Temă de vacanță

Structuri algebrice în informatică - Grupa 131

December 28, 2022

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și G un grup cu $2n$ elemente, astfel încât G are exact n elemente de ordin 2.

(a) Arătați că n este număr impar. (**5 puncte**)

(b) Arătați că G conține un subgrup de ordin n. (**10 puncte**)

(c) Arătați că subgrupul găsit la punctul (b) este comutativ. (**10 puncte**)

Problema 2. Fie $K = \mathbb{Z}_5$ și $I := (X^2 + \hat{2})K[X]$ idealul generat de polinomul $X^2 + \hat{2}$ în $K[X]$. Arătați că inelul factor $\dfrac{K[X]}{(X^2 + \hat{2})K[X]}$ nu conține divizori ai lui zero în afară de $0 + I$. (**25 puncte**)

Indicație de redactare: pentru simplitate, puteți să notați clasele de resturi precum numerele din $\mathbb{Z}$ *(de exemplu* $\hat{2} = 2$*) pentru a lăsa notația ”* $\widehat{\cdot}$ *” liberă pentru clasele de polinoame din* $\frac{K[X]}{I}$.

Problema 3. Fie $\mathbb{Z}[i]$ inelul $\{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ cu adunarea și înmulțirea uzuale (moștenite de la corpul numerelor complexe). Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ două numere **coprime**. Fie $I = (x + iy)\mathbb{Z}[i]$ idealul generat de elementul $x + iy$. Găsiți o condiție necesară și suficientă asupra numărului complex $x + iy$ pentru ca inelul factor $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(x + iy)\mathbb{Z}[i]}$ să fie corp și demonstrați că această condiție este necesară și suficientă. (**25 puncte**)

Sugestie: folosiți faptul că x *și* y *sunt coprime dacă și numai dacă există* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* $\alpha x + y\beta = 1$.

Problema 4. Fie $\mathbb{R}[X, Y]$ inelul de polinoame cu coeficienți reali în două nedeterminate (de exemplu, $\pi, XY, \frac{1}{2}X^2 + \sqrt{\pi}Y^5, X + 1.323X^2Y^7 + Y^4$ sunt toate elemente din $\mathbb{R}[X, Y]$).

Fie $\varphi : \mathbb{R}[X, Y] \to \mathbb{R}[T]$, $\varphi(f)(T) \overset{\text{def}}{=} f(T^2, T)$. (de exemplu, dacă $f = X^3Y + Y^2$, atunci $\varphi(f) = T^7 + T^2$).

Fie $I = (Y^2 - X)\mathbb{R}[X, Y]$ idealul generat de polinomul $Y^2 - X$.

(a) Arătați că φ este morfism de inele. (**5 puncte**)

(b) Arătați că $I \subset \ker \varphi$. (**5 puncte**)

(c) Arătați că $\ker \varphi \subset I$. (**15 puncte**)

Observație despre toate problemele: În cazul în care definiți funcții între inele în cadrul unei demonstrații care necesită ca acestea să fie morfisme de inele, demonstrația nu se va lua în considerare decât dacă arătați că funcțiile definite sunt într-adevăr morfisme de inele.