CDI

06.11.2023

Șiruri și serii de funcții

Șiruri de fct. → convergența simplă ($f_m \xrightarrow{s} f$)
→ convergența uniformă ($f_m \xrightarrow{u} f$)

① Să se studieze convergența simplă și uniformă a urm. șiruri de fct:

a) $f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = \dfrac{x^{2m}}{1+x^m}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall m \geq 1$

b) $f_m : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = \dfrac{x^m}{1+x^{2m}}$, $\forall x \in (0,1)$, $\forall m \in \mathbb{N}$

c) $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = \dfrac{1}{m+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \geq 1$

a) CONVERGENȚA SIMPLĂ

Fie $x \in D = [0,1]$, în limită x e privit ca o ct și m ca var.

Se calculează $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \dfrac{x^{2m}}{1+x^m} = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

Mult. unde are loc conv. simplă? Pe mult A:

$A = \{x \in D \mid \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) \in \mathbb{R}\} = [0,1] \Rightarrow f_m \xrightarrow[A]{s} f$

unde $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1/2, & x = 1 \end{cases}$

CONVERGENȚA UNIFORMĂ

$\left.\begin{array}{l} f_m \text{ continuă pe } [0,1]\ \forall m \geq 1 \text{ (f. elem.)} \\ f \text{ nu e continuă în } x_0 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow f_m \not\xrightarrow{u} f$ (nu conv. unif.)

b) CONVERGENȚĂ SIMPLĂ

Fie $x \in D = (0,1)$

Se calculează $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \lim \dfrac{x^m}{1+x^{2m}} = 0$

$A = \{x \in (0,1) \mid \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) \in \mathbb{R}\} = (0,1) \Rightarrow f_m \xrightarrow[A]{s} f$

unde $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ

$$f_m \xrightarrow[A]{u} f \iff \lim_{m\to\infty}\left(\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$$

Propr. sup: $\quad g: D\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\exists \sup g(x)\in\overline{\mathbb{R}}$

1) $\sup_{x\in D} g(x)$ este cel mai mic majorant al fct. g

2) $\sup_{x\in D} g(x)\geq g(y),\ \forall y\in D$

3) $g(y)\leq M,\ \forall y\in D \Rightarrow \sup_{x\in D} g(x)\leq M$

Fie $m\in\mathbb{N} \Rightarrow \sup_{x\in(0,1)}|f_m(x)-f(x)| = \sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{x^m}{1+x^{2m}}-0\right| = \sup \frac{x^m}{1+x^{2m}}$

$$g\left(\sqrt[m]{\tfrac{1}{2}}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{2}{5} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sup_{x\in(0,1)} g(x)\geq\frac{2}{5} \iff \sup_{x\in(0,1)}|f_m(x)-f(x)|\geq\frac{2}{5} \quad \Big|\ \lim_{m\to\infty}$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup|f_m(x)-f(x)|\right)\geq\frac{2}{5}\neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_m \overset{u}{\underset{A}{\not\longrightarrow}} f$ (nu avem conv. uniformă

c) Fie $x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+x^2}=0$$

$A=\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0 \Rightarrow f_m \xrightarrow[\mathbb{R}]{s} f$

Fie $m\in\mathbb{N}^*$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_m(x)-f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{m+x^2}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\underbrace{\frac{1}{m+x^2}}_{g(x)}$$

$$g(2)=\frac{1}{m+4}\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x)\geq\frac{1}{m+4}$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)=\frac{1}{m+\frac{1}{m}}=\frac{m}{m^2+1}\Rightarrow \sup g(x)\geq\frac{m}{m^2+1}$$ (nu ne ajută metoda asta)

$$g(x)=\frac{1}{m+x^2}\leq\frac{1}{m}\ \forall x\in\mathbb{R} \iff \sup g(x)\leq\frac{1}{m}$$

$$\sup|f_m(x)-f(x)|\leq\frac{1}{m} \text{ și } \frac{1}{m+4}\leq\sup|f_m(x)-f(x)|$$

$\longrightarrow 0 \longleftarrow \quad m\to\infty$

$$f_m \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f$$

② Studiați convergența simplă și uniformă a șirului de fct.

$f_m : [0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_m(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{m}}, \quad \forall x \in [0,+\infty), \ \forall m \geq 1$

Fie $x \in [0,+\infty)$

$\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{m}} = |x| = x$ pt că $x \in [0,+\infty)$

$A = [0,+\infty)$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \Rightarrow f_m \xrightarrow[A]{s} f$

Fie $m \in \mathbb{N}^*$

$\sup\limits_{x\geq 0} |f_m(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\geq 0} \left| \sqrt{x^2+\frac{1}{m}} - x \right| = \sup\limits_{x\geq 0} \underbrace{\sqrt{x^2+\frac{1}{m}} - x}_{g(x)}$

$\sqrt{x^2+\frac{1}{m}} \leq \sqrt{x^2} + \frac{1}{\sqrt{m}} \ \Big| -x \iff \sup g(x) \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \quad \forall x \in [0,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq \sup\limits_{x\geq 0} |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$

$m \to \infty \qquad\qquad m \to \infty$

0

$\lim\limits_{m\to\infty} \sup |f_m(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow f_m \xrightarrow[{[0,+\infty)}]{u} f$

③ Studiați conv. simplă și uniformă a șirului de fct.

$f_m : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_m(x) = \frac{mx^2}{m+x} \quad \forall x \in (0,\infty), \ \forall m \in \mathbb{N}$

Fie $x \in (0,+\infty)$

$\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{mx^2}{m+x} = x^2$

$A = (0,+\infty)$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \Rightarrow f_m \xrightarrow[A]{s} f$

Fie $m \in \mathbb{N}$

$\sup\limits_{x>0} |f_m(x) - f(x)| = \sup\limits_{x>0} \left| \frac{mx^2}{m+x} - x^2 \right| = \sup\limits_{x>0} \left| \frac{-x^3}{m+x} \right| = \sup\limits_{x>0} \underbrace{\frac{x^3}{m+x}}_{g(x)}$

$g(1) = \frac{1}{m+1} \cancel{\geq \frac{1}{m}}$ (nu convine)

$g(m) = \frac{m^3}{2m} = \frac{m^2}{2} \Rightarrow \sup\limits_{x>0} g(x) \geq \frac{m^2}{2} \iff \sup |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{m^2}{2} \ \Big| \lim\limits_{m\to\infty}$

$\lim\limits_{m\to\infty} \sup |f_m(x) - f(x)| \geq \lim\limits_{m\to\infty} \frac{m^2}{2} \iff \lim\limits_{m\to\infty} \sup |f_m(x) - f(x)| \geq \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow f_m \not\xrightarrow{u} f$