Algoritmi avansați

C13 - Elemente de programare liniară

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2024-2025

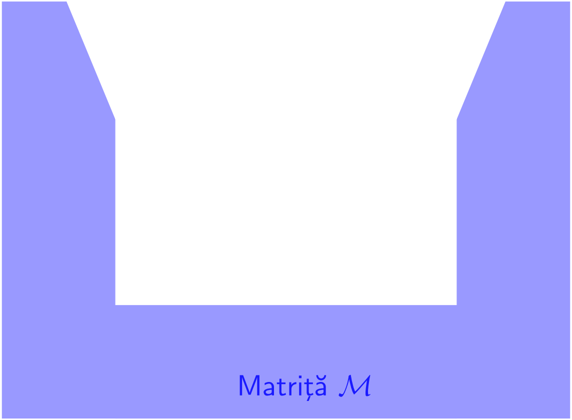
Motivație: turnarea pieselor în matrițe

Intersecții de semiplane - abordare cantitativă

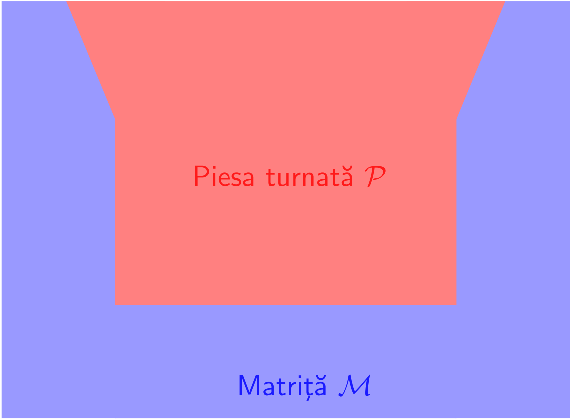
Dualitate

Intersecții de semiplane - abordare calitativă. Programare liniară

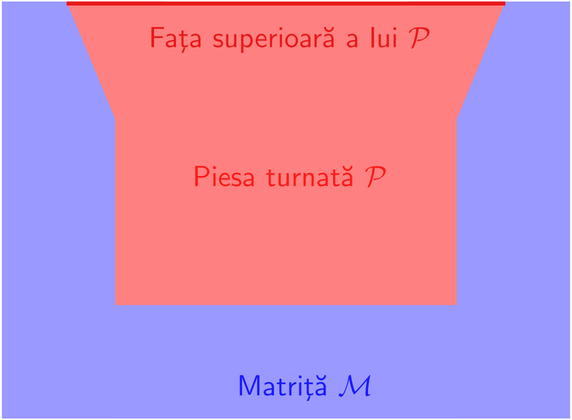
Turnarea pieselor în matrițe



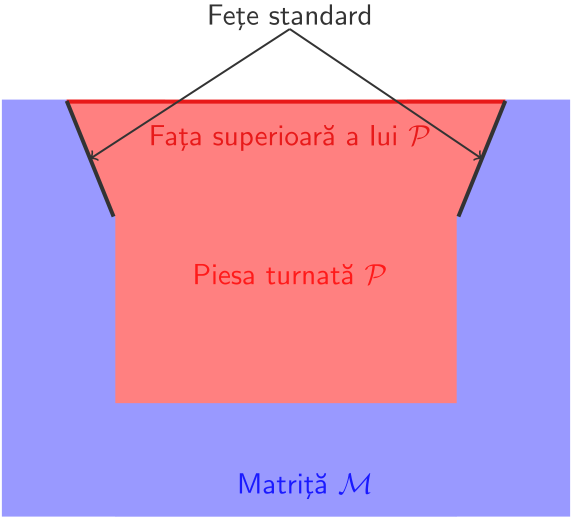
Turnarea pieselor în matrițe



Turnarea pieselor în matrițe



Turnarea pieselor în matrițe



Problematizare

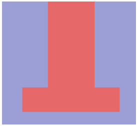
- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.

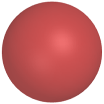
Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată.

Problematizare

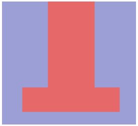
- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată.

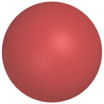




Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată.

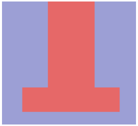


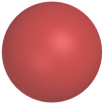


- **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras (și dacă da, cu un algoritm eficient?)

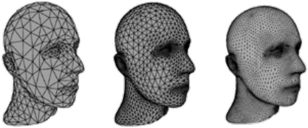
Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată.





- **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras (și dacă da, cu un algoritm eficient?)



Sursa: https://www.graphics.rwth-aachen.de/publication/03149/

Convenții

- Obiectele: **poliedrale**. Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$

Convenții

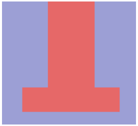
- Obiectele: **poliedrale**. Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$
- Obiectul: extras printr-o singură translație (sau o succesiune de translații)

Convenții

- Obiectele: **poliedrale**. Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$
- Obiectul: extras printr-o singură translație (sau o succesiune de translații)
- **Alegerea orientării:** diverse orientări ale obiectului pot genera diverse matrițe, astfel încât doar în unele configurații este posibilă extragerea obiectului

Convenții

- Obiectele: **poliedrale**. Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$
- Obiectul: extras printr-o singură translație (sau o succesiune de translații)
- **Alegerea orientării:** diverse orientări ale obiectului pot genera diverse matrițe, astfel încât doar în unele configurații este posibilă extragerea obiectului



Terminologie și convenții

- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.

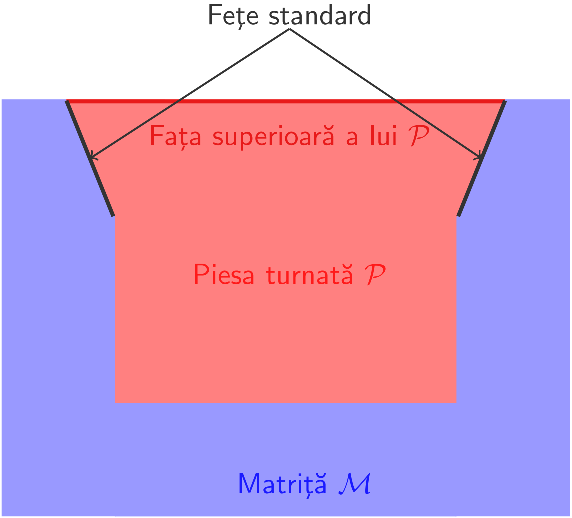
Terminologie și convenții

- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.
- **Obiect care poate fi turnat (*castable*):** există o orientare pentru care acesta poate fi turnat și apoi extras printr-o translație (succesiune de translații): *direcție admisibilă*.

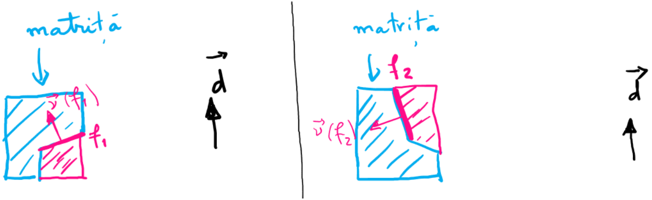
Terminologie și convenții

- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.
- **Obiect care poate fi turnat (*castable*):** există o orientare pentru care acesta poate fi turnat și apoi extras printr-o translație (succesiune de translații): *direcție admisibilă*.
- **Convenții:** Matrița este paralelipipedică și are o cavitate corespunzătoare obiectului; fața superioară a obiectului (și a matriței) este perpendiculară cu planul Oxy.

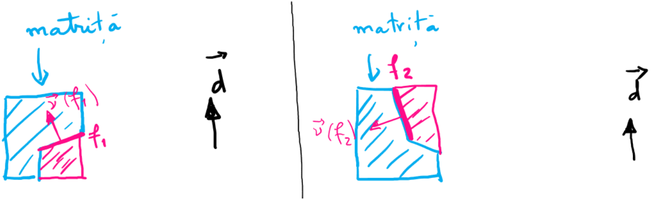
Turnarea pieselor în matrițe



Descrierea proprietății de a putea extrage o piesă într-o direcție dată



Descrierea proprietății de a putea extrage o piesă într-o direcție dată



În figura din stânga fața $\hat{f}_1$ a matriței blochează extragerea în direcția $\vec{d}$. Acest fapt este echivalent cu

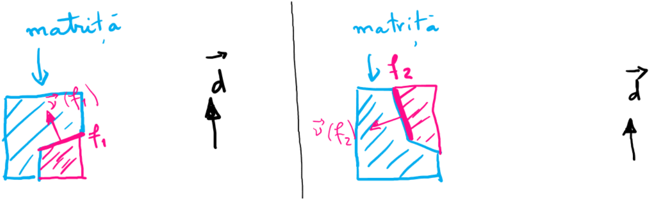
$$m(\angle(\vec{\nu}(f_1), \vec{d})) < 90^\circ \Leftrightarrow \cos(\angle(\vec{\nu}(f_1), \vec{d}) > 0.$$

În figura din dreapta fața $\hat{f}_2$ a matriței permite extragerea în direcția $\vec{d}$. Acest fapt este echivalent cu

$$m(\angle(\vec{\nu}(f_2), \vec{d})) \geq 90^\circ \Leftrightarrow \cos(\angle(\vec{\nu}(f_2), \vec{d}) \leq 0.$$

Am notat cu $\vec{\nu}(f_1)$, $\vec{\nu}(f_2)$ normalele exterioare la fețele f_1, respectiv f_2.

Descrierea proprietății de a putea extrage o piesă într-o direcție dată



În figura din stânga fața $\hat{f_1}$ a matriței blochează extragerea în direcția $\vec{d}$. Acest fapt este echivalent cu

$$m(\angle(\vec{\nu}(f_1), \vec{d})) < 90^\circ \Leftrightarrow \cos(\angle(\vec{\nu}(f_1), \vec{d}) > 0.$$

În figura din dreapta fața $\hat{f_2}$ a matriței permite extragerea în direcția $\vec{d}$. Acest fapt este echivalent cu

$$m(\angle(\vec{\nu}(f_2), \vec{d})) \geq 90^\circ \Leftrightarrow \cos(\angle(\vec{\nu}(f_2), \vec{d}) \leq 0.$$

Am notat cu $\vec{\nu}(f_1)$, $\vec{\nu}(f_2)$ normalele exterioare la fețele f_1, respectiv f_2.

Condițiile referitoare la unghiuri indicate mai sus trebuie verificate pentru **toate** fețele!

Detaliere (scriere în coordonate)

- Cum vrem să extragem obiectul din matriță "în sus", putem presupune f.r.g. că $\overrightarrow{d} = (d_x, d_y, 1)$ (de ce?).

Detaliere (scriere în coordonate)

- Cum vrem să extragem obiectul din matriţă "în sus", putem presupune f.r.g. că $\overrightarrow{d} = (d_x, d_y, 1)$ (de ce?).
- Fie f o faţă a obiectului, $\overrightarrow{\nu}(f) = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$. Faptul că faţa corespunzătoare $\hat{f}$ a matriţei **nu** blochează extragerea în direcţia $\overrightarrow{d}$ revine la

$$\langle \overrightarrow{\nu}(f), \overrightarrow{d} \rangle \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\nu_x \cdot d_x + \nu_y \cdot d_y + \nu_z \leq 0. \tag{1}$$

Detaliere (scriere în coordonate)

- Cum vrem să extragem obiectul din matriță "în sus", putem presupune f.r.g. că $\overrightarrow{d} = (d_x, d_y, 1)$ (de ce?).
- Fie f o față a obiectului, $\overrightarrow{\nu}(f) = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$. Faptul că fața corespunzătoare $\hat{f}$ a matriței **nu** blochează extragerea în direcția $\overrightarrow{d}$ revine la
$$\langle \overrightarrow{\nu}(f), \overrightarrow{d} \rangle \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\nu_x \cdot d_x + \nu_y \cdot d_y + \nu_z \leq 0. \qquad (1)$$
- Fixată o față f (informația relevantă fiind ν_x, ν_y, ν_z) căutăm $\overrightarrow{d} = (d_x, d_y)$ astfel încât să fie verificată relația (1). Aceasta este o inegalitate care descrie un hiperplan.

Detaliere (scriere în coordonate)

- Cum vrem să extragem obiectul din matriță "în sus", putem presupune f.r.g. că $\overrightarrow{d} = (d_x, d_y, 1)$ (de ce?).
- Fie f o față a obiectului, $\overrightarrow{\nu}(f) = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$. Faptul că fața corespunzătoare $\hat{f}$ a matriței **nu** blochează extragerea în direcția $\overrightarrow{d}$ revine la
$$\langle \overrightarrow{\nu}(f), \overrightarrow{d} \rangle \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\nu_x \cdot d_x + \nu_y \cdot d_y + \nu_z \leq 0. \tag{1}$$
- Fixată o față f (informația relevantă fiind ν_x, ν_y, ν_z) căutăm $\overrightarrow{d} = (d_x, d_y)$ astfel încât să fie verificată relația (1). Aceasta este o inegalitate care descrie un hiperplan.
- Condițiile indicate mai sus trebuie verificate pentru **toate** fețele!

Sinteză - fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la fața f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$

Sinteză - fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.

Sinteză - fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație de tipul (1), care corespunde unui semiplan.

Sinteză - fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație de tipul (1), care corespunde unui semiplan.
- **Analitic - toate fețele:** Fie $\mathcal{P}$ un poliedru; fața superioară fixată, paralelă cu planul Oxy. Considerăm matrița asociată și toate fețele matriței (i.e. toate fețele standard ale poliedrului). A determina o direcție admisibilă revine la a determina o direcție care verifică toate inegalitățile de tip (1), deci un sistem de inecuații.

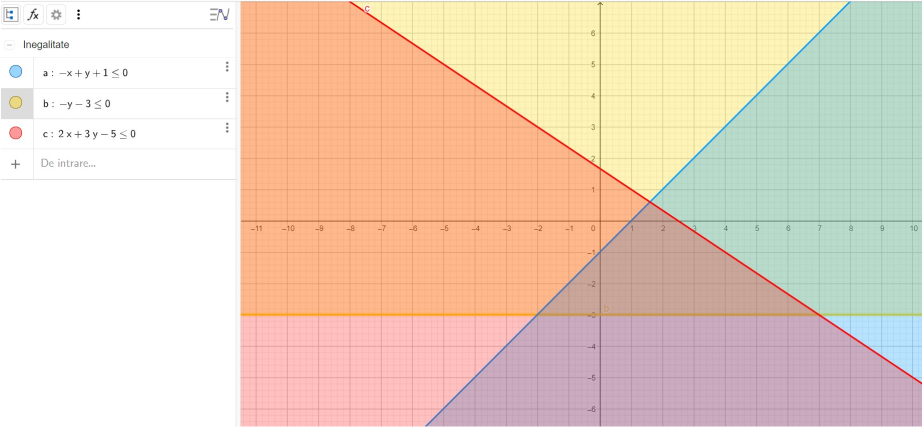
Sinteză - fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație de tipul (1), care corespunde unui semiplan.
- **Analitic - toate fețele:** Fie $\mathcal{P}$ un poliedru; fața superioară fixată, paralelă cu planul Oxy. Considerăm matrița asociată și <u>toate</u> fețele matriței (i.e. toate fețele standard ale poliedrului). A determina o direcție admisibilă revine la a determina o direcție care verifică <u>toate</u> inegalitățile de tip (1), deci un sistem de inecuații.
- **Concluzie:** Pentru a stabili dacă există o direcție admisibilă, trebuie stabilit dacă o <u>**intersecție de semiplane**</u> este nevidă.

Exemple

1. Intersecția semiplanelor

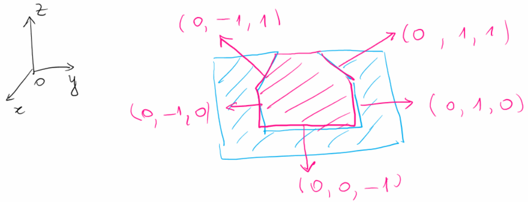
$$-x + y + 1 \leq 0; \quad -y - 3 \leq 0; \quad 2x + 3y - 5 \leq 0.$$



Exemple

2 (a). Normalele exterioare ale fețelor standard, parcurse în sens orar, sunt coliniare cu vectorii

$$(0,1,1),\ (0,1,0),\ (0,0,-1),\ (0,-1,0),\ (0,-1,1).$$



sistem incompatibil, obiectul nu poate fi extras

$$\left.\begin{array}{lll}
(0,-1,1) & \rightsquigarrow & 0\cdot x + (-1)\cdot y + 1 \le 0 \\
(0,1,1) & \rightsquigarrow & 0\cdot x + 1\cdot y + 1 \le 0 \\
(0,1,0) & \longrightarrow & 0\cdot x + 1\cdot y + 0 \le 0 \\
(0,0,-1) & \longrightarrow & 0\cdot x + 0\cdot y + (-1) \le 0 \\
(0,-1,0) & \rightsquigarrow & 0\cdot x + (-1)\cdot y + 0 \le 0
\end{array}\right| \quad
\begin{array}{l}
y \ge 1 \\
y \le -1 \\
y \le 0 \\
-1 \le 0 \\
y \ge 0
\end{array}$$

Temă

2 (b). Normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0,1,-1),\ (0,1,0),\ (0,0,-1),\ (0,-1,0),\ (0,-1,-1).$$

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  - (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  - (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)
  - (i) *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-timp $O(n \log n)$ și folosind $O(n)$ memorie.*

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  - (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  - (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)
  - (i) *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-timp $O(n \log n)$ și folosind $O(n)$ memorie.*
  - (ii) *Se poate stabili cu complexitate-timp medie $O(n)$ dacă o intersecție de semiplane este nevidă.*
  - (ii)' *Fie $\mathcal{P}$ un poliedru cu n fețe. Se poate decide dacă $\mathcal{P}$ reprezintă un obiect care poate fi turnat cu complexitate-timp medie $O(n^2)$ și folosind $O(n)$ spațiu. În caz afirmativ, o matriță și o direcție admisibilă în care poate fi extras $\mathcal{P}$ este determinată cu aceeași complexitate-timp.*

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din $\mathbb{R}^2$; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0$$

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din $\mathbb{R}^2$; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0$$

- Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ este dată de un sistem de inecuații; este o mulțime poligonală convexă, mărginită de cel mult n muchii (poate fi vidă, mărginită, nemărginită,...). Se poate aplica ųn algoritm similar algoritmului de suprapunere a straturilor tematice (cf. curs 12) pentru a determina această intersecție.

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

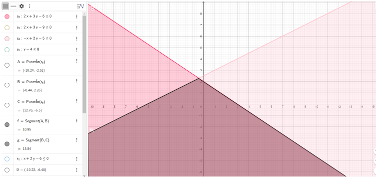
- Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din $\mathbb{R}^2$; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0$$

- Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ este dată de un sistem de inecuații; este o mulțime poligonală convexă, mărginită de cel mult n muchii (poate fi vidă, mărginită, nemărginită,...). Se poate aplica un algoritm similar algoritmului de suprapunere a straturilor tematice (cf. curs 12) pentru a determina această intersecție.
- De clarificat: date n semiplane, care sunt cele care contribuie **efectiv** la determinarea intersecției acestora? (v. slide-ul următor)

Semiplane - intersecții

Când determinăm o intersecție de semiplane, nu sunt neapărat relevante toate semiplanele. În figura de mai jos sunt considerate cinci semiplane s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 dintre care relevante pentru intersecție sunt doar s_2 și s_4.



Dualitate – motivație intuitivă

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?

Dualitate – motivație intuitivă

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**

Dualitate – motivație intuitivă

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă neverticală în plan**?

Dualitate – motivație intuitivă

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă neverticală în plan**?
- **2**

Dualitate – motivație intuitivă

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă neverticală în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?

Dualitate — motivație intuitivă

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă neverticală în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?
- **DA: dualitate**

Dualitate – motivație intuitivă

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă neverticală în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?
- **DA: dualitate**
- Cum se reflectă / respectă diferite proprietăți geometrice (de exemplu incidența) prin dualitate?

Dualitate – definiții

- Unui punct $p = (p_x, p_y)$ din planul $\mathbb{R}^2$ (plan primal) i se asociază o dreaptă din planul dual, notată p^*:

$$p^* : (y = p_x x - p_y) \text{ duala lui } p.$$

Dualitate – definiții

- Unui punct $p = (p_x, p_y)$ din planul $\mathbb{R}^2$ (plan primal) i se asociază o dreaptă din planul dual, notată p^*:

$$p^* : (y = p_x x - p_y) \text{ duala lui } p.$$

- Unei drepte neverticale $d : (y = m_d x + n_d)$ din planul primal i se asociază un punct din planul dual, notat d^*:

$$d^* = (m_d, -n_d) \text{ dualul lui } d.$$

Dualitate – definiții

- Unui punct $p = (p_x, p_y)$ din planul $\mathbb{R}^2$ (plan primal) i se asociază o dreaptă din planul dual, notată p^*:

$$p^* : (y = p_x x - p_y) \text{ duala lui } p.$$

- Unei drepte neverticale $d : (y = m_d x + n_d)$ din planul primal i se asociază un punct din planul dual, notat d^*:

$$d^* = (m_d, -n_d) \text{ dualul lui } d.$$

- **Obs.** Această transformare este polaritatea față de parabola $y = \frac{x^2}{2}$.

Dualitate – proprietăți elementare

1) Păstrează incidența

$$p \in d \iff d^* \in p^*$$

Exemplu

Pl. primal	Pl. dual
$d : (y = 2x + 1)$	$d^* = (2, -1)$
$p = (1, 3)$	$p^* : (y = x - 3)$

Dualitate – proprietăți elementare

2) Păstrează "ordinea"

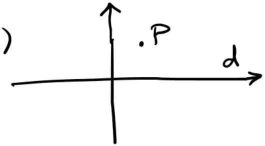
p este situat deasupra dreptei d (neverticală) <=>
d^* —"— —"— p^*

Exemplu

Pl. primal

$p=(1,1)$

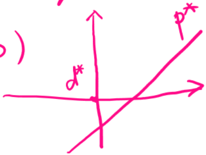
$d: (y=0)$



Pl. dual

$p^*: (y = x - 1)$

$d^* = (0,0)$

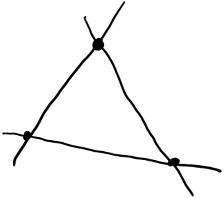


Dualitate – "dicționar" concepte și configurații

Plan primal	**Plan dual**
Punct p	Dreaptă neverticală p^*
Dreaptă neverticală d	Punct d^*
Dreaptă determinată de două puncte	Punct de intersecție a două drepte
Punctul p deasupra dreptei d	Punctul d^* deasupra dreptei p^*
Segment	Fascicul de drepte (*wedge*)

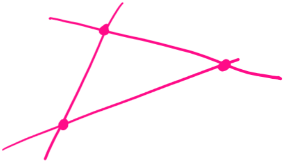
Exemplu

Configurația primală



3 puncte necoliniare
și dreptele determinate
de ele

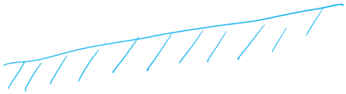
Configurația duală



3 drepte care nu
trec prin același punct
și punctele determinate
de ele

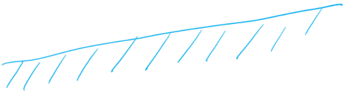
Semiplane inferioare și semiplane superioare

- Exemple.



Semiplane inferioare și semiplane superioare

- Exemple.

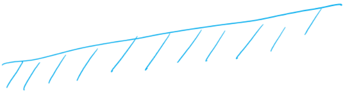


semiplan inferior

semiplan superior

Semiplane inferioare și semiplane superioare

- Exemple.



semiplan inferior semiplan superior

- Dat un semiplan delimitat de o dreaptă neverticală

$$ax + by + c \leq 0$$

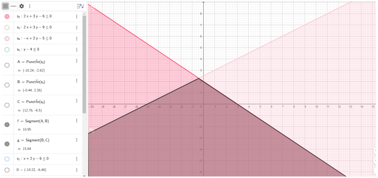
cum se decide dacă este semiplan inferior sau semiplan superior?
Exemple:

$$-x + y + 3 \leq 0 \qquad \text{semiplan inferior}$$

$$x - y - 3 \leq 0 \qquad \text{semiplan superior}$$

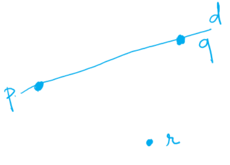
Semiplane inferioare și semiplane superioare

Când determinăm o intersecție de semiplane inferioare / superioare, nu sunt neapărat relevante toate semiplanele. În figura de mai jos sunt considerate cinci semiplane inferioare s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 dintre care relevante pentru intersecție sunt doar s_2 și s_4.

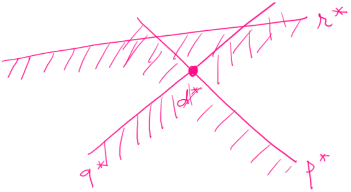


Observația fundamentală

Fie p, q cu $p \neq q$ și dreapta $d = pq$ neverticală. Fie r un punct situat dedesubtul dreptei $d = pq$. Care este configurația duală?



planul primal:
r este dedesubtul dreptei $pq = d$



planul dual:
d^* este dedesubtul dreptei r^*

Observația fundamentală

- Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de puncte.

Observația fundamentală

- Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de puncte.
- **Q:** Ce înseamnă că un segment $[pq]$ $(p, q \in \mathcal{P})$ participă la frontiera superioară a acoperirii convexe a lui $\mathcal{P}$?

Observația fundamentală

- Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de puncte.
- **Q:** Ce înseamnă că un segment $[pq]$ $(p, q \in \mathcal{P})$ participă la frontiera superioară a acoperirii convexe a lui $\mathcal{P}$?
- **A:** Toate celelalte puncte sunt dedesubtul dreptei $d = pq$.

Observația fundamentală

- Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de puncte.
- **Q:** Ce înseamnă că un segment $[pq]$ $(p, q \in \mathcal{P})$ participă la frontiera superioară a acoperirii convexe a lui $\mathcal{P}$?
- **A:** Toate celelalte puncte sunt dedesubtul dreptei $d = pq$.
- Configurația duală: Punctul d^* este situat dedesubtul dreptelor corespunzătoare celorlalte puncte și, prin trecere la semiplane inferioare, "contează" semiplanele inferioare determinate de p^* și q^*.

Concluzie pentru (i) - abordarea cantitativă

- Pentru a determina o intersecție de **semiplane inferioare** se consideră mulțimea de puncte din planul dual și se determină **frontiera superioară** a acoperirii convexe a mulțimii respective. Un rezultat analog are loc pentru intersecții de **semiplane superioar**e și **frontiera inferioară** a acoperirii convexe a mulțimii de puncte duale. În consecință:

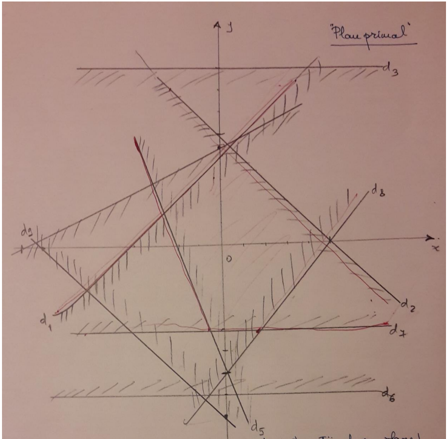
Concluzie pentru (i) - abordarea cantitativă

- Pentru a determina o intersecție de **semiplane inferioare** se consideră mulțimea de puncte din planul dual și se determină **frontiera superioară** a acoperirii convexe a mulțimii respective. Un rezultat analog are loc pentru intersecții de **semiplane superioar**e și **frontiera inferioară** a acoperirii convexe a mulțimii de puncte duale. În consecință:
- **Teoremă** *Intersecția a n semiplane poate fi descrisă cu un algoritm de complexitate $O(n \log n)$.*

Concluzie pentru (i) - abordarea cantitativă

- Pentru a determina o intersecție de **semiplane inferioare** se consideră mulțimea de puncte din planul dual și se determină **frontiera superioară** a acoperirii convexe a mulțimii respective. Un rezultat analog are loc pentru intersecții de **semiplane superioar**e și **frontiera inferioară** a acoperirii convexe a mulțimii de puncte duale. În consecință:
- **Teoremă** *Intersecția a n semiplane poate fi descrisă cu un algoritm de complexitate* $O(n \log n)$.
- De fapt, aplicarea dualității combinată cu sortarea lexicografică poate fi interpretată ca fiind ordonare a dreptelor după panta dreptei suport și apoi utilizarea unui mecanism incremental, cu eliminarea semiplanelor redundante. Această abordare directă este descrisă de Z. Zhu în 2006, în *New Algorithm for Half-plane Intersection and its Practical Value* (v. și această referință).

Exemplu



Configurația primală (intersecții de semiplane)

$\mathcal{LE}$: $y \leq x+4 \rightarrow d_1: y = x+4$

$y \leq -x+5 \rightarrow d_2: y = -x+5$

$y \leq 8 \rightarrow d_3: y = 8$

$y \leq \frac{1}{2}x + 4.5 \rightarrow d_4: y = \frac{1}{2}x + 4.5$

$\mathcal{LE}$ e determinată de semiplanele asociate lui d_1 și d_2.

$\mathcal{UE}$: $y \geq -3x-6 \rightarrow d_5: y = -3x-6$

$y \geq -7 \rightarrow d_6: y = -7$

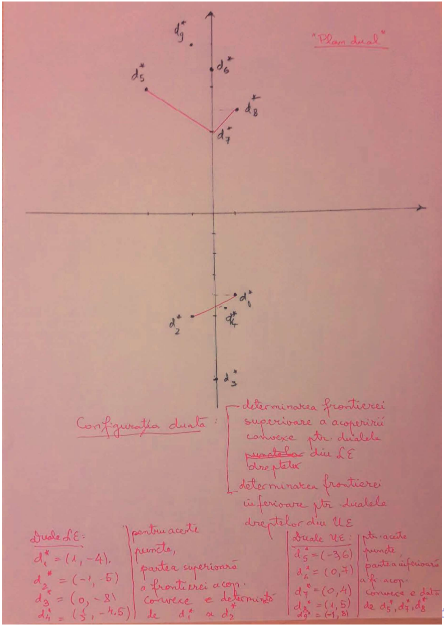
$y \geq -4 \rightarrow d_7: y = -4$

$y \geq x-5 \rightarrow d_8: y = x-5$

$y \geq -x-8 \quad d_9: y = -x-8$

$\mathcal{UE}$ e determinată de semipl. asociate lui d_5, d_7, d_8.

Exemplu


"Plan dual"
d9*
d6*
d5*
d8*
d7*
d1*
d2*
d4*
d3*
Configurația duală:
determinarea frontierei superioare a acoperirii convexe ptr. dualele ~~punctelor~~ dreptelor din LE
determinarea frontierei inferioare ptr dualele dreptelor din UE
Duale LE:
d1* = (1, -4),
d2* = (-1, -5)
d3* = (0, -8)
d4* = (1/5, -4.5)
pentru aceste puncte, partea superioară a frontierei acop. convexe e determinată de d1* și d2*
Duale UE:
d5* = (-3, 6)
d6* = (0, 7)
d7* = (0, 4)
d8* = (1, 5)
d9* = (-1, 8)
ptr. aceste puncte, partea inferioară a fr. acop. convexe e dată de d5*, d7*, d8*

(ii) Abordarea calitativă. Motivaţie

- Sunt realizate 3 produse (notate 1, 2 şi 3) pe 2 aparate (notate X şi Y).

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (notate 1, 2 și 3) pe 2 aparate (notate X și Y).
- Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

	X	Y	Obs.	Nr. prod.	Spațiu	Profit
1	10	27	pe ambele	x_1	0.1m^2	10
2	12	19	în paralel, simultan	x_2, respectiv y_2	0.2m^2	13
3	8	24	în paralel, simultan	x_3, respectiv y_3	0.05m^2	9

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (notate 1, 2 și 3) pe 2 aparate (notate X și Y).
- Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

	X	Y	Obs.	Nr. prod.	Spațiu	Profit
1	10	27	pe ambele	x_1	0.1m^2	10
2	12	19	în paralel, simultan	x_2, respectiv y_2	0.2m^2	13
3	8	24	în paralel, simultan	x_3, respectiv y_3	0.05m^2	9

- Aparatele X și Y au un interval de mentenanță de 5%, respectiv 7% din timpul de lucru. Spațiul total de depozitare este de 50m^2.

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (notate 1, 2 și 3) pe 2 aparate (notate X și Y).
- Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

	X	Y	Obs.	Nr. prod.	Spațiu	Profit
1	10	27	pe ambele	x_1	0.1m^2	10
2	12	19	în paralel, simultan	x_2, respectiv y_2	0.2m^2	13
3	8	24	în paralel, simultan	x_3, respectiv y_3	0.05m^2	9

- Aparatele X și Y au un interval de mentenanță de 5%, respectiv 7% din timpul de lucru. Spațiul total de depozitare este de 50m^2.
- Modelul matematic:

Constrângeri:

$$\begin{array}{ll} 0.1x_1 + 0.2(x_2 + y_2) + 0.05(x_3 + y_3) \leq 50 & \textit{Spațiu de depozitare} \\ 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leq 0.95 \cdot 40 \cdot 60 & \textit{Timp aparatul } X \\ 27x_1 + 19y_2 + 24y_3 \leq 0.93 \cdot 40 \cdot 60 & \textit{Timp aparatul } Y \end{array}$$

Cerința:

$$\text{maximizează}(10x_1 + 13(x_2 + y_2) + 9(x_3 + y_3))$$

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul *d*-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{2}$$

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{2}$$

- **Denumiri:**

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{2}$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{2}$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$
  - funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{2}$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$
  - funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$
  - constrângeri: inegalitățile (2)

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{2}$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$
  - funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$
  - constrângeri: inegalitățile (2)
  - regiune realizabilă (fezabilă): intersecția semispațiilor care definesc constrângerile problemei

Problematizare, terminologie

- **Formulare generală (în spațiul d-dimensional):**

$$\text{maximizează}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases} \tag{2}$$

- **Denumiri:**
  - date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,d}}, (b_i)_{i=\overline{1,n}}, (c_j)_{j=\overline{1,d}}$
  - funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$
  - constrângeri: inegalitățile (2)
  - regiune realizabilă (fezabilă): intersecția semispațiilor care definesc constrângerile problemei
- **Obs. Interpretare a cerinței de maximizare:** Maximizarea funcției obiectiv revine la a determina un punct al cărui vector de poziție are proiecția maximă de direcția dată de vectorul $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$.

Exemplu - cazul 1D ($d = 1$)

Coordonata: x :

maximizează (cx) funcție obiectiv

$$\begin{cases} a_1 x \le b_1 & \text{- interval} \\ a_2 x \le b_2 & \text{- " -} \\ \vdots & \\ a_n x \le b_n & \text{- " -} \end{cases}$$

→ constrângeri

Exemplu concret: maximizează $(2x)$

$$\begin{cases} 3x \le 6 \\ -2x \le 4 \\ 6x \le 6 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} x \le 2, & x \in (-\infty, 2] \\ x \ge -2, & x \in [-2, \infty) \\ x \le 1, & x \in (-\infty, 1] \end{array}$$

intervalul $[-2, 1]$ regiune fezabilă

Maximul funcției obiectiv este egal cu 2 și se obține ptr $x = 1$.

Exemplu - cazul 1D ($d = 1$)

funcție obiectiv

Coordonata: x : maximizează (cx)

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 x \le b_1 \text{ - interval} \\ a_2 x \le b_2 \text{ — } \\ \vdots \\ a_n x \le b_n \text{ — } \end{array}\right. \rightarrow \text{constrângeri}$$

Exemplu concret: maximizează $(2x)$

$$\left\{\begin{array}{l|l} 3x \le 6 & x \le 2, \quad x \in (-\infty, 2] \\ -2x \le 4 & x \ge -2, \quad x \in [-2, \infty) \\ 6x \le 6 & x \le 1, \quad x \in (-\infty, 1] \end{array}\right.$$

intervalul $[-2, 1]$ regiune fezabilă

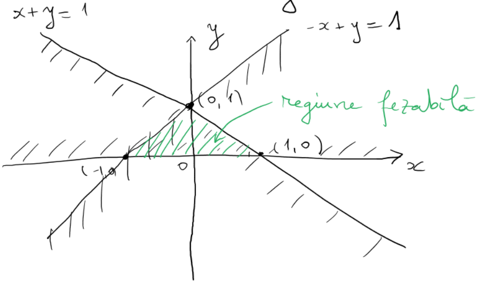
Maximul funcției obiectiv este egal cu 2 și se obține ptr $x = 1$.

Lemă. (Pentru $d = 1$) *Un program liniar 1-dimensional poate fi rezolvat în timp liniar.*

Exemplu - cazul 2D ($d = 2$)

Notăm coordonatele cu x și y.

maximizează $\underbrace{(y)}_{= 0 \cdot x + 1 \cdot y}$; $\vec{c} = (0, 1)$, date $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -y \leq 0 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$



Funcția are valoarea maximă 1, atinsă în punctul $(0, 1)$.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y
  - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y
  - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
  - Constrângerile: $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (semiplane); se notează $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$
  - Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n$.

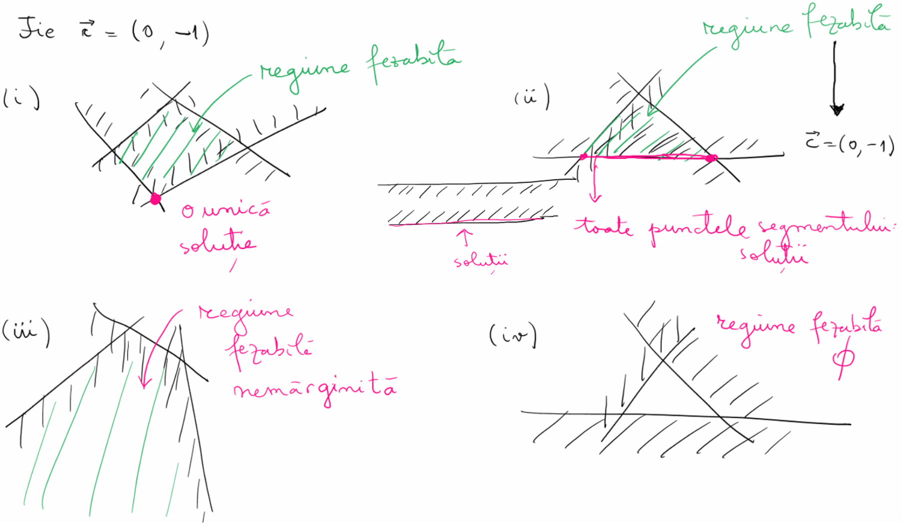
Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y
  - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
  - Constrângerile: $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (semiplane); se notează $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$
  - Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n$.
- **Program liniar:** $(H, \vec{c})$.
- **Scop:** Se caută $p \in C$ astfel ca $f_{\vec{c}}(p)$ să fie maximă.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- **Convenții și terminologie:**
  - Coordonatele: x și y
  - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
  - Constrângerile: $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (semiplane); se notează $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$
  - Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n$.
  - **Program liniar:** $(H, \vec{c})$.
  - **Scop:** Se caută $p \in C$ astfel ca $f_{\vec{c}}(p)$ să fie maximă.
- Pentru o problemă de programare liniară în plan pot fi distinse patru situații: (i) o soluție unică; (ii) toate punctele de pe o muchie sunt soluții; (iii) regiunea fezabilă este nemărginită și pot fi găsite soluții de-a lungul unei semidrepte; (iv) regiunea fezabilă este vidă.

Cazul 2D ($d = 2$) - exemple de regiuni fezabile



Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

- Principii:

Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

- Principii:
  - constrângerile sunt adăugate una câte una;

Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

- Principii:
  - constrângerile sunt adăugate una câte una;
  - presupunem că la fiecare pas soluția (punctul de maxim) există, apoi actualizează;
  - sunt adăugate la început constrângeri care garantează mărginirea programului liniar, definite astfel: se alege $M >> 0$ și se definesc noi constrângeri convenabile;

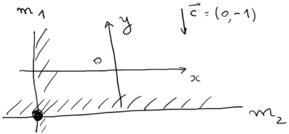
Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

- Principii:
  - constrângerile sunt adăugate una câte una;
  - presupunem că la fiecare pas soluția (punctul de maxim) există, apoi actualizează;
  - sunt adăugate la început constrângeri care garantează mărginirea programului liniar, definite astfel: se alege $M >> 0$ și se definesc noi constrângeri convenabile;
  - se lucrează cu convenția de ordonare lexicografică, astfel încât există o **unică** soluție optimă.

Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

- Principii:
  - constrângerile sunt adăugate una câte una;
  - presupunem că la fiecare pas soluția (punctul de maxim) există, apoi actualizează;
  - sunt adăugate la început constrângeri care garantează mărginirea programului liniar, definite astfel: se alege $M >> 0$ și se definesc noi constrângeri convenabile;
  - se lucrează cu convenția de ordonare lexicografică, astfel încât există o **unică** soluție optimă.
- Vom considera în continuare $\vec{c} = (0, -1)$, iar noile constrângeri vor fi:

$$m_1 : x \geq -M, \qquad m_2 : y \geq -M.$$



Notații

- Fie $(H, \overrightarrow{c})$ un program liniar cu constrângerile $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Se notează:

$$H_i = \{m_1, m_2, h_1, h_2, \ldots, h_i\}, \text{ mulțime de semiplane}$$

$$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_i, \text{ regiune fezabilă.}$$

Notația este pentru $i = 0, \ldots, n$, în particular

$$H_0 = \{m_1, m_2\} \qquad C_0 = m_1 \cap m_2.$$

Notații

- Fie $(H, \vec{c})$ un program liniar cu constrângerile $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Se notează:

$$H_i = \{m_1, m_2, h_1, h_2, \ldots, h_i\}, \text{ mulțime de semiplane}$$

$$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_i, \text{ regiune fezabilă.}$$

Notația este pentru $i = 0, \ldots, n$, în particular

$$H_0 = \{m_1, m_2\} \qquad C_0 = m_1 \cap m_2.$$

- Observații:

Notații

- Fie $(H, \overrightarrow{c})$ un program liniar cu constrângerile $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Se notează:

$$H_i = \{m_1, m_2, h_1, h_2, \ldots, h_i\}, \text{ mulțime de semiplane}$$

$$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_i, \text{ regiune fezabilă.}$$

Notația este pentru $i = 0, \ldots, n$, în particular

$$H_0 = \{m_1, m_2\} \qquad C_0 = m_1 \cap m_2.$$

- Observații:
  (i) $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n = C$.

Notații

- Fie $(H, \overrightarrow{c})$ un program liniar cu constrângerile $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Se notează:

$$H_i = \{m_1, m_2, h_1, h_2, \ldots, h_i\}, \text{ mulțime de semiplane}$$

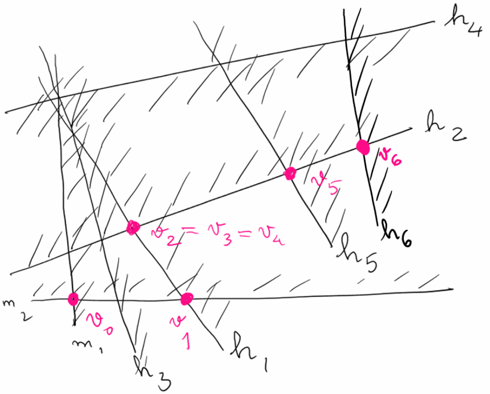
$$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_i, \text{ regiune fezabilă.}$$

  Notația este pentru $i = 0, \ldots, n$, în particular

$$H_0 = \{m_1, m_2\} \qquad C_0 = m_1 \cap m_2.$$

- Observații:
  (i) $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n = C$.
  (ii) Pentru fiecare i, regiunea fezabilă C_i, dacă este nevidă, are un vârf care reprezintă o soluție optimă a problemei $(H_i, \overrightarrow{c})$. Punctul este notat cu v_i (depinde de alegerea lui m_1 și m_2).

Exemplu



$\vec{c} = (0, -1)$

$v_3 = v_2$, pt. că $v_2 \in h_3$

$v_4 = v_3 = v_2$ pt. că $v_3 \in h_4$

$v_5 \neq v_4$ pt. că $v_4 \notin h_5$

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i. Sunt două situații:

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i. Sunt două situații:
  (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i. Sunt două situații:
  (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,
  (ii) dacă $v_{i-1} \notin h_i$, atunci

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i. Sunt două situații:
  (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,
  (ii) dacă $v_{i-1} \notin h_i$, atunci

  fie $C_i = \emptyset$

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i. Sunt două situații:
  (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,
  (ii) dacă $v_{i-1} \notin h_i$, atunci
  fie $C_i = \emptyset$
  fie $v_i \in d_i$, unde d_i este dreapta care mărginește h_i.

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i. Sunt două situații:
  - (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,
  - (ii) dacă $v_{i-1} \notin h_i$, atunci

    fie $C_i = \emptyset$

    fie $v_i \in d_i$, unde d_i este dreapta care mărginește h_i.

    În acest caz, găsirea lui v_i revine la găsirea lui $p \in d_i$ care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$, date constrângerile deja existente ($p \in h, \forall h \in H_i$). **De fapt, aceasta este o problemă pe programare liniară 1-dimensională, care are complexitatea-timp liniară, adică $O(i)$.**

Algoritm LPMARG2D $(H, \overrightarrow{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \overrightarrow{c})$ din $\mathbb{R}^2$

Algoritm LPMARG2D $(H, \overrightarrow{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \overrightarrow{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \overrightarrow{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\overrightarrow{c}}(p)$.

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \dots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4.   **do if** $v_{i-1} \in h_i$

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4.   **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5.   **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \dots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7. **if** p nu există

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

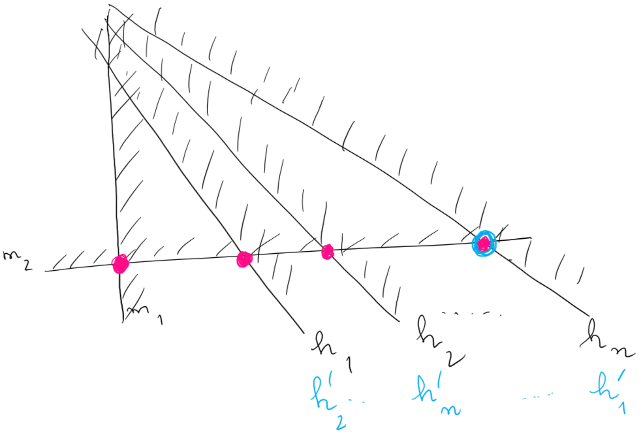
1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4.   **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5.   **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6.   **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7.   **if** p nu există
8.   **then** raportează "nefezabil" **end**

Algoritm LPMARG2D $(H, \vec{c}, m_1, m_2)$

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din $\mathbb{R}^2$
- **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4.   **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5.   **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6.   **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7.   **if** p nu există
8.   **then** raportează "nefezabil" **end**
9. **return** v_n

Comentariu - ordinea contează



Algoritm aleatoriu

- Pasul **2.** este înlocuit cu:
  2'. Calculează o permutare arbitrară a semiplanelor, folosind o procedură adecvată.

Algoritm aleatoriu

- Pasul **2.** este înlocuit cu:
  2'. Calculează o permutare arbitrară a semiplanelor, folosind o procedură adecvată.
- Algoritmul incremental LPMARG2D are complexitate-timp $O(n^2)$, iar varianta bazată pe alegerea aleatorie a semiplanelor are complexitate-timp medie $O(n)$ (n este numărul semiplanelor).

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (I)

Fie $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ variabilă aleatoare definită astfel:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v_{i-1} \in h_i \text{ (adică este ales pasul 5 la iterația } i\text{)} \\ 1, & \text{dacă } v_{i-1} \notin h_i \text{ (adică este ales pasul 6 la iterația } i\text{).} \end{cases}$$

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (I)

Fie $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ variabilă aleatoare definită astfel:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v_{i-1} \in h_i \text{ (adică este ales pasul 5 la iterația } i\text{)} \\ 1, & \text{dacă } v_{i-1} \notin h_i \text{ (adică este ales pasul 6 la iterația } i\text{).} \end{cases}$$

În concluzie, timpul total de rulare este $\sum_{i=1}^{n} X_i O(i) + O(n)$.

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (I)

Fie $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ variabilă aleatoare definită astfel:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v_{i-1} \in h_i \text{ (adică este ales pasul 5 la iterația } i) \\ 1, & \text{dacă } v_{i-1} \notin h_i \text{ (adică este ales pasul 6 la iterația } i). \end{cases}$$

În concluzie, timpul total de rulare este $\sum_{i=1}^{n} X_i O(i) + O(n)$.
Valoarea așteptată (timpul mediu)

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i O(i)] = \mu(\sum_{i=1}^{n} X_i O(i)) = \sum_{i=1}^{n} O(i)\mu(X_i) \le \sum_{i=1}^{n} O(i) \cdot \frac{2}{i} = O(n).$$

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (I)

Fie $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ variabilă aleatoare definită astfel:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v_{i-1} \in h_i \text{ (adică este ales pasul 5 la iterația } i\text{)} \\ 1, & \text{dacă } v_{i-1} \notin h_i \text{ (adică este ales pasul 6 la iterația } i\text{).} \end{cases}$$

În concluzie, timpul total de rulare este $\sum_{i=1}^{n} X_i O(i) + O(n)$.

Valoarea așteptată (timpul mediu)

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i O(i)] = \mu(\sum_{i=1}^{n} X_i O(i)) = \sum_{i=1}^{n} O(i)\mu(X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} O(i) \cdot \frac{2}{i} = O(n).$$

Vom arăta că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, de unde va rezulta inegalitatea dorită.

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.
- Arătăm inegalitatea pentru $i = n$ (cazul general, analog). Presupunem algoritmul terminat, v_n vârful optim.

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.
- Arătăm inegalitatea pentru $i = n$ (cazul general, analog). Presupunem algoritmul terminat, v_n vârful optim.
  - Care este probabilitatea ca $v_{n-1} \notin h_n$, adică la adăugarea lui h_n, vârful v_{n-1} să fie modificat în v_n? $\Leftrightarrow$

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.
- Arătăm inegalitatea pentru $i = n$ (cazul general, analog). Presupunem algoritmul terminat, v_n vârful optim.
  - Care este probabilitatea ca $v_{n-1} \notin h_n$, adică la adăugarea lui h_n, vârful v_{n-1} să fie modificat în v_n? $\Leftrightarrow$
  - Care este probabilitatea ca eliminând unul dintre semiplane să fie modificat vârful optim v_n?

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.
- Arătăm inegalitatea pentru $i = n$ (cazul general, analog). Presupunem algoritmul terminat, v_n vârful optim.
  - Care este probabilitatea ca $v_{n-1} \notin h_n$, adică la adăugarea lui h_n, vârful v_{n-1} să fie modificat în v_n? $\Leftrightarrow$
  - Care este probabilitatea ca eliminând unul dintre semiplane să fie modificat vârful optim v_n?

• nr. cazuri posibile: n

• nr. cazuri survine modificare: 2

$\Rightarrow$ probabilitatea de a modifica $\leq \frac{2}{n}$.

analog ptr. i. q.e.d.