CURS 6

SERII DE PUTERI

- serie de puteri: $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

unde a_n = coef. seriei de puteri

(T) Prima teoremă a lui Abel

Seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$:
- convergentă pt $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ seria e absolut convergentă $\forall x$ cu $|x| < |x_0|$
- divergentă $\Rightarrow$ seria e div. $\forall x$; $|x| \cancel{>} |x_1|$

- Seria $\sum_{n\geq 0} n!\, x^n = 1 + 1!x + 2!x^2 + \dots$ e conv în $x=0$ și div. în $x \neq 0$
- Seria exponențială $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ e conv. $\forall x \in \mathbb{R}$
- Seria $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n}$ e convergentă în $x=-1 \Rightarrow$ abs. conv. $|x|<1$ și divergentă în $x=1 \Rightarrow |x|>1$

(T) Fie $\sum a_n x^n$, $n \geq 0 \Rightarrow \exists\, r \in [0, +\infty]$ a.î. seria e absolut convergentă $\forall |x| < r$ și divergentă $\forall |x| < r$, unde r = rază de convergență, $r \in [0; +\infty)$

- Mulțimea de convergență a seriei e formată din punctele x în care $\sum f_n(x)$ converge simplu / punctual $(n \geq 0)$
- Seria geometrică: $\sum_{n\geq 0} 1 \cdot x^n$; $r = 1$; $(-1, 1)$ = mulț. conv.
- Seria $\sum_{n\geq 0} x^n \cdot \frac{1}{n(n+1)}$; $r=1$; $[-1; 1]$ = mulț. conv.
- Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$; $r=1$; $[-1; 1)$ = mulț. conv.
- Seria $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$; $r=1$; mulț. conv $= (-1; 1]$

(T) $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ serii puteri ; $\rho := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $\rho = 0 \Rightarrow$ seria e absolut convergentă $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\rho = \infty \Rightarrow$ seria e convergentă doar în $x = 0$
- $\rho < +\infty$ și $\rho > 0 \Rightarrow$ seria e abs. conv. pt $|x| < \frac{1}{\rho}$ și divergentă pt $|x| > \frac{1}{\rho}$
- $r = 1/\rho \Rightarrow$ convenție : $\frac{1}{0+} = \infty$; $1/\infty = 0$

Corolar : Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

- dacă $\exists\, \rho := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow r = \begin{cases} 0 , & \rho = \infty \\ \infty , & \rho = 0 \\ 1/\rho , & \text{altfel} \end{cases}$
- dacă $\exists\, \rho := \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \Rightarrow r = \begin{cases} 0 , & \rho = \infty \\ \infty , & \rho = 0 \\ 1/\rho , & \text{altfel} \end{cases}$

CONVERGENȚA UNIFORMĂ A SERIILOR DE PUTERI

- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \longrightarrow r$; $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $x \in (-r, r)$

(T) $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ și $\exists\, r \Rightarrow \rho \in (0, r)$ și seria e uniform conv. pt $x \in (-\rho, \rho)$

(T) $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pt $x \in (-r, r) \Rightarrow f$ continuă pe $(-r, r)$

(T) A II-a teoremă a lui Abel

Dacă $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e conv. în $x = r$ (sau $-r$) $\Rightarrow f$ cont în $x = r$ ($-r$)

(T) $\sum_{n\geq 1} n a_n x^n$ și $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} a_n x^n$ au razele egale

(T) $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $x \in (-r, r) \Rightarrow \forall x$; $|x| < r$ avem:

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

(T) $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $x \in (-r, r) \Rightarrow f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + (n+1) a_{n+1} x^n + \ldots$

și f este de clasă C^∞ pe $(-r, r)$

(T) Unicitatea seriilor de puteri

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ și $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, $r_a = r_b$ și aceeași sumă $\Big| \Rightarrow$ coincid

Operații cu serii de puteri

(T) $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu r_a și $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ cu r_b

- suma: $\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$ cu $r \geq \min(r_a, r_b)$
- produs: $\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_n \cdot b_n) \cdot x^n = \sum_{n\geq 0} C_n \cdot x^n$ cu $r \geq \min(r_a, r_b)$

(T) $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu r și $\lambda \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \lambda (a_n x^n)$ (produs cu o ct)

Seria binomială

- Seria de puteri s.n. serie binomială:

$$1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \ ; \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2,\dots\}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1 \ ; \ r \in (-1, 1)$$

- Generalizare a binomului lui Newton:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n$$

Dezvoltarea în serii de puteri a unei funcții

- $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; I = interval ; $0 \in \mathring{I}$; f C^∞ în 0 s.n. seria Taylor asociată funcției f în punctul 0:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

(T) $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I = interval, $0 \in \mathring{I}$, $f \in C^\infty(I)$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \iff$$

$\iff$ șirul $\{R_n(x)\}$ e convergent la 0, $x \in I$, unde

$R_n(x)$ e restul din formula lui MacLaurin

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

- Corolar: $I \subseteq \mathbb{R}$ simetric față de origine, $f: I \to \mathbb{R}$ de clasă $C^\infty(I)$

  $\exists M \geq 0$ a.î. $|f^{(n)}(x)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow$

  $\Rightarrow f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ $\forall x \in I$

- Seria Taylor: $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{2n+1}$

- $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$, $f: I \to \mathbb{R}$ de clasă $C^\infty(I)$ s.n. seria Taylor asociată lui f în pct x_0:

$$f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$