Seminare 6

Forma Normală Chomsky

O gramatică e în FNC dacă:   $A \to BC$   , $A, B, C \in N$, $a \in T$
$A \to a$

Excepție : dacă $\lambda \in L(G) \Rightarrow$ am voie $S \to \lambda$, dar $S$ nu mai apare în
niciun membru drept

Alg. transformare CFG $\Rightarrow$ F.N. Chomsky

$I \begin{cases} \text{1) Eliminăm simbolurile neutilizate/nonterminating} \\ \text{2) Eliminăm simboluri inaccesibile/unreachable} \end{cases}$

ex:  $S \to \overset{(1)}{aABa} \mid \overset{(2)}{CD} \mid \overset{(3)}{bbAC}$
$A \to \overset{(4)}{bc} \mid \overset{(5)}{d} \mid \overset{(6)}{\lambda}$
$B \to \overset{(7)}{\lambda} \mid \overset{(8)}{E}$
$C \to \overset{(9)}{A} \mid \overset{(10)}{deabb} \mid \overset{(11)}{S}$
$D \to \overset{(12)}{BAd} \mid \overset{(13)}{B}$
$E \to \overset{(14)}{Ea} \mid \overset{(15)}{bbE}$
$F \to \overset{(16)}{abc}$

Pas I.1) Utilizabile : $A, B, C, F$; (o stare fără litere mari)
$S, D$ (stari care au doar litere mari)

Neutilizabil : $E$

Dispar : (8), (14) , (15)

Pas I.2) Accesibile : $S$; $A, B, C, D$
Inaccesibile : $F$
Dispar : (16)

II. 1) Dacă neterminalul are $\lambda$ producție și nu alte producții
ex : Pas II.1)a) Dispare : (7) $(B \to \lambda)$; (1) , (12), (13) (cei care au $B$)
Apar :  $S \to \overset{(17)}{aAa}$
$D \to \overset{(18)}{Ad} \mid \overset{(19)}{\lambda}$

b) Dispare : (6) $(A \to \lambda)$; păstrăm (3), (4), (5), (5), (17), (18)

    Apar : $S \to bbC$ | $aa^{(21)}$   (20)

              $C \to \lambda^{(22)}$

              $D \to d^{(23)}$

c) Dispar : (19) $(D \to \lambda)$ ; Păstrăm (2), (18), (23)

    Apar : $S \to c^{(24)}$

d) Dispar : (22) $(C \to \lambda)$ ; păstrăm (2), (20), (24)

    Apar : $S \to D$ | $bb$ | $\lambda^{(27)}$   (25) (26)

e) Dispare : (27) $(S \to \lambda)$ și pt. că avem (11) $(C \to S)$ $\Rightarrow$

            $\Rightarrow$ adăugăm simbol start nou $S'$

            $S' \to \lambda$ | $S$

Gramatica devine :

    $S \to aa$ | $bbC$ | $aAa$ | $CD$ | $bbAC$ | $C$ | $D$ | $bb$

         (21)   (24)   (17)  (2)   (3)   (24) (25) (26)

    $A \to bc$ | $d$

         (4)  (5)

    $S' \to \lambda$ | $S$

         (27)  (28)

    $C \to A$ | $dcabb$ | $S$

         (9)  (10)  (11)

    $D \to Ad$ | $d$

         (12)  (23)

---

**III.** 1) Eliminăm redenumirile ("unit. prod").

    a) $A \to B$ | etc.

       $B \to$ cuvinte  | $\Rightarrow A \to$ etc. | cuvinte

    ex: • Dispare (9) $(C \to A)$

        Apare: $C \to bc$ | $d$

      • Dispare : (25) $(S \to D)$

        Apare: $S \to Ad$ | $d$

      • Dispare : (24) $(S \to C)$

        Apare $S \to dcabb$ | $S$ | $bdd$

      • Dispare : (11) $(C \to S)$

        Apar: $C \to \dots$ (toate de la S)

            • Dispare (28) $(S' \to S)$

            Apare: $S' \to \dots$ (toate de la S)

            Obs: peste tot înlocuim C cu S

**IV** Repetăm pasul I

**V** Adăugăm neterminale noi pentru terminalele din cuvintele de
lungime strict mai mari ca 1

$$A \to aBc \qquad \Rightarrow \qquad A \to X_1 B X_3$$
$$X_1 \to a$$
$$X_3 \to c$$

ex: $S \to \lambda \,|\, \ldots$ (toate de la $S$)

$$S \to X_1 X_1 \,|\, X_2 X_2 S \,|\, X_1 A X_1 \,|\, SD \,|\, X_2 X_2 AS \,|\, X_2 X_2 \,|\, A X_4 \,|\, d \,|$$
$$X_4 X_3 X_1 X_2 X_2 \,|\, X_2 X_3$$

$$A \to X_2 X_3 \,|\, d$$
$$D \to A X_4 \,|\, d$$
$$X_1 \to a \;;\; X_2 \to b \;;\; X_3 \to c \;;\; X \to d$$

**VI** Adăugăm neterminale noi pt. a parge cuvintele de lungime $> 2$.

$$A \to BCDE \quad \Rightarrow \quad A \to B Y_1$$
$$Y_1 \to C Y_2$$
$$Y_2 \to DE$$

ex: $S' \to \lambda \,|\, \ldots$ (toate de la $S$)

$$S \to X X_1 \,|\, X_2 Y_1 \,|\, X_1 Y_2 \,|\, SD \,|\, X_2 Y_3 \,|\, X_2 X_2 \,|\, A X_4 \,|\, d \,|\, X_4 Y_5 \,|\, X_2 X_3$$
$$A \to X_2 X_3 \,|\, d$$
$$D \to A X_4 \,|\, d$$
$$Y_1 \to X_2 S \qquad\qquad X_1 \to a$$
$$Y_2 \to A X_1 \qquad\qquad X_2 \to b$$
$$Y_3 \to X_2 Y_3 \qquad\qquad X_3 \to c$$
$$Y_4 \to AS \qquad\qquad X_4 \to d$$
$$Y_5 \to X_3 Y_6$$
$$Y_6 \to X_1 Y_4$$
$$Y_4 \to X_2 X_2$$

lema de pompare pt CFL

Fie $L$ un CFL. Atunci $\exists\, p \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall \alpha \in L$ cuvânt cu $|\alpha| \geq p$, $\exists$ o
descompunere $\alpha = u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y$ cu proprietățile

1) $v \cdot w \cdot x \leq p$
2) $|v \cdot x| \geq 1$
3) $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \in L$, $\forall\, i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$

①

$L = \{ a^m b^{\bar{m}} c^{\bar{n}} \mid m > \bar{m} > n \geq 0 \} \notin CFL$

Pp.r.a. $L \in CFL \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ din lemă

Alegem $\alpha = a^{p+2} b^{p+1} c^p \in L \Rightarrow |\alpha| = 3p+3 \geq p \;\; \forall p \in \mathbb{N}$

Avem $\alpha = uvwxy$ a.î. $|vwx| \leq p$ și $|vx| \geq 1 \Rightarrow 1 \leq |vx| \leq p \quad (*)$

Caz I : fie $vx = a^k \overset{(*)}{\Rightarrow} 1 \leq k \leq p$

alegem $i = 0 \Rightarrow \beta = uv^0 wx^0 y = uwy = a^{p+2-k} b^{p+1} c^p \in L \Rightarrow |\beta|_a > |\beta|_b$

$\Longleftrightarrow p+2-k > p+1 \Longleftrightarrow 1 \not> k \quad 1 > k$  
$\phantom{xxxxx}$ dar $1 \leq k$ $\Big\} \Rightarrow \alpha$

Caz II : fie $vx = b^k \overset{(*)}{\Rightarrow} 1 \leq k \leq p$

alegem $i = 2 \Rightarrow \beta = a^{p+2} b^{p+1+k} c^p \in L \Longleftrightarrow |\beta|_a > |\beta|_b \Longleftrightarrow p+1+k > p$

$\Longleftrightarrow p+2 > p+1+k \Longleftrightarrow 1 > k$  
$\phantom{xxxxx}$ dar $1 \leq k$ $\Big\} \Rightarrow \alpha$

Caz III : fie $vx = c^k \overset{(*)}{\Rightarrow} 1 \leq k \leq p$

alegem $i = 2 \Rightarrow \beta = a^{p+2} b^{p+1} c^{p+k} \in L \Rightarrow |\beta|_b > |\beta|_c \Longleftrightarrow p+1 \not> p+k \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 1 > k$  
$\phantom{xx}1 \leq k$ $\Big\} \Rightarrow \alpha$

Caz IV : fie $vx = a^k b^t, k \geq 1, t \geq 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \not{1} \leq k+t \leq p$

alegem $i = 0 \Rightarrow \beta = a^{p+2-k} b^{p+1-t} c^p \in L \Rightarrow |\beta|_b > |\beta|_c \Longleftrightarrow$

$\Rightarrow p+2-k < p+1-t \Longleftrightarrow 1 > t$  
$\phantom{xxxxx}$ dar $1 \leq t$ $\Big\} \Rightarrow \alpha$

Caz V : fie $vx = b^k c^t, k \geq 1, t \geq 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} 1 \leq k+t \leq p$

alegem $i = 2 \Rightarrow \beta = uv^2 wx^2 y$ (posibil se amestecă b-uri și c-u)

$|\beta|_a > |\beta|_b \Longleftrightarrow p+2 > p+1+k \Longleftrightarrow 1 > k$  
$\phantom{xxxxxxxxxx}$ dar $k \geq 1$ $\Big\} \Rightarrow \alpha$

Din I, II, III, IV, V $\Rightarrow L \notin CFL$