CURS 8

SEMANTICĂ

- $\mathcal{L}$ = limbaj ordin întâi și $\mathcal{A}$ e o $\mathcal{L}$-structură
- $e: V \to A$ evaluare a var lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.
- Interpretarea termenilor

$t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ interpretarea term. t sub evaluarea e

- dacă $t = x \in V \Rightarrow t^{\mathcal{A}}(e) = e(x)$
- dacă $t = c \in \mathcal{C} \Rightarrow t^{\mathcal{A}}(e) = c^{\mathcal{A}}$
- dacă $t = f(t_1 \dots t_m) \Rightarrow t^{\mathcal{A}}(e) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e) \dots t_m^{\mathcal{A}}(e))$

- Negația & implicația: $\left[\begin{array}{l} (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e) \\ (\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e) \end{array}\right.$

- $x \in V$ și $a \in A$

$e_{x \mapsto a}: V \to A$, $e_{x \mapsto a}(v) = \begin{cases} e(v) & ; v \neq x \\ a & ; v = x \end{cases}$

- Interpretarea formulelor

$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & ; \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \ \forall a \in A \\ 0 & ; \text{altfel} \end{cases}$

- φ formulă $\left[\begin{array}{l} e \text{ satisface } \varphi \text{ în } \mathcal{A} \text{ dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\ e \text{ nu satisface } \varphi \text{ în } \mathcal{A} \text{ dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ \mathcal{A} \nvDash \varphi[e] \end{array}\right.$

- Corolar:

Pt. orice φ, ψ formule și x var.

- $\mathcal{A} \vDash (\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$
- $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ implică $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
- $\mathcal{A} \vDash (\forall x\, \varphi)[e] \iff$ pt $\forall a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}]$

- φ, ψ formule și x variabilă
  - $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$
  - $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$
  - $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$
  - $(\exists x\, \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \exists a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

- Corolar:
  - $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
  - $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
  - $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
  - $\mathcal{A} \vDash (\exists x\, \varphi)[e] \iff \exists a \in \mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}]$

- φ satisfiabilă dacă $\exists\, \mathcal{A} = \mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \Rightarrow (\mathcal{A}, e)$ model al lui φ

- φ adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $= \mathcal{A}$ dacă pt $\forall e : V \to A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A}$ satisface φ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi$

- φ formulă universal adevărată / logic validă dacă $\forall\, \mathcal{A} = \mathcal{L}$-structură $\Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi$

- $\varphi \iff \psi$ dacă $\forall\, \mathcal{A} = \mathcal{L}$-structură și $\forall e : V \to A \Rightarrow$
  $\Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e]$

Notație echiv. logic: $\varphi \vDash\dashv \psi$

- $\varphi \vDash \psi$, ψ consecința semantică a lui φ, $\forall \mathcal{A} = \mathcal{L}$-struct. și $\forall e: V \to A \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \psi[e]$
- Observații: $\left[\begin{array}{l} \varphi \vDash \psi \Leftrightarrow \vDash \varphi \to \psi \\ \varphi \vDash\dashv \psi \Leftrightarrow (\psi \vDash \varphi \land \varphi \vDash \psi) \Leftrightarrow \vDash \psi \leftrightarrow \varphi \end{array}\right.$
- φ, ψ formule și x, y variabile:
  - $\neg \exists x \varphi \vDash\dashv \forall x \neg \varphi$
  - $\neg \forall x \varphi \vDash\dashv \exists x \neg \varphi$
  - $\forall x (\varphi \land \psi) \vDash\dashv \forall x \varphi \land \forall x \psi$
  - $\forall x \varphi \lor \forall x \psi \vDash \forall x (\varphi \lor \psi)$
  - $\exists x (\varphi \land \psi) \vDash \exists x \varphi \land \exists x \psi$
  - $\exists x (\varphi \lor \psi) \vDash\dashv \exists x \varphi \lor \exists x \psi$
  - $\forall x (\varphi \to \psi) \vDash \forall x \varphi \to \forall x \psi$
  - $\exists x (\varphi \to \psi) \vDash \exists x \varphi \to \exists x \psi$
  - $\forall x \varphi \vDash \exists x \varphi$
  - $\varphi \vDash \exists x \varphi$
  - $\forall x \varphi \vDash \varphi$
  - $\forall x \forall y \varphi \vDash\dashv \forall y \forall x \varphi$
  - $\exists x \exists y \varphi \vDash\dashv \exists y \exists x \varphi$
  - $\exists y \forall x \varphi \vDash \forall x \exists y \varphi$
- $\forall$ s, t, u termeni → $\vDash t = t$
  → $\vDash s = t \to t = s$
  → $\vDash s = t \land t = u \to s = u$

- Γ satisfiabilă dacă $\exists$ $\mathcal{A}$ = $\mathcal{L}$-structură ~~și~~ o $e: V \to A$ a.î. $\mathcal{A} \models \gamma[e]$ $\forall \gamma \in \Gamma$ $\Rightarrow$ $(\mathcal{A}, e)$ model al lui Γ
- φ consecință semantică a lui Γ $\Rightarrow$ $\forall$ $\mathcal{A}$ = $\mathcal{L}$-struct și $\forall$ $e: V \to A$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A} \models \Gamma[e] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$, $\Gamma \models \varphi$
- x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ și $\exists$ $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. $\varphi_i \dots \varphi_j$ este de forma $\forall x \psi$
- x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar nu apare legată pe poz. k în φ
- x = variabilă legată a lui φ dacă $\exists$ k a.î. x apare leg. pe poziția k în φ
- x = var. liberă a lui φ dacă $\exists$ k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ
- $FV(\varphi)$ = mulțimea var libere ale lui φ
- $\forall$ $\mathcal{A}$ = $\mathcal{L}$-structură și $\forall$ $e_1, e_2 : V \to A$, $\forall$ t termen dacă $e_1(v) = e_2(v)$ $\forall v \in Var(t)$ $\Rightarrow$ $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$
- $\forall$ $\mathcal{A}$ = $\mathcal{L}$-structură , $\forall$ $e_1, e_2 : V \to A$, $\forall$ φ formulă dacă $e_1(v) = e_2(v)$ $\forall v \in FV(\varphi)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$
- $\forall$ φ, ψ formule și $\forall$ $x \notin FV(\varphi)$ variabilă
  - $\varphi \vDash\!\dashv \exists x \varphi$
  - $\varphi \vDash\!\dashv \forall x \varphi$
  - $\forall x (\varphi \wedge \psi) \vDash\!\dashv \varphi \wedge \forall x \psi$
  - $\forall x (\varphi \vee \psi) \vDash\!\dashv \varphi \vee \forall x \psi$

- $\exists x (\varphi \wedge \psi) \vDash\!\dashv \varphi \wedge \exists x \psi$
- $\exists x (\varphi \vee \psi) \vDash\!\dashv \varphi \vee \exists x \psi$
- $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \vDash\!\dashv \varphi \rightarrow \forall x \psi$
- $\exists x (\varphi \rightarrow \psi) \vDash\!\dashv \varphi \rightarrow \exists x \psi$
- $\forall x (\psi \rightarrow \varphi) \vDash\!\dashv \exists x \psi \rightarrow \varphi$
- $\exists x (\psi \rightarrow \varphi) \vDash\!\dashv \forall x \psi \rightarrow \varphi$

- Enunț = φ formulă dacă $FV(\varphi) = \emptyset \Leftrightarrow \varphi$ nu are var. libere
- $Sent_{\mathcal{L}}$ = mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$
- φ enunț, $\forall e_1, e_2 : V \rightarrow A \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$
- $\mathcal{A}$ = $\mathcal{L}$-structură model al φ = enunț dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ $\forall e : V \rightarrow A$
- φ enunț al $\mathcal{L}$; Γ mulțime enunțuri
  - Γ satisfiabilă $\Leftrightarrow \exists\ \mathcal{A}$ = $\mathcal{L}$-structură a.î. $\mathcal{A} \vDash \gamma$ $\forall \gamma \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \Gamma$
  - $\Gamma \vDash \varphi \Leftrightarrow \forall\ \mathcal{A}$ = $\mathcal{L}$-structură $\Rightarrow \mathcal{A} \vDash \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi$
- $Mod(\Gamma)$ = clasa modelelor lui Γ (enunț)
- Lema:
  - $\Gamma \vDash \psi \Leftrightarrow Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$
  - $\Gamma \subseteq \Delta \Leftrightarrow Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$
  - Γ satisfiabilă $\Leftrightarrow Mod(\Gamma) \neq \emptyset$

unde Γ, Δ = mulț. enunțuri și ψ enunț