Tanislav Alexia
grupa 132

Spații vectoriale. Baze. Subspații vectoriale. Subspații afine.

O mulțime nevidă V se numește spațiu vectorial peste K (corp comutativ) dacă există 2 operații / legi de compoziție, una internă $+: V \times V \to V$ și una externă $\cdot : K \times V \to V$, cu următoarele proprietăți:

1) $(V, +)$ grup abelian
2) $\alpha(x+y) = (\alpha x + \alpha y)$, $\forall \alpha, \in K$ și $\forall x, y \in V$
3) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\forall x \in V$
4) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\forall x \in V$
5) $\exists$ elementul neutru în V $\bar{0}$ a.î. $x + \bar{0} = \bar{0} + x$. $\forall x \in V$
6) $1 \cdot x = x$ $\forall x \in V$

O submulțime W a spațiului vectorial V peste K (corp comutativ) se numește subspațiu vectorial dacă împreună cu adunarea și înmulțirea vectorilor (cu scalari), capătă o structură de spațiu vectorial. Submulțimea W e subspațiu vect al lui V dacă îndeplinește următoarele proprietăți:

1) $\forall x, y \in W$, avem $x+y \in W$
2) $\forall x, \in W$ și $\alpha \in K$, avem $\alpha x \in W$

Dacă V este spațiu vectorial și V_1, V_2 sunt subspații vectoriale ale lui V, atunci:
1) $V_1 \cap V_2$ subspațiu vectorial al lui V
2) $V_1 + V_2 = \{x+y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$ subspațiu al lui V

Exemplu: 1) demonstrăm că $(\mathbb{R}^2/\mathbb{R}, +, \cdot)$ este spațiu vectorial

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, unde $(\mathbb{R}^2, +)$ grup comutativ

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$

$-1(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$, $-1 \in \mathbb{R}$

$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, unde $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ corp comutativ

$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ și $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

În concluzie, $(\mathbb{R}^2/\mathbb{R}, +, \cdot)$ este spațiu vectorial

2) Fie $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Este V subspațiu al lui $\mathbb{R}^2$?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } u, v \in V \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right| \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V$$

$u = (x_1, y_1)$ și $v = (x_2, y_2)$

$\alpha u + \beta v = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = \underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{x} + \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_{y}$

$= x + y$

$x - y = \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 = \alpha\underbrace{(x_1 - y_1)}_{x_1 = y_1} + \beta\underbrace{(x_2 - y_2)}_{x_2 = y_2}$

$= 0 \in V$

Deci, V este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$

Se numește subspațiu afin subsetul unui spațiu afin, peste K (corp comutativ), $A = (X, \vec{X}, \phi)$ format din X = mulțime nevidă, $\vec{X}$ = spațiu vectorial peste K și funcția $\phi : X \times X \to \vec{X}$ cu proprietățile:

1) $\exists\, O \in X$ a.î. $\phi_O : X \longrightarrow \vec{X}$, $\phi_O(A) = \phi(O, A)$ este bijectivă $\forall\, A \in X$

2) $\phi(A, B) + \phi(B, C) = \phi(A, C)$, $\forall\, A, B, C \in X$

Exemplu: ecuații ale subspațiilor afine în A^4

ecuații canonice: $\dfrac{x^1 - 2}{3} = \dfrac{x^2 + 1}{-8} = \dfrac{x^3 + 3}{5} = \dfrac{x^4 + 6}{-2}$

ecuații parametrice : $x^1 = 2+3t$, $t \in \mathbb{R}$

$x^2 = -1-8t$

$x^3 = -3+5t$

$x^4 = 6-2t$

unde dreapta $d = A + [a]$, $A = (2,-1,-3,6)$ și $a = (3,-8,5,-2)$

Fie V un spațiu vectorial peste K (corp comutativ) și submulțimea $S = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$ a lui V:

1) dacă S = sistem liniar independent $\Rightarrow \forall v \in S$, $v \neq 0_V$

2) dacă S = sistem liniar dependent $\Rightarrow \forall S' \subset V$ cu $S \subset S'$
S' = sist. lin. dep.

Submulțimea S a spațiului vectorial V este :

1) sistem liniar independent dacă, din faptul că

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \in K \end{array}\right| \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

2) sistem liniar dependent dacă $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \in K$, nu toți nenuli $\ni \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V$

Submulțimea B a spațiului vectorial V peste K (corp comutativ) se numește bază dacă B este sistem liniar independent și este sistem de generatori pentru V.

Teoremă: Orice spațiu vectorial admite o bază

Exemplu : Este $B = \{v_1 = (-1,1,0), v_2 = (1,0,1), v_3 = (2,1,1)\}$ bază a $\mathbb{R}^3$?

B = sist. liniar. indep.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Presupunem că $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$(-\alpha_1, \alpha_1, 0) + (\alpha_2, 0, \alpha_2) + (2\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3) =$

$= (-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \\ \alpha_2+\alpha_3=0 \end{cases}$$

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow (0,0,0)$ soluție unică $\Rightarrow$

$\Rightarrow B =$ sist. lin. indep.

Matricea de trecere de la o bază la alta:

- Fie V/K spațiu vectorial cu baza $B=\{e_1, e_2, \dots e_m\}$ și baza $B'=\{f_1, \dots f_m\}$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{m1}e_m \\ f_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{m2}e_m \\ &\dots \\ f_m &= a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + \dots + a_{mm}e_m \end{aligned}\right| \Rightarrow f_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i, \ j=\overline{1,m}$$

- Scriem $B \xrightarrow{C} B'$, unde $C =$ matricea de trecere de la B la B'

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(K)$$

- Observație: $B \xrightarrow{C} B' \Rightarrow B' \xrightarrow{C^{-1}} B$

Fie V un K-spațiu vectorial și $S \subset V$ subspațiu. Spunem că S este un sistem de generatori pentru V dacă $\langle S \rangle = V$.

Dacă $S=\{v_1, v_2, \dots v_m\} \subset V$ sist. gen. $\Leftrightarrow \forall v \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \in V$ a.î. $V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$.

Spunem că V este spațiu vectorial finit generat dacă $\exists v_1, v_2, \dots v_m \in V$ a.î. $V = \langle v_1, v_2, \dots v_m \rangle$

Exemplu: 1) $\mathbb{R}[X]$ nu e finit generat

2) K^m finit generat, unde $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$