CURS 3

Operația algebrică internă

- Operație algebrică internă = lege de compoziție

$\varphi: M \times M \to M$, $(x, y) \to \varphi(x, y)$

ex: $s: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$s(x, y) = x + (-y) = x - y$ scăderea e operație algebrică

ex: $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f: M \to M\}$
$g \circ f: M \to M$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ex: $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$
$(X, Y) \to X \cup Y$; $X, Y \in \mathcal{P}(M)$
$(X, Y) \to X \cap Y$; $X, Y \in \mathcal{P}(M)$

- $\varphi: M \times M \to M$ operație alg.; $\varphi(x, y) \equiv x * y \equiv x \circ y \equiv x \perp y$
- Scrierea aditivă: $\varphi(x, y) = x + y$
- Scrierea multiplicativă: $\varphi(x, y) = xy$
- Asociativitatea: $\varphi: M \times M \to M$, $M \neq \emptyset$
  $\forall x, y, z \in M \Rightarrow \varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z)$
- Comutativitatea: $\varphi: M \times M \to M$, $M \neq \emptyset$
  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- Element neutru: $\varphi: M \times M \to M$, $M \neq \emptyset$
  $\exists e \in M$ a.î. $\varphi(x, e) = \varphi(e, x) = x$
- Element simetrizabil: $\varphi: M \times M \to M$, $M \neq \emptyset$
  $\exists x' \in M$ a.î. $\varphi(x, x') = \varphi(x', x) = e$
- Fie $M \neq \emptyset$, $\varphi: M \times M \to M$, asoc. și e = el. neutru $\Rightarrow$ el. sim. unic
- $[a] \in \mathbb{Z}_m$ este inversabil (clase) $\Leftrightarrow$ a e prim cu m

$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \dots [m-1]\}$

Monoizi

- **Monoid** = mulț. nevidă, asoc, el. neutru (± comutativ)

ex. $(\mathcal{F}(M), \circ)$ monoid, $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to M\}$
$(\mathcal{P}(M), \cup)$ sau $(\mathcal{P}(M), \cap)$ monoizi comutativi

- **Morfism de monoizi** : (multiplicativ)

M, N - monoizi ; $f : M \to N$ a.î.
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \ \forall x, y \in M$
- $f(e) = e'$, unde e = el. n. M și e' = el. n. N

ex. $(\mathcal{P}(M), \cup)$ și $(\mathcal{P}(M), \cap)$, $g : (\mathcal{P}(M), \cap) \to (\mathcal{P}(M), \cup)$
$g(X) = C_M X$
$g(X \cap Y) = C_M(X \cap Y) = C_M X \cup C_M Y = g(X) \cup g(Y)$
$g(M) = C_M M = \emptyset$

- **Compunerea ~~morfismelor~~ morfismelor de monoizi**:

M, N, P monoizi, $f : M \to N$, $g : N \to P$ morfisme de monoizi

$(g \circ f)(xy) = g(f(xy)) = g(f(x) \cdot f(y)) = g(f(x)) \cdot g(f(y)) = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y)$

$(g \circ f)(e) = g(f(e)) = g(e') = e''$

- Compunerea morf. de mon. e asoc.

- M - monoid, fid 1_M a mulț. M e morfism de monoizi

$x, y \in M \Rightarrow 1_M(xy) = xy = 1_M(x) \cdot 1_M(y)$ și $1_M(e) = e$

- **Izomorfisme de monoizi**:

$f : M \to N$ morfism de monoizi
$g : N \to M$ a.î. $f \circ g = 1_N$ și $g \circ f = 1_M$
$\Rightarrow$ izomorfism de monoizi

- $M \cong N$ M izomorf cu N

- Izomorfismul = rel. de echivalență :
  - $\forall M$ monoid, $1_M : M \to M$ e izomorfism cu el însuși

- N, M - monoid ; $M \cong N \Leftrightarrow N \cong M$
- $M \cong N$, $N \cong P \Rightarrow M \cong P$

- $f: M \to N$ morfism de monoizi $\Rightarrow$ f izo. $\Leftrightarrow$ f bij
- Produs direct al monoizilor M_1 și M_2 monoizi comutativi $\Rightarrow$

$\Rightarrow M$ = monoid comutativ , unde $M = M_1 \times M_2$

$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$

- $M = \prod M_i$, $i \in I$; $(x_i)_{i\in I} (y_i)_{i \in I} = (x_i y_i)_{i \in I}$
- Cuvânt de elemente = ~~un~~ șist. finit din A $= a_1 a_2 a \dots a_r$
- Mulțimea $L(A)$ a cuv. de el. $\Rightarrow$ (multiplicativ) α, β :

$\alpha\beta = a_1 a_2 \dots a_r b_1 b_2 \dots b_s$ (asoc) are el. n. cuvântul „vid"

format din submulț. vidă a lui A $\Rightarrow L(A)$ monoid liber

- Dacă $A = \{a\} \Rightarrow$ monoidul liber $L(A) \cong \mathbb{N}$ (aditiv)

T Fie A cu $L(A)$ mon. liber | $\Rightarrow$ unic morf. $\bar{f}: L(A) \to M$ a.î.

M - mon , $f: A \to M$ | $\bar{f} \circ i_A = f$, unde $i_A : A \to L(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ incluziune canonică a lui A în $L(A)$.

(propr. de universalitate a mon. liber)

T Corolar

A, A' mulțimi $\Rightarrow f: A \to A'$ f bij. $\Rightarrow \exists$ unic izomorfism de

monoizi $\bar{f}: L(A) \to L(A')$ a.î. $\bar{f} \circ i_A = i_{A'} \circ f$, unde $i_A : A \to L(A)$

e o incluziune canonică a lui A în $L(A)$, iar $i_{A'} : A' \to L(A')$

e incluziunea canonică a lui A' în $L(A')$.