CDI

30.10.2023

Seminar 5

Funcții continue

(T) Fie $D \subseteq (X, d_X)$ și $x_0 \in \text{Izo}\, D$. Orice funcție $f: D \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ este continuă în x_0

---

① $f: [0, +\infty) \cup \{-1\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ b, & x = -1 \end{cases}$

$x > 0 \Rightarrow f$ cont pe $(0, +\infty)$ pt că e op. de funcții elem.

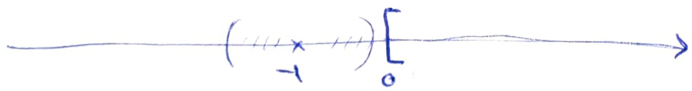
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x > 0 \\ x \to 0}} \cancel{x \cdot \sin} \frac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{y = \frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y \to \infty} \frac{\sin y}{y} = 0$

$f(0) = a$

dacă $a = 0 \Rightarrow f$ cont. în $x_0 = 0$

dacă $a \neq 0 \Rightarrow f$ nu e cont. în $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = ?$



Fie $r \in (0, 1)$. Observăm că $B(-1, r) \cap D = \{-1\} \Rightarrow \{-1\} \in \text{Izo}\, D \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ cont. în $x_0 = -1$

I f e cont pe $[0, +\infty) \cup \{-1\}$ dacă $a = 0$ și $b \in \mathbb{R}$

II f e cont pe $(0, +\infty) \cup \{-1\}$ dacă $a \neq 0$ și $b \in \mathbb{R}$

② a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cdot y}{x^4 + y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pt. că e rap. de funcții elem.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,-x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(-x)}{x^2+x^2} = -\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \Rightarrow f$ nu cont în $(x,y) = (0,0)$

b) f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. f. elem.)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 \cdot y}{x^4+y^2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4+x^2} = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,-x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3\cdot(-x)}{x^4+x^2} = \dfrac{-x^4}{x^4+x^2} = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ e cont în $(x,y) = (0,0)$

Bănuim că e cont. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - \ell| = 0$

Schema $0 \le |f(x,y) - \ell| \le g(x,y)$

$(x,y) \to (0,0)$

$0 \le |f(x,y) - \ell| \le \left|\dfrac{x^3 y}{x^4+y^2} - 0\right| = \left|\dfrac{x^3 y}{x^4+y^2}\right| = \dfrac{|x^3 y|}{x^4+y^2} \le \dfrac{|x^3 y|}{2x^2|y|} = \dfrac{|x|}{2}$

$\to 0$

$x^4 + y^2 \ge 2\sqrt{x^4 y^2} = 2|x^2 y| = 2x^2|y|$

③ a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3y)}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. f. elem)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^4+y^2} \cdot \frac{x^3y}{x^3y} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0 \text{ (conform. ex anterior)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y} \overset{t=x^3y}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow f$ cont în $(0,0)$

b) f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. f. elem.)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \begin{cases} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^3}{x^2+x^2} = 0 = \lim f(x,x) \\ = \lim\limits_{x\to 0} f(x,-x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x^3}{x^2+x^2} = 0 \\ = \lim\limits_{x\to 0} f(x^2,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6+x^3}{x^4+x^2} = 0 \end{cases}$$

Bănuim $l = 0$, f cont:

$$0 \le |f(x,y) - l| = \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|(x+y)(x^2-xy+y^2)|}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{|x+y| \cdot |x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2} \le \frac{|x+y|(|x^2|+|-xy|+|y^2|)}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{|x+y|(|x^2|+|xy|+|y^2|)}{x^2+y^2} = \frac{|x+y|(x^2+y^2)}{\cancel{x^2+y^2}} + \frac{|x+y||xy|}{x^2+y^2} =$$

$$= |x+y| + \frac{|x^2y|+|xy^2|}{x^2+y^2} = |x+y| + \frac{x^2|y|+y^2|x|}{x^2+y^2} = \text{majorăm}$$

$$= |x+y| + \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{2}$$

0