fundamentală a lui Newton, intitulată „Philosophiae naturalis principia mathematica", apărută în anul 1686 (tradusă în limba română în anul 1956 de V. Marian, sub titlul „Principiile matematice ale filozofiei naturale", Ed. Academiei R.P.R.), poate fi considerată ca o continuare a cărților lui Euclid, datorită asemănării în ce privește modul de înlănțuire a definițiilor, postulatelor și propozițiilor și modul de prezentare a demonstrațiilor.

Spațiul absolut al lui Newton a stat la baza întregii fizici clasice, pînă la începutul secolului nostru; dar după descoperirea particulelor care intră în componența atomilor (electroni, protoni, neutroni) și a unor noi galaxii în Univers, care au pus în evidență proprietăți neașteptate și imposibil de formulat cu ajutorul noțiunilor clasice, s-a pus problema reexaminării ipotezelor care stăteau la baza Științei clasice, și în particular a Geometriei.

Această reexaminare a avut rezultate importante pe două direcții: Pe de o parte, s-au cristalizat ipotezele care stau la baza geometriei euclidiene. Rolul principal în această direcție a fost îndeplinit de David Hilbert, prin lucrarea sa „Grundlagen der Geometrie" (Bazele geometriei), apărută în 12 ediții, începînd din anul 1899. În această lucrare, Hilbert arată că întreaga geometrie euclidiană poate fi construită plecînd de la trei noțiuni fundamentale, ce nu se definesc (puncte, drepte și plane) și de la trei relații fundamentale (de incidență, de ordine și de congruență) și admițînd un sistem de 20 de axiome, care leagă între ele noțiunile și relațiile fundamentale. În paralel s-a dezvoltat Teoria mulțimilor și Logica matematică, care au permis construcția pe baze riguroase a unor noi geometrii, care au cuprins geometriile neeuclidiene ale lui Bolyai și Lobacevski și pe cea a lui Riemann, apoi geometriile proiective, geometria spațiilor Riemann și multe altele.

Toate aceste descoperiri și elaborări au intrat rapid în gîndirea și limbajul fizicienilor acestui secol, dornici a găsi geometria cea mai apropiată de structura spațiului fizic. Drept urmare, au apărut numeroase lucrări, din cele mai îndrăznețe, care au avut ca rezultat o îmbinare a geometriei cu fizica, asemănătoare celeia din vremea lui Galilei și Newton, dar îmbrățișînd o gamă de noțiuni, fenomene și modele mult lărgită. Din aceste realizări și ipoteze, știința viitorului va păstra desigur o mare parte, dar va da uitării o altă parte.

Cum trebuie instruit omul modern, viitor om de știință sau tehnician, pentru a se putea înscrie pe linia realizărilor durabile? Pentru aceasta, este necesară o cultură vastă, încadrată într-o gîndire logică.

În ce privește studiul geometriei, cunoașterea temeinică a geometriei euclidiene, care rămîne model de comparație pentru orice altă geometrie și cadru natural pentru multe ramuri ale Științei și Tehnicii moderne, este o necesitate. Cunoașterea geometriei euclidiene înseamnă cunoașterea ipotezelor care stau la baza acestei discipline, apoi cunoașterea celor mai importante teoreme ce pot fi demonstrate pe baza ipotezelor admise, precum și a limitelor în care aceste teoreme pot fi verificate experimental, sau în care aceste teoreme pot fi admise în activitatea practică.



Manualul de față caută să răspundă la primele aspecte. În ce privește limitele validității experimentale, elevii vor primi informațiile corespunzătoare urmărind celelalte manuale consacrate științelor naturii.

## Lucrări practice

**1.** Fixați pe o foaie de hîrtie două puncte $A$, $B$. Trasați segmentul $|AB|$. Măsurați cu ajutorul unei rigle gradate lungimea segmentului $|AB|$. Prelungiți segmentul $|AB|$ dincolo de $B$ cu un segment de 1 cm și dincolo de $A$ cu un segment de 5 cm.

**2.** Desenați două drepte și indicați punctul lor de intersecție.

**3.** Uniți două puncte alese la întîmplare pe o foaie de hîrtie printr-o linie oarecare și așezați o ață astfel încît să se suprapună pe acea linie. Măsurați lungimea aței și apoi lungimea segmentului definit de cele două puncte. Care dintre cele două lungimi este mai mare?

**4.** Desenați zece segmente $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$, $|EF|$, $|FG|$, $|GH|$, $|HI|$, $|IJ|$, $|JK|$ astfel încît extremitățile lor să fie puncte coliniare și ordinea lor pe dreapta care le conține să coincidă cu ordinea alfabetică a literelor care le desemnează. Măsurați lungimile fiecăruia din cele zece segmente, calculați suma acestor zece lungimi și comparați cu lungimea segmentului $|AK|$. Explicați rezultatul.

**5.** Desenați segmente de 2,3 cm; 7,1 cm; 9,2 cm. Construiți segmente care să reprezinte suma celor trei segmente construite.

**6.** Construiți un segment $a$ de 8,8 cm și un segment $b$ de 6,9 cm. Construiți apoi un segment congruent cu segmentul $a - b$.

**7.** Construiți la întîmplare un segment $a$ și construiți apoi segmente congruente cu $3a$, $4,5\,a$, $a/5$, $a/7$, $a/10$.

**8.** Care este raportul segmentelor $a, b$, știind că $a$ are 4,8 cm, iar $b$ 1,2 cm?

**9.** Construiți cercuri de raze de 1 cm, de 3,5 cm, de 10 cm și de 15 cm. Indicați pentru fiecare din cercurile construite cîte un punct interior și cîte un punct exterior.

**10.** Fixați pe o hîrtie un punct $A$ și arătați care este locul geometric al punctelor care au distanța la $A$ egală cu 1 (cm).

**11.** Desenați pe două foi de hîrtie două cercuri avînd razele de 1 cm. Încercați apoi să suprapuneți cele două cercuri unul peste celălalt.

**12.** Trasați două corzi paralele $|AB|$, $|A'B'|$ într-un cerc $C$. Rotind apoi cercul $C$ în jurul centrului său, arătați că putem suprapune arcul $\widehat{B'B}$ peste arcul $\widehat{AA'}$.

**13.** Construiți într-un cerc avînd raza de 1 cm o coardă de 1,5 cm.

**14.** Indicați la întîmplare un arc $\widehat{AB}$ pe un cerc $K$ și construiți apoi un arc de lungime dublă, în același cerc.

**15.** Construiți un cerc la întîmplare. Fixînd apoi un punct $A$ pe acest cerc, construiți un triunghi echilateral, un pătrat și un pentagon regulat, astfel ca aceste poligoane să aibă toate vîrfurile pe cercul construit la început și astfel ca $A$ să fie vîrf comun.

**16.** Construiți un triunghi echilateral avînd laturile de lungime 3 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi.

**17.** Construiți un triunghi cu laturile de 1,5 cm, 2 cm și 2,5 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi.

**18.** Construiți un triunghi cu laturile de 9 cm, 10 cm și 11 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi. Trasați apoi medianele și bisectoarele aceluiași triunghi.

19. Confecționați un disc circular din carton astfel ca raza discului să fie de 10 cm. Rostogoliți apoi discul pe masă, astfel încît să urmeze o linie dreaptă, fără să alunece. Marcînd un punct pe disc, notați pe linia dreaptă două poziții succesive ocupate de punctul marcat pe cerc.

20. Cîte rotații complete va face discul de la lucrarea 19, dacă discul parcurge pe linia dreaptă un segment de 3 m?

21. Tulpina unui copac poate fi înfășurată cu o sfoară lungă de 3 m, dar nu poate fi înfășurată cu o sfoară mai scurtă. Care este diametrul acelui copac în porțiunea lui cea mai subțire?

22. Construiți un dreptunghi $ABCD$ dintr-un material nedeformabil și trasați axele lui de simetrie. Rotiți apoi aceste dreptunghi în jurul uneia din axe. Ce descriu laturile dreptunghiului în timpul unei rotații complete?

23. Rotiți un disc circular în jurul unui diametru al său. Ce descrie marginea discului în timpul unei rotații complete? Dar după o rotație de 180°?

24. Introduceți un tetraedru regulat cu muchiile de 10 cm într-un vas cu apă gradat. Măsurați volumul tetraedrului urmărind pe gradație cu cît s-a ridicat nivelul apei.

25. Repetați experiența, considerînd în locul tetraedrului o minge de rază cunoscută, apoi un con circular drept și un cilindru. Verificați în fiecare caz formulele cunoscute, care dau volumele acestor corpuri.

26. Construiți din carton 20 triunghiuri echilaterale cu laturile de lungime de 3 cm. Alcătuiți cu aceste triunghiuri un tetraedru, apoi un octaedru și un icosaedru, luînd patru, respectiv opt și 20 de triunghiuri și lipindu-le după laturi, astfel ca fiecare triunghi să fie vecin cu exact alte trei triunghiuri.

27. Construiți din carton un cub, apoi o piramidă pentagonală și o prismă patrulateră. Calculați apoi volumele acestor corpuri folosind metoda indicată mai sus, deci folosind un vas cu apă.

28. Construiți din carton un unghi diedru de 45°, apoi unul de 30° și unul de 60°. Indicați în fiecare caz unghiuri plane care reprezintă unghiurile diedre construite.

29. Confecționați din sîrmă de oțel opt vergele rectilinii și notați aceste vergele prin $a, b, c, d, a', b', c'$ și $d'$. Fixați într-un fel vergelele $a, b, c$, apoi vergelele $a', b', c'$ astfel ca ultimele trei să se sprijine pe fiecare din primele trei. Așezați apoi vergelele $d, d'$ astfel ca $d$ să se sprijine pe $a', b'$ și $c'$, iar $d'$ să se sprijine pe $a, b, c$. Ce se poate spune despre vergelele $d$ și $d'$?

30. Într-un vas de formă cubică înalt de 1 m introduceți un număr cît mai mare de mingi de diametru de 30 cm, astfel ca vasul să poată fi acoperit, fără a presa mingile. Cîte mingi ați putut introduce?

31. Cu ajutorul unor plăci de traforaj și a unor vergele de sîrmă confecționați două linii drepte perpendiculare, o linie perpendiculară pe un plan și două plane perpendiculare. Puneți în evidență trei plane perpendiculare două cîte două.

32. Realizați un model care să conțină o linie dreaptă $d$, care face un unghi de 30° cu un plan. Arătați apoi o dreaptă în acel plan, care să facă un unghi de 60° cu linia dreaptă $d$.

33. Construiți un triunghi la întîmplare și calculați suma unghiurilor sale.

34. Pămîntul se rotește în jurul axei sale, efectuînd o rotație completă în 24 ore. Cu ce unghi se rotește Pămîntul într-o oră, admițînd că viteza de rotație este constantă?

R: $360^0 : 24 = 15°$.

35. Care este lungimea unui arc de meridian terestru de 1°, știind că lungimea unui cerc meridian întreg este de 4 0000000 m.

R: 111,111 km.



36. Care este lungimea unui arc de meridian de 1'?

R: 1852 m (mila marină)

37. Să se calculeze suprafața și volumul globului terestru, admițînd că acesta este o sferă de rază 6378164 m (raza Ecuatorului) sau de rază 6356780 m (raza unui meridian).

38. Să se calculeze viteza medie cu care se deplasează Pămîntul pe orbita sa, admițînd că el parcurge, în 365 zile, 5 ore, 48 minute și 46 secunde, o orbită circulară cu raza de 149598500 km.

## 1. Axiomele de incidență

Se presupune că punctele formează o mulțime $S$, numită *spațiu*. Dreptele și planele sînt submulțimi particulare ale mulțimii $S$ și aceste submulțimi au următoarele proprietăți:

I.1. **Prin orice două puncte trece o dreaptă.**

I.2. **Prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă.**

I.3. **Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare. Există cel puțin un plan.**

I.4. **Prin orice trei puncte necoliniare trece un plan.**

I.5. **Prin orice trei puncte necoliniare trece un singur plan.**

I.6. **Dacă o dreaptă $d$ are două puncte distincte situate într-un plan $p$, atunci toate punctele dreptei $d$ sînt situate în planul $p$.**

I.7. **Dacă două plane au un punct comun, atunci cele două plane mai au cel puțin un al doilea punct comun.**

I.8. **Există patru puncte nesituate într-un același plan.**

### Exerciții

1. Să se arate că dacă o dreaptă $d$ nu este conținută într-un plan $p$, atunci intersecția $d \cap p$ este fie mulțimea vidă, fie este formată dintr-un singur punct.

2. Să se arate că dacă $p, p'$ sînt două plane distincte, atunci intersecția $p \cap p'$ este fie mulțimea vidă, fie este o dreaptă.

3. Să se arate că dacă $d$ este dreaptă, atunci există cel puțin un punct nesituat pe această dreaptă.

4. Să se arate că dacă $p$ este un plan, atunci există cel puțin un punct nesituat în planul $p$.

5. Să se arate că dacă $d$ este o dreaptă și dacă $A$ este un punct nesituat pe $d$, atunci există un plan și unul singur care conține dreapta $d$ și punctul $A$.

6. Să se arate că dacă dreptele $d, d'$ au un punct comun, atunci există un plan $p$, care să conțină aceste drepte. Planul $p$ este unic, dacă dreptele $d, d'$ sînt distincte.

7. Fie $p, p', p''$ trei plane astfel ca intersecția $p \cap p' \cap p''$ să conțină un singur punct. Să se arate că fiecare din intersecțiile $p \cap p'$, $p \cap p''$, $p' \cap p''$ este o dreaptă și că dreptele date de aceste intersecții sînt concurente, dar necoplanare.

**8.** Fie $M$ o mulţime de drepte, astfel ca orice două drepte din mulţimea $M$ să aibă intersecţia nevidă, dar oricare trei din aceste drepte să aibă intersecţia vidă. Să se arate că există un plan care conţine toate dreptele mulţimii $M$.

**9.** Fie $M$ o mulţime de drepte, astfel ca oricare două drepte din mulţimea $M$ să aibă intersecţia nevidă şi astfel ca să nu existe niciun plan care să conţină toate dreptele mulţimii $M$. Să se arate că există un punct care aparţine fiecărei drepte din mulţimea $M$.

**10.** Să se arate că există patru plane, astfel ca intersecţiile acestor plane, luate cîte două, să fie drepte, intersecţiile acestor plane luate trei cîte trei să fie formate din cîte un punct, iar intersecţia celor patru plane să fie mulţimea vidă. Care este numărul dreptelor şi care este numărul punctelor date de intersecţiile considerate?

*Indicaţie.* Se consideră patru puncte necoplanare. Fiecare trei din aceste puncte va determina un plan şi se obţin astfel patru plane avînd proprietăţile cerute.

## 3. Axiomele de ordonare

**II.1. Dacă un punct $B$ se găseşte între punctele $A$ şi $C$, atunci punctele $A$, $B$, $C$ sînt coliniare şi distincte şi punctul $B$ se găseşte între $C$ şi $A$.**

**II.2. Fiind date două puncte distincte $A$, $B$ există un punct $C$ astfel încît $B$ să se găsească între $A$ şi $C$.**

**II.3. Fiind date trei puncte coliniare şi distincte $A$, $B$, $C$ astfel încît $B$ se află între $A$ şi $C$, $A$ nu se poate afla între $B$ şi $C$, iar $C$ nu se poate afla între $A$ şi $B$.**

**II.4. (Axioma lui Pasch). Fiind date, într-un acelaşi plan, trei puncte necoliniare $A$, $B$, $C$ şi o dreaptă $d$, astfel ca $d$ să treacă printr-un punct situat între $B$ şi $C$, dar $d$ să nu treacă prin nici unul din punctele $A$, $B$, $C$, dreapta $d$ va trece fie printr-un punct situat între $A$ şi $B$, fie printr-un punct situat între $A$ şi $C$.**

Reamintim că, fiind date două puncte distincte $A$, $B$, am notat prin $|AB|$ mulţimea punctelor situate între $A$ şi $B$ şi că am numit această mulţime: *segmentul* deschis de extremităţi $A$, $B$. Avem $|AB| = |BA| \subset AB$.

*Aplicaţie. Fie $A$, $B$, $C$ trei puncte necoliniare şi fie $M \in |AC|$, $N \in |AB|$. Să se arate că segmentele $|BM|$ şi $|CN|$ au un punct comun.*

*Soluţie.* Aplicînd axioma lui Pasch triunghiului $ABM$ şi secantei $CN$, obţinem un punct $P \in CN \cap |BM|$, deoarece dreapta $CN$ intersectează latura $|AB|$, dar nu intersectează latura $|AM|$. Aplicînd apoi aceeaşi axiomă triunghiului $ACN$ şi secantei $BM$, deducem că există un punct $Q \in BM \cap |CN|$. Avem $P \in CN \cap BM$, $Q \in CN \cap BM$. Dar dreptele $BM$, $CN$ sînt distincte, deci ele au un singur punct comun. Rezultă $Q = P$ şi atunci $P \in |BM| \cap \cap |CN|$.

### Exerciţii

**1.** Dacă $A$, $B$, $C$ sînt trei puncte coliniare şi distincte, astfel încît $A$ nu este între $B$ şi $C$, iar $C$ nu este între $A$ şi $B$, cu siguranţă $B$ va fi între $A$ şi $C$.

(*Indicaţie.* Se construiesc punctele $E, F, G, H$ astfel ca $E \notin AB$, $E \in |BF|$, $G \in AE \cap |CF|$, $H \in CE \cap |AF|$ şi se arată că $E \in |AG|$ şi că $B \in |AC|$ (fig. V.1).)



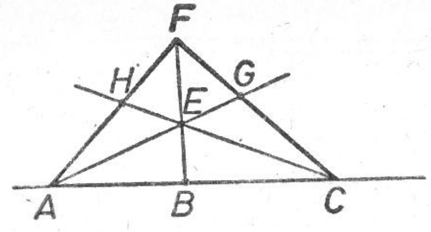



Fig. V.1

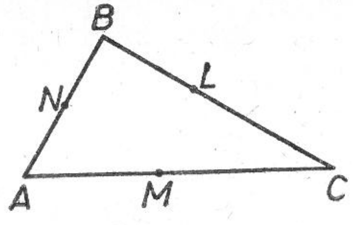



Fig. V.2

**2.** Fie $A, B, C$ trei puncte necoliniare şi fie punctele $L \in |BC|$, $M \in |AC|$, $N \in |AB|$. Să se arate că $L, M, N$ nu pot fi coliniare.

(*Indicaţie.* Se presupune că $L, M, N$ ar fi coliniare şi, pentru a fixa ideile, se consideră cazul $M \in |LN|$. Aplicînd axioma lui Pasch triunghiului $BLN$ şi secantei $AC$, se obţine o contradicţie (fig. V.2).)

**3.** Dacă $A, B$ sînt două puncte distincte, să se arate că $|AB| \neq \varnothing$.

(*Indicaţie.* Se construiesc punctele $E, F, G$ astfel ca $E \notin AB, E \in |AF|, B \in |FG|$. Aplicînd axioma lui Pasch, se obţine un punct $P \in |AB| \cap GE$, (fig. V.3).)

**4.** Să se demonstreze că relaţiile $B \in |AC|, C \in |BD|$ implică $C \in |AD|$ şi $B \in |AD|$, (fig. V.4).

(*Indicaţie.* Se consideră puncte $E, F, G, H$ astfel ca $E \notin AB, E \in |BF|, G \in AE \cap |FC|, H \in |FC| \cap DE$. Aplicînd axioma lui Pasch, se arată apoi că $E \in |AG|$, $H \in |ED|$ şi $C \in |AD|$. Permutînd $A$ cu $D$ şi $B$ cu $C$, se obţine $B \in |AD|$).

**5.** Să se demonstreze că relaţiile $B \in |AC|, C \in |AD|$ implică relaţiile $C \in |BD|$ şi $B \in |AD|$.

(*Indicaţie.* Se consideră puncte $E, F, G$ astfel ca $E \notin AB, E \in |BF|, G \in AE \cap \cap |FC,|$ se arată că $E \in |AG|$, apoi se consideră $H \in DE \cap |FC|$ şi se arată că $C \in |BD|$. Comparînd cu $B \in |AC|$ şi aplicînd implicaţia precedentă, se obţine $B \in \in |AD|$, (fig. V.4).)

**6.** Să se arate că relaţiile $B \in |AC|, B \in |AD|$ implică $A \notin |CD|, B \notin |CD|$.

(*Indicaţie.* Prin reducere la absurd, utilizînd implicaţiile 4,5.)

**7.** Fie $A, O, B$ trei puncte pe o dreaptă $d$, astfel ca $O \in |AB|$. Notăm $d' = \{P \in d;\ O \in |BP|\}$, $d'' = \{Q \in d;\ O \in |AQ|\}$.

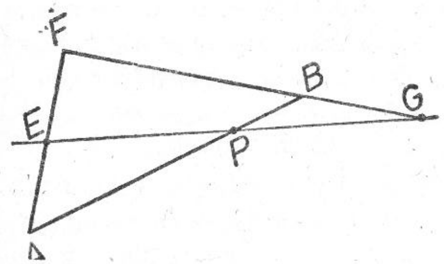



Fig.V.3

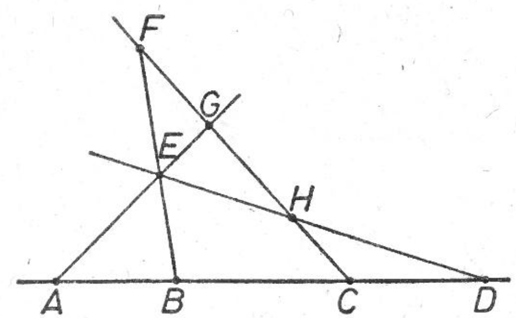



Fig.V.4

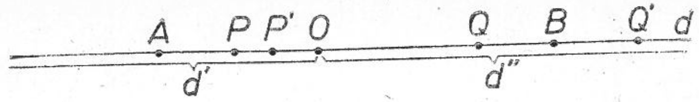



Fig. V.5

Să se arate că relațiile $P \in d', P' \in d', Q \in d'', Q' \in d''$ implică

$$O \notin |PP'|, \ O \notin |QQ'|, \ O \in |PQ|, \quad \text{(fig. V.5)}.$$

*Reamintim că mulțimile $d'$, $d''$ constituie semidreptele limitate de punctul $O$ pe dreapta $d$. Notații: $d' = |OA$, $d'' = |OB$.*

8. Păstrînd notațiile de la ex. 7, să se arate că

$$A \in d', \ B \in d'', \ d' \cap d'' = \varnothing, \ d' \cup d'' = d - \{O\}.$$

9. Fie $d$ o dreaptă conținută în planul $p$. Fie punctele $A \notin d$, $O \in d$, $B \in p$ astfel ca $O \in |AB|$. Considerăm mulțimile (fig. V.6)

$$p' = \{P \in p; \ |BP| \cap d \neq \varnothing\}, \ p'' = \{Q \in p; |AQ| \cap d \neq \varnothing\}.$$

Să se arate că $A \in p'$, $B \in p''$, $p' \cap p'' = \varnothing$, $p' \cup p'' = p - d$ și că relațiile $P \in p'$, $P' \in p'$, $Q \in p''$, $Q' \in p''$ implică $|PP'| \cap d = \varnothing$, $|QQ'| \cap d = \varnothing$ și $|PQ| \cap d \neq \varnothing$.

*Reamintim că mulțimile $p'$, $p''$ sînt semiplanele limitate de dreapta $d$ în planul $p$. Notații: $p' = |dA$, $p'' = |dB$.*

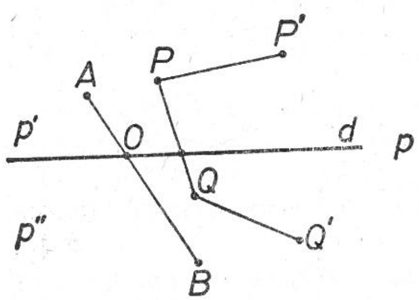



Fig. V.6

## 4. Semispații

Fie $p$ un plan și fie punctele $O \in p$, $A \notin p$ și $B$, astfel ca $O \in |AB|$. Considerăm mulțimile (fig. V.7):

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} S' &= \{P \in S; \ |BP| \cap p \neq \varnothing\}, \\ S'' &= \{Q \in S; \ |AQ| \cap p \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

Reamintim că $S$ este *spațiul*, deci mulțimea tuturor punctelor luate în considerare. Mulțimile $S'$, $S''$ vor fi numite *semispațiile* limitate de planul $p$. Semispațiile $S'$, $S''$ au proprietăți analoage semidreptelor și semiplanelor. Mai precis, avem următoarea

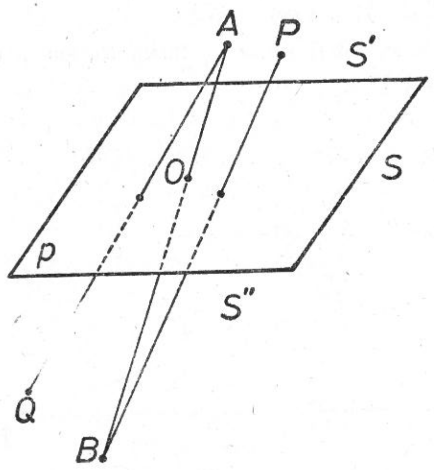



Fig. V.7

**T e o r e m ă. Mulțimile $S'$, $S''$ definite de formulele (1) au următoarele proprietăți:**



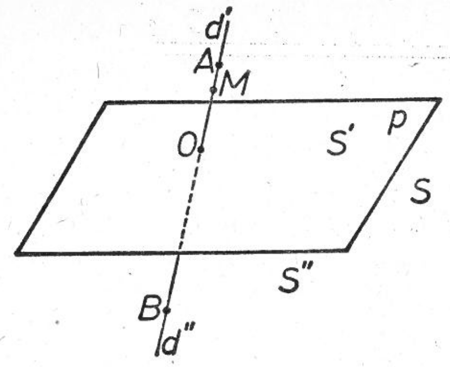



Fig. V.8

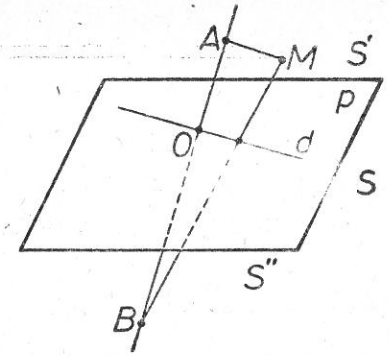



Fig. V.9

**1.** $S = S' \cup S'' \cup p$, $S' \cap S'' = \varnothing$, $p \cap S' = \varnothing$ $p \cap S'' = \varnothing$.

**2. Dacă** $M \in S'$, $M' \in S'$, $N \in S''$, $N' \in S''$, **atunci**

$$|MM'| \cap p = |NN'| \cap p = \varnothing, \ |MN| \cap p \neq \varnothing.$$

*Demonstrație**. 1. Fie $M$ un punct exterior planului $p$. Dacă $M \in AB$, (fig. V.8), și dacă notăm $d' = |OA$, $d'' = |OB$, avem $AB = d' \cup d'' \cup \{O\}$, $M \neq O$, deci $M \in d'$ sau $M \in d''$; în primul caz, $O \in |BM|$ și deci $M \in S'$. Dacă $M \in d''$, vom avea $O \in |AM|$ și deci $M \in S''$. Rezultă relația

$$\text{(2)} \qquad AB \cap (S - p) \subset S' \cup S''.$$

Dacă $M \notin AB$ (fig. V.9), punctele $A$, $B$, $M$ aparțin unui plan $q$, care conține și punctul $O \in AB \cap p$. Avem $A \notin p$, deci $p \neq q$. Comparînd cu $O \in p \cup q$, deducem că planele $p$, $q$ au ca intersecție o dreaptă $d$ astfel ca $O \in d$.

Dreapta $d$ nu trece prin nici unul din vîrfurile triunghiului $ABM$ și trece prin punctul $O$, care aparține laturii $|AB|$. Din axioma lui Pasch rezultă că dreapta $d$ intersectează una din laturile $|AM|$, $|BM|$. Dacă $d$ intersectează latura $|AM|$, avem $M \in S''$, iar dacă $d$ intersectează latura $|BM|$, avem $M \in S'$. Deci orice punct $M \in S - p$ se găsește în una din submulțimile $S'$, $S''$. Prin urmare, avem $S - p \subset S' \cup S''$. Din faptul că dreapta $d$ nu poate intersecta simultan toate laturile triunghiului $ABM$, rezultă că $S' \cap S'' = \varnothing$. În acest fel, am demonstrat relațiile de la punctul 1.

2. Fie $M$, $M'$ două puncte din $S'$. Dacă $B \notin MM'$, punctele $B$, $M$, $M'$ formează un triunghi $BMM'$ și aparțin unui plan unic $q$, astfel ca intersecția $p \cap q$ este $\varnothing$ sau o dreaptă $d$ (fig. V. 10). În al doilea caz, dreapta $d$ nu trece prin nici unul din punctele $B$, $M$, $M'$ și trece prin două puncte situate pe cîte una din laturile $|BM|$, $|BM'|$, deoarece $M \in S'$ și $M' \in S'$. Rezultă că intersecția $|MM'| \cap d$ este vidă. Dar $|MM'| \subset q$, $|MM'| \cap p \subset (q \cap p) = d$, deci $|MM'| \cap p \subset |MM'| \cap d = \varnothing$.

În același mod se arată că, oricare ar fi punctele $N$, $N'$ din $S''$ astfel ca $A \notin NN'$, avem $|NN'| \cap p = \varnothing$.

* facultativ

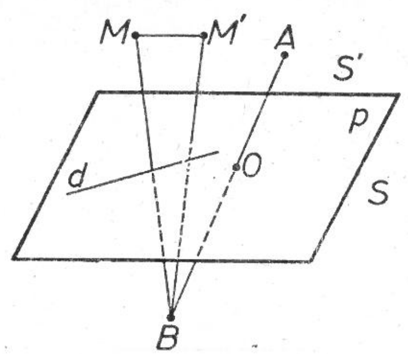



Fig. V.10

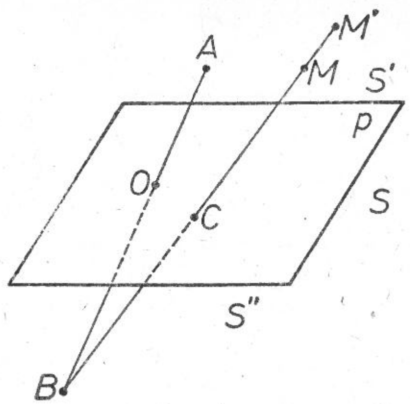



Fig. V.11

Dacă $M\in S'$, $M'\in S'$ şi dacă $B\in MM'$, segmentele $|BM|$, $|BM'|$ au un punct comun $C\in p$, deci $C\in |BM|$ şi $C\in |BM'|$ (fig. V.11). Rezultă că $C\notin |MM'|$. Atunci din relaţiile $MM'\cap p=\{C\}$ rezultă că $|MM'|\cap p=\varnothing$

În acelaşi fel se arată că dacă avem două puncte $N\in S''$, $N'\in S''$ astfel ca $A\in NN'$, atunci $|NN'|\cap p=\varnothing$.

Să considerăm acuma două puncte $M\in S'$, $N\in S''$. Trebuie să arătăm că $|MN|\cap p\neq\varnothing$. Sînt posibile mai multe cazuri.

Dacă $M=A$, avem $|MN|\cap p=|AN|\cap p\neq\varnothing$, deoarece $N\in S''$.

Dacă $M\neq A$, punctele $A$, $M$, $N$ sînt distincte; dacă $A\in MN$ (fig. V.12) intersecţia $AN\cap p$ este formată dintr-un singur punct $C$ şi avem $C\in |AN|$, $C\notin |AM|$, deoarece $A\in S'$ şi $M\in S'$. Avem deci fie $M\in |AC|$ fie $A\in |MC|$, În fiecare din aceste cazuri, folosind relaţia $C\in |AN|$, deducem $C\in |MN|$, deci $|MN|\cap p=\{C\}\neq\varnothing$.

Dacă punctele $A$, $M$, $N$ sînt necoliniare, (fig. V.13), ele determină un plan $q$, care are în comun cu planul $p$ punctul $Q\in |AN|\cap p$. Rezultă că intersecţia

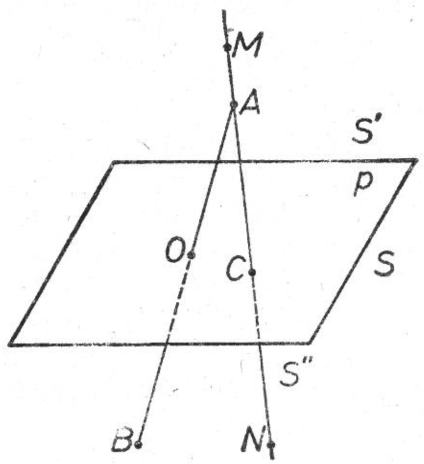



Fig. V.12

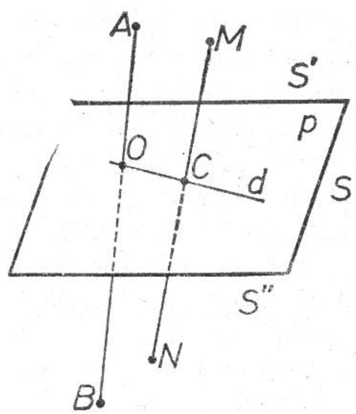



Fig. V.13



planelor $p$ şi $q$ este o dreaptă $d$. Această dreaptă intersectează latura $|AN|$ a triunghiului $AMN$, dar nu intersectează latura $|AM|$. Din axioma lui Pasch deducem că dreapta $d$ intersectează latura $|MN|$ într-un punct $C'$. Avem

$$C\in |MN|\cap p, \text{ deci } |MN|\cap p\neq\varnothing.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Mulţimile $S'$, $S''$ vor fi notate $S'=|pA$, $S''=|pB$. Avem deci

$$A\in |pA,\ B\in |pB,\ S=|pA\cup |pB\cup p,\ |pA\cap |pB=\varnothing.$$

Despre punctele din semispaţiul $|pA$ vom spune că se găsesc de aceeaşi parte cu $A$ faţă de planul $p$; în mod analog, semispaţiul $|pB$ este format din punctele situate de aceeaşi parte cu $B$, faţă de planul $p$.

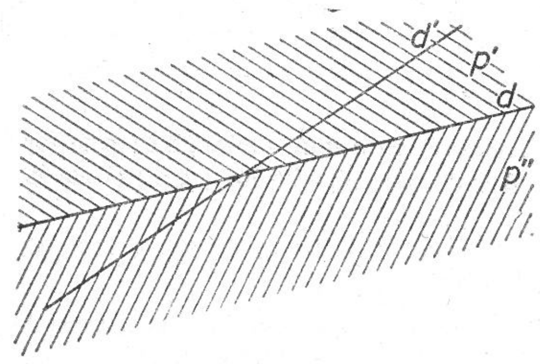



Fig. V.14

### Exerciţii

**1.** Fie $d, d'$ două drepte concurente şi fie $p$ planul ce conţine aceste drepte. Fie apoi $p'$, $p''$ semiplanele limitate de dreapta $d$ în planul $p$. Să se arate că intersecţiile $d'\cap p'$, $d'\cap p''$ coincid cu semidreptele limitate pe dreapta $d'$ de punctul de intersecţie al dreptelor $d, d'$ (fig. V.14).

**2.** Fie $d$ o dreaptă şi fie $p, q$ două plane astfel ca $d\not\subset q$, $p\neq q$ şi intersecţiile $d\cap q$ şi $p\cap q$ să fie nevide. Să se arate că: 1) intersecţiile lui $d$ cu semispaţiile limitate de planul $q$ sînt semidrepte şi 2) intersecţiile lui $p$ cu aceleaşi semispaţii sînt semiplane (fig. V.15). De cine sînt limitate aceste semidrepte şi aceste semiplane?

**3.** Fie $d$ o dreaptă şi fie $p, q$ două plane astfel ca $d\cap q=\varnothing$ şi $p\cap q=\varnothing$. Fie punctele $A\in d$ şi $B\in p$. Să se arate că

$$d\subset |qA,\ p\subset |qB.$$

**4.** Fie $|pA$, $|qB$ două semispaţii astfel ca $p\neq q$, $|pA\subset |qB$ sau $|pA\cap |qB=\varnothing$. Să se arate că $p\cap q=\varnothing$, (fig. V.16 şi V.17).

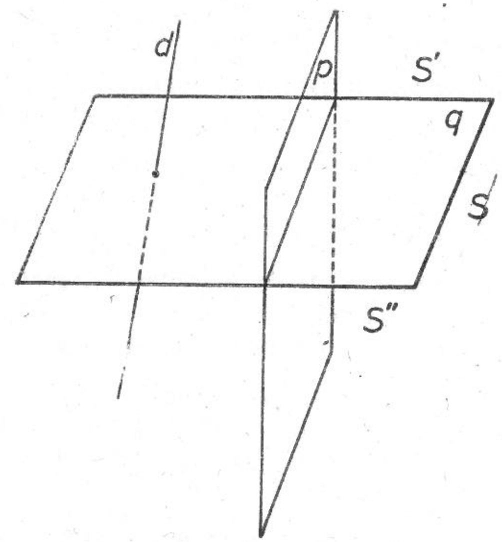



Fig. V.15

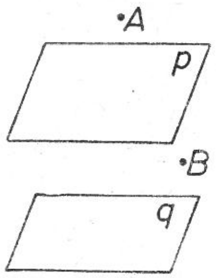
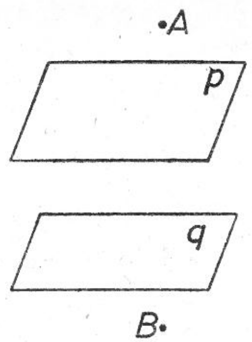


Fig. V.16



ig. V.17

## 5. Figuri remarcabile în spațiu

**Definiții.**

Dacă $A$, $B$ sînt puncte distincte, definim *segmentul închis* $[AB]$ prin formula $[AB] = \,]AB[\, \cup \{A, B\}$; $A$, $B$ sînt extremitățile lui $]AB[$ și ale lui $[AB]$.

Dacă $s = \,]OA$ este o semidreaptă, definim *semidreapta închisă* $[OA$ prin formula $[OA = \,]OA \cup \{O\}$; $O$ este originea lui $]OA$ și a lui $[OA$.

Dacă $]dA$ este un semiplan, definim *semiplanul închis* $[dA$ prin formula $[dA = \,]dA \cup d$; $d$ este dreapta ce limitează semiplanul $]dA$ sau $[dA$.

Dacă $]pA$ este un semispațiu limitat de planul $p$, definim *semispațiul închis* $[pA$ prin formula $[pA = \,]pA \cup p$; $p$ va fi planul ce limitează și semispațiul închis $[pA$.

Fie $p'$, $q'$ două semiplane limitate de o aceeași dreaptă $d$. Mulțimea $\{p', q'\}$ va fi notată $\widehat{p'q'}$ și va fi numită *unghiul diedru* definit de semiplanele $p'$, $q'$. Aceste semiplane vor fi numite *fețele* unghiului diedru, iar dreapta $d$ va fi numită *muchia* unghiului diedru $\widehat{p'q'}$ (fig. V. 18).

Un unghi diedru $\widehat{p'q'}$ va fi numit *unghi diedru nul*, dacă $p' = q'$. Vom spune că unghiul diedru $\widehat{p'q'}$ este *plat*, dacă fețele lui sînt situate într-un același plan $p$ și dacă reuniunea $p' \cup q' \cup d$ este egală cu acest plan, $d$ fiind muchea unghiului diedru $\widehat{p'q'}$.

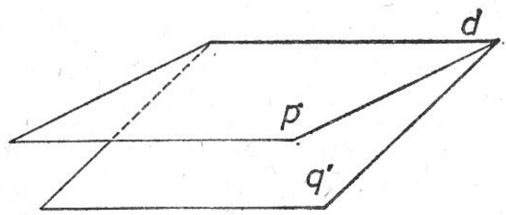


Fig. V.18

Un *unghi diedru propriu* este un unghi diedru, care nu este nici nul nici plat.

Dacă $\widehat{p'q'}$ este un unghi diedru propriu, avînd muchea $d$ și



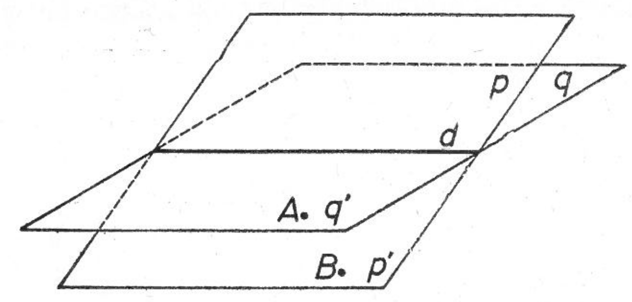


**Fig. V.19**

dacă $p$, $q$ sînt planele ce conțin semiplanele $p'$, respectiv $q'$, *interiorul* unghiului diedru $\widehat{p'q'}$ este intersecția semispațiului limitat de $p$, care conține fața $q'$, cu semispațiul care conține $p'$ și care este limitat de planul $q$. Dacă $A \in q'$ și $B \in p'$ putem scrie (fig. V. 19)

$$\text{Int } \widehat{p'q'} = \,]pA \cap \,]qB.$$

Se numește *mulțime convexă* în spațiul $S$ orice mulțime $M$ conținută în $S$, care are proprietatea:

$$A \in M, \ B \in M, A \neq B \Rightarrow \,]AB[\, \subset M.$$

**Exercițiu.** Să se arate că segmentele, segmentele închise, semidreptele, semidreptele închise, semiplanele, semiplanele închise, semispațiile, semispațiile închise, interiorul unui unghi diedru propriu și interiorul unui unghi diedru propriu, la care se adaugă una din fețe sau ambele fețe, sau muchea, sînt mulțimi convexe.

În general, orice intersecție de mulțimi convexe este o mulțime convexă. De exemplu, dacă $M$, $M'$ sînt două mulțimi convexe și dacă $A$, $B$ sînt două puncte situate și în $M$ și în $M'$, atunci vom avea $]AB[\, \subset M$ și $]AB[\, \subset M'$, deci $]AB[\, \subset M \cap M'$. Aceasta arată că intersecția $M \cap M'$ este o mulțime convexă.

**Să dăm unele exemple.**

Fie $a$, $b$, $c$ trei semidrepte necoplanare, avînd aceeași origine $O$. Luînd aceste semidrepte în ordinea $a$, $b$, $c$, se obține un triplet $(a, b, c)$ care va fi numit *unghi triedru* și va fi notat $\widehat{abc}$. Punctul $O$ va fi numit *vîrful* unghiului triedru $\widehat{abc}$, iar semidreptele $a$, $b$, $c$ vor fi numite *muchiile* lui $\widehat{abc}$ (fig. V.20).

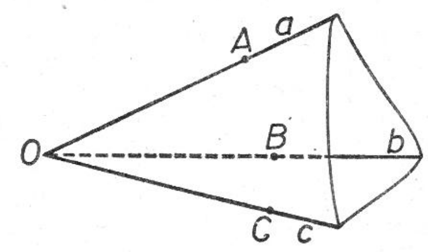


Fig.V.20

Fiind dat unghiul triedru $\widehat{abc}$, să considerăm planele $p = bc$, $q = ca$, $r = ab$, unde $bc$ reprezintă planul ce conține semidreptele $b$, $c$. Dacă alegem punctele

$A\in a$, $B\in b$, $C\in c$, planul $p$ va fi planul ce conține punctele $O, B, C$, $q$ va fi planul ce conține punctele $O$, $A$, $C$ iar $r$ va fi planul ce conține punctele $O$, $A$, $B$. Putem considera semispațiile

$$|pA,\ |qB,\ |rC.$$

Intersecția $|pA \cap |qB \cap |rC$ se numește *interiorul* unghiului triedru $\widehat{abc}$. Interioarele unghiurilor $\widehat{ab}, \widehat{bc}, \widehat{ca}$ vor fi numite *fețele* unghiului triedru $\widehat{abc}$.

Interiorul unui unghi triedru este o mulțime convexă, deoarece este o intersecție de trei mulțimi convexe.

**Exercițiu.** Dacă adăugăm interiorului unui unghi triedru vîrful, una sau mai multe muchii și una sau mai multe fețe, avînd grijă să adăugăm, odată cu două muchii și fața definită de aceste muchii, obținem alte mulțimi convexe.

Fie $p$, $q$ două plane *paralele*, adică două plane avînd intersecția $p\cap q = \varnothing$. Considerăm punctele $A\in p$, $B\in q$ și semispațiile $|pB$, $|qA$. Avem $q\subset |pB$ și $p\subset |qA$. Intersecția $|pB\cap |qA$ este o mulțime convexă, care va fi numită *zona* limitată de planele paralele $p$, $q$.

## 6. Axiome de congruență

Se presupune că anumite perechi de segmente $|AB|$, $|CD|$ sînt legate prin relația „$|AB|$ este congruent cu $|CD|$", care corespunde situației intuitive: segmentul $|AB|$ are ac eași mărime cu segmentul $|CD|$. Se mai presupune că anumite perechi de unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ se găsesc în relația „$\widehat{hk}$ este congruent cu $\widehat{mn}$". Relațiile de congruență ale segmentelor și unghiurilor au următoarele proprietăți, care se admit fără demonstrație.

III.1. **(Axioma purtării congruente a segmentelor.) Fiind date un segment $|AB|$ și o semidreaptă $s$ cu originea $O$, există pe $s$ un punct $P$ și numai unul, astfel ca $|AB| \equiv |OP|$.**

III.2. **Orice segment este congruent cu el însuși. Dacă segmentul $|AB|$ este congruent cu segmentul $|CD|$, atunci $|CD|$ este congruent cu $|AB|$. Dacă $|AB|$, $|CD|$, $|EF|$ sînt segmente astfel încît $|AB|$ este congruent cu $|CD|$ și $|CD|$ este congruent cu $|EF|$, atunci $|AB|$ este congruent cu $|EF|$.**

III. 3. **(Axioma de adunare a segmentelor.) Fiind date segmentele $|AC|$, $|A'C'|$ și punctele $B\in |AC|$, $B'\in |A'C'|$ astfel ca**

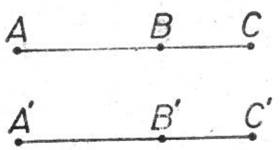


Fig. V.21

$$|AB| \equiv |A'B'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,$$

**avem $|AC| \equiv |A'C'|$, (fig. V. 21).**

III.4. **(Axioma purtării congruente a unghiurilor.) Fiind date un unghi propriu $\widehat{hk}$, un semiplan $u$**



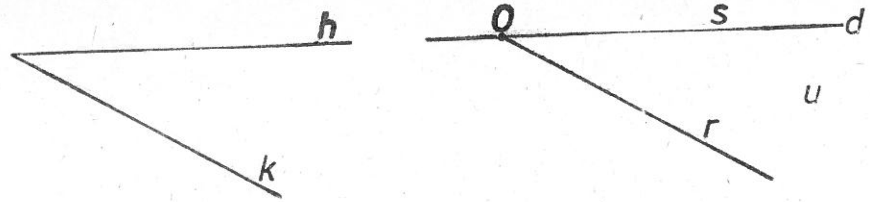


Fig. V.22

**limitat de dreapta $d$ și o semidreaptă $s\subset d$, cu originea $O$, există o semidreaptă $r$ și numai una, astfel ca să avem $r\subset u$, $r$ să aibă originea $O$ și $\widehat{rs} \equiv \widehat{hk}$. (fig. V.22). Orice unghi este congruent cu el însuși.**

III.5. **Fie $ABC$, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca**

$$\hat{A} \equiv \hat{A}',\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|. \tag{1}$$

**În aceste condiții, avem $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ (fig. V.23).**

*Observație.* Aplicînd axioma III.5 triunghiurilor $ACB$, $A'C'B'$, obținem și $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Deci, în definitiv, axioma III.5 arată că, în ipotezele (1), avem $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.

**Definiție.** *Fie* $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$, $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ **două sisteme ordonate formate din cîte $n$ puncte. Vom spune că sistemele $P$, $Q$ sînt congruente, dacă avem relațiile**

$$|P_iP_j| \equiv |Q_iQ_j|,\ \widehat{P_iP_jP_k} \equiv \widehat{Q_iQ_jQ_k},$$

**oricare ar fi indicii distincți $i, j, k$, aleși din mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$.**

**Dacă aceste relații sînt satisfăcute, scriem $P \equiv Q$.**

Dacă $n = 3$, sistemele $P$, $Q$ sînt triunghiuri, în cazul în care punctele care formează fiecare din aceste sisteme sînt necoliniare. În acest caz, folosim notațiile prescurtate $P = P_1P_2P_3$, $Q = Q_1Q_2Q_3$.

În clasa a IX-a, am demonstrat patru teoreme de congruență pentru triunghiuri. Aceste teoreme arată că triunghiurile $P = P_1P_2P_3$, $Q = Q_1Q_2Q_3$ sînt congruente în fiecare din următoarele situații:

1. $\hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1$, $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|$, $|P_1P_3| \equiv |Q_1Q_3|$;

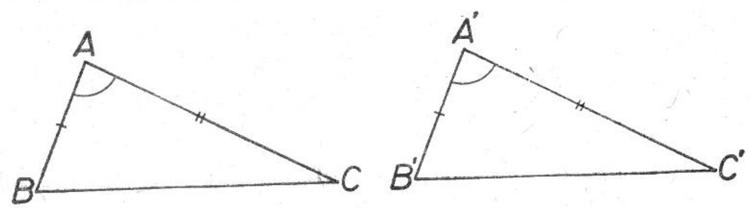


Fig. V.23

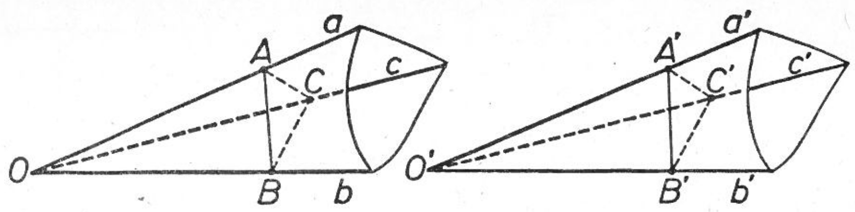



**Fig. V.24**

2. $\hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1,\ \hat{P}_2 \equiv \hat{Q}_2,\ |P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|$;
3. $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|,\ |P_2P_3| \equiv |Q_2Q_3|,\ |P_3P_1| \equiv |Q_3Q_1|$;
4. $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|,\ \hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1,\ \hat{P}_3 \equiv \hat{Q}_3$.

**Definiție. Fiind date două unghiuri triedre $\widehat{abc}$, $\widehat{a'b'c'}$, vom spune că aceste unghiuri sînt congruente dacă avem** (fig. V.24):

$$\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'},\ \widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'},\ \widehat{ca} \equiv \widehat{c'a'}.$$

Fie $O$ respectiv $O'$ vîrfurile celor două unghiuri triedre și fie punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $A' \in a'$, $B' \in b'$, $C' \in c'$ astfel ca

$$|OA| \equiv |O'A'|,\ |OB| \equiv |O'B'|,\ |OC| \equiv |O'C'|.$$

Aplicînd teorema I de congruență a triunghiurilor, deducem relațiile

$$|AB| \equiv |A'B'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,\ |CA| \equiv |C'A'|;$$

aplicînd apoi teorema a III-a de congruență, deducem că sistemul de puncte $(O, A, B, C)$ este congruent cu sistemul $(O', A', B', C')$.

Punctele $O, A, B, C$ sînt necoplanare, deoarece dreptele care conțin semidreptele $a, b, c$ sînt necoplanare.

**Un sistem ordonat format din patru puncte necoplanare $O, A, B, C$ definește un *tetraedru*. Punctele $O, A, B, C$ se numesc vîrfurile tetraedrului $(O, A, B, C)$, segmentele $|OA|, |OB|, |OC|, |AB|, |BC|, |CA|$ se numesc muchiile iar interioarele triunghiurilor $OAB$, $OBC$, $OCA$, $ABC$ se numesc** *fețele* **lui** $(O, A, B, C)$, (fig. V.25).

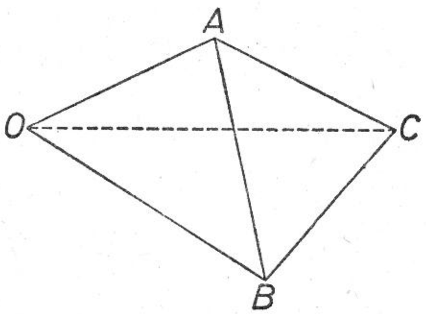



**Fig. V.25**

**Fiind date trei puncte necoliniare $A, B, C$, convenim să notăm prin $(ABC)$ planul ce conține aceste puncte.**

Fiind dat un tetraedru $(O,A,B,C)$, putem considera cele patru plane care conțin fețele lui:

$$p = (OBC),\ q = (OCA),\ r = (OAB),\ h = (ABC).$$

Să considerăm semispațiile

$$S_O = |hO,\ S_A = |pA,\ S_B = |qB,\ S_C = |rC.$$



Avem $A \in S_A$, $B \in S_B$, $C \in S_C$, $O \in S_O$.

Definim *interiorul* tetraedrului $(O, A, B, C)$ prin formula

$$\mathrm{Int}(O, A, B, C) = S_O \cap S_A \cap S_B \cap S_C.$$

Fiind intersecția a patru semispații, *interiorul oricărui tetraedru este o mulțime convexă.*

Putem acuma să introducem noțiunea de *simplex*. Vom defini 0-simplexe, 1-simplexe, 2-simplexe și 3-simplexe.

**Definiții. Un 0-simplex este o mulțime $\{A\}$ formată dintr-un singur punct. Un 1-simplex este o mulțime de forma $[A\ B] = |AB| \cup \{A, B\}$, deci un 1-simplex este un segment închis. Un 2-simplex este o mulțime de forma**

$$[A, B, C] = \mathrm{Int}\ ABC \cup |AB| \cup |BC| \cup |CA| \cup \{A, B, C\},$$

**unde $ABC$ este un triunghi. Un 3-simplex este o mulțime de forma**

$$[O\ A\ B\ C] = \mathrm{Int}\,(O, A, B, C) \cup [A\ B\ C] \cup [O\ A\ B] \cup [O\ B\ C] \cup [O\ C\ A],$$

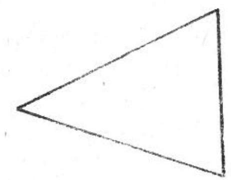
**unde $(O, A, B, C)$ este un tetraedru.**

Punctele $O, A, B, C$ se numesc *vîrfuri* ale simplexelor astfel definite.

Două simplexe distincte se numesc *incidente*, dacă vîrfurile unuia din ele se găsesc printre vîrfurile celuilalt. (fig. V.26).

Două simplexe se numesc *disjuncte*, dacă intersecția lor este mulțimea vidă (fig. V.27).

Două simplexe distincte se numesc *adiacente*, dacă intersecția lor este un simplex incident cu fiecare din cele două simplexe (fig. V.28).



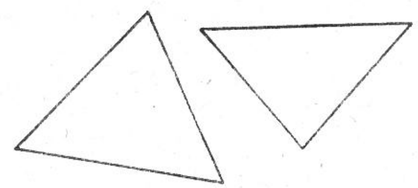


**Fig. V.27**

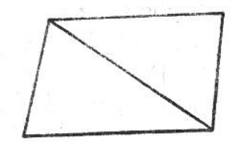


**Fig. V.28**

## 7. Drepte și plane perpendiculare

Reamintim că două drepte concurente $AB$, $AC$ se zic perpendiculare, dacă unghiul $\widehat{BAC}$ este congruent cu un suplement al său. O dreaptă nu poate fi perpendiculară pe ea însăși.

Fie $d$ o dreaptă și $A$ un punct nesituat pe $d$. Alegem două puncte distincte $B$, $C$ pe dreapta $d$. Să notăm prin $p$ planul care conține punctul $A$ și punctele $B$, $C$. Acest plan va conține întreaga dreaptă $d$, deoarece $d$ și $p$ au două puncte comune.

Ne propunem să construim în planul $p$, perpendiculara pe dreapta $d$ care trece prin punctul $A$. Pentru aceasta, considerăm semidreapta $s$, care are originea în $B$, care este situată în planul $p$, de partea opusă lui $A$ față de $d$ și

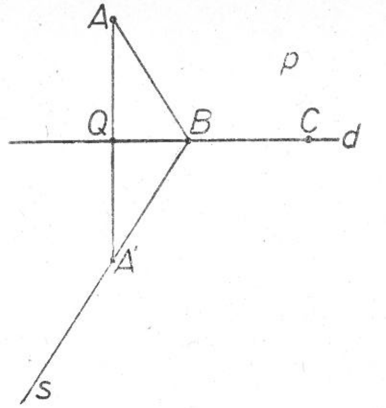



Fig. V.29

astfel ca $s$ să formeze cu semidreapta $|BC$ un unghi congruent cu unghiul $\widehat{ABC}$. Axioma III.4 ne asigură că semidreapta $s$, avînd proprietățile indicate, există și este unică (fig. V.29).

Pe semidreapta $s$ considerăm acel punct $A'$, pentru care $|BA| \equiv |BA'|$. Axioma III.1 asigură existența și unicitatea punctului $A'$ avînd proprietățile indicate. Punctele $A$ și $A'$ se găsesc în semiplane opuse față de dreapta $d$. Rezultă că segmentul $|AA'|$ are un punct comun cu dreapta $d$. Fie $Q$ acest punct.

Triunghiurile $ABQ$, $A'BQ$ sînt congruente, în virtutea teoremei I de congruență. Rezultă $\widehat{BQA} \equiv \widehat{BQA'}$. Dar unghiurile $\widehat{BQA}$, $\widehat{BQA'}$ sînt suplementare deci unghiul $\widehat{BQA}$ este drept. Aceasta înseamnă că dreptele $AQ$ și $d$ sînt perpendiculare.

Dreapta $AQ$ este *singura perpendiculară* ce se poate duce în planul $p$, din punctul $A$, pe dreapta $d$, deoarece nu există nici un triunghi cu două unghiuri drepte.

Construcția indicată arată că *există unghiuri drepte.*

Știind că orice unghi congruent cu un unghi drept este un unghi drept, putem arăta că, fiind date un plan $p$, (fig. V.30) o dreaptă $d \subset p$ și un punct $P$ pe $d$, există o dreaptă în planul $p$, perpendiculară pe $d$ și trecînd prin punctul $P$. Într-adevăr, alegînd un punct $R \in d$ diferit de $P$, construim, în planul $p$, trecînd prin dreapta $d$, de o parte fixată a lui $d$, o semidreaptă $s$ astfel ca $s$ să formeze cu semidreapta $|PR$ un unghi congruent cu un unghi drept, construit așa cum s-a arătat. Atunci unghiul format de $s$ și de $|PR$ va fi drept. Dreapta care conține semidreapta $s$ este perpendiculara ridicată în punctul $P$, pe dreapta $d$, în planul $p$.

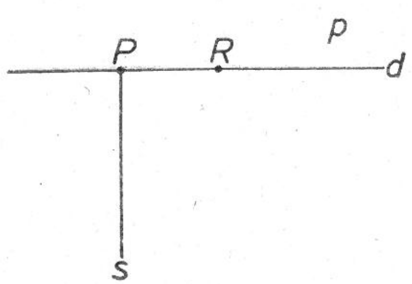



Fig. V.30

D e f i n i ț i e. **Vom spune că o dreaptă $d$ este perpendiculară pe un plan $p$ dacă $d$ și $p$ au un punct comun $P$ și dacă orice dreaptă $a$, trecînd prin $P$ și conținută în planul $p$, este perpendiculară pe dreapta $d$** (fig. V.31).

T e o r e m ă. **Fie $d$, $a$, $b$ trei[1] drepte concurente într-un punct $P$, astfel ca $d \perp a$ și $d \perp b$. Fie $p$ planul ce conține dreptele $a$, $b$. Atunci, pentru orice dreaptă $c$, astfel ca $P \in c \subset p$, avem $d \perp c$.**

[1] Reamintim că, potrivit convențiilor făcute, cînd spunem „Fie $d$, $a$, $b$ trei drepte, subînțelegem că aceste drepte sînt distincte (altfel numărul lor nu ar fi 3!).



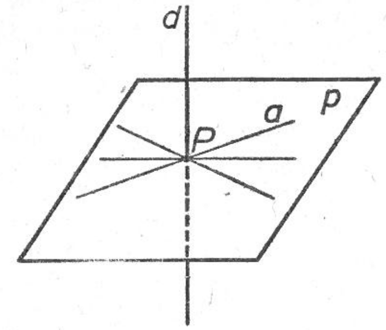



Fig. V.31

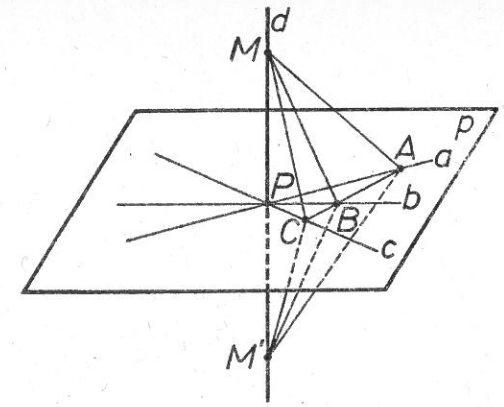



Fig. V.32

*Demonstrație.* Dreptele $a$ și $c$ conțin puncte situate de o parte și de alta a dreptei $b$. Să alegem atunci două puncte $A \in a$ și $C \in c$ astfel ca $A$ și $C$ să se găsească în semiplane opuse față de dreapta $b$. În acest caz, există un punct $B \in b \cap |AC|$. Fie $M$, $M'$ două puncte pe dreapta $d$ astfel ca $P \in |MM'|$ și $|PM| \equiv |PM'|$, (fig. V.32).

Triunghiurile $BMP$, $BM'P$ sînt congruente în virtutea teoremei 1, deoarece $d \perp b$. De asemenea sînt congruente triunghiurile $AMP$, $AM'P$. Rezultă relațiile

(1) $$|MA| \equiv |M'A|, \quad |MB| \equiv |M'B|;$$

deducem atunci că și triunghiurile $ABM$, $ABM'$ sînt congruente, în virtutea teoremei 1 de congruență. Deci avem

(2) $$\widehat{MAB} \equiv \widehat{M'AB}.$$

Rezultă $ACM \equiv ACM'$, deci $|MC| \equiv |M'C|$. Atunci $CMP \equiv CM'P$, deci avem

$$\widehat{MPC} \equiv \widehat{M'PC}.$$

Dar aceste ultime unghiuri sînt suplementare. Deci $\widehat{MPC}$ este un unghi drept, deci $d \perp c$.

*Demonstrația dată de Euclid**. După ce am construit punctele $A$, $B$, $C$ așa cum s-a arătat, construim punctele $A'$, $B'$, $C'$ astfel încît $P$ să fie mijlocul

* Facultativ.

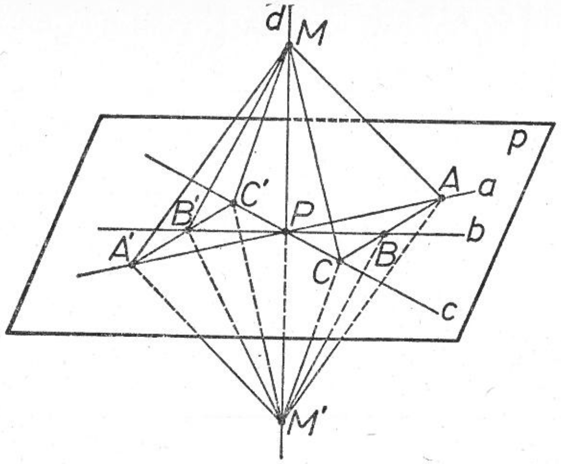


Fig. V.33

comun al segmentelor $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$. În acest caz, punctele $A', B', C'$ aparțin planului $p$ și avem congruențele următoare, care se deduc în același mod ca mai sus: (fig. V.33)

$|MA| \equiv |MA'|$, $|MB| \equiv$ $\equiv |MB'|$, $|AB| \equiv |A'B'|$,

$\widehat{MAB} \equiv \widehat{MA'B'}$, $\widehat{MAC} \equiv$ $\equiv \widehat{MA'C'}$, $|AC| \equiv |A'C'|$, $MAC \equiv MA'C'$, $|MC| \equiv |MC'|$.

Ultima congruență arată că triunghiul $MCC'$ este isoscel, deci că $MC'C \equiv MCC'$. Rezultă $\widehat{MPC} \equiv \widehat{MPC'}$, deci $\widehat{MPC}$ este un unghi drept, deci $d \perp c$.

**P r o b l e m ă  r e z o l v a t ă. Fie $P$ un punct pe dreapta $d$. Prin $d$ ducem toate planele posibile $q$ și, în fiecare din aceste plane, considerăm acea dreaptă $a_q$, pentru care $P \in a_q \perp d$. Cînd $q$ variază, dreapta $a_q$ descrie un plan $p$ perpendicular în $P$ pe dreapta $d$** (fig. V.34), deci: reuniunea dreptelor $a_q$ este un plan $p$ și $P \in p \perp d$.

*Demonstrație.* Există cel puțin două plane distincte $q'$ și $q''$, care conțin dreapta $d$. Fie $a'$ respectiv $a''$ dreptele definite prin relațiile

$$P \in a' \perp d,\quad P \in a'' \perp d,\quad a' \subset q',\quad a'' \subset q''.$$

Fie $p$ planul ce conține dreptele $a'$, $a''$. Din teorema precedentă, rezultă că $d$ este perpendiculară pe orice dreaptă $c$, astfel ca $P \in c \subset p$.

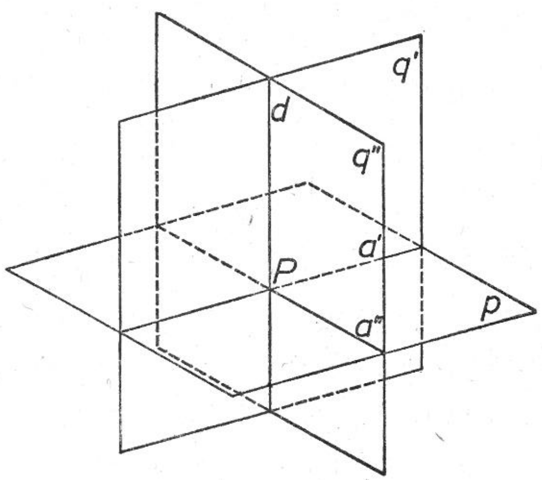


Fig. V.34

Să arătăm că planul $p$ conține toate dreptele perpendiculare pe dreapta $d$ și trecînd prin punctul $P$.

Fie $a$ o astfel de dreaptă, deci $P \in a \perp d$ (fig. V.35). Dreptele $a$ și $d$ aparțin unui plan $q$. Planele $p$, $q$ au punctul comun $P$, deci aceste două plane au ca intersecție o dreaptă $b$. Avem $P \in b \subset p$, deci $b \perp d$. Rezultă că, în planul $q$, avem două drepte $a$ și $b$, conținînd punctul $P$ și amîndouă perpendiculare pe dreapta $d$ din $q$. Rezultă $a = b$, deci $a \subset p$.



Deci am arătat că planul $p$ conține toate dreptele duse prin $P$ și perpendiculare pe dreapta $d$.

Rezultatul stabilit mai poate fi formulat în modul următor:

**T e o r e m ă. Fiind dat un punct $P$ pe o dreaptă $d$, există un plan $p$, astfel ca**

$$P \in p \perp d.$$

**Planul $p$ avînd aceste proprietăți este unic,** (fig. V.36).

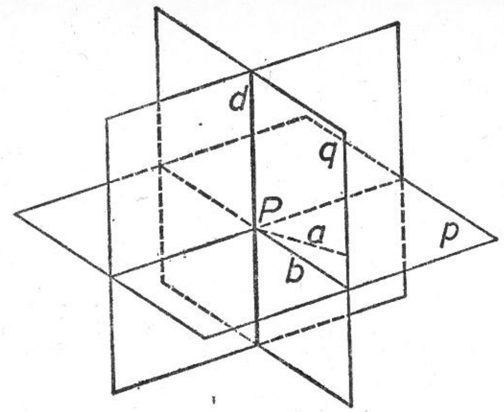


Fig. V.35

**Problemă rezolvată. Fie $M$ un punct, $d$ o dreaptă și $p$ un plan astfel ca**

$$M \notin p,\ d \subset p.$$

**Fie $MC$ perpendiculara dusă prin punctul $M$ pe dreapta $d$, cu $C \in d$. Fie $c$ perpendiculara dusă în planul $p$, prin punctul $C$, pe dreapta $d$. Fie $MP$ perpendiculara dusă din $M$ pe dreapta $c$. Atunci $MP$ este perpendiculară pe planul $p$.**

*Demonstrație.* Putem presupune că $P \in c$, deci $P \in p$ (fig. V.37). Fie $M'$ punctul astfel ca $P \in |MM'|$ și $|MP| \equiv |M'P|$. Triunghiurile $MPC$, $M'PC$ sînt dreptunghice în $P$ și congruente. Rezultă $|MC| \equiv |M'C|$. Din $MC \perp d$, $PC \perp d$, rezultă $M'C \perp d$, deci pentru orice punct $A \in d$, $A \neq C$, triunghiurile $MCA$, $M'CA$ sînt dreptunghice și congruente. Deci avem $|MA| \equiv$

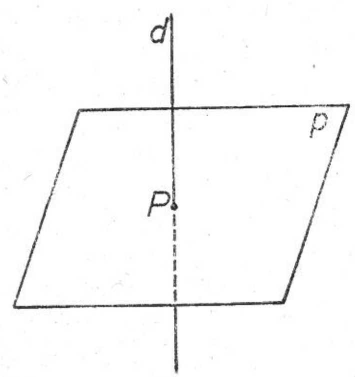


Fig. V.36

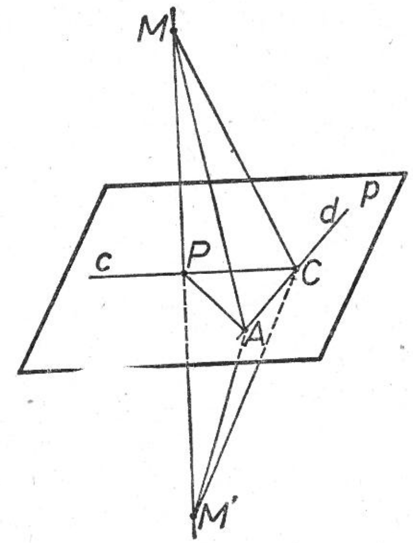


Fig. V.37

$\equiv |M'A|$. Atunci şi triunghiurile $MPA$, $M'PA$ sînt congruente. În acest caz, $\widehat{MPA} \equiv \widehat{M'PA}$, deci $\widehat{MPA}$ este un unghi drept şi rezultă $MP \perp PA$. Din $MP \perp PC$, $MP \perp PA$ rezultă că dreapta $MP$ este perpendiculară pe planul $p$. Proprietatea astfel demonstrată arată că:

*Dacă $M$ este un punct exterior unui plan $p$, atunci există o dreaptă $h$, care trece prin $M$ şi care este perpendiculară pe planul $p$.*

Vom demonstra următoarea

**T e o r e m ă.** **Prin orice punct $M$, exterior unui plan $p$, se poate duce o singură dreaptă perpendiculară pe planul $p$.**

*Demonstraţie.* (Prin reducere la absurd). Presupunem că prin punctul $M \notin p$ se pot duce două drepte $h, k$ perpendiculare pe planul $p$. Fie $P, Q$ punctele de intersecţie ale planului $p$ cu dreptele $h, k$. Dacă $h \neq k$, avem $P \neq Q$, deoarece din $P = Q$ ar rezulta $h = MP = MQ = k$. Rezultă că $MPQ$ este un triunghi. Acest triunghi ar avea două unghiuri drepte, deoarece $h \perp PQ$ şi $k \perp QP$. Un astfel de triunghi nu poate exista. Deci $h = k$.

**Problemă rezolvată. Fie $d$ dreaptă perpendiculară pe planul $p$ în punctul $A$ şi fie $q$ un plan trecînd prin $d$. Planele $p, q$ au ca intersecţie o dreaptă $a$. Fie punctele $B \in a$, $B \neq A$, şi $Q \in q$, astfel ca $BQ \perp a$. Atunci dreapta $BQ$ este perpendiculară pe planul $p$ (fig. V.38).**

*Demonstraţie.* Fie $c$ dreapta avînd proprietăţile

$$A \in c, \quad c \subset p, \quad c \perp a.$$

Din formulele $c \perp d$, $c \perp a$ deducem că dreapta $c$ este perpendiculară pe planul $q$ în punctul $A$, deoarece este perpendiculară pe două drepte distincte, situate în planul $q$ şi conţinînd punctul $A$. Avem atunci $c \perp AQ$. Fie $Q'$ punctul de pe dreapta $BQ$, astfel ca

$$B \in |QQ'|, \quad |BQ| \equiv |BQ'|.$$

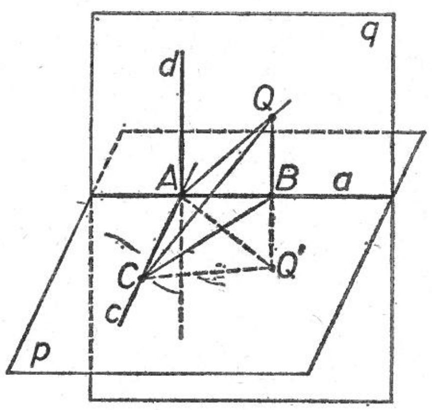


Fig. V.38

Avem $Q' \in BQ \subset q$, deci $Q' \in q$. Prin urmare, $c \perp AQ'$.

Fie $C$ un punct pe dreapta $c$, diferit de $A$.

Triunghiurile $ABQ$, $ABQ'$ sînt congruente, avînd unghiurile din $B$ drepte şi catetele congruente două cîte două. Deci $|AQ| \equiv |AQ'|$.

Triunghiurile $ACQ$, $ACQ'$ sînt dreptunghice în $A$ şi au catetele congruente două cîte două. Rezultă $|CQ| \equiv |CQ'|$.



Triunghiurile $CBQ$, $CBQ'$ sînt congruente, avînd laturile congruente două cîte două. Rezultă $\widehat{CBQ} \equiv \widehat{CBQ'}$. Dar aceste unghiuri sînt suplementare. Aceasta înseamnă că $\widehat{CBQ}$ este un unghi drept şi deci $BQ \perp BC$. În acest caz, dreapta $BQ$ este perpendiculară pe dreptele distincte $BA, BC$, deci $BQ$ este perpendiculară în $B$ pe planul $p$.

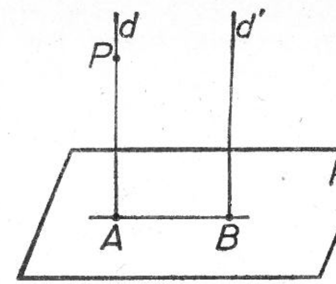


Fig. V.39

**C o r o l a r. Fiind dat un punct $B$ într-un plan $p$, există cel puţin o dreaptă $d'$, perpendiculară în $B$ pe planul $p$** (fig. V.39).

*Demonstraţie.* Fie $P$ un punct nesituat în planul $p$. Prin $P$ ducem dreapta $d$, perpendiculară pe planul $p$. Fie $A \in d \cap p$ şi fie $q$ planul ce trece prin punctele $P, A, B$. Dreapta $d'$, din planul $q$, care trece prin $B$ şi care este perpendiculară pe dreapta $BA$ din planul $q$, este, potrivit teoremei precedente, perpendiculară pe planul $p$.

**T e o r e m ă. Fiind dat un punct $B$ într-un plan $p$, există o singură dreaptă care să treacă prin $B$ şi care să fie perpendiculară pe planul $p$.**

*Demonstraţie.* Să presupunem că există două drepte distincte $d'$, $d''$ astfel ca (fig. V.40)

$$B \in d' \perp p, \quad B \in d'' \perp p.$$

În acest caz, dreptele $d'$, $d''$ aparţin unui plan $q$, deoarece două drepte concurente aparţin unui aceluiaşi plan. Planele $p, q$ sînt distincte, deoarece $d' \subset q$ şi $d' \perp p$. Atunci intersecţia planelor $p, q$ este o dreaptă $a$, ce conţine punctul $B$. Am obţinut în acest fel trei drepte $a$, $d'$, $d''$, coplanare şi astfel ca $a \perp d'$, $a \perp d''$, deoarece $a \subset p$, $d' \perp p$, $d'' \perp p$. Dar, într-un plan $q$, se poate duce o singură perpendiculară într-un punct $B$ la o dreaptă $a$. Deci avem $d' = d''$, contrar ipotezei: $d' \neq d''$. Deci prin $B$ trece o singură dreaptă perpendiculară pe planul $p$.

**C o r o l a r. Fie $d$, $d'$ două drepte distincte, perpendiculare pe un acelaşi plan $p$. Atunci $d$, $d'$ sînt coplanare** (fig. V.41).

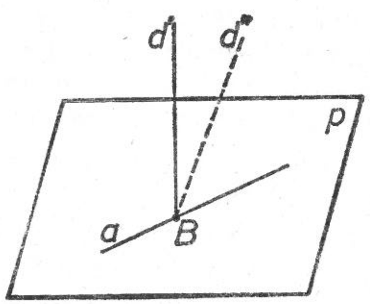


Fig. V.40

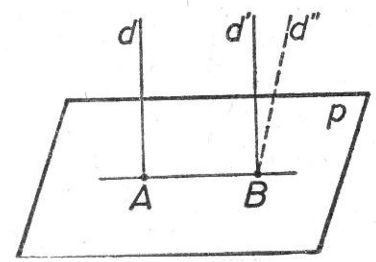


Fig. V.41

8

*Demonstrație.* Fie punctele $A \in d \cap p$, $B \in d' \cap p$ și fie $q$ planul ce conține dreapta $d$ și punctul $B$. Perpendiculara $d''$ din planul $q$, pe dreapta $AB$, ridicată în punctul $B$, este perpendiculară pe planul $p$. Dintr-o teoremă precedentă rezultă $d'' = d'$, deci avem $d' \subset q$. Dar și $d \subset q$, deci dreptele $d$, $d'$ sînt coplanare.

**T e o r e m ă. Dacă dreptele $d$, $d'$ sînt distincte și perpendiculare pe un același plan $p$, atunci $d$, $d'$ sînt drepte paralele.**[1]

*Demonstrație.* Am arătat că dreptele $d$, $d'$ se găsesc într-un plan $q$. Dar aceste drepte sînt perpendiculare pe dreapta $AB$ din planul $q$, unde $A \in d \cap p$ și $B \in d' \cap p$. Deci dreptele $d, d'$ nu sînt concurente, deoarece în planul $q$ nu există nici un triunghi cu două unghiuri drepte. Deci $d$, $d'$ sînt drepte coplanare și nesecante, deci aceste drepte sînt paralele.

Să considerăm o dreaptă $d$ și fie $A$, $B$ două puncte distincte pe această dreaptă. În fiecare plan $q$, ce conține dreapta $d$, să considerăm dreptele $a_q$, $b_q$ astfel ca (fig. V.42):

$$A \in a_q \subset q, \quad a_q \perp AB, \quad B \in b_q \subset q, \quad b_q \perp AB.$$

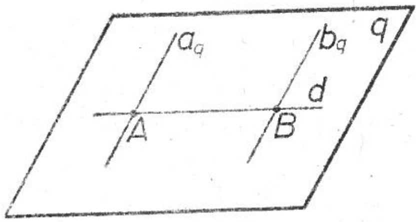



Fig. V.42

Dreptele $a_q$, $b_q$ sînt paralele, deoarece sînt coplanare și distincte și sînt perpendiculare pe dreapta $AB$ din planul lor.

Am arătat că atunci cînd planul $q$ variază, astfel încît să conțină mereu dreapta $d$, dreptele $a_q$ rămîn într-un plan fix $p$, anume în planul perpendicular în $A$ pe dreapta $d$. La fel se arată că dreptele $b_q$ vor aparține planului $r$, perpendicular în $B$ pe aceeași dreaptă $d$.

**Problemă rezolvată. Fie $A$, $B$ două puncte distincte ale unei drepte $d$ și fie $p$, $r$ planele perpendiculare pe dreapta $d$ și trecînd respectiv prin punctele $A$, $B$. Atunci intersecția $p \cap r$ este mulțimea vidă (fig. V.43).**

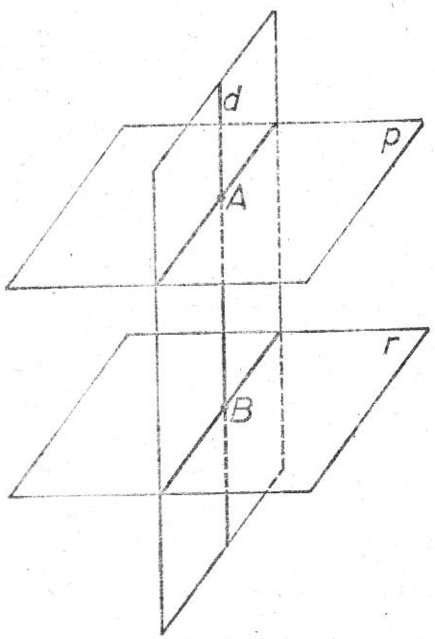



Fig. V.43

*Demonstrație.* Să presupunem că există un punct $P$, comun planelor $p, r$.

[1] Reamintim că două drepte se zic *paralele*, dacă sînt coplanare și nesecante (disjuncte).



Avem $d \cap p = \{A\}$, $d \cap r = \{B\}$, deci $P \notin d$. Atunci punctele $P$, $A$, $B$ aparțin unui plan $q$. Avem $d \subset q$, deoarece $A \in d \cap q$, $B \in d \cap q$ și $A \neq B$. Apoi $\perp AP$ și $d \perp BP$, deoarece $d$ este perpendiculară pe planul $p \supset AP$ și pe planul $r \supset BP$. S-a format în acest fel triunghiul $PAB$, avînd două unghiuri drepte, în $A$ și $B$. Aceasta nu se poate, deci nu există nici un punct comun planelor $p$, $r$.

Teorema demonstrată anterior poate fi formulată în modul următor:

**Două plane perpendiculare pe o aceeași dreaptă, în două puncte distincte, sînt nesecante.**

**D e f i n i ț i e. Numim plane paralele orice două plane, care nu au nici un punct comun.**

Atunci avem următoarea

**T e o r e m ă. Două plane perpendiculare pe o aceeași dreaptă, în două puncte distincte, sînt paralele.**

**T e o r e m ă. Fie $d$ o dreaptă și fie $A$ un punct nesituat pe $d$. Există un unic plan $p$, astfel ca $A \in p$ și $p \perp d$,** (fig. V.44).

*Demonstrație.* Dacă un plan $p$ verifică condițiile din teoremă, atunci $p$ intersectează dreapta $d$ într-un punct $B$ și avem $d \perp AB$. Deci $B$ este punctul în care dreapta $d$ este intersectată de dreapta perpendiculară, dusă din $A$ pe $d$. Știm că prin $B$ trece un singur plan perpendicular pe dreapta $d$. Rezultă că există un singur plan $p$, cu proprietățile $A \in p$, $p \perp d$ și că acest plan se obține în modul următor: se consideră dreapta $AB$ dusă prin $A$ și perpendiculară pe $d$; presupunînd că $B \in d$, se consideră apoi planul $p$, care trece prin $B$ și care este perpendicular pe dreapta $d$. Acest plan va conține dreapta $AB$, deci și punctul $A$.

**D e f i n i ț i e. Fiind date două plane $p$, $q$, spunem că aceste plane sînt perpendiculare, dacă există trei drepte $a$, $b$, $c$, avînd un punct comun și astfel ca** (fig. V.45):

$$p \cap q = c, \quad a \subset p, \quad b \subset q, \quad a \perp c, \quad b \perp c, \quad a \perp b.$$

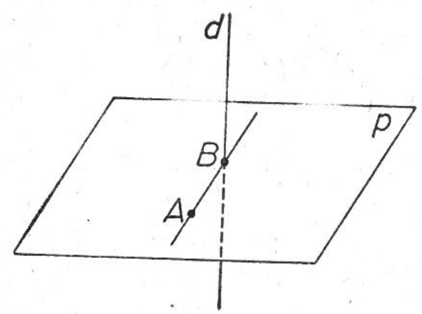



Fig. V.44

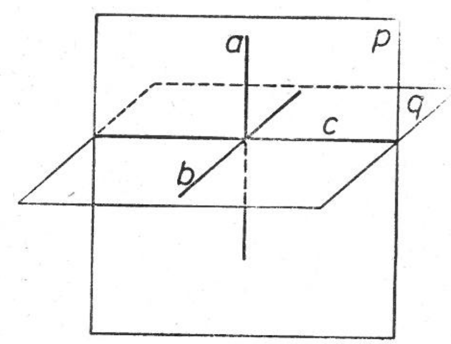



Fig. V.45

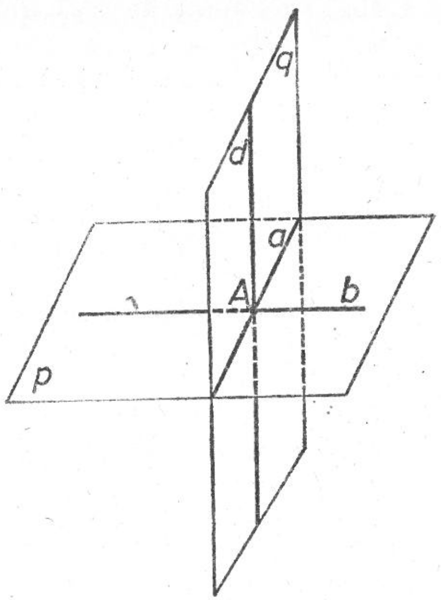



Fig. V.46

**T e o r e m ă. Fie $p$ un plan şi fie $d$ o dreaptă perpendiculară pe planul $p$. Atunci orice plan $q$, care conţine dreapta $d$, este perpendicular pe planul $p$, (fig. V.46).**

*Demonstraţie.* **Fie $A$ punctul de intersecţie a planului $p$ şi dreptei $d$.**

**Fiind dat un plan $q$, astfel ca $d \subset q$, să considerăm dreapta $a = p \cap q$ şi fie $b$ dreapta situată în planul $p$ şi** perpendiculară în $A$ pe dreapta $a$. Dreptele $a, b, d$ au punctul comun $A$ şi sînt perpendiculare două cîte două, În plus, avem $a = p \cap q$, $d \subset q$ şi $b \subset p$. Rezultă că planele $p$, $q$ sînt perpendiculare.

*Extinderea noţiunii de perpendicularitate a două drepte, la cazul perechilor de drepte necoplanare.*

Într-o definiţie anterioară, am considerat perpendiculare două drepte secante $AB$, $AC$, pentru care unghiul $\widehat{BAC}$ este drept, deci congruent cu un suplement al său. Aceasta înseamnă că dreapta $AC$ se găseşte în planul dus prin $A$ perpendicular pe dreapta $AB$.

**D e f i n i ţ i e. Vom spune că două drepte necoplanare $d$ şi $e$ sînt perpendiculare, dacă dreapta $d$ aparţine unui plan $p$, care este perpendicular pe dreapta $e$. Vom scrie şi în acest caz, $d \perp e$.**

**Exerciţii recapitulative.**

Convenim să notăm prin $a, b, c, d, a', b', c', d'$ drepte, prin $A, B, ..., M, N, P, Q, R, ...$ puncte şi prin $p, q, r, s, p', q', r', s'$ plane. În formulele următoare, să se înlocuiască semnul „o" printr-unul din semnele $\perp$, $\in$, $\neq$, $\subset$ astfel încît să se obţină propoziţi demonstrabile şi să se dea demonstraţiile corespunzătoare.

**1.** $d \perp a$, $d \perp b$, $d \circ c$, $P \in a \cap b \cap c \Rightarrow a, b, c$ coplanare.

**2.** $M \notin p$, $C \in d \subset p$, $MC \perp d$, $C \in c \subset p$, $c \circ d$, $M \in b$, $b \perp c \Rightarrow b \perp p$.

**3.** $P \in a \cap b \cap c$, $a \cup b \cup c \subset p$, $d \circ a$, $d \perp b$, $a \neq b \Rightarrow d \perp c$.

**4.** $A \in p \cap d$, $p \perp d$, $d \subset q$, $a = p \cap q$, $B \in a$, $B \neq A$, $Q \circ q$, $BQ \perp a \Rightarrow BQ \perp p$.

**5.** $A \in d$, $B \in d$, $A \circ B$, $A \in p$, $p \perp d$, $B \in q$, $q \perp d \Rightarrow p \cap q = \emptyset$.

**6.** $A = A$ şi $d = d \Rightarrow$ există un singur plan $p$ astfel ca $A \circ p$ şi $p \perp d$.

**7.** $d \perp p$, $d \circ q \Rightarrow p \perp q$.



**Exerciţii**

**1.** Să se arate că există trei drepte $a, b, c$, avînd un punct comun şi perpendiculare două cîte două (fig. V. 47).

**2.** Fie $a, b, c, d$ patru drepte avînd un punct comun şi astfel ca $d$ să fie perpendiculară pe fiecare din dreptele $a, b, c$. Să se arate că dreptele $a, b, c$ sînt coplanare (fig. V.48).

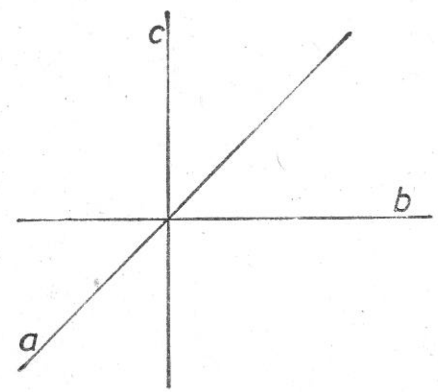



Fig. V.47

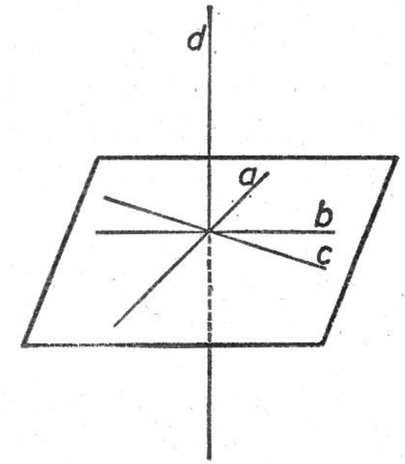



Fig. V.48

**3.** Să se arate că nu există patru drepte, avînd un punct comun şi perpendiculare două cîte două.

**4.** Să se arate că există o mulţime $D$, de drepte, astfel ca prin fiecare punct $A$ din spaţiu să treacă o dreaptă şi una singură din mulţimea $D$, şi astfel ca orice două drepte distincte din $D$ să fie paralele.

*(Indicaţie.* Se consideră un plan $p$ şi se notează prin $D$ mulţimea dreptelor care sînt perpendiculare pe planul $p$ (fig. V.49)).

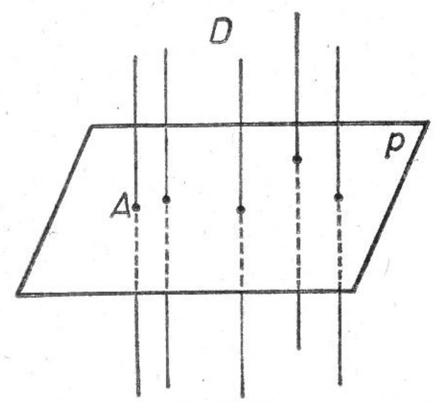



Fig. V.49

**5.** Să se arate că există o mulţime $P$, de plane, astfel ca prin orice punct $A$ să treacă un plan şi unul singur din mulţimea $P$ şi astfel ca orice două plane distincte din mulţimea $P$ să fie paralele.

*(Indicaţie.* Se consideră o dreaptă $d$ şi se notează prin $P$ mulţimea planelor care sînt perpendiculare pe dreapta $d$ (fig. V.50).)

**6.** Să se arate că dacă o dreaptă $d$ este perpendiculară pe un plan $p$, atunci intersecţia $d \cap p$ conţine un singur punct. Să se deducă că $d$ nu este conţinută în planul $p$ (fig. V.51).

**7.** Fie $O, A, B, C$ patru puncte necoplanare şi fie $M$ punctul de intersecţie a mediatoarelor triunghiului $ABC$. Să se arate că dacă dreapta $OM$ este perpendiculară pe

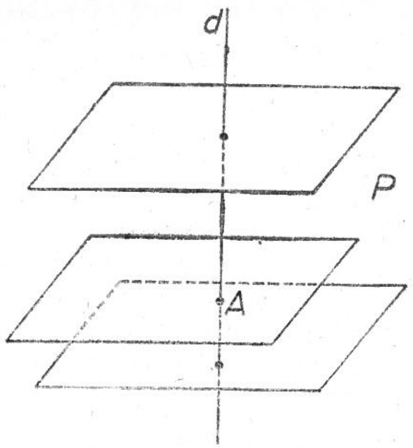



Fig. V.50

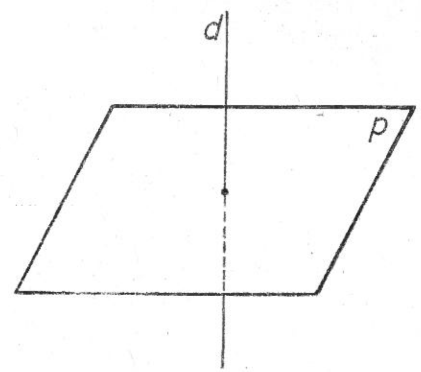



Fig. V.51

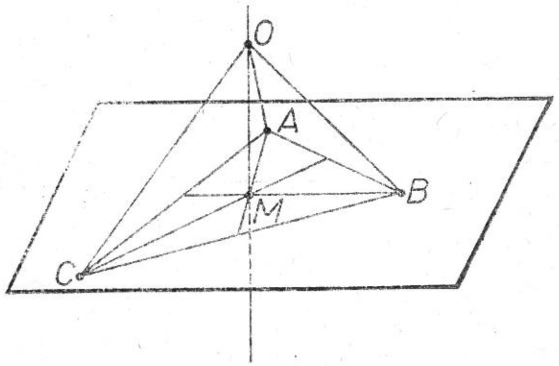



Fig. V.52

planul ce conține punctele $A$, $B$, $C$, atunci avem

$|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$ (fig. V.52).

8. Fie $O$, $A$, $B$, $C$ patru puncte necoplanare astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$. Să se arate că dreapta care trece prin punctul $O$ și care este perpendiculară pe planul ce conține punctele $A$, $B$, $C$, trece prin punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului $ABC$.

*(Indicație* pentru exercițiile 7 și 8. Se consideră triunghiurile dreptungice $OAM$, $OBM$, $OCM$ și se arată ce aceste triunghiuri sînt congruente două cîte două.)

9. Să se arate că relația de perpendicularitate a două drepte necoplanare este simetrică, deci că $d \perp e$ implică $e \perp d$.

## 8. Proiecții ortogonale

Fie $d$ o dreaptă. Fiecărui punct $A$ din spațiu i se asociază un unic punct $A'$, situat pe dreapta $d$, astfel ca:

1. Dacă $A \in d$, atunci $A' = A$.
2. Dacă $A \notin d$, atunci dreapta $AA'$ este perpendiculară pe dreapta $d$.

Punctul $A'$ se numește *proiecția ortogonală* a punctului $A$ pe dreapta $d$. Cînd nu există pericol de confuzie, se mai spune că $A'$ este *proiecția* punctului $A$ pe dreapta $d$, (fig. V.53).

*Dacă p este un plan perpendicular pe dreapta d într-un punct B, atunci proiecțiile ortogonale ale tuturor punctelor din planul p, pe dreapta d, coincid cu*



*punctul B; reciproc, dacă un punct A are ca proiecție ortogonală pe dreapta d punctul B; atunci $A \in p$,* (fig. V.54).

Fie dat un plan $q$. Fiecărui plan $A$ nesituat în planul $q$, i se asociază un unic punct $A''$, situat în planul $q$, astfel ca $AA'' \perp q$. Punctul $A''$ se numește *pro-*

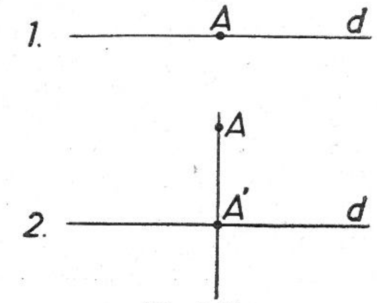



Fig. V.53

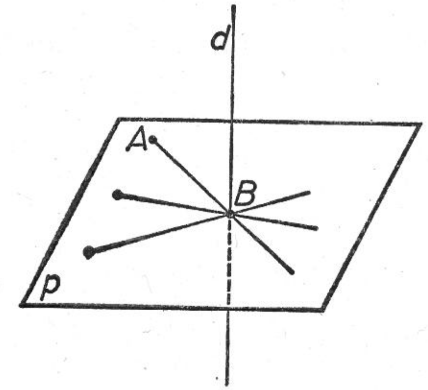



Fig. V.54

*iecția ortogonală* (sau proiecția) *punctului A pe planul q*. Dacă $A \in q$, proiecția lui $A$ pe planul $q$ va fi punctul $A$ însuși, (fig. V.55).

***Dacă a este o dreaptă perpendiculară pe planul q, atunci toate punctele dreptei a vor avea ca proiecție pe planul q punctul de intersecție al dreptei a cu planul q.*** **Reciproc, orice punct $A$, care are ca proiecție pe planul $q$ un anumit punct $B \in q$, se găsește pe dreapta dusă prin $B$ perpendicular pe planul $q$.**

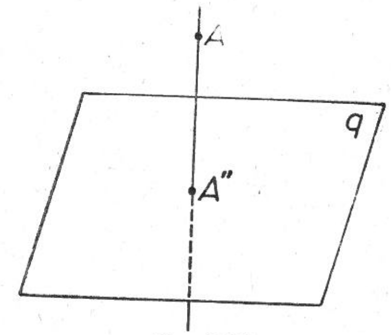



Fig. V.55

Vom folosi următoarele notații:

Pentru proiecția punctului $A$ pe planul $q$ : $A'' = \mathrm{pr}_q A$.

Pentru proiecția punctului $A$ pe dreapta $d$ : $A' = \mathrm{pr}_d A$.

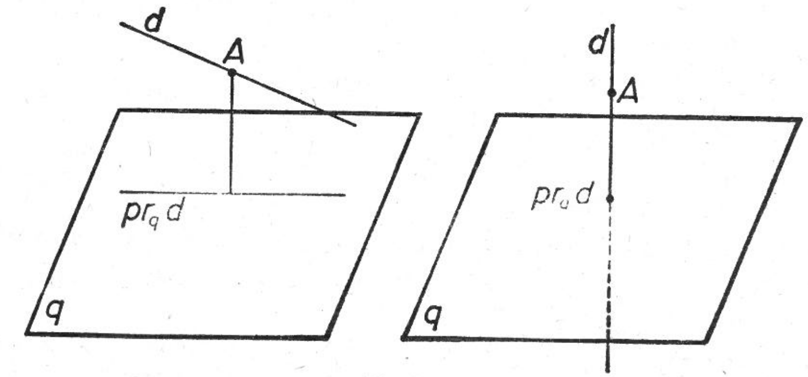



Fig. V.56

**Exercițiu.** Fie $d$ o dreaptă și $q$ un plan. Să se arate că mulțimea

$$\mathrm{pr}_q d = \{\mathrm{pr}_q A;\ A \in d\}$$

este o dreaptă sau o mulțime formată dintr-un singur punct, după cum $d$ nu este perpendiculară pe $q$ sau este perpendiculară pe acest plan (fig. V.56).

## 9. Teorema celor trei perpendiculare

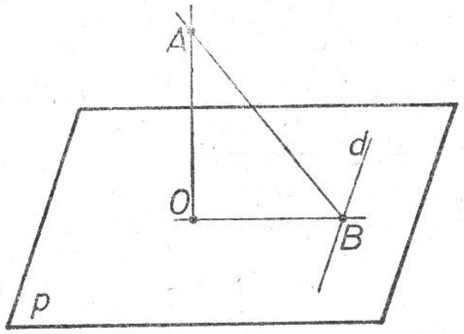



Fig. V.57

**T e o r e m ă. Fie $p$ un plan, $d$ o dreaptă conținută în acest plan și fie punctele $A \notin p$, $O \in p$, $O \notin d$, $B \in d$. Sînt adevărate implicațiile** (fig. V.57):

1. $AB \perp d,\ OB \perp d,\ AO \perp OB \Rightarrow$ $\Rightarrow AO \perp p$.
2. $AO \perp p,\ AB \perp d \Rightarrow$ $\Rightarrow OB \perp d,\ AO \perp OB$.
3. $AO \perp p,\ OB \perp d \Rightarrow AB \perp d$.

*Demonstrație.* Implicația 1 a fost demonstrată la pag. 11.

Implicația 2 se demonstrează în modul următor: notăm prin $a$ dreapta ce trece prin $B$, (fig. V.58) care este perpendiculară pe dreapta $d$ și care este conținută în planul $p$. Fie $O'$ punctul de pe dreapta $a$, pentru care $AO' \perp a$. Atunci $AO' \perp p$. Dar prin $A$ trece o singură dreaptă perpendiculară pe planul $p$. Deci avem $AO' = AO$ și atunci $\{O'\} = AO' \cap p = AO \cap p = \{O\}$, deci $O' = O$. Atunci $a = BO' = BO$, deci $BO \perp d$. Relația $AO \perp OB$ rezultă din $AO \perp p$ și $OB \subset p$.

Pentru a demonstra implicația 3, fie $B'$ punctul de pe dreapta $d$, pentru care avem $AB' \perp d$. Fie $b$ dreapta definită prin condițiile (fig. V.59)

$$B' \in b,\ b \subset p,\ b \perp d.$$

Fie $O''$ punctul de pe dreapta $b$, pentru care $AO'' \perp b$. Atunci dreapta $AO''$ este perpendiculară pe planul $p$. Dar din punctul $A$ se poate duce o singură

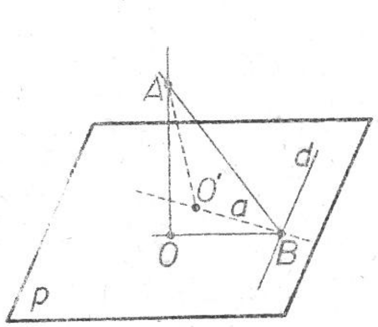



Fig. V.58

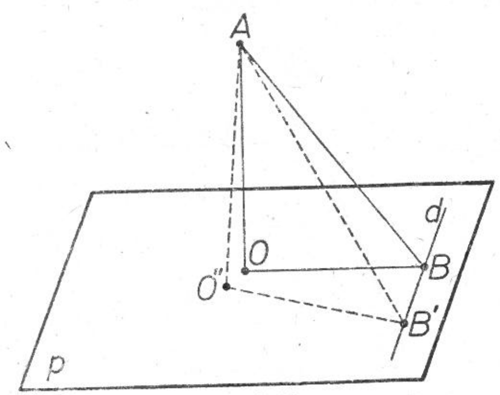



Fig. V.59



dreaptă perpendiculară pe planul $p$. **Rezultă $AO'' = AO$ și deci $O'' = O$.** Relațiile $OB \perp d$, $OB' \perp d$ arată că $B' = B$, deci avem $AB \perp d$.

Folosind noțiunea de proiecție ortogonală, putem formula implicațiile din teorema precedentă sub forma:

1. $B = \mathrm{pr}_d A,\ B = \mathrm{pr}_d O,\ O = \mathrm{pr}_{OB} A \Rightarrow O = \mathrm{pr}_p A.$
2. $O = \mathrm{pr}_p A,\ B = \mathrm{pr}_d A \Rightarrow B = \mathrm{pr}_d O,\ O = \mathrm{pr}_{OB} A,$
3. $O = \mathrm{pr}_p A,\ B = \mathrm{pr}_d O \Rightarrow B = \mathrm{pr}_d A.$

Implicația 3 este cunoscută sub numele de *teorema celor trei perpendiculare*. Implicațiile 1 și 2 sînt proprietăți reciproce ale acestei teoreme. Să reținem teorema celor trei perpendiculare sub forma:

$$\boxed{A \notin p, O \in p, O \notin d, B \in d, AO \perp p, OB \perp d \Rightarrow AB \perp d.}$$

### Exerciții

**1.** Fie $A, B, C, D$ patru puncte necoplanare astfel ca $AB \perp CD$. Considerăm punctele $P \in CD$, $M \in BP$ astfel ca $AP \perp CD$ și $AM \perp BP$. Să se arate că $BM \perp CD$ și $AM \perp (BCD)$.

**2.** Păstrînd notațiile din exercițiul precedent, mai presupunem că $AD \perp BC$, $AC \perp BD$. Să se arate că $M$ este ortocentrul triunghiului $BCD$.

**3.** Păstrînd ipotezele din exercițiul 2, să se arate că dreptele care unesc punctele $A, B, C, D$ cu ortocentrele triunghiurilor $BCD$, $ACD$, $ABD$, $BCA$ sînt perpendiculare pe planele acestor triunghiuri și concurente.

**4.** Fie $a, b, c$ trei drepte necoplanare concurente într-un punct $P$ și fie planele $p, q, r$ astfel ca $a = q \cap r$, $b = r \cap p$ și $c = p \cap q$. Să se arate că dacă $r \perp c$ și $q \perp b$, atunci $a \perp p$.

**5.** Fie $a, b$ două drepte neparalele. Să se arate că prin fiecare punct $A$ trece o singură dreaptă $d$, perpendiculară pe fiecare din dreptele $a, b$.

(*Indicație.* Se consideră planele duse prin $A$ și perpendiculare pe dreptele $a$, respectiv $b$. Aceste plane au ca intersecție dreapta căutată.)

**6.** Fiind date un plan $p$ și o dreaptă $d$, să se arate că există cel puțin un plan $q$ astfel ca $d \subset q$ și $q \perp p$. În ce caz există un singur astfel de plan?

(**R.** Planul $q$ este unic dacă și numai dacă dreapta $d$ nu este perpendiculară pe planul $p$.)

## 10. Inegalități geometrice
### (PENTRU CERCURI DE ELEVI)

Reamintim următoarele definiții:

Fiind date două segmente $a$, $b$, spunem că $a$ este *mai mare* decît $b$ dacă există trei puncte coliniare $O$, $A$, $B$ astfel ca $B \in |OA|$, $a \equiv |OA|$ și $b \equiv |OB|$ (fig. V.60). Spunem că $a$ este *mai mare sau congruent cu* $b$, în formule $a \geqslant b$, dacă $a > b$ sau dacă $a \equiv b$.

Fiind date două unghiuri proprii $u$, $v$, spunem că $u$ este *mai mare* decît $v$ dacă există două unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{hl}$, astfel ca $l \subset \text{Int}\ \widehat{hk}$, $u \equiv \widehat{hk}$ și $v \equiv \widehat{hl}$ (fig. V.61). Scriem $u \geqslant v$ dacă $u$ este mai mare decît $v$ sau dacă $u$ este congruent cu $v$.

Reamintim de asemenea următoarele trei teoreme:

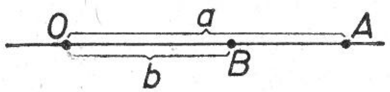



**Fig. V.60**

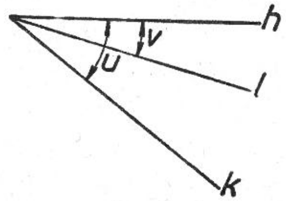



**Fig. V.61**

**Teoremă. Fiind date trei segmente $a$, $b$, $c$, condiția necesară și suficientă pentru ca să existe un triunghi $ABC$ avînd $|AB| \equiv c$, $|BC| \equiv a$, $|CA| \equiv b$, este ca să fie verificate inegalitățile** (fig. V.62)

$$b + c > a,\ c + a > b,\ a + b > c.$$

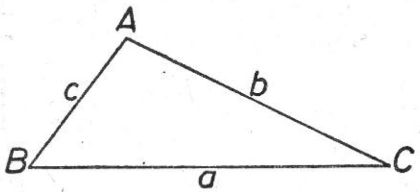



**Fig. V.62**

Presupunînd că am ordonat segmentele $a$, $b$, $c$ în ordinea mărimilor, de exemplu astfel ca $a \geqslant b \geqslant c$, condițiile precedente se reduc la una singură:

$$b + c > a.$$

**Teoremă. Dacă $ABC$ este un triunghi, și dacă $\hat{A} > \hat{B}$, atunci $|BC| > |AC|$. Reciproc, dacă $|BC| > |CA|$, atunci $\hat{A} > \hat{B}$** (fig. V.63).

**Teoremă. Fie $O$, $A$, $B$, $C$ patru puncte distincte astfel ca $OA \perp OB$ și $B \in |OC|$. În acest caz, avem $|AC| > |AB|$** (fig. V.64).

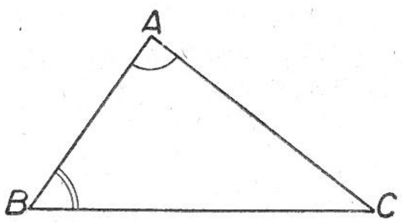



**Fig. V.63**

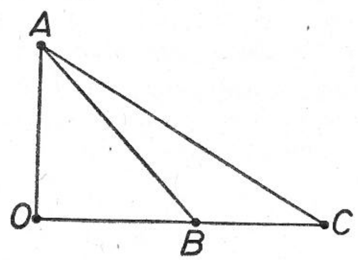



**Fig. V.64**

Am convenit să spunem că un segment $|OM|$ reprezintă suma segmentelor $a$, $b$, dacă există un punct $P \in |OM|$ astfel ca $|OP| \equiv a$ și $|PM| \equiv b$ (fig. V.65). Dacă segmentele $|OM|$, $|O'M'|$ reprezintă fiecare suma segmentelor $a$, $b$, atunci $|OM| \equiv |O'M'|$.

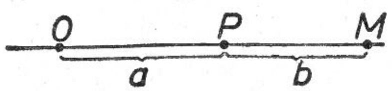



**Fig. V.65**

Fiind date două unghiuri $u$, $v$ și un unghi $\widehat{hm}$, spunem că $\widehat{hm}$ reprezintă



suma unghiurilor $u$, $v$, dacă există o semidreaptă $k$, avînd aceeași origine cu semidreptele $h$ și $m$ și astfel ca să avem $k \subset \text{Int}\ \widehat{hm}$, $u \equiv \widehat{hk}$ și $v \equiv \widehat{km}$, (fig. V.66).

Nu orice două unghiuri $u$, $v$ pot fi adunate în sensul acestei definiții, deoarece nu există unghiuri mai mari decît un unghi alungit.

Am convenit să considerăm orice unghi alungit ca reprezentînd suma a orice două unghiuri suplementare.

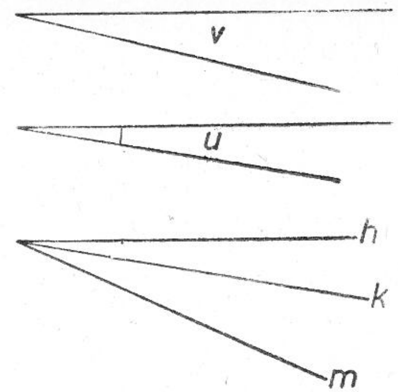



**Fig. V.66**

Dacă asociem fiecărui unghi $u$ măsura sa măs $u$, în grade sau în radiani, relația $u > v$ va fi echivalentă cu măs $u >$ măs $v$, iar dacă unghiul $w$ reprezintă suma unghiurilor $u$, $v$, avem măs $w =$ măs $u +$ măs $v$.

Pentru orice mulțime finită de unghiuri $u_1, u_2, \dots, u_n$, putem considera suma măsurilor acestor unghiuri, care va fi un număr real.

Convenim să scriem, pentru unghiurile $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m$, relația

$$u_1 + \dots + u_n > v_1 + \dots + v_m$$

ori de cîte ori avem

$$\text{măs}\ u_1 + \dots + \text{măs}\ u_n > \text{măs}\ v_1 + \dots + \text{măs}\ v_m.$$

### Exerciții

**1.** Fie $ABC$ un triunghi echilateral și fie $AA'$ înălțimea din $A$ cu $A' \in |BC|$. Să presupunem că $P \in |AA'|$ și $A \in |QA'|$. În acest caz avem $|BP| < |BC|$ și $|BQ| > |BC|$ (fig. V.67).

**2.** Fie $ABC$, $A'B'C'$ două triunghiuri isoscele, astfel ca

$$|AB| \equiv |AC| \equiv |A'B'| \equiv |A'C'| \text{ și } \widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}.$$

Atunci $|BC| < |B'C'|$ (fig. V.68).

(*Indicație.* Se consideră punctul $B''$, situat în semiplanul opus lui $B$ față de dreapta $AC$ și astfel ca $|AB''| \equiv |AB|$, $\widehat{B''AB} \equiv \widehat{B'A'C'}$. În triunghiurile $AB''C$ și $BB''C$ avem $\widehat{BB''C} < \widehat{AB''C} \equiv \widehat{ACB''} < \widehat{BCB''}$, deci $|BC| < |B''B|$. Dar $|BB''| \equiv |B'C'|$).

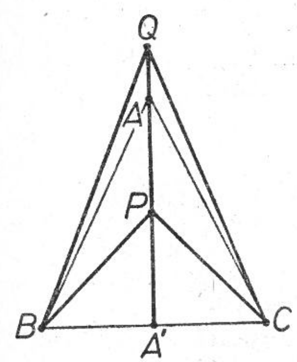



**Fig.V.67**

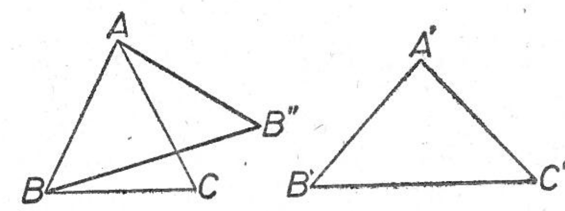



**Fig. V.68**

**3.** Fie $ABC$, $A'B'C'$, $A''B''C''$ trei triunghiuri isoscele, astfel ca

$$|AB| \equiv |AC| \equiv |A'B'| \equiv |A'C'| \equiv |A''B''| \equiv |A''C''| \text{ și } \hat{A} + \hat{A}' > \hat{A}''.$$

Să se arate că $|BC| + |B'C'| > |B''C''|$.

(*Indicație*. Se vor trata separat cazurile.

$$\hat{A} + \hat{A}' < 2\text{dr}, \ \hat{A} + \hat{A}' \equiv 2\text{dr}, \ \hat{A} + \hat{A}' > 2\text{dr}.$$

În primul caz, se consideră punctul $D$, situat de parte opusă lui $B'$ față de $A'C'$ și astfel ca $|A'D| \equiv |A'C'|$, $\widehat{C'A'D} \equiv \widehat{BAC}$. Atunci $|C'D| \equiv |BC|$, $|B'C'| + |C'D| > |B'D| > |B''C''|$, deoarece $\widehat{B'A'D} > \widehat{B''A''C''}$ (fig. V.69).

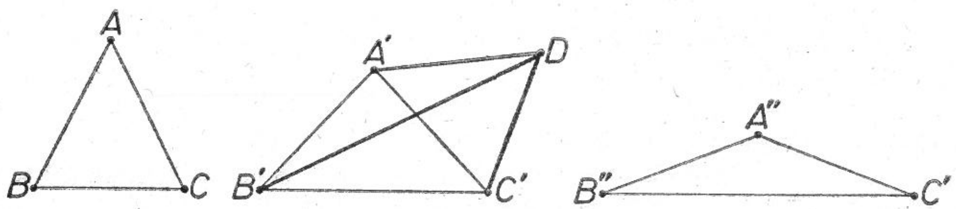


Fig. V.69

În cazul al doilea, vom avea, pentru punctul $D$ construit în același mod, $|B'C'| + |C'D| > |B'D| \equiv 2|AB| \equiv |A''B''| + |A''C''| > |B''C''|$ (fig. V.70).

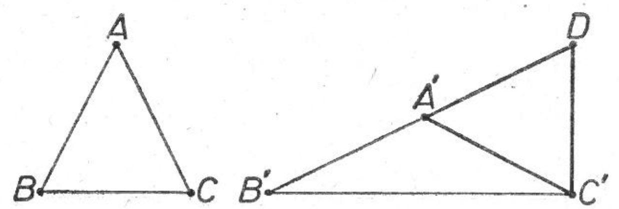


Fig. V.70

Ultimul caz se reduce la cazul al doilea, construind $D$ ca în primul caz și $D'$ astfel ca $A' \in |B'D'|$ și $|A'B'| \equiv |A'D'|$, (fig. V.71).)

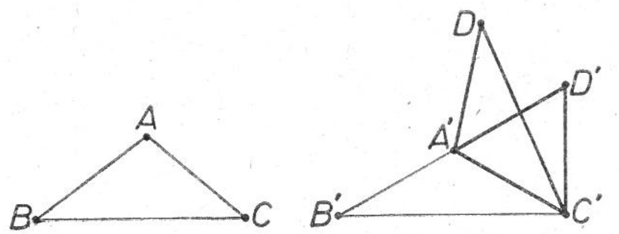


Fig. V.71

**Teoremă.** **Fie $O$, $M$, $N$, $A$ patru puncte necoplanare, astfel ca**

$$OM \perp MN, \ OM \perp MA, \ MN \perp NA.$$

**Atunci** $\widehat{AMN} > \widehat{AON}$ (fig. V.72).

*Demonstrație.* În triunghiul dreptunghic $OAM$ avem $|OA| > |AM|$. Segmentele $|OA|$, $|AM|$ sînt ipotenuzele triunghiurilor dreptunghice $OAN$ și $AMN$, care au cateta comună $|AN|$. Unghiurile opuse acestei catete în cele două triunghiuri se află atunci în relația dată în enunțul teoremei.



**Teoremă. Fie $O$, $M$, $A$, $B$ patru puncte necoplanare, astfel ca**

$$OM \perp MA, \ OM \perp MB, \ |OA| \equiv |OB|.$$

**Atunci** $|MA| \equiv |MB|$ **și** $\widehat{AMB} > \widehat{AOB}$ (fig. V.73).

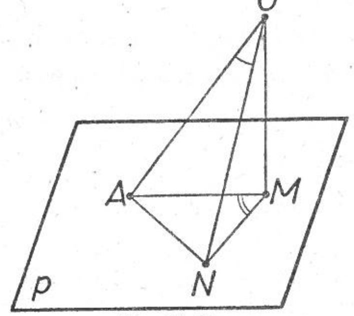


Fig. V.72

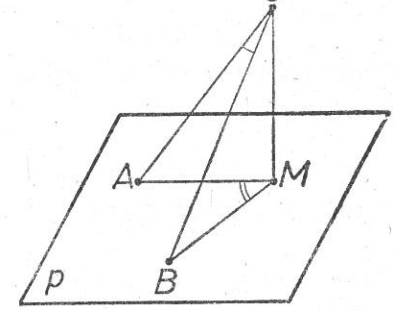


Fig. V.73

*Demonstrație.* Triunghiurile dreptunghice $OMA$, $OMB$ sînt congruente, deci au $|MA| \equiv |MB|$. Notînd prin $N$ mijlocul segmentului $|AB|$, teorema precedentă arată că $\widehat{AMN} > \widehat{AON}$. Atunci avem $\widehat{AMB} \equiv 2\widehat{AMN} > 2\widehat{AON} \equiv \widehat{AOB}$.

**Teoremă. Fie $O$, $M$, $N$, $A$ patru puncte necoplanare, astfel ca**

$$OM \perp MN, \ OM \perp MA, \ MN \perp NA.$$

**Atunci avem** $\widehat{OAM} < \widehat{OAN}$ (fig. V.74).

*Demonstrație.* Se compară triunghiurile dreptunghice $OMA$, $ONA$, care au ipotenuza comună $|OA|$ și în care $|ON| > |OM|$. Unghiurile opuse cate-

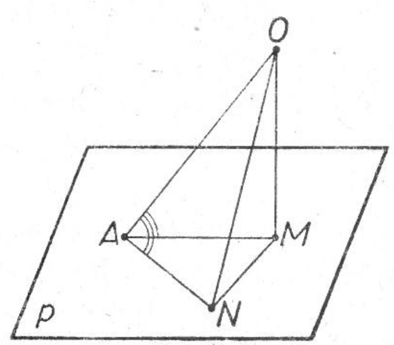


Fig. V.74

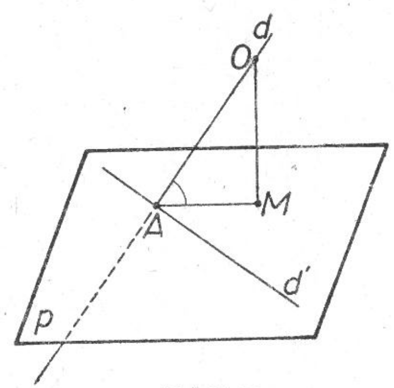


Fig. V.75

telor $|ON|$, $|OM|$ în aceste triunghiuri se vor găsi în relația $\widehat{OAN} > \widehat{OAM}$.

Fie $p$ un plan și fie $d$ o dreaptă astfel ca intersecția $d \cap p$ să fie formată dintr-un singur punct $A$. Fie $O$ un punct pe dreapta $d$, diferit de $A$ și fie $M$ proiecția punctului $O$ pe planul $p$. Triunghiul $OMA$ este dreptunghic în $M$, deci unghiul $\widehat{OAM}$ este ascuțit. Acest unghi se numește *unghiul format de dreapta d și de planul p*, și va fi notat $\widehat{dp}$ (fig. V.75).

Ultima teoremă arată că *unghiul* $\widehat{dp}$ *este mai mic decît oricare din unghiurile formate de dreapta d cu o dreaptă d', situată în planul p și conținînd punctul* $A \in d \cap p$.

## 11. Unghiul a două plane

Pentru a putea defini unghiul a două plane, este necesar să demonstrăm două proprietăți:

**Propoziția 1. Fie $p$ un plan și fie $A$, $B$ două puncte. Notăm prin $A'$, $B'$ proiecțiile ortogonale ale acestor puncte pe planul $p$ și prin $A''$, $B''$ punctele pentru care avem**

$$A' \in |AA''|, \ |AA'| \equiv |A'A''|, \ B' \in |BB''|, \ |BB'| \equiv |B'B''|.$$

**În aceste condiții, avem $|A''B''| \equiv |AB|$** (fig. V.76).

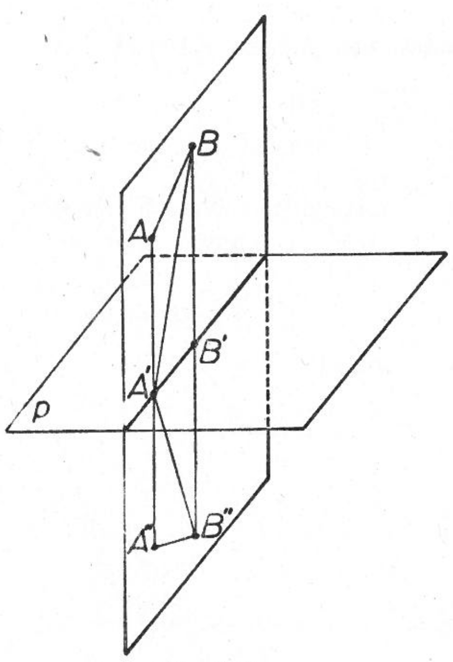


Fig. V.76

*Demonstrație.* Punctele $A, B, A', B', A'', B''$ sînt situate într-un plan perpendicular pe planul $p$. Triunghiurile dreptunghice $A'B'B$, $A'B'B''$ sînt congruente, avînd o catetă comună și două catete congruente. Rezultă $|A'B| \equiv |A'B''|$ și $\widehat{BA'B'} \equiv \widehat{B''A'B'}$. Deducem de aici că $\widehat{AA'B} \equiv \widehat{A''A'B''}$ și atunci triunghiurile $A'AB$, $A'A''B''$ sînt congruente. Prin urmare, $|AB| \equiv |A''B''|$.

**Propoziția 2. Fie $p$, $q$ două plane avînd ca intersecție o dreaptă $d$; fie $O$, $P$ două puncte pe dreapta $d$. Fie $p'$, $q'$ semiplane limitate de dreapta $d$ în planul $p$, respectiv în planul $q$. Considerăm punctele $A \in p'$, $B \in p'$, $C \in q'$, $D \in q'$ astfel ca** (fig. V.77)

$$AO \perp d, \ CO \perp d, \ BP \perp d, \ DP \perp d.$$

**În aceste condiții, avem**

$$\widehat{AOC} \equiv \widehat{BPD}.$$

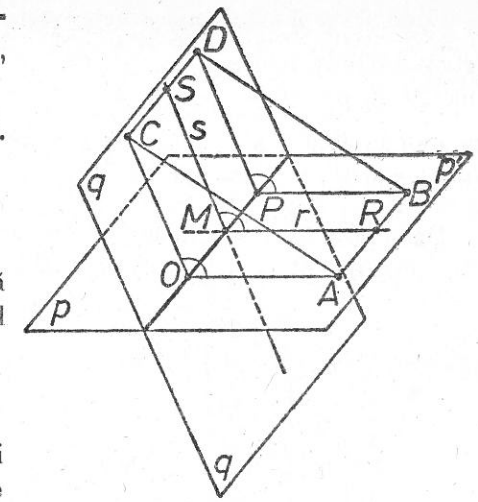


Fig. V.77

*Demonstrație.* Putem presupune că am ales punctele $A$, $B$, $C$, $D$ astfel ca

$$|OA| \equiv |OC| \equiv |PB| \equiv |PD|.$$

Fie $M$ mijlocul segmentului $|OP|$ și fie $r$, $s$ dreptele definite prin relațiile $r \subset p$, $s \subset q$, $r \perp d$, $s \perp d$, $M \in r$, $M \in s$. Aceste drepte intersectează segmentele $|AB|$, respectiv $|CD|$ în două puncte $R \in r$, $S \in s$, astfel ca

$$\widehat{OMC} \equiv \widehat{PMD}, \ \widehat{MCS} \equiv \widehat{MDS}, \ \widehat{OMA} \equiv \widehat{PMB}, \ \widehat{MAR} \equiv \widehat{MBR}.$$

Rezultă că avem

$$|CS| \equiv |DS|, \ CD \perp s, \ |AR| \equiv |BR|, \ AB \perp r.$$

Aplicînd Propoziția 1 planului ce conține punctele $M$, $R$, $S$ și segmentelor $|AC|$, $|BD|$, deducem $|AC| \equiv |BD|$. Atunci triunghiurile $AOC$, $BPD$ vor fi congruente și deducem $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BPD}$.

În baza Propoziției 2, dăm următoarea

**Definiție. Fie $p$, $q$ două plane avînd ca intersecție o dreaptă $d$. Fie $p'$, $q'$ două din semiplanele limitate de $d$ în planele $p$, $q$ astfel ca $p' \subset p$ și $q' \subset q$. Fie $O$ un punct pe $d$ și fie punctele $A \in p'$, $C \in q'$ astfel ca $AO \perp d$ și $CO \perp d$. Spunem atunci că unghiul $\widehat{AOC}$ reprezintă unghiul diedru $\widehat{p'q'}$, format de semiplanele $p'$, $q'$.** (fig. V.78).

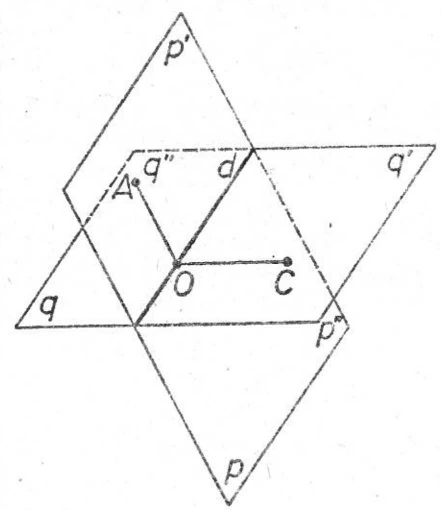


Fig. V.78

Fiind date două plane secante și neperpendiculare $p$ și $q$, ele formează patru unghiuri diedre $\widehat{p'q'}$, $\widehat{p'q''}$, $\widehat{p''q'}$, $\widehat{p''q''}$ unde $p'$, $p''$, $q'$, $q''$ sînt semiplanele limitate în $p$ și $q$ de dreapta $d = p \cap q$. Fie $u$, $v$ două unghiuri ce reprezintă unghiurile diedre $\widehat{p'q'}$, $\widehat{p'q''}$ și avînd același vîrf. Atunci $u$ și $v$ sînt unghiuri suplementare, deci unul dintre ele este ascuțit. Dacă $u$ este un unghi ascuțit, spunem că *$u$ reprezintă unghiul planelor $p$, $q$* (fig. V.79).

Dacă planele $p$, $q$ sînt perpendiculare, spunem că orice unghi drept reprezintă unghiul planelor $p$, $q$ (fig. V.80).

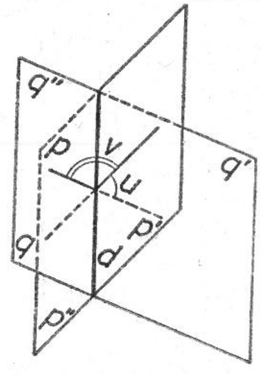



**Fig. V.79**

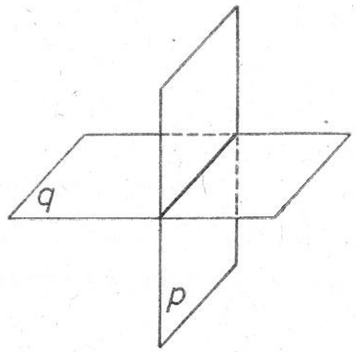



**Fig. V.80**

## 12. Teoremele lui Euclid privind unghiurile triedre
(pentru cercuri de elevi)

Am numit *unghi triedru* o mulțime formată din trei semidrepte necoplanare, dar avînd originea comună. Dacă notăm aceste semidrepte prin $a$, $b$, $c$, atunci unghiul triedru format de ele a fost notat $\widehat{abc}$.

**Teorema 1. În orice unghi triedru $\widehat{abc}$, avem**

(1) $\widehat{ab} + \widehat{bc} > \widehat{ac}$, $\widehat{bc} + \widehat{ca} > \widehat{ba}$, $\widehat{ca} + \widehat{ab} > \widehat{cb}$.

*Demonstrație.* Dacă unghiurile $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ sînt congruente două cîte două, atunci inegalitățile (1) sînt evidente.

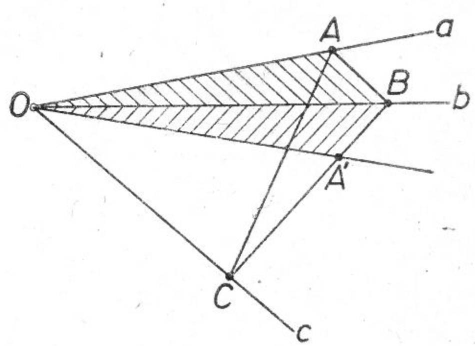



**Fig. V.81**

Fie $O$ vîrful unghiului triedru $\widehat{abc}$ (fig. V.81).

Dacă unghiurile $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ nu sînt congruente două cîte două, unul dintre ele va fi congruent sau mai mare decît oricare din celelalte două. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $\widehat{bc} \geqslant \widehat{ab}$ și $\widehat{bc} \geqslant \widehat{ca}$. Să alegem punctele $B \in b$, $C \in c$ și $A' \in |BC|$ astfel ca $\widehat{BOA'} \equiv \widehat{ab}$ și



apoi punctul $A \in a$ astfel ca $|OA| \equiv |OA'|$. Triunghiurile $AOB$, $A'OB$ vor fi atunci congruente și rezultă $|AB| \equiv |A'B|$. Din relația $A' \in |BC|$ rezultă că $|A'B| < |BC|$, iar din triunghiul $ABC$ deducem $|AB| + |AC| > |BC|$. Deci avem

$$|AB| + |AC| > |A'B| + |A'C| > |AB| + |A'C|,$$

și deducem inegalitatea $|AC| > |A'C|$.

Triunghiurile $AOC$, $A'OC$ sînt legate prin relațiile

$$|OA| \equiv |OA'|, \ |OC| \text{ latură comună}, \ |AC| > |A'C|.$$

Rezultă inegalitatea

(2) $$\widehat{AOC} > \widehat{A'OC}.$$

În acest caz, vom avea

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} > \widehat{A'OB} + \widehat{A'OC} \equiv \widehat{BOC}$$

sau $\widehat{ab} + \widehat{ac} > \widehat{bc}$.

Primele două inegalități (1) rezultă din ipoteza $\widehat{bc} \geqslant \widehat{ac}$, $\widehat{bc} \geqslant \widehat{ab}$.

**Teorema 2. În orice unghi triedru $\widehat{abc}$ avem**

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ca} < 4 \text{ dr}.$$

*Demonstrație.* Notăm prin $O$ vîrful unghiului triedru $\widehat{abc}$ și alegem punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$. Fie $M$ punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului $ABC$ (fig. V.82).

Punctul $M$ este atunci proiecția ortogonală a punctului $O$ pe planul $p$ al triunghiului $ABC$, deoarece dacă notăm prin $M'$ punctul $\mathrm{pr}_p\, O$, din triunghiurile dreptunghice și congruente $OM'A$, $OM'B$, $OM'C$ deducem $|M'A| \equiv |M'B| \equiv |M'C|$.

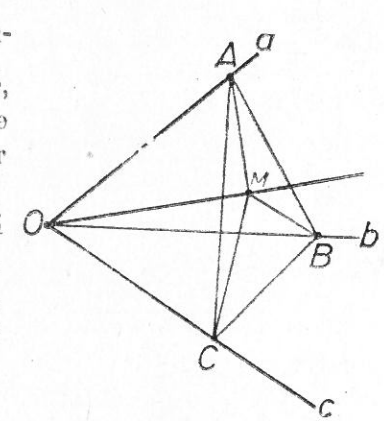



**Fig. V.82**

Știm că sînt adevărate inegalitățile

(4) $$\widehat{AMB} > \widehat{AOB}, \ \widehat{BMC} > \widehat{BOC}, \ \widehat{CMA} > \widehat{COA}.$$

Dacă punctul $M$ este interior triunghiului $ABC$, atunci

$$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMA} \equiv 4 \text{ dr}$$

și inegalitățile (4) conduc la relația (3) (fig. V.83).

Dacă $M$ este exterior triunghiului $ABC$, de exemplu dacă $M$ se găsește în semiplanul opus lui $B$ față de dreapta $AC$ și dacă $M \in \hat{B}$ atunci (fig. V.84)

$$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} \doteq \widehat{AMC},\ \widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMA} \equiv 2\widehat{AMC} < 4 \text{ dr}$$

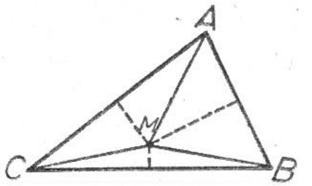


Fig. V.83

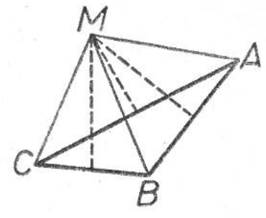


Fig. V.84

și relația (3) va rezulta ca în cazul anterior. Dacă $M \in |BC|$, avem

$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{AMC} = 4$ dr și (3) este încă adevărată.

### Exerciții

**1.** Fie $P_1P_2 \ldots P_n$ un poligon convex situat într-un plan $p$. Fie $A$ un punct exterior planului $p$.

Să se arate că suma măsurilor unghiurilor $\widehat{P_1AP_2}, \widehat{P_2AP_3}, \ldots, \widehat{P_{n-1}AP_n}, \widehat{P_nAP_1}$ este mai mică decît suma măsurilor a patru unghiuri drepte (fig. V.85).

*(Indicație* (după *Euclid* și *Tartaglia*). Se consideră unghiurile triedre cu vîrfurile în punctele $P_i$, deci unghiurile de forma $\widehat{a_ir_i'r_i''}$, unde $a_i$ sînt semidreptele $|P_iA$, $r_i'$ sînt semidreptele $|P_iP_{i-1}$ iar $r_i''$ sînt semidreptele $|P_iP_{i+1}$ și unde presupunem că $P_{n+1} = P_1$, $P_n = P_0$. Pentru fiecare din aceste unghiuri triedre avem (fig. V.86).

$$\widehat{AP_iP_{i-1}} + \widehat{AP_iP_{i+1}} > \widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}}.$$

Adunînd aceste relații membru cu membru, obținem că suma unghiurilor de la baze ale triunghiurilor $AP_iP_{i-1}$ este mai mare decît suma unghiurilor poligonului

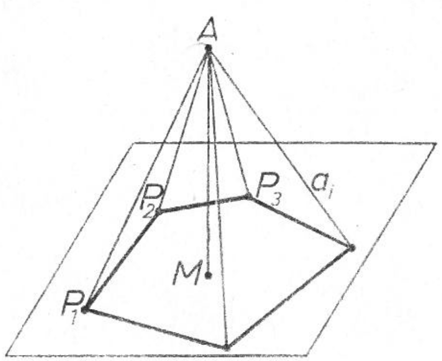


Fig. V.85

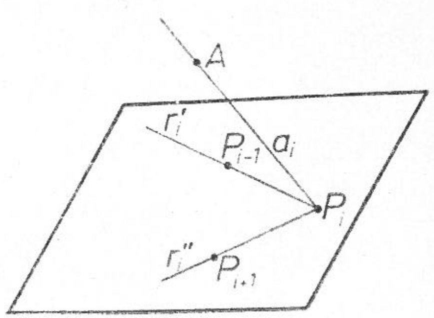


Fig. V.86



$P_1P_2 \ldots P_n$, deci este mai mare decît $2(n-2)$ dr. Se deduce că suma unghiurilor din $\hat{A}$ ale acelorași triunghiuri este mai mică decît $2n$ dr $- 2(n-2)$ dr $= 4$ dr.)

**2.** Fie $ABC$, $A'B'C'$, $A''B''C''$ trei triunghiuri isoscele astfel ca

(5) $|AB| \equiv |AC| \equiv |A'B'| \equiv |A'C'| \equiv |A''B''| \equiv |A''C''|$ (fig. V.87).

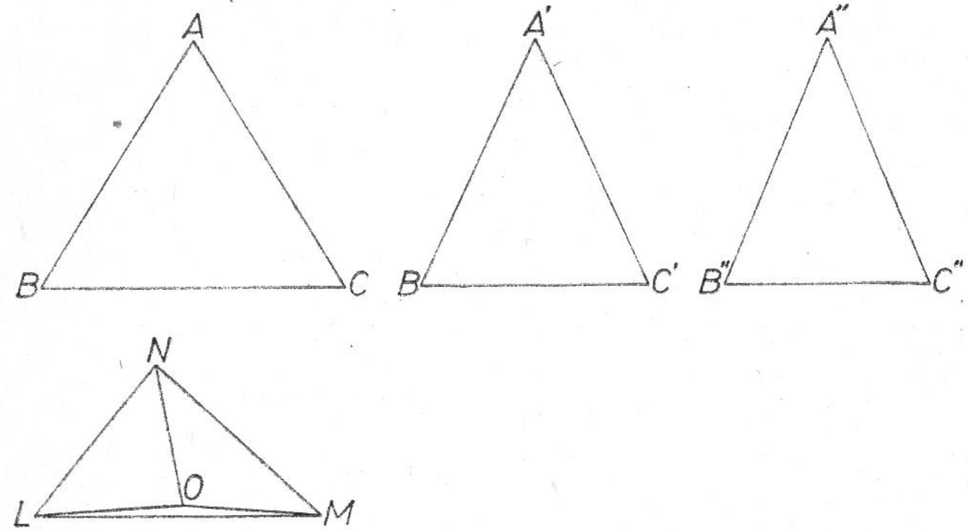


Fig. V.87

(6) $\hat{A} + \hat{A}' > \hat{A}''$, $\hat{A}' + \hat{A}'' > \hat{A}$, $\hat{A}'' + \hat{A} > \hat{A}'$, $\hat{A} + \hat{A}' + \hat{A}'' < 4$ dr.

*a)* Să se arate că segmentele $|BC|$, $|B'C'|$, $|B''C''|$ sînt congruente cu laturile unui triunghi $LMN$.

*b)* Notînd prin $O$ punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului $LMN$, să se arate că, dacă punctul $O$ este interior triunghiului $LMN$, atunci $|AB| > |OL|$.

*(Indicație* (după Euclid). Prima afirmație rezultă din exercițiul 3 de la pag. 124. Pentru a demonstra inegalitatea de la punctul b), se procedează prin reducere la absurd. Presupunînd că $|AB| \equiv |OL|$, se obțin congruențele de triunghiuri

$$ABC \equiv OLM,\ A'B'C' \equiv OMN,\ A''B''C'' \equiv OLN,$$

din care se deduce că, dacă $O$ este interior triunghiului $LMN$, atunci

$$\hat{A} + \hat{A}' + \hat{A}'' \equiv \widehat{LOM} + \widehat{MON} + \widehat{NOL} \equiv 4 \text{ dr},$$

deci se contrazice ipoteza ultimă de la (6). Dacă se presupune că $|AB| < |OL|$ și că $O$ este interior triunghiului $LMN$, se consideră punctele $L', M', N'$ pe segmentele $|OL|$, $|OM|$, $|ON|$, astfel ca

$$|OL'| \equiv |OM'| \equiv |ON'| \equiv |AB|.$$

Avem relațiile

$|L'M'| < |LM| \equiv |BC|$, $|M'N'| < |MN| \equiv |B'C'|$, $|N'L'| < |NL| \equiv |B''C''|$

și rezultă, comparînd triunghiurile indicate mai sus, că avem

$$\hat{A} > \widehat{LOM},\ \hat{A}' > \widehat{MON},\ \hat{A}'' > \widehat{NOL}$$

deci $\hat{A} + \hat{A}' + \hat{A}'' > 4$ dr.

Dacă punctul $O$ se găsește pe una din laturi, de exemplu pe $|MN|$, se arată ușor că nu este posibil ca $|AB| \leqslant |OL|$.)

*Euclid* nu a considerat cazul în care punctul $O$ este exterior triunghiului $LMN$; acest caz este mult mai greu de rezolvat.

**3.** În ipotezele admise în exercițiul precedent, să se demonstreze existența unui triedru $\widehat{abc}$, astfel încît $\widehat{ab} \equiv \hat{A}$, $\widehat{bc} \equiv \hat{A}'$, $\widehat{ca} \equiv \hat{A}''$.

*(Indicație.* Se construiește triunghiul $LMN$ și apoi punctul $O$. Pe perpendiculara ridicată în punctul $O$ pe planul triunghiului $LMN$, se consideră un punct $P$, astfel ca $|PL| \equiv |AB|$. Atunci semidreptele $|PL$, $|PM$, $|PN$ formează un unghi triedru avînd proprietățile cerute.)

**4.** *(R. Glaser).* Fiind date trei unghiuri $u, v, w$ astfel ca suma măsurilor acestor unghiuri să nu depășească $2\pi$ și suma măsurilor a două oarecare din cele trei unghiuri să fie mai mică decît măsura celui de-al treilea unghi, să se arate că cele trei unghiuri sînt congruente cu unghiurile unui unghi triedru.

*(Indicație.* Se presupune problema rezolvată și se presupune că $\widehat{abc}$ este un unghi triedru avînd $\widehat{ab} \equiv w$, $\widehat{bc} \equiv u$, $\widehat{ca} \equiv v$. Fie $S$ originea semidreptelor $a, b, c$ și fie $A \in a$. Se proiectează punctul $A$ pe planul semidreptelor $b, c$. Fie $F$ această proiecție și fie $G$ și $E$ proiecțiile lui $F$ pe dreptele suport ale lui $b$ respectiv $c$. Pe dreptele $FG$, $FE$ se iau punctele $B$, $C$, exterioare unghiului $\widehat{bc}$ și astfel ca $|EB| \equiv |AE|$, $|GC| \equiv |AG|$, $\widehat{ESB} \equiv v$, $\widehat{GSC} \equiv w$, $|SB| \equiv |SC| \equiv |SA|$. Se construiește triunghiul $FDE$, dreptunghic în $F$, astfel ca $|DE| \equiv |EB|$. Se arată atunci că $|FD| \equiv |FA|$.

Se deduce construcția punctului $A$, după o alegere convenabilă a punctelor $S$, $B$, $C$, $F$, $D$, în această ordine.)

## 13. Proprietăți de paralelism

Numim *drepte paralele* două drepte coplanare, care nu au nici un punct comun (sînt disjuncte sau nesecante).

Reamintim că două mulțimi, care nu au nici un element comun, se zic *disjuncte*. Deci putem spune că două drepte paralele sînt două drepte coplanare și disjuncte.

Două drepte paralele aparțin unui singur plan, deoarece două plane distincte nu pot avea mai mult decît o dreaptă în comun.

Vom nota planul care conține dreptele paralele $d$, $d'$ prin $d \vee d'$.

În spațiu, există perechi de drepte disjuncte, care nu sînt paralele. De exemplu, două drepte de forma $AB$, $CD$, unde $A$, $B$, $C$, $D$ sînt patru puncte necoplanare, sînt disjuncte și neparalele. Două drepte disjuncte, care nu sînt paralele, sînt necoplanare. (fig. V.88).

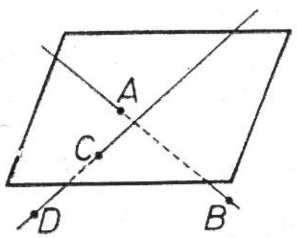


Fig. V.88

Dacă $a$, $b$ sînt două drepte distincte concurente într-un punct, există un singur plan, care conține aceste drepte. Vom nota acest plan prin $a \vee b$.

De asemenea, dacă avem o dreaptă $d$ și un punct $P$, exterior dreptei $d$, există un singur plan care conține punctul $P$ și dreapta $d$. Notăm acest plan prin $P \vee d$.



Spunem că *două plane $p$, $q$ sînt paralele, dacă acele plane sînt disjuncte, deci dacă $p \cap q = \Phi$. Un plan $p$ se zice paralel cu o dreaptă $d$ dacă $d$ și $p$ sînt mulțimi disjuncte, deci dacă $d \cap p = \Phi$.*

Două plane distincte sînt fie paralele, fie secante după o dreaptă.

O dreaptă și un plan ce nu conține acea dreaptă sînt fie disjuncte, deci paralele, fie se intersectează într-un singur punct.

Reamintim **postulatul lui Euclid:**

**Fiind date un punct $P$ și o dreaptă $d$, care nu conține punctul $P$, există o singură dreaptă $d'$, paralelă cu $d$ și conținînd punctul $P$.**

Folosind definițiile date și postulatul lui Euclid, putem demonstra numeroase proprietăți importante. Să dăm cîteva exemple.

1. *Fie $d$ o dreaptă paralelă cu o dreaptă $a$ dintr-un plan $p$. Atunci dreapta $d$ este paralelă cu planul $p$ sau este conținută în acest plan.*

*Demonstrație.* Să presupunem că $d$ are un punct comun $A$ cu planul $p$. Prin punctul $A$ se poate duce o singură paralelă la dreapta $a$ și această paralelă este conținută în planul $p$. Rezultă că $d \subset p$. Deci, dacă $d$ și $p$ nu sînt disjuncte, avem $d \subset p$. Deci am demonstrat că:

$$\boxed{d \parallel a,\ a \subset p \Rightarrow d \parallel p \text{ sau } d \subset p.}$$

2. *Fie $d$ o dreaptă paralelă cu un plan $p$ și fie $q$ un plan ce conține dreapta $d$. Atunci planele $p$, $q$ sînt paralele, sau au ca intersecție o dreaptă paralelă cu dreapta $d$* (fig. V.89).

*Demonstrație.* Planele $p$, $q$ sînt distincte, deoarece $q$ conține $d$ și $p$ nu conține dreapta $d$. Să presupunem că planele $p$, $q$ nu sînt paralele. Atunci ele se vor intersecta după o dreaptă $d'$. Dreptele $d$, $d'$ se găsesc în planul $q$. Ele nu pot fi concurente, deoarece $d \cap d' \subset d \cap p = \Phi$. Deci $d$, $d'$ sînt drepte paralele. Deci am arătat că:

$$\boxed{d \parallel p,\ d \subset q \Rightarrow p \parallel q \text{ sau } (p \cap q) \parallel d.}$$

3. *Fie $d$ o dreaptă paralelă cu un plan $p$ și fie $A$ un punct în planul $p$. Notăm prin $a$ paralela dusă prin $A$ la dreapta $d$. Atunci dreapta $a$ este conținută în planul $p$.* (fig. V.90).

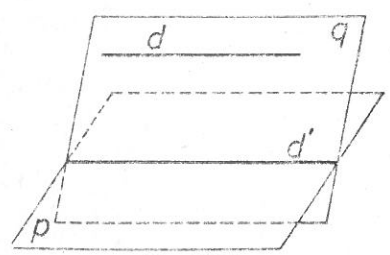


Fig. V.89

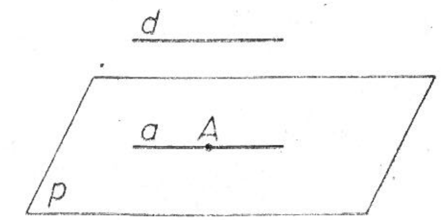


Fig. V.90

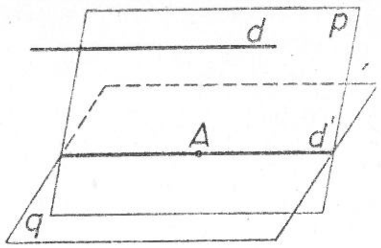



**Fig. V.91**

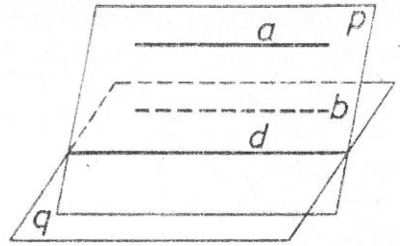



**Fig. V.92**

*Demonstrație.* Dreapta $d$ și punctul $A$ aparțin unui plan $q$. Acest plan intersectează planul $p$ după o dreaptă $d'$, care trece prin $A$. Proprietatea 2 arată că $d' \parallel d$. Din postulatul lui Euclid rezultă $d' = a$, deci $a \subset p$. Deci am arătat că:

$$\boxed{d \parallel p,\ A \in p,\ a \parallel d,\ A \in a \Rightarrow a \subset p.}$$

4. *Fie p, q două plane paralele cu o dreaptă d. Atunci planele p, q sînt fie paralele, fie ele se intersectează după o dreaptă paralelă cu dreapta d* (fig. V.91).

*Demonstrație.* Să presupunem că planele $p$, $q$ nu sînt paralele și că intersecția lor este o dreaptă $d'$. Fie $A \in d'$. Prin punctul $A$ să ducem dreapta $a$, paralelă cu $d$. Din propoziția 3 rezultă $a \subset p$ și $a \subset q$, deci avem $a = p \cap q$. Deci am demonstrat că:

$$\boxed{p \parallel d,\ q \parallel d,\ p \cap q = a \Rightarrow d \parallel a.}$$

5. *Fie a, b două drepte paralele și fie planele p, q astfel ca $a \subset p$ și $b \subset q$. Presupunem că intersecția $p \cap q$ este o dreaptă d; atunci $a \parallel d$ și $b \parallel d$.* (fig. V.92).

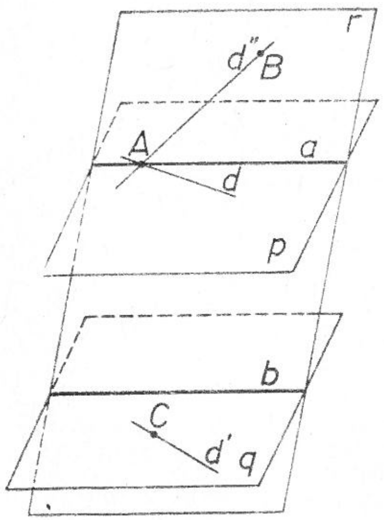



**Fig. V.93**

*Demonstrație.* Din proprietatea 1 rezultă $a \parallel q$ și $b \parallel p$. Din proprietatea 2 rezultă $a \parallel d$ și $b \parallel d$.

6. *Fie p, q două plane paralele și fie r un al treilea plan, care intersectează planul p după o dreaptă a. Atunci r va intersecta planul q după o dreaptă b paralelă cu a* (fig. V.93).

*Demonstrație.* Să demonstrăm în primul rînd că planele $q$, $r$ nu sînt paralele. Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că planele $q$, $r$ ar fi paralele. Să alegem punctele $A \in a$, $B \in r$ și $C \in q$ astfel ca $B \notin p$. Punctele $A$, $B$, $C$ sînt situate într-un același plan $s$. Planul $s$ va intersecta planele $p$, $q$, $r$ după trei drepte $d \subset p$, $d' \subset q$ și $d'' = AB \subset r$, astfel ca $C \in d'$ și $A \in d$. Dreptele $d$, $d'$



sînt paralele, fiind coplanare și disjuncte, avînd $d \cap d' \subset p \cap q = \Phi$. Dreptele $d'$, $d''$ sînt de asemenea coplanare și disjuncte, deci paralele. Deci prin $A$ trec două drepte paralele cu dreapta $d'$. Dreptele $d$, $d''$ sînt distincte, deoarece $B \in d''$ și $B \notin d$, deoarece $B \notin p$. Am ajuns la o contradicție, care arată că planele $q$, $r$ nu sînt paralele. Fie $b$ dreapta lor de intersecție. Avem $a \subset r$, $b \subset r$ și $a \cap b \subset p \cap q = \Phi$, deci dreptele $a$, $b$ sînt paralele. Am demonstrat că:

$$\boxed{p \parallel q,\ p \cap r = a \Rightarrow q \cap r \neq \Phi,\ (q \cap r) \parallel a.}$$

7. *Dacă două plane distincte p, q sînt paralele cu al treilea plan r, atunci planele p, q sînt paralele între ele* (fig. V.94).

*Demonstrație.* Să presupunem prin absurd că planele $p$, $q$ s-ar intersecta după o dreaptă $d$. Din propoziția 6 rezultă că planul $p$ va intersecta planul $r$, care este paralel cu $q$, după o dreaptă $d'$, ceea ce contrazice ipoteza $p \parallel r$. Deci avem $p \parallel q$. Deci:

$$\boxed{p \neq q,\ p \parallel r,\ q \parallel r \Rightarrow p \parallel q.}$$

8. *Fie d dreapta de intersecție a două plane p, q și fie r un plan paralel cu dreapta d, care intersectează planele p, q după dreptele a, b. Atunci a și b sînt drepte paralele* (fig. V.95).

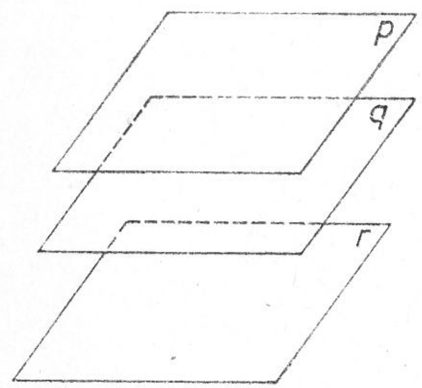



**Fig. V.94**

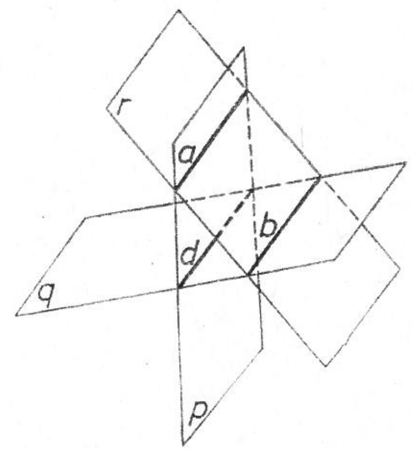



**Fig. V.95**

*Demonstrație.* Avem

$$a \cap b \subset p \cap q = d.$$

Dar dreapta $d$ este paralelă cu fiecare din dreptele $a$, $b$, deoarece planul $r$ este paralel cu dreapta $d$ (vezi proprietatea 2). Rezultă că dreptele $a$, $b$ nu au nici un punct comun. Aceste drepte sînt situate în planul $r$, deci sînt coplanare și disjuncte. Rezultă $a \parallel b$.

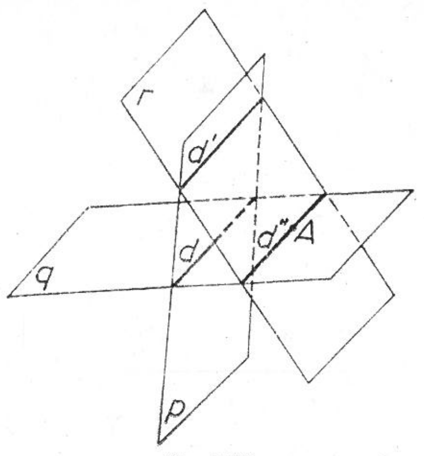


Fig. V.96

9. *Fie $d$, $d'$, $d''$ trei drepte distincte, astfel ca $d$ să fie paralelă cu $d'$ şi cu $d''$. Atunci dreptele $d'$, $d''$ sînt paralele între ele* (fig. V.96).

*Demonstraţie.* Dreptele $d'$, $d''$ sînt disjuncte, deoarece dacă aceste drepte ar avea un punct comun $A$, prin acest punct ar trece două drepte paralele cu dreapta $d$, în contradicţie cu postulatul lui Euclid.

Fie $A$ un punct pe dreapta $d''$ şi fie planele

$$p = d \vee d',\ q = d \vee d'',\ r = A \vee d'.$$

Avem $r \parallel d$, $d = p \cap q$.

Din proprietatea 8 rezultă că planul $r$ intersectează planul $q$ după o dreaptă $a$, paralelă cu dreapta $d$. Comparînd relaţiile

$$A \in a,\ a \parallel d,\ A \in d'',\ d'' \parallel d$$

şi aplicînd postulatul lui Euclid, deducem $a = d''$. Atunci $d'' \subset r$, deci dreptele $d'$, $d''$ sînt coplanare. Aceste drepte sînt disjuncte. Rezultă $d' \parallel d''$. Deci am arătat că:

$$\boxed{d \parallel d',\ d \parallel d'',\ d' \neq d'' \Rightarrow d' \parallel d''.}$$

**10.** ***Fie $p$ un plan şi fie $A$ un punct exterior acestui plan. Atunci reuniunea dreptelor care trec prin punctul $A$ şi care sînt paralele cu planul $p$ este un plan $q$, paralel cu planul $p$*** (fig. V.97).

*Demonstraţie.* Fie $d'$, $d''$ două drepte distincte, trecînd prin $A$ şi paralele cu planul $p$. Dreptele $d'$, $d''$ aparţin unui plan $q = d' \vee d''$. Planul $q$ este paralel cu planul $p$, deoarece dacă ar exista un punct $M$ comun acestor plane, ar exista o dreaptă comună $a$. Dreapta $a$ ar fi concurentă cu cel puţin una din dreptele $d'$, $d''$, deoarece prin $A$ se poate duce o singură paralelă la $a$. Dacă $a$ este concurentă cu $d'$, într-un punct $P$, avem $P \in (d' \cap p)$ ceea ce contrazice ipoteza $d' \parallel p$. La fel, nu putem avea $a$ concurentă cu $d''$. Deci $p \cap q = \Phi$, deci $p \parallel q$.

Orice dreaptă dusă prin $A$ şi situată în planul $q$ va fi paralelă cu planul $p$, deoarece orice astfel de dreaptă este disjunctă cu $p$.

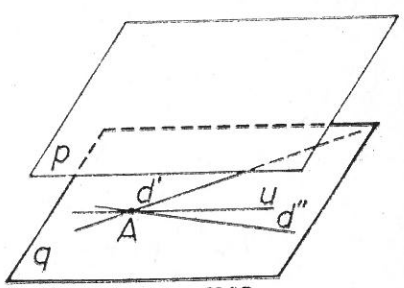


Fig. V.97



Fie $u$ o dreaptă dusă prin $A$ şi paralelă cu planul $p$ (fig. V.98). Vrem să arătăm că $u$ este conţinută în planul $q$. Să presupunem, prin absurd, că $u$ nu este conţinută în planul $q$. Prin $u$ să ducem un plan oarecare $r$. Acest plan va intersecta planul $p$ după o dreaptă $a$ şi planul $q$ după o dreaptă $b$, astfel încît dreptele $b$, $u$ sînt paralele cu $a$. Dar dreptele $b$, $u$ conţin punctul $A$. Din postulatul lui Euclid rezultă $u = b$ deci $u \subset q$, contrar ipotezei.

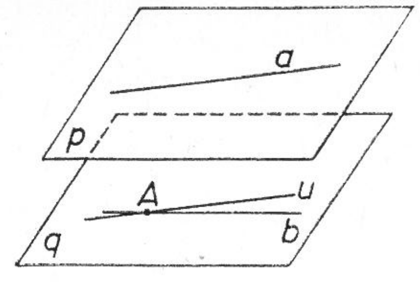


Fig. V.98

Deci am arătat că *planul $q = d' \vee d''$ este reuniunea tuturor dreptelor care trec prin punctul $A$ şi care sînt paralele cu planul $p$* şi că acest plan este paralel cu planul $p$.

Din demonstraţia dată putem desprinde şi următoarele proprietăţi:

11. *Dacă un plan $q$ conţine două drepte distincte şi concurente $d'$, $d''$, paralele cu un plan $p$, atunci planele $p$, $q$ sînt paralele.*

12. *Prin orice punct $A$, exterior unui plan $p$, trece un plan $q$, paralel cu planul $p$* (fig. V.99).

*Prin punctul $A$ trece un singur plan paralel cu planul $p$*, deoarece două plane distincte, paralele cu un al treilea plan, sînt paralele între ele (proprietatea 7).

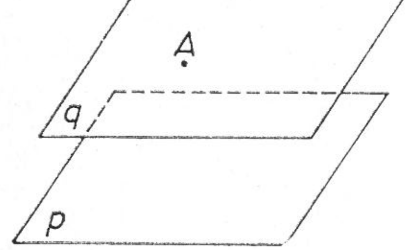


Fig. V.99

*Aplicaţia* **1.** ***Fie $d$ o dreaptă şi $p$ un plan astfel ca intersecţia $p \cap d$ să fie*** *formată dintr-un punct $A$. Prin fiecare punct $N$ al dreptei $d$, diferit de punctul $A$, să ducem planul $p_N$, paralel cu planul $p$. Obţinem atunci o mulţime de plane, paralele două cîte două şi astfel încît, prin fiecare punct al spaţiului trece un plan al mulţimii* (fig. V.100).

Dacă intersectăm planele acestei familii cu un plan $q$, ce nu aparţine familiei considerate, obţinem în planul $q$ o familie de drepte paralele, astfel încît prin fiecare punct al planului $q$ trece o dreaptă din această familie.

*A p l i c a ţ i a* 2. *Fie $p$ un plan şi fie $d$ o dreaptă, care intersectează planul $p$ într-un singur punct $A$. Prin fiecare punct $M$ al planului $p$, $M \neq A$, să ducem dreapta $d_M$, care este paralelă cu $d$ şi care trece prin punctul $M$* (fig. V.101).

Obţinem in acest fel o familie de drepte paralele două cite două, astfel încît, prin fiecare punct al spaţiului, trece o dreaptă a familiei şi una singură.

Să notăm prin $P$ familia planelor paralele cu planul $p$, la care să adăugăm planul $p$, şi să mai notăm prin $D$ familia dreptelor paralele cu dreapta $d$, la care adăugăm dreapta $d$.

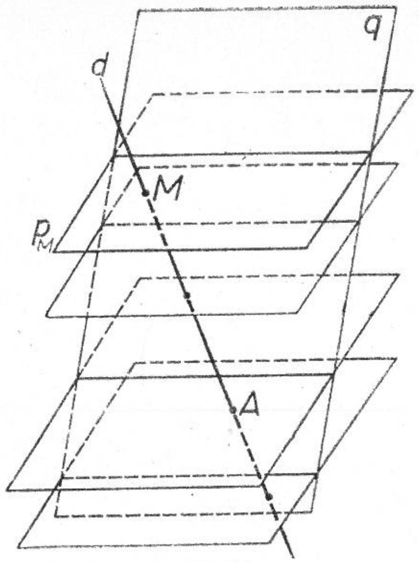



Fig. V.100

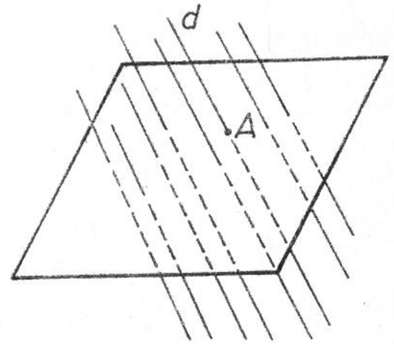



Fig. V.101

Pentru orice punct $A$ din spațiu, există un singur plan $p_A \in P$ și o singură dreaptă $d_A \in D$, astfel ca $A \in p_A$ și $A \in d_A$. Planul $p_A$ intersectează dreapta $d$ într-un punct $A'$, iar dreapta $d_A$ intersectează planul $p$ într-un punct $A''$. Se spune că $A'$ este proiecția punctului $A$, pe dreapta $d$, paralelă cu planul $p$, și că $A''$ este proiecția punctului $A$ pe planul $p$, paralelă cu dreapta $d$.

## Exerciții

I. *Să se formuleze în cuvinte următoarele implicații și să dea demonstrațiile corespunzătoare:*

1. $d \not\subset p, d \parallel a, a \subset p \Rightarrow d \parallel p$.
2. $d \parallel a, a \parallel p, d \not\subset p \Rightarrow d \parallel p$.
3. $d \parallel p, p \parallel q, d \not\subset q \Rightarrow d \parallel q$.
4. $d \parallel p, d \subset q, d' = p \cap q \Rightarrow d \parallel d'$.
5. $d \parallel p, A \in p, a \parallel d, A \in a \Rightarrow a \subset p$.
6. $p \parallel d, q \parallel d, p \cap q = d' \Rightarrow d \parallel d'$.
7. $p \parallel q, p \cap r = a \Rightarrow (q \cap r) \parallel a$.
8. $p \neq q, p \parallel r, q \parallel r \Rightarrow p \parallel q$.
9. $a \parallel b, a \subset p, b \subset q, p \cap q = d, d \neq a \Rightarrow a \parallel d$.
10. $d \parallel d', d \parallel d'', d' \neq d'' \Rightarrow d' \parallel d''$.
11. $p \parallel q, a \subset p \Rightarrow a \parallel q$.
12. $p \parallel q, a \parallel q, a \cap p \neq \varnothing \Rightarrow a \subset p$.
13. $a \parallel q, b \parallel q, \{P\} = a \cap b, a \cup b \subset p \Rightarrow p \parallel q$.
14. $p \parallel r, q \parallel r, p \cap q \neq \varnothing \Rightarrow p = q$.
15. $a \parallel b, a \perp d \Rightarrow b \perp d$.
16. $a \parallel b, a \perp p \Rightarrow b \perp p$.
17. $a \perp p, p \parallel q \Rightarrow a \perp q$.

II. *Fie $O, A, B, C$ patru puncte astfel ca $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ și fie*

$$a = d(O, A), b = d(O, B), c = d(O, C).$$



1. *Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului $ABC$ în funcție de $a$, $b$, $c$.*
2. *Să se calculeze aria $S_{ABC}$ a triunghiului $ABC$ și să se demonstreze relația*

$$S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA}.$$

3. *Să se arate că proiecția ortogonală a punctului $O$ pe planul $(ABC)$ este ortocentrul $H$ al triunghiului $ABC$.*
4. *Să se calculeze distanța $d(O, H)$.*

III. *Două drepte $d$, $d'$ intersectează trei plane paralele $p$, $q$, $r$ în puncte $P, Q, R$, respectiv $P', Q', R'$. Să se demonstreze teorema lui Thales în spațiu:* $\dfrac{|RP|}{|RQ|} = \dfrac{|R'P'|}{|R'Q'|}$.

(*Indicație.* Se duce prin $P'$ paralela $d''$ la dreapta $d$ și se consideră punctele de intersecție ale dreptei $d''$ cu planele $q$ și $r$. Teorema lui Thales în spațiu se reduce astfel la teorema lui Thales plană.)

IV. *Fie $a$, $b$ două drepte neparalele. Să se arate că prin fiecare punct al spațiului trece un plan paralel cu $a$ și cu $b$, și o dreaptă perpendiculară pe $a$ și pe $b$.*

V. *Să se arate că reuniunea dreptelor care întîlnesc o dreaptă $d$ și care sînt perpendiculare pe un plan $p$ este un plan perpendicular pe planul $p$, sau $d \perp p$.*

VI. *Fie $a$, $b$ două drepte necoplanare. Să se arate că există numai două puncte $A \in a$ și $B \in b$ astfel ca $AB \perp a$ și $AB \perp b$.*

(*Indicație.* Se consideră planul $p$ astfel ca $a \subset p$ și $b \parallel p$ și se proiectează dreapta $b$ pe planul $p$. Notînd prin $b'$ dreapta obținută, punctul $A$ va fi dat de intersecția $a \cap b'$, iar $B$ va fi proiecția lui $A$ pe $b$.)

VII. *Fie $p$ un plan și fie $ABC$ un triunghi astfel ca $BC \parallel p$. Să presupunem că unghiul $u$ reprezintă unghiul dintre planele $p$, $(ABC)$. Să se arate că aria proiecției ortogonale a triunghiului $ABC$ pe planul $p$ este egală cu produsul dintre aria lui $ABC$ și $\cos u$, presupunînd $u < dr$.*

VIII. *Să se generalizeze proprietatea de la exercițiul VII, lăsînd la o parte ipoteza $BC \parallel p$.*

IX. ***Să se arate că pătratul lungimii unui segment este egal cu semisuma pătratelor lungimilor proiecțiilor acelui segment pe trei plane $p$, $q$, $r$, știind că aceste plane sînt perpendiculare două cîte două.***

X. 1. ***Fie $\widehat{abc}$ un unghi triedru. Notăm prin $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ unghiurile fețelor și prin $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ unghiurile diedre ale acestui unghi triedru, de exemplu $\hat{a} = \widehat{bc}$, $\hat{A}$ = unghiul diedru al fețelor cu muchia $a$. Să se arate că***

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{a}} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{b}} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{c}}.$$

(*Indicație.* Fie $O$ vîrful unghiului triedru $\widehat{abc}$ și fie punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $M \in BC$, $P \in OM$, $Q \in OB$, $R \in OC$ astfel ca $AB \perp OA$, $AC \perp OA$, $OM \perp BC$, $AP \perp OM$, $PQ \perp OB$, $PR \perp OC$. Se arată că $\dfrac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{a}} = \dfrac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{OBC} \sin \hat{b}} = \dfrac{\sin \widehat{AOM}}{\sin \hat{b} \sin \hat{c}}$, $\sin \widehat{AOM} = \sin \hat{B} \sin \hat{c}$.)

2. *Păstrînd notațiile din exercițiul precedent, să se arate că avem*

$$\cos \hat{a} = \cos \hat{b} \cos \hat{c} + \sin \hat{b} \sin \hat{c} \cos \hat{A}.$$

(*Indicație.* Se pleacă de la relația $\cos \hat{A} = \cos \widehat{BAC} = -\cos (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = -\cos (\widehat{ABM} + \widehat{ACM})$.)

*Observație.* Se constată o asemănare între formulele stabilite în ultimele două exerciții și teorema sinusurilor și teorema cosinusului unui triunghi plan.

Capitolul

VI

# Vectori în spațiu

## 1. Operații cu vectori

În prima parte a acestui manual, am introdus noțiunile următoare: vectori legați sau vectori, vectori nuli, vectori coliniari, vectori paraleli, vectori de același sens (paraleli sau coliniari), vectori echipolenți, norma unui vector, unghiul a doi vectori nenuli, produsul scalar a doi vectori arbitrari, produsul unui vector cu un număr real, suma a doi vectori într-un punct, vectori opuși.

**Temă.** *Să se reamintească definițiile noțiunilor precedente și să se arate că aceste definiții au sens atît pentru vectori într-un plan, cît și pentru vectori în spațiu.*

### Exerciții

*Notînd prin $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ... vectori în spațiu și prin $A, B, C, M, N, P, Q$, ... puncte iar prin $x, y, z, r, s, t$, ... numere reale, să se demonstreze următoarele proprietăți generale, deci adevărate fără ipoteze suplimentare făcute asupra elementelor care apar în exprimarea lor:*

**1.** $\vec{u} + \vec{v}$ (în $A$) $= \vec{v} + \vec{u}$ (în $A$)

**2.** $\vec{u} + \vec{v}$ (în $A$) $\sim \vec{u} + \vec{v}$ (în $B$)

**3.** $[\vec{u} + \vec{v}$ (în $A$)$] + \vec{w}$ (în $A'$) $= \vec{u} + [\vec{v} + \vec{w}$ (în $A''$)$]$ (în $A'$)

**4.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ (în $O$) $= \overrightarrow{OO}$

**5.** $x(\vec{u} + \vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$

**6.** $(x + y)\vec{u} = x\vec{u} + y\vec{u}$

**7.** $x(y\vec{u}) = (xy)\vec{u}$,

**8.** $1\vec{u} = \vec{u}$

**9.** $\vec{u} \sim \vec{u}', \vec{v} \sim \vec{v}' \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}', \vec{u} + \vec{v}$ (în $A$) $= \vec{u}' + \vec{v}'$ (în $A$)

**10.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

**11.** $(x\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (x\vec{v}) = x(\vec{u} \cdot \vec{v})$

**12.** $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} \in \vec{O}$.



**Reamintim următoarele convenții:**

1) Dacă $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (în $A$), scriem $\vec{w} \sim \vec{u} + \vec{v}$.

2) Dacă $\vec{u}$ este un vector nul, scriem $\vec{u} \in \vec{0}$.

## 2. Teoreme relative la proiecții ortogonale

Fie $d$ o dreaptă într-un plan $p$. Fiind dat un punct oarecare $A$ în planul $p$, știm că există o singură dreaptă $a$, perpendiculară pe $d$, situată în planul $p$ și conținînd punctul $A$. Dreapta $a$ intersectează dreapta $d$ într-un punct $A'$, care se numește proiecția ortogonală, sau proiecția punctului $A$ pe dreapta $d$. Vom folosi notația $A' = \mathrm{pr}_d A$ (fig. VI.1)

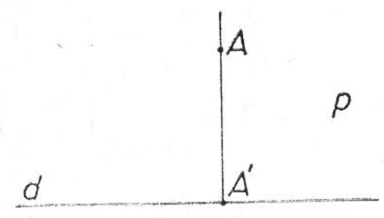


Fig. VI.1

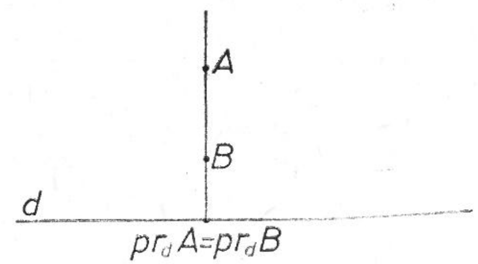


Fig. VI.2

Dacă $A \in d$, avem $A' = A$. Dacă $A, B$ sînt două puncte astfel încît dreapta $AB$ este perpendiculară pe $d$, atunci $\mathrm{pr}_d A = \mathrm{pr}_d B$ (fig. VI.2).

Fiind dat un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, definim proiecția $\vec{v}' = \mathrm{pr}_d \vec{v}$ punînd $\vec{v}' = \overrightarrow{A'B'}$, unde $A' = \mathrm{pr}_d A$ și $B' = \mathrm{pr}_d B$ (fig. VI.3).

Dacă vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sînt echipolenți, proiecțiile lor $\vec{u}' = \mathrm{pr}_d \vec{u}$ și $\vec{v}' = \mathrm{pr}_d \vec{v}$ sînt de asemenea doi vectori echipolenți (fig. VI.4).

Fie $E$ și $F$ două puncte distincte pe dreapta $d$ și fie $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.

Vrem să arătăm că, pentru orice vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, coplanar cu $\vec{w}$, avem:

(1) $$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{w} = (\mathrm{pr}_d \vec{u}) \cdot \vec{w}.}$$

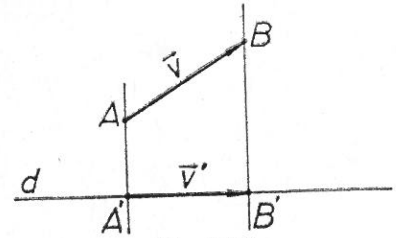


Fig. VI.3

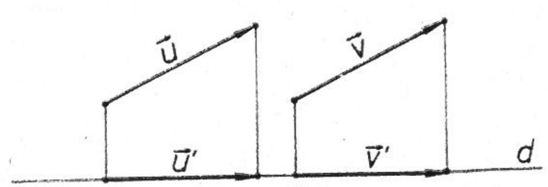


Fig. VI.4

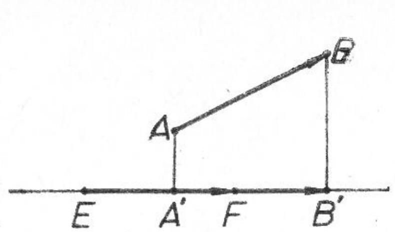



Fig. VI.5

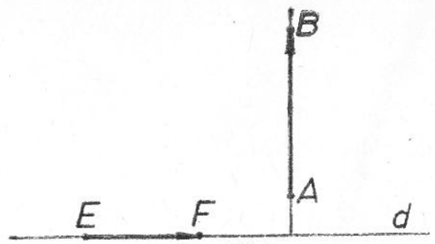



Fig. VI.6

Să punem $A' = \mathrm{pr}_d A$ şi $B' = \mathrm{pr}_d B$. Trebuie să arătăm că (fig. VI.5)

(2) $$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}}.$$

Fie $t$ un unghi, care reprezintă unghiul vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{w}$. Dacă $t$ este un unghi drept, atunci $A' = B'$ şi $\cos t = 0$, deci relaţia (2) este verificată, avînd ambii membri egali cu 0 (fig. VI.6).

Dacă $t$ este un unghi obtuz, avem $\cos t < 0$ şi $|A'B'| \equiv -\cos t.\ |AB|$, deci $\|\overrightarrow{A'B'}\| = -\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\cos t$. Din definiţia produsului scalar a doi vectori deducem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{EF}\| \cos t = -\|\overrightarrow{A'B'}\|\ \|\overrightarrow{EF}\| = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}$, deoarece vectorii $\overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{EF}$ au sensuri opuse, dacă unghiul $t$ este obtuz (fig. VI.7).

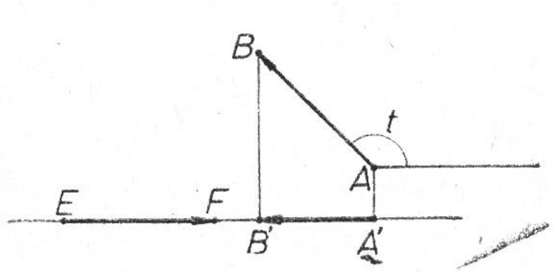



Fig. VI.7

Dacă unghiul $t$ este ascuţit, avem $\cos t>0$, $|A'B'| \equiv \cos t\cdot|AB|$, $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\cos t$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \|\overrightarrow{AB}\|\ \|\overrightarrow{EF}\| \cos t = \|\overrightarrow{A'B'}\|\cdot\|\overrightarrow{EF}\| = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}$, deoarece vectorii $\overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{EF}$ sînt coliniari şi de acelaşi sens (fig. VI.8).

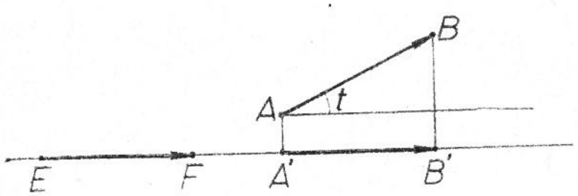



Fig. VI.8

Deci formulele (1) şi (2) sînt demonstrate în toate cazurile.

## 3. Alte proprietăţi ale produsului scalar

**1. Pentru orice doi vectori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ avem**

(1) $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}.$$



*Demonstraţie.* Unghiurile $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}$ şi $\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD})}$ sînt suplementare (fig. VI.9), deci $\cos\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} = -\cos\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD})}$. Formula (1) rezultă atunci din definiţia produsului scalar a doi vectori.

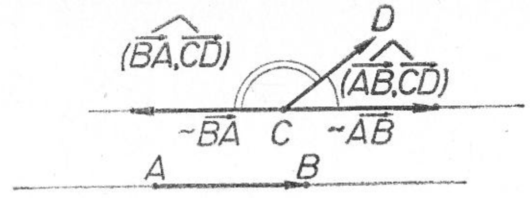



Fig. VI.9

**2. Dacă punctele $C$, $D$ aparţin unei drepte $d$ şi dacă $A'$, $B'$ sînt proiecţiile ortogonale ale punctelor $A$ respectiv $B$ pe dreapta $d$, atunci**

(2) $$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}.}$$

*Demonstraţie.* Dacă vectorul $\overrightarrow{A'B'}$ este nul, vectorul $\overrightarrow{AB}$ este nul sau perpendicular pe dreapta $d$ şi relaţia (2) este adevărată. Dacă vectorul $\overrightarrow{CD}$ este nul, relaţia (2) este de asemenea adevărată. Să presupunem că vectorii $\overrightarrow{A'B'}$,

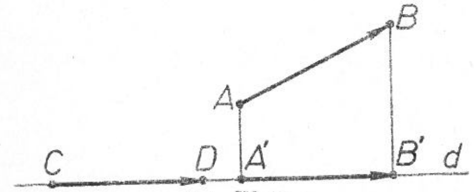



Fig. VI.10

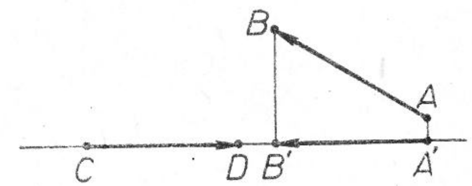



Fig. VI.11

$\overrightarrow{CD}$ sînt nenuli. Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ formează un unghi ascuţit (fig. VI.10), unghiul vectorilor $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ va fi nul şi vom avea $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{A'B'}\|\cdot\|\overrightarrow{CD}\| = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}$. Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ formează un unghi obtuz (fig. VI.11) avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\|\overrightarrow{A'B'}\|\ \|\overrightarrow{CD}\| = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}$, deoarece unghiul vectorilor $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ va fi alungit.

**3. Oricare ar fi punctele $A$, $B$, $C$, $E$, $F$, avem** (fig. VI.12):

(3) $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{EF} = 0.$$

*Demonstraţie.* Să presupunem că punctele $E$, $F$ aparţin unei drepte $d$ şi fie $A'$, $B'$, $C'$ proiecţiile punctelor $A$, $B$, $C$ pe dreapta $d$. În virtutea proprietăţii (2), relaţia (3) este echivalentă cu relaţia (fig. VI.12)

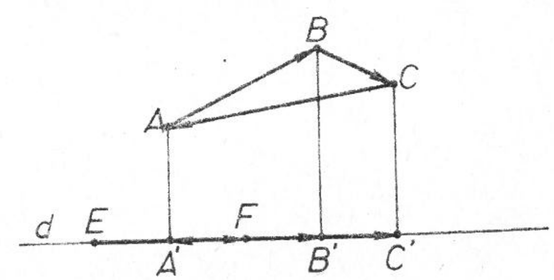



Fig. VI.12

$$(4)\qquad \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{EF}=0.$$

Dacă două din punctele $A'$, $B'$, $C'$ coincid, relația (4) se reduce la (1). Să considerăm atunci cazul în care punctele $A'$, $B'$, $C'$ sînt distincte și să presupunem, pentru a fixa ideile, că $B' \in ]A'C'[$. În acest caz, vectorii $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ vor avea același sens, vectorul $\overrightarrow{C'A'}$ va avea sensul opus și $\|\overrightarrow{A'B'}\| + \|\overrightarrow{B'C'}\| = \|\overrightarrow{C'A'}\|$; produsele scalare $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{EF}$ vor avea același semn, iar $\overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{EF}$ va avea semnul opus. Relația (4) rezultă ușor din aceste proprietăți.

Combinînd proprietățile (1) și (3), deducem *proprietatea de aditivitate a produsului scalar:*

**4. Oricare ar fi punctele $A$, $B$, $C$, $E$, $F$, avem**

$$(5)\qquad \boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}.}$$

**5. Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ trei vectori coliniari și nenuli, astfel ca**

$$(6)\qquad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}.$$

**În acest caz, vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ au același sens și au normele egale** (fig. VI.13).


Fig. VI.13

*Demonstrație.* Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ar avea sensuri opuse, produsele scalare $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}$ ar avea semne opuse, contrar ipotezei (6). Deci $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au același sens. Din relația (6) rezultă $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}$; vectorul $\overrightarrow{EF}$ fiind nenul, avem $\overrightarrow{EF}\neq 0$ și rezultă $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$.

### Exerciții

1. *Fie punctele $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$. Să se arate că* (fig. VI.14)

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EF}=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}.$$

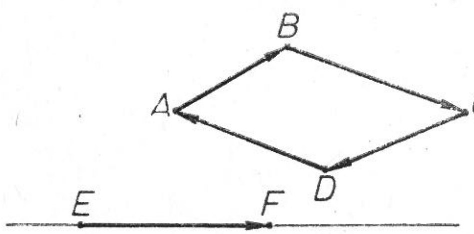



Fig. VI.14

2. *Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se arate că*

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\|\overrightarrow{AD}\|^2,$$

$$2\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD},$$

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

*Dacă notăm* $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$,



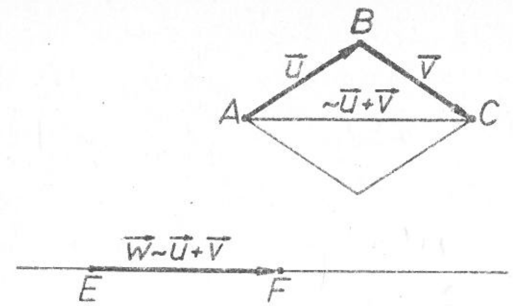



Fig. VI.15

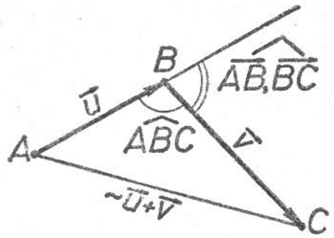



Fig. VI.16

$\vec{w}=\overrightarrow{EF}$, *avem* $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$ (în $A$) *și proprietatea* (5) *de aditivitate a produsului scalar se poate scrie sub forma*

$$(7)\qquad \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}=(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}.$$

În particular, luînd $\vec{w}\sim\vec{u}+\vec{v}$, obținem (fig. VI.15)

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}).$$

Folosind proprietatea de simetrie a produsului scalar și aplicînd din nou relația (7), obținem (fig. VI.16):

$$(8)\qquad (\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$$

sau

$$(9)\qquad (\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

Revenind la notațiile $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{u}+\vec{v}\sim\overrightarrow{AC}$, obținem formula

$$(10)\qquad \overrightarrow{AC}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2+2\,\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})+\|\overrightarrow{BC}\|^2=$$
$$=\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{BC}\|^2-2\,\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|\cos\widehat{ABC}.$$

Folosind notațiile lui Euler relative la triunghiul $ABC$, $a=\|\overrightarrow{BC}\|$, $b=\|\overrightarrow{CA}\|$, $c=\|\overrightarrow{AB}\|$, obținem *formula lui Pitagora generalizată:*

$$(11)\qquad b^2=c^2+a^2-2\,ac\cos\hat{B}.$$

### Exerciții

1. *Fie $A$, $B$, $C$, $D$, $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ vîrfurile unui cub, în care $[ABCD]$ este o față și* $\overrightarrow{AA'}\sim\overrightarrow{BB'}\sim\overrightarrow{CC'}\sim\overrightarrow{DD'}$, $\|\overrightarrow{AA'}\|=1$. *Să se calculeze prrodusele scalare* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{BD'}$.

**R:** 1; 2; 1

2. *Fie $[ABCD]$ un tetraedru cu toate muchiile de lungime 1. Să se calculeze produsele scalare* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM}$, unde *$M$ este mijlocul muchiei* $]BC[$.

**R:** $0$; $\frac{1}{2}$

**3.** ***Fie*** *$[OABCD]$ o* ***piramidă*** *cu baza $[ABCD]$ pătratică. Presupunînd că toate muchiile* ***acestei piramide*** *au lungimea 1, să se calculeze produsele scalare $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$, unde $M$ este mijlocul muchiei $[OB]$.*

**R:** $\frac{1}{2}$; $0$; $-\frac{1}{4}$

**4.** ***Fie*** *$[OABCDE]$ o piramidă avînd ca bază $[ABCDE]$ o suprafață pentagonală regulată și avînd lungimile tuturor muchiilor egale cu 1. Fie $M$ și $N$ mijloacele muchiilor $[AB]$ respectiv $[OB]$, și fie $Q$ proiecția ortogonală a punctului $O$ pe planul $(ABC)$.*

Să se calculeze produsele scalare $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MQ}$.

**R:** $\frac{1}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$; $\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

**5.** *Să se arate că, oricare ar fi punctele $A$, $B$, $C$, $D$, avem relația lui Euler*

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

*Să se deducă implicațiile*

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD};\ DA\perp BC,\ DB\perp AC\Rightarrow DC\perp AB.$$

**6.** *Să se arate că relațiile $AA'\perp AB\perp BB'$ implică*

$$d(A',B')^2=d(A,B)^2+(\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{BB'})^2.$$

**7.** *Să se arate că dacă vectori $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sînt coliniari sau paraleli, atunci*

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}\sim(\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}\sim(\vec{w}\cdot\vec{u})\,\vec{v}.$$

**8.** *Să se arate că dacă punctele $A$, $B$, $C$ sînt coliniare, atunci avem pentru orice punct $O$, relația lui Stewart-Simson.*

$$\|\overrightarrow{OA}\|^2\overrightarrow{BC}+\|\overrightarrow{OB}\|^2\overrightarrow{CA}+\|\overrightarrow{OC}\|^2\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$$

## 4. Exprimarea proiecției unui punct cu ajutorul vectorilor

*A p l i c a ț i a* **1.** *Proiecția unui punct pe o dreaptă.*

Fie date un punct $N$ și o dreaptă $d$. Ne propunem să determinăm proiecția ortogonală a punctului $N$ pe dreapta $d$. Să considerăm în acest scop două puncte distincte $M$ și $M'$ pe dreapta $d$ (fig. VI.17) și să notăm $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$. Un punct oarecare $P$ al dreptei $d$ formează, împreună cu un punct fix $O$, un vector $\overrightarrow{OP}$ și avem

$$\overrightarrow{OP}\sim\overrightarrow{OM}+r\cdot\vec{u}$$

unde $r$ este acel număr real, pentru care avem

$$\overrightarrow{MP}\sim\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}\sim r\cdot\vec{u}.$$

Dacă $P$ este proiecția ortogonală a punctului $N$ pe dreapta $d$, avem

$$\overrightarrow{NP}\cdot\vec{u}=0.$$

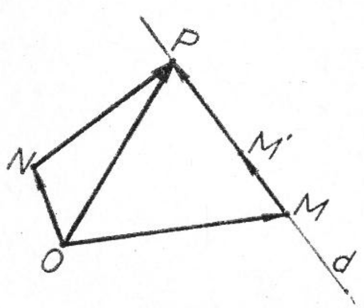



Fig. VI.17



Dar

$$\overrightarrow{NP}\sim\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}\sim\overrightarrow{OM}+r\vec{u}-\overrightarrow{ON},\tag{1}$$

astfel încît obținem condiția

$$\overrightarrow{OM}+r\vec{u}-\overrightarrow{ON})\cdot\vec{u}=0,$$

sau

$$r\cdot\vec{u}\cdot\vec{u}=(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})\cdot\vec{u}=\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}.$$

Deci, dacă $P$ este proiecția punctului $N$ pe dreapta $d$, avem

$$r=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\frac{\overrightarrow{ON}\cdot\vec{u}-\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}.\tag{2}$$

*A p l i c a ț i a* **2.** *Simetricul unui punct față de o dreaptă.*

Fie $N'$ simetricul punctului $N$ față de dreapta $d$ (fig. VI.18). Păstrind notațiile făcute anterior, vom avea, dacă ținem seama de relațiile (1) și (2),

$$\overrightarrow{ON'}\sim\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{ON}+2(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}+r\vec{u})\sim\tag{3}$$

$$\sim-\overrightarrow{ON}+2\frac{\overrightarrow{ON}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}+2\left(\overrightarrow{OM}-\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\right).$$

Dacă avem un al doilea punct $Q$ și dacă notăm prin $Q'$ simetricul lui $Q$ față de dreapta $d$, vom avea (fig. VI.19)

$$\overrightarrow{OQ'}\sim-\overrightarrow{OQ}+2\frac{\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\,\vec{u}}\vec{u}+2\left(\overrightarrow{OM}-\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\,\vec{u}}\vec{u}\right).\tag{4}$$

Scăzind relațiile (3), (4) membru cu membru, obținem

$$\overrightarrow{N'Q'}\sim\overrightarrow{OQ'}-\overrightarrow{ON'}\sim-\overrightarrow{NQ}+2\frac{\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\,\vec{u}}\vec{u}.\tag{5}$$

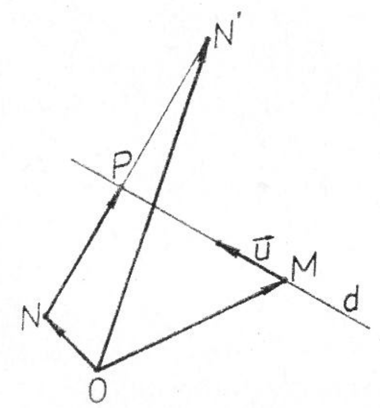



Fig. VI.18

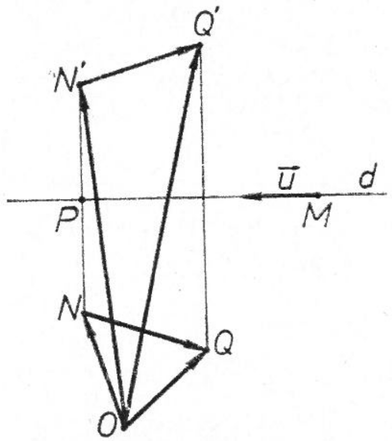



Fig. VI.19

Din formula (5) deducem

$$(6)\qquad \overrightarrow{N'Q'}\cdot\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{NQ} - 4\frac{(\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{u})^2}{\vec{u}\,\vec{u}} + 4\frac{(\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{u})^2}{\vec{u}\,\vec{u}} = \overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{NQ}.$$

Ultima egalitate arată că norma unui vector $\overrightarrow{NQ}$ este egală cu norma vectorului simetric $\overrightarrow{N'Q'}$.

*A p l i c a ț i a* 3. *Proiecția unui punct pe un plan.* Fie $p$ un plan și fie $N$ un punct în spațiu. Ne propunem să determinăm proiecția punctului $N$ pe planul $p$ (fig. VI.20).

Fie $M$, $M'$, $M''$ trei puncte necoliniare în planul $p$ și fie vectorii

$$\vec{u} = \overrightarrow{MM'},\ \vec{v} = \overrightarrow{MM''}.$$

Dacă $P$ este un punct oarecare în planul $p$, există numere reale $r$, $s$ astfel încît să avem

$$(7)\qquad \overrightarrow{MP} \sim r\,\vec{u} + s\,\vec{v}.$$

Dacă $P$ este proiecția punctului $N$ pe planul $p$, avem

$$(8)\qquad \overrightarrow{NP}\cdot\vec{u} = 0,\ \overrightarrow{NP}\cdot\vec{v} = 0.$$

Dar $\overrightarrow{NP} \sim \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + r\vec{u} + s\vec{v}$, astfel încît condițiile (8) se scriu

$$(9)\qquad \overrightarrow{NM}\cdot\vec{u} + r\,\vec{u}^2 + s\vec{u}\cdot\vec{v} = 0,$$

$$\overrightarrow{NM}\cdot\vec{v} + r\vec{u}\cdot\vec{v} + s\vec{v}^2 = 0.$$

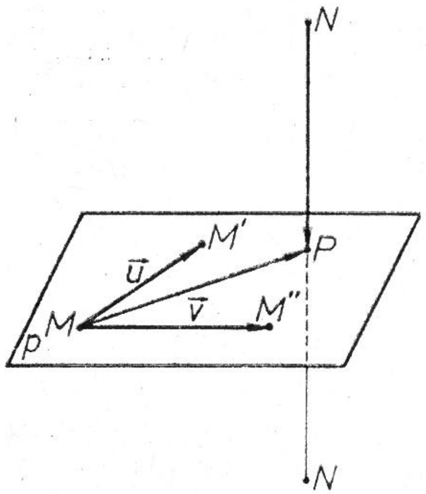



Fig. VI.20

Dacă triunghiul $MM'M''$ este dreptunghic în $M$ și are catetele de lungime 1, deci dacă reperul $(\vec{u}, \vec{v})$ este ortogonal și normat:

$$\vec{u}^2 = \vec{v}^2 = 1,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0,$$

condițiile (9) devin

$$\overrightarrow{NM}\cdot\vec{u} + r\vec{u}^2 = 0,\ \overrightarrow{NM}\cdot\vec{v} + s\vec{v}^2 = 0$$

și rezultă

$$(10)\qquad r = \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u} = (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})\cdot\vec{u} = \overrightarrow{ON}\cdot\vec{u} - \overrightarrow{OM}\cdot\vec{u},$$

$$s = \overrightarrow{MN}\cdot\vec{v} = (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})\cdot\vec{v} = \overrightarrow{ON}\cdot\vec{v} - \overrightarrow{OM}\cdot\vec{v}.$$

Avem atunci

$$(11)\qquad \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \sim \overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{MN}\cdot\vec{v})\vec{v}$$

sau

$$(12)\qquad \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{ON}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{ON}\cdot\vec{v})\vec{v} - [(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v})\vec{v}].$$



*A p l i c a ț i a* 4. *Simetricul unui punct față de un plan.* Dacă notăm prin $N'$ simetricul punctului $N$ față de planul $p$, avem $\overrightarrow{ON'} \sim \overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{NP} \sim \overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{ON}$ deci

$$(13)\qquad \overrightarrow{ON'} \sim 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + 2(\overrightarrow{ON}\cdot\vec{u})\vec{u} + 2(\overrightarrow{ON}\cdot\vec{v})\vec{v} - 2[(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v})\vec{v}].$$

Dacă avem un alt punct $Q$ și dacă notăm prin $Q'$ simetricul lui $Q$ față de același plan $p$, vom putea scrie

$$(14)\qquad \overrightarrow{OQ'} \sim 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + 2[(\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{v})\vec{v}] - 2[(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v})\vec{v}].$$

Scăzînd ecuațiile (13) și (14) membru cu membru, obținem

$$(15)\qquad \overrightarrow{N'Q'} \sim -\overrightarrow{NQ} + 2[(\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{v})\vec{v}].$$

Ca și în cazul simetriei față de o dreaptă, calculînd pătratul normei vectorului $\overrightarrow{N'Q'}$ obținem

$$\overrightarrow{N'Q'}\cdot\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{NQ},$$

Deci am arătat că, dacă $N'$ și $Q'$ sînt simetricele a două puncte $N$ și $Q$ față de o dreaptă $d$ sau față de un plan $p$, atunci avem

$$d(N, Q) = d(N', Q'),$$

deci *simetria față de o dreaptă sau față de un plan lasă invariante distanțele dintre puncte.*

*A p l i c a ț i a* 5. *Simetria față de un punct.* Fiind dat un punct $P$ și un punct $N$, simetricul punctului $N$ față de punctul $P$ poate fi definit prin formula

$$\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{ON} \sim 2\overrightarrow{NP} \sim 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \sim 2\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{ON}.$$

Avem deci

$$\overrightarrow{ON'} \sim -\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}.$$

Dacă $P = O$, rezultă $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$. Avem și în acest caz, pentru orice două puncte $N$, $Q$ și pentru simetricele lor $N'$, $Q'$.

$$\overrightarrow{N'Q'} \sim -\overrightarrow{NQ},\ \overrightarrow{N'Q'}\cdot\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{NQ}.$$

Deci și *simetria față de un punct lasă invariante distanțele dintre puncte.*

## 5. Repere pe o dreaptă

Fie $O$ și $A$ două puncte distincte pe o dreaptă $d$. Atunci vectorul $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ este nenul (fig. VI.21).

**Definiție.** Se numește reper pe o dreaptă $d$ o mulțime formată dintr-un vector nenul $\vec{a}$, situat pe acea dreaptă. Originea acestui vector se numește originea reperului, iar extremitatea vectorului $\vec{a}$ se numește punctul unitate al reperului.

O pereche formată dintr-o dreaptă $d$ și dintr-un reper $\{\vec{a}\}$ pe această dreaptă se numește *axă*. Un punct de pe $d$ se mai numește *punct pe axa* $(d, \{\vec{a}\})$, oricare ar fi reperul $\{\vec{a}\}$ ales pe $d$.

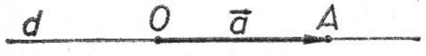


Fig. VI.21

Fie $M$ un punct pe axa $(d, \{\vec{a}\})$. Există un număr real $x$ unic astfel ca

(1) $\overrightarrow{OM} \sim x \cdot \vec{a}$ (fig. VI.22).

Se spune că numărul $x$, care verifică relația (1), este *abscisa* punctului $M$ pe axa $(d, \{\vec{a}\})$ sau abscisa punctului $M$ față de reperul $\{\vec{a}\}$.

Fie $M$, $N$ două puncte pe axa $(d, \{\vec{a}\})$ și fie $x$, $y$ abscisele acestor puncte, astfel încît avem $\overrightarrow{OM} \sim x \cdot \vec{a}$, $\overrightarrow{ON} \sim y \cdot \vec{a}$. În acest caz, scriem $M(x)$ și $N(y)$. Avem (fig. VI.23):

(2) $$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} \sim x\vec{a} - y\vec{a} = (x - y)\vec{a}.$$

Spunem că diferența $x - y$ este *componenta scalară* a vectorului $\overrightarrow{NM}$ față de reperul $\{\vec{a}\}$ sau componenta scalară a vectorului $\overrightarrow{NM}$ pe axa $(d, \{\vec{a}\})$.

**Definiție.** **Se spune că reperul $\{\vec{a}\}$ pe dreapta $d$ este normat, dacă norma vectorului $\vec{a}$ este egală cu 1.**

În general, dacă punctul $M \in d$ are abscisa $x$, avem

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = (x\vec{a}) \cdot \vec{a} = x(\vec{a} \cdot \vec{a}) = x \; \| \vec{a}^2.$$

Fiind dat un al doilea punct $N(y)$, vom avea $\overrightarrow{ON} \cdot \vec{a} = y \cdot \| \vec{a} \|^2$ și

$$\overrightarrow{NM} \cdot \vec{a} = (x - y)\vec{a} \cdot \vec{a} = (x - y) \; \| \vec{a} \|^2.$$

În cazul unui reper normat, formulele precedente devin

(3) $$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = x, \quad \overrightarrow{NM} \cdot \vec{a} = x - y.$$

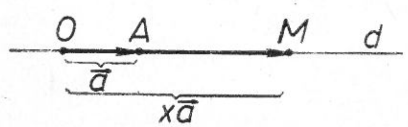


Fig. VI.22

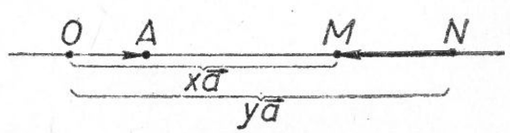


Fig. VI.23



## 6. Repere carteziene într-un plan

Fie $p$ un plan și fie $O$, $A$, $B$ trei puncte necoliniare în acel plan. Atunci vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ au aceeași origine și sînt necoliniari.

**Definiție.** **Se numește reper cartezian într-un plan orice cuplu $(\vec{a}, \vec{b})$ format din doi vectori din acel plan, care au aceeași origine și care sînt necoliniari.**

Originea comună a vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ se numește *originea* reperului $(\vec{a}, \vec{b})$, iar axele $(OA, \{\vec{a}\}), (OB, \{\vec{b}\})$ vor fi numite *axele* reperului $(\vec{a}, \vec{b})$.

Fie $M$ un punct oarecare în planul $p$, în care a fost fixat reperul $(\vec{a}, \vec{b})$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Fie $P$, $Q$ punctele în care paralelele duse prin $M$ la dreptele $OB$, respectiv $OA$ intersectează dreptele $OA$, respectiv $OB$ (fig. VI.24). Avem

(1) $$\overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}.$$

Știm că există numere reale unic determinate $x$, $y$ astfel încît să avem

(2) $$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = y \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Numerele $x$, $y$ se numesc *coordonatele* punctului $M$ față de reperul $(\vec{a}, \vec{b})$. Se mai spune că $x$ este *abscisa* lui $M$, iar $y$ este *ordonata* lui $M$.

Formulele (1) și (2) conduc la relația fundamentală

(3) $$\overrightarrow{OM} \sim x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB},$$

care arată legătura dintre un punct și coordonatele sale față de un reper cartezian dat. Dacă $M$ are coordonatele $x$, $y$, scriem $M(x, y)$.

Reperul cartezian $(\vec{a}, \vec{b})$ se numește *ortonormat*, dacă

(4) $$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1 \text{ și } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

deci dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ sînt ortogonali și unitari (fig. VI.25).

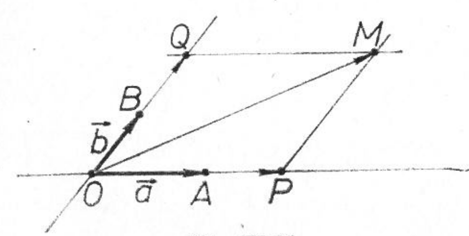


Fig. VI.24

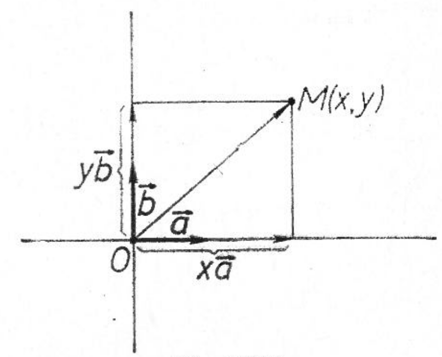


Fig. VI.25

Dacă avem un punct $M(x, y)$, din formulele (3) şi (4) deducem

$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{a} = x, \quad \overrightarrow{OM}\cdot\vec{b} = y.$$

Să considerăm un vector $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ avînd originea $M(x', y')$ şi extremitatea $N(x'', y'')$. Avem (fig. VI.26):

$$\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \sim (x''\vec{a} + y''\vec{b}) - (x'\vec{a} + y'\vec{b})$$

deci

(5) $$\overrightarrow{MN} \sim (x'' - x')\vec{a} + (y'' - y')\vec{b}.$$

Formula (5) exprimă vectorul $\overrightarrow{MN}$, pînă la o echipolenţă, cu ajutorul diferenţelor $x'' - x'$, $y'' - y'$. Aceste diferenţe se numesc *componentele scalare* ale vectorului $\overrightarrow{MN}$, relative la reperul $(\vec{a}, \vec{b})$.

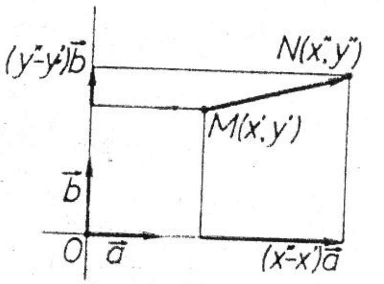



Fig. VI.26

Din formula (5) rezultă că

*Doi vectori sînt echipolenţi dacă şi numai dacă au componentele scalare respectiv egale.*

Deci dacă vectorul $\overrightarrow{MN}$ are componentele scalare $p$, $q$ şi dacă vectorul $\overrightarrow{PQ}$ are componentele scalare $r$, $s$ atunci condiţia de echipolenţă $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{PQ}$ este echivalentă cu egalităţile $p = r$, $q = s$.

Dacă vectorul $\overrightarrow{MN}$ are componentele scalare $p$, $q$, deci dacă

$$\overrightarrow{MN} \sim p\vec{a} + q\vec{b},$$

şi dacă vectorul $\overrightarrow{M'N'}$ are componentele scalare $p'$, $q'$,

$$\overrightarrow{M'N'} \sim p'\vec{a} + q'\vec{b},$$

atunci avem, oricare ar fi punctele în care facem sumele,

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} \sim (p\vec{a} + q\vec{b}) + (p'\vec{a} + q'\vec{b}),$$

deci

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} \sim (p + p')\vec{a} + (q + q')\vec{b};$$

rezultă că *suma a doi vectori are drept componente scalare sumele componentelor scalare ale celor doi sumanzi*, $p + p'$ şi $q + q'$.

Dacă $\overrightarrow{MN} \sim p\vec{a} + q\vec{b}$ şi dacă $x$ este un număr real, atunci

$$x\,\overrightarrow{MN} \sim x(p\vec{a} + q\vec{b}) \sim (xp)\vec{a} + (xq)\vec{b}.$$



Deci vectorul $x \cdot \overrightarrow{MN}$ are componentele scalare date de produsele $xp$ şi $xq$. Deci:

*Prin înmulţirea unui vector cu un număr real $x$, componentele scalare ale acelui vector se înmulţesc cu numărul real $x$.*

Să considerăm vectorii

$$\overrightarrow{MN} \sim p\,\vec{a} + q\,\vec{b}, \quad \overrightarrow{PQ} \sim m\,\vec{a} + n\,\vec{b}.$$

Folosind proprietăţile cunoscute ale produsului scalar, putem scrie

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ} = (p\vec{a} + q\vec{b})\cdot(m\vec{a} + n\vec{b}) = mp\,\vec{a}^2 + (np + mq)\vec{a}\cdot\vec{b} + nq\,\vec{b}^2.$$

Dar vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ sînt ortogonali şi au normele egale cu 1, deci $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$ şi $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Rezultă formula

$$\boxed{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ} = mp + nq,}$$

care arată că:

*Produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor componentelor scalare corespunzătoare ale celor doi vectori.*

Prin componente corespunzătoare înţelegem componentele $m$, $p$, relative la vectorul $\vec{a}$ şi componentele $n$, $q$ relative la vectorul $\vec{b}$.

În particular, *pătratul normei vectorului $\overrightarrow{MN} \sim p\vec{a} + q\vec{b}$ este egal cu numărul $p^2 + q^2$*, iar pătratul normei vectorului $\overrightarrow{PQ} \sim m\vec{a} + n\vec{b}$ va fi numărul $m^2 + n^2$.

Din formula

$$\boxed{\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}) = \frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{MN}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|}}$$

deducem o relaţie, care ne permite să calculăm *unghiul a doi vectori, cunoscînd componentele lor scalare*:

(3') $$\boxed{\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}) = \frac{mp + nq}{\sqrt{p^2 + q^2}\sqrt{m^2 + n^2}}},$$

*Aplicaţie. Fiind dat un număr real $t$, notăm prin $F(t)$ punctul de coordonate $x = \cos t$, $y = \sin t$. Punctul $F(t)$ aparţine cercului $C = C(0, 1)$* (fig. VI.27).

Fie $t$ şi $u$ două numere reale şi fie $M = F(t)$, $N = F(u)$ punctele de pe cercul $C$, care corespund acestor numere. Pentru a obţine măsura în radiani a unghiului $\widehat{MON}$, facem diferenţa $t - u$ şi căutăm acel număr întreg $k$, pentru care

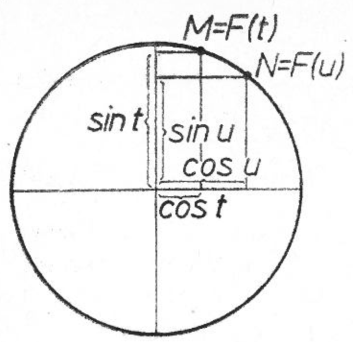



Fig. VI.27

$t - u - 2k\pi \in (-\pi, \pi)$. În acest caz, măsura în radiani a unghiului $\widehat{MON}$ va fi egală cu valoarea absolută a numărului real $t - u - 2k\pi$, deci

(6) $$\text{măs } \widehat{MON} = |\, t - u - 2k\pi \,|.$$

Vectorii $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ au componentele scalare $(\cos t, \sin t)$ respectiv $(\cos u, \sin u)$. Normele acestor vectori sînt egale cu 1. Din formula (5′) deducem, calculînd în două moduri diferite produsul scalar $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = \cos\widehat{MON} = \cos t \cos u + \sin t \sin u$

sau, ținînd seama de (6) și de periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus,

(7) $$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u.$$

Formula (7) este adevărată oricare ar fi numerele reale $t$ și $u$.

Dacă în formula (2) punem $-u = s$, obținem

(8) $$\cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s.$$

Să punem în formula (7) $t = \frac{\pi}{2}$; obținem

(9) $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u,$$

deoarece $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ și $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Dacă în formula (9) notăm $u = v + w$, putem scrie

$$\sin(v + w) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v - w\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\cos w + \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\sin w = \sin v \cos w + \cos v \sin w,$$

deci avem identitatea

$$\sin(v + w) = \sin v \cos w + \cos v \sin w.$$

Dacă în ultima identitate punem $w = -u$, obținem

$$\sin(v - u) = \sin v \cos u - \cos v \sin u$$

Putem rezuma rezultatele obținute sub forma

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(u \pm v) &= \sin u \cos v \pm \cos u \sin v, \\ \cos(u \pm v) &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v \end{aligned}}$$

unde semnele se corespund.

Aceste formule au fost deduse pe altă cale în clasa a IX-a.



## 7. Repere carteziene în spațiu

Fie $O$, $A$, $B$, $C$ patru puncte necoplanare. Atunci vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ și $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ au aceeași origine și sînt necoplanari, deci sînt și nenuli.

**D e f i n i ț i e.** **Se numește reper cartezian în spațiu un sistem ordonat format din trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ necoplanari și avînd aceeași origine. Originea celor trei vectori se numește originea reperului. Dacă $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, se spune că axele $(OA, \{\vec{a}\})$, $(OB, \{\vec{b}\})$, $(OC, \{\vec{c}\})$ sînt axele reperului $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.**

Fie $M$ un punct oarecare în spațiu. Să notăm prin $p$, $q$, $r$ planele duse prin $M$ și paralele cu planele $(OBC)$, $(OCA)$ respectiv $(OAB)$. Să considerăm punctele (fig. VI.28):

$P \in OA \cap p$, $Q \in OB \cap q$, $R \in OC \cap r$.

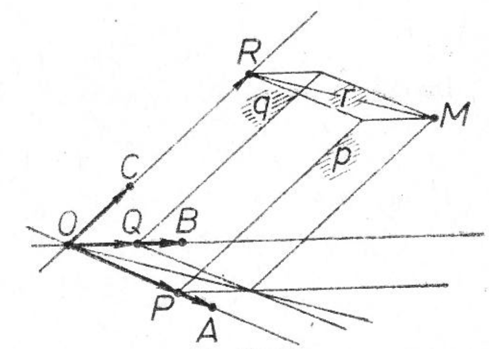



Fig. VI.28

Există numere reale unic determinate $x$, $y$, $z$ astfel ca să avem

(1) $$\overrightarrow{OP} \sim x\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} \sim y\vec{b}, \quad \overrightarrow{OR} \sim z\vec{c}.$$

Numerele $x$, $y$, $z$, care verifică aceste relații se numesc *coordonatele* punctului $M$ față de reperul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; $x$ este *abscisa* lui $M$, $y$ este *ordonata* lui $M$ iar $z$ este *cota* lui $M$. Pentru a exprima că punctul $M$ are coordonatele $x$, $y$, $z$ (față de reperul fixat $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$), vom scrie: $M(x, y, z)$.

Avem $\overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$, deci, dacă $M(x, y, z)$ este un punct oarecare, avem

(2) $$\overrightarrow{OM} \sim x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \quad \text{(fig. VI.29)}.$$

Se spune că reperul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este *ortonormat*, dacă

(3) $$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0,$$

deci dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sînt unitari și ortogonali doi cîte doi.

În paginile care urmează, *vom considera numai repere ortonormate.*

Din formulele (2) și (3) rezultă *interpretarea coordonatelor* $x$, $y$, $z$ cu ajutorul produsului scalar:

(4) $$\boxed{x = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{a}, \quad y = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{b}, \quad z = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{c}.}$$

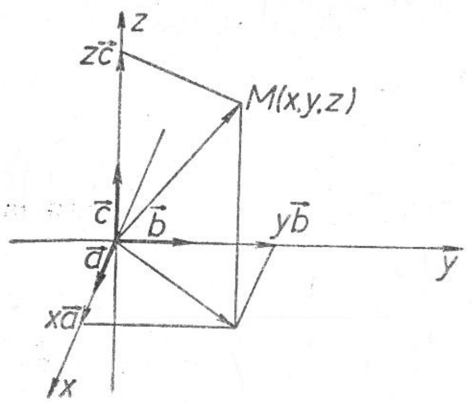


Fig. VI.29

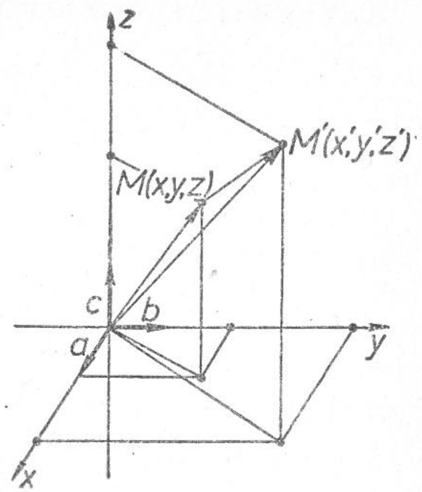


Fig. VI.30

Pentru două puncte $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ avem (fig. VI.30)

(5) $\overrightarrow{MM'} \sim \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \sim (x' - x)\vec{a} + (y' - y)\vec{b} + (z' - z)\vec{c}.$

Spunem că diferențele $x' - x$, $y' - y$ și $z' - z$ sînt *componentele scalare* ale vectorului $\overrightarrow{MM'}$ față de reperul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. •

Uneori, componentele scalare ale unui vector $\vec{u}$ se notează prin $u_x$, $u_y$ și $u_z$. Avem atunci

$$\vec{u} \sim u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c}.$$

Fie $\vec{u}, \vec{v}$ doi vectori arbitrari, de componente $u_x$, $u_y$, $u_z$, respectiv $v_x$, $v_y$, $v_z$. Avem, folosind proprietățile produsului scalar și relațiile (3)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c})(v_x\vec{a} + v_y\vec{b} + v_z\vec{c}) =$$

deci

$$= u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z.$$

Reținem deci formula

(6) $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z,}$

care *exprimă produsul scalar a doi vectori arbitrari, în funcție de componentele lor scalare.*

În particular, dacă $\vec{v} = \vec{u}$, obținem *expresia pătratului normei* unui vector $\vec{u}$ în funcție de componentele scalare ale acelui vector:

(7) $\boxed{\vec{u}^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$



Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli, avem

(8) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \dfrac{u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$

Rezultă *condiția de ortogonalitate* a vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$:

(9) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z = 0.$

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli și coliniari sau paraleli, atunci există un număr real $r$, astfel ca $\vec{v} \sim r\vec{u}$. În acest caz, avem

(10) $v_x = ru_x,\ v_y = ru_y,\ v_z = ru_z.$

În particular, *vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt echipolenți, dacă și numai dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au aceleași componente scalare*, deci dacă:

(11) $v_x = u_x,\ v_y = u_y,\ v_z = u_z.$

*Aplicație. Pentru a da o aplicație a formulei* (8), *să presupunem că punctul $M$ are coordonatele $x$, $y$, $z$ și că este diferit de originea $O$ a reperului $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Să notăm prin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ unghiurile pe care le face semidreapta $|OM$ cu semidreptele $|OA$, $|OB$, $|OC$,* (fig. VI.31), deci:

$$\alpha = \widehat{MOA},\quad \beta = \widehat{MOB},\quad \gamma = \widehat{MOC},$$

*și cu $r$ norma vectorului* $\overrightarrow{OM}$:

$$r = \|\overrightarrow{OM}\| = \mathrm{d}(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Din formula (8) deducem relațiile

(12) $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}, \qquad \cos\beta = \dfrac{y}{r}, \qquad \cos\gamma = \dfrac{z}{r}.$

*Aplicație. Să facem acum o aplicație a formulei* (7), *care dă pătratul normei unui vector $\vec{u}$ în funcție de componentele acestui vector.* Presupunînd că $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, știm că norma lui $\vec{u}$ coincide cu distanța dintre punctele $M$ și $N$. Avem pe de altă parte, dacă $M(x', y', z')$ și $N(x'', y'', z'')$,

(13) $u_x = x'' - x',\ u_y = y'' - y',\ u_z = z'' - z'$

și rezultă formula care dă *distanța* $\mathrm{d}(M, N)$ *în funcție de coordonatele punctelor* $M$ și $N$:

(14) $\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{d}(M, N) = \\ &= \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2} \end{aligned}}$

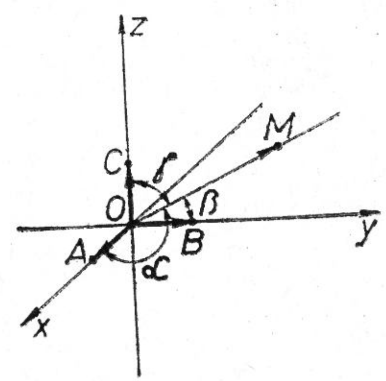


Fig. VI.31

## Exerciții

1. Să se reprezinte într-un desen punctele $P(x, y, z)$, ale căror ccoordonate $x, y, z$, au valorile absolute egale cu un număr pozitiv dat $a$.

2. Să se arate că punctele $M(a, a, a)$, $N(-a, a, -a)$, $P(-a, -a, a)$, $Q(a, -a, -a)$ sînt vîrfurile a patru triunghiuri echilaterale. Să se exprime distanța $R = d(O, M)$ funcție de $m = d(M, N)$.

**R:** $\mathrm{R} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, m\ (= \sqrt{3}\, a)$.

3. Să se arate că punctele $U(a, 0, 0)$, $U'(-a, 0, 0)$, $V(0, a, 0)$, $V'(0, -a, 0)$, $W(0, 0, a)$, $W'(0, 0, -a)$ sînt vîrfurile a opt triunghiuri echilaterale. Să se exprime lungimea comună a laturilor acestor triunghiuri în funcție de $a$.

**R:** $d(U, V) = \sqrt{2}\, a$.

4. Se consideră punctele:

$A(a, 0, b)$, $A'(a, 0, -b)$, $A''(-a, 0, b)$, $A'''(-a, 0, -b)$, $B(b, a, 0)$, $B'(-b, a, 0)$, $B''(b, -a, 0)$, $B'''(-b, -a, 0)$, $C(0, b, a)$, $C'(0, -b, a)$, $C''(0, b, -a)$, $C'''(0, -b, -a)$. Să se determine $b$ în funcție de $a$, astfel încît triunghiurile următoare să fie echilaterale: $ACC'$, $ABC$, $ABA'$, $AA'B''$, $AB''C'$, $A''CC'$, $A''B'C$, $A''A'''B'$, $A''B'''C'$, $BB'C''$, $A'BC''$, $BB'C$, $A'C''C'''$, $A'B''C'''$, $A'''C''C'''$; $A''B'''C'''$, $A'''B'C$, $A'''B'''C'''$; $B''B'''C'$, $C'B''B'''$.

**R:** $b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\, a$.

5. Să se scrie coordonatele centrelor de greutate ale triunghiurilor menționate la exercițiul 4. Să se arate că dacă aceste triunghiuri sînt echilaterale, atunci centrele lor de greutate sînt vîrfurile a 12 pentagoane regulate, situate în plane perpendiculare pe dreptele $OA, OA', OA'', OA''', OB, \ldots, OC'''$.

6. Să se exprime distanța $d(O, A)$ în funcție de $a$ și $b$, folosind notațiile date în exercițiul 4.

**R:** $d(O, A) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

7. Să se arate că punctele indicate la exercițiul 4 sînt vîrfurile a 12 pentagoane regulate. Să se scrie coordonatele centrelor acestor pentagoane.

## 8. Produs vectorial asociat unui reper

Fie $R = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ un reper cartezian ortonormat format din vectorii

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB},\ \vec{c} = \overrightarrow{OC}.$$

Vom nota prin $V$ mulțimea vectorilor de forma $\overrightarrow{OP}$, deci a vectorilor avînd punctul $O$ ca origine.

**D e f i n i ț i e.** **Se numește produs vectorial asociat reperului $R$ o operație notată**

$$(1) \qquad (\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} \times \vec{v},$$

**care asociază fiecărui cuplu de vectori $(\vec{u}, \vec{v})$ un vector $\vec{u} \times \vec{v} \in V$, numit produsul vectorial al vectorului $\vec{u}$ cu vectorul $\vec{v}$ și care este un vector cu originea $O$, astfel încît să fie verificate următoarele proprietăți:**

I. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$, $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b}$.



II. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,

III. $(r\vec{u} + s\vec{v}) \times \vec{w} = r\vec{u} \times \vec{w} + s\vec{v} \times \vec{w}$,

**pentru orice vectori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ și orice numere reale $r, s$.**

IV. **Dacă $\vec{u} \sim \vec{u}'$ și $\vec{v} \sim \vec{v}'$, atunci $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u}' \times \vec{v}'$.**

Fiind dați doi vectori

$$\vec{u} \sim u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c},\quad \vec{v} = v_x\vec{a} + v_y\vec{b} + v_z\vec{c}$$

vom avea

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c}) \times (v_x\vec{a} + v_y\vec{b} + v_z\vec{c}) =$$
$$= u_xv_x(\vec{a} \times \vec{a}) + u_xv_y(\vec{a} \times \vec{b}) + u_xv_z(\vec{a} \times \vec{c}) +$$
$$+ u_yv_x(\vec{b} \times \vec{a}) + u_yv_y(\vec{b} \times \vec{b}) + u_yv_z(\vec{b} \times \vec{c}) +$$
$$+ u_zv_x(\vec{c} \times \vec{a}) + u_zv_y(\vec{c} \times \vec{b}) + u_zv_z(\vec{c} \times \vec{c}).$$

Din condiția II rezultă $\vec{u} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{u}$, deci avem $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, oricare ar fi vectorul $\vec{u}$. În particular, avem

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}.$$

Formula precedentă devine, dacă ținem seama de II, și de I,

$$(2) \qquad \vec{u} \times \vec{v} = (u_yv_z - u_zv_y)\vec{a} + (u_zv_x - u_xv_z)\vec{b} + (u_xv_y - u_yv_x)\vec{c}.$$

Deci produsul vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ al vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ are componentele scalare date de formulele:

$$(3) \qquad \boxed{w_x = u_yv_z - u_zv_y,\quad w_y = u_zv_x - u_xv_z,\quad w_z = u_xv_y - u_yv_x.}$$

Este suficient să memorăm prima din aceste formule, deoarece celelalte două se obțin din prima, făcînd permutări circulare ale literelor $x, y, z$, deci făcînd înlocuirile

$$x \longrightarrow y,\ y \longrightarrow z,\ z \longrightarrow x.$$

**P r o p o z i ț i e. Produsul vectorial a doi vectori $\vec{u}, \vec{v}$ este un vector ortogonal fiecăruia din vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$,** (fig. VI.32).

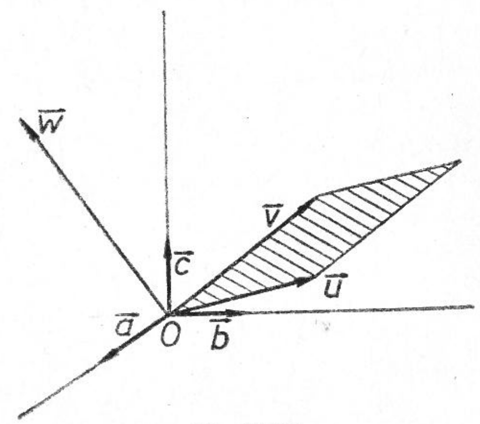


Fig. VI.32

*Demonstrație.* Avem, folosind relațiile (3),

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0,\ \vec{v}\cdot\vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$$

deci vectorul $\vec{w}$ este ortogonal pe fiecare din vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

Să calculăm pătratul normei vectorului $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Folosind din nou formulele (3), obținem:

$$\vec{w}\cdot\vec{w} = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = (u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_z v_x - u_x v_z)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2 =$$
$$= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)^2 =$$
$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) =$$
$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}).$$

Rezultă formula fundamentală:

$$\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|,} \tag{4}$$

care arată că *norma produsului vectorial a doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori.*

În particular, ***produsul vectorial a doi vectori coliniari sau paraleli este nul,*** **deoarece sinusul unghiului făcut de doi astfel de vectori este nul.**

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt ortogonali, avem $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 1$ și rezultă că:

*Norma produsului vectorial a doi vectori perpendiculari este egală cu produsul normelor celor doi vectori.*

În particular:

*Produsul vectorial a doi vectori ortogonali și unitari este un vector unitar, perpendicular pe planul primilor doi vectori.*

## Exerciții

**1.** Să se calculeze produsele vectoriale

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}),\ (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}),\ (2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

**2.** Fiind dat vectorul $\vec{u} \sim u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c}$, să se determine produsele

$$\vec{a} \times \vec{u},\ \vec{b} \times \vec{u},\ \vec{c} \times \vec{u}.$$

**3.** Folosind formulele

$$\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|},\quad \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$$



să se determine sinusurile și cosinusurile unghiurilor pe care le face vectorul $\vec{u} = u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c}$ cu fiecare din vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Caz particular, $\vec{u} \sim \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

**4.** Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ trei vectori arbitrari. Să se demonstreze identitatea

$$(\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{t} = (\vec{v} \times \vec{t})\cdot\vec{u} = (\vec{t} \times \vec{u})\cdot\vec{v}.$$

**5.** Să se calculeze numerele date de produsele mixte

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{a},\ (\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c},\ (\vec{a} \times \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

*A p l i c a ț i e. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ trei vectori necoplanari cu originea în punctul O. Vrem să dăm o interpretare geometrică produsului mixt* $(\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{t}$, (fig. VI.33).

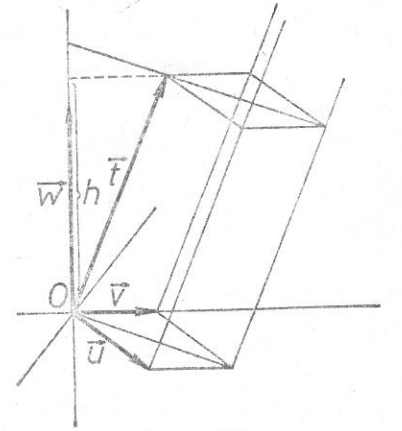



Fig. VI.33

*Soluție.* Știm că produsul vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ este un vector perpendicular pe planul vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ și că norma lui $\vec{w}$ este egală cu aria paralelogramului care poate fi construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}$. Produsul scalar $(\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{t} = \vec{w}\cdot\vec{t}$ va fi egal, abstracție făcînd de semn, cu produsul dintre norma vectorului $\vec{w}$ și norma proiecției vectorului $\vec{t}$ pe suportul lui $\vec{w}$. Dar norma proiecției vectorului $\vec{t}$ pe suportul vectorului $\vec{w}$ este egală cu înălțimea $h$ a paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$, dacă se consideră ca bază a acestui paralelipiped paralelogramul definit de $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Rezultă că *valoarea absolută a produsului mixt $(\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{t}$ este egală cu produsul dintre aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}$, și înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$.* Deci:

*Valoarea absolută a produsului mixt $(\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{t}$ format cu trei vectori necoplanari, avînd aceeași origine, este egală cu volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$.*

Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori unitari $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ și ortogonali $(\vec{u}\cdot\vec{v} = 0)$ și fie $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Vectorul $\vec{w}$ este unitar și este perpendicular pe fiecare din vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Există numai doi vectori să spunem $\vec{w}'$ și $\vec{w}''$, care să fie unitari, cu originea $O$ și perpendiculari pe doi vectori liniar independenți dați $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

Vectorul $\vec{w}$ este unul din cei doi vectori $\vec{w}'$, $\vec{w}''$. Se pune problema de a decide cu care din vectorii $\vec{w}'$, $\vec{w}''$ este egal vectorul $\vec{w}$?

Mai general, dacă avem doi vectori nenuli, necoliniari şi neparaleli $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ produsul vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ este un vector cu originea $O$, perpendicular pe fiecare din vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ şi avînd norma egală cu aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{u}'$, $\vec{v}' \in \vec{V}$, unde $\vec{u}' \sim \vec{u}$, $\vec{v}' \sim \vec{v}$. Există doi vectori, să spunem $\vec{w}'$ şi $\vec{w}''$, care au aceste proprietăţi şi trebuie să decidem: cu care din aceşti doi vectori este egal vectorul $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$?

În fiecare caz, vectorul $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ este determinat analitic prin componentele sale, care sînt date de formulele (3). Deci aceste formule sînt acelea care ne permit să spunem care din vectorii $\vec{w}'$, $\vec{w}''$, într-un caz dat, reprezintă produsul vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

### Exerciţii

**1.** Fie $\vec{u}, \vec{v}$ doi vectori unitari şi ortogonali. Fie $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Să se arate că

$$\vec{w} \times \vec{u} = \vec{v}, \quad \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}.$$

(*Indicaţie.* Din formulele (3) se deduce că vectorul $\vec{w} \times \vec{u}$ are componentele

$$(u_y^2 + u_z^2)v_x + u_x(-v_y u_y - u_z v_z) = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)v_x + u_x(-u_x v_x - u_y v_y - u_z v_z) = v_x,$$
$$(u_z^2 + u_x^2)v_y + u_y(-u_z v_z, - u_x v_x) = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)v_y + u_y(-u_x v_x - u_y v_y - u_z v_z) = v_y,$$
$$(u_x^2 + u_y^2)v_z + u_z(-u_x v_x - u_y v_y) = (u_x^2 + u_y^2 + u_x^2)v_z + u_z(-u_x v_x - u_y v_y - u_z v_z) = v_z.)$$

**2.** Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ trei vectori arbitrari. Să se demonstreze identitatea

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{t} = -(\vec{t} \cdot \vec{v})\,\vec{u} + (\vec{t} \cdot \vec{u})\vec{v}.$$

(*Indicaţie.* Se folosesc formulele (3) pentru calcularea produselor vectoriale care apar în membrul stîng al relaţiei date.)

**Definiţie.** **Fie $R' = (\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ un reper cartezian arbitrar. Spunem că reperul $R'$ este orientat pozitiv** (în raport cu reperul $R$, cu ajutorul căruia am definit produsul scalar) **dacă produsele** mixte (egale între ele)

$$(\vec{a}' \times \vec{b}') \cdot \vec{c}' = (\vec{b}' \times \vec{c}') \cdot \vec{a}' = (\vec{c}' \times \vec{a}') \cdot \vec{b}'$$

**sînt pozitive. Dacă aceste produse sînt negative, se spune că $R'$ este orientat negativ.**



### Exerciţii

**1.** Să se arate că reperul $R$ este orientat pozitiv.

**2.** Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt doi vectori necoliniari, avînd originea în $O$, şi dacă $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, atunci tripletul $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ este un reper cartezian orientat pozitiv.

**3.** Dacă reperul $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ este orientat pozitiv, atunci reperele

$$(-\vec{u}, \vec{v}, \vec{w},)\ (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}),\ (-\vec{u}, -\vec{v}, -\vec{w})$$

sînt orientate negativ, iar reperele

$$(-\vec{u}, -\vec{v}, \vec{w}),\ (\vec{v}, \vec{u}, -\vec{w}),\ (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}),\ (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}),\ (\vec{u}, -\vec{v}, -\vec{w})$$

sînt orientate pozitiv.

**4.** Să se calculeze volumul paralelipipedului care are muchiile $|OM|$, $|ON|$, $|OP|$, unde $M(1, -1, 1)$, $N(2, 3, -1)$ şi $P(-1, 0, 1)$.

Din definiţiile date, rezultă că reperele carteziene în spaţiu sînt de două feluri: repere orientate pozitiv şi repere orientate negativ.

Intuitiv, putem distinge cele două feluri de repere în modul următor. Să presupunem că avem un reper $R'$ cu originea într-un punct $O'$ şi format din vectorii $\vec{a}' = \overrightarrow{O'A'}$, $\vec{b}' = \overrightarrow{O'B'}$, $\vec{c}' = \overrightarrow{O'C'}$. Să presupunem că un observator stă în picioare pe planul $(O'B'C')$, de aceeaşi parte cu punctul $A'$ şi că îşi roteşte privirea de la dreapta la stînga. Dacă, în momentul iniţial, privirea observatorului este îndreptată spre vectorul $\vec{b}'$ şi dacă după o rotaţie de cel mult 180°, observatorul va ajunge cu privirea în sensul vectorului $\vec{c}'$, atunci spunem că reperul $R'$ este orientat pozitiv, (în raport cu reperul format dintr-un vector vertical, avînd sensul de la observator în sus, şi din alţi doi vectori, daţi de mîinile dreaptă şi stîngă ale observatorului, aşezate astfel încît să formeze un unghi drept.)

Orientarea reperelor în spaţiu joacă un rol esenţial în formularea unui mare număr de legi din Electricitate, Magnetism, Astronomie etc.

## 9. Vectori alunecători. Momentele vectorilor

Dacă asupra unui corp rigid $K$ acţionează o forţă $\vec{F}$, avînd punctul de aplicaţie $A$, se demonstrează experimental că efectul forţei $\vec{F}$ nu se schimbă, dacă înlocuim forţa $\vec{F}$ cu o forţă $\vec{F}'$, astfel ca $\vec{F} \sim \vec{F}'$ şi astfel ca punctul de aplicaţie $A'$ al forţei $\vec{F}'$ să se găsească pe suportul lui $\vec{F}$.

Fiind dat un vector $\vec{F}$, situat pe o dreaptă $d$, notăm prin $\{\{\vec{F}\}\}$ mulţimea tuturor vectorilor $\vec{F}'$, care sînt echipolenţi cu $\vec{F}$ şi care aparţin dreptei $d$.

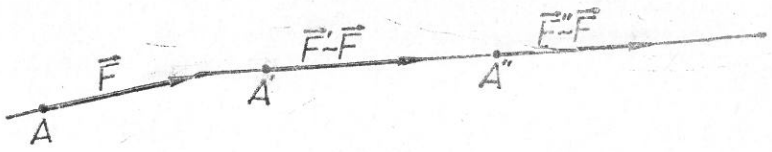



Fig. VI.34

Vom spune că $\{\{\vec{F}\}\}$ este *vectorul alunecător* definit de vectorul (legat) $\vec{F}$, (fig. VI.34).

Doi vectori nenuli definesc același vector alunecător, dacă sînt coliniari și echipolenți. Vom exprima faptul că vectorii $\vec{F}$ și $\vec{F'}$ sînt coliniari și echipolenți prin scrierea $\vec{F} \approx \vec{F'}$.

**Definiție.** Fie $\vec{F}$ un vector cu originea într-un punct $A$ și fie $Q$ un punct oarecare în spațiu. Presupunem fixat reperul cartezian ortonormat, cu ajutorul căruia am definit produsul vectorial.

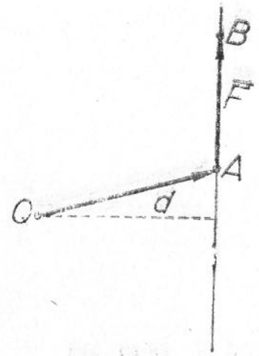



Fig. VI.35

**Definiție.** Dacă vectorul $\vec{F}$ are originea într-un punct $A$, se definește momentul $\vec{M}$ al lui $\vec{F}$ față de punctul $Q$ în modul următor: $\vec{M}$ este vectorul definit prin formula (fig. VI.35):

(1) $$\vec{M} = M(Q, \vec{F}) = \overrightarrow{QA} \times \vec{F}.$$

**Propoziție. Dacă vectorii $\vec{F}$ și $\vec{F'}$ sînt coliniari și echipolenți, avem**

(2) $$M(Q, \vec{F}) = M(Q, \vec{F'}).$$

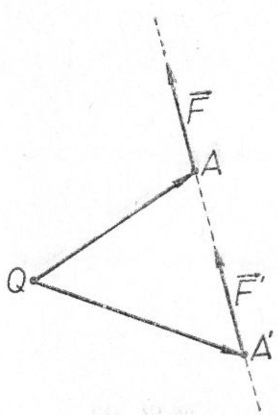



Fig. VI.36

*Demonstrație.* Fie $A$, $A'$ originile vectorilor $\vec{F}$ și $\vec{F'}$. Avem (fig. VI.36):

$$M(Q, \vec{F}) - M(Q, \vec{F'}) = \overrightarrow{QA} \times \vec{F} - \overrightarrow{QA'} \times \vec{F'} = \overrightarrow{QA} \times \vec{F} - (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AA'}) \times \vec{F'} = \overrightarrow{QA} \times \vec{F} - \overrightarrow{QA} \times \vec{F'} - \overrightarrow{AA'} \times \vec{F'} \in \vec{0},$$

deoarece avem $\overrightarrow{QA} \times \vec{F} = \overrightarrow{QA} \times \vec{F'}$ vectorii $\vec{F}, \vec{F'}$ fiind echipolenți, și $\overrightarrow{AA'} \times \vec{F'} \in \vec{0}$, vectorii $\overrightarrow{AA'}, \vec{F'}$ fiind coliniari. Deci $M(Q, \vec{F}) = M(Q, \vec{F'})$.



**Propoziție. Norma momentului $M(Q, \vec{F})$ este egală cu produsul dintre norma vectorului $\vec{F}$ și distanța de la punctul $Q$ la suportul vectorului $\vec{F}$.**

*Demonstrație* (fig. VI.35). Norma vectorului $M(Q, \vec{F}) = \overrightarrow{QA} \times \vec{F}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{AQ}$, $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ și este egală cu produsul dintre norma lui $\vec{F}$ și distanța $d$ de la $Q$ la dreapta $AB$.

*Compararea momentelor unui vector $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ în raport cu două puncte $Q$ și $Q'$.* Avem

$$M(Q, \vec{F}) = \overrightarrow{QA} \times \vec{F}, \quad M(Q' \vec{F}) = \overrightarrow{Q'A} \times \vec{F},$$

deci

$$M(Q', \vec{F}) = (\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QQ'}) \times \vec{F} = \overrightarrow{QA} \times \vec{F} - \overrightarrow{QQ'} \times \vec{F} = M(Q, \vec{F}) - \overrightarrow{QQ'} \times \vec{F}.$$

Dacă notăm prin $\vec{F'}$ vectorul echipolent cu $\vec{F}$ și care are originea $Q'$, avem $\overrightarrow{QQ'} \times \vec{F} = \overrightarrow{QQ'} \times \vec{F'} = M(Q, \vec{F'})$, astfel încît formula precedentă devine

$$M(Q', \vec{F}) = M(Q, \vec{F}) - M(Q, \vec{F'}).$$

Deci momentul vectorului $\vec{F}$ față de punctul $Q'$ este egal cu momentul lui $\vec{F}$ față de $Q$ minus momentul față de $Q$ al unui vector echipolent cu $\vec{F}$ și avînd originea $Q'$.

### Exerciții

1. Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori avînd suporții concurenți și fie $Q$ un punct oarecare. Să se arate că

$$M(Q, \vec{u} + \vec{v}) = M(Q, \vec{u}) + M(Q, \vec{v}).$$

2. Fie vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{UU'}$, $\vec{v} = \overrightarrow{VV'}$ și fie $Q, Q'$ două puncte oarecare. Să se arate că

$$M(Q', \vec{u}) + M(Q', \vec{v}) = M(Q, \vec{u}) + M(Q, \vec{v}) - M[Q, \vec{u} + \vec{v} \text{ (în } Q')].$$

Noțiunea de moment al unui vector este deosebit de importantă pentru Mecanică și Fizică. În mecanică, această noțiune permite formularea unor condiții necesare și suficiente, pe care trebuie să le verifice un sistem de forțe aplicate asupra unui corp rigid, pentru ca acel corp să fie în echilibru sub acțiunea forțelor sistemului. Considerarea momentului vitezei unei particule conduce la obținerea unor legi de conservare, fundamentale pentru studiul mișcării acelei particule.

**Definiție. Se numește cuplu, orice pereche de vectori alunecători $\{\{\vec{u}\}\}$ și $\{\{\vec{v}\}\}$, astfel ca $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie paraleli, de sensuri opuse și cu normele egale.** Suma vectorilor unui cuplu este vectorul nul.

Totuși, aplicînd un cuplu unui corp rigid, acesta nu va fi în echilibru. Efectul cuplului $(\{\{\vec{u}\}\}, \{\{\vec{v}\}\}$ asupra corpului considerat este măsurat de *momentul cuplului*, dat de suma $M(Q, \vec{u}) + M(Q, \vec{v})$. Din ultimul exercițiu și din relația $\vec{u} + \vec{v} \sim \vec{O}$ rezultă că suma $M(Q, \vec{u}) + M(Q, \vec{v})$ nu depinde de alegerea punctului $Q$.

**Exercițiu.** Fie $(\vec{u}, \vec{v})$ un cuplu și fie $Q, Q'$ două puncte oarecare. Să se arate că

$$M(Q, \vec{u}) + M(Q, \vec{v}) = M(Q', \vec{u}) + M(Q', \vec{v}).$$

(*Indicație.* Se va folosi egalitatea stabilită în exercițiul precedent.)

## 10. Probleme rezolvate

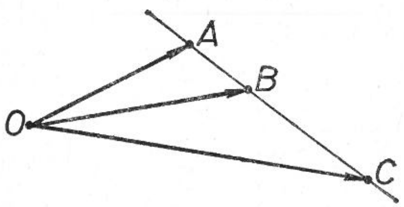



Fig. VI.37

**Problema 1.** *Fie $O, A, B$, patru puncte astfel ca $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$, unde $x$ este un număr real diferit de 1. Să se arate că* (fig. VI.37)

$$\overrightarrow{OA} \sim \frac{\overrightarrow{OC} - x\overrightarrow{OB}}{1 - x}.$$

*Rezolvare.* Din relațiile $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ rezultă $\overrightarrow{OC} - x \cdot \overrightarrow{OB} \sim$ $\sim (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) - x \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = (1 - x) \cdot \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AC} - x \cdot \overrightarrow{AB}) = (1 - x)\overrightarrow{OA}$.

Împărțind ambii membri ai relației $\overrightarrow{OC} - x \cdot \overrightarrow{OB} = (1 - x) \cdot \overrightarrow{OA}$ prin $1 - x$, se obține relația din enunț.

**Problema 2.** *Să se exprime aria unui triunghi în funcție de lungimile laturilor.*

*Soluție.* Fie $a = \| \overrightarrow{BC} \|$, $b = \| \overrightarrow{CA} \|$, $c = \| \overrightarrow{AB} \|$ lungimile laturilor triunghiului $ABC$. Vom arăta că $4S^2 = a^2c^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2$. Pe de altă parte, avem

$$2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \| \overrightarrow{BA} \|^2 + \| \overrightarrow{BC} \|^2 - (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})^2 = c^2 + a^2 - b^2,$$

deci putem scrie

$$16S^2 = 4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2 = (2ac + c^2 + a^2 - b^2)\,(2ac - c^2 - a^2 + b^2) =$$
$$= (a + c + b)\,(a + c - b)\,(b + a - c)\,(b - a + c).$$

Dacă notăm prin $2p$ perimetrul triunghiului $ABC$, vom avea

$2p = a + b + c$, $2(p - a) = b + c - a$, $2(p - b) = c + a - b$, $2(p - c) = a + b - c$

și formula precedentă devine

$$S^2 = p(p - a)\,(p - b)\,(p - c).$$

Rezultă *formula lui Heron:*

$$S = \sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

### Exerciții

**1.** Să se calculeze aria unui triunghi avînd lungimile laturilor $a = 10$, $b = 4$, $c = 7$.

**2.** Să se calculeze aria unui paralelogram avînd lungimile laturilor $a = 10$, $b = 9$ și lungimea diagonalei $d = 2$.

**Problema 3.** Fie $D$ un punct pe suportul $BC$ al laturii $|BC|$ a triunghiului $ABC$ astfel ca $\overrightarrow{DB} = k\,\overrightarrow{DC}$. Să se exprime $\| \overrightarrow{AD} \|$ cu ajutorul lungimilor $a, b, c$ și a raportului $k$.



*Soluție.* Avem $\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1 - k}$, deci

$$\overrightarrow{AD}^2 = \frac{\overrightarrow{AB}^2 - 2k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k^2\overrightarrow{AC}^2}{(1 - k)^2} = \frac{c^2 - k(b^2 + c^2 - a^2) + k^2b^2}{(1 - k)^2}$$

**1.** Să se calculeze lungimea medianei și lungimea bisectoarei duse prin vîrful $A$ în triunghiul $ABC$, pînă la intersecția cu latura $BC$.

(*Indicație.* Pentru mediană, se ia $k = -1$ și se obține

$$4m_A^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2, \quad m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Pentru bisectoare, $k = -\dfrac{c}{b}$ și rezultă pentru lungimea bisectoarei

$$\beta_A = \sqrt{bc(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}/(b + c).)$$

**2.** Să se calculeze cosinusul unghiului $\hat{A}$ al unui triunghi $ABC$, în care $a = 7$ și $b = c = 4$.

**3.** Să se calculeze cosinusurile unghiurilor triunghiului $ABC$, care are lungimile laturilor $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$.

**4.** Să se arate că unghiul $\hat{A}$ al unui triunghi $ABC$, în care $b^2 + c^2 < a^2$, este obtuz.

**5.** Să se indice unghiurile ascuțite ale triunghiului $ABC$, care are $a = m$, $b = n$ și $c = m + n - 1$, unde $m$ și $n$ sînt numere întregi mai mari decît 1.

**Problema 4.** Să se exprime aria unui triunghi $ABC$ cu ajutorul vectorilor $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$.

*Soluție.* Să notăm prin $AA'$, $A' \in BC$, înălțimea din $A$ și să notăm

$$a = \| \overrightarrow{BC} \|, c = \| \overrightarrow{BA} \|, d = \| \overrightarrow{BA'} \|, h = \| \overrightarrow{AA'} \|.$$

Aria triunghiului $ABC$ este dată de formula

$$2S = ah.$$

Avem $ad = | \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} |$, $h^2 = c^2 - d^2$, $a^2h^2 = a^2c^2 - a^2d^2$, deci

(1) $$4S^2 = \| \overrightarrow{BA} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{BC} \|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2.$$

Rezultă următoarea formulă pentru calculul ariei $S$:

(2) $$2S = \sqrt{\| \overrightarrow{BA} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{BC} \|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2}.$$

Din relația (1) deducem că avem, pentru orice pereche de vectori $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$,

$$\| \vec{u} \|^2 \, \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \geqslant 0$$

sau

(3) $$\| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| \geqslant | \vec{u} \cdot \vec{v} |.$$

Inegalitatea (3) se numește inegalitatea lui Schwartz-Cauchy-Buniakowsky.

**1.** Să se arate că punctele $A$, $B$, $C$ sînt coliniare dacă și numai dacă

$$\| \overrightarrow{BA} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{BC} \|^2 = (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2.$$

**2.** Să se arate că aria paralelogramului $ABCD$ este dată de formula

$$S(ABCD) = \sqrt{\| \overrightarrow{BA} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{BC} \|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2}.$$

**3.** Să se determine aria unui paralelogram avînd laturile $\| \overrightarrow{BA} \| = 3$, $\| \overrightarrow{BC} \| = 4$ și măs $\widehat{ABC} = 135°$.

(Avem $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -12 \cos 45° = -6\sqrt{2}$; avem $S = 6\sqrt{2}$).

## 11. Vectori de poziţie

Fie $O$ un punct fixat. Fiecărui punct $M$ i se poate asocia în mod biunivoc vectorul $\overrightarrow{OM}$, care se numeşte *vectorul de poziţie al punctului $M$* (faţă de originea fixată $O$) (fig. VI.38).


Fig. VI.38

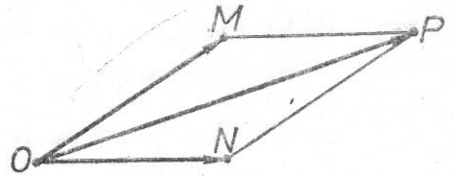



Fig. VI.39

Definim suma a doi vectori de poziţie $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ punînd (fig. VI.39)

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \text{ (în } O),$$

deci $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ este acel vector $\overrightarrow{OP}$, pentru care $\overrightarrow{MP} \sim \overrightarrow{ON}$ sau $\overrightarrow{NP} \sim \overrightarrow{OM}$.

Cu această definiţie, operaţia de adunare a vectorilor de poziţie este o operaţie comutativă şi asociativă, care admite vectorul nul $\overrightarrow{OO}$ ca element neutru. Vom nota $\vec{0} = \overrightarrow{OO}$.

Dacă notăm prin $M'$ simetricul punctului $M$ faţă de $O$, vom avea

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO},$$

deci orice vector de poziţie are un opus faţă de adunare. Notăm

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}.$$

Fiind dat un vector de poziţie $\overrightarrow{OM}$ şi un număr real $k$, produsul $k \cdot \overrightarrow{OM}$ este un vector de poziţie, avînd norma $\| k \cdot \overrightarrow{OM} \| = | k | \cdot \| \overrightarrow{OM} \|$. Dacă $\overrightarrow{OM}$ este vector nenul şi dacă $k \neq 0$, atunci $k \cdot \overrightarrow{OM}$ este vector nenul coliniar cu $\overrightarrow{OM}$. Deci punînd $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, punctele $O$, $M$, $M'$ vor fi coliniare.

Dacă $k > 0$, semidreptele $|OM$, $|OM'$ coincid, iar dacă $k < 0$, semidreptele $|OM$, $|OM'$ sînt opuse.

Din definiţiile şi proprietăţile pe care le cunoaştem pînă acuma, dacă notăm prin $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ vectori de poziţie, faţă de o origine fixată $O$, putem scrie următoarele formule

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$,
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,
5. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$,



6. $(k + l) \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{u}$,
7. $(k \cdot l) \cdot u = k \cdot (l \cdot u)$
8. $1 \cdot u = u$.

D e f i n i ţ i e. **O mulţime $M$, înzestrată cu o operaţie de compunere internă, notată cu semnul $+$, şi cu o operaţie de compunere externă, de înmulţire cu numere reale, astfel încît să fie verificate proprietăţile 1—8, se numeşte spaţiu vectorial real.**

Putem spune, din cele arătate, că:

*Vectorii de poziţie ai punctelor din spaţiu, în care s-a fixat o origine, formează un spaţiu vectorial real.*

Produsul scalar, definit pentru doi vectori oarecare, poate fi aplicat şi vectorilor de poziţie. Avem proprietăţile:

1'. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \in \mathbf{R}$,

2'. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,

3'. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$,

4'. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ dacă şi numai dacă $\vec{u} = \vec{0}$.

5'. $(\vec{k} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Un spaţiu vectorial, înzestrat cu o operaţie, care asociază fiecărei perechi de vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$ un număr real $\vec{u} \cdot \vec{v}$, astfel încît să fie verificate proprietăţile 1'—5' se numeşte *spaţiu vectorial euclidian.*

Din consideraţiile anterioare rezultă că:

*Vectorii de poziţie ai punctelor din spaţiu, în care s-a fixat o origine, formează un spaţiu vectorial euclidian.*

## 12. Vectori liberi

Fie $\overrightarrow{AB}$ un vector. Mulţimea vectorilor echipolenţi cu vectorul $\overrightarrow{AB}$, se numeşte *vectorul liber* definit de $\overrightarrow{AB}$. Vom nota această mulţime prin $\{\overrightarrow{AB}\}$. Avem $\overrightarrow{AB} \in \{\overrightarrow{AB}\}$, deoarece $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu el însuşi.

**Exerciţiu.** Dacă $\overrightarrow{A'B'}$ este un vector echipolent cu $\overrightarrow{AB}$, avem $\{\overrightarrow{A'B'}\} = \{\overrightarrow{AB}\}$.

Vom nota prin $\vec{O}$ mulţimea tuturor vectorilor nuli; aceştia sînt echipolenţi între ei, deci $\vec{O}$ este un vector liber.

Dacă avem doi vectori $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$, este definită suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (în $O$), pentru orice punct $O$. Dacă avem alte puncte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $O'$ astfel ca $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{C'D'} \sim \overrightarrow{CD}$, atunci

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) \sim \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'} \text{ (în } O'),$$

deci avem implicația

$$\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{C'D'} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) \sim \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'} \text{ (în } O').$$

Această implicație arată că putem defini suma a doi vectori liberi prin formula

$$\{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{CD}\} = \{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O)\}.$$

Dacă $r$ este un număr real și dacă $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt doi vectori echipolenți, avem $r \cdot \overrightarrow{AB} \sim r \cdot \overrightarrow{A'B'}$. Aceasta arată că putem defini produsul unui număr real $r$ cu un vector liber $\{\overrightarrow{AB}\}$ punînd

$$r \cdot \{\overrightarrow{AB}\} = \{r \cdot \overrightarrow{AB}\}.$$

Datorită faptului că produsul scalar a doi vectori nu se schimbă dacă înlocuim cei doi vectori prin doi vectori echipolenți lor, rezultă că putem defini produsul scalar a doi vectori liberi $\{\overrightarrow{AB}\}$, $\{\overrightarrow{CD}\}$ punînd

$$\{\overrightarrow{AB}\} \cdot \{\overrightarrow{CD}\} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Operațiile de adunare, de înmulțire cu un număr real și de produs scalar a vectorilor liberi au proprietățile **1—8** și **1′—5′** arătate pentru vectorii de poziție. Rezultă că:

*Vectorii liberi ai spațiului formează un spațiu vectorial euclidian.*

## 13. Aplicații geometrice
(pentru cercuri de elevi)

**1.** *Condiții de coliniaritate a trei puncte.*

Dacă punctele $A$, $B$, $C$ sînt coliniare, vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vor fi coliniari; deci există un număr real $r$ astfel ca

(1) $$\overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Folosind o formulă stabilită anterior, putem scrie (fig. VI.40).

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \text{ (în } A) = r\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \text{ (în } A).$$

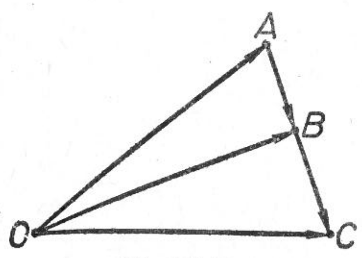


**Fig. VI.40**

Rezultă că avem

$$\overrightarrow{OC} - r \cdot \overrightarrow{OB} + (r - 1)\overrightarrow{OA} = \text{vector nul}$$

au

(2) $$\overrightarrow{OC} \sim r \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - r) \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Deci, dacă punctele $A$, $B$, $C$ sînt coliniare, există un număr real $r$ astfel încît să fie verificată relația (2).

Reciproc, dacă relația (2) este verificată putem deduce relația (1), care arată că punctele $A$, $B$, $C$ sînt coliniare.



Dacă $r = 1$, avem $C = B$.

Dacă presupunem $r \neq 1$, din formula (2) rezultă

(3) $$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OC} - r \cdot \overrightarrow{OB}}{1 - r}.$$

Formula (1) arată că $r$ este raportul în care punctul $A$ împarte segmentul $|BC|$.

În concluzie:

*Fiecare din formulele* (1), (2), (3) *constituie o condiție necesară și suficientă ca punctele* A, B, C *să fie coliniare. În aceste formule, $r$ reprezintă raportul în care punctul* A *împarte segmentul* | BC | *și este deci un număr care nu depinde de alegerea punctului* O.

Dacă notăm $q = 1 - r$, $s = -1$, avem

(4) $$q + r + s = 0$$

și ecuația (2) se poate scrie

(5) $$q \cdot \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Deci:

*O condiție necesară pentru ca punctele $A$, $B$ $C$, să fie coliniare este să existe trei numere reale $q, r, s$, nu toate nule, dar avînd suma* 0, *astfel încît să fie verificată relația* (5).

Condiția obținută este și suficientă, deoarece numerele $q, r, s$ ne fiind toate nule, putem împărți aceste numere cu unul dintre ele, care nu este nul, și obținem atunci o relație de forma (2), în care $C$ este eventual înlocuit prin $A$ sau $B$.

**2. Teorema lui Menelaus** (directă și reciprocă).

Pentru a da o aplicație a acestor rezultate, să considerăm un punct $O$, un triunghi $PQR$ și alte trei puncte $P'$, $Q'$, $R'$, astfel ca $P' \in QR$, $Q' \in RP$, $R' \in PQ$. Să considerăm numerele reale $q, p, r$, pentru care avem

(6) $$\overrightarrow{P'Q} = p \cdot \overrightarrow{P'R},\quad \overrightarrow{Q'R} = q \cdot \overrightarrow{Q'P},\quad \overrightarrow{R'P} = r \cdot \overrightarrow{R'Q}.$$

Vrem să aflăm condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o îndeplinească numerele $p, q, r$, pentru ca punctele $P'$, $Q'$, $R'$ să fie coliniare. Vom presupune că punctele $P'$, $Q'$, $R'$ sînt diferite de $P$, $Q$, $R$.

Numerele $p, q, r$, nu depind de alegerea punctului $O$. Să alegem atunci $O = P'$ (fig. VI.41). Din formulele (6) obținem, folosind formula (3),

(7) $$\overrightarrow{OQ} = p \cdot \overrightarrow{OR},$$

(8) $$\overrightarrow{OQ'} = \frac{\overrightarrow{OR} - q \cdot \overrightarrow{OP}}{1 - q},$$

$$\overrightarrow{OR'} = \frac{\overrightarrow{OP} - r \cdot \overrightarrow{OQ}}{1 - r} = \frac{\overrightarrow{OP} - rp \cdot \overrightarrow{OR}}{1 - r}.$$

Folosind (7), am eliminat vectorul $\overrightarrow{OQ}$.

Punctele $O = P'$, $Q'$, $R'$ sînt coliniare, dacă există un număr real $k$, astfel ca $\overrightarrow{OQ'} = k \cdot \overrightarrow{OR'}$.

Rezultă condiția

$$(1 - r)\,(\overrightarrow{OR} - q \cdot \overrightarrow{OP}) = k(1 - q)\,(\overrightarrow{OP} - rp\,\overrightarrow{OR}.)$$

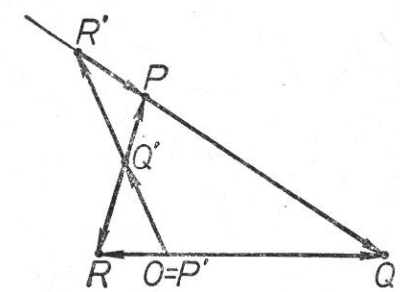


**Fig. VI.41**

Punctele $O$, $P$, $R$ nu pot fi coliniare; ultima egalitate conduce la relațiile

$$-(1-r)q = k(1-q),\ 1-r = -krp(1-q).$$

Eliminînd $k$, obținem

$$pqr = 1.$$

Am obținut

**Teorema lui Menelaus.** Condiția necesară și suficientă pentru ca trei puncte $P'$, $Q'$, $R'$, situate pe laturile unui triunghi $PQR$ să fie coliniare, este ca numerele $p$, $q$ $r$ care verifică relațiile

$$(9)\quad \overrightarrow{P'Q} = p\cdot\overrightarrow{P'R},\ \overrightarrow{Q'R} = q\cdot\overrightarrow{Q'P},\ \overrightarrow{R'P} = r\cdot\overrightarrow{R'Q}$$

**să verifice condiția** $pqr = 1$.

Teorema lui Menelaus se mai numește *teorema celor șase mărimi.*

3. *Teorema lui Ceva.*

Să ne punem acuma problema de a afla condiția pe care trebuie să o îndeplinească rapoartele $p$, $q$, $r$, pentru ca dreptele $PP'$, $QQ'$, $RR'$ să fie concurente.

Numerele $p$, $q$, $r$ fiind independente de alegerea punctului $O$, să alegem pentru $O$ punctul de concurență al dreptelor $PP'$, $QQ'$, $RR'$.

În acest caz, vor exista trei numere reale $a$, $b$, $c$, astfel ca

$$(10)\qquad \overrightarrow{OP'} = a\cdot\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ'} = b\cdot\overrightarrow{OQ},\ \overrightarrow{OR'} = c\cdot\overrightarrow{OR}.$$

Pe de altă parte, folosind relațiile (6) și formula (3), obținem

$$(1-p)\cdot\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} - p\cdot\overrightarrow{OR},\ (1-q)\cdot\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OR} - q\cdot\overrightarrow{OP},\ (1-r)\cdot\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OP} - r\cdot\overrightarrow{OQ}.$$

Introducînd în formulele (10), ajungem la ecuațiile

$$\overrightarrow{OQ} - p\cdot\overrightarrow{OR} = a(1-p)\cdot\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OR} - q\cdot\overrightarrow{OP} = b(1-q)\cdot\overrightarrow{OQ},\ \overrightarrow{OP} - r\cdot\overrightarrow{OQ} = c(1-r)\cdot\overrightarrow{OR}.$$

Prima din aceste ecuații dă $\overrightarrow{OQ} = p\cdot\overrightarrow{OR} + a(1-p)\cdot\overrightarrow{OP}$. Introducînd această expresie în celelalte două ecuații, avem

$$\overrightarrow{OR} - q\cdot\overrightarrow{OP} = b(1-q)p\cdot\overrightarrow{OR} + ab(1-p)(1-q)\cdot\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OP} - rp\cdot\overrightarrow{OR} - ar(1-p)\cdot$$
$$\cdot\overrightarrow{OP} = c(1-r)\overrightarrow{OR}.$$

Grupînd termenii convenabili, putem scrie aceste relații sub forma

$$[1 - bp(1-q)]\cdot\overrightarrow{OR} = [q + ab(1-p)(1-q)]\cdot\overrightarrow{OP},\ [1 - ar(1-p)]\cdot\overrightarrow{OP} = [rp +$$
$$+ c(1-r)]\cdot\overrightarrow{OR}.$$

Dar vectorii $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OR}$ sînt necoliniari, deci trebuie să avem

$$1 - bp(1-q) = 0,\ q + ab(1-p)(1-q) = 0,\ 1 - ar(1-p) = 0,\ rp + c(1-r) = 0.$$

Eliminînd în primele trei din aceste relații numerele $a$, $b$, obținem $pqr = -1$. Am demonstrat

**Teorema lui Ceva. Fiind date punctele $P'$, $Q'$, $R'$ pe laturile triunghiului $PQR$, astfel ca aceste puncte să fie diferite de $P$, $Q$, $R$ și astfel ca dreptele $PP'$, $QQ'$, $RR'$ să fie concurente, rapoartele $p$, $q$, $r$, în care aceste puncte împart segmentele $|OR|$, $|RP|$, $|PQ|$, verifică relația**

$$(11)\qquad pqr = -1.$$



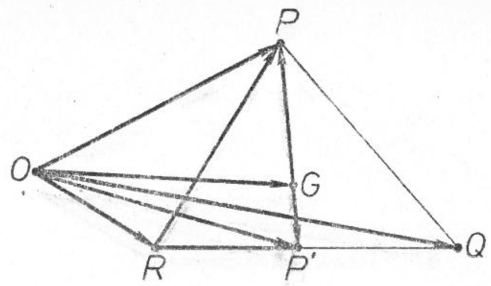


Fig. VI.42

Rezultă că dintre rapoartele $p$, $q$, $r$, unul sau trei sînt negative.

Să indicăm alte aplicații ale formulei (3).

4. Dacă $A$ este mijlocul segmentului $|BC|$, avem $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, deci $r = -1$ și formula (3) devine

$$(12)\qquad \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

5. Fie $PQR$ un triunghi și fie $P'$ mijlocul segmentului $|QR|$ (fig. VI.42).

Oricare ar fi punctul $O$, a vom avea $\overrightarrow{OP'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})\cdot$

Fie $G$ punctul de pe segmentul $|PP'|$, pentru care $\overrightarrow{GP} = -2\overrightarrow{GP'}$. Formula (3) pentru $r = -2$ dă

$$(13)\qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}).$$

$G$ este punctul de pe mediana $|PP'|$, care împarte această mediană în raportul $\overrightarrow{GP}/\overrightarrow{GP'} = -2$. Formula (13) fiind simetrică în $P$, $Q$, $R$, considerarea celorlalte două mediane $|QQ'|$, $|RR'|$ va arăta că același punct $G$ împarte și aceste mediane în raportul $-2$. Obținem astfel o nouă demonstrație a proprietății de concurență a medianelor unui triunghi oarecare.

Dacă $O = G$, formula (13) devine

$$(14)\qquad \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}.$$

6. Fie $PQRS$ un patrulater și fie $M$, $N$ mijloacele segmentelor $|PQ|$, $|RS|$. Avem, oricare ar fi punctul $O$,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}),\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS})\cdot$$

Dacă notăm prin $H$ mijlocul segmentului $|MN|$, avem

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS})\cdot$$

Din simetria acestei formule în $P$, $Q$, $R$, $S$ deducem că $H$ este mijlocul segmentului care are drept extremități mijloacele segmentelor $|QR|$, $|PS|$ sau ale segmentului $|PR|$ $|QS|$.

Dacă $O = H$, ultima formulă devine

$$\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{HR} + \overrightarrow{HS} = \vec{0}.$$

$H$ este *centrul de greutate* al patrulaterului $PQRS$.

7. Să generalizăm aceste proprietăți. Fie $A_1A_2 \dots A_m$, $B_1B_2 \dots B_n$ două poligoane și fie $O$ un punct în spațiu. Definim centrul de greutate al fiecăruia din aceste poligoane, punînd

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_m}),$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n})\cdot$$

Fie $I$ punctul de pe segmentul $[GH]$, pentru care avem $\overrightarrow{IG} = -\frac{n}{m}\cdot\overrightarrow{IH}$. Din formula (3) se obține pentru $\overrightarrow{OI}$ expresia

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{m+n}(\overrightarrow{OA_1}+\dots+\overrightarrow{OA_m}+\overrightarrow{OB_1}+\dots+\overrightarrow{OB_n}).$$

Rezultă că $I$ este centrul de greutate al poligonului $A_1 \dots B_n$. Punctul $I$ nu se schimbă, dacă schimbăm punctul $O$ sau dacă permutăm între ele punctele $A_1, \dots, B_n$.

8. *Teorema lui Desargues.* Fie într-un plan triunghiurile $ABC$, $A'B'C'$ astfel ca dreptele $AA'$, $BB'$, $CC'$ să fie distincte și concurente într-un punct $O$. Definim punctele $A''$, $B''$, $C''$ prin formulele:

$$\{A''\} = BC \cap B'C',\quad \{B''\} = CA\cap C'A',\quad \{C''\}=AB\cap A'B'.$$

Atunci punctele $A''$, $B''$, $C''$ sînt coliniare.

*Demonstrație.* Din ipoteză rezultă că există numere reale $p, q, r$ astfel ca

$$\overrightarrow{OA'} = p\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'}=q\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC'}=r\overrightarrow{OC}.$$

Să notăm prin $u, v, w, u', v', w'$ rapoartele în care punctele $A''$, $B''$, $C''$ împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, respectiv $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$. Vom avea relațiile

$$\overrightarrow{OA''} = \frac{\overrightarrow{OB}-u\overrightarrow{OC}}{1-u} = \frac{\overrightarrow{OB'}-u'\overrightarrow{OC'}}{1-u'} = \frac{q\overrightarrow{OB}-ru'\overrightarrow{OC}}{1-u'},$$

$$\overrightarrow{OB''} = \frac{\overrightarrow{OC}-v\overrightarrow{OA}}{1-v} = \frac{\overrightarrow{OC'}-v'\overrightarrow{OA'}}{1-v'} = \frac{r\overrightarrow{OC}-pv'\overrightarrow{OA}}{1-v'},$$

$$\overrightarrow{OC''} = \frac{\overrightarrow{OA}-w\overrightarrow{OB}}{1-w} = \frac{\overrightarrow{OA'}-w'\overrightarrow{OB'}}{1-w'} = \frac{p\overrightarrow{OA}-qw'\overrightarrow{OB}}{1-w'}.$$

Vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ fiind necoliniari doi cîte doi, din aceste relații deducem egalitățile

$$1-u' = q(1-u),\quad 1-v' = r(1-v),\quad 1-w' = p(1-w),$$

$$u(1-u') = ru'(1-u),\quad v(1-v') = pv'(1-v),\quad w(1-w') = qw'(1-w).$$

Din aceste egalități se deduce că

$$u' = \frac{1-q}{1-r},\quad v' = \frac{1-r}{1-p},\quad w' = \frac{1-p}{1-q},$$

Deci $u'v'w' = 1$. Din reciproca teoremei lui Menelaus deducem că punctele $A''$, $B''$, $C''$ sînt coliniare.

Să observăm că relațiile scrise mai sus implică formulele

$$qu = ru',\quad rv = pv',\quad pw = qw'.$$

## 14. Aplicații în mecanică

În Mecanică, o forță se reprezintă printr-un vector legat, originea vectorului fiind punctul de aplicație al forței.

Dacă asupra unui *corp rigid* (nedeformabil) $K$ se aplică o forță $\vec{F}$ într-un punct $A$, efectul aplicării acestei forțe nu se schimbă, dacă înlocuim vectorul $\vec{F}$ printr-un vector $\vec{F'}$, echipolent cu $\vec{F}$ și avînd același suport cu $\vec{F}$.



Dacă asupra corpului $K$ se aplică două forțe $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, în același punct $A$, atunci efectul aplicării acestor forțe nu se schimbă, dacă înlocuim perechea celor două forțe prin suma lor, luată în punctul $A$.

Aceste proprietăți sînt legi fizice, verificate experimental. Ele au condus la definirea sumei a doi vectori, așa cum am arătat, și la considerarea relației de echipolență a vectorilor.

Dacă asupra corpului $K$ se aplică mai multe forțe $\vec{F_1}, \dots, \vec{F_n}$, în diferite puncte $A_1, \dots, A_n$, și dacă se fixează un punct $O$, suma $\vec{F_1}+\dots+\vec{F_n}$ (în $O$), (fig. VI.43) se numește *rezultanta în* $O$, a vectorilor $\vec{F_1}, \dots, \vec{F_n}$. Dacă notăm prin $\vec{R_0}$ această rezultantă, efectul aplicării forței $\vec{R_0}$ în punctul $O$ nu este în general același cu efectul aplicării forțelor $\vec{F_i}$ în punctele $A_i$. Pentru a obține același efect, se arată că trebuie să mai aplicăm corpului $K$ un *cuplu*. Prin definiție, un cuplu este un sistem de doi vectori legați $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, avînd suporții $AB$, $CD$ paraleli, normele egale și sensurile opuse.

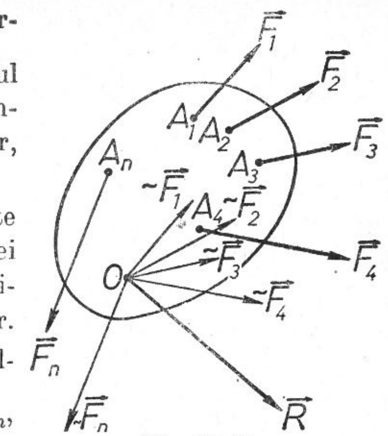


Fig. VI.43

**Exemple. 1.** *Pentru a face o aplicație la Mecanică, să ne propunem să calculăm norma rezultantei a două forțe $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, care fac între ele unghiul $\alpha$. Norma rezultantei $\vec{R_0}$ nu depinde de punctul O și avem*

$$\vec{R}_0^2 = \vec{R_0}\cdot\vec{R_0} = \vec{F_1}\cdot\vec{F_1}+\vec{F_1}\cdot\vec{F_2}+\vec{F_2}\cdot\vec{F_1}+\vec{F_2}\cdot\vec{F_2}$$

deci

$$\vec{R}_0^2 = \vec{F}_1^2+\vec{F}_2^2+2\,\|\vec{F_1}\|\cdot\|\vec{F_2}\|\cos\alpha.$$

2. *Dacă trei forțe $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, aplicate într-un punct O al unui corp K sînt în echilibru, atunci există trei puncte $P_1$, $P_2$, $P_3$ astfel ca*

$$\overrightarrow{P_1P_2}\sim\vec{F_3},\quad \overrightarrow{P_2P_3}\sim\vec{F_1},\quad \overrightarrow{P_3P_1}\sim\vec{F_2}.$$

**Exercițiu.** Dacă un punct mobil $M$ parcurge un segment $[A\ B]$, de la $A$ la $B$, sub acțiunea unei forțe constante $\vec{F}$ se spune că $\vec{F}$ efectuează un lucru mecanic

$$L_{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{F}.$$

Să se arate că dacă $M$ parcurge linia frîntă $[ABC]$, atunci (fig. VI.44)

$$L_{AB}+L_{BC} = L_{AC}.$$

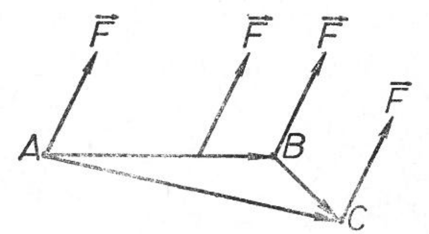


Fig. VI.44


Fig. VI.45

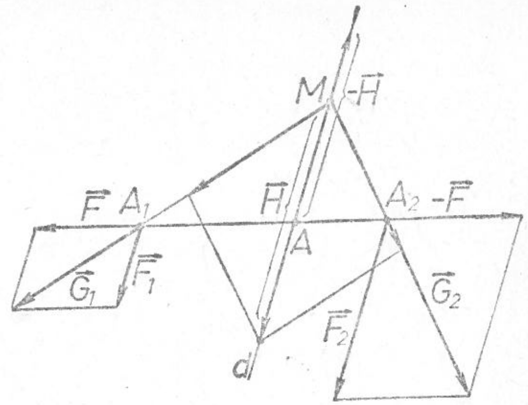



Fig. VI.46

*A p l i c a ț i a* **1.** *În capetele $A_1$, $A_2$ ale unei bare rigide se aplică două forțe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, paralele și de același sens, dar neegale. Să se determine un punct $O \in |A_1A_2|$ și o forță $\vec{F}'$, care aplicată în O, să facă echilibru cu $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$* (fig. VI.45).

*Soluție.* Aplicăm în $A_1$ și $A_2$ forțele $\vec{F}$, $-\vec{F}$ respectiv. Efectul forțelor $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ aplicate în $A_1$ și $A_2$ este același cu al forțelor $\vec{G}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}$, $\vec{G}_2 = \vec{F}_2 - \vec{F}$, aplicate în $A_1$ și $A_2$ (fig. VI.46).

Suporții forțelor $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ se intersectează într-un punct $M$. Efectul forțelor $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ este același cu efectul forței $\vec{H} = (\vec{G}_1 + \vec{G}_2)$ (în $M$). Fie $d$ suportul forței $\vec{H}$ și fie $\{A\} = d \cap A_1A_2$. Avem $A \in |A_1A_2|$. Aplicînd forța $-\vec{H}$ în punctul $A$, obținem sistemul de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, -\vec{H}$, care este în echilibru. Avem $d \parallel \vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, deci triunghiurile formate de $\vec{F}_1$, $\vec{G}_1$ și $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MA_1}$ sînt asemenea; rezultă

$$\frac{|AA_1|}{|AM|} = \frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{F}_1\|}.$$

La fel

$$\frac{|AA_2|}{|AM|} = \frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{F}_2\|}.$$

Rezultă

$$\frac{|AA_1|}{|AA_2|} = \frac{\|\vec{F}_2\|}{\|\vec{F}_1\|}.$$



Rezultă că $A$ împarte segmentul $[A_1A_2]$ în raportul $\|\vec{F}_2\| / \|\vec{F}_1\|$, ceea ce permite determinarea lui $A$ pe segmentul $|A_1A_2|$.

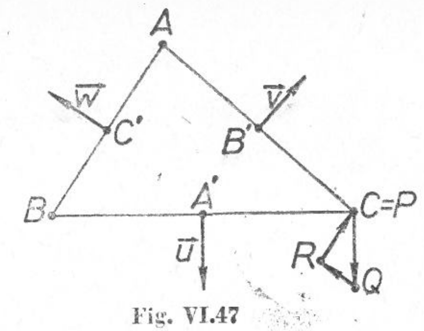



Fig. VI.47

*Observație.* Dacă forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ au sensuri opuse și mărimi diferite, punctul $A$ va fi exterior segmentului $|A_1A_2|$.

*A p l i c a ț i a* **2.** *Fie ABC un triunghi rigid și fie A', B', C' mijloacele laturilor |BC|, |CA|, |AB|. În punctele A', B', C' se aplică trei forțe $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ perpendiculare pe laturi, dirijate spre exteriorul triunghiului și avînd mărimile proporționale cu laturile. Să se arate că cele trei forțe fac echilibru* (fig. VI.47).

*Soluție.* Vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sînt echipolenți cu vectorii $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RP}$, unde $PQR$ este un triunghi care se obține din triunghiul $ABC$ printr-o rotație de unghi drept în jurul unuia din vîrfuri și apoi printr-o omotetie.

*A p l i c a ț i a* **3.** *Să se generalizeze ultima problemă, considerînd un poligon oarecare.*

*Soluție.* Se consideră forțe perpendiculare cîte unei laturi, proporționale cu laturile și orientate spre exteriorul poligonului. Cu $n$ vectori echipolenți acestor forțe se formează un poligon asemenea cu primul poligon.

**Exercițiu.** Se consideră un paralelogram rigid $ABCD$ și se aplică în punctele $A$, $B$, $C$, $D$ forțe proporționale respectiv cu vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$. Să se arate că aceste forțe fac echilibru (fig. VI.48).

*A p l i c a ț i a* **4.** *Fie |AB|, |BC|, |AC| trei tije avînd greutățile proporționale cu lungimile lor. Să se determine centrul de greutate al sistemului celor trei tije* (fig. VI.49).

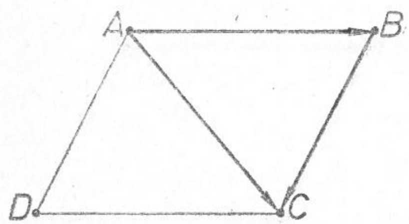



Fig. VI.48

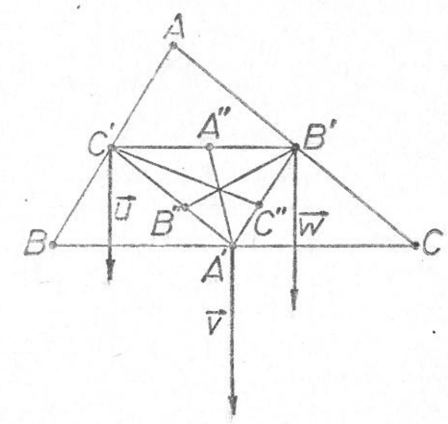



Fig. VI.49

*Soluție.* Pentru a afla centrul de greutate, considerăm că în mijloacele $C'$, $A'$, $B'$ ale laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ sînt aplicate trei forțe $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, avînd mărimile proporționale cu lungimile laturilor. Sistemul forțelor $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ poate fi înlocuit cu un sistem de forțe $\vec{w}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{u}$, aplicate în punctele $A''$, $B''$, $C''$, astfel ca

$$A'' \in |B'C'|, \quad \frac{|A''B'|}{|A''C'|} = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}.$$

Rezultă că $|A'A''$ este bisectoarea unghiului $\widehat{B'A'C'}$. Centrul de greutate căutat $J$ se va afla pe segmentul $|A'A''|$. În mod analog, vom arăta că $J$ se află și pe celelalte bisectoare ale triunghiului $A'B'C'$, deci $J$ este intersecția bisectoarelor triunghiului $A'B'C'$.

*A p l i c a ț i a* 5. *Să se determine centrul de greutate $G$ al unei plăci omogene limitate de un patrulater $ABCD$.*

*Soluție.* Fie $g_C$, $g_A$, $g_D$, $g_B$ centrele de greutate ale triunghiurilor $ABD$, $BCD$, $ABC$, $ACD$. Atunci

$$G \in g_A g_C \cap g_B g_D.$$

## 15. Aplicație în astronomie

### Mișcarea aparentă a planetelor (pentru cercuri de elevi)

Se știe astăzi că planetele sistemului nostru solar descriu orbite eliptice, situate, în plane înclinate față de planul orbitei Pămîntului, cu excepția planetei Pluto, cu cel mult 7° și avînd toate unul din focare în Soare.

Într-o primă aproximație, putem presupune că orbitele planetelor sînt cercuri concentrice aflate într-un același plan, centrul acestor cercuri găsindu-se în Soare. Pentru a urmări mișcarea unei planete $J$, să spunem Jupiter, pe bolta cerească, va trebui să ținem seama că mișcarea diurnă de rotație a Pămîntului în jurul axei sale complică traiectoria aparentă a planetei $J$. Pentru a elimina această complicație, vom înregistra poziția planetei $J$ pe bolta cerească, mai multe nopți la rînd, la o aceeași oră. Vom constata atunci că traiectoria planetei $J$ este încă destul de complicată. Explicația este dată de faptul că, față de un observator situat pe Pămînt, mișcarea lui J apare ca o compunere a două mișcări de rotație, una a lui $J$ față de Soarele $S$ și alta aparentă, a Soarelui față de Pămînt. Prin urmare, traiectoria lui $J$ poate fi descrisă ca traiectoria unui mobil, care se rotește pe un cerc $E$ de rază $r = d(S, P)$, al cărui centru se rotește, la rîndul său, pe un cerc $D$, de centru $P$ și rază $R = d(J, S)$ (fig. VI.50, VI.51).

De asemenea, putem descompune mișcarea aparentă a planetei $J$ față de Pămînt, considerînd că $J$ se rotește pe un cerc $D'$, de rază $R$, al cărui centru se rotește, la rîndul său, pe un cerc $E'$ de rază $r$ și de centru $P$.



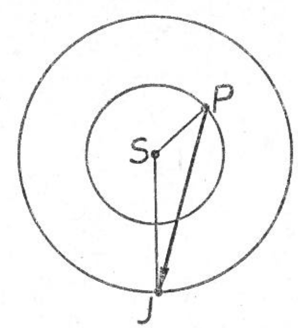



Fig. VI.50

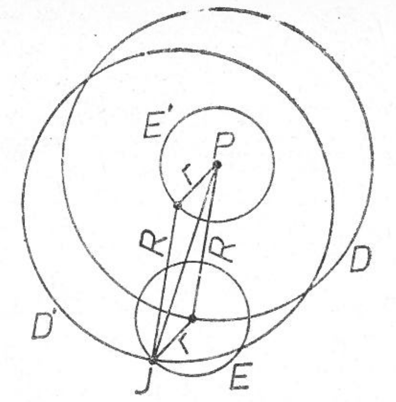



Fig. VI.51

Ptolomeu a considerat, pentru fiecare planetă, ca cerc mobil, cercul de rază mai mică, iar ca cerc fix, cel de rază mai mare. Echivalența celor două descompuneri a fost pusă în evidență de *Tycho Brahe*, care a deschis astfel drumul clar spre modelul heliocentric al lui Copernic; acesta a mutat centrul cercurilor fixe din $P$ în Soarele $S$.

Dacă admitem că $P_1$ și $J_1$ descriu traiectoriile $p$, $j$ în jurul Soarelui (fig. VI.52), traiectoria aparentă $J' = J_1'J_2' \ldots$ a lui $J$ față de $P$ este dată de oricare din figurile VI.53, VI.54.

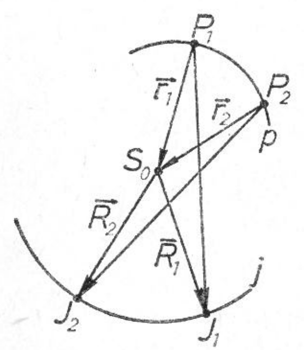



Fig. VI.52

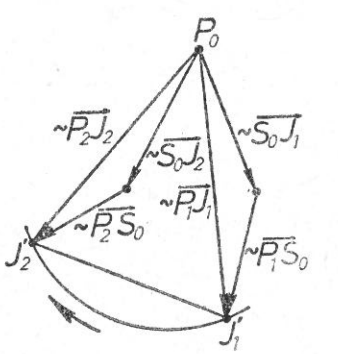



Fig. VI.53

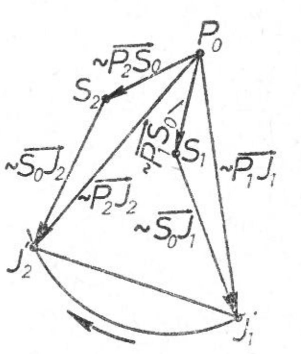



Fig. VI.54

## 16. Exerciții

**1.** Să se enunțe și să se demonstreze reciproca teoremei lui Desargues.

**2.** Să se enunțe și să se demonstreze reciproca teoremei lui Ceva.

**3.** Fie $PQR$ un triunghi și fie punctele $P' \in QR$, $P'' \in QR$, $Q' \in PR$, $R' \in PQ$ diferite de $P, Q, R$ și astfel ca dreptele $PP'$, $QQ'$ $RR'$ să fie concurente, iar punctele $P''$, $Q'$, $R'$, să fie coliniare. Să se arate că există un număr real $r$ astfel încît să avem

$$\overrightarrow{P'Q} \sim r\overrightarrow{P'R}, \quad \overrightarrow{P''Q} \sim -r\,\overrightarrow{P''R}.$$

Cine va fi $PP''$ dacă $QQ'$, $RR'$ sînt bisectoarele unghiurilor $\hat{Q}$, $\hat{R}$ ale triunghiului $PQR$?

**4.** Fie $PQR$ un triunghi și fie punctele $P', P'' \in QR$, $Q', Q'' \in PR$, $R', R'' \in PQ$ diferite de $P, Q, R$ și astfel ca $P', P''$ să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|QR|$, $Q'$ și $Q''$ să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|RP|$, iar $R'$ și $R''$ să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|PQ|$. Să se arate că $P'', Q'', R''$ sînt coliniare dacă și numai dacă $P', Q', R'$ sînt coliniare și că dreptele $PP'', QQ'', RR''$ sînt concurente, dacă și numai dacă $PP', QQ', RR'$ sînt concurente.

**5.** Fie $O, O', A, B$ patru puncte distincte astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv |O'A| \equiv |O'B|$. Să se arate că dreptele $OA, O'B$ sînt paralele și că dreptele $OO'$, $AB$ sînt perpendiculare.

**6.** Fie $OAB$ un triunghi isoscel ($|OA| \equiv |OB|$) și fie $M$ mijlocul segmentului $|AB|$. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \sim 2\overrightarrow{OM}$.

**7.** Fie punctele $A, B, C, D, O, M$ astfel încît dreptele $AB, CD$ sînt perpendiculare în $M$ și $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \equiv |OD|$. Să se arate că

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}.$$

**8.** Fie $A, B, C, D$ patru puncte fixe într-un plan și fie $M$ un punct mobil în același plan. Fie $M_1$ simetricul lui $M$ față de $A$, $M_2$ simetricul lui $M_1$ față de $B$, $M_3$ simetricul lui $M_2$ față de $C$ și $M_4$ simetricul lui $M_3$ față de $D$. Să se arate că vectorul $\overrightarrow{MM_4}$ este echipolent cu un vector fix. Să se indice condițiile în care avem $M_4 = M$.

**9.** Să se arate că oricare ar fi punctele $A, B, C, D$ într-un plan, avem

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

**10.** Fie $O, A, B$ trei puncte fixe într-un plan $p$, $A \neq B$. Să se determine locul geometric al punctelor $M$, pentru care avem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \text{const}$.

**11.** Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \perp CD$ și fie $E, F$ mijloacele laturilor $|AD|$, $|BC|$. Să se arate că avem

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD},\quad 4\overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2,\quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

**12.** Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trei vectori liberi, astfel ca $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Să se arate că există puncte $A, B, C$ astfel ca $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, $\overrightarrow{CA} \in \vec{w}$.

**13.** Să se arate că, dacă $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, atunci

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})^2 \vec{b}^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \vec{c}^2 + (\vec{b} \cdot \vec{c})^2 \vec{a}^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 \vec{c}^2 + 2 (\vec{c} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

**14.** Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trei vectori liberi astfel ca $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ și fie

$$\vec{a}' = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},\quad \vec{b}' = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a},\quad \vec{c}' = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}.$$

Să se arate că există puncte $A, B, C, A', B', C'$ astfel ca

$$\overrightarrow{BC} \in \vec{a},\ \overrightarrow{CA} \in \vec{b},\ \overrightarrow{AB} \in \vec{c},\ \overrightarrow{B'C'} \in \vec{a}',\ \overrightarrow{C'A'} \in \vec{b}',\ \overrightarrow{A'B'} \in \vec{c}'$$

și că triunghiurile $ABC$, $A'B'C'$ sînt asemenea (M. Chiriță).

**15.** Fie $OAB$ un triunghi și $k$ un număr real. Se consideră punctul $P$ pentru care $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BA}$. Să se determine $x$ și $y$ astfel ca $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Cum trebuie ales $k$



pentru ca $P$ să fie între $A$ și $B$? Care este locul geometric al punctelor $P$, pentru care $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$, cînd $k$ parcurge mulțimea **R** a numerelor reale?

**R:** $x = k, y = 1 - k$; dreapta $AB$.

**16.** Să se arate că dacă $AD$ este bisectoare în triunghiul $ABC$, atunci

$$\| \overrightarrow{AC} \| (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \| \overrightarrow{AB} \| (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}).$$

**17.** Fie într-un plan reperul ortogonal $(\vec{i}, \vec{j})$. Se consideră vectorii $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\vec{j}$, $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$. Să se determine componentele vectorului $\overrightarrow{OP}$, față de reperul $(\vec{i}, \vec{j})$.

**R:** $x = ka$, $y = (1 - k)b$.

**18.** Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$ și fie $M$ un punct în planul acestui triunghi. Să se arate că

$$2(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) = 9\,\overrightarrow{MG}^2 - \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2.$$

**19.** Fie $ABC$ un triunghi și fie $ABDE$, $ACFG$ pătratele construite pe laturile $|AB|$, $|AC|$ în exteriorul triunghiului $ABC$. Să se arate că $CE \perp BG$.

*Indicație.* Se arată că $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ scriind $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}$.

**20.** Se consideră un dreptunghi $ABCD$. Să se determine locul geometric al punctelor $M$ din planul dreptunghiului $ABCD$, pentru care

$$\| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \|.$$

**R:** dreaptă.

**21.** Fie $P, Q$ două puncte oarecare, într-un plan $p$. Să se determine locul geometric al punctelor $M$ din planul $p$, pentru care $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ are o valoare dată $k$.

*Indicație.* Se consideră mijlocul $O$ al segmentului $|PQ|$, dacă $P \neq Q$. Se arată că $\overrightarrow{OM}^2 = k + \overrightarrow{OP}^2$. Locul geometric căutat este un cerc, un punct sau mulțimea vidă.

**22.** Fiind date patru puncte $A, B, C, D$ într-un plan $p$, să se determine locul geometric al punctelor $M$ din planul $p$, pentru care

$$(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}) = k,$$

unde $k$ este un număr dat. Caz particular: $ABCD$ este un dreptunghi.

*Indicație.* Se consideră punctele $P, Q$, care împart segmentele $|AB|$, $|CD|$ în raportul $-3$. Locul geometric căutat este fie un cerc cu centrul în $O$, mijlocul segmentului $|PQ|$ fie $\{O\}$, fie $\varnothing$. În cazul particular, $O$ este centrul dreptunghiului.