SAI

05.12.2023

Seminar 10

① Rezolvați în S_{13} ecuația

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 12 & 11 & 10 & 9 & 7 & 8 & 3 & 13 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\sigma = (1,5,9,13)(2\ 12\ 4\ 10)(3,11,6,7,8)$$

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{10} = 1 \Rightarrow \text{are soluții}$$

Fie $c = (1,5,2,6,3,4) \in S_n,\ n \geq 6$

$c^2 = (1,2,3)(5,6,4)$

$c^3 = (1,6)(2,4)(3,5)$

$c^4 = (1,3,2)(5,4,6)$

$c^5 = (1,4,3,6,2,5)$

$c^6 = e$

Întrucât e produsul a două cicluri de lungime 4 și al unui ciclu de lungime 5, dacă σ e pătratul vreunei permutări din S_{13}, aceasta trebuie să conțină „niște" (măcar unul) cicluri de lungime multiplu de 4 și un ciclu de lungime 5

Dar în S_{13}, nu „încap" cicluri de lungime ~~de~~ multiplu de 4 mai lungi de 12 elemente. În plus, ciclurile de lungime 4 dau prin ridicare la puterea 2 produse de 2 ciclurii de lungime 2. Ciclurile de lg. 12 dau prin $\wedge 2$ produse de 2 cicluri de lg 6.

Ca urmare, singura variantă pentru o permutare x ca prin ridicare la pătrat să dea σ este ca x să fie produsul a 2 cicluri disjuncte de lungime 8, resp. 5. În plus, ciclul de lg 8 trebuie să aibă ca orbită $\{1,5,9,13,2,12,4,10\}$, iar celălalt $\{3,11,6,7,8\}$

Notând $x = (1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)(3, b_2, b_3, b_4, b_5)$ din $x^2 = \sigma$ obținem $\sigma = (1, a_3, a_5, a_7)(a_2, a_4, a_6, a_8)(3, b_3, b_5, b_2, b_4)$

Deci: $a_3 = 5$; $a_5 = 9$; $a_7 = 13$

$(a_2, a_4, a_6, a_8) = (2, 12, 4, 10)$

$b_3 = 11$, $b_5 = 6$; b_2 7 și $b_4 = 8$

Obținem: $x = \{(1,2,5,12,9,4,13,10)(3,7,11,8,6)$;

$(1,12,5,4,9,10,13,2)(3,7,11,8,6)$;

$(1,4,5,10,9,2,13,12)(3,7,11,8,6)$;

$(1,10,5,2,9,12,13,4)(3,7,11,8,6)\} \overset{not}{=} S$

Se observă că fiecare permutare $x \in S$ are într-adevăr proprietatea $x^2 = \sigma$. Ca urmare, soluția ec. date este S.

(2) $\sigma = (1,3,5,2,4)(5,8,3,4,6)(10,3,11,2,8)$; $\sigma \in S_{13}$

Produs cicluri disj: $\sigma = (1,3,11,4,6,2,5,8,10)$

$\sigma^3 = (1,4,5)(3,6,8)(11,2,10)$

$\text{ord}(\sigma) = 9$

$\sigma^{2023} = \sigma^{9 \cdot 224 + 7} = (\sigma^9)^{224} \cdot \sigma^7 = \sigma^7 = (1,8,2,4,3,10,5,6,11)$

(3) Determinați $\text{Hom}_{Grp}(\mathbb{Z}_6, S_3)$ și $\text{Hom}_{Grp}(S_3, \mathbb{Z}_6)$

Notăm $\rho = (1,3,2)$ și $\sigma = (1,2)$

$\rho^3 = e$; $\sigma^2 = e$ și $\sigma\rho = (1,3) = \rho^2\sigma$

Fie $f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_6, S_3)$

$\ker f$?

Dacă $\ker f = \mathbb{Z}_6 \Rightarrow f(\hat{a}) = e \ \forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_6 \Rightarrow f$ e notație

Dacă $\ker f = \hat{2}\mathbb{Z}_6 \Rightarrow \frac{\mathbb{Z}_6}{\hat{2}\mathbb{Z}_6} = \frac{\mathbb{Z}_6}{\ker f} \simeq \text{Im} f$ și $\frac{\mathbb{Z}_6}{\hat{2}\mathbb{Z}_6} \simeq \mathbb{Z}_2$

$\boxed{\text{dacă } d \mid m \Rightarrow \frac{\mathbb{Z}_m}{d\mathbb{Z}_m} \simeq \mathbb{Z}_d}$

$\text{Im} f \leq S_3$ și $|\text{Im} f| = 2 \Rightarrow \exists$ o transpoziție τ a.î. $\text{Im} f = \{e, \tau\}$

$f(\hat{0}) = e$ și $f(\hat{1}) = 2$, f morf. , $f(\hat{a}) = \tau^a = \begin{cases} e, & a \text{ par} \\ \tau, & a \text{ impar} \end{cases}$

$\forall a \in \{0,1,2,3,4,5\} \Rightarrow f_2$ notație

Dacă $\ker f = \hat{3}\mathbb{Z}_6 \Rightarrow \mathbb{Z}_3 \simeq \frac{\mathbb{Z}_6}{\hat{3}\mathbb{Z}_6} = \frac{\mathbb{Z}_6}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$ şi $|\operatorname{Im} f| = 3$

$\operatorname{Im} f = \{e, \rho, \rho^2\} \Rightarrow f(\hat{0}) = e$, $f(\hat{1}) = \rho$ sau $f(\hat{1}) = \rho^2$

Dacă $f(\hat{1}) = \rho \Rightarrow f(\hat{a}) = \rho^a = \begin{cases} e, & a = 0 \\ \rho, & a \in \{1; 3\} \\ \rho^2, & a \in \{2; 4\} \end{cases}$ $\forall a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Notăm f_ρ

Analog dacă $f(\hat{1}) = \rho^2 \Rightarrow f(\hat{a}) = (\rho^2)^a = \rho^{2a}$ $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Notăm f_{ρ^2}

Dacă $\ker f = \hat{6}\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}\} \Rightarrow \mathbb{Z}_6 \simeq \frac{\mathbb{Z}_6}{\{\hat{0}\}} = \frac{\mathbb{Z}_6}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Im} f$ e ciclic

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Im} f| = |\mathbb{Z}_6| = 6 \\ \operatorname{Im} f \subset S_3 \\ |S_3| = 6 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} f = S_3 \\ \operatorname{Im} f \text{ ciclic} \end{array}\right| \Rightarrow S_3 \text{ ciclic} \Rightarrow S_3 \text{ comut } \cancel{\text{?}}$$

Prin urmare, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_6, S_3) = \{f_e\} \cup \{f_\tau \mid \tau \text{ transpoz}\} \cup \{f_\rho, f_{\rho^2}\}$

Temă: Determinaţi $\operatorname{Hom}(S_3, \mathbb{Z}_6)$