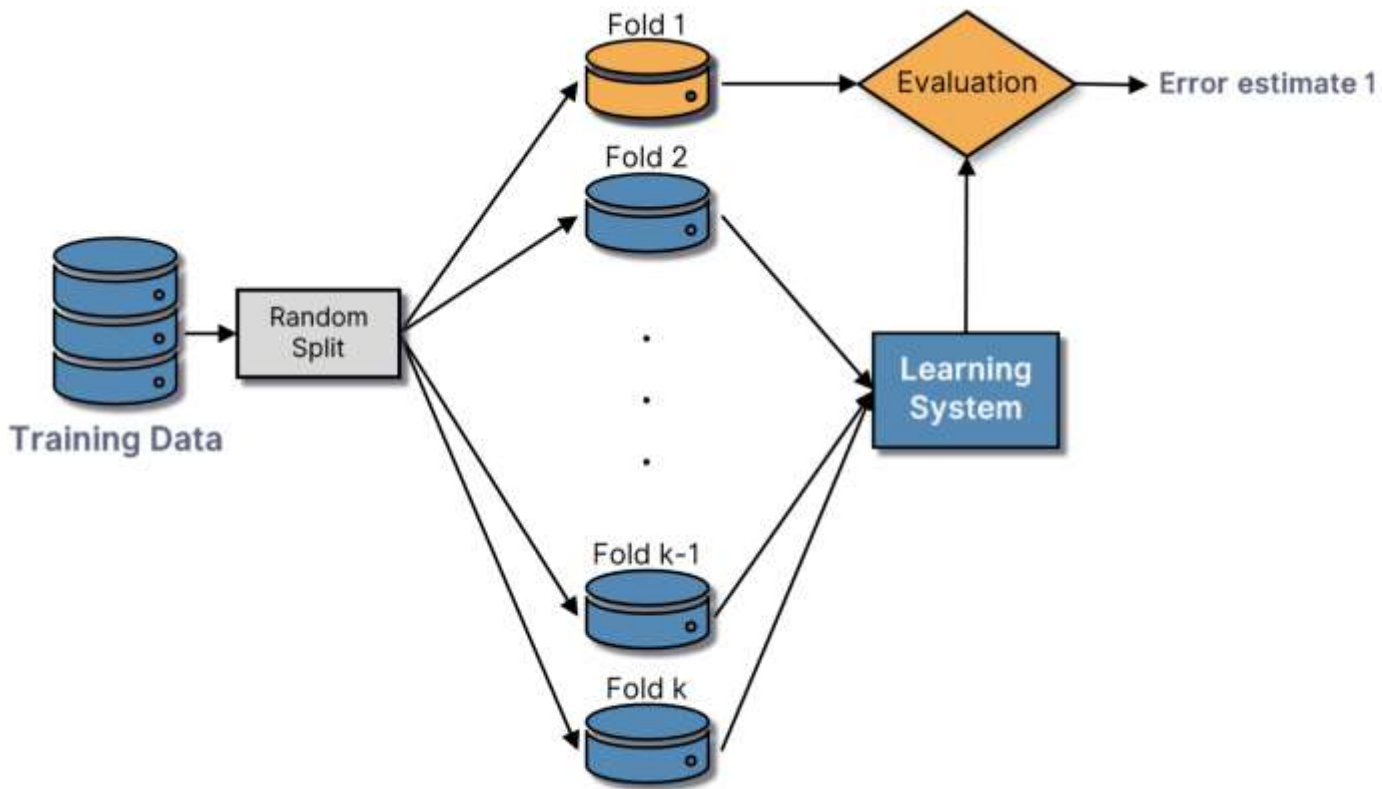
# Training, validation, test



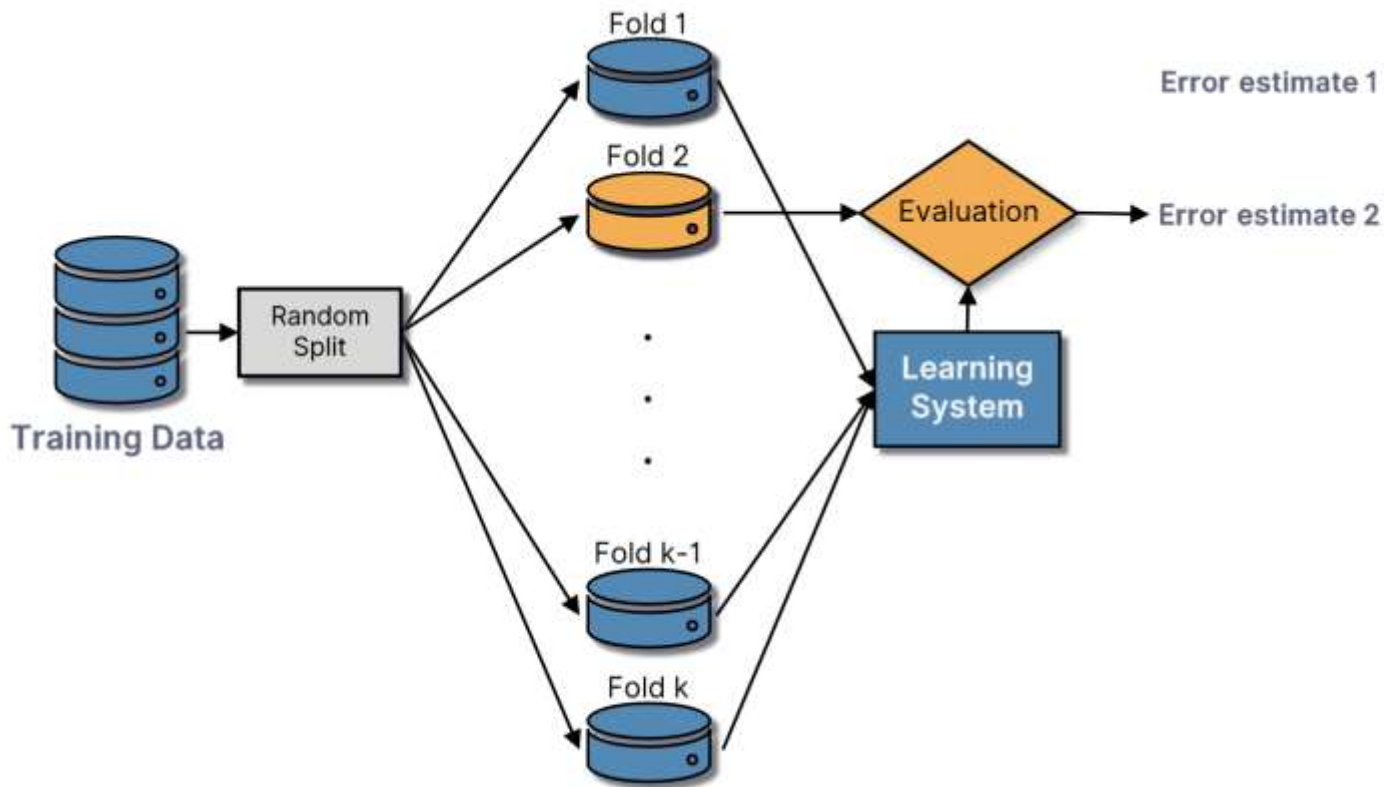
# Cross-validation

- O altă abordare (funcționează bine cu data puține):
  - Împărțim datelor în  $k$  părțile egale (fold-uri)
  - Antrenăm pe  $k-1$  fold-uri și testăm pe fold-ul dat deoparte
  - Repetăm de  $k$  ori
  - Calculăm media rezultatelor
- Atunci când numărul de fold-uri este egal cu numărul de exemple:
  - Leave-one-out cross-validation

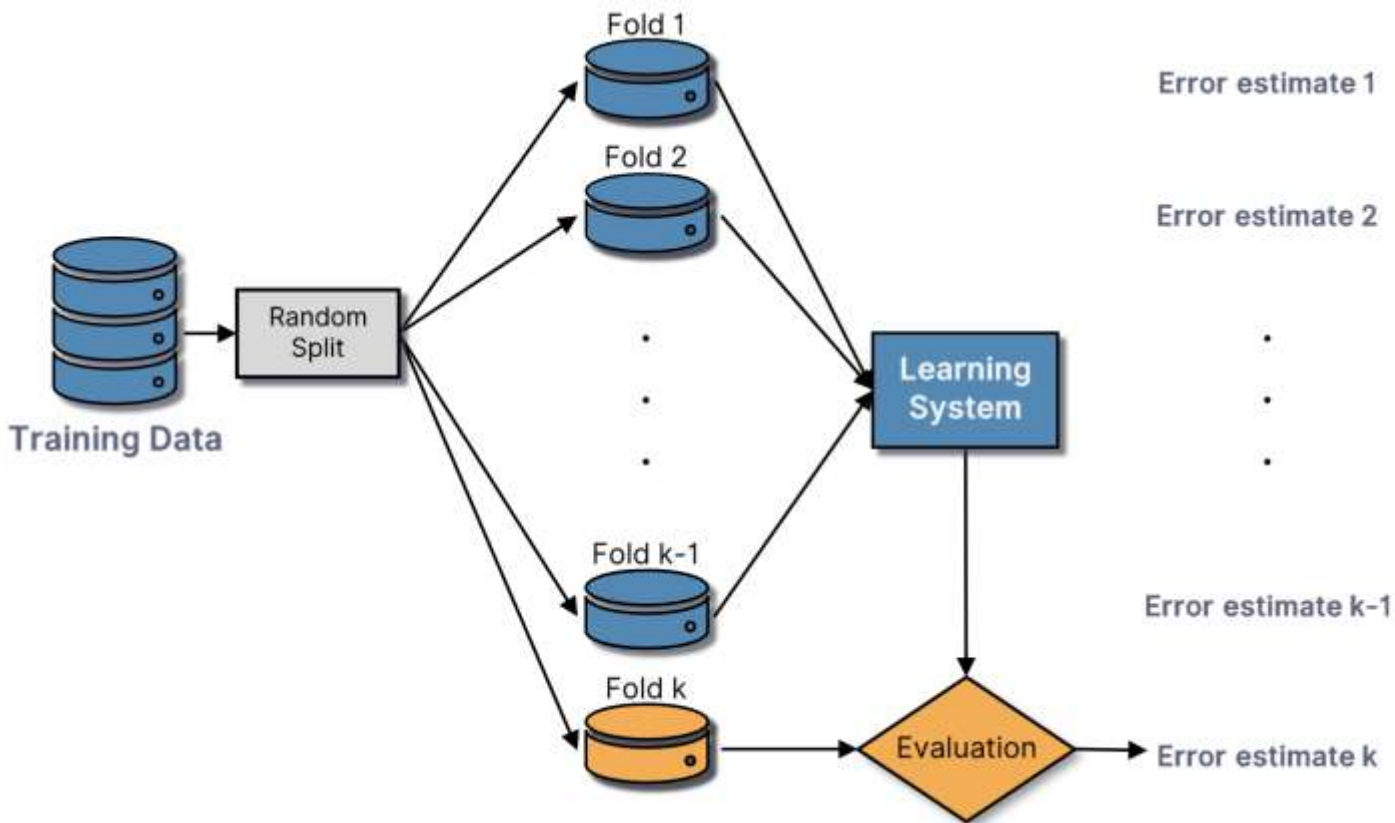
# Cross-validation



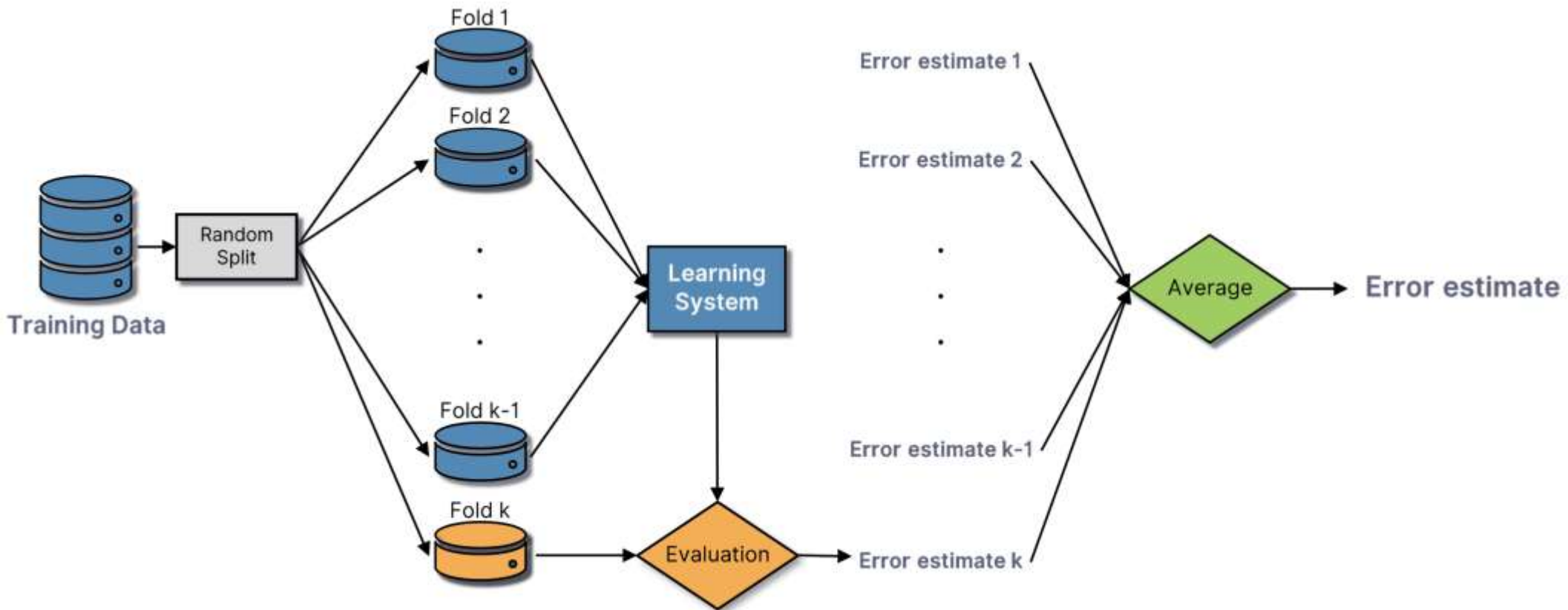
# Cross-validation



# Cross-validation



# Cross-validation



# Îmbunătățirea capacității de generalizare

## Early stopping

- Oprirea învățării atunci când observăm că eroarea pe validare începe să crească

## Regularizare

- Adăugarea unui termen care să penalizeze complexitatea funcției de învățare, impunând restricții de netezire sau limite asupra normei vectorului de ponderi

$$\min_f \sum_{i=1}^n V(f(\hat{x}_i), \hat{y}_i) + \lambda R(f)$$



Evaluare performanței

# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

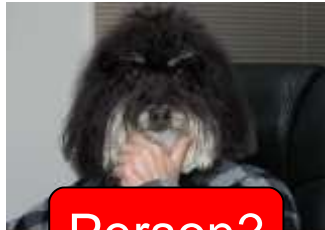
- Măsurăm acuratețea / eroarea pe datele de test:



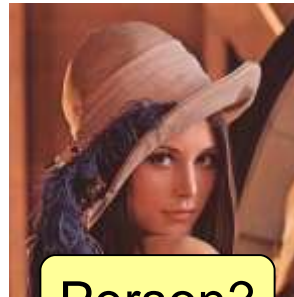
Car?



Person?



Person?



Person?



Dog?



Dog?

- Acuratețea: 4 corecte din 6 = 66.67%
- Eroarea: 2 greșite din 6 = 33.33%

# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

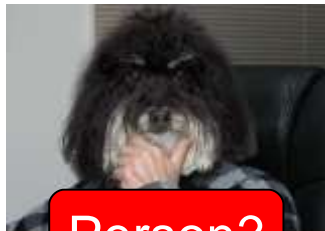
- Construim matricea de confuzie



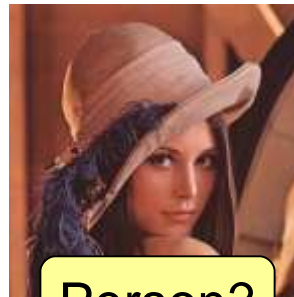
Car?



Person?



Person?



Person?



Dog?



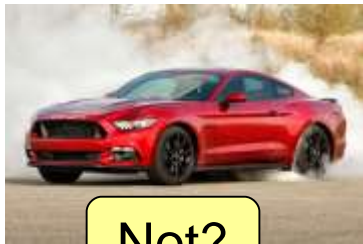
Dog?

- Acuratețea: suma elementelor de pe diagonală principală supra numărul de componente diferite de zero (4/6)
- Eroarea: suma elementelor rămase în afara diagonalei supra numărul de componente diferite de zero (2/6)

Predicted Actual	Car	Dog	Person
Car	1	1	0
Dog	0	1	1
Person	0	0	2

# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

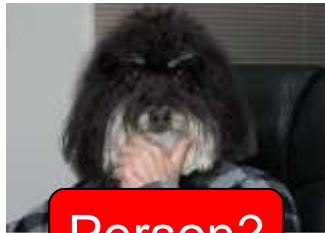
- Matricea de confuzie în cazul binar



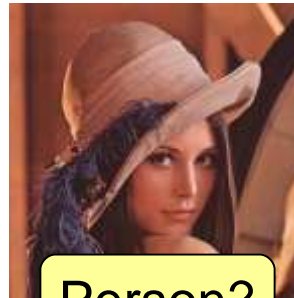
Not?



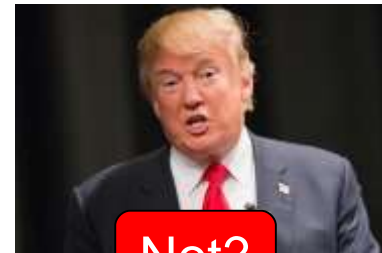
Person?



Person?



Person?



Not?



Not?

	Predicted YES	Predicted NO
Actual YES	True Positive	False Negative
Actual NO	False Positive	True Negative

# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

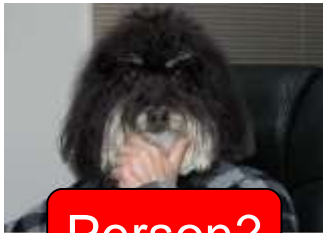
- Matricea de confuzie în cazul binar



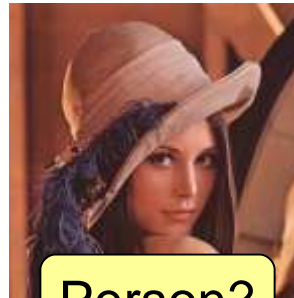
Not?



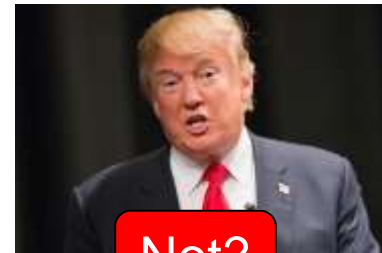
Person?



Person?



Person?



Not?



Not?

	Predicted YES	Predicted NO
Actual YES	2	False Negative
Actual NO	False Positive	True Negative

# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

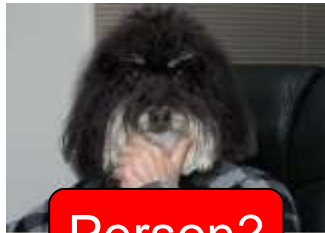
- Matricea de confuzie în cazul binar



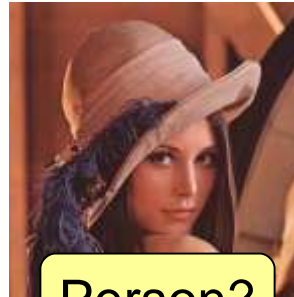
Not?



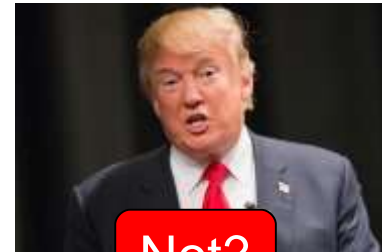
Person?



Person?



Person?



Not?



Not?

	Predicted YES	Predicted NO
Actual YES	2	1
Actual NO	False Positive	True Negative

# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

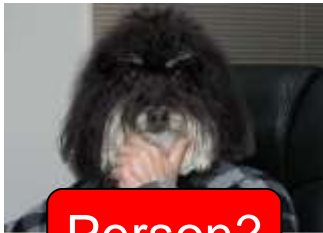
- Matricea de confuzie în cazul binar



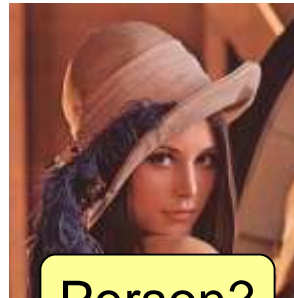
Not?



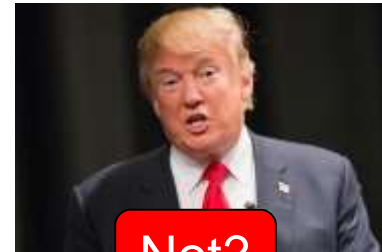
Person?



Person?



Person?



Not?



Not?

	Predicted YES	Predicted NO
Actual YES	2	1
Actual NO	1	True Negative



# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

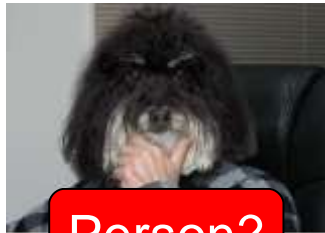
- Matricea de confuzie în cazul binar



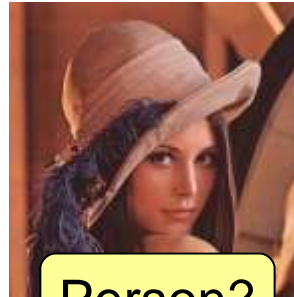
Not?



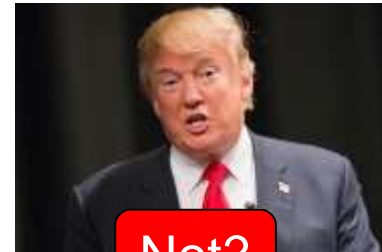
Person?



Person?



Person?



Not?



Not?

	Predicted YES	Predicted NO
Actual YES	2	1
Actual NO	1	2



# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

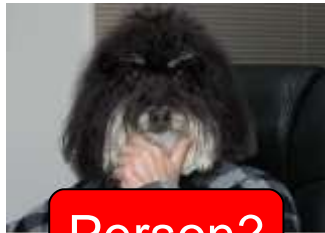
- Calculul măsurilor Precision și Recall



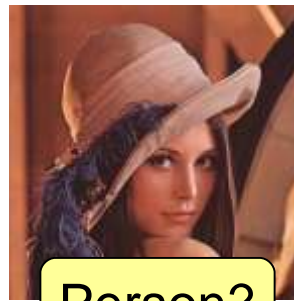
Not?



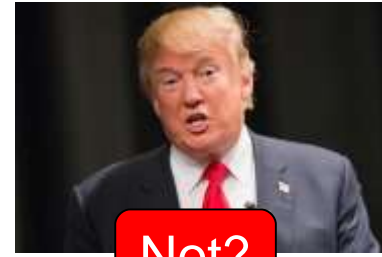
Person?



Person?



Person?



Not?



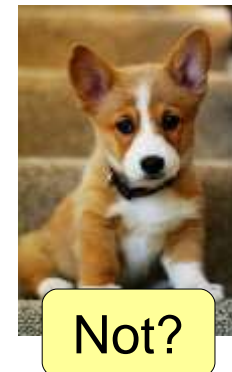
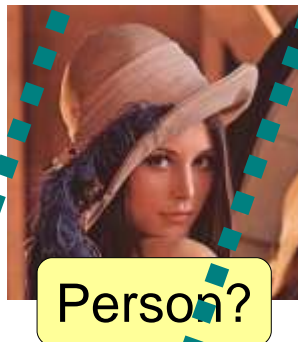
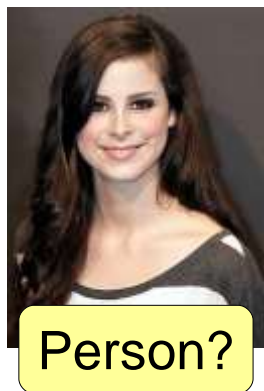
Not?

- $\text{Precision} = \text{TP} / (\text{TP} + \text{FP})$   
 $= 66.67\%$
- $\text{Recall} = \text{TP} / (\text{TP} + \text{FN})$   
 $= 66.67\%$

	Predicted YES	Predicted NO
Actual YES	2	1
Actual NO	1	2

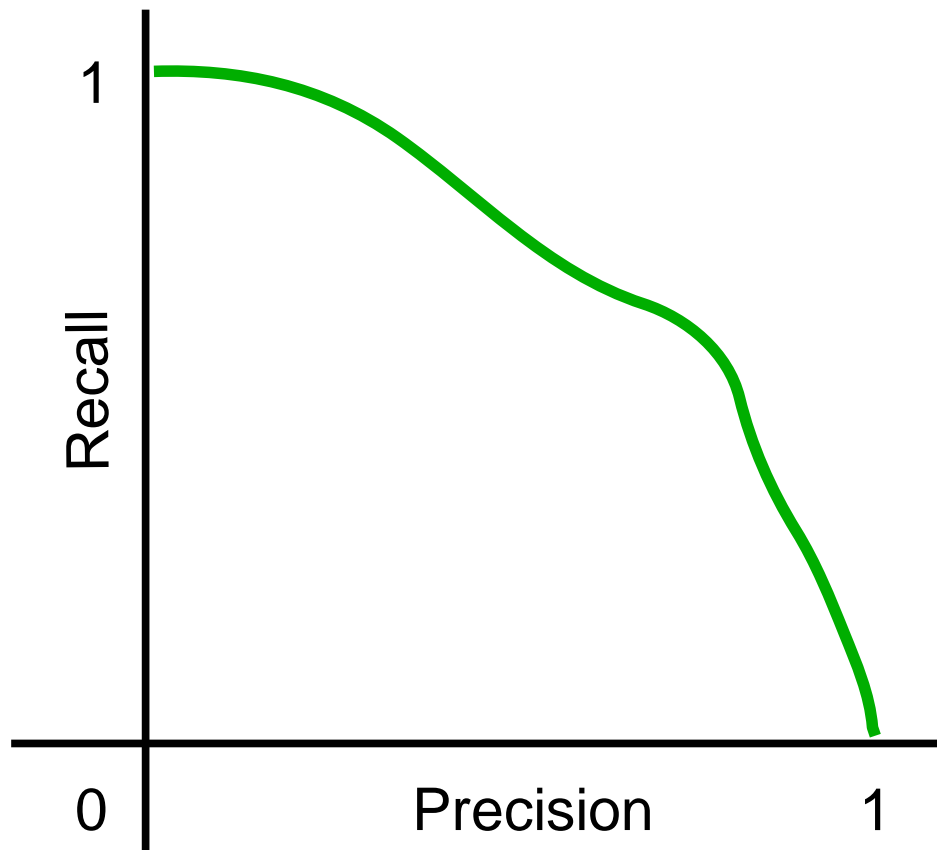
# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

- Curba Precision-Recall



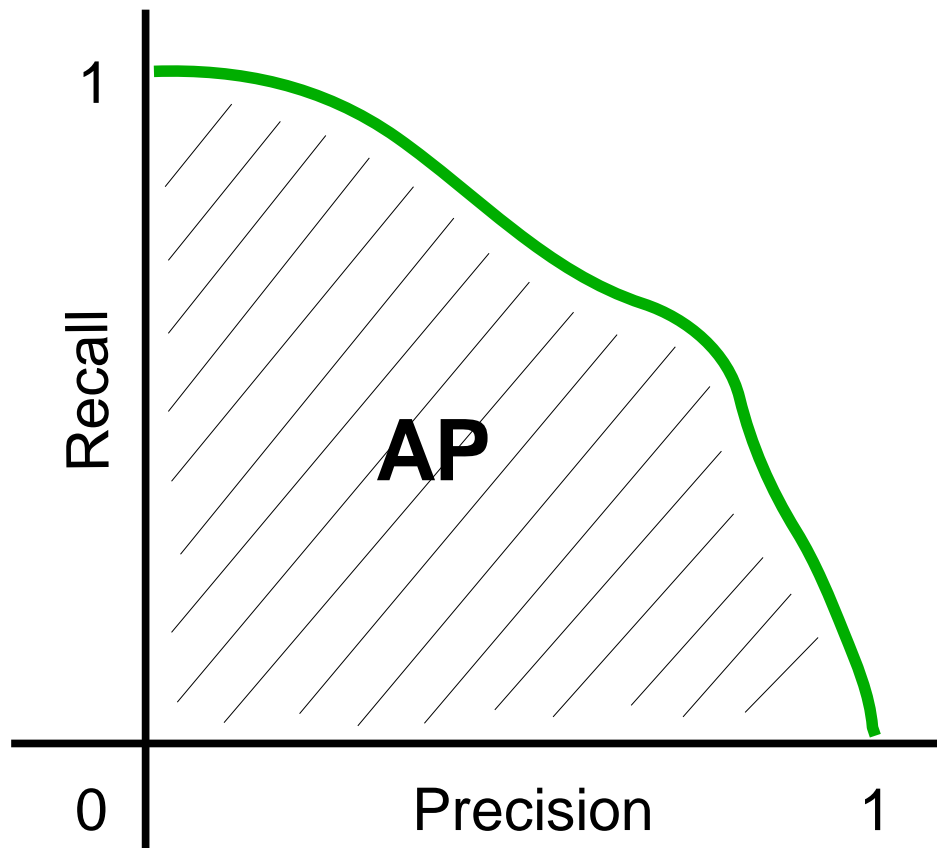
# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

- Curba Precision-Recall



# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

- Average Precision



# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

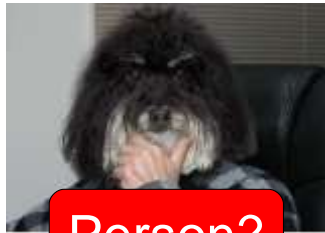
- Calculul măsurilor TPR și FPR



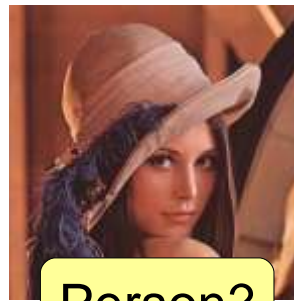
Not?



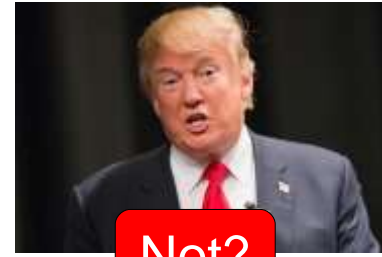
Person?



Person?



Person?



Not?



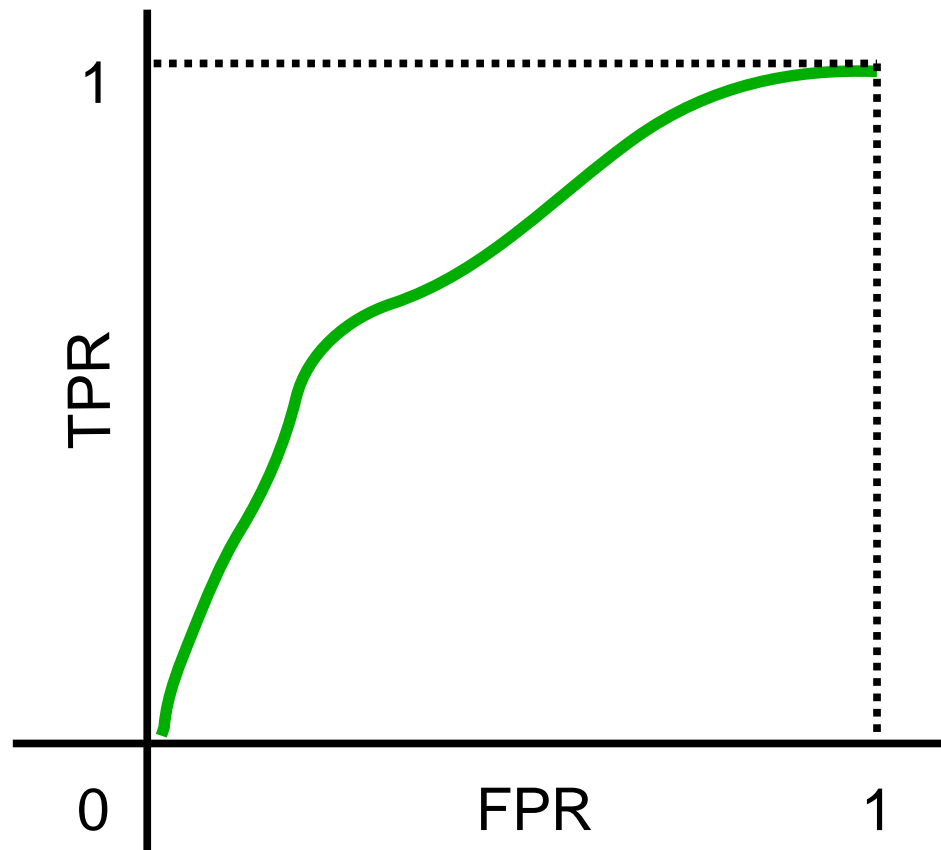
Not?

- $TPR = TP / (TP + FN)$   
 $= 66.67\%$
- $FPR = FP / (FP + TN)$   
 $= 33.33\%$

	Predicted YES	Predicted NO
Actual YES	2	1
Actual NO	1	2

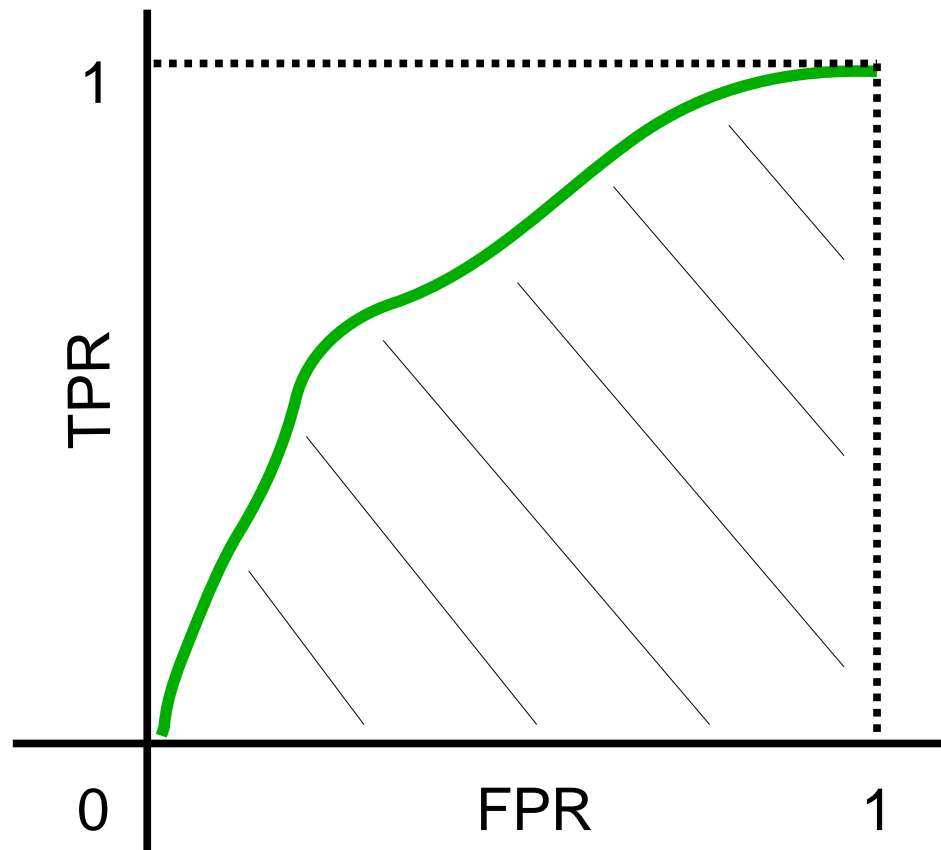
# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

- Curba ROC (Receiver Operating Characteristic)



# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

- Măsura AUC: Aria de sub curba ROC



# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

- Măsura  $F_\beta$

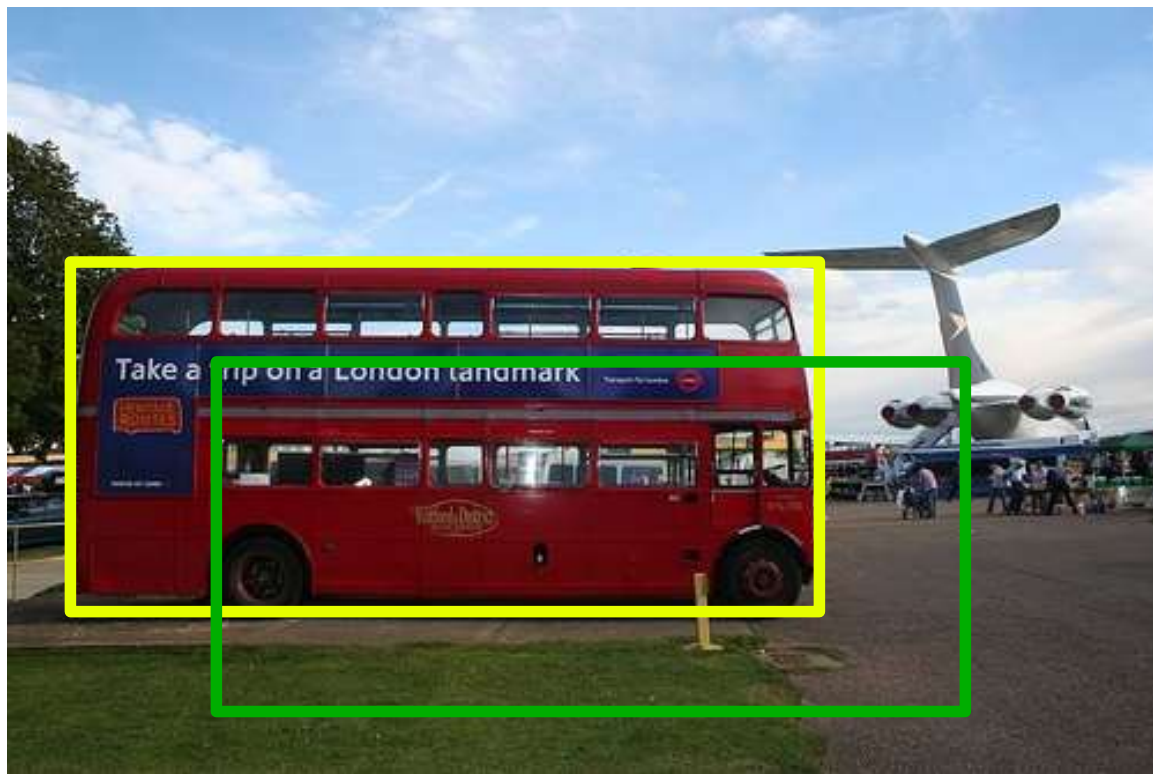
$$F_\beta = (1 + \beta^2) \cdot \frac{\text{precision} \cdot \text{recall}}{(\beta^2 \cdot \text{precision}) + \text{recall}}$$

- Măsura  $F_1$  este poate cea mai folosită măsură de tipul  $F_\beta$



# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

- Intersecție supra Reuniune (indexul Jaccard)



# Cum evaluăm un sistem de învățare automată?

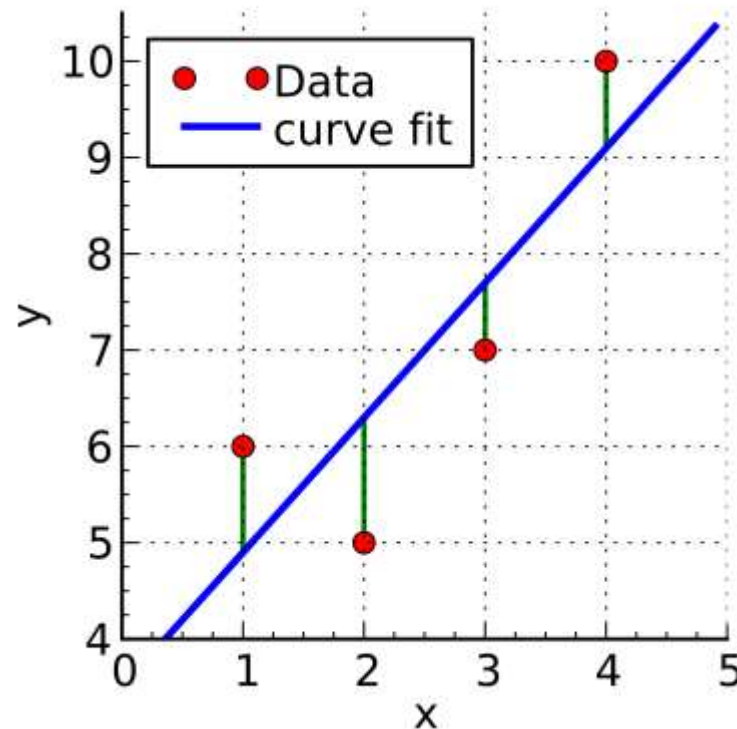
- Intersecție supra Reuniune (indexul Jaccard)
- Detecție corectă dacă  $J(A,B) > 0.5$



# Cum evaluăm un sistem de regresie?

- Media pătratelor erorilor (MSE)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2$$



# Cum evaluăm un sistem de regresie?

- Ordinea dificultății conform oamenilor



- Ordinea dificultății prezisă de sistem



# Cum evaluăm un sistem de regresie?

- Corelația Kendall Tau:

$$\tau_a = \frac{P - Q}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

- Măsură ordinală bazată pe perechi concordante (P) și discordante (Q)

$$P = |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, (x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0\}|$$

$$Q = |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, (x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0\}|$$

# Cum evaluăm un sistem de regresie?

- Ordinea dificultății conform oamenilor



- Concordantă cu ordinea prezisă de sistem





# Cum evaluăm un sistem de regresie?

- Ordinea dificultății conform oamenilor



- Discordantă cu ordinea prezisă de sistem



# Cum evaluăm un sistem de regresie?

- Cât este corelația Kendall Tau?



- $P = ?$ ,  $Q = ?$





# Cum evaluăm un sistem de regresie?

- Cât este corelația Kendall Tau?



- $P = 7$ ,  $Q = 3$ , Kendall Tau =  $(7-3) / 10 = 0.4$

