CBA

27. 11. 2023

Funcții diferențiale

$f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D \cap D'$

- Cazul I: $m=1$; $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$; $f(x) = (f_1(x), \dots f_m(x))$ $\forall x \in \mathbb{R}$

  $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ → derivata funcției în x_0 $\Updownarrow$ diferențiala funcției în x_0

  $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots f_m'(x_0)) \in \mathbb{R}^m$

  $df(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ diferențiala lui f în x_0

  $df(x_0) = x \cdot f'(x_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- Cazul II: $m>1$; $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$; $f(x_1, x_2, \dots x_m) = (f_1(x_1, x_2, \dots x_m), \dots f_m(\dots))$

  $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ → diferențiala funcției f în x_0 $\Downarrow$ derivatele parțiale ale funcției f în x_0

  Notație derivate parțiale: $\frac{\partial f}{\partial x_1}$;

  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \in \mathbb{R}^m$

  $df(x_0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

① Să se studieze diferențiabilitatea următoarelor funcții:

a) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$; $f(x) = (x\sqrt{x}, x^2+1)$ $\forall x \in [0, +\infty)$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $f_1(x) = x\sqrt{x}$

$f_2(x) = x^2+1$; fie derivabilă pe $[0, +\infty)$ (1)

$$f_1'(x) = (x\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

f_1 e derivabilă pe $(0, +\infty)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1$ deriv în 0 $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1'(0) = 0 \Rightarrow f_1$ deriv pe $[0, +\infty)$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ deriv pe $[0, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $[0, +\infty)$

$df(0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $df(0)(h) = h \cdot f'(0)\ \forall h \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = (f_1'(0), f_2'(0)) = (0, f_2'(0)) \\ f_2'(x) = 2x\ \forall x \in [0, +\infty) \end{array}\right| \Rightarrow f'(0) = (0, 0)$$

$df(0)(h) = h \cdot (0,0) = (0,0)\ \forall h \in \mathbb{R} \Rightarrow df(0) = 0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$df(x_0)$, $x_0 > 0 \Rightarrow df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $df(x_0)(h) = h \cdot f'(x_0)$

$f'(x) = (3\sqrt{x}/2, 2x)\ \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow df(x_0)(h) = h \cdot (3\sqrt{x_0}/2 ; 2x_0)$

$i_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i_{\mathbb{R}}(h) = h$ (funcție identică) $\Rightarrow \boxed{i_{\mathbb{R}} \overset{not}{=} dx}$

$df(x_0) = (3\sqrt{x_0}/2 ; 2x_0)\, dx = (3\sqrt{x_0}/2 ; 2x_0) \cdot i_{\mathbb{R}}$

b) f continuă pe $\mathbb{R}^2$ (am făcut într-un seminar)

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} ;\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se studiază continuitatea funcției f.

Se studiază derivabilitatea parțială.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(xy)'_x(\sqrt{x^2+y^2}) - (xy)(\sqrt{x^2+y^2})'_x}{x^2+y^2} =$$

$\hookrightarrow$ x variabilă și y ct

$$= \frac{y(\sqrt{x^2+y^2}) - xy \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y(\sqrt{x^2+y^2}) - \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} + xy\cdot\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

În $\mathbb{R}^2$ avem 2 versori $e_1 = (1,0)$ și $e_2 = (0,1)$

$e_1 \to x$ și $e_2 \to y$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(t,0)) - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\cdot 0}{\sqrt{t^2+0}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

Formula / def: $\boxed{\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cdot e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}^m}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t^2}{\sqrt{0+t^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiem diferențiabilitatea pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, apoi în $\{(0,0)\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mulț. deschisă $\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

În $(0,0)$ aplicăm definiția!

Construim funcția $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T(x,y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Deci $T(x,y) = x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - T(x,y) - (0,0)|}{\underbrace{\|(x,y)-(0,0)\|}_{\to \text{normă}}} = \ell$$

Nr real îi pui modul, dacă e vector îi pui normă

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0 - \underbrace{(0,0)}_{0} \right|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

Norma : $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Fie $g(x,y) = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x^2|}{2x^2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

f nu e diferențiabilă în $(0,0)$

$df(1,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $df(1,1)(x,y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + y \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

$df(1,1)(x,y) = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $pr_1(x,y) = x$ sau dx_1

$pr_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $pr_2(x,y) = y$ sau dx_2

$\Rightarrow$ Se înlocuiesc ca la $i_{\mathbb{R}}$ la subpct a)

$df(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} dx_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} dx_2$

dx nu are nicio leg. cu dx de la derivate.