CURS 6

SINTAXA LP

- Se folosește un sistem deductiv de tip Hilbert
- Axm = mulțimea axiomelor LP, formule de forma:

  A1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

  A2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

  A3. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

- Regula de deducție

  Pt. orice φ, ψ formule φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ $\Rightarrow$ $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$

- Γ-teoremelor = ex. de def. inductivă, unde Γ = mulț. formule
- Γ-teoremele sunt formule def. astfel:

  T0 orice axiomă e o teoremă.

  T1 orice formulă din Γ este o Γ-teoremă

  T2 $\varphi, \varphi \to \psi$ Γ-teoreme $\Rightarrow$ ψ e Γ-teoremă.

  T3 numai formulele obț. din T0, T1, T2 sunt Γ-teoreme

- φ este Γ-teoremă $\Rightarrow$ φ e dedusă din ipotezele Γ
- φ = teoremă a lui LP dacă $\vdash \varphi$
- φ axiomă $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \varphi$
- $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
- $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$

- $Thm(\Gamma)$ = mulțimea Γ- teoremelor
- $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ este Γ- teoremă
- $\Gamma \vdash \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ pt orice $\varphi \in \Delta$
- Γ, Δ mulțimi de formule
- $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică pt orice φ, $\Gamma \vdash \varphi$ implică $\Delta \vdash \varphi$
- $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică pt $\varphi \Rightarrow \vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$
- $\Gamma \vdash \Delta \Rightarrow Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma) \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$
- $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma) \Rightarrow Thm(\Gamma) \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$
- Γ- demonstrație = secvență formule $\theta_1, \dots \theta_m$ a.î. pt fiecare $i \in \{1, m\}$, o cond. din urm. e satisfăcută:
  - θ_i axiomă
  - $\theta_i \in \Gamma$
  - $\exists\, k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$
- $\emptyset$- demonstrație e doar o simplă demonstrație
- Lema: $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_m$ este Γ- demonstrație $\Rightarrow \Gamma \vdash \theta_i$, $i \in \overline{1,m}$
- Γ- demonstrație a lui $\varphi \Rightarrow \theta_m = \varphi$, m = lungimea
- $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists$ o Γ- demonstrație a lui φ
- Pt orice Γ = mult. form. și φ = formulă $\Rightarrow$

  $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists\, \Sigma$ = submult. finită a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$
- Pt orice $\varphi \Rightarrow\ \vdash \varphi \to \varphi$
- Pt orice $\varphi, \psi, \chi \Rightarrow\ \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(T) Teorema deducției

$\Gamma \subseteq Form$; $\varphi, \psi \in Form$

Atunci $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \to \psi$

- $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ și $\Gamma \vdash \psi \to \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \chi$
- $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
- $\Gamma \cup \{\neg \psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$
- $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ și $\Gamma \cup \{\neg \psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
- $\{\theta, \neg\theta\} \vdash \varphi$
- $\{\theta, \neg\theta\} \vdash \neg\theta \to (\theta \to \varphi)$
- $\{\theta, \neg\theta\} \vdash \neg\neg\varphi \to \theta$
- $\{\theta, \neg\theta\} \vdash \varphi \to \neg\neg\theta$
- $\{\theta, \neg\theta\} \vdash \theta \to (\neg\theta \to \varphi)$
- $\{\theta, \neg\theta\} \vdash (\varphi \to \theta) \to (\neg\theta \to \neg\varphi)$
- $\{\theta, \neg\varphi\} \vdash \neg(\theta \to \varphi)$
- $\{\theta, \neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$
- $\{\theta, \neg\varphi\} \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$
- $\{\varphi \wedge \theta\} \vdash \varphi$
- $\{\varphi \wedge \theta\} \vdash \theta$
- $\{\varphi, \theta\} \vdash \varphi \wedge \theta$
- $\{\varphi, \theta\} \vdash \chi \iff \{\varphi \wedge \theta\} \vdash \chi$
- $\{\varphi, \theta\} \vdash \varphi \wedge \theta \leftrightarrow \theta \wedge \varphi$