CURS 6

RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ PE UN GRUP ÎN RAPORT CU UN SUBGRUP AL SĂU

- G grup, H subgrup al lui G
- R_H^s = relație de echivalență / congruență la stânga
- R_H^d = rel. de echiv / congruență la dreapta
- $x \equiv_s y \pmod H$ => x congruent cu y modulo H la stânga
  => x e în relația R_H^s cu y.
- $x \equiv_d y \pmod H$ => x congruent cu y modulo H la dreapta
  => x e în relația R_H^d cu y
- $[x]_s$ = „clasa de echiv. la stg. a el. x în rap cu R_H^s" $= C^s$
- $[x]_d$ = „clasa de echiv la dr. a el x în rap. cu R_H^d" $= C^d$
- G/R_H^s și G/R_H^d sunt mulțimile factor la stg și la dr
- $A = \{a\}$ și $B = \{b\}$, unde A și B = submulț. ale lui G

  $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$

  $aB = \{ab \mid b \in B\}$

  $Ab = \{ab \mid a \in A\}$

- Lema

  G = grup și H = subgrup al său ; $x \in G$

  $[x]_s = xH$ și $[x]_d = Hx$

- $[e]_s = eH = H = He = [e]_d$

- $\varphi : G/R_H^s \to G/R_H^d$ cu $\varphi(xH) = Hx^{-1}$ e bij

dacă G/R_H^s sau G/R_H^d e finită $\Rightarrow$ și cealaltă e finită sau $card(G/R_H^s) = card(G/R_H^d)$

- G = grup finit $\Rightarrow$ ord $G = |G|$ = nr. el. al lui G.

- Lema

G = grup și H = subgrup al său

$\varphi : H \to xH$ cu $\varphi(h) = xh$ e bij

(T) Teorema lui Lagrange

G = grup finit și H = subgrup al lui G

ord $G = [G:H]$ ord H

- Corolar : G = grup finit și H = subgrup al său $\Rightarrow$ ord H | ord G

- ord G = nr prim $\Rightarrow$ G nu are subgr. proprii $\Rightarrow$ G = ciclic

- G = grup abelian finit și $d \mid$ ord G $\Rightarrow \exists\, H \leq G$ cu ord $H = d$

(T) Teorema lui Cauchy: G = grup finit și p = nr prim, $p \mid$ ord G

$\exists\, H \leq G$ cu ord $H = p$

ORDINUL UNUI ELEMENT

- G = grup și $a \in G$

- subgrup ciclic generat de a: $\langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- a = de ordin finit $\Rightarrow \exists\, i, j \in \mathbb{Z}$, $i \neq j$ a.î. $a^i = a^j$

- a = de ordin infinit $\Rightarrow$ toate puterile lui a sunt distincte

- a = el. de ord. finit și $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m = ord(a) \Rightarrow \begin{cases} a^m = e \\ a^k = e,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \mid k \end{cases}$

- a = element de ordin $m \Rightarrow \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}$
- **Corolar:** G = grup finit $\Rightarrow$ ord oricărui el $|$ ord G
- **Corolar:** G = grup finit ; ord $G = m \Rightarrow a^m = e \ \forall a \in G$

T **Teorema lui Cauchy**

G = grup finit și p = nr prim a.î. $p \mid$ ord G

Atunci $\exists a \in G$ cu ord$(a) = p$

- G = grup ; $x \in G$; x = el. de ordin $m \Rightarrow$ ord$(x^k) = m/(m,k)$
$\forall k \in \mathbb{Z}$ și $k \neq 0$