Algoritmi avansaţi

Laborator 6 (săpt. 11 şi 12)

− Punctajul maxim care poate fi obţinut la acest laborator este 10p (dintr-un total de 100p pentru laborator). Din aceste 10p, 1p este acordat pentru prezentarea (unei părţi a) soluţiilor la laborator, până la finalul săptămânii 12 (cel târziu până pe 23.05.2025).

Problema 1. (0.3 * punctajul din aplicaţie)

Punct în poligon convex

Descriere

Se consideră un poligon convex cu n vârfuri date în ordine trigonometrică $(P_1P_2 \dots P_n)$ și m puncte în plan $(R_1, R_2, \dots, R_m)$. Pentru fiecare dintre cele m puncte să se stabilească dacă se află în **interiorul**, în **exteriorul** sau **pe una dintre laturile** poligonului.

Date de intrare

Se citește de la tastatură n, reprezentând numărul de vârfuri ale poligonului. Următoarele n linii vor conține câte două numere întregi x_i, y_i, coordonatele punctului P_i.

Pe următoarea linie se află m reprezentând numărul de puncte pentru care trebuie să aflăm poziția față de poligon. Următoarele m linii vor conține câte două numere întregi x_i, y_i, coordonatele punctului R_i.

Date de ieșire

Pentru fiecare punct R_i se va afișa, pe câte un rând nou, un mesaj corespunzător poziției sale față de poligon:
- `INSIDE` (dacă punctul R_i se află în poligon)
- `OUTSIDE` (dacă punctul R_i se află în afara poligonului)
- `BOUNDARY` (dacă punctul R_i se află pe una dintre laturile poligonului)

Restricții și precizări

- $3 \leq n, m \leq 10^5$.
- $-10^9 \leq x_i, y_i \leq 10^9$

Exemplu

Input

```
4
0 0
5 0
5 5
0 5
3
2 2
7 7
5 2
```

Output

```
INSIDE
OUTSIDE
BOUNDARY
```

Explicație

Reprezentarea grafică a situației de mai sus este următoarea:

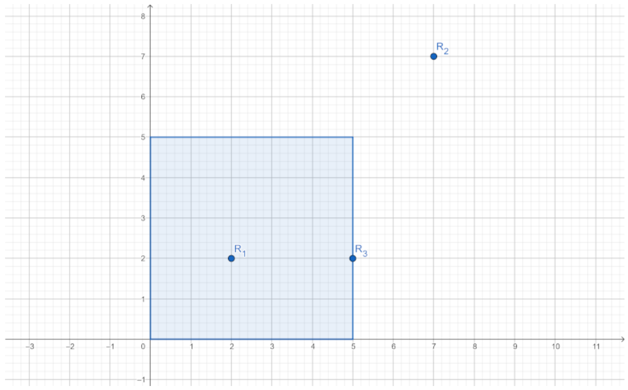

Figura 1: Reprezentarea grafică a poligonului și a punctelor date ca exemplu

Indicaţii de rezolvare

O metodă simplă de a verifica dacă un punct se află în interiorul unui poligon convex este descrisă aici și se bazează pe efectuarea **testului de orientare** între fiecare latură a poligonului convex și punctul ales. O astfel de verificare necesită $\mathcal{O}(n)$ timp, deci per total soluția are complexitatea-timp $\mathcal{O}(mn)$.

Pentru a trece toate testele, trebuie să implementați o soluție care să ruleze în timp $\mathcal{O}(m \log n)$. Un astfel de algoritm, care utilizează o căutare binară, este descris pe acest site.

Problema 2. (0.3 * punctajul din aplicaţie)

Poziţia unui punct faţă de un poligon.

Descriere

Implementați un algoritm de complexitate de timp liniară care să determine poziția relativă a unui punct Q față de un poligon *arbitrar* $P_1, \ldots, P_n$.

Date de intrare

Programul va citi de la tastatură un număr natural n și apoi n perechi de numere întregi separate prin spațiu $x_i\, y_i$, pe linii distincte, reprezentând coordonatele vârfului $P_i(x_i, y_i)$ al poligonului.
După aceea urmează numărul natural m și apoi m perechi de numere întregi separate prin spațiu $x_j\, y_j$, reprezentând coordonatele punctului $Q_j(x_j, y_j)$.

Date de ieșire

Pentru fiecare dintre cele m puncte, programul va afișa pe ecran:
- `INSIDE`: dacă punctul Q_j se află în interiorul poligonului;
- `OUTSIDE`: dacă punctul Q_j se află în exteriorul poligonului;
- `BOUNDARY`: dacă punctul Q_j se află pe laturile poligonului.

Restricții și precizări

- $3 \leq n \leq 1000$
- $1 \leq m \leq 1000$
- $-10^9 \leq x, y \leq 10^9$

Exemplu

Input

```
12
0 6
0 0
6 0
6 6
2 6
2 2
4 2
4 5
5 5
5 1
1 1
1 6
3
3 4
7 3
3 2
```

Output

```
INSIDE
OUTSIDE
BOUNDARY
```

Explicație

Reprezentarea grafică a situației de mai sus este:

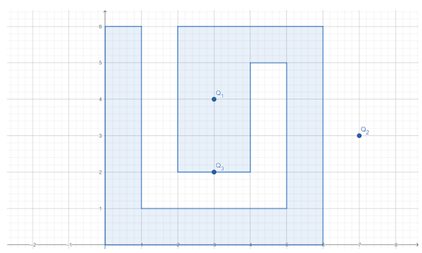

Figura 2: Reprezentare grafică a poligonului și a punctelor care trebuie verificate.

Indicații de rezolvare

Varianta 1 *(O soluție incompletă, care permite obținerea unui punctaj parțial)*
Puteți folosi problema 1 de la L6, care rezolvă cerința în cazul poligoanelor convexe. Combinând cu soluția problemei 3 de la L5, se ajunge la o soluție în cazul poligoanelor stelate.

Varianta 2 *(O soluție completă, bazată pe o abordare diferită)*
Soluția completă se bazează pe regula "par-impar" (*"odd-even rule"*), principiu folosit pentru a delimita interiorul unui poligon sau al unei linii poligonale cu autointersecții. Numele de "par-impar" derivă din următorul mecanism (descris pe scurt):

- Se alege un punct M ”departe” de poligon (de exemplu coordonatele lui M să fie mai mari / mai mici decât coordonatele corespunzătoare ale tuturor vârfurilor poligonului).

- Se determină numărul de laturi intersectate de **segmentul deschis** (MQ) **în interior**. Dacă acest număr este par, punctul Q este situat în exteriorul poligonului, iar dacă este impar, punctul este situat în interior.

- O implementare completă trebuie să trateze corect cazul în care punctul Q este situat pe una din laturile poligonului. De asemenea, dacă segmentul (MQ) trece printr-un vârf al poligonului, trebuie ales un alt punct ”departe” de poligon. Se demonstrează că numărul total de intersecții se poate modifica, **dar paritatea rămâne neschimbată**.

- În exemplul din figura 3, pentru punctele Q_1 și Q_2, numărul de intersecții dintre segmentele (MQ_1), respectiv (MQ_2) este par (4, respectiv 0), punctele fiind situate în exteriorul poligonului. Pentru punctul Q_3, numărul de intersecții este impar (5), punctul fiind situat în interiorul poligonului.

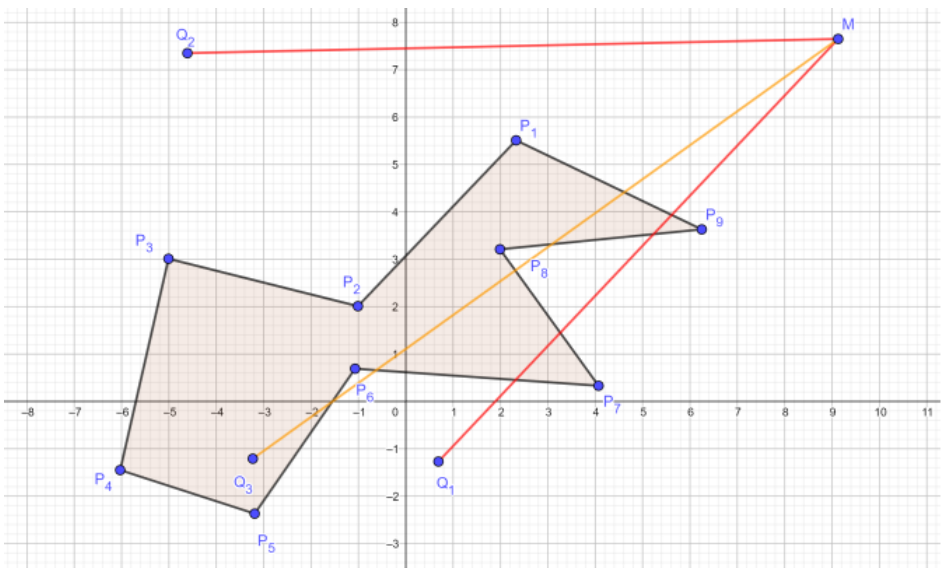

Figura 3: Exemplu pentru regula par-impar.

- Două segmente deschise (AB) și (CD) se intersectează în interior dacă și numai dacă A și B sunt de o parte și de alta a dreptei CD **și** C și D sunt de o parte și de alta a dreptei AB. Aceste proprietăți se verifică aplicând testul de orientare.

- În figura 4, segmentele deschise (AB) și (CD) se intersectează, fiind verificată proprietatea de mai sus. Observați că segmentele (AB) și (CE) **nu** se intersectează. Astfel, C și E sunt de o parte și de alta a dreptei AB, dar A și B nu sunt de o parte și de alta a dreptei CE. De asemenea, segmentele deschise (AB) și (CF) nu se intersectează (A este situat pe dreapta CF, deci A și B nu pot fi de o parte și de alta a dreptei CF).

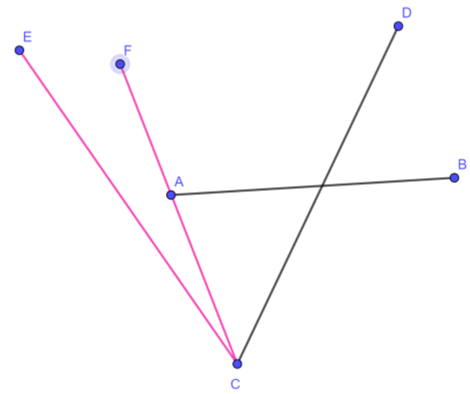

Figura 4: Interescţia unor segmente.

Problema 3. (0.3 * punctajul din aplicaţie)

Monotonia unui poligon

Descriere

Implementați un algoritm de complexitate de timp liniară care să verifice dacă un poligon $P_1 P_2 \ldots P_n$ este monoton în raport cu axa Ox, respectiv Oy, folosind metoda dreptei de baleiere, descrisă în cursul 9.

Date de intrare

Programul va citi de la tastatură un număr natural n, reprezentând numărul de vârfuri ale poligonului, și apoi n perechi de numere întregi separate prin spațiu x_i y_i, pe linii distincte, reprezentând coordonatele vârfului $P_i(x_i, y_i)$ al poligonului.

Date de ieșire

Programul va afișa exact **două** rânduri, pe fiecare aflându-se unul dintre șirurile de caractere `YES` sau `NO`.
Primul rând va indica dacă poligonul dat este x-monoton, iar al doilea rând indică dacă este y-monoton.

Restricții și precizări

- $3 \leq n \leq 1\,000\,000$
- $-10^9 \leq x, y \leq 10^9$

Exemple

Exemplul 1

Input

```
8
-3 -1
-1 -4
9 -2
7 1
4 2
2 4
1 8
-2 6
```

Output

```
YES
YES
```

Explicație

Poligonul dat este atât x-monoton, cât și y-monoton.
Explicație pentru x-monotonie: vârful P_1, situat cel mai la stânga (cu cel mai mic x) este unit cu vârful P_3, situat cel mai la dreapta (cu cel mai mare x) prin două lanțuri: $P_1P_2P_3$, respectiv $P_1P_8P_7P_6P_5P_4P_3$. În ambele cazuri parcurgerea se efectuează de la stânga la dreapta (coordonata x crește). Se poate observa că intersecția dintre o dreaptă verticală oarecare și poligon este mulțimea vidă sau un punct sau un segment (de fapt, este o mulțime conexă, formată "dintr-o singură bucată").
Explicație pentru y-monotonie: vârful P_7, situat cel mai sus (cu cel mai mare y) este unit cu vârful P_2 situat cel mai jos (cu cel mai mic y) prin două lanțuri: $P_7P_8P_1P_2$, respectiv $P_7P_6P_5P_4P_3P_2$. În ambele cazuri parcurgerea se efectuează de sus în jos (coordonata y descrește). Se poate observa că intersecția dintre o dreaptă orizontală oarecare și poligon este mulțimea vidă sau un punct sau un segment.

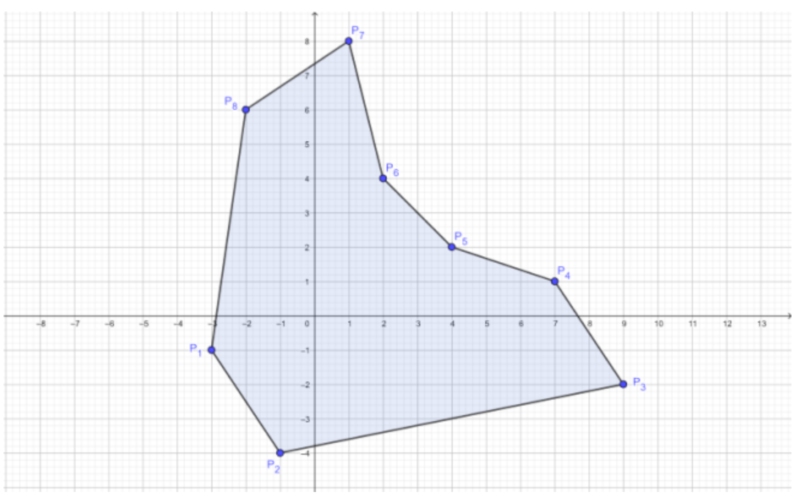

Figura 5: Poligonul este x-monoton și y-monoton.

Exemplul 2

Input

```
7
0 5
2 3
1 -1
6 -2
4 2
8 6
3 9
```

Output

```
NO
YES
```

Explicație

Poligonul dat nu este x-monoton, dar este y-monoton.
Poligonul nu este x-monoton. Putem observa că pe lanțul $P_1P_2P_3P_4, \ldots$ coordonata x a punctelor crește, apoi scade și crește din nou. Se poate observa că există drepte verticale (de exemplu dreapta de ecuație $x = 5$) pentru care intersecția cu poligonul este reuniunea a două segmente (o astfel de mulțime nu este conexă, ea are două componente conexe).
Poligonul dat este y-monoton. Vârful P_7, situat cel mai sus (cu cel mai mare y), este unit cu vârful P_4, situat cel mai jos (cu cel mai mic y), prin două lanțuri: $P_7P_1P_2P_3P_4$, respectiv $P_7P_6P_5P_4$. În ambele cazuri parcurgerea se efectuează de sus în jos (adică y descrește). Se poate observa că intersecția dintre o dreaptă orizontală și poligon este mulțimea vidă sau un punct sau un segment.

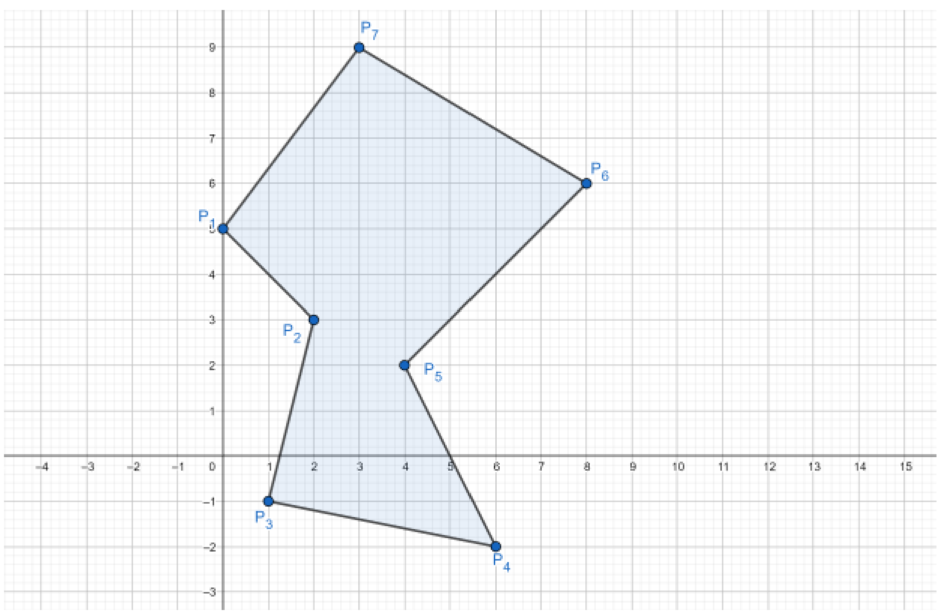

Figura 6: Poligonul nu este y-monoton, dar este y-monoton.

Exemplul 3

Input

```
8
9 9
5 5
6 9
4 4
-1 2
7 1
3 2
10 3
```

Output

```
NO
NO
```

Explicație

Poligonul dat nu este nici x-monoton, nici y-monoton. Pe lanțul $P_5P_6P_7P_8$ coordonata x crește, apoi descrește, apoi crește din nou, deci poligonul nu este x-monoton. Un argument analog poate fi utilizat pentru a arăta că poligonul nu este y-monoton (găsiți un lanț care "obstrucționează" y-monotonia).

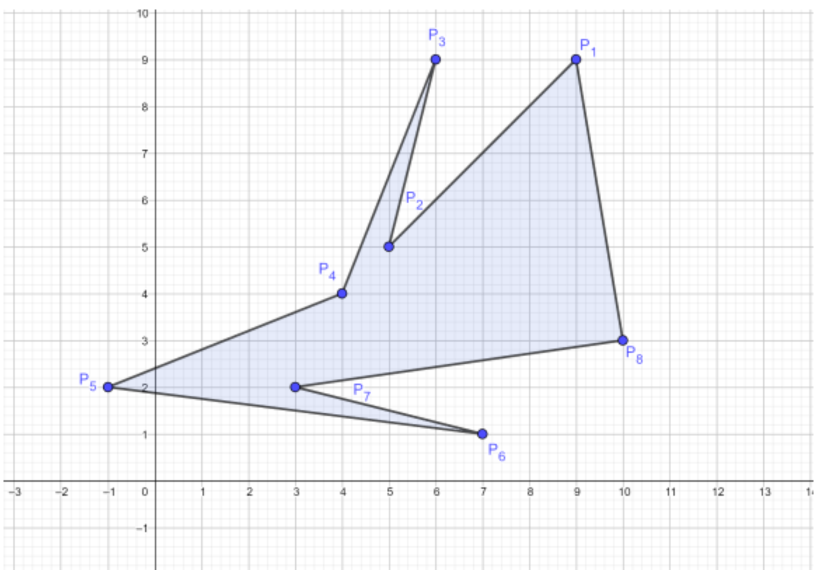

Figura 7: Poligonul nu este nici x-monoton, nici y-monoton