CURS 2 - 09.10.2023

$f: A \to B$ s.n surjectivă dacă $\forall b \in B \ \exists a \in A$ a.î. $f(a) = b$

$\Updownarrow$

$f(A) = \operatorname{Im} f$

$$\boxed{\operatorname{Im} f = B}$$

EXAMEN 100%
SEMINAR 20%

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$g \circ f : A \to C \qquad (g \circ f)(a) = g\{f(a)\}$

$$A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{1_B} B$$

$f \circ 1_A = f$

$1_B \circ f = f$

Comp funcțiilor este asociativă

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

PROP

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

a) f, g injective $\Rightarrow (g \circ f)$ inj

b) $g \circ f$ inj $\Rightarrow f$ inj

ex: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Leftrightarrow (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$

$\xrightarrow{g \circ f \text{ inj}} a_1 = a_2 \Rightarrow f$ inj

c) f, g surjective $\Rightarrow (g \circ f)$ surj.

Fie $c \in C$.

g surj $\Rightarrow \exists\, b \in B$ aî $g(b) = c$
f surj $\Rightarrow \exists\, a \in A$ aî $f(a) = b$ $\Big| \Rightarrow$

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

d) $g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj

Fie $c \in C$

$g \circ f$ surj $\Rightarrow \exists\, a \in A$ aî $(g \circ f)(a) = c \Rightarrow g(\underbrace{f(a)}_{\in B}) = c$

Def $f : A \to B$

f s.n. inversabilă dacă $\exists\, g : B \to A$ a.î.

$$f \circ g = 1_B \Rightarrow f \text{ surj}$$

$$g \circ f = 1_A \Rightarrow f \text{ inj}$$

f inversabilă $\Rightarrow$ f bijectivă

$\Rightarrow$ g unică

Pp $\exists\, g' : B \to A$ a.î. $f \circ g' = 1_B$

$$g' \circ f = 1_A$$

$$g \circ (f \circ g') = g \circ 1_B$$

$$\underbrace{(g \circ f)}\circ g' = g$$

$$1_A \circ g' = g \Rightarrow g' = g$$

g se notează cu f^{-1}

<u>TEOREMĂ</u> a) $f : A \to B$ inversabilă

$\Rightarrow f^{-1} : B \to A$ este inversabilă și $(f^{-1})^{-1} = f$

b) $A \xrightarrow[\text{inv}]{f} B \xrightarrow[\text{inv}]{g} C$

$g \circ f$ inv $\wedge$ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=(f^{-1}\circ \underbrace{g^{-1}\circ g}_{1_B})\circ f=\underbrace{f^{-1}\circ 1_B\circ f}=\underbrace{f^{-1}\circ f}_{\substack{\| \\ 1_A}}$$

TEOREMĂ

$f:A\to B$ inversabilă $\Longleftrightarrow$ f bijectivă

„$\Leftarrow$" Caut $g:B\to A$ a.î. $\begin{cases} f\circ g=1_B \\ g\circ f=1_A\end{cases}$

$b\in B$ $g(b)=?$

$\to \exists!\, a\in A$ a.î. $f(a)=b$

$\hookrightarrow$ există și este unic.

$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(a)=b=1_B(b)$

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=a=1_A(a)$

PRODUSUL CARTEZIAN

$A_1\times\ldots\times A_n=\{(a_1,\ldots,a_n)\mid a_i\in A_i;\ \forall i=\overline{1,n}\}$

$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\times\ldots=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)\mid a_i\in A_i;\ \forall i\geq 1\}$

$f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ șir de nr reale

$a_1=f(1)$; $a_2=f(2)$; ... ș.a.m.d

$f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i$

$f(i) = a_i \ ; \quad a_i \in A_i$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{ a \mid \exists\, i \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } a \in A_i \}$$

$(A_i)_{i \in I}$ familie de mulțimi indexate după I

$$\prod_{i \in I} A_i = \{ \varphi : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \varphi(i) \in A_i ; \ \forall i \in I \}$$

$\longrightarrow$ produsul cartezian

$$p_j : \prod_{i \in I} A_i \longrightarrow A_j$$

$$p_j \left((a_i)_{i \in I} \right) = a_j$$

<u>Axioma alegerii</u>

$$\left. \begin{array}{l} (A_i)_{i \in I} \ ; \ I \neq \emptyset \\ A_i \neq \emptyset \end{array} \right| \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ

A și B $\qquad \rho \subseteq A \times B \longrightarrow$ relație binară între A și B

ex: $A \neq \emptyset \qquad \rho = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}$

$\begin{cases} a \in A \\ X \in \mathcal{P}(A) \end{cases}$

$\rho \subseteq A \times \mathcal{P}(A)$

$B = A$ atunci ρ s.n. relație binară pe A

Ex 1: $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ diagonala lui A

Ex 2: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\rho = \{(a, a') \in A \times A \mid a < a'\} = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)\}$

ρ relație binară pe A

(i) $a \rho a$ (reflexivitate)

$(a, a) \in \rho$ $\qquad \forall a, b, c \in A$

$\forall a \in A$

ρ reflexivă $\Longleftrightarrow \Delta_A \subseteq \rho$

(ii) $a \rho b \Rightarrow b \rho a$ (simetrie)

$(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$

(iii) $a \rho b$ și $b \rho c \Rightarrow a \rho c$ (tranzitivitate)

$(a,b) \in \rho$ și $(b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$

Daca ρ satisface (i); (ii); (iii) $\Longrightarrow$ ρ este relație de echivalență pe A

(ii') $a \rho b$ și $b \rho a \Rightarrow a = b$ (antisimetrie)

Exemple de relații de echivalență:

1) $A = \mathbb{Z}$; $n \geq 2$

$a \rho b \Leftrightarrow n / a-b$

$\rho \overset{\text{not}}{=} \boxed{\equiv (\text{mod } n)}$ rel de echivalență ?

(i) $a \equiv a \pmod n \Leftrightarrow n \mid a-a \Leftrightarrow n/0$ Adv

$a/b \Rightarrow (\exists) c \in \mathbb{Z}$ aî $b = a \cdot c$

(ii) $a \equiv b$ (mod) $\Rightarrow b \equiv a \pmod n$ Adv

$n \mid (a-b) \Longrightarrow n \mid (b-a)$

Adv

(iii) $a \equiv b \pmod n$ și $b \equiv c \pmod n \Rightarrow a \equiv c \pmod n$

$n \mid (a-b)$ și $n \mid (b-c) \Rightarrow n / a-b+b-c \Leftrightarrow n / a-c$

2) $A = \mathbb{R}$

$a \rho b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$

$\hat{2} = \{ b \in \mathbb{R} \mid b - 2 \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z}$

$\widehat{2,5} = \{ b \in \mathbb{R} / b - 2,5 \in \mathbb{Z} \} = \underbrace{\{ k + 0,5 / k \in \mathbb{Z} \}}_{0,5 + \mathbb{Z}}$

<u>TEOREMĂ</u> : Prop clase de echivalență

$A \neq \emptyset$; ρ rel de echivalență pe A

1) $a \in \hat{a}$; $(\forall)\, a \in A$

2) $\hat{a} = \hat{b} \Longleftrightarrow a \rho b$

$\hat{a} = \hat{b} \overset{?}{\Longrightarrow} a \rho b$

$\hat{b} \ni b \Longrightarrow b \rho a \Rightarrow a \rho b$

$a \rho b \overset{?}{\Longrightarrow} \hat{a} = \hat{b}$

$\hat{a} \subseteq \hat{b}$

Fie $x \in \hat{a} \Longrightarrow x \rho a$

$\left.\begin{array}{l} x \rho a \\ a \rho b \end{array}\right\} \Longrightarrow x \rho b \Rightarrow x \in \hat{b}$

$\hat{b} \subseteq \hat{a}$ Analog

2) $A = \mathbb{R}$

$a \rho b \iff a-b \in \mathbb{Z}$

(i) $a \rho a \iff a-a = 0 \in \mathbb{Z}$ adv

(ii) $a \rho b \overset{?}{\Longrightarrow} b \rho a$

$\Downarrow$

$a-b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underset{-(a-b)}{\underset{\parallel}{b-a}} \in \mathbb{Z}$ adv

(iii) $a \rho b$ și $b \rho c \Longrightarrow a \rho c$

$\underbrace{a-b \in \mathbb{Z} \quad b-c \in \mathbb{Z}}$ adev

$a-b+b-c = a-c \in \mathbb{Z}$

$a \in A$; ρ rel de echivalență pe A

$\hat{a} := \{ b \in A \mid b \rho a \} \subseteq A$

$\rightarrow$ clasa de echivalență a lui $a \in A$.

1) $\equiv (\mathrm{mod}\ 5) = \rho$

$\hat{1} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5) \} = \{ \dots, -4, 1, 6, 11, \dots \}$

$= \{ 5k+1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$

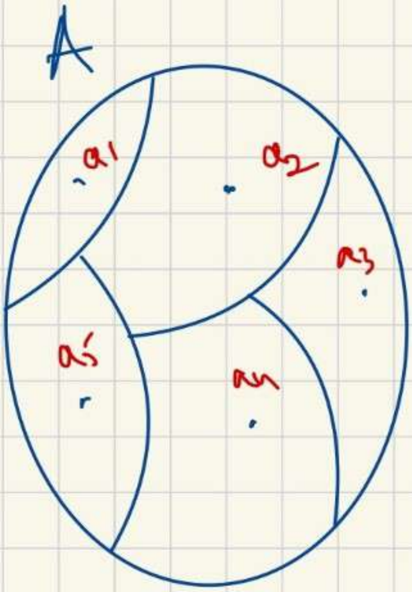
$a \in \hat{a} \Longrightarrow a \rho a$

3) $\hat{a}=\hat{b}$ sau $\hat{a}\cap\hat{b}=\emptyset$

$\hat{a}\cap\hat{b}\neq\emptyset \overset{?}{\Longrightarrow} \hat{a}=\hat{b}$

$\exists\, x\in \hat{a}\cap\hat{b} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\rho a \Rightarrow a\rho x \\ x\rho b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\rho b \Rightarrow \hat{a}=\hat{b}$

4) $\bigcup_{a\in A}\hat{a}=A$



ρ rel de echiv

$A\neq\emptyset$; ρ rel de echivalență

$(a_i)_{i\in I}$; $a_i\in A$ s.n. SCIR relativ la ρ

(SISTEM COMPLET ȘI INDEPENDENT REPREZENTAT)

dc: 1) $a_i \not\rho\, a_j$; $(\forall)\, i\neq j$

2) $(\forall)\, a\in A\ \exists\, i\in I$ aî $a\rho a_i$

$\mathbb{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow |a|=|b|$ TOT CE PROVINE DIN „=" => E ECHIVALENȚĂ

$\hat{1} = \{-1, 1\} = -\hat{1}$

$\hat{0} = \{0\}$, sand

SCIR : $\boxed{\mathbb{N}}$