Algoritmi avansaţi - Seminar 6 (săpt. 11 şi 12)

Mihai-Sorin Stupariu

1. Fie mulţimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_7\}$, unde $P_1 = (0,0), P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,1), P_4 = (3,0), P_5 = (5,0), P_6 = (2,-3), P_7 = (5,-2), P_8 = (3.5,-2)$. Indicaţi testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui $\mathcal{P}$, parcursă în sens trigonometric (drept pivot iniţial va fi considerat P_2).

2. Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_0P_1P_2\ldots P_{12}$, unde $P_0 = (0,-4), P_1 = (5,-6), P_2 = (7,-4), P_3 = (5,-2), P_4 = (5,2), P_5 = (7,4)$, $P_6 = (7,6)$ iar punctele $P_7, \ldots, P_{12}$ sunt respectiv simetricele punctelor $P_6, \ldots, P_1$ faţă de axa Oy.

3. Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5,0)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (-1,-2)$, $P_6 = (3,-2)$. Arătaţi că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, aşa încât, aplicând metoda din teoremă şi mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare şi suficiente două camere pentru supravegeherea unei galerii având forma poligonului $\mathcal{P}$.

4. Daţi exemplu de poligon cu 6 vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât şi concave şi toate să fie principale.

5. Fie $\mathcal{M} = \{A_i \,|\, i = 0, \ldots, 50\} \cup \{B_i \,|\, i = 0, \ldots, 40\} \cup \{C_i \,|\, i = 0, \ldots, 30\}$, dată de punctele $A_i = (i+10, 0)$, $i = 0, 1, \ldots, 50$, $B_i = (0, i+30)$, $i = 0, 1, \ldots, 40$, $C_i = (-i, -i)$, $i = 0, 1, \ldots, 30$. Determinaţi numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări a lui $\mathcal{M}$.

6. Daţi un exemplu de mulţime din $\mathbb{R}^2$ care să admită o triangulare având 6 triunghiuri şi 11 muchii.

7. În $\mathbb{R}^2$ fie punctele $P_1 = (1,7)$, $P_2 = (5,7)$, $P_3 = (7,5)$, $P_4 = (1,3)$, $P_5 = (5,3)$, $P_6 = (\alpha - 1, 5)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutaţi, în funcţie de α, numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulţimii $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

8. Fie $\mathcal{G}$ un graf planar conex, v numărul de noduri, m numărul de muchii, f numărul de feţe. Se presupune că fiecare vârf are gradul ≥ 3. Demonstraţi inegalităţile

$$\begin{array}{ll} v \leq \frac{2}{3}m, & m \leq 3v - 6 \\ m \leq 3f - 6, & f \leq \frac{2}{3}m \\ v \leq 2f - 4, & f \leq 2v - 4 \end{array}$$

Daţi exemplu de grafuri în care au loc egalităţi în relaţiile de mai sus.