CDI

23.10.2023

Seminar 4

Spații topologice, spații metrice

X - mulțime

$P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ - mulț. părților lui X

$A \subseteq X \iff A \in P(X)$

SPAȚIU TOPOLOGIC (X, τ)

$\tau \subseteq P(X)$ topologie

$\longleftarrow$

SPAȚIU METRIC (X, d)

$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ distanță

$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$

$B[x_0, r] = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$

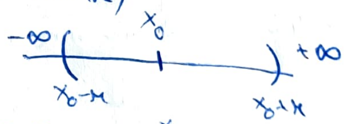
$\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset, \forall x \in G, \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subseteq G\}$

① $(\mathbb{R}, d)$

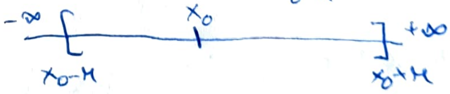
$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$d(a,b) \overset{def}{=} |a-b|$ (dist. uzuală a lui $\mathbb{R}$)

$B(x_0, r) = (x_0 - r ; x_0 + r)$



$B[x_0, r] = [x_0 - r ; x_0 + r]$



② $(\mathbb{R}, d_0)$

$d_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dist. pe $\mathbb{R}$

$d_0(a,b) = \begin{cases} 1, & a \neq b \\ 0, & a = b \end{cases}$

③ $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\mathbb{R}^m = \{(x_1; x_2; x_3; \dots x_m) \mid x_1; x_2; \dots x_m \in \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}^m, d_2)$; $d_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$, dist. uzuală a lui $\mathbb{R}^m$

$d_2((x_1, x_2 \dots x_m), (y_1, y_2, \dots y_m)) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \dots + (y_m-x_m)^2}$

④ $(\mathbb{R}^m, d_1)$

$d_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$

$d_1((x_1, x_2 \dots x_m), (y_1, y_2 \dots y_m)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|$

⑤ $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$

$d_\infty : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$d_\infty((x_1, x_2 \dots x_m),(y_1, y_2 \dots y_m)) = \sup\{ |x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \dots |x_m-y_m| \}$

⑥ $(\mathbb{R}^m, d_p)$

$d_p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+$

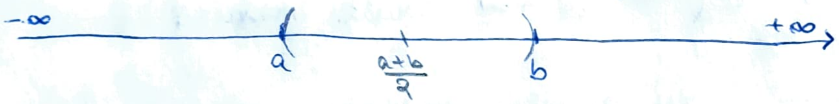
$d_p((x_1,x_2 \dots x_m),(y_1,y_2 \dots y_m)) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p + \dots + |x_m-y_m|^p}$

Exerciții

① a) Fie $a<b \in \mathbb{R}$. Dem. că (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ sunt mulț. deschise în $\mathbb{R}$. Să se arate că $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,a]$ sunt mulț. închise în $\mathbb{R}$.

b) Este adv. că $[a,b)$ și $(a,b]$ sunt mulțimi deschise în $\mathbb{R}$?

a)



$r = \left|a - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{a-b}{2}\right| = \frac{b-a}{2} > 0$

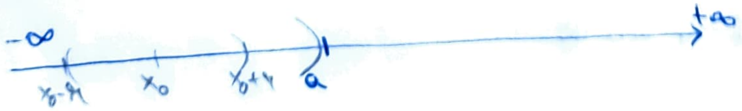
$r = d\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$

$(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ bilă deschisă $\Rightarrow$ mulț. deschisă $\Rightarrow B \in \tau_d$

$(a,+\infty)$ nu este bilă deschisă în $\mathbb{R}$ pt că $\nexists\, r$

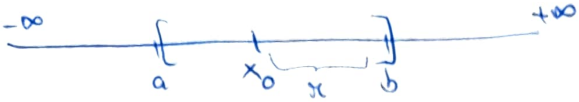
Fie $x_0 \in (a,+\infty)$
Fie $r>0$ și $r \le d(x_0,a) = x_0-a$ $\Big|\Rightarrow B(x_0,r) \subseteq (a,+\infty) \Rightarrow (a,+\infty) \in \tau \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,+\infty)$ e mulț. deschisă, dar nu e bilă deschisă



~~$(a,+\infty)$~~ $(-\infty,a)$ nu e bilă deschisă în $\mathbb{R}$ pt. că nu are rază

Fie $x_0 \in (-\infty,a)$
Fie $0 < r \le d(a,x_0) = a - x_0$
$B(x_0,r) \subseteq (-\infty,a) \Rightarrow (-\infty,a) \in \tau$ $\Big|\Rightarrow (-\infty,a)$ e mulț. deschisă



$x_0 = \frac{a+b}{2}$

$[a,b] = B[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}]$ mulț. închisă și e bilă închisă

$(-\infty, a]$ nu e bilă închisă

$C_X F \overset{def}{=} X \setminus F \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(-\infty, a] = \mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, +\infty)$ $\Rightarrow$

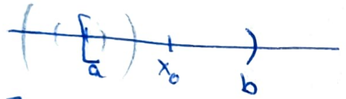
dar $(a, +\infty)$ e deschisă

$\Rightarrow (a, +\infty) \in \mathcal{T}_d$ (complementarea lui $(-\infty, a]$ e deschisă) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (-\infty, a]$ e mulț. închisă, dar nu e bilă închisă

$C_{\mathbb{R}}[a, +\infty) = (-\infty, a) \in \mathcal{T}_d \overset{def}{\Rightarrow} [a, +\infty)$ e mulț. închisă

b)



nu e bilă deschisă, nici închisă

$\exists a \in [a, +\infty), \forall r > 0$ avem că $B(a, r) \not\subseteq [a, b) \Rightarrow$

$\Rightarrow [a, b) \notin \mathcal{T}_d \Rightarrow$ nu e mulț. deschisă

$C_{\mathbb{R}}[a, b) = \mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$

Fie $b \in C_{\mathbb{R}}[a, b)$, $\forall r > 0$ avem că $B(b, r) \not\subseteq C_{\mathbb{R}}[a, b) \Rightarrow$

$\Rightarrow C_{\mathbb{R}}[a, b) \in \mathcal{T}_d \Rightarrow$ nu e mulț. închisă

$(\mathbb{R}, d) \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$

$\mathcal{T}_d \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$

$\mathcal{T}_d \overset{not}{=}$ topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$

(2) Fie $A = [0, 2) \cup \{3\}$

a) A e vecinătate a punctului $x_0 = 0$? ($A \in \mathcal{V}_0$)

b) $1 \in \mathring{A}$ (1 e pct int. al. mulț.)

c) $2 \in A'$ (2 e pct. de acumulare a mulțimii A)

d) $3 \in \text{Izo}$ (dacă 3 e pct. izolat al mulțimii A)

a) $V \in \mathcal{V}_0 \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} \exists\, G \in \mathcal{T}$ a.î. $A_0 \in G \subseteq V$

$\phantom{V \in \mathcal{V}_0} \xrightarrow{(X,d)} \exists\, r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subseteq V$

$\forall\, x > 0,\ B(x_0, r) \not\subseteq A \Rightarrow A \notin \mathcal{V}_0$

b) $x_0 \in \mathring{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}_{x_0}$

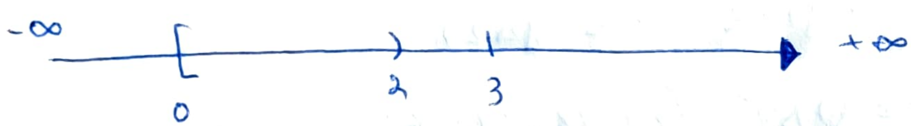
$1 \in \mathring{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}_1$

$B(1, 1/2) = (1/2; 3/2) \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{V}_{x_0} \Rightarrow 1 \in \mathring{A}$

c)

$x_0 \in A' \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \ \forall\, V \in \mathcal{V}_{x_0}$

$ \xrightarrow{(X,d)} B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \ \forall\, r > 0$

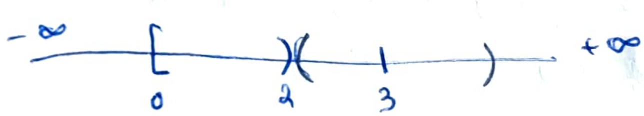


$\forall\, r > 0,\ B(2, r) \cap (A \setminus \{2\}) \neq \emptyset \Rightarrow 2 \in A'$

d)

$x_0 \in \text{Izo}\, A \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} \exists\, V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $V \cap A = \{x_0\}$

$\phantom{x_0 \in \text{Izo}\, A} \xrightarrow{(X,d)} \exists\, r_0 > 0$ a.î. $B(x_0, r_0) \cap A = \{x_0\}$



$B(3,1) = (2,4) \cap A = \{3\} \Rightarrow 3 \in \text{Izo}\, A$