24.04.2024

Seminar 9

Spații vect. euclidiene

Forme biliniare și simetrice

Fie V/K sp. vect., $B \subset V$

(simultan)

1) O apl. $g: V \times V \to K$ s.n. formă biliniară dacă $\forall$

a) $g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 g(x_1, y) + \alpha_2 g(x_2, y)$

(lin I arg.)

b) $g(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 g(x, y_1) + \beta_2 g(x, y_2)$

(lin II arg)

2) O apl. bilin $g: V \times V \to K$ s.n. simetrică dacă

$g(x, y) = g(y, x)$

<u>Obs:</u> 1) g bilin simm $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} g \text{ lin. într-un sg. arg. (1 sau 2)} \\ g \text{ simm.} \end{cases}$

2) dc. g bilin simm $\Rightarrow$ produs scalar

Fie $g: V \times V \to K$ f.b.s., g. s.n. pozitiv definită dc.

$\begin{cases} Q(x) = g(x, x) > 0, \quad \forall x \in V \setminus \{0_V\} \\ Q(x) = g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V \end{cases}$ și

Fie $g: V \times V \to K$ f.b.s

Consider $Q: V \to K$, $Q(x) = g(x, x)$ $\Big| \Rightarrow Q$ s.n. formă pătratică

Produs scalar $\equiv$ f.b.s., poz. def

Fie $g: V\times V \to K$ f.b.s., $B = \{e_1, e_2, \dots e_m\} \subset V$

$X = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \quad Y = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j$

$g(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{m} g(e_i, e_j)\, x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, x_i y_j$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad G \overset{not}{=} (g_{ij})_{i,j=\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_n(K)$

$\hookrightarrow$ mat. f.b.s. g în rep B

Matriceal, avem: $g(X,Y) = {}^tX G Y$

Obs: $g_{ij} = g_{ji}$, i.e. $G \to$ m. sim. ${}^tG = G$

${}^tC = C^{-1} \mid C \Rightarrow C\,{}^tC = I_m$

$B \xrightarrow{C} B'$, $C =$ mat. de trecere de la B la B'

$B \downarrow G$

$B' \downarrow G' = {}^tCGC$

$g \longrightarrow Q: V \to K$, $Q(x) = g(x,x)$ f.b.g.

$Q \longrightarrow g: V\times V \to K$ f.b.

$g(x,y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]$ id. de polarizare

① $Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = \cancel{x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2}$

$= x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3 \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

a) $Q \to g$ f.b.s. asoc. lui Q (id. de polarizare folosim)

b) $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ b. can. $G_{B_0}(g)$

a) $g(x,y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)] =$

$= \frac{1}{2}[Q(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) - Q(x_1, x_2, x_3) - Q(y_1, y_2, y_3)]$

$=$ calcule acasă $=$

$= x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 -$

$- 3/2\, x_1 y_3 - 3/2\, x_3 y_1$

V2 - fără id $\to$ metoda dedublării

$$\begin{cases} x_1^2 \to x_1y_1 \\ x_2^2 \to x_2y_2 \\ x_3^2 \to x_3y_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1x_2 \rightsquigarrow 1/2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1x_3 \rightsquigarrow 1/2(x_1y_3 + x_3y_1) \\ x_2x_3 \rightsquigarrow 1/2(x_2y_3 + x_3y_2) \end{cases}$$

b) $G_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ mat. asoc. f.bs. g în rap. cu B_0

c) $B = \{v_1 = (0,1,1); v_2 = (1,0,1); v_3 = (1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$

Det. mat. asoc. f.bs. în rap. cu B $\quad G_B = ?$

$B_0 \overset{C}{\rightsquigarrow} B \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$G_{B_0} \qquad G_B = {}^tC\, G_{B_0} C$

$\overset{\parallel}{C}$ (mat. sim.)

Aducerea unei f. pătratice la o f. canonică

Dată fiind o formă □ $Q: V \to K$ spunem că Q are f. canonică în rap. cu o $B \subset V$, dacă mat. asoc. lui Q în rap. cu B are f. diag. $G_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_m & 0 \end{pmatrix}$

$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$

$\dim_K V = m$ $\qquad$ unde $r = rg(g) \to G_B$

Pt. a aduce o f. □ la o f. can. avem mai multe modalități:

1) Th Gauss

Orice f. □ pe un V poate fi adusă la f. can.

Forma normală:

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 - \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 - \dots - \lambda_r x_r^2$$

Metoda Gauss / Construcția de □

2) Metoda Jacobi

3) Metoda val. proprii (MVP)

2) $Q : V \to K$

$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} x_i x_j \quad \forall x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \quad g_{ij} = g_{ji}$

Not. $\Delta_1 = g_{11}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$ det. diag.

$\Delta_m = \det G$

Dacă $\Delta_j \neq 0$, $j = \overline{1,m}$

$\exists B \subset V$ a.î. $Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} y_m^2$

$Q(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} y_i^2$, $x = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$, $\Delta_0 = 1$

1. $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$Q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

a) f. can. met. Gauss

b) f. can. met. Jacobi (de e posibil)

a) $Q(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3) + (5x_2^2 - 4x_3^2) =$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_3 =$

~~$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 -$~~

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 =$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2^2 + x_2x_3) - 8x_3^2 =$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\{(x_2 + 1/2\, x_3)^2 - 1/4\, x_3^2\} - 8x_3^2 =$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2 + 1/2\, x_3)^2 - 9x_3^2 =$

$= y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$ unde $x = (y_1, y_2, y_3)$

Sch. de coord: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2(x_2 + 1/2\, x_3) \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

Sch. de coord $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = 2y_2 \\ z_3 = 3y_3 \end{cases}$

$Q(x) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$

b) $G_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ mat. asoc. ...... B_0

$\Delta_1 = g_{11} = 1 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

$\Delta_3 = \det G_{B_0} = -20 - 20 + 4 = -36 \neq 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ toate Δ sunt $\neq 0 \Rightarrow$ se poate aplica met. Jacobi

$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2$

$Q(x) = y_1^2 + 1/4\, y_2^2 - 1/9\, y_3^2$

Obs: $r = 3$, rg $G_{B_0} = 3$

nr. de term. neg.