Cine va fi PP'' dacă QQ', RR' sînt bisectoarele unghiurilor $\hat{Q}$, $\hat{R}$ ale triunghiului PQR?

4. Fie PQR un triunghi și fie punctele $P', P'' \in QR$, $Q', Q'' \in PR$, $R', R'' \in PQ$ diferite de P, Q, R și astfel ca P', P'' să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|QR|$, Q' și Q'' să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|RP|$, iar R' și R'' să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|PQ|$. Să se arate că P'', Q'', R'' sînt coliniare dacă și numai dacă P', Q', R' sînt coliniare și că dreptele PP'', QQ'', RR'' sînt concurente, dacă și numai dacă PP', QQ', RR' sînt concurente.

5. Fie O, O', A, B patru puncte distincte astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv |O'A| \equiv |O'B|$. Să se arate că dreptele $OA, O'B$ sînt paralele și că dreptele OO', AB sînt perpendiculare.

6. Fie OAB un triunghi isoscel ($|OA| \equiv |OB|$) și fie M mijlocul segmentului $|AB|$. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \sim 2\overrightarrow{OM}$.

7. Fie punctele A, B, C, D, O, M astfel încît dreptele AB, CD sînt perpendiculare în M și $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \equiv |OD|$. Să se arate că

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}.$$

8. Fie A, B, C, D patru puncte fixe într-un plan și fie M un punct mobil în același plan. Fie M_1 simetricul lui M față de A, M_2 simetricul lui M_1 față de B, M_3 simetricul lui M_2 față de C și M_4 simetricul lui M_3 față de D. Să se arate că vectorul $\overrightarrow{MM_4}$ este echipolent cu un vector fix. Să se indice condițiile în care avem $M_4 = M$.

9. Să se arate că oricare ar fi punctele A, B, C, D într-un plan, avem

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

10. Fie O, A, B trei puncte fixe într-un plan p, $A \neq B$. Să se determine locul geometric al punctelor M, pentru care avem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \text{const}$.

11. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \perp CD$ și fie E, F mijloacele laturilor $|AD|$, $|BC|$. Să se arate că avem

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}, \quad 4\overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2, \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

12. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trei vectori liberi, astfel ca $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Să se arate că există puncte A, B, C astfel ca $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, $\overrightarrow{CA} \in \vec{w}$.

13. Să se arate că, dacă $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, atunci

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})^2 \vec{b}^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \vec{c}^2 + (\vec{b} \cdot \vec{c})^2 \vec{a}^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 \vec{c}^2 + 2(\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

14. Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trei vectori liberi astfel ca $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ și fie

$$\vec{a}' = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \quad \vec{b}' = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}, \quad \vec{c}' = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}.$$

Să se arate că există puncte A, B, C, A', B', C' astfel ca

$$\overrightarrow{BC} \in \vec{a}, \ \overrightarrow{CA} \in \vec{b}, \ \overrightarrow{AB} \in \vec{c}, \ \overrightarrow{B'C'} \in \vec{a}', \ \overrightarrow{C'A'} \in \vec{b}', \ \overrightarrow{A'B'} \in \vec{c}'$$

și că triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt asemenea (M. Chiriță).

15. Fie OAB un triunghi și k un număr real. Se consideră punctul P pentru care $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BA}$. Să se determine x și y astfel ca $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Cum trebuie ales k pentru ca P să fie între A și B? Care este locul geometric al punctelor P, pentru care $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$, cînd k parcurge mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale?

R: $x = k, y = 1 - k$; dreapta AB.

16. Să se arate că dacă AD este bisectoare în triunghiul ABC, atunci

$$\|\overrightarrow{AC}\| (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \|\overrightarrow{AB}\| (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}).$$

17. Fie într-un plan reperul ortogonal $(\vec{i}, \vec{j})$. Se consideră vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{a}i$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}j$, $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$. Să se determine componentele vectorului $\overrightarrow{OP}$, față de reperul $(\vec{i}, \vec{j})$.

R: $x = ka$, $y = (1-k)b$.

18. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și fie M un punct în planul acestui triunghi. Să se arate că

$$2(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) = 9\overrightarrow{MG}^2 - \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2.$$

19. Fie ABC un triunghi și fie $ABDE$, $ACFG$ pătratele construite pe laturile $|AB|$, $|AC|$ în exteriorul triunghiului ABC. Să se arate că $CE \perp BG$.

Indicație. Se arată că $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ scriind $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}$.

20. Se consideră un dreptunghi $ABCD$. Să se determine locul geometric al punctelor M din planul dreptunghiului $ABCD$, pentru care

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\|.$$

R: dreaptă.

21. Fie P, Q două puncte oarecare, într-un plan p. Să se determine locul geometric al punctelor M din planul p, pentru care $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ are o valoare dată k.

Indicație. Se consideră mijlocul O al segmentului $|PQ|$, dacă $P \neq Q$. Se arată că $\overrightarrow{OM}^2 = k + \overrightarrow{OP}^2$. Locul geometric căutat este un cerc, un punct sau mulțimea vidă.

22. Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan p, să se determine locul geometric al punctelor M din planul p, pentru care

$$(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}) = k,$$

unde k este un număr dat. Caz particular: $ABCD$ este un dreptunghi.

Indicație. Se consideră punctele P, Q, care împart segmentele $|AB|$, $|CD|$ în raportul -3. Locul geometric căutat este fie un cerc cu centrul în O, mijlocul segmentului $|PQ|$ fie $\{O\}$, fie $\varnothing$. În cazul particular, O este centrul dreptunghiului.

Capitolul

VII Suprafețe poliedrale și corpuri poliedrale

1. Aria unei suprafețe poligonale

Fie P un poligon convex, situat într-un plan p. Vom nota prin $[P]$ mulțimea $\text{Int}\, P \cup P$. Deci $[P]$ este reuniunea dintre interiorul lui P, laturile lui P și vîrfurile lui P, (fig. VII.1).

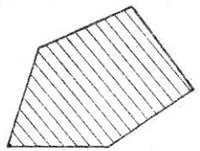


Fig. VII.1

Definiție. **O mulțime de forma $[P] = P \cup \text{Int}\, P$, unde P este un poligon convex, va fi numită suprafață poligonală. Vom spune că P este frontiera suprafeței poligonale $[P]$ și că suprafața $[P]$ este limitată de poligonul P.**

O suprafață limitată de un trilater va fi numită suprafață *triunghiulară* sau *suprafață trilateră*. O suprafață limitată de un patrulater convex va fi numită *suprafață patrulateră*.

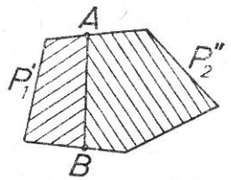


Fig. VII.2

În acest paragraf, vom arăta cum se poate defini și calcula aria unei suprafețe poligonale.

Fie P, P', P'' trei poligoane *convexe* astfel ca (fig. VII.2):

1. Intersecția $P' \cap P''$ este un segment $[AB]$ avînd capetele $A \in P$, $B \in P$.
2. $\text{Int}\, P' \cap \text{Int}\, P'' = \emptyset$.
3. $\text{Int}\, P = \text{Int}\, P' \cup \text{Int}\, P'' \cup |AB|$.

Definiție. **Vom spune că suprafețele poligonale $[P']$, $[P'']$ realizează o descompunere a suprafeței $[P]$ dacă poligoanele P', P'' îndeplinesc condițiile 1, 2, 3 date mai sus. În aceste condiții vom scrie**

$$[P] = [P'] + [P''] \text{ sau } [P] - [P'] = [P''].$$

Exerciții

1. Să se arate că dacă suprafețele poligonale $[P']$, $[P'']$ realizează o descompunere a suprafeței poligonale $[P]$, atunci

$$\text{Int}\, P \neq \text{Int}\, P' \cup \text{Int}\, P''.$$

2. Să se arate că dacă poligoanele P, P', P'' îndeplinesc condițiile 1, 2, 3, atunci

$$P = (P' \cup P'') - |AB|.$$

Prin descompuneri succesive, o suprafață poligonală poate fi descompusă într-un număr oricît de mare de suprafețe poligonale. Scrierea

$$[P] = [P_1] + [P_2] + \ldots + [P_k]$$

indică faptul că suprafața poligonală $[P]$ a fost descompusă în suprafețele poligonale $[P_1]$, $[P_2]$, ..., $[P_k]$, (fig. VII.3).

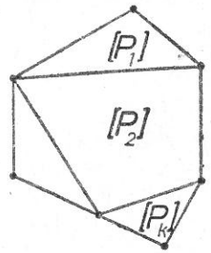


Fig. VII.3

Definiție. **Fie M și M' două mulțimi de puncte. Spunem că aceste mulțimi sînt congruente, dacă există cel puțin o aplicație bijectivă f de la M la M', astfel ca relațiile**

$$A \in M,\ B \in M,\ A' = f(A),\ B' = f(B)$$

să implice egalitatea

$$d(A, B) = d(A', B').$$

Dacă două segmente $|AB|$, $|A'B'|$ sînt congruente, atunci putem asocia fiecărui punct $P \in |AB|$ acel punct $P' \in |A'B'|$, pentru care avem $d(A', P') = d(A, P)$. Dacă avem un al doilea punct $Q \in |AB|$ și dacă alegem $Q' \in |A'B'|$ astfel ca $d(A', Q') = d(A, Q)$, atunci vom avea $d(P, Q) = d(P', Q')$.

Deci două segmente congruente în sensul cunoscut de noi de la începutul manualului, sînt congruente și după ultima definiție, dacă se consideră cele două segmente ca mulțimi M și M'.

Exerciții

1. Să se arate că dacă două poligoane convexe P, P' sînt congruente, atunci suprafețele poligonale limitate de cele două poligoane sînt de asemenea congruente.

2. Fie M o mulțime de puncte și fie $\vec{v}$ un vector în spațiu. Să asociem fiecărui punct $A \in M$ acel punct $A' = f(A)$, pentru care avem $\overrightarrow{AA'} \sim \vec{v}$. Fie M' mulțimea punctelor $A' = f(A)$, ce corespund punctelor $A \in M$. Să se arate că mulțimile M și M' sînt congruente.

3. Să se arate că două plane arbitrare sînt mulțimi congruente.

4. Să se arate că două drepte sau două semidrepte, sau două semiplane, formează perechi de mulțimi congruente.

Definiție. **Fie $S = [P]$, $S' = [P']$ două suprafețe poligonale. Vom spune că suprafețele S, S' sînt congruente prin descompunere, dacă putem descompune cele două suprafețe într-un același număr de suprafețe poligonale, congruente două cîte două:**

$$S = S_1 + \ldots + S_p,\ S' = S_1' + \ldots + S_p',$$

$$S_1 \equiv S_1', \ldots, S_p \equiv S_p'.$$

Vom exprima faptul că suprafețele poligonale S și S' sînt congruente prin descompunere în felul următor: S (d) S', (fig. VII.4).

Două suprafețe poligonale S, S' vor fi numite *congruente prin completare*, dacă există două perechi de suprafețe poligonale congruente prin descompunere:

$$T \text{ (d) } T', \quad U \text{ (d) } U',$$

astfel încît să avem

$$U = S + T, \quad U' = S' + T',$$

unde relația $U = S + T$ înseamnă că suprafața poligonală U a fost împărțită în suprafețele poligonale S și T, cu ajutorul unui segment interior suprafeței U și avînd capetele pe poligonul care limitează pe U (fig. VII.5,6).

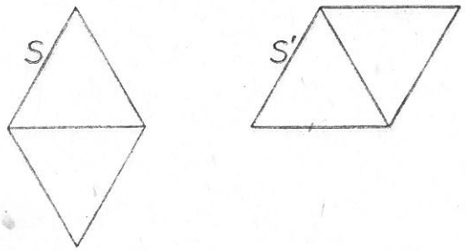


Fig. VII.4

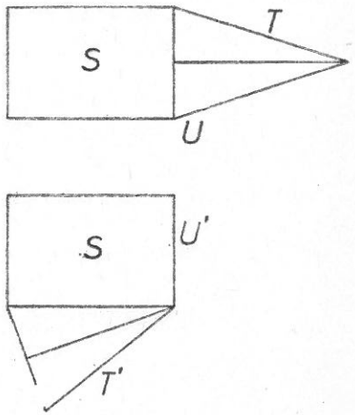


Fig. VII.5

Dacă suprafețele S, S' sînt congruente prin completare, vom exprima acest fapt scriind: S (c) S'.

Următoarele implicații sînt ușor de dovedit și lăsăm verificarea lor ca exerciții:

1. S (d) $S' \Rightarrow S$ (c) S'.

2. S (d) S', T (d) $T' \Rightarrow S + T$ (d) $S' + T'$.

3. S (d) S', S' (d) $S'' \Rightarrow S$ (d) S''.

4. *Dacă suprafețele poligonale S, S' sînt congruente prin descompunere și dacă suprafețele T, T' sînt de asemenea congruente prin descompunere și dacă $T \subset S$, $T' \subset S'$, atunci suprafețele $S - T$ și $S' - T'$ sînt congruente prin completare.* Pe scurt:

$$S \text{ (d) } S', \ T \text{ (d) } T', \ S \supset T, \ S' \supset T' \Rightarrow S - T \text{ (c) } S' - T'.$$

Vom da acuma unele exemple simple de suprafețe congruente prin descompunere sau prin completare.

5. *Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ două paralelograme, astfel ca*

$$|AB| \equiv |A'B'|, \quad AB = A'B', \quad CD = C'D'.$$

În acest caz, suprafețele limitate de cele două paralelograme sînt congruente prin completare, (fig. VII.6).

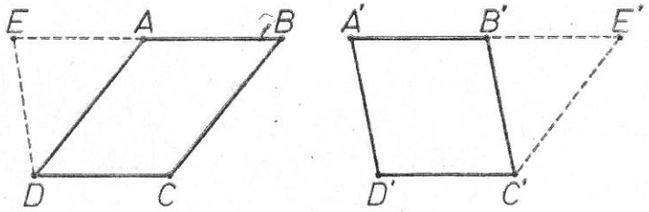


Fig. VII.6

Demonstrație. Să considerăm punctele $E \in AB$, $E' \in AB$ astfel ca $DE \parallel A'D'$ și $C'E' \parallel BC$. Avem atunci

$$[BCDE] \text{ (d) } [E'C'D'A'], \quad ADE \equiv E'C'B',$$

$$[ABCD] + [ADE] = [BCDE], \ [A'B'C'D'] + [E'C'B'] = [A'E'C'D']$$

și rezultă $[ABCD]$ (c) $[A'B'C'D']$.

6. *Fie ABC un triunghi și fie D, E mijloacele laturilor $|AC|$ respectiv $|BC|$. Fie F punctul de intersecție al dreptei DE cu paralela dusă prin B la AC. Atunci suprafețele limitate de trilaterul $[ABC]$ și de paralelogramul $ABFD$ sînt congruente prin descompunere,* $[ABC]$ (d) $[ABFD]$.

Demonstrație (fig. VII.7). Avem descompunerile

$$[ABC] = [ABED] + [CDE],$$

$$[ABFD] = [ABED] + [BFE],$$

$$CDE \equiv BFE$$

și rezultă $[ABC]$ (d) $[ABFD]$.

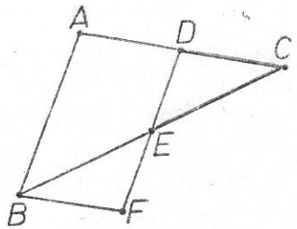


Fig. VII.7

1. Fie $ABCD$ un paralelogram și fie punctele $E \in |BD|$, $M \in |AB|$, $N \in |CD|$, $E \in PQ \cap MN$, $P \in |AD|$, $Q \in |BC|$. Să se arate că dacă $MN \parallel AD$ și $PQ \parallel AB$, atunci:

$$[AMEP] \text{ (c) } [CQEN], \text{ (fig. VII.8).}$$

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $AC \perp BC$. Considerăm pătratul $ACDE$ și dreptunghiul $AGKI$, astfel ca $|AG| \equiv |AB|$, $I \in |AB|$ și $CI \perp AB$. Să se arate că, (fig. VII.9):

$$[ACDE] \text{ (c) } [IAGK].$$

(*Indicație.* Se consideră paralelogramul $ABFE$ și se observă că $[ACDE]$ (c) $[ABFE]$ și $EAB \equiv CAG$, $EABF \equiv CAGH$, $CAI \equiv HGK$).

3. Fie $ABCD$ un trapez ($AB \parallel CD$) și fie M mijlocul laturii $|BC|$. Paralela dusă prin M la AD intersectează dreptele CD, AB în punctele F respectiv E. Să se arate că (fig. VII.10):

$$[ABCD] \text{ (d) } [ADFE].$$

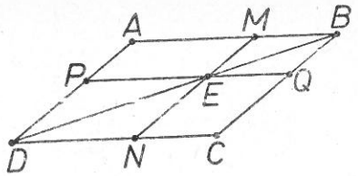


Fig. VII.8

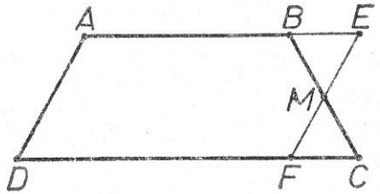


Fig. VII.10

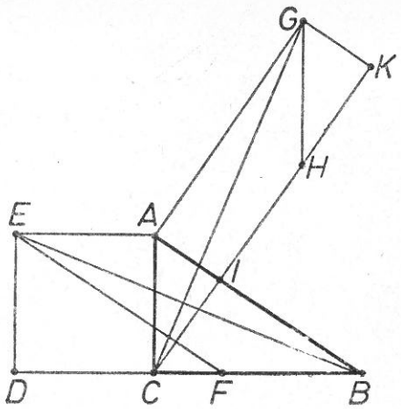


Fig. VII.9

D e f i n i ţ i e. Numim descompunere elementară a suprafeţei $[ABC]$, limitată de un trilater ABC, orice descompunere dată de un segment care are o extremitate într-unul din vîrfurile A, B, C şi cealaltă extremitate pe latura opusă acelui vîrf (fig. VII.11).

Exerciţiu. Fie A', B', C' picioarele înălţimilor triunghiului ABC. Să se arate că produsele

$$d(B, C)\, d(A, A'),\ d(C, A)\, d(B, B'),\ d(A, B)\, d(C, C')$$

sînt egale între ele.

D e f i n i ţ i e. Aria unei suprafeţe triunghiulare $[ABC]$ este dată de formula

$$\sigma(ABC) = \frac{1}{2}\, d(B, C)\, d(A, A') = \frac{1}{2}\, d(C, A)\, d(B, B') = \frac{1}{2}\, d(A, B)\, d(C, C').$$

Exerciţii

1. Să se arate că dacă $[ABD]$, $[ACD]$ dau o descompunere elementară a suprafeţei triunghiulare $[ABC]$, $D \in |BC|$, atunci (fig. VII.12):

$$\sigma(ABC) = \sigma(ABD) + \sigma(ACD).$$

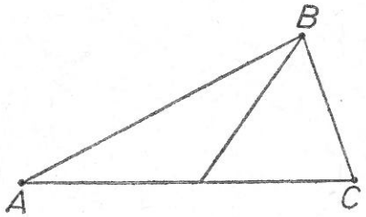


Fig. VII.11

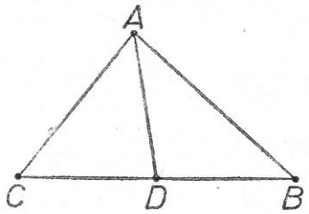


Fig. VII.12

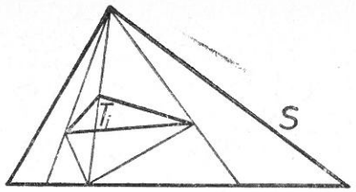


Fig. VII.13

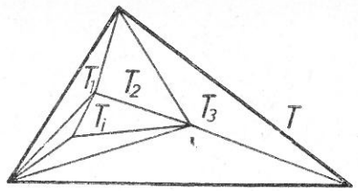


Fig. VII.14

2. Fie $T_1, T_2, \ldots, T_k$ suprafeţe triunghiulare definind o descompunere a unei suprafeţe triunghiulare S. Să se arate, pe exemple, că suprafeţele $T_1, \ldots, T_k$ admit descompuneri elementare repetate, astfel ca suprafeţele rezultate prin aceste descompuneri să poată fi obţinute direct, prin descompuneri elementare succesive aplicate suprafeţei S.

(Indicaţie. Figurile VII.13 şi 14 dau exemple de tipul cerut. Elevii vor da alte exemple; ideea este de a trasa segmente care au ca extremităţi cîte un vîrf al triunghiului T şi care trec printr-un vîrf al unui triunghi T_i.

3. Fie $T_1, \ldots, T_k$ suprafeţe triunghiulare definind o descompunere a suprafeţei triunghiulare S. Să se arate că aria suprafeţei S este egală cu suma ariilor suprafeţelor $T_1, \ldots, T_k$.

(Indicaţie. Se descompune fiecare din triunghiurile $T_1, \ldots, T_k$ astfel încît să se obţină o descompunere de tipul indicat în exerciţiul 2. Apoi se aplică exerciţiul 1.)

Sîntem acuma în măsură să definim aria unei suprafeţe poligonale arbitrare. Fie P un poligon convex şi fie $[P]$ suprafaţa poligonală limitată de P. Ducînd un număr de diagonale, putem descompune suprafaţa $[P]$ într-un număr finit de suprafeţe triunghiulare (fig. VII. 15). Putem atunci defini aria suprafeţei $[P]$ ca fiind egală cu suma ariilor suprafeţelor triunghiulare din descompunerea considerată. Dar trebuie observat că putem face descompunerea suprafeţei $[P]$ în mai multe moduri. Pentru ca definiţia dată să aibă sens, ea nu trebuie să depindă de descompunerea făcută.

Din rezultatele stabilite anterior, rezultă că, oricum am descompune suprafaţa $[P]$ în suprafeţe triunghiulare, suma ariilor suprafeţelor unei astfel de descompuneri are o aceeaşi valoare, independentă de descompunerea aleasă. Această sumă a ariilor suprafeţelor triunghiulare ale unei descompuneri a suprafeţei poligonale $[P]$ se va numi *aria suprafeţei poligonale* $[P]$.

Dacă avem două descompuneri ale suprafeţei $[P]$ în suprafeţe triunghiulare (fig. VII.16)

$$[P] = T_1 + T_2 + \ldots + T_r = T'_1 + T'_2 + \ldots + T'_s,$$

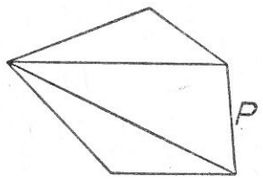


Fig. VII.15

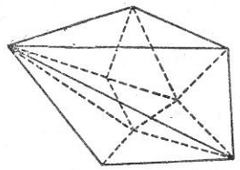


Fig. VII.16

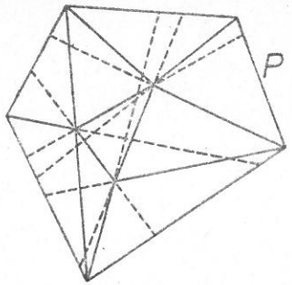


Fig. VII.17

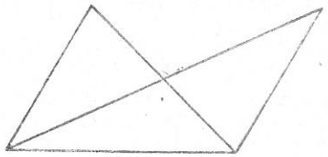


Fig. VII.18

putem obține o nouă descompunere a suprafeței $[P]$ prelungind laturile triunghiurilor care limitează suprafețele T_j, T'_j, pînă întîlnim poligonul P. Segmentele astfel obținute vor împărți suprafața $[P]$ în suprafețe triunghiulare și patrulatere. Mai departe, vom putea împărți fiecare suprafață patrulateră în cîte două suprafețe triunghiulare, ducînd cîte o diagonală. Se obține atunci o descompunere a suprafeței Int P în suprafețe triunghiulare, care se poate obține din fiecare din descompunerile inițiale, prin descompuneri elementare succesive (fig. VII.17). Dacă ținem seama de faptul că aria unei suprafețe triunghiulare este egală cu suma ariilor suprafețelor rezultate printr-o descompunere elementară, și dacă aplicăm această proprietate fiecărui triunghi al fiecăreia din descompunerile considerate, deducem că suma ariilor triunghiurilor fiecăreia din descompunerile considerate este aceeași în fiecare caz. Aceasta arată că definiția dată ariei unei suprafețe poligonale S, ca sumă a ariilor suprafețelor triunghiulare ale unei descompuneri (în suprafețe triunghiulare) a suprafeței S, *este independentă de descompunerea considerată.*

Exerciți

1. Să se arate că două suprafețe triunghiulare congruente prin descompunere au ariile egale (fig. VII.18).

2. Să se arate că dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ au bazele $|BC|$, $|B'C'|$ congruente și ariile egale, atunci înălțimile din A și A' sînt de asemenea congruente, (fig. VII.19).

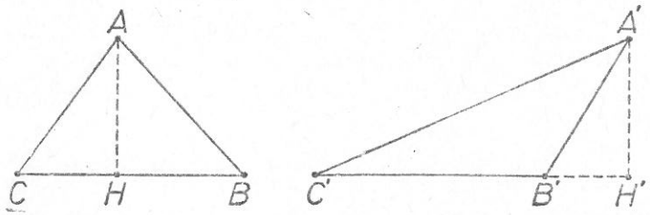


Fig. VII.19

3. Să se arate că aria unui trapez este egală cu produsul dintre distanța între laturile paralele și semisuma lungimilor acestor laturi (fig. VII.20).

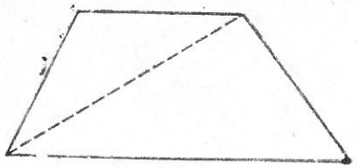


Fig. VII.20

4. Să se arate că dacă P este un poligon convex cu n, $n>3$ laturi, atunci există un poligon P', cu n-1 laturi, congruent prin completare cu P.

(Indicație. Se aleg patru vîrfuri succesive A, B, C, D în poligonul P, și se intersectează dreapta DC cu paralela dusă prin B la AC. Se obține punctul de intersecție M. Triunghiurile ABC, AMC limitează suprafețe congruente prin completare, deoarece au aceeași bază $|AC|$ și înălțimile din B și M congruente. Înlocuind triunghiul ABC cu AMC și apoi considerînd $|MD|$ ca latură, se obține un poligon P' cu n-1 laturi, congruent prin completare cu P (fig. VII.21)).

5. Să se arate că, oricare ar fi poligonul P, există un triunghi T, astfel ca suprafețele limitate de P și de T să fie congruente prin completare. Triunghiul T poate fi ales astfel ca una din laturile sale să aibă o lungime dată.

(Indicație. Prima afirmație se obține aplicînd de n-3 ori proprietatea stabilită prin ex. 4. Pentru ultima afirmație, se consideră un triunghi ABC, care limitează o suprafață S, congruentă prin completare cu $[P]$; pe semidreapta $|AB$ se consideră segmentul $|AB'|$ de lungimea dată și se duce paralela BC' la $B'C$, unde $C' \equiv AC$ (fig. VII.22)).

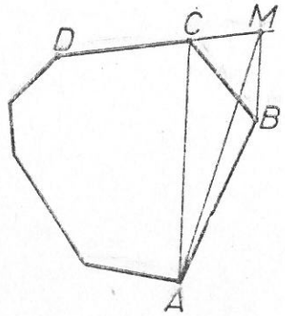


Fig. VII.21

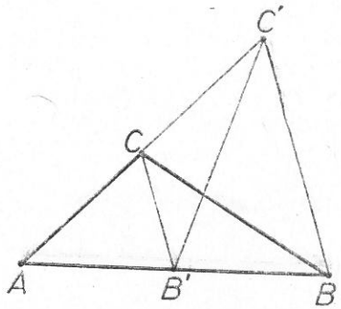


Fig. VII.22

Fie S, S' două suprafețe poligonale avînd ariile egale. Fiecare din aceste suprafețe este congruentă prin completare cu o suprafață triunghiulară. Fie T respectiv T' suprafețe triunghiulare congruente prin completare cu S și S'. Atunci aria lui T va fi egală cu aria lui T'. Putem presupune că triunghiurile care limitează suprafețele T, T' sînt congruente, deoarece două triunghiuri cu ariile egale sînt congruente prin completare cu două triunghiuri congruente între ele. Rezultă că *două suprafețe poligonale de arii egale sînt congruente prin completare cu un același triunghi*, deci sînt congruente prin completare una cu cealaltă.

Fie S, S' două suprafețe poligonale ce nu sînt congruente prin completare. Din proprietatea precedentă rezultă că S și S' au ariile neegale. Deci:

Dacă două suprafețe poligonale nu sînt congruente prin completare, atunci ele au ariile diferite.

Exerciţii

1. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea şi fie k raportul de asemănare, deci

$$k = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

În acest caz, raportul ariilor suprafeţelor limitate de trilaterele ABC, $A'B'C'$ este egal cu k^2.

2. Fie P, P' două poligoane asemenea şi fie S, S' suprafeţele limitate de ele. Atunci raportul ariilor suprafeţelor S, S' este egal cu pătratul raportului de asemănare a poligoanelor S, S'.

3. Să se exprime aria suprafeţei limitate de un poligon regulat cu n laturi în funcţie de n şi de raza cercului circumscris poligonului, şi apoi în funcţie de n şi de raza cercului înscris poligonului.

(Indicaţie. Se vor folosi funcţii trigonometrice).

4. Să se arate că două suprafeţe poligonale congruente prin descompunere au ariile egale.

În încheierea acestui paragraf, vom menţiona o teoremă importantă datorată lui F. Bolyai, tatăl lui I. Bolyai, unul din descoperitorii geometriilor neeuclidiene:

Dacă două suprafeţe poligonale au ariile egale, atunci cele două suprafeţe sînt congruente prin descompunere.

Demonstraţiile proprietăţilor date mai sus, cu excepţia teoremei lui F. Bolyai, pot fi făcute utilizînd numai axiomele de incidenţă, ordonare şi congruenţă şi axioma de paralelism, împreună cu consecinţele ce rezultă din aceste axiome. Hilbert a arătat că, pentru demonstrarea teoremei lui F. Bolyai, este necesară introducerea axiomei lui Arhimede (cap. I, § 15).

2. Suprafeţe poliedrale

Suprafeţele poliedrale constituie o clasă importantă de figuri în spaţiu. Această clasă conţine o mare varietate de posibilităţi, deosebit de interesante.

Vom începe prin a descrie cele mai simple tipuri de suprafeţe poliedrale.

Suprafeţe poliedrale conice. Să considerăm $n+1$ puncte distincte O, A_1, A_2, ..., A_n nesituate în acelaşi plan, astfel ca interioarele triunghiurilor (fig. VII.23).

(1) OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_iA_{i+1}, $OA_{i+1}A_{i+2}$, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1

să fie disjuncte două cîte două. În acest caz, vom spune că mulţimea dată de reuniunea interioarelor triunghiurilor (1), a laturilor acestor triunghiuri şi a vîrfurilor lor, este o *suprafaţă poliedrală conică.*

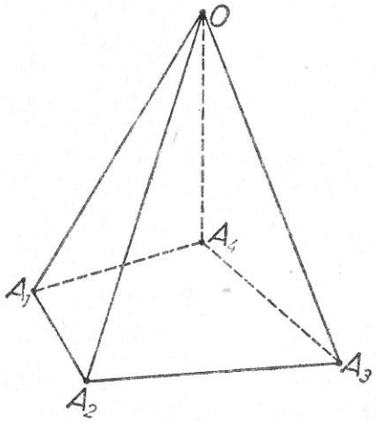


Fig. VII.23

Reamintim că o *suprafaţă poligonală* este limitată de un poligon convex P şi este dată de reuniunea interiorului poligonului P cu laturile şi cu mulţimea vîrfurilor lui P (fig. VII.24).

Suprafeţele poligonale sînt suprafeţe poliedrale particulare.

O suprafaţă poliedrală conică este o reuniune de suprafeţe trilatere, avînd un vîrf comun şi astfel ca intersecţia a două oarecare din aceste suprafeţe trilatere se reduce la acest vîrf sau este o latură comună.

Noţiunea de suprafaţă poliedrală conică poate fi generalizată, înlocuind triunghiurile prin poligoane convexe.

Definiţie. **Vom numi stea de centru O orice reuniune de suprafeţe poligonale S_1, S_2, ..., S_i, S_{i+1}, ..., S_n, avînd următoarele proprietăţi:** (fig. VII.25):

1. *Poligoanele care limitează suprafeţele S_i au punctul O ca vîrf comun.*

2. *Intersecţiile $S_1 \cap S_2$, $S_2 \cap S_3$, ..., $S_{i-1} \cap S_i$, ..., $S_{n-1} \cap S_n$, $S_n \cap S_1$ sînt formate din cîte o latură comună, închisă la capete.*

3. *Intersecţiile $S_i \cap S_j$, diferite de cele ce apar în condiţia 2, se reduc la vîrful comun O.*

4. *Suprafeţele S_1, ..., S_n nu sînt situate în acelaşi plan,* şi $n > 2$.

Suprafeţele S_1, ..., S_n au fiecare o frontieră şi un interior.

Vom nota prin $F(T)$ poligonul care limitează suprafaţa poligonală T şi prin $\overset{\circ}{T} = T - F(T)$ interiorul lui T.

Fie W o mulţime finită de suprafeţe poligonale, $W = \{S_1, ..., S_k\}$. Vom spune că W este un sistem de suprafeţe. Pentru fiecare indice i, vom nota prin $F(S_i)$ poligonul care limitează suprafaţa poligonală S_i. Laturile închise ale poligoanelor $F(S_i)$ vor fi numite *muchii* ale sistemului de suprafeţe W, iar vîrfurile poligoanelor $F(S_i)$ vor fi numite *vîrfuri* ale lui W. Mulţimile S_i vor fi numite feţe închise, iar mulţimile $\overset{\circ}{S}_i = S_i - F(S_i)$ vor fi numite *feţe deschise* ale sistemului W.

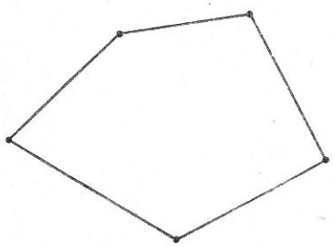


Fig. VII.24

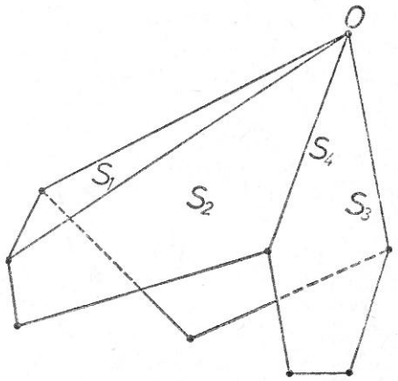


Fig. VII.25

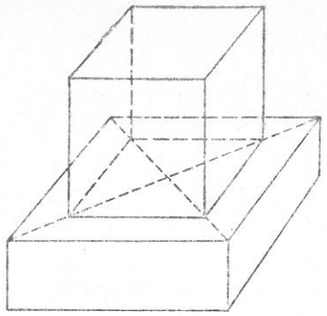


Fig. VII.26

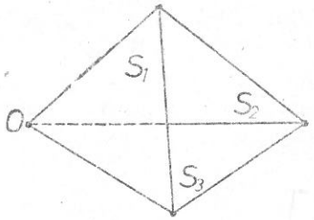


Fig. VII.27

Definiție. Se numește suprafață poliedrală închisă orice sistem de suprafețe poligonale $W = \{S_1, ..., S_n\}$, care îndeplinește următoarele condiții:

I. Fețele deschise ale sistemului W sînt disjuncte două cîte două și intersecția a două fețe închise ale lui W este fie o muchie comună fie un vîrf comun, fie mulțimea vidă.

II. Pentru fiecare vîrf al lui W, fețele lui W care conțin acel vîrf formează o stea.

III. Dacă scoatem din W o parte oarecare din fețele sale, se obține un sistem W', care nu mai verifică ambele condiții I și II.

Exerciții

1. Să se dea un exemplu de sistem de suprafețe poligonale care verifică condiția I (fig. VII.26).

2. Să se dea un exemplu de sistem W care nu verifică condiția I, (fig. VII. 27).

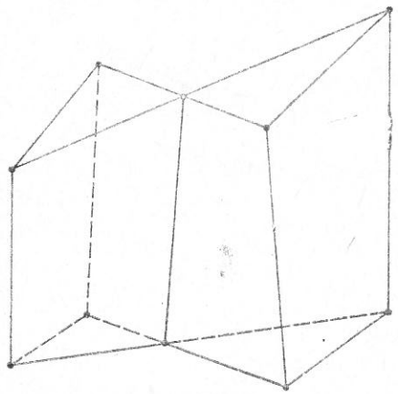


Fig. VII.28

3. Să se dea exemplu de sistem W care nu verifică condiția III (fig. VII.28).

4. Să se dea exemplu de sistem W care verifică condițiile I, II și III.

5. Din condiția II să se deducă că fiecare muchie a sistemului w este latură la exact două fețe ale lui W.

6. Să se dea exemple de sisteme W, care verifică două din condițiile I, II, III, dar nu verifică a treia din aceste condiții.

7. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Să se arate că suprafețele poligonale limitate de trilaterele ABC, BCD, CDA, ABD formează o suprafață poliedrală închisă (fig. VII.29).

Definiție. Suprafețele poliedrale închise formate din patru fețe se numesc suprafețe tetraedrale.

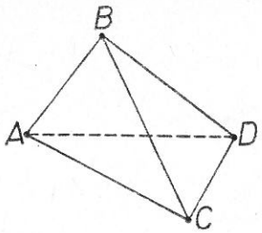


Fig. VII.29

8. Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ două paralelograme situate în două plane paralele, astfel ca vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ să fie echipolenți doi cîte doi. Se formează atunci, pe lîngă cele două paralelograme, alte patru paralelograme $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$. Să se arate că cele șase paralelograme limitează șase suprafețe patrulatere, care formează o suprafață poliedrală închisă. Să se indice numărul muchiilor acestei suprafețe (fig. VII.30).

Definiție. O suprafață poliedrală cu șase fețe, situate două cîte două în plane paralele, se numește suprafață paralelipipedică.

9. Fie P un poligon cu n vîrfuri $A_1, ..., A_n$, situat într-un plan p, și fie O un punct exterior planului p. Să se arate că sistemul de suprafețe poligonale (fig. VII.31).

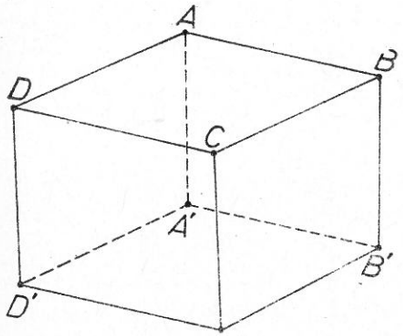


Fig. VII.30

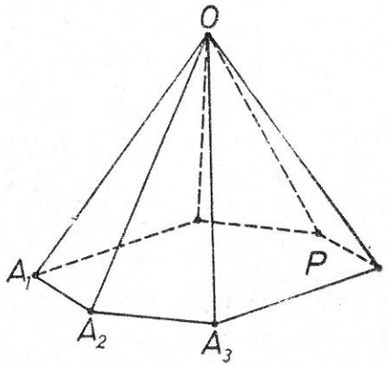


Fig. VII.31

$$W = \{OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_{n-1}A_n, OA_nA_1, P\}$$

este o suprafață poliedrală închisă, care conține o suprafață poliedrală conică.

Definiție. O suprafață poliedrală închisă, formată dintr-o suprafață poligonală $[P]$ și dintr-o suprafață poliedrală conică, se numește suprafață piramidală. Dacă poligonul P are n vîrfuri, atunci suprafața piramidală va avea $n + 1$ vîrfuri. Dacă $n > 3$, vîrful suprafeței piramidale care nu aparține poligonului P se numește vîrful piramidei, iar suprafața $[P]$ se numește baza piramidei.

10. Să se arate că, pentru orice număr întreg $n \geqslant 3$, există o suprafață poliedrală închisă, avînd $n + 2$ vîrfuri, $3n$ muchii și $2n$ fețe trilatere.

(Indicație. Se consideră reuniunea a două suprafețe piramidale avînd aceeași bază și se scoate interiorul bazei comune (fig. VII.32).)

11. Fie $P = A_1A_2 \dots A_n$, $P' = A_1'A_2' \dots A_n'$ două poligoane convexe situate în două plane paralele, astfel ca vectorii $\overrightarrow{A_1A_1'}$, $\overrightarrow{A_2A_2'}$, ..., $\overrightarrow{A_nA_n'}$ să fie paraleli doi cîte doi. Să se arate că suprafețele poligonale $\{P\}$, $\{P'\}$ sînt fețe ale unei suprafețe poliedrale închise cu $n + 2$ fețe, din care n fețe sînt fețe patrulatere limitate de paralelograme (fig. VII.33).

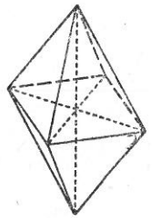


Fig. VII.32

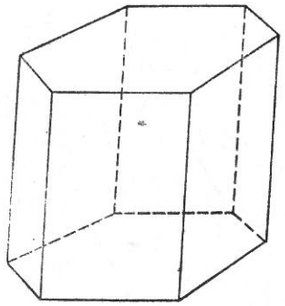


Fig. VII.33

Definiție. O suprafață poliedrală închisă, formată din $n + 2$ fețe, din care n sînt limitate de paralelograme, se numește suprafață prismatică.

O suprafață prismatică are două fețe poligonale situate în două plane paralele, și celelalte fețe sînt limitate de paralelograme.

Dacă $n \neq 4$, fețele care nu sînt limitate de paralelograme se numesc *bazele* suprafeței prismatice, iar fețele limitate de paralelograme se numesc *fețe laterale.*

Dacă $n = 4$, suprafața prismatică se numește *patrulateră.* Paralelipipedele sînt suprafețe prismatice patrulatere particulare, în care toate fețele sînt limitate de paralelograme.

O suprafață prismatică avînd bazele trilatere, se numește *suprafață prismatică trilateră* sau triunghiulară.

Uneori, suprafețele piramidale sînt numite piramide, iar suprafețele prismatice sînt numite prisme. Dar tot piramide, respectiv prisme, sînt numite, în aceleași texte, și solidele limitate de aceste suprafețe. Este însă necesar să se facă distincție între suprafețe și solide, atît în limbajul adoptat, cît și în conținutul textelor geometrice. În consecință, vom vorbi despre suprafețe piramidale, prismatice, conice etc. și apoi de corpuri (sau solide) piramidale, prismatice, conice etc.

Suprafețele piramidale și suprafețele prismatice avînd bazele convexe, fac parte dintr-o clasă importantă de suprafețe poliedrale, fiind *suprafețe poliedrale convexe.*

Definiție. O suprafață poliedrală $W = \{S_1, \dots, S_k\}$ se numește convexă, dacă, pentru fiecare indice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, interioarele suprafețelor S_j, $j \neq i$, sînt situate de o aceeași parte a planului care conține suprafața S_i (fig. VII.34).

Exercițiu. Să se arate că suprafețele poliedrale piramidale prismatice avînd baze convexe sînt suprafețe poliedrale convexe.

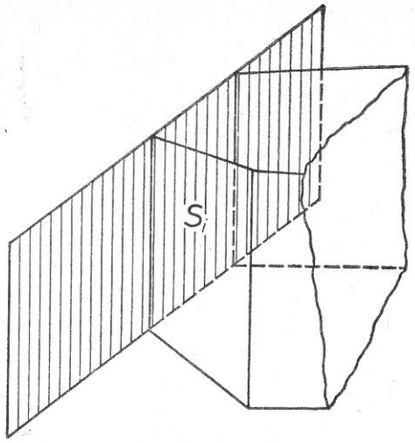


Fig. VII.34

Suprafețele poliedrale convexe sînt foarte variate. Ele se întîlnesc frecvent în Natură, de exemplu sub formă de *cristale.* Există 32 de clase de cristale, care se împart în 6 sisteme cristalografice, care au următoarele denumiri: sistemul regulat, sistemul tetragonal, sistemul hexagonal, sistemul rombic, sistemul monoclin și sistemul triclin. Primul sistem conține 5 clase, al doilea 7 clase și următoarele 7, respectiv 8, 3 și 2 clase. Aceste sisteme se disting prin numărul de plane de simetrie, și prin numărul de axe de simetrie ale fiecărui cristal. Proprietățile de simetrie ale unui cristal se manifestă prin proprietăți fizice ale corpurilor care cristalizează. Astfel comportarea unei raze de lumină care străbate o substanță aflată în stare cristalină depinde de sistemul și de clasa cristalelor care apar în acea substanță. Figurile 35—47 reprezintă cristale din cele 6 sisteme cristalografice.

Există și suprafețe poliedrale neconvexe. De exemplu, dacă se consideră un cub (paralelipiped cu muchiile congruente două cîte două și paralele sau perpendiculare două cîte două) și dacă O este un punct interior cubului și dacă $ABCD$ este poligonul care limitează una din fețele cubului, atunci putem

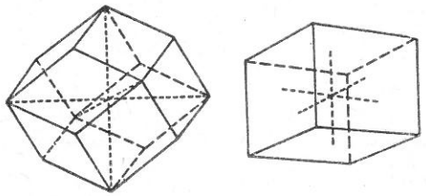


Fig. VII.35 a

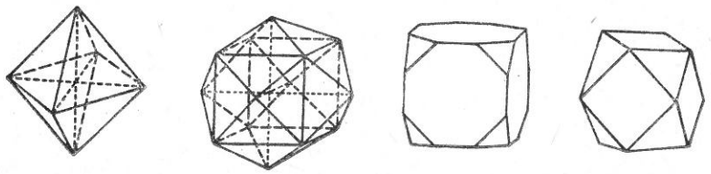


Fig. VII.35 b

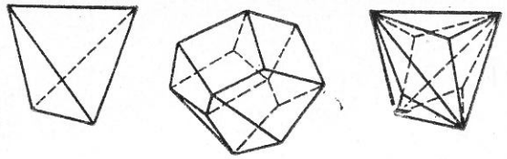


Fig. VII.36

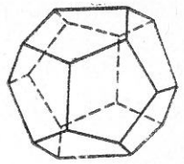


Fig. VII.37

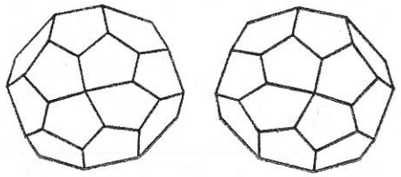


Fig. VII.38

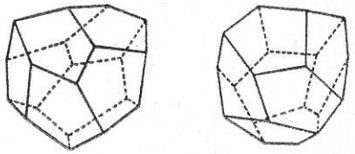


Fig. VII.39

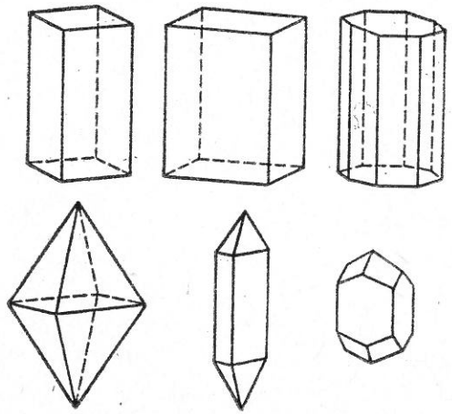


Fig. VII.40

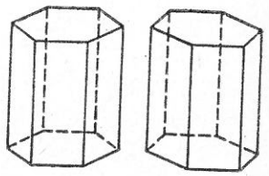


Fig. VII.41

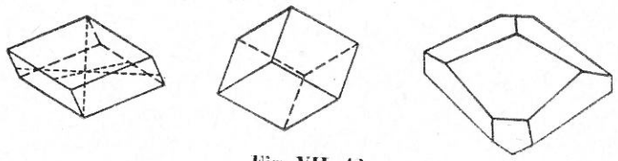


Fig. VII. 42

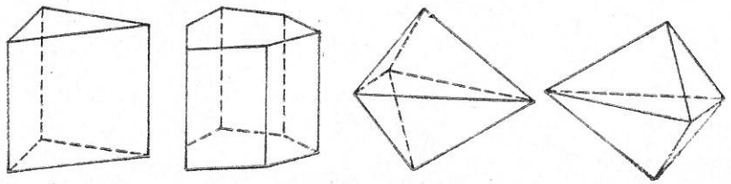


Fig. VII.43

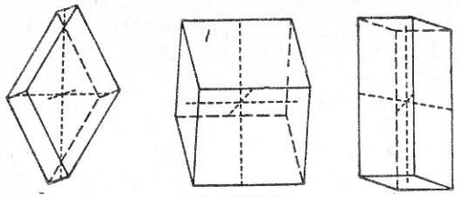


Fig. VII.44

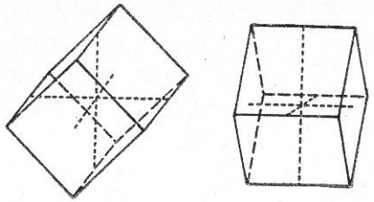


Fig. VII.45

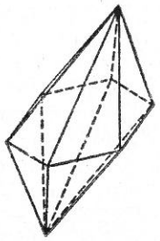


Fig. VII.46

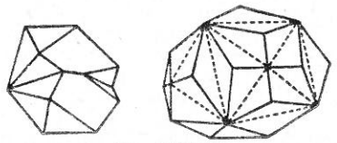


Fig. VII.47

obține o suprafață poliedrală neconvexă, scoțind din cub fața $[ABCD]$ și punînd în locul ei fețele trilatere $[OAB]$, $[OBC]$ $[OCD]$, $[ODA]$ (fig. VII.48).

Exerciții

1. Să se arate că suprața poliedrală construită mai sus este neconvexă, adică nu este convexă.

2. Să se arate că dacă suprafețele poligonale $S_1, \ldots, S_k$ formează o suprafață poliedrală, atunci $k \geqslant 4$ și suprafețele $S_1, \ldots, S_k$ sînt necoplanare.

3. Să se construiască suprafețe poliedrale cu cinci vîrfuri și suprafețe poliedrale cu șase vîrfuri. Să se arate că printre aceste suprafețe, există atît suprafețe convexe, cît și suprafețe neconvexe.

Figura VII.49 reprezintă o suprafață poliedrală cu 12 fețe $[AA'B'B]$, $[BB'C'C]$, $[CC'D'D]$, $[DD'A'A]$, $[ABLK]$, $[A'B'LK]$, $[B'C'ML]$, $[BCML]$,

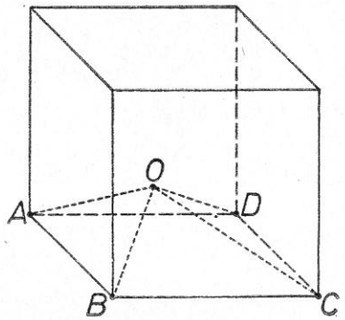


Fig. VII.48

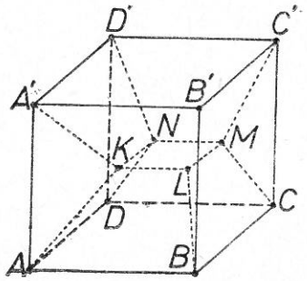


Fig. VII.49

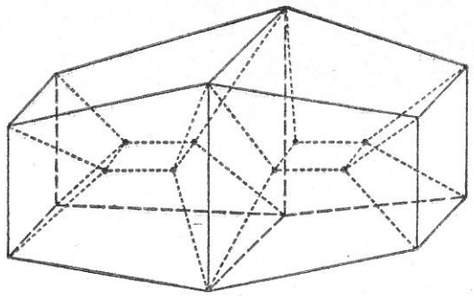


Fig. VII.50

[$CDNM$], [$C'D'NM$], [$DAKN$], [$D'A'KN$], 12 vîrfuri și 24 muchii; figura VII.50 reprezintă o suprafață poliedrală cu 22 fețe, 44 muchii și 20 vîrfuri.

Complemente (facultativ)

Suprafețele poliedrale se deosebesc prin numărul de fețe, F, numărul de muchii M, numărul de vîrfuri V, prin numărul de laturi al fiecărei fețe, prin numărul de muchii care pleacă din fiecare vîrf, numărul de fețe care au un vîrf dat ca vîrf comun și prin mărimea fiecărei fețe și a fiecărei muchii.

Dacă nu ne interesează mărimea unei suprafețe poliedrale, ci numai forma ei, adică felul în care se îmbină fețele acelei suprafețe două cîte două, putem reprezenta suprafețele poliedrale cu ajutorul unor scheme, în modul următor:

Să presupunem că o suprafață poliedrală W are F fețe $S_1, ..., S_F$, apoi M muchii $L_1, ..., L_M$ și V vîrfuri $P_1, ..., P_V$. Să reprezentăm atunci aceste elemente prin $F + M + V$ puncte așezate într-un același plan (fig. VII.51). Convenim să notăm aceste puncte prin aceleași litere, cu aceeași indici pe care i-am folosit pentru notarea fețelor, muchiilor și vîrfurilor corespunzătoare. Apoi unim fiecare punct L_i cu cele două puncte, care reprezintă cele două fețe ce au L_i ca latură; și unim apoi punctul L_i cu cele două puncte, care reprezintă cele două capete ale muchiei L_i. Figura astfel obținută va fi numită *diagrama* asociată suprafeței poliedrale W. O așezare atentă a punctelor diagramei conduce uneori la configurații interesante.

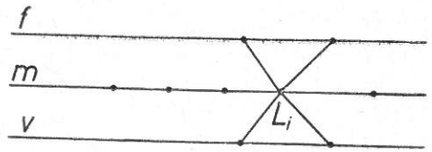


Fig. VII.51

Cunoașterea diagramei asociate unei suprafețe poliedrale permite construirea acelei suprafețe, ca formă, dar nu ca mărime.

Exerciții

1. Să se deseneze diagrama asociată unei suprafețe tetraedrale, deci unei suprafețe cu patru fețe, șase muchii și patru vîrfuri.

2. Să se deseneze o suprafață poliedrală W știind că diagrama asociată acestei suprafețe este cea dată în figura VII.52.

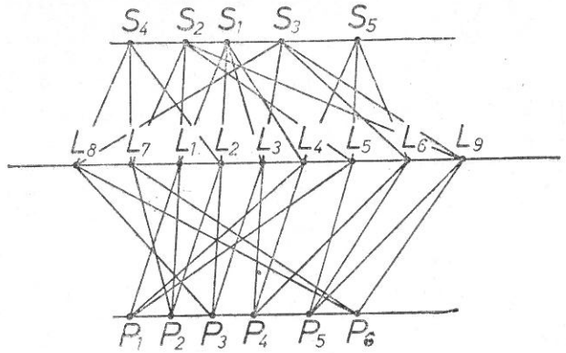


Fig. VII.52

Exerciții

1. Să se arate că nu se pot construi în spațiu șase puncte A, B, C, A', B', C' astfel, încît trilaterele ABC, $AA'C'$, $AA'B'$, $AB'C'$, $CC'B'$, $CC'A'$, $CA'B$, $BB'A'$, $BB'C'$, $BC'A$ să limiteze fețele unei suprafețe poliedrale.

(*Indicație.* Se va da o demonstrație experimentală).

2. Există suprafețe poliedrale avînd numai fețe triunghiulare și numărul acestora fiind 5?

3. Fie [$OABC$] un tetraedru și fie A', B', C', A'', B'', C'' mijloacele muchiilor $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$, $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Să se arate că tetraedrele [$OA'B'C'$], [$A'AC''B''$], [$B'C''BA''$], [$C'B''A''C$] sînt congruente două cîte două. Să se descompună apoi octaedrul [$A'B'C'A''B''C''$] în perechi de piramide congruente. Cîte astfel de descompuneri există?

4. Fie P, P' două corpuri poliedrale convexe avînd ca mulțimi de vîrfuri mulțimile V și V'. Să se arate că dacă mulțimile V, V' sînt congruente, atunci și mulțimile P, P' sînt congruente.

5. Să se descompună un cub în șase piramide congruente două cîte două.

3. Corpuri convexe

Fie $W = \{S_1, ..., S_k\}$ o suprafață poliedrală convexă. Notăm prin p_i planul care conține fața S_i și prin E_i semispațiul închis, care conține fețele lui W și care este limitat de planul p_i, pentru $i = 1, 2, ..., k$.

Definiție. **Se numește corp convex limitat de suprafața poliedrală W intersecția $K(W)$ a semispațiilor închise $E_1, ..., E_k$, care conțin fețele lui W și sînt limitate de planele ce conțin cîte o față a lui W. Deci**

$$K(W) = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_k. \tag{1}$$

Dacă notăm $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k$, spunem că S este frontiera corpului convex $K(W)$ și că mulțimea $I(W) = K(W) - S$ este interiorul lui W sau interiorul lui $K(W)$.

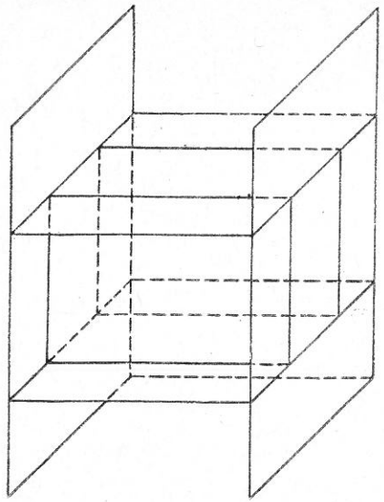


Fig. VII.53

Teoremă. Orice corp convex, limitat de o suprafață poliedrală convexă, și interiorul unui astfel de corp sînt mulțimi convexe (fig. VII.53).

Demonstrație. Orice corp convex de forma $K(W)$ este o intersecție de semispații închise, deci de mulțimi convexe. Dar orice intersecție de mulțimi convexe este o mulțime convexă. Deci $K(W)$ este o mulțime convexă.

Faptul că și interiorul unui corp convex $K(W)$ este o mulțime convexă rezultă din următoarea

Propoziție. Interiorul I al unui corp convex $K(W)$ este egal cu intersecția semispațiilor deschise E'_i, care sînt limitate de planele p_i ale fețelor suprafeței W și care sînt conținute în semispațiile închise din intersecția (1), $E'_i \subset E_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Exerciții

1. Să se arate că dacă dintr-un corp convex $K(W)$ se scoate una sau mai multe fețe închise ale suprafeței W, mulțimea rămasă este convexă.

2. Fie M un punct interior corpului convex $K(W)$ și fie d o dreaptă ce trece prin M. Să se arate că d intersectează frontiera S a lui $K(W)$ în două puncte A, B astfel încît $|AB| \subset K(W) - S$ (fig. VII.54).

3. Fie $K(W)$ un corp convex și fie E un semispațiu închis limitat de un plan ce trece printr-un punct interior lui $K(W)$. Să se arate că intersecția $K(W) \cap E$ este un corp convex asociat unei suprafețe poliedrale W'. Să se arate apoi că mulțimea $K(W) - K(W')$ este convexă, dar nu este un corp convex. Ce trebuie să adăugăm mulțimii $K(W) - K(W')$ pentru a obține un corp convex? (fig. VII.55).

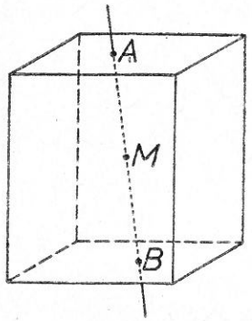


Fig. VII.54

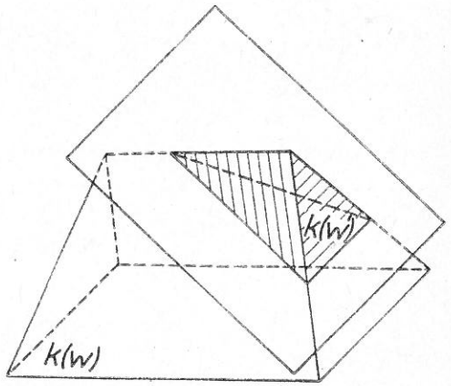


Fig. VII.55

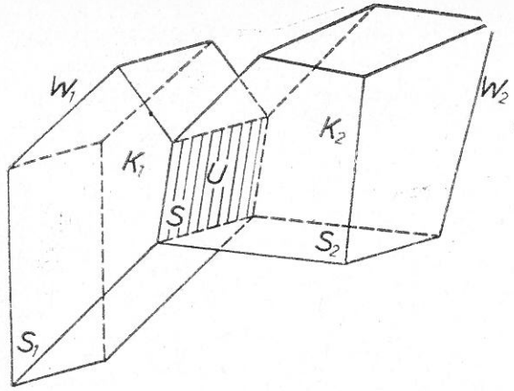


Fig. VII.56

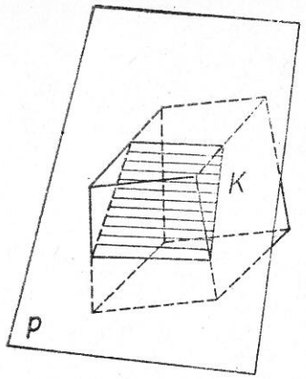


Fig. VII.57

4. Fie K_1, K_2 două corpuri convexe, asociate suprafețelor poliedrale convexe W_1, W_2, și avînd frontierele S_1 respectiv S_2. Presupunem că intersecția $k_1 \cap k_2$ este o față comună S și să notăm prin U interiorul acestei fețe. Să se arate că fețele din $W_1 \cup W_2$, diferite de S, formează o suprafață poliedrală W, astfel încît reuniunea fețelor lui W este egală cu mulțimea $(S_1 \cup S_2) - U$ (fig. VII.56).

(Indicație. Pentru rezolvarea acestor probleme, elevii vor începe prin a considera cazul unuia din corpurile convexe cele mai simple, de exemplu vor presupune că suprafața care limitează corpul convex este un paralelipiped, o suprafață prismatică sau o suprafață piramidală. Se recomandă, ca și în alte situații, confecționarea de modele în spațiu).

5. Fie K un corp convex asociat unei suprafețe poliedrale și fie p un plan ce trece printr-un punct interior lui K. Să se arate că intersecția $K \cap p$ este o suprafață poligonală convexă (fig. VII.57).

6. Fie $K(W)$, $K(W')$ două corpuri convexe asociate suprafețelor poliedrale convexe W și W'. Să se arate că dacă cele două corpuri convexe au un punct interior comun, atunci intersecția lor este corpul convex al unei a treia suprafețe poliedrale convexe. Să se exemplifice acest rezultat, considerînd cazurile unor corpuri convexe cît mai simple (fig. VII. 58, 59).

7. Fie W, W' două suprafețe poliedrale convexe, avînd o față comună S_0. Ce condiție trebuie să îndeplinească cele două suprafețe, pentru ca reuniunea $K(W) \cup K(W')$ să fie un corp convex asociat unei suprafețe poliedrale?

(Indicație. Se vor căuta condițiile în care suprafața poliedrală $W'' = (W \cup W') - S_0$ este convexă (fig. VII. 60.)

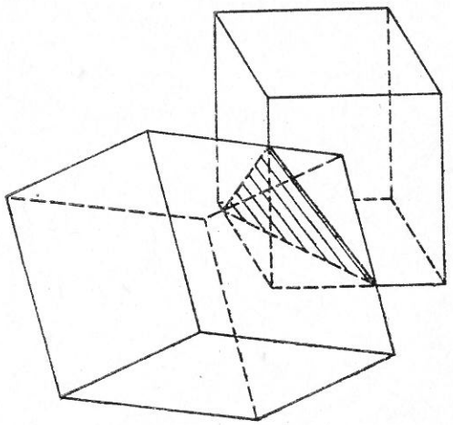


Fig. VII.58

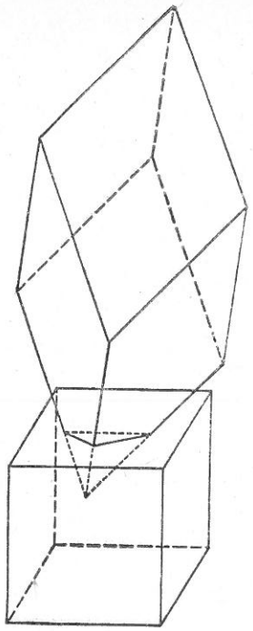


Fig. VII.59

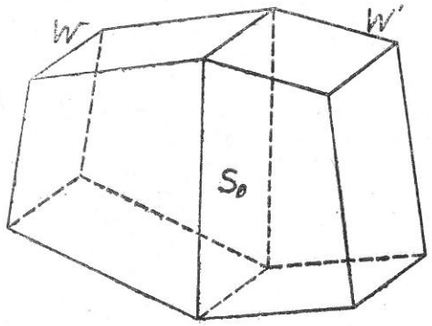


Fig. VII.60

4. Volumele corpurilor convexe

Pentru a defini și calcula volumele corpurilor convexe, vom urma o cale asemănătoare cu cea adoptată în cazul definirii ariilor suprafețelor poligonale convexe.

Definiție. **Fie $K_0, K_1, \ldots, K_r$ un sistem de corpuri convexe astfel încît $K_0 = K_1 \cup \ldots \cup K_r$. Vom spune că cele r corpuri $K_1, \ldots, K_r$ realizează o descompunere a corpului K_0 și că ultimul corp este egal cu suma corpurilor $K_1, \ldots, K_r$, dacă oricare două din corpurile $K_1, \ldots, K_r$ au interioarele disjuncte. Vom exprima această proprietate prin formula**

(1) $K_0 = K_1 + \ldots + K_r$ (fig. VII.61).

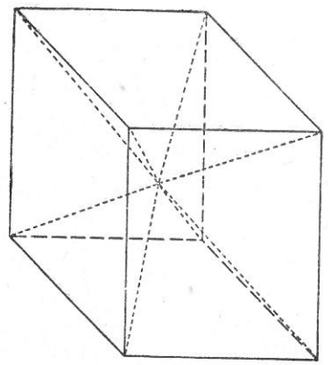


Fig. VII.61

Deci relația (1) este echivalentă, prin definiție, cu relațiile

(2) $K_0 = K_1 \cup \ldots \cup K_r$; $\operatorname{Int} K_i \cap \operatorname{Int} K_j = \emptyset$, dacă $i \neq j$ și $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

În acest paragraf, vom considera numai corpuri convexe asociate unor suprafețe poliedrale. Pentru simplificarea vorbirii, vom numi

poliedru, orice corp convex asociat unei suprafețe poliedrale. Dacă P este poliedrul asociat suprafeței poliedrale $W = \{S_1, \ldots, S_k\}$, vom spune că $S_1, \ldots S_k$ sînt *fețele* lui P, iar muchiile lui W vor fi numite *muchii* ale lui P și vîrfurile lui W vor fi numite *vîrfuri* ale lui P.

Definiție. **Două poliedre P, P' se zic congruente prin descompunere dacă ele admit două descompuneri**

$$P = P_1 + \ldots + P_r, \quad P' = P'_1 + \ldots + P'_r,$$

astfel încît, pentru fiecare indice $i \in \{1, \ldots, r\}$ să avem $P_i \equiv P'_i$, deci poliedrul P_i să fie congruent cu poliedrul P'_i.

Exemplu. Numim paralelipiped un corp convex limitat de o suprafață paralelipipedică. Un paralelipiped P se numește dreptunghic, dacă muchiile sale sînt, două cîte două, fie paralele, fie perpendiculare.

Fie P un paralelipiped dreptunghic avînd muchiile congruente cu trei segmente de forma am, bm, cm, unde m este segmentul etalon, iar a, b, c sînt trei numere raționale pozitive. Fie P' un al doilea paralelipiped dreptunghic, avînd muchiile congruente cu segmentele $a'm$, $b'm$, $c'm$, unde a', b', c' sînt trei numere raționale pozitive. Dacă $abc = a'b'c'$ atunci poliedrele P, P' sînt congruente prin descompunere (fig. VII.62).

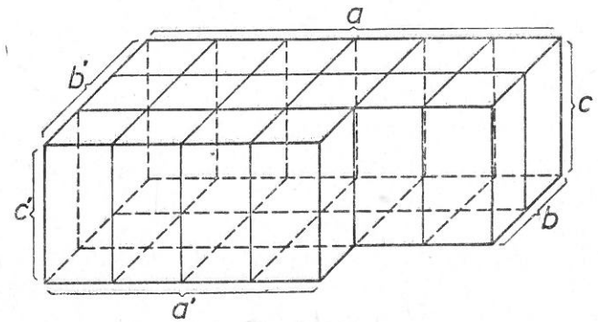


Fig. VII.62

Exerciții

1. Să se demonstreze că două paralelipipede dreptunghice P, P', avînd muchiile congruente cu multipli raționali ai segmentului etalon, astfel ca $abc = a'b'c'$ (unde a, b, c, respectiv a', b', c' sînt lungimile muchiilor lui P și ale lui P'), sînt congruente prin descompunere.

2. Fie $P, P', P_1, P_2, P'_1, P'_2$ șase poliedre astfel ca

$$P = P_1 + P_2, \quad P' = P'_1 + P'_2$$

și astfel ca P'_1 să fie congruent prin descompunere cu P_1, iar P'_2 să fie congruent prin descompunere cu P_2. În acest caz, P' este congruent prin descompunere cu P.

Definiție. **Se numește prismă orice corp convex limitat de o suprafață prismatică. Dacă planul bazei suprafeței prismatice este per-**

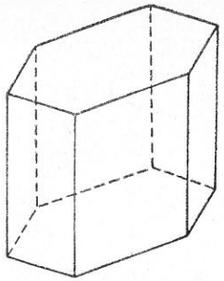


Fig. VII.63

pendicular pe muchiile paralele ale prismei, atunci prisma se numește dreaptă (fig. VII.63)

Exerciții

1. Să se arate că muchiile paralele ale unei prisme sînt congruente două cîte două.

2. Să se arate că două prisme, avînd bazele $[A_1A_2 \dots A_n]$, $[B_1B_2 \dots B_n]$ respectiv $[A_1'A_2' \dots A_n']$, $[B_1'B_2' \dots B_n']$, astfel ca $A_iB_i = A_i'B_i'$ și $|A_iB_i| \equiv |A_i'B_i'|$ pentru $i = 1,2, \dots, n$, sînt congruente prin descompunere (fig. VII.64).

(*Indicație*. Putem presupune că $A_1 = A_1'$ și $B_1 = B_1'$. În acest caz, planele bazelor celor două prisme dau descompunerile dorite.)

Definiție. Se spune că două poliedre P, P' sînt congruente prin completare dacă există două poliedre Q, Q' astfel încît Q, Q' să fie congruente prin descompunere și $P + Q$, $P' + Q'$ să fie poliedre congruente prin descompunere.

Exerciții

1. Să se arate că dacă poliedrele P, Q, R, P', Q', R' sînt astfel încît: $P = Q + R$, $P' = Q' + R'$, Q este congruent prin descompunere cu Q' și R este congruent prin completare cu R', atunci P este congruent prin completare cu P'.

2. Să se arate că dacă poliedrele P, Q, R, P', Q', R' sînt astfel încît $P = Q + R$, $P' = Q' + R'$, P este congruent prin descompunere cu P' și Q este congruent prin descompunere cu Q', atunci R va fi congruent prin completare cu R',

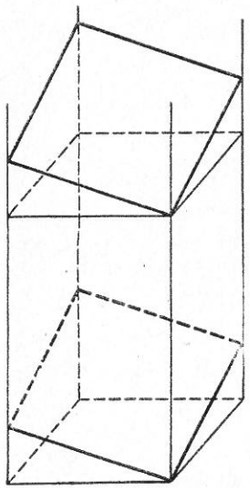


Fig. VII.64

Problemă rezolvată. Fie P, P' două paralelipipede avînd baza comună $ABCD$ și astfel încît fețele $PQRS$, $P'Q'R'S'$ opuse acestei fețe în P, respectiv P', să aibă muchiile $|PQ|$, $|P'Q'|$ coliniare; atunci paralelipipedele P, P' sînt congruente prin completare (fig. VII.65).

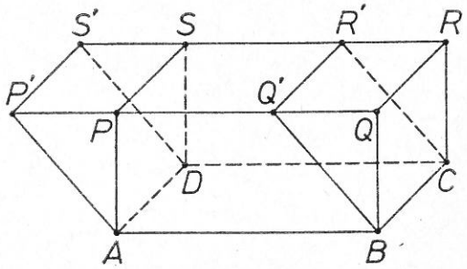


Fig. VII.65

Demonstrație. Presupunem că notațiile vîrfurilor au fost făcute în așa fel, încît $\overrightarrow{AP} \sim \overrightarrow{BQ} \sim \overrightarrow{CR} \sim \overrightarrow{DS}$. În acest caz, dacă $PQ = P'Q'$, atunci avem și $\overrightarrow{AP'} \sim \overrightarrow{BQ'} \sim \overrightarrow{CR'} \sim \overrightarrow{DS'}$. Prismele cu bazele $[APP']$, $[BQQ']$ și cu muchiile $|AD|$, $|BC|$ sînt congruente. Paralelipipedul P, completat cu a doua prismă, dă același corp convex cu cel dat completînd paralelipipedul P' cu prima prismă. Deci cele două paralelipipede sînt congruente prin completare.

Problemă rezolvată. Dacă paralelipipedele P, P' au baza comună $[ABCD]$ și dacă fețele $[PQRS]$, $[P'Q'R'S']$, opuse acestei baze, sînt situate în același plan p, atunci cele două paralelipipede sînt congruente prin completare (fig. VII.66).

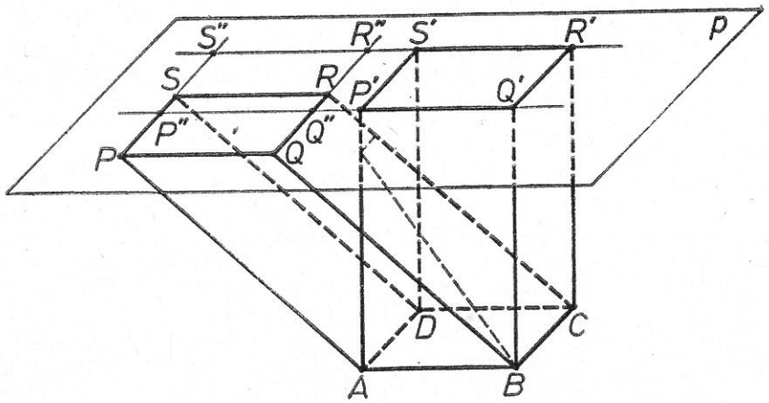


Fig. VII.66

Demonstrație. Presupunem că vîrfurile au fost notate astfel încît

$$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}, \ \overrightarrow{AP} \sim \overrightarrow{BQ} \sim \overrightarrow{CR} \sim \overrightarrow{DS}.$$

Atunci avem și $\overrightarrow{AP'} \sim \overrightarrow{BQ'} \sim \overrightarrow{CR'} \sim \overrightarrow{DS'}$. Să considerăm punctele

$$P'' \in PS \cap P'Q', Q'' \in RQ \cap Q'P', R'' \in S'R' \cap RQ, S'' \in PS \cap R'S'$$

Paralelogramul $P''Q''R''S''$ limitează o față opusă feței $[ABCD]$ într-un paralelipiped P''. Paralelipipedul P'' se găsește în situația din teorema precedentă, cu fiecare din paralelipipedele P, P'. Deci P'' este congruent prin completare atît cu P, cît și cu P'. Rezultă că P este congruent prin completare cu P'.

Problemă rezolvată. Orice prismă trilateră este congruentă prin descompunere cu un paralelipiped, care are o muchie comună cu prisma.

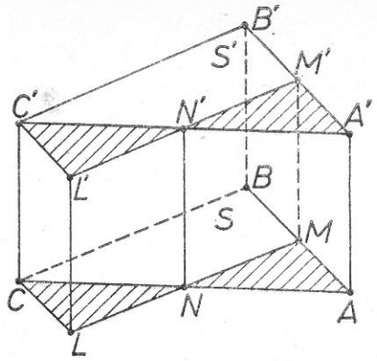


Fig. VII.67

Demonstrație (fig. VII.67). Fie ABC trilaterul care limitează baza S a prismei trilatere P. Notăm prin M și N mijloacele laturilor $|AB|$ respectiv $|AC|$ și prin L intersecția dreptei MN cu paralela dusă prin C la AB. Trilaterele AMN, CLN limitează două fețe congruente ce sînt baze în două prisme de asemenea congruente, avînd o muchie $|AA'|$ comună cu P. Aceste prisme, împreună cu prisma de bază $[BCNM]$, realizează descompunerile dorite ale prismei P și ale paralelipipedului de bază $[BCLM]$, care are muchiile $|BB'|$, $|CC'|$ comune cu P.

Problemă rezolvată. Două prisme triunghiulare P, P', avînd o bază comună $[ABC]$ și avînd fețele opuse acestei baze situate într-un acelaș plan p sînt congruente prin completare (fig. VII.68, 69).

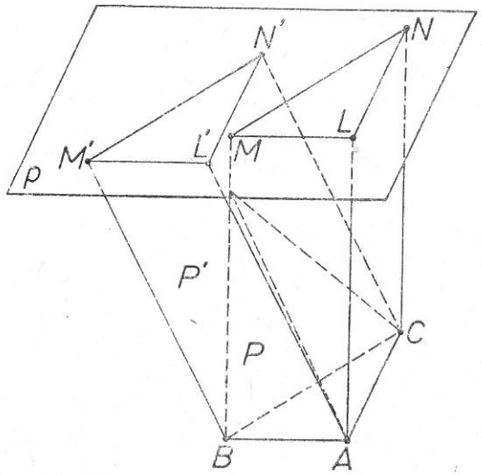


Fig. VII.68

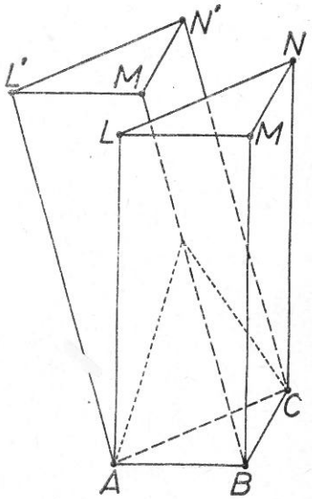


Fig. VII.69

Demonstrație. Fie $|AL|$, $|BM|$, $|CN|$ respectiv $|AL'|$, $|BM'|$, $|CN'|$ muchiile paralele ale prismelor P, P'. Punctele L, M, N, L', M', N' aparțin planului p. Fiecare din cele două prisme este congruentă prin completare cu cîte un paralelipiped Q, respectiv Q' (fig. VII.70) (vezi teorema precedentă). Paralelipipedele Q, Q' au aceeași bază și au fețele opuse acestei fețe situate în planul p. Știm că două astfel de paralelipipede sînt congruente prin completare și rezultă că și P, P' sînt congruente prin completare.

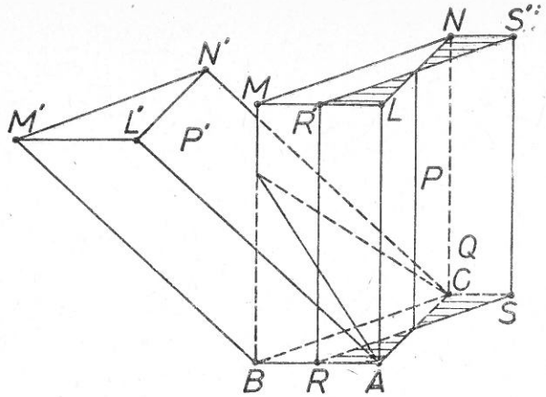


Fig. VII.70

Problemă rezolvată. Două prisme, avînd o bază comună $[A_1A_2 \ldots A_n]$ și avînd fețele opuse acestei baze situate într-un acelaș plan p, sînt congruente prin completare (fig. VII.71).

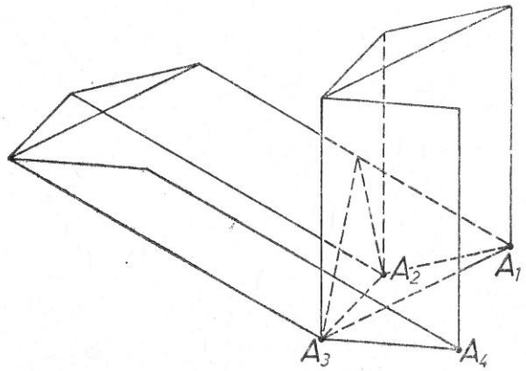


Fig. VII.71

Demonstrație. Dacă descompunem baza $[A_1A_2 \ldots A_n]$ în suprafețe triunghiulare și dacă descompunem apoi prismele date în prisme triunghiulare avînd aceste suprafețe triunghiulare drept baze, ajungem în situația la care se referă teorema precedentă. Deci prismele triunghiulare ale celor două descompuneri sînt două cîte două congruente prin completare și atunci, prismele date vor fi de asemenea congruente prin completare.

Problemă rezolvată. Să considerăm două prisme P, P' care au bazele S, S' situate într-un acelaș plan q și congruente prin completare și care au fețele opuse acestor baze situate într-un plan p (paralel cu planul q); **atunci prismele P, P' sînt congruente prin completare** (fig. VII.72).

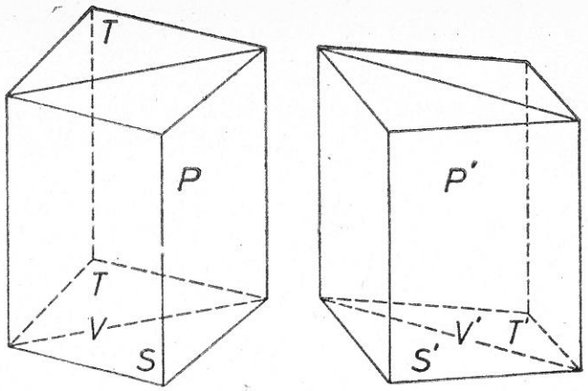


Fig. VII.72

Demonstrație. Prin ipoteză, suprafețele poligonale S și S' sînt congruente prin completare, deci există în planul q două suprafețe poligonale congruente prin descompunere T, T' și alte două suprafețe poligonale de asemenea congruente prin descompunere V, V', astfel ca $S + T = V$ și $S' + T' = V'$. Considerînd prismele avînd aceste suprafețe poligonale ca baze și avînd fețele opuse acestor baze în planul p, obținem patru prisme T_1, V_1, T_1', V_1', astfel ca: $P + T_1 = V_1$, $P' + T_1' = V_1'$, iar (T_1, T_1'), (V_1, V_1') să fie perechi de prisme congruente prin descompunere. Rezultă că prismele P, P' sînt congruente prin completare.

Știm că două suprafețe triunghiulare S, S', care au o latură comună $|AB|$ și înălțimile corespunzătoare acestei laturi congruente, sînt congruente prin completare. Deci dacă $S = [ABC]$, $S' = [A'B'C']$ și dacă $CC' \parallel AB$, atunci S și S' sînt congruente prin completare. Aplicînd teorema demonstrată anterior, deducem următorul

Corolar. Fie P, P' două prisme avînd bazele S, S' situate într-un plan q și fețele opuse acestor fețe situate într-un plan p ($p \parallel q$). Presupunem că $S = [ABC]$, $S' = [ABC']$, $CC' \parallel AB$. Atunci prismele P, P' sînt congruente prin completare. (fig. VII.73).

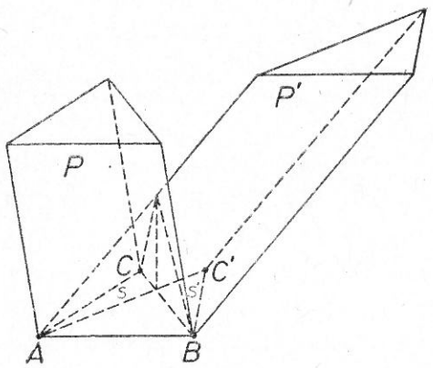
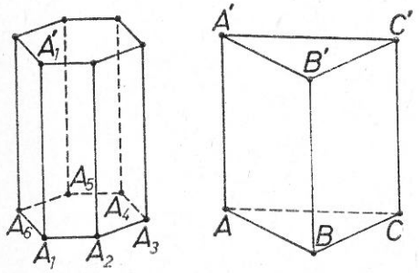


Fig. VII.73

Știm că orice suprafață poligonală este congruentă prin completare cu o suprafață triunghiulară. Dacă P este o prismă cu baza $S = [A_1 \dots A_n]$ și cu muchia $[A_1A_1']$, putem considera în planul lui S un trilater ABC, astfel ca suprafața $[ABC]$ să fie congruentă prin completare cu S și apoi putem consi-



FigVII.74

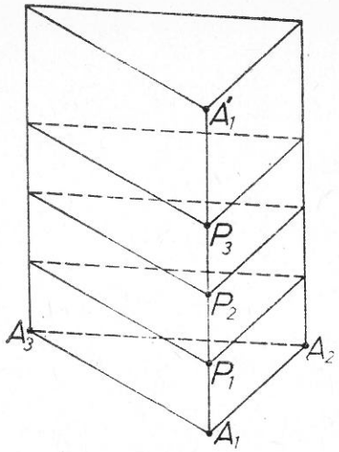


Fig. VII.75

dera prisma P' de bază $[ABC]$ și avînd muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ astfel ca $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{A_1A_1'}$. În acest caz, prismele P, P' vor fi congruente prin completare. Rezultă că:

Orice prismă este congruentă prin completare cu o prismă triunghiulară cu aceeași înălțime (fig. VII.74).

Reamintim că înălțimea unei prisme este distanța dintre cele două plane care conțin baza prismei și fața opusă bazei.

Problemă rezolvată. Fie P o prismă avînd baza $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ și muchia $|A_1A_1'|$. Fie P_1, P_2, ..., P_k puncte pe segmentul $|A_1A_1'|$, astfel încît aceste puncte să împartă segmentul $|A_1A_1'|$ în $k + 1$ segmente congruente, $|A_1P_1|$, $|P_1P_2|$, ..., $|P_kA_1'|$. Să ducem prin punctele P_i plane p_i, paralele cu planul bazei S. Atunci planele p_i descompun prisma P în $k + 1$ prisme congruente două cîte două (fig. VII.75).

Demonstrație. Oricare două din cele $k + 1$ prisme se obține una din alta printr-o translație, vectorul translației fiind vectorul $\overrightarrow{A_1P_1}$. Știm că orice translație transformă o figură într-o figură congruentă. Deci oricare două din cele $k + 1$ prisme ale descompunerii considerate sînt congruente (vezi exercițiul 2 de la pag. 183).

Notație. Notînd prin Q una oarecare din prismele descompunerii indicate mai sus, vom exprima faptul că prisma P a fost descompusă într-o sumă de $k + 1$ prisme congruente cu prisma Q scriind

$$P = (k + 1)Q = Q + Q + \dots + Q \quad (k + 1 \text{ ori}).$$

Dacă avem un paralelipiped P avînd muchiile concurente $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$, și dacă împărțim aceste muchii în m, respectiv n și p părți congruente, unde m, n, p sînt numere naturale, și dacă ducem prin punctele de diviziune

plane paralele cu fețele paralelipipedului, obținem o descompunere a acestuia în mnp paralelipipede congruente două cîte două. Notînd prin Q unul oarecare din aceste paralelipipede, vom avea

$$P = mnpQ.$$

5. Descompunerea unui tetraedru, după Euclid

(pentru cercurile de elevi)

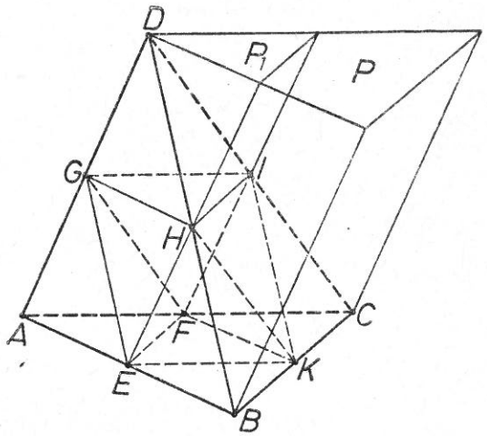
Problema determinării volumelor corpurilor din spațiu este mult mai complicată decît problema determinării ariilor suprafețelor plane. Una din complicații apare atunci cînd vrem să comparăm volumul unui tetraedru cu volumul unui paralelipiped sau a unei prisme, avînd unele elemente comune cu tetraedrul.

Euclid a abordat această problemă într-un mod deosebit de ingenios. Metoda lui Euclid a constituit punctul de plecare a numeroase teorii matematice moderne. Să descriem metoda lui Euclid, care se bazează pe o anumită descompunere a tetraedrelor și printr-un proces de trecere la limită, ce poate fi urmărit, folosind intuiția geometrică.

Fie A, B, C, D vîrfurile unui tetraedru T (fig. VII.76) și fie E, F, G, H, K, I mijloacele laturilor $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$, $|BD|$, $|BC|$ respectiv $|CD|$. Planele (EFG), (GHI) și $(FGHK)$ descompun tetraedrul T în două tetraedre $[AEFG]$, și $[DGHI]$ și în două prisme triunghiulare, avînd bazele $[BHK]$ și $[GHI]$. Cele două tetraedre sînt congruente, deoarece al doilea se obține din primul prin translația de vector $\overrightarrow{AG}$.

Exercițiu. Să se demonstreze relațiile

$$\overrightarrow{AG} \sim \overrightarrow{EH} \sim \overrightarrow{FI},\ \overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{FK} \sim \overrightarrow{GH},\ \overrightarrow{AF} \sim \overrightarrow{GI} \sim \overrightarrow{EK},\ \overrightarrow{BK} \sim \overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{HI}$$



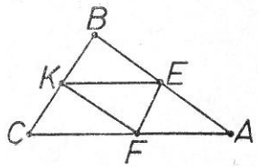


Fig. VII. 76

Tetraedrele $[AEFG]$, $[DGHI]$ sînt conținute în prisma P_1, care are baza $[AEF]$ și muchea $|AD|$. Dacă notăm prin P prisma de bază $[ABC]$ și de muche $|AD|$, atunci această prismă se poate descompune în patru prisme congruente cu prisma P_1, deoarece putem descompune baza $[ABC]$ în patru suprafețe triunghiulare congruente cu $[AEF]$. Rezultă că putem scrie

$$P = 4P_1,\ P_1 = 2[AEFG] + 2Q_1, \tag{1}$$

unde Q_1 este piramida de vîrf G și de bază $[EFIH]$.

Dacă notăm prin R_1 corpul format de cele două piramide triunghiulare de baze $[BHK]$, $[GHI]$, vom avea

$$T = 2[AEFG] + R_1 = 2T_1 + R_1, \tag{2}$$

unde $T_1 = [AEFG]$, $T = [ABCD]$.

Descompunerea aplicată tetraedrului T poate fi aplicată tetraedrului T_1. Vom obține formule analoage formulelor (1) și (2):

$$P_1 = 4P_2,\ P_2 = 2T_2 + 2Q_2, \tag{1'}$$

$$T_1 = 2T_2 + R_2. \tag{2'}$$

Continuînd să descompunem tetraedrul T_2, apoi tetraedrul rezultat T_3 și așa mai departe, obținem un șir de relații de forma

$$\begin{array}{ll} T = 2T_1 + R_1, & T = 2T_1 + R_1, \\ T_1 = 2T_2 + R_2, & 2T_1 = 4T_2 + 2R_2, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_k = 2T_{k+1} + R_{k+1}, & 2^kT_k = 2^{k+1}T_{k+1} + 2^kR_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Adunînd relațiile din ultima coloană membru cu membru, obținem

$$T = R_1 + 2R_2 + \dots + 2^kR_{k+1} + 2^{k+1}T_{k+1}. \tag{3}$$

Să scriem și formulele analoage formulei (1):

$$P_k = 4P_{k+1},\ P_{k+1} = 2T_{k+1} + 2Q_{k+1}. \tag{4}$$

Din relațiile

$$P = 4P_1,\ P_1 = 4P_2,\ P_2 = 4P_3, \dots, P_k = 4P_{k+1},$$

deducem că avem

$$P_{k+1} = 4^{-k-1}P = 2^{-2k-2}P. \tag{5}$$

Formula (4) din dreapta și formula (5) dau

$$2^{k+1}T_{k+1} = 2^kP_{k+1} - 2^{k+1}Q_{k+1} = 2^{-k-2}P - 2^{k+1}Q_{k+1}. \tag{6}$$

Să examinăm prismele care formează o descompunere a corpului R_1. Prisma de bază $[CFK]$ și muchie $|CI|$, luată de patru ori, dă o descompunere a prismei triunghiulare de bază $[ABC]$ și de muchie $|CI|$. Luînd de opt ori prisma de bază $[CFK]$ și de muchie $|CI|$, obținem deci o descompunere a

prismei Q, care are baza $[ABC]$ și muchia $|CD|$. Dar prisma Q are aceeași înălțime și aceeași bază cu prisma P, deci P și Q sînt congruente prin completare. În mod asemănător, se arată că suma a opt prisme congruente cu prisma de bază $[BHK]$ și de muchie $|BE|$ este o prismă congruentă prin completare cu prisma P. Rezultă că avem

$$4R_1 = P.$$

În mod analog, avem, pentru fiecare indice i,

$$4R_i = P_{i-1} = 4^{-i+1}P,$$

deci:

$$R_i = 4^{-i}P. \tag{7}$$

Rezultă că

$$2^{i-1}R_i = 2^{-i-1}P,$$

astfel încît formula (3) poate fi scrisă sub forma

$$T = (2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-2})P + (2^{-k-2}P - 2^{k+1}Q_{k+1}), \tag{8}$$

ultima paranteză provenind din aplicarea relației (6).

Să presupunem acuma că avem un al doilea tetraedru T', avînd baza $[A'B'C']$ congruentă prin completare cu $[ABC]$ și avînd aceeași înălțime cu T; deci, dacă presupunem că bazele $[ABC]$, $[A'B'C']$ sînt coplanare, vîrfurile D, D' ale celor două tetraedre T, T' vor fi situate într-un plan paralel cu planul (ABC). Fie P' prisma triunghiulară de bază $[A'B'C']$ și de muchie $|A'D'|$. Atunci *prismele P, P' vor fi congruente prin completare*, deoarece au bazele congruente prin completare și au aceeași înălțime. Pe de altă, pentru tetraedrul T' vom putea scrie o formulă analoagă formulei (8):

$$T' = (2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-2})P' + (2^{-k-2}P' - 2^{k+1}Q'_{k+1}). \tag{9}$$

Corpurile P, P' fiind congruente prin completare, sumele

$$S_k = (2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-2})P, \quad S'_k = (2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-2})P'$$

vor reprezenta două corpuri de asemenea congruente prin completare.

Corpurile T, T' diferă de corpurile S_k, S'_k prin corpuri ce pot fi cuprinse în prismele $2^{-k-2}P$ respectiv $2^{-k-2}P'$, care au bazele $[ABC]$, respectiv $[A'B'C']$ și muchiile $|AD_k| = 2^{-k-2} \cdot |AD|$, $|A'D'_k| = 2^{-k-2} \cdot |A'D'|$.

Definiție. **Spunem că două corpuri T, T' sînt congruente prin descompunere infinită, dacă, pentru orice număr natural k, există corpuri convexe S_k, S'_k, V_k, V'_k astfel încît să avem $T = S_k + V_k$, $T' = S'_k + V'_k$, corpurile S_k, S'_k să fie congruente prin completare, iar corpurile V_k, V'_k să fie cuprinse în două corpuri U_k, U'_k astfel ca $2^kU_k = P$, $2^kU'_k = P$, unde P este un corp convex fixat.**

6. Calculul volumelor

Rezultatele stabilite anterior ne conduc la următoarea

Teoremă (Euclid). Orice două tetraedre T, T', care au bazele congruente prin descompunere și înălțimile egale, sînt congruente prin descompunere infinită.

Aplicație. Fie P o prismă cu baza triunghiulară $[ABC]$ și cu muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$. Tetraedrele $[A'ABC]$, $[A'B'BC]$ și $[A'B'C'C]$ dau o descompunere a prismei P; cele trei tetraedre au două cîte două, perechile de baze $([AA'B], [A'B'B])$, $([B'BC], [B'C'C])$ congruente și înălțimile corespunzătoare de asemenea congruente. Deci cele trei tetraedre sînt, două cîte două, congruente prin descompunere infinită (fig. VII.77).

Exercițiu. *Să se arate că, păstrînd notațiile din demonstrația teoremei lui Euclid, distanțele de la punctele A, B' la planul $(A'BC)$ sînt egale.*

Am demonstrat mai sus că:

Orice prismă triunghiulară se poate descompune în suma a trei tetraedre congruente între ele prin descompunere infinită. Unul din aceste tetraedre are în comun cu prisma o bază și înălțimea corespunzătoare.

Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare și fie punctele $E \in (ABC)$, $F \in (ABD)$, $G \in |AB|$, $H \in |AB|$ astfel ca (fig. VII.78):

$$DE \perp (ABC),\ CF \perp (ABD),\ EG \perp AB,\ FH \perp AB.$$

Vom avea atunci și $DG \perp AB$, $CH \perp AB$, datorită teoremei celor trei perpendiculare. Rezultă $DG \parallel FH$, $GE \parallel HC$, deci unghiurile $\widehat{DGE}$, $\widehat{FHC}$ sînt

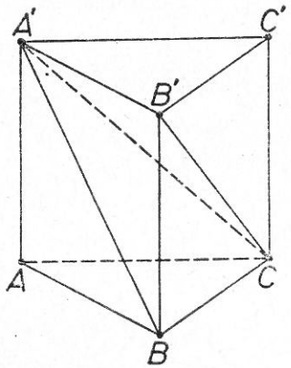


Fig. VII.77

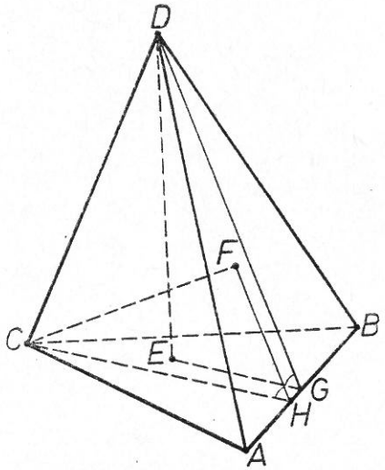


Fig. VII.78

congruente: $\widehat{DGE} \equiv \widehat{FHC}$. Aceasta înseamnă că triunghiurile dreptunghice DGE, CHF sînt asemenea, deci avem

$$\frac{d(D, G)}{d(C, H)} = \frac{d(D, E)}{d(C, F)}$$

sau $d(D, G)\, d(C, F) = d(C, H)\, d(D, E)$; rezultă egalitatea

$$d(C, F)\, d(A, B)\, d(D, G) = d(D, E)\, d(A, B)\, d(C, H)$$

Ultima formulă conduce la egalitatea

$$\text{aria}[ABD] \cdot \text{d}(C, F) = \text{aria}[ABC] \cdot \text{d}(D, E)$$

Deci:

În orice tetraedru, produsul dintre aria unei fețe S și lungimea înălțimii ce cade pe acea față are aceeași valoare, oricum am alege fața S.

Definiție. Volumul unui tetraedru $[ABCD]$ se definește prin formula

$$\boxed{\text{vol}[ABCD] = \frac{1}{3}\, \text{aria}[ABC] \cdot \text{d}(D, E)}$$

unde E este proiecția vîrfului D pe planul feței $[ABC]$.

Exerciții

1. Fie $[ABCD]$ un tetraedru și fie punctul $M \in |BC|$. Să se arate că fig. VII.79

$$\text{vol}\,[ABCD] = \text{vol}[ABDM] + \text{vol}\,[ACDM].$$

2. Să se arate că orice poliedru (corp poliedral convex) se poate descompune într-o sumă de tetraedre.

(Indicație. Descompunem fiecare față a corpului convex P într-o sumă de suprafețe triunghiulare. Apoi alegem un punct O interior corpului P și formăm toate tetraedrele ce au punctul O ca vîrf și care au ca baze suprafețele triunghiulare rezultate prin descompunerile fețelor.)

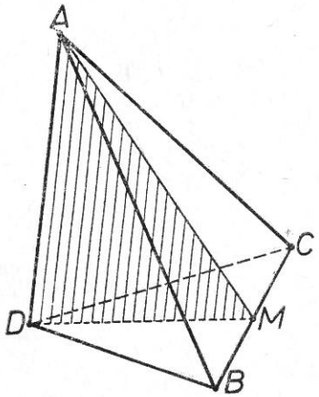


Fig. VII.79

Definiție. Numim descompunere elementară a unui tetraedru o descompunere dată de secționarea tetraedrului cu un plan dus printr-o muchie (fig. VII. 79).

Dacă se aplică unui tetraedru mai multe descompuneri elementare, se obține o descompunere astfel încît volumul tetraedrului inițial va fi egal cu suma volumelor tetraedrelor descompunerii (vezi exercițiul 1 propus anterior).

Propoziție. Fie T un tetraedru și fie p un plan care trece printr-un punct interior lui T. Fie E'' și E' cele două semispații închise limitate de planul p și fie $T' = T \cap E'$, $T'' = T \cap E''$. Corpurile

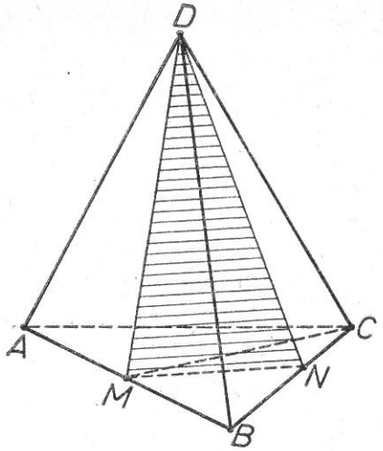


Fig. VII.80

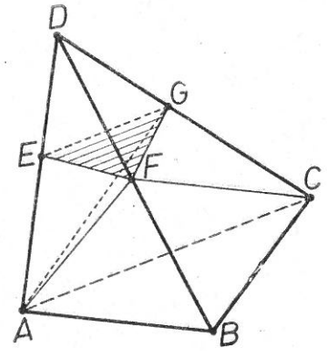


Fig. VII.81

convexe T' și T'' admit descompuneri în tetraedre, astfel încît suma volumelor acestor tetraedre să fie egală cu volumul tetraedrului T.

Demonstrație. Planul p poate fi față de T în una din următoarele situații:

1) p poate conține o muchie a lui T. Atunci $T = T' + T''$ este o descompunere elementară a lui T și vol T = vol T' + vol T''.

2) planul p poate trece printr-un vîrf să spunem D al tetraedrului T și prin două puncte M, N situate pe două muchii, să spunem $|BA|$, $|BC|$. Considerînd planul $q = (DMC)$, obținem o descompunere elementară a corpului $T'' = [DAMNC]$ în două tetraedre $[DAMC]$ și $[DMNC]$. Avem (fig. VII. 80)

$$\text{vol}\,[ABCD] = \text{vol.}\,[DAMC] + \text{vol}\,[DMCB] = \text{vol}\,[DAMC] + \text{vol}\,[DMNC] + \text{vol}[DMNB].$$

3) planul p poate intersecta trei muchii concurente $|DA|$, $|DB|$, $|DC|$ în trei puncte E, F, G. Considerînd planele $q = (ACF)$, $r = (AFG)$, obținem o descompunere a corpului $[ABCEFG]$ în trei tetraedre $[AEFG]$, $[ABCF]$, $[AFCG]$ și avem (fig. VII. 81)

$$\text{vol}[ABCD] = \text{vol}[ABCF] + \text{vol}[ACDF] = \text{vol}\,[ABCF] + \text{vol}\,[ACFG] + \text{vol}\,[AEFG] + \text{vol}\,[DEFG].$$

4) planul p poate intersecta patru muchii ale tetraedrului T, să spunem muchiile $|DA|$, $|DB|$, $|CA|$, $|CB|$ în patru puncte E, respectiv H, G, F. (fig. VII. 82). Cele două corpuri în care se descompune tetraedrul $T = [ABCD]$ prin planul p se descompun la rîndul lor în tetraedrele:

$[ABGH]$, $[BFGH]$, $[AEGH]$, $[FGHC]$, $[GCDH]$, $[DEHG]$

și suma volumelor acestor tetraedre este egală cu volumul teraedrului T.

Fiind dată o descompunere arbitrară a unui tetraedru T într-o sumă de tetraedre $T_1, \ldots, T_k$, putem, prin descompuneri elementare succesive ale acestor tetraedre, să obținem o nouă descompunere

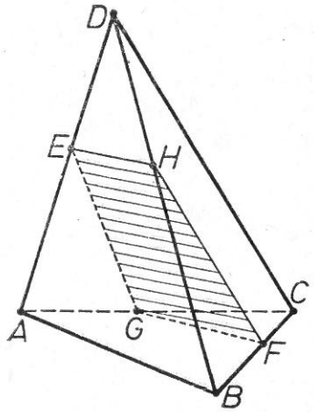


Fig. VII.82

a lui T, care să poată fi obținută direct, prin descompuneri elementare succesive ale lui T.

Pentru o descompunere elementară, sau pentru o succesiune de astfel de descompuneri, volumul tetraedrului descompus este egal cu suma volumelor tetraedrelor descompunerii. Rezultă că:

Pentru orice descompunere a unui tetraedru într-o sumă de tetraedre, volumul tetraedrului descompus este egal cu suma volumelor tetraedrelor descompunerii.

Acest rezultat ne permite să definim volumul oricărui poliedru ca suma volumelor tetraedrelor unei descompuneri (în tetraedre) a acelui poliedru.

Fie D, D' două descompuneri în tetraedre ale unui aceluiași poliedru P. Prin descompuneri convenabile, în tetraedre, ale elementelor celor două descompuneri D, D', putem obține o a treia descompunere, D'', a poliedrului P. Suma volumelor tetraedrelor descompunerii D'' este egală cu suma volumelor tetraedrelor lui D și cu suma volumelor tetraedrelor lui D'. Rezultă că descompunerile D și D' dau aceeași sumă a volumelor tetraedrelor componente. *Deci suma volumelor tetraedrelor unei descompuneri* (în tetraedre) *a unui poliedru P, nu depinde de acea descompunere.*

Deci definiția dată anterior pentru volumul unui poliedru este independentă de alegerea descompunerii acelui poliedru.

Aplicații. **1.** *Volumul unei prisme.* Orice prismă P se descompune într-o sumă de prisme triunghiulare, P_i avînd aceeași înălțime, astfel încît aria bazei prismei P să fie egală cu suma ariilor bazelor prismelor P_i. La rîndul ei, fiecare prismă P_i se descompune într-o sumă de trei tetraedre, avînd volume egale între ele și egale cu a treia parte din produsul ariei bazei cu înălțimea prismei P_i. Rezultă că volumul fiecărei prisme triunghiulare P_i este egal cu produsul dintre aria bazei acelei piramide cu înălțimea acelei piramide. Sumînd după i, obținem:

Volumul unei prisme oarecare este egal cu produsul dintre aria bazei cu înălțimea prismei.

În cazul unei prisme drepte, înălțimea este congruentă cu oricare din muchiile paralele, ce pleacă din vîrfurile bazei. Deci:

Volumul unei prisme drepte este egal cu produsul dintre aria bazei și lungimea muchiilor perpendiculare pe planul bazei.

În cazul unui paralelipiped, obținem:

Volumul unui paralelipiped este egal cu produsul dintre aria uneia dintre fețe cu distanța de la acea față la planul feței opuse.

În cazul mai particular, al unui paralelipiped dreptunghic, avem:

Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor muchiilor ce pleacă dintr-un vîrf al paralelipipedului.

2. *Volumul unei piramide.*

Fie P o piramidă avînd baza $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ și vîrful opus bazei O. Fie h distanța de la punctul O la planul bazei S și fie M un punct interior poligonului $[A_1A_2 \dots A_n]$. Piramida P se descompune într-o sumă de n piramide triunghiulare (fig. VII.83)

$$P_1 = O(MA_1A_2),\ P_2 = O(MA_2A_3), \dots$$
$$\dots,\ P_n = O(MA_nA_1).$$

Piramidele P_i sînt tetraedre de volume date de formulele:

$$3 \text{ vol } P_i = \text{aria}[MA_iA_{i+1}]h,$$
$$(A_{n+1} = A_1),\ i = 1, \dots, n$$

Rezultă formula

$$3 \text{ vol } P = (\text{aria}S) \cdot h, \text{ sau}$$
$$\text{vol } P = \frac{1}{3} h(\text{aria}S).$$

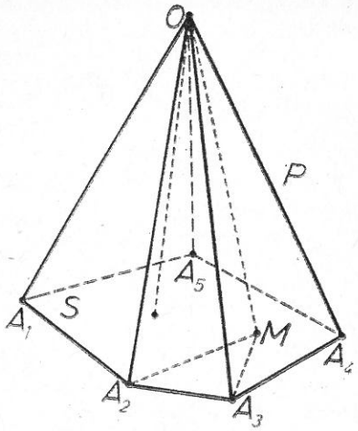


Fig. VII.83

Volumul unei piramide este egal cu a treia parte din produsul dintre aria bazei piramidei și înălțimea h a piramidei.

3. *Volumul unui trunchi de piramidă.*

Fie $P = O(A_1A_2 \dots A_n)$ o piramidă cu baza $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ și vîrful O opus acestei baze. Fie p un plan paralel cu planul bazei S și care intersectează muchiile $|OA_i|$ în punctele A'_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Fie S' suprafața limitată de poligonul $A'_1A'_2, \dots, A'_n$. Să notăm prin Q și Q' proiecțiile punctului O pe planul lui S și pe planul p. Să notăm prin $h = d(O, Q)$, $h' = d(O, Q')$ înălțimile celor două piramide P, $P' = O(A'_1A'_2 \dots A'_n)$.

Avem perechile de triunghiuri asemenea (fig. VII.84):

$$(OQA_i,\ OQ'A'_i),\ (OA_iA_{i+1},\ OA'_iA'_{i+1}),$$

din care rezultă egalitățile

$$\frac{|OA_i|}{|OA'_i|} = \frac{|A_iA_{i+1}|}{|A'_iA'_{i+1}|} = \frac{|OQ|}{|OQ'|} = \frac{h}{h'},$$

Rezultă că avem

$$\frac{\text{aria } S}{\text{aria } S'} = \frac{h^2}{h'^2},$$

$$\frac{\text{vol } P}{\text{vol } P'} = \frac{h \text{ aria } S}{h' \text{ aria } S'} = \frac{h^3}{h'^3}.$$

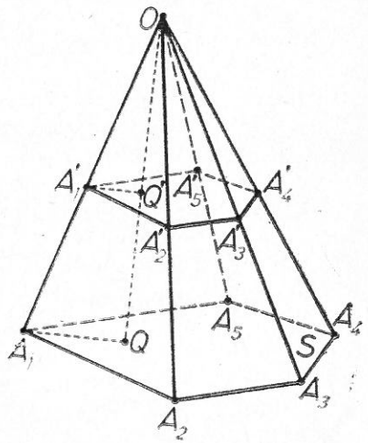


Fig. VII.84

Definiție. **Un corp convex de forma $P - P'$, unde P este o piramidă, iar P' este o a doua**

piramidă, avînd același vîrf O cu P și baza $[A'_1 \dots A'_n]$ paralelă cu baza $[A_1 \dots A_n]$ a lui P și astfel ca $A'_i \in |OA_i|$, se numește trunchi de piramidă.

Volumul trunchiului de piramidă $P - P'$ va fi dat de formula

(1) $\quad \mathrm{vol}(P - P') = \mathrm{vol}\,P - \mathrm{vol}\,P'$

Dacă notăm $d = h - h'$, relațiile

$$h - h' = d, \quad \frac{h^2}{h'^2} = \frac{S}{S'}$$

conduc la formulele

$$h = \frac{d\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}, \quad h' = \frac{d\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}.$$

Rezultă

(2) $$\mathrm{vol}(P - P') = \frac{d}{3(\sqrt{S} - \sqrt{S'})}(S\sqrt{S} - S'\sqrt{S'}) = \frac{d}{3}(S + \sqrt{SS'} + S').$$

Formula (2) dă volumul unui trunchi de piramidă în funcție de înălțimea $d = h - h'$ și de ariile bazelor S și S' (pentru simplificare, s-a notat cu S atît suprafața S cît și aria acestei suprafețe). Deci:

$$\boxed{\textbf{vol. tr. piramidă} = \frac{d}{3}(S + \sqrt{SS'} + S').}$$

7. Caracteristica euleriană a unei suprafețe poliedrale
(pentru cercuri de elevi)

Fie $W = \{S_1, \dots, S_n\}$ o suprafață poliedrală. Să notăm prin v numărul vîrfurilor lui W, prin m numărul muchiilor și prin f numărul fețelor suprafeței W. Suma algebrică $C = v - m + f$ poartă numele de *caracteristica euleriană* a suprafeței W.

Se demonstrează că toate suprafețele poliedrale convexe au caracteristica euleriană egală cu 2.

Exerciții

1. Să se arate că suprafețele piramidale și suprafețele prismatice au caracteristica euleriană egală cu 2.

2. Fie P, Q, R trei corpuri poliedrale convexe astfel ca $P = Q + R$ și fie S, S', S'' suprafețele care limitează aceste corpuri. Să se arate că $C_S + 2 = C_{S'} + C_{S''}$.

3. Să se calculeze caracteristicele euleriene ale suprafețelor poliedrale ce corespund diferitelor tipuri de cristale. Apoi să se calculeze caracteristicile euleriene ale suprafețelor poliedrale descrise în paragrafele precedente.

Definiție. **Se numește suprafață poliedrală regulată orice suprafață poliedrală care are toate fețele congruente două cîte două și pentru care, în jurul fiecărui vîrf, se formează o stea congruentă cu steaua formată în jurul oricărui alt vîrf al suprafeței.**

Se demonstrează că *există numai cinci tipuri de suprafețe poliedrale regulate*, anume (fig. VII.85):

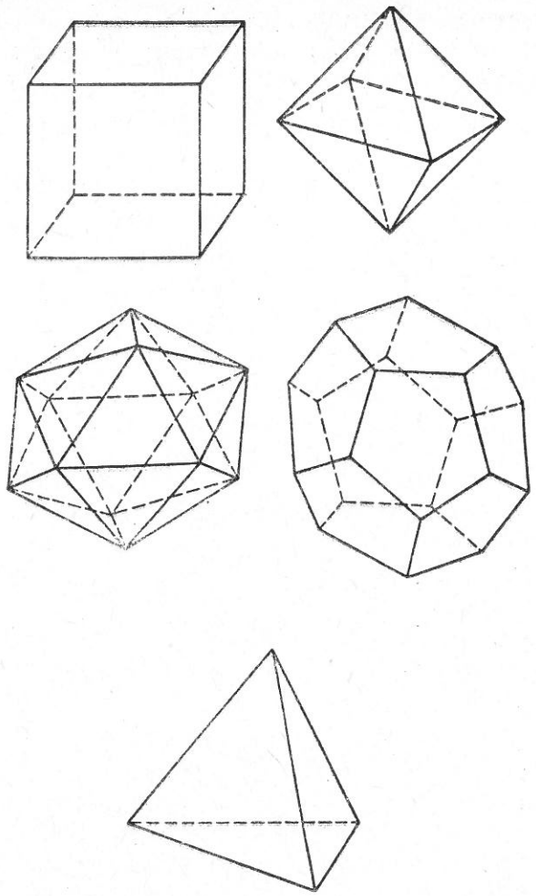


Fig. VII.85

Hexaedrele regulate (suprafețele cubice), care au șase fețe pătratice, douăsprezece muchii și opt vîrfuri. Stelele formate în jurul fiecărui vîrf conțin cîte trei fețe, perpendiculare două cîte două.

Octaedrele regulate, formate din opt fețe triunghiulare, douăsprezece muchii și șase vîrfuri.

Tetraedrele regulate, formate din patru fețe triunghiulare echilatere, șase muchii și patru vîrfuri.

Dodecaedrele regulate, formate din douăsprezece fețe pentagonale, treizeci de muchii și douăzeci de vîrfuri.

Icosaedrele regulate, formate din douăzeci de fețe triunghiulare, treizeci de muchii și douăsprezece vîrfuri.

Existența tetraedrelor regulate. Fie ABC un triunghi echilateral, avînd lungimile laturilor egale cu numărul a. Fie O punctul de intersecție al mediatoarelor acestui triunghi și fie d perpendiculara ridicată în O pe

planul (ABC). Pe dreapta d considerăm unul din punctele M, pentru care avem $d(M, A) = a$. Un astfel de punct există, deoarece $d(O, A) < a$, (fig. VII.86).

Exerciţii

1. Să se determine distanţa $C = d(O, M)$, ştiind că $d(M, A) = a$.

2. Să se arate că pe dreapta d există numai două puncte situate la distanţa C de punctul A.

3. Să se arate că dacă $M \in d$ şi $d(M, A) = a$, atunci tetraedrul $[MABC]$ este regulat.

4. Să se determine simetriile care lasă invariant un tetraedru regulat. Se vor determina axele de simetrie, planele de simetrie şi centrul de simetrie.

Existenţa suprafeţelor cubice. Fie $ABCD$ un pătrat situat într-un plan p. Să considerăm vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, echipolenţi doi cîte doi, perpendiculari pe planul p şi avînd normele egale cu lungimea laturii $|AB|$. Punctele $A, B, C, D, A', B', C', D'$ sînt vîrfurile unei suprafeţe cubice.

Exerciţiu. Să se determine simetriile care lasă invariantă o suprafaţă cubică. Se vor determina axele de simetrie, centrul de simetrie şi planele de simetrie.

Existenţa octaedrelor regulate. Fie $ABCD$ un pătrat situat într-un plan p şi fie d perpendiculara ridicată pe planul p în centrul O al pătratului $ABCD$ (fig. VII.87). Pe dreapta d considerăm punctele E, F, pentru care avem

$$d(E, A) = d(F, A) = d(A, B), \; O \in |EF|.$$

Punctele A, B, C, D, E, F sînt vîrfurile unui octaedru regulat, ale cărui feţe sînt suprafeţele triunghiulare $[EAB]$, $[EBC]$, $[ECD]$, $[EDA]$, $[FAB]$, $[FBC]$, $[FCD]$ şi $[FDA]$.

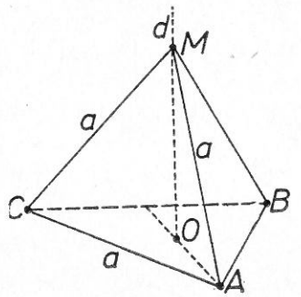


Fig. VII.86

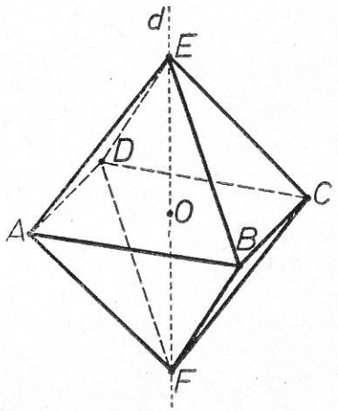


Fig. VII.87

Exerciţii

1. Relativ la octaedrul construit mai sus, să se arate că el este într-adevăr un octaedru regulat şi să se determine distanţa $d(E, O)$.

2. Să se determine simetriile care lasă invariant un octaedru regulat şi să se indice centrul, axele şi planele de simetrie ale acestui octaedru.

Existenţa icosaedrului regulat. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat, situat într-un plan p. Notăm prin O centrul acestui pentagon şi prin d dreapta dusă prin O perpendicular pe planul p. Pe dreapta d, luăm unul din punctele F, pentru care avem $d(A, F) = d(A, B)$. Punctul F cu această proprietate există, deoarece avem $d(O, A) < d(A, B)$. Vom avea atunci triunghiurile echilaterale FAB, FBC, FCD, FDE, FEA.

Exerciţii

1. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FE}$ în funcţie de distanţa $d = d(A, B)$.

2. Să se arate că punctele B, F, E sînt trei vîrfuri consecutive ale unui pentagon regulat congruent cu pentagonul $ABCDE$.

3. Fie G, H punctele astfel ca $BFEGH$ să fie un pentagon regulat. Să se arate că $d(A, G) = d(A, H) = d(A, B)$.

4. Să se arate că perpendicularele ridicate pe planele triunghiurilor FAB, FBC, FCD, FDE, FEA, în centrele acestor triunghiuri, au un punct comun Q.

5. Să se arate că punctele A, B, C, D, E, F, împreună cu simetricele acestor puncte faţă de punctul Q, sînt vîrfurile unui icosaedru regulat, avînd printre feţele sale suprafeţele $[FAB]$, $[FBC]$, $[FCD]$, $[FDE]$, $[FEA]$, $[AEG]$, $[AGH]$, $[AHB]$.

6. Cine sînt simetricele punctelor G şi H faţă de punctul Q?

7. Să se determine simetriile care lasă invariant icosaedrul regulat construit mai sus. Se vor determina centrul, axele şi planele de simetrie.

Existenţa dodecaedrelor regulate. Centrele feţelor unui icosaedru regulat sînt vîrfurile unui dodecaedru regulat.

Exerciţii

1. Să se arate că centrele suprafeţelor triunghiulare, care formează un icosaedru regulat, sînt vîrfurile unui dodecaedru regulat. De exemplu, folosind notaţiile făcute mai sus, să se arate că centrele triunghiurilor, care au punctul A ca vîrf, sînt vîrfurile unei feţe pentagonale ale dodecaedrului.

2. Să se arate că centrele feţelor unui octaedru regulat sînt vîrfurile unui cub.

3. Să se arate că centrele feţelor unei suprafeţe cubice sînt vîrfurile unei octaedru regulat.

4. Să se arate că centrele feţelor unui tetraedru regulat sînt vîrfurile unui al doilea tetraedru regulat.

5. Să se arate că centrele feţelor unui dodecaedru regulat sînt vîrfurile unui icosaedru regulat.

Fie W o suprafață poliedrală formată din f fețe, m muchii și v vîrfuri. Să presupunem că fiecare față este un poligon regulat cu q laturi și că din fiecare vîrf pleacă p muchii. Din faptul că fiecare muchie este latură la exact două fețe și că fiecare muchie are două capete, rezultă formulele

$$2m = pv = qf. \tag{1}$$

Știm că unghiurile unui poligon regulat cu q laturi au măsura în radiani egală cu $\frac{q-2}{q}\pi$ și că suma măsurilor unghiurilor unui unghi poliedru cu p laturi și convex este mai mică decît 2π. Rezultă inegalitatea

$$\frac{p(q-2)}{q} < 2. \tag{2}$$

Singurele perechi (p, q) de numere întregi mai mari decît 2, care verifică inegalitatea (2) sînt:

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3). \tag{3}$$

Rezultă că fețele unui poliedru regulat pot fi triunghiulare, pătratice, sau pentagonale, dar nu pot avea mai mult de cinci laturi. Din fiecare vîrf al unei suprafețe poliedrale regulate pot pleca cel mult cinci muchii.

Să presupunem că suprafața poliedrală regulată W are caracteristica euleriană egală cu 2. Din formulele (1) rezultă

$$C = m\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right) = 2.$$

Considerînd pentru perechea (p, q) fiecare din cazurile (3), obținem următoarele valori pentru numărul m al muchiilor suprafeței W:

$$m = 6,\ m = 12,\ m = 30,\ m = 12,\ m = 30.$$

Deci dacă admitem că suprafețele poliedrale regulate au caracteristica euleriană egală cu 2, rezultă că *singurele tipuri de suprafețe poliedrale regulate sînt cele descrise anterior.*

Capitolul

VIII Transformări geometrice

1. Definiții

La lecțiile de algebră am studiat unele exemple de aplicații sau funcții. Acestea sînt legi care asociază fiecărui element al unei mulțimi E un element al unei mulțimi F; F poate coincide cu E sau poate fi diferită de E. În mod deosebit, au fost studiate funcțiile numerice, care asociază fiecărui număr alt număr.

În geometrie se studiază legi, care asociază fiecărui element al unei figuri F un element determinat al unei figuri F'. O astfel de lege poartă numele de *transformare* a figurii F în figura F'.

O figură este în general formată din puncte, drepte, segmente, semidrepte, unghiuri, triunghiuri, cercuri etc. O transformare T de la figura F la figura F' se numește *transformare punctuală*, dacă T asociază fiecărui punct P al figurii F un punct $P' = T(P)$ al figurii F' și fiecărei mulțimi M, care intră în componența figurii F, mulțimea $T(M)$, formată din punctele $P' = T(P)$, pentru care $P \in M$. Deci $T(M) = \{T(P);\ P \in M\}$. Punctul $P' = T(P)$ se numește *transformatul punctului* P sau *imaginea* punctului P prin transformarea T, iar mulțimea $T(M)$ se numește *transformata* sau *imaginea* mulțimii M prin transformarea T.

Pentru a defini o transformare punctuală, este suficient să indicăm imaginea fiecărui punct P al figurii F, pe care vrem să definim transformarea.

Dacă avem două transformări punctuale: $T : F \to F'$, $T' : F' \to F''$ definim *produsul* sau *compunerea* $T' \circ T$ ca fiind acea transformare punctuală $T'' : F \to F''$, care asociază fiecărui punct $P \in F$ punctul $T''(P) = T'[T(P)]$, deci transformatul prin T' al transformatului prin T al punctului P.

Compunerea transformărilor este o operație asociativă. Într-adevăr, fiind date trei transformări $T : F \to F'$, $T' : F' \to F''$, $T'' : F'' \to G$, și fiind dat un punct oarecare $P \in F$, avem

$$P' = T(P) \in F',\ P'' = T'(P') \in F'',\ Q = T''(P'') \in G,$$

$$(T' \circ T)(P) = T'[T(P)] = T'(P') = P'',$$

$$T''[(T' \circ T)(P)] = T''(P'') = Q, \ (T'' \circ T')[T(P)] = (T'' \circ T')(P') =$$
$$= T''(T'(P')) = T''(P'') = Q;$$

deci, oricare ar fi punctul $P \in F$, avem

$$T''[(T' \circ T)(P)] = (T'' \circ T')[T(P)].$$

Aceasta înseamnă că transformările $T'' \circ (T' \circ T)$ și $(T'' \circ T') \circ T$ coincid:

$$T'' \circ (T' \circ T) = (T'' \circ T') \circ T.$$

Aceasta este proprietatea de *asociativitate* a compunerii transformărilor punctuale.

Exemple

1. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, se spune că $A'B'C'$ se obține din ABC printr-o translație, dacă vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ sînt echipolenți doi cîte doi (fig. VIII.1).

2. Fiind date triunghiurile ABC, $A'B'C'$, se spune că ele se obțin unul din altul printr-o simetrie față de o dreaptă, dacă segmentele $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ au aceeași mediatoare (fig. VIII.2).

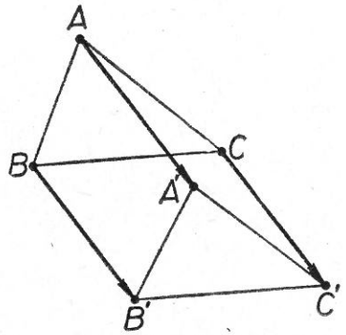


Fig. VIII.1

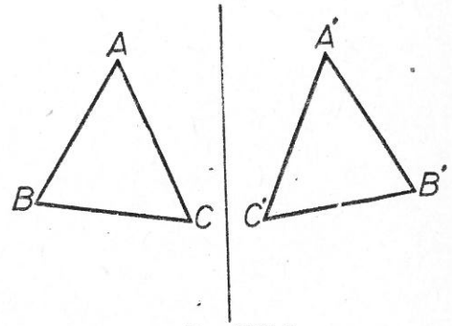


Fig. VIII.2

3. Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ se obțin unul din altul printr-o simetrie față de un punct, dacă segmentele $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ au același mijloc (fig. VIII.3).

4. Triunghiul $A'B'C'$ se spune că se obține din ABC printr-o rotație de unghi $\widehat{hk}$, față de un punct O, dacă avem $ABC \equiv A'B'C'$ și

$$|OA| \equiv |OA'|, |OB| \equiv |OB'|,$$
$$|OC| \equiv |OC'|$$

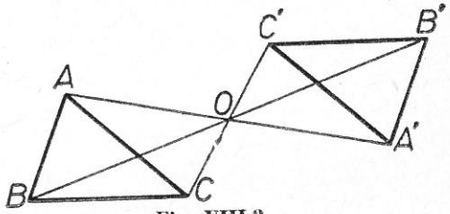


Fig. VIII.3

și dacă unghiurile $\widehat{AOA'}$, $\widehat{BOB'}$, $\widehat{COC'}$ sînt congruente cu unghiul $\widehat{hk}$ (fig. VIII.4).

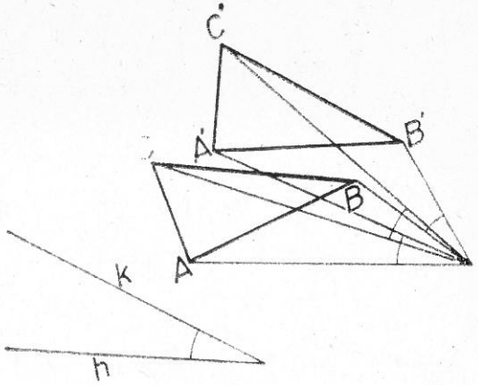


Fig. VIII.4

În fiecare din cele patru cazuri, triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt congruente. Elevii vor verifica această afirmație pe desene și apoi vor da demonstrațiile corespunzătoare.

Definițiile date pentru două triunghiuri pot fi extinse la figuri alcătuite din patru sau mai multe puncte. Deci vom putea spune că două figuri sînt simetrice față de o dreaptă sau față de un punct, sau că se obțin una din alta printr-o translație sau printr-o rotație, dacă există o corespondență T de la punctele primei figuri la punctele celei de a doua figuri, astfel încît fiecărui triunghi din prima figură să-i corespundă un triunghi în a doua figură, cele două triunghiuri satisfăcînd condițiile date mai sus, pentru fiecare caz. Două astfel de figuri au aceeași formă și aceeași mărime.

Pentru a nu fi legați de un anumit tip de figuri, este convenabil să definim și să studiem transformări ale unui plan sau transformări ale spațiului, care păstrează forma și mărimea fiecărei figuri.

Să presupunem că am ales și fixat un segment etalon m, care ne permite să definim lungimile segmentelor, distanțele între puncte și normele vectorilor.

Definiție. **Se numește izometrie orice transformare $T : M \to S$, definită pe o mulțime de puncte $M \subset S$ și care asociază fiecărui punct al mulțimii M un punct din spațiu, astfel încît, pentru orice două puncte $A \in M$, $B \in M$ să avem**

$$d(A, B) = d(A', B'),$$

unde $A' = T(A)$ și $B' = T(B)$. Dacă $M = S$, spunem că T este o izometrie a spațiului.

Dacă $A \neq B$, avem $d(A, B) \neq 0$, deci $d(A', B') \neq 0$, $A' \neq B'$. Prin urmare *orice izometrie este o aplicație injectivă.*

Dacă mulțimea M este un plan și dacă $T(M) \in M$, vom spune că T este o *izometrie în planul p*. Vom începe prin a studia izometriile unui plan fixat.

O izometrie este o aplicație injectivă, deci o aplicație care duce puncte distincte în puncte distincte; dacă avem un segment $|AB|$ avînd extremitățile A, B și dacă notăm prin A' și B' imaginile acestor puncte printr-o izometrie punctele A', B' vor forma un nou segment $|A'B'|$ și din egalitatea $d(A, B) = d(A', B')$ rezultă $|AB| \equiv |A'B'|$.

Dacă avem două izometrii $T : M \to S$ și $T' : M' \to S$ astfel încît $T(M) = M'$, putem defini compunerea celor două izometrii

$$T' \circ T : M \to S.$$

Compunerea $T' \circ T$ este tot o izometrie.

Într-adevăr, pentru orice două puncte $A \in M$ și $B \in M$, dacă notăm $A' = T(A)$, $A'' = T'(A')$, $B' = T(B)$, $B'' = T'(B')$, avem $d(A'', B'') = d(A', B') = d(A, B)$, deoarece T și T' sînt izometrii. Rezultă că și compunerea $T' \circ T$ este o izometrie.

Fie I transformarea identică a unui plan p, deci transformarea care asociază fiecărui punct $P \in p$ punctul P însuși: $I(P) = P$.

Dacă $T : p \to p$ este o transformare oarecare a planului p, avem $I \circ T = T \circ I = T$. Într-adevăr, pentru orice punct $P \in p$,

$$(I \circ T)(P) = I[T(P)] = T(P),$$
$$(T \circ I)(P) = T[I(P)] = T(P).$$

Cel mai simplu exemplu de izometrie este dat de transformarea identică.

Înainte de a studia proprietățile generale ale izometriilor, vom da pe rînd tipurile posibile de izometrii.

2. Simetria față de o dreaptă

Fie d o dreaptă într-un plan p (fig. VIII.5). Notăm prin S_d transformarea planului p în el însuși, care asociază fiecărui punct $A \in p$ un punct $A' \in p$ astfel ca:

$$A \in d \Rightarrow S_d(A) = A,$$

$A \notin d \Rightarrow A' = S_d(A) \neq A$ și d este mediatoarea segmentului $|AA'|$.

Vom spune că punctul $A' = S_d(A)$ este *simetricul* punctului A față de dreapta d. Se observă că dacă $A \notin d$, atunci punctele A, A' se găsesc în semiplane opuse față de d. Deci dacă notăm prin p', p'' semiplanele limitate de d în planul p, atunci avem $S_d(p') = p''$ și $S_d(p'') = p'$.

Dacă notăm prin S_d simetria față de dreapta d, avem proprietățile

$$M \in d \Rightarrow S_d(M) = M;$$

$$P' = S_d(P) \Rightarrow P = S_d(P') \text{ (fig. VIII.5)}$$

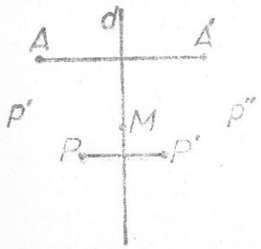


Fig. VIII.5

Din ultima proprietate rezultă că avem, pentru orice punct P din planul p, $(S_d \circ S_d)(P) = S_d[S_d(P)] = P$, deci efectul aplicării produsului $S_d \circ S_d$ asupra punctului P este același cu efectul aplicării transformării identice I. Avem deci

$$S_d^2 = S_d \circ S_d = I.$$

Să demonstrăm că *simetriile unui plan față de dreptele planului sînt izometrii.*

Fie într-un plan p dreapta d și punctele A, B (fig. VIII.6). Notăm $A' = S_d(A)$ și $B' = S_d(B)$. Trebuie să arătăm că $d(A, B) = d(A', B')$. Presupunem că $A \neq B$.

Dacă dreapta AB este paralelă cu dreapta d, figura $ABB'A'$ este un dreptunghi și rezultă $|AB| \equiv |A'B'|$, deci $d(A, B) = d(A', B')$.

Dacă dreapta AB nu este paralelă cu d, atunci putem considera punctul de intersecție $M \in d \cap AB$. Avem $d(M, A) = d(M, A')$ și $d(M, B) = d(M, B')$. Avem de asemenea implicațiile

$$M \in |AB| \Rightarrow M \in |A'B'|, \text{ (fig. VIII.6,a)}$$
$$A \in |MB| \Rightarrow A' \in |MB'|, \text{ (fig. VIII.6,b)}$$
$$B \in |MA| \Rightarrow B' \in |MA'|, \text{ (fig. VIII.6,c)}.$$
$$A = M \Rightarrow A' = M; \; B = M \Rightarrow B' = M.$$

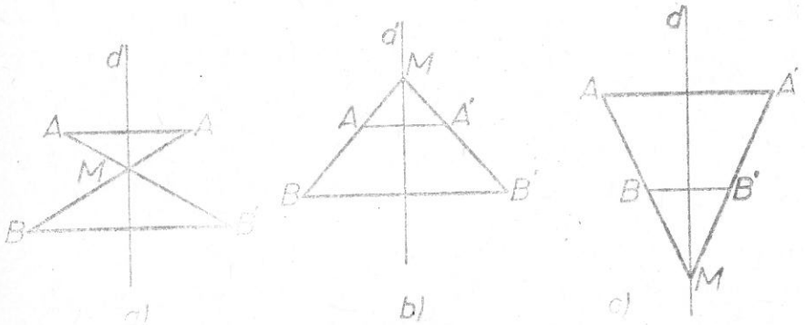


Fig. VIII.6

În fiecare din cazurile indicate, rezultă $d(A, B) = d(A', B')$.

Dacă $A = B$, atunci avem $A' = B'$ și $d(A, B) = d(A', B') = 0$.

Deci, în toate cazurile, $d(A, B) = d(A', B')$.

Vom demonstra mai departe că orice izometrie este o aplicație bijectivă, deci că orice izometrie admite o *inversă*. Deci dacă T este o izometrie, atunci există transformarea T^{-1} astfel ca $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$. În cazul în care T este o simetrie S_d, avem $T^{-1} = S_d^{-1} = S_d$, deoarece am observat că $S_d \circ S_d = I$.

3. Simetria față de un punct

Fie O un punct în planul p. *Simetria față de punctul* O în planul p este acea transformare $S_0 : p \to p$, care asociază punctului O pe el însuși și oricărui alt punct P, acel punct $P' \in OP$, astfel încît O să fie mijlocul segmentului $|PP'|$. Dacă $P' = S_0(P)$, atunci $S_0(P') = P$, deci $S_0^2 = I$. Să arătăm că: *Transformarea S_0 este o izometrie.*

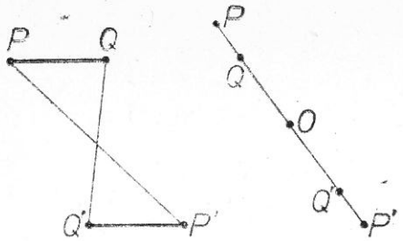


Fig. VIII.7

Demonstrație. Fiind date două puncte $P \neq O$, $Q \notin OP$, și notînd $P' = S_0(P)$, $Q' = S_0(Q)$, triunghiurile OPQ, $OP'Q'$ sînt congruente (fig. VIII.7) deoarece au $|OP| \equiv |OP'|$, $|OQ| \equiv |OQ'|$, $\widehat{POQ} \equiv \widehat{P'OQ'}$. Rezultă $|PQ| \equiv |P'Q'|$, deci $d(P, Q) = d(P', Q')$.

Dacă unul din punctele P, Q coincide cu O sau dacă punctele O, P, Q sînt coliniare, demonstrația egalității $d(P, Q) = d(P', Q')$ se face considerînd egalitățile $d(O, P) = d(O, P')$, $d(O, Q) = d(O, Q')$.

Fie d, d' două drepte perpendiculare, duse prin punctul O și situate în planul p. Fie S, S' simetriile față de dreptele d respectiv d' și fie T simetria față de punctul O. Pentru un punct oarecare P din planul p, să notăm $Q = S(P)$, $P' = S'(Q)$, $R = S'(P)$, $P'' = S(R)$ (fig. VIII.8).

Suma unghiurilor $\widehat{POQ}$, $\widehat{QOP'}$ este un unghi alungit, deci punctele O, P, P' sînt coliniare; punctele P, P' sînt în semiplane opuse atît față de dreapta d, cît și de dreapta d'. Deci $P \neq P'$. Triunghiurile OPQ, OQP' sînt isoscele. Aceste proprietăți arată că O este mijlocul segmentului $|PP'|$. La fel se arată că O este mijlocul segmentului $|PP''|$. Rezultă $P' = P'' = T(P)$. Putem deci scrie că avem

$$T(P) = S'[S(P)] = S[S'(P)]$$

pentru orice punct P din planul p. Această egalitate se exprimă spunînd că simetria $T = S_0$ este egală cu produsul simetriilor S, S', indiferent de ordinea în care se iau S și S'. Simbolic, putem scrie $T = S \circ S' = S' \circ S$.

În general, produsul a două transformări se schimbă, dacă schimbăm între ele cele două transformări.

Pentru a da un exemplu, să considerăm două drepte paralele m, n și să notăm prin U, V simetriile față de aceste drepte (fig. VIII.9). Pentru un punct

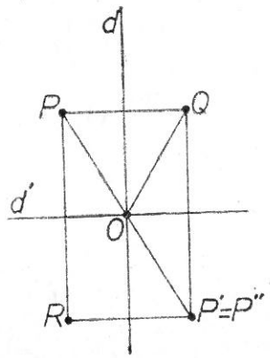


Fig. VIII.8

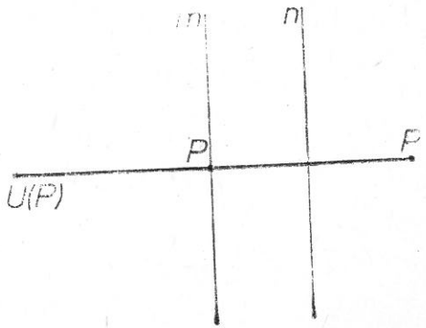


Fig. VIII.9

$P \in m$, avem $U(P) = P$, $V[U(P)] = V(P) = P' \neq P$ și $U[V(P)] = U(P') \neq P'$, deoarece $P' \notin m$. Deci $V[U(P)] \neq U[V(P)]$, cel puțin pentru un punct P. Aceasta înseamnă că $V \circ U \neq U \circ V$. Se spune că *transformările U, V nu sînt permutabile.*

4. Translații

Fie $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un vector în planul p. Se numește *translație* de vector $\vec{v}$ a planului p acea transformare punctuală T, care asociază fiecărui punct $P \in p$ punctul P' astfel ca $\overrightarrow{PP'} \sim \vec{v}$.

Dacă $\vec{v}$ este un vector nul, avem $P' = T(P) = P$, pentru orice punct $P \in p$. Se spune în acest caz că T este transformarea identică. Deci: *o translație de vector nul este transformarea identică.*

Dacă $\vec{v}$, $\vec{v}'$ sînt doi vectori echipolenți și dacă T, T' sînt translațiile de vector $\vec{v}$, respectiv $\vec{v}'$, atunci avem $T = T'$.

Într-adevăr, fie $P \in p$ și fie $P' = T(P)$, $P'' = T'(P)$ (fig. VIII.10). Atunci avem $\overrightarrow{PP'} \sim \vec{v} \sim \vec{v}' \sim \overrightarrow{PP''}$, deci $\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{PP''}$. Aceasta înseamnă că $P' = P''$. Această relație fiind adevărată pentru orice punct $P \in p$, rezultă $T = T'$.

Translațiile sînt izometrii.

Fig. VIII.10

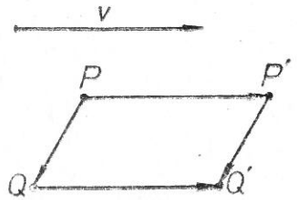


Fig. VIII.11

Demonstrație. Dacă T este translația de vector $\vec{v}$ și dacă P, Q sînt două puncte distincte, notînd $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$, avem $\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{QQ'}$ (fig. VIII.11). Rezultă $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$, deci $d(P, Q) = d(P', Q')$. Prin urmare, T este o izometrie.

5. Rotații

Definiție. **Un punct P se numește invariant față de o transformare T dacă $T(P) = P$.**

Există izometrii ale unui plan p, care admit cîte un singur punct invariant. Dacă O este un punct în planul p și dacă T este o izometrie a planu-

lui p, care admite pe O ca singur punct invariant, spunem că T este o *rotație proprie de centru* O.

Transformarea identică I este considerată ca rotație (improprie) de centru O, oricare ar fi punctul O. Rotațiile proprii de centru O și transformarea I sînt singurele rotații de centru O.

Simetria S_0 față de punctul O este o rotație de centru O, și anume o rotație proprie, deoarece O este unicul punct invariant al transformării S_0.

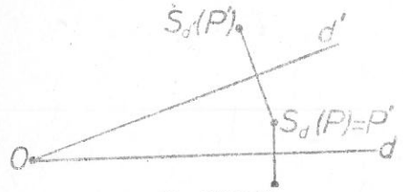


Fig. VIII.12

Dacă d, d' sînt două drepte distincte trecînd prin punctul O, compunerea de simetrii $S'_d \circ S_d$ este o rotație proprie de centru O. Într-adevăr, am arătat că, în general, compunerea a două izometrii este o izometrie; deci, în particular, transformarea $T = S'_d \circ S_d$ este o izometrie. Punctul O este evident un punct invariant pentru T. Să arătăm că O este singurul punct invariant pentru T. Să presupunem că T ar admite un al doilea punct invariant $P \neq O$. Am avea atunci (fig. VIII.12)

$T(P) = S_{d'}[S_d(P)] = P$. Aplicînd egalității $S_{d'}[S_d(P)] = P$ simetria S_d, obținem

$$S_{d'}(P) = S_{d'}[S_d(S_{d'}(P))] = (S_{d'} \circ S_{d'})[S_d(P)] = I[S_d(P)] = S_d(P)$$

deci punctul P are aceeași imagine, atît prin simetria $S_{d'}$, cît și prin simetria S_d.

Nu putem avea $P' = P$, deoarece singurele puncte invariante față de S_d sînt punctele dreptei d, iar singurele puncte invariante față de S sînt punctele dreptei d'. Cum $P \neq O \in d \cap d'$, rezultă $P' \neq P$. Relațiile (1) arată atunci că segmentul $|PP'|$ admite ca mediatoare, atît dreapta d, cît și dreapta d', ceea ce implică $d = d'$, deoarece un segment are o singură mediatoare.

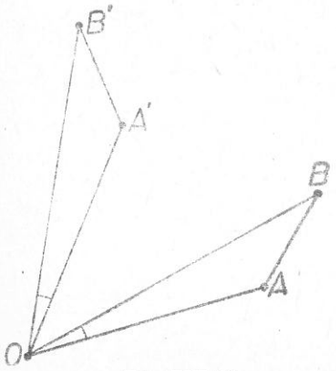


Fig. VIII.13

Dar am presupus $d \neq d'$. Deci nu putem presupune că T admite un punct invariant diferit de O. Aceasta arată că T este o rotație de centru O. Deci:

Produsul a două simetrii, față de două drepte concurente într-un punct O și situate într-un plan p, este o rotație de centru O a planului p.

În § 8 se va arăta că o rotație este definită cînd se dă centrul O, un unghi de rotație $\widehat{hk}$ și un sens de rotație (fig. VIII.13).

6. Proprietăți generale ale izometriilor unui plan

(pentru cercuri de elevi)

Pentru cunoașterea diferitelor tipuri posibile de izometrii, este necesar să avem o vedere generală asupra izometriilor unui plan. Vom enumera o serie de proprietăți mai importante.

1. *Orice izometrie transformă trei puncte coliniare în trei puncte coliniare* (fig. VIII.14).

Demonstrație. Fie A, B, C trei puncte distincte pe o dreaptă d și fie A', B', C' imaginile lor printr-o izometrie T. Să presupunem că $B \in |AC|$. În acest caz, $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$. Transformarea T fiind o izometrie avem $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$, $d(A, C) = d(A', C')$, deci $d(A', B') + d(B', C') = d(A', C')$. Aceasta înseamnă că avem $B' \in |A'C'|$, deci punctele A', B', C' sînt coliniare.

2. *Dacă T este o izometrie și dacă d este o dreaptă, atunci mulțimea $T(d) = \{T(P);\ P \in d\}$ este o dreaptă.*

Fie P, Q două puncte distincte pe dreapta d și fie $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$, $d' = P'Q'$ (fig. V.15). Din proprietatea 1 rezultă că imaginea oricărui punct

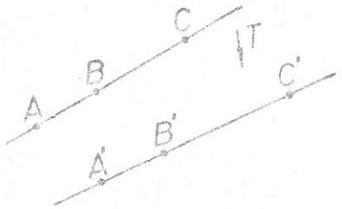


Fig. VIII.14

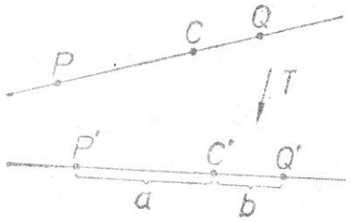


Fig. VIII.15

$R \in d$ este un punct $R' = T(R) \in d'$. Deci avem $T(d) \subset d'$. Pentru a arăta că $T(d) = d'$, trebuie să mai arătăm că, oricare ar fi punctul $C' \in d'$, există un punct $C \in d$ astfel ca $T(C) = C'$, (fig. VIII.15).

Numerele pozitive $a = d(C', P')$, $b = d(C', Q')$ determină în mod unic poziția punctului C' pe dreapta $P'Q'$. Putem construi pe dreapta d un singur punct C astfel ca $d(C, P) = a$ și $d(C, Q) = b$. Dacă notăm $C'' = T(C)$ vom avea $d(C'', P') = a = d(C', P')$ și $d(C'', Q') = b = d(C'', Q')$, deci $C'' = C'$. Aceasta înseamnă că $T(C) = C'$.

3. *Orice izometrie este o aplicație surjectivă.*

Trebuie să demonstrăm că dacă $T : p \to p$ este o izometrie, atunci, pentru orice punct $P' \in p$ există un punct $P \in p$ astfel ca $T(P) = P'$. Fie A un punct oarecare din planul p și fie $A' = T(A)$. Dacă $A' = P'$, luăm $P = A$ și obținem $T(P) = P'$. Dacă $A' \neq P'$, considerăm dreapta $d' = A'P'$. Fie apoi m, n două drepte distincte și concurente, în planul p astfel ca $A \notin m$, $A \notin n$; Considerăm dreptele $m' = T(m)$, $n' = T(n)$. Aceste drepte au punctul comun $O' = T(O)$, unde $\{O\} = m \cap n$. Deci dreptele m', n' nu sînt paralele. Atunci cel puțin una

din aceste drepte va intersecta dreapta d'. Să presupunem că există $B' \in d' \cap \cap m'$. Din relația $m' = T(m)$ rezultă că există un punct $B \in m$ astfel ca $T(B) = B'$.

Avem $B \neq A$, deoarece $A \notin m$; deci $B' \neq A'$. Din $P' \in d' = A'B'$ și din proprietatea 2 deducem că există un punct P pe dreapta AB astfel ca $T(P) = P'$.

4. *Orice izometrie transformă două drepte paralele în două drepte paralele.*

Fie d, d' două drepte paralele și fie $e = T(d)$, $e' = T(d')$ transformatele lor prin izometria T. Trebuie să arătăm că dreptele e, e' sînt paralele. Să presupunem contrariul, deci că există un punct $A' \in e \cap e'$. Punctul A' este imaginea unui punct A, care trebuie să aparțină fiecăreia din dreptele d, d'; aceasta nu este posibil, deoarece $d \parallel d'$. Deci nu există $A' \in e \cap e'$ și rezultă $e \parallel e'$.

5. *Dacă T este o izometrie, atunci T^{-1} este o izometrie.*

Demonstrație. Fie $T : p \to p$ o izometrie a planului p și fie A, B două puncte oarecare în planul p. Dacă notăm $A' = T^{-1}(A)$, $B' = T^{-1}(B)$, vom avea $A = T(A')$ și $B = T(B')$. T fiind o izometrie, rezultă $d(A, B) = d(A', B')$, deci și T^{-1} este o izometrie.

6. *Dacă T este o izometrie și dacă $|AB|$ este un segment, atunci $T(|AB|)$ este un segment.*

Demonstrație. Segmentul $|AB|$ este mulțimea punctelor situate între A și B. Dacă C este un astfel de punct, avem $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$. Să notăm $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$. Avem atunci $d(A, C) = d(A', C')$, $d(B, C) = d(B', C')$, $d(A, B) = d(A', B')$, deci $d(A', C') + d(C', B') = d(A', B')$. Rezultă $C' \in |A'B'|$. Deci am arătat că $T(|AB|) \subset \subset |A'B'|$. Pentru a arăta că $T(|AB|) = |A'B'|$, rămîne să arătăm că orice punct al segmentului $|A'B'|$ este imaginea unui punct de pe $|AB|$. Dacă $C' \in |A'B'|$, avem $C' \in A'B'$ și știm că există $C \in AB$ astfel ca $T(C) = C'$. Folosind relațiile scrise mai sus, deducem că $C \in |AB|$.

7. *Dacă T este o izometrie și dacă s este o semidreaptă, atunci $T(s)$ este o semidreaptă. Dacă p' este un semiplan, atunci $T(p')$ este un semiplan.*

Proprietatea rezultă din proprietatea precedentă și din definițiile date pentru semidrepte și pentru semiplane.

8. Dacă *T este o izometrie și dacă $\widehat{hk}$ este un unghi, atunci $T(\widehat{hk})$ este un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$.*

Demonstrație. Fie O vîrful unghiului $\widehat{hk}$ și fie punctele $A \in h$, $B \in k$. Să punem $O' = T(O)$, $A' = T(A)$, $B' = T(B)$. Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi nul sau alungit, unghiul $T(\widehat{hk}) = \widehat{A'O'B'}$ va fi de același fel cu $\widehat{hk}$. Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi propriu, OAB este un triunghi și $O'A'B'$ este un triunghi congruent

cu OAB, deoarece putem aplica teorema III de congruență. Rezultă $\widehat{A'O'B'} \equiv \equiv \widehat{AOB}$, deci $T(\widehat{hk}) \equiv \widehat{hk}$.

În particular, dacă $\widehat{hk}$ este un unghi drept, atunci unghiul $T(\widehat{hk})$ va fi de asemenea drept.

9. *Dacă T este o izometrie și dacă $ABCD$ este un paralelogram, atunci $T(ABCD) = A'B'C'D'$ este un paralelogram, ($A' = T(A)$ etc.).*

Demonstrație. Avem $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ și rezultă, folosind proprietatea 4, $A'B' \parallel C'D'$, $A'D' \parallel B'C'$; deci $A'B'C'D'$ este un paralelogram.

10. *Fie T o izometrie a planului p. Considerăm punctele A, $B \in p$ și fie $A' = T(A)$, $B' = T(B)$. Atunci, oricare ar fi numărul real k, avem*

$$T(k \cdot \overrightarrow{AB}) = k \cdot \overrightarrow{A'B'}.$$

Aceasta înseamnă că, dacă punctul C este astfel încît $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ și dacă $C' = T(C)$, atunci $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{A'B'}$.

Proprietatea rezultă din faptul că izometriile păstrează distanțele între puncte, deci normele vectorilor, și din faptul că ele păstrează și proprietățile de ordonare. Avem deci $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ și din $A \in |BC|$ sau $B \in |AC|$ rezultă $A' \in |B'C'|$ respectiv $B' \in |A'C'|$.

11. *Fie OAB un triunghi în planul p și fie T o izometrie a acestui plan. Fie M un punct astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$ și fie $M' = T(M)$, $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $O' = T(O)$. Avem atunci*

$$\overrightarrow{O'M'} \sim x \cdot \overrightarrow{O'A'} + y \cdot \overrightarrow{O'B'}.$$

Demonstrație. Fie P, Q punctele pentru care avem $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = y \cdot \overrightarrow{OB}$ și fie $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$. Avem atunci $\overrightarrow{O'P'} = x \cdot \overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'Q'} = y \cdot \overrightarrow{O'B'}$. Pe de altă parte, $MP \parallel OB$, $MQ \parallel OA$ și rezultă $M'P' \parallel O'B'$, $M'Q' \parallel O'A'$. Deci putem scrie

$$\overrightarrow{O'M'} \sim \overrightarrow{O'P'} + \overrightarrow{O'Q'} = x \cdot \overrightarrow{O'A'} + y \cdot \overrightarrow{O'B'}.$$

7. Teorema fundamentală a izometriilor plane

(pentru cercuri de elevi)

Fie OAB, $O'A'B'$ două triunghiuri dreptunghice, isoscele și congruente între ele, avînd unghiurile drepte în O, respectiv O'. Cele două triunghiuri definesc două repere carteziene $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$. Să notăm prin T

transformarea planului în el însuşi, care asociază fiecărui punct $P(x, y)$, avînd coordonatele x, y faţă de reperul $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, punctul $P'(x, y)$, avînd aceleaşi coordonate, dar faţă de reperul $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$.

În aceste condiţii, transformarea T este o izometrie.

Demonstraţie. Aplicaţiile $P : \mathbb{R}^2 \to p$, $P' : \mathbb{R}^2 \to p$ sînt bijective şi avem $T = P' \circ P^{-1}$, deci T este o aplicaţie bijectivă.

Să arătăm că T transformă un segment oarecare $|QR|$ într-un segment $|Q'R'|$ astfel ca $|Q'R'| \equiv |QR|$. Să presupunem că avem

$$Q = P(x_1, y_1),\ R = P(x_2, y_2).$$

În acest caz, punctele $Q' = T(Q)$, $R' = T(R)$ vor fi date de formulele

$$Q' = P'(x_1, y_1),\ R' = P'(x_2, y_2).$$

Lungimea segmentului $|QR|$ este dată de formula

$$d(Q, R) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iar lungimea segmentului $|Q'R'|$ se poate calcula folosind reperul $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$; se obţine:

$$d(Q', R')^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Se observă că $d(Q, R) = d(Q', R')$, deci $|QR| \equiv |Q'R'|$. Prin urmare, T este o izometrie.

Să examinăm cîteva cazuri particulare.

1. Dacă $O = O'$, $A = A'$ şi $B = B'$, atunci T este evident transformarea identică, deoarece avem $T(P) = P$ pentru orice punct P.

2. Dacă avem relaţiile de echipolenţă $\overrightarrow{O'A'} \sim \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'B'} \sim \overrightarrow{OB}$, atunci T este o translaţie, ce poate fi definită de oricare din vectorii echipolenţi $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$.

3. Dacă vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'A'}$ sînt echipolenţi, atunci vectorii $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O'B'}$ sînt fie echipolenţi, fie paraleli şi de sensuri opuse. Să presupunem că $\overrightarrow{O'B'} \sim -\overrightarrow{OB}$. Dacă $O' = O$, transformarea T este o simetrie faţă de dreapta OA.

4. Dacă O' este un punct al dreptei OA, dacă $\overrightarrow{O'B'} \sim -\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O'A'} \sim \overrightarrow{OA}$, atunci T este rezultatul compunerii translaţiei de vector $\overrightarrow{OO'}$ cu simetria faţă de dreapta OA şi T nu are nici un punct invariant.

5. Dacă $O' = O$ şi dacă vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}$ sînt astfel încît

$$A' = B,\ B' = A,$$

atunci T este simetria faţă de bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$.

6. Dacă $O' = O$, transformarea T va admite punctul O ca punct invariant. Sînt posibile două cazuri:

a) unghiurile $\widehat{AOA'}$, $\widehat{BOB'}$ au bisectoarea comună. Atunci punctele acestei bisectoare au aceleaşi coordonate, fie că le raportăm la reperul $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, sau la reperul $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})$, deci aceste puncte vor fi puncte invariante pentru T; T este deci o simetrie faţă de bisectoarea celor două unghiuri;

b) bisectoarea unghiului $\widehat{AOB'}$ este bisectoare a unghiului $\widehat{A'OB}$. Atunci T nu are nici un punct invariant diferit de O şi este prin urmare o rotaţie în jurul punctului O.

În general, punctele invariante ale izometriei T sînt acele puncte din plan, care au aceleaşi coordonate, faţă de reperele $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$.

Dacă o izometrie T admite un punct invariant S şi dacă M, M' sînt două puncte distincte astfel ca $M' = T(M)$, atunci avem $|SM| \equiv |SM'|$, deci S se găseşte pe mediatoarea segmentului $|MM'|$.

Dacă o izometrie T admite două puncte distincte invariante, să spunem M şi N, atunci toate punctele dreptei MN vor fi invariante: dacă T nu este transformarea identică, atunci T este o simetrie faţă de dreapta MN. În acest caz, pentru orice punct $P \notin MN$, dacă notăm $P' = T(P)$, ştim că MN este mediatoarea segmentului $|PP'|$. Deci, dacă T este o simetrie faţă de o dreaptă, atunci mediatoarele segmentelor $|OO'|$, $|AA'|$, $|BB'|$ coincid

Dacă izometria T este o rotaţie în jurul unui punct S, atunci mediatoarele segmentelor $|OO'|$, $|AA'|$, $|BB'|$ sînt concurente în punctul S.

O translaţie definită de un vector nenul nu are nici un punct invariant. Mediatoarele segmentelor de forma $|MM'|$, unde $M' = T(M)$ şi unde T este o translaţie, $T \neq I$, sînt paralele între ele.

Există izometrii, care nu sînt translaţii şi care nu au nici un punct invariant. Ele se obţin compunînd o translaţie de vector nenul $\vec{v}$ cu o simetrie faţă de o dreaptă paralelă cu vectorul $\vec{v}$.

8. Exprimarea analitică a unei izometrii
(pentru cercurile de elevi)

Să presupunem că în planul p a fost ales un reper cartezian $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ avînd vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ de normă 1 şi ortogonali. În acest caz, fiecare punct din plan este definit prin coordonatele sale x, y. Dacă punctul M are coordonatele x, y, avem $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$ şi dacă avem un al doilea punct M', de coordonate x', y', atunci

$$d(M, M')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Dacă $T : p \to p$ este o transformare punctuală a planului p, atunci T asociază fiecărui punct $M(x, y)$ un punct $M'(x', y')$, după o lege determinată. Aceasta înseamnă că x' și y' sînt funcții de coordonatele x și y ale punctului M, deci există două funcții f, g, de variabilele x, y astfel încît să avem

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \tag{2}$$

ori de cîte ori x' și y' sînt coordonatele punctului $M' = T(M)$ și x, y sînt coordonatele punctului M, oricare ar fi punctul $M \in p$.

Se spune că formulele (2) reprezintă exprimarea analitică a transformării punctuale T.

De exemplu, formulele

$$x' = x, \quad y' = y$$

dau exprimarea analitică a transformării identice I.

Vrem să determinăm forma funcțiilor f, g din formulele (2) în ipoteza că T este o izometrie.

Să notăm $O' = T(O)$, $A' = T(A)$, $B' = T(B)$. Atunci $O'A'B'$ este un triunghi dreptunghic, avînd catetele de lungime 1. Deci vectorii $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'B'}$ sînt unitari și ortogonali. Aceasta înseamnă că, dacă descompunem acești vectori după direcțiile OA, OB, obținem formule de forma

$$\overrightarrow{O'A'} \sim a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O'B'} \sim c \cdot \overrightarrow{OA} + d \cdot \overrightarrow{OB}, \tag{3}$$

unde coeficienții scalare a, b, c, d verifică condițiile

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0. \tag{4}$$

Primele două din aceste formule arată că vectorii $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}$ sînt unitari, iar ultima relație (4) arată că acești vectori sînt ortogonali.

Fie (u, v) coordonatele punctului O' față de reperul $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Să considerăm acuma un punct arbitrar $M(x, y)$ în planul p și fie $M' = T(M)$. Notînd prin (x', y') coordonatele punctului M' față de reperul $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, putem scrie

$$\overrightarrow{OM'} = x' \cdot \overrightarrow{OA} + y' \cdot \overrightarrow{OB}. \tag{5}$$

Pe de altă parte, avem relațiile

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'}, \tag{6}$$

și

$$\overrightarrow{O'M'} = T(\overrightarrow{OM}) = T(x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}) = x \cdot T(\overrightarrow{OA}) + y \cdot T(\overrightarrow{OB}) = x \cdot \overrightarrow{O'A'} + y \cdot \overrightarrow{O'B'}.$$

Folosind formulele (3), putem scrie ultima formulă sub forma

$$\overrightarrow{O'M'} \sim x \cdot (a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}) + y(c \cdot \overrightarrow{OA} + d \cdot \overrightarrow{OB}) = (ax + cy) \cdot \overrightarrow{OA} + (bx + dy) \cdot \overrightarrow{OB}$$

Introducînd în (6), obținem

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + (ax + cy) \cdot \overrightarrow{OA} + (bx + dy) \cdot \overrightarrow{OB}. \tag{7}$$

Dar avem

$$\overrightarrow{OO'} = u \cdot \overrightarrow{OA} + v \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Rezultă deci

$$\overrightarrow{OM'} = (ax + cy + u) \cdot \overrightarrow{OA} + (bx + dy + v) \cdot \overrightarrow{OB}. \tag{8}$$

Comparînd formulele (5) și (8), deducem relațiile

$$x' = ax + cy + u, \quad y' = bx + dy + v. \tag{9}$$

Formulele (9) dau exprimarea analitică a izometriei T. În aceste formule, x și y sînt coordonatele unui punct oarecare din planul p, iar x' și y' sînt coordonatele punctului transformat. Coeficienții a, b, c, d, u, v sînt numere reale, legate numai de transformarea T, deci sînt constante. Aceste constante nu pot fi date arbitrar, ele trebuind să verifice condițiile (4), numite *condițiile de ortogonalitate.*

Deci am demonstrat că:

Orice izometrie a unui plan se exprimă analitic prin formule de forma (9), unde coeficienții a, b, c, d, u, v verifică condițiile de ortogonalitate (4).

Ultima ecuație (4) arată că există un număr k, astfel încît să avem $a = kd$, $b = -kc$. Introducînd în prima ecuație (4) și ținînd seama de a doua, obținem $k^2 = 1$ deci $k = \pm 1$.

Deci, izometriile unui plan sînt de două tipuri:

I. Izometrii date de ecuații de forma

$$x' = dx + cy + u, \quad y' = -cx + dy + v.$$

II. Izometrii date de ecuații de forma

$$x' = -dx + cy + u, \quad y' = cx + dy + v.$$

Pentru izometriile de tipul I avem

$$k = 1, b + c = 0, ad - bc = 1, a = d,$$

iar pentru izometriile de tipul II avem

$$k = -1, b = c, ad - bc = -1, a + d = 0.$$

Izometriile de tipul I se numesc *deplasări*, iar izometriile de tipul II se numesc *antideplasări.*

Fiind dată o transformare T de forma (9) și un punct $M(x, y)$, condiția ca M să fie punct invariant față de T este $M' = M$ sau $x' = x$, $y' = y$. Ecuațiile (9) dau, pentru $x' = x$, $y' = y$,

$$(a - 1)x + cy + u = 0, \quad bx + (d - 1)y + v = 0. \tag{9'}$$

Deci $M(x, y)$ este un punct invariant dacă și numai dacă x și y verifică ecuațiile (9'). Fiecare din aceste ecuații reprezintă o dreaptă. Pentru ca să existe puncte invariante față de T, este necesar și suficient ca cele două drepte date de ecuațiile (9') să aibă cel puțin un punct comun. Dacă aceste drepte au un singur punct comun, transformarea T are un singur punct invariant. Aceasta se întîmplă dacă sistemul (9') este compatibil determinat, deci dacă avem

$$(a - 1)(d - 1) - bc \neq 0.$$

În cazul deplasărilor, avem $(a - 1)(d - 1) - bc = 2(1 - a)$. Deci *o deplasare are un singur punct invariant dacă și numai dacă $a \neq 1$.*

Pentru o antideplasare, avem $(a - 1)(d - 1) - bc = 0$, deci o antideplasare fie nu are nici un punct invariant, fie are o infinitate de puncte invariante.

Să examinăm cîteva cazuri particulare.

1. Să presupunem că T este o translație. Atunci avem $\overrightarrow{O'A'} \sim \overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{O'B'} \sim \overrightarrow{OB}$, deci $a = d = 1$, $b = c = 0$ și transformarea T va fi dată de formulele

$$x' = x + u,\ y' = y + v.$$

În aceste formule, u și v reprezintă componentele scalare ale vectorului $\overrightarrow{OO'}$, care definește translația T.

2. Să presupunem acuma că T este simetria față de dreapta OA. Avem în acest caz $O' = O$, $A' = A$, $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$, deci coeficienții a, b, c, d, u, v au valorile $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -1$, $u = v = 0$. Ecuațiile (9) devin

$$x' = x,\ y' = -y.$$

3. Dacă T este o rotație de centru O, avem $O' = T(O) = O$, deci $u = v = 0$. Ecuațiile (9) devin

$$x' = ax + cy,\ y' = bx + dy. \tag{10}$$

Dacă se consideră două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, transformatele lor vor fi punctele $M_1'(x_1', y_1')$, $M_2'(x_2', y_2')$, unde

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + cy_1,\ y_1' = bx_1 + dy_1, \\ x_2' &= ax_2 + cy_2,\ y_2' = bx_2 + dy_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{OM_1'}, \overrightarrow{OM_2'}$ va fi dat de formula

$$\overrightarrow{OM_1'} \cdot \overrightarrow{OM_2'} = x_1'x_2' + y_1'y_2' = (a^2 + b^2)x_1x_2 + (ac + bd)(x_1y_2 + x_2y_1) + (c^2 + d^2)y_1y_2.$$

Dacă ținem seama de formulele (4), obținem $\overrightarrow{OM_1'} \cdot \overrightarrow{OM_2'} = x_1x_2 + y_1y_2$, deci

$$\overrightarrow{OM_1'} \cdot \overrightarrow{OM_2'} = \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}.$$

În particular, luînd $M_1 = M_2$, deducem că $\|\overrightarrow{OM_1'}\| = \|\overrightarrow{OM_1}\|$. Deci rotațiile lasă invariante produsele scalare și normele vectorilor.

Să calculăm produsul scalar $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$; $M' = T(M)$, $M(x, y)$. Avem, folosind formulele (10),

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = xx' + yy' = ax^2 + (b + c)xy + dy^2. \tag{12}$$

Transformarea T fiind o rotație, este fie rotație proprie, fie transformarea identică. Să presupunem că sîntem în primul caz. Atunci T are un singur punct invariant, anume punctul O. Deci T trebuie să fie o deplasare și rezultă că T este de tipul I. Aceasta înseamnă că avem $a = d$, $b + c = 0$, astfel încît relația (12) devine

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = a(x^2 + y^2) = a\,\|\overrightarrow{OM}\|^2 = a\,\|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\overrightarrow{OM'}\|. \tag{13}$$

Fie $\overrightarrow{OM} \neq \vec{O}$. Cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}$ va fi dat de formula

$$\cos\,(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = a = d.$$

Aceasta înseamnă că unghiul vectorilor $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}$ este congruent cu un unghi fix, avînd cosinusul egal cu numărul constant a. Deci:

Dacă T este o rotație de centru O și dacă M este un punct oarecare (diferit de O) și dacă $M' = T(M)$, atunci unghiul $\widehat{MOM'}$ este congruent cu un unghi fix, care nu depinde de M (dar depinde de rotația T).

Unghiul fix, format de doi vectori $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}$, $(M \neq O,\ M' = T(M))$, se numește *unghiul rotației* T.

O rotație de unghi $\widehat{hk}$ și de centru O va fi definită prin formulele

$$x' = dx + cy,\ y' = -cx + dy$$

unde $d = \cos \widehat{hk}$ și unde $c^2 + d^2 = 1$. Există deci două rotații de unghi $\widehat{hk}$, care corespund alegerilor $c = \sqrt{1 - d^2}$, respectiv $c = -\sqrt{1 - d^2}$. Se spune că cele două rotații sînt de *sensuri opuse*.

4. Să presupunem acuma că T este o antideplasare, care admite O ca punct invariant. T va fi definită de ecuații de forma

$$x' = -dx + cy,\ y' = cx + dy.$$

Punctele invariante sînt soluțiile sistemului

$$(d + 1)x = cy,\ cx = (1 - d)y.$$

Ecuațiile acestui sistem reprezintă o aceeași dreaptă, deci T admite o dreaptă de puncte invariante. Dacă presupunem că această dreaptă este dreapta OA, avem $d = -1$, $c = 0$ și obținem ecuațiile care definesc simetria față de dreapta OA.

9. Transformări ale unui plan care nu sînt izometrii

A. Omotetii

Fie O un punct fixat în planul p și fie k un număr real $\neq 0$. Definim cu ajutorul lui O și al lui k o transformare a planului p în modul următor:

1. Punctului O îi asociem punctul O însuși.

2. Dacă P este un punct din planul p diferit de O, îi asociem lui P acel punct P' de pe dreaptă OP, pentru care avem

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Această transformare se numește *omotetia de centru O și de raport k*.

Notînd prin T această omotetie, din definiție rezultă că dacă d este o dreaptă ce trece prin O, atunci $T(d) = d$. Deci dreptele care trec prin centrul de omotetie sînt invariante.

Cu ajutorul teoremei lui Thales se demonstrează fără dificultate următoarele proprietăți, relative la o omotetie arbitrară T:

1. Dacă m este o dreaptă în planul p și $O \notin m$, atunci $T(m)$ este o dreaptă paralelă cu m.

2. Dacă $|AB|$ este un segment $A \neq B$ și dacă $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, atunci $A' \neq B'$ și $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

3. Dacă ABC este un triunghi și dacă $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$ atunci $A'B'C'$ este un triunghi asemenea cu triunghiul ABC.

4. Dacă C este un cerc de rază R, atunci $T(C)$ este un cerc de rază $|k|R$ și centrele cercurilor C, $T(C)$ sînt coliniare cu O. Mai mult, prin O trec două tangente comune ale cercurilor C, $T(C)$, dacă O este exterior cercului C.

5. Fiind date două cercuri exterioare C, C' de centre $S \neq S'$, există în general două omotetii T, T' astfel ca $C' = T(C) = T'(C)$. Centrele acestor omotetii se obțin considerînd doi diametri paraleli $|AB|$, $|A'B'|$ în cele două cercuri și punînd $\{O\} = AA' \cap BB'$, $\{O'\} = AB' \cap A'B$. Avem $O \in SS'$, $O' \in SS'$.

6. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ cu $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ și $BC \parallel B'C'$, există o omotetie T astfel ca $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$?

B. Inversiuni

(pentru cercurile de elevi)

Presupunem că în planul p a fost ales un segment etalon m; putem atunci considera distanțele între puncte, lungimile segmentelor, normele vectorilor și produsele scalare ale perechilor de vectori.

Fixăm în planul p un punct O și alegem un număr real $k \neq 0$.

D e f i n i ț i e. **Se numește inversiune de pol O și putere k, acea transformare $T : p - \{O\} \to p - \{O\}$, care asociază fiecărui punct $P \neq O$ punctul $P' \in OP$, astfel ca $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = k$.** Pentru $k < 0$, avem $O \in |PP'|$. Pentru $k > 0$, avem $P \in |OP'|$ sau $P' \in |OP|$, după cum $d(O, P)^2$ este mai mic decît k sau mai mare decît k. Pentru $d(O, P)^2 = k$, avem $P' = P$.

Deci pentru $k > 0$, punctele cercului de centru O și rază $R = \sqrt{k}$ sînt invariante, față de inversiunea considerată.

De asemenea, dacă avem un cerc C, astfel ca puterea cu semn a lui O față de cercul C să fie egală cu k, atunci $T(C) = C$, dar în general, punctele cercului C nu sînt invariante.

Proprietăți. 1. Fie C, C' două cercuri de centre $Q, Q', Q \neq Q'$ și fie $O \in QQ'$. secantă variabilă dusă prin O taie cercurile C, C' în punctele $A, B \in C$ și $A', B' \in C'$, astfel ca $B \in |AA'|$ și $B' \in |AA'|$. În ce caz produsele scalare $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'}$ sînt constante și egale între ele?

2. Fie C un cerc, de centru $Q, O \in C$ și fie d o dreaptă perpendiculară pe dreapta OQ, $O \notin d \cdot O$ secantă variabilă dusă prin O taie cercul C într-un punct $M \neq O$ și dreapta d într-un punct M'. Să se arate că produsul scalar $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$ este constant.

3. Să se arate că dacă T este o inversiune și dacă d este o dreaptă, atunci $T(d)$ este o dreaptă sau un cerc, după cum $O \in d$ sau $O \notin d$.

4. Dacă T este o inversiune și dacă C este un cerc, atunci $T(C)$ este o dreaptă sau un cerc, după cum $O \in C$ sau $O \notin C$.

5. Dacă T, T' sînt inversiuni de pol O și dacă H, H' sînt omotetii de centru O, atunci $T \circ T'$, $H \circ H'$ sînt omotetii, iar $T \circ H$ este o inversiune. Să se indice în fiecare caz polul, centrul, raportul și puterea.

10. Izometrii ale spațiului

Simetria față de un punct. Fiind dat un punct O, simetria față de O este transformarea care asociază fiecărui punct P punctul P' pentru care $\overrightarrow{OP'} \sim -\overrightarrow{OP}$. Dacă $P \neq O$, avem $P' \neq O$ și $O \in |PP'|$.

Dacă alegem un reper cartezian ortonormat $R = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ cu originea în O și dacă punctul P are coordonatele x, y, z, atunci punctul P' va avea coordonatele, (fig. VIII.16):

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z.$$

Fiind dat un al doilea punct $Q(p, q, r)$, simetricul lui Q va fi punctul $Q'(-p, -q, -r)$ și avem

$$d(P', Q')^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = d(P, Q)^2$$

Deci $d(P', Q') = d(P, Q)$. Punctele P, Q fiind arbitrare, rezultă că simetria față de punctul O este o izometrie.

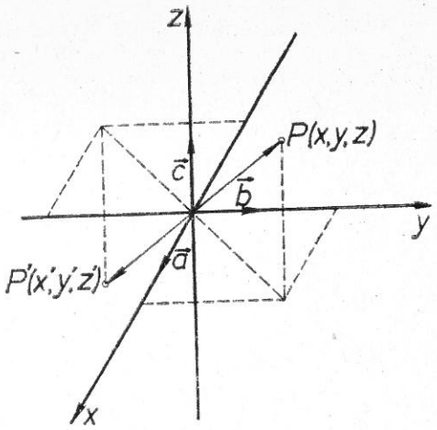


Fig. VIII.16

Simetria față de o dreaptă. Fiind dată o dreaptă d, simetria față de dreapta d asociază fiecărui punct P punctul P' astfel încît: $P' = P$ dacă $P \in d$: dacă $P \notin d$, dreapta d este perpendiculară pe dreapta PP' în mijlocul M al segmentului $|PP'|$ (fig. VIII.17).

Să alegem reperul R astfel ca $d = OA$. În acest caz, simetria față de dreapta d va asocia fiecărui punct $P(x, y, z)$ punctul $P'(x, -y, -z)$ (fig. VIII.18). Se verifică ușor că dacă P și Q sînt puncte oarecare, atunci avem

$$d(P', Q') = d(P, Q).$$

deci simetria față de orice dreaptă este o izometrie.

Simetria față de un plan. Fie p un plan. Simetria față de planul p este transformarea care asociază fiecărui punct P punctul P' definit astfel: $P' = P$

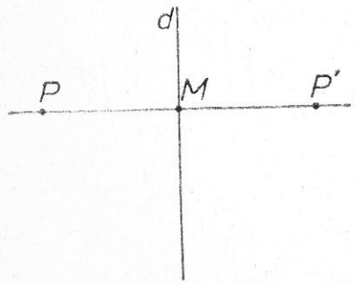


Fig. VIII.17

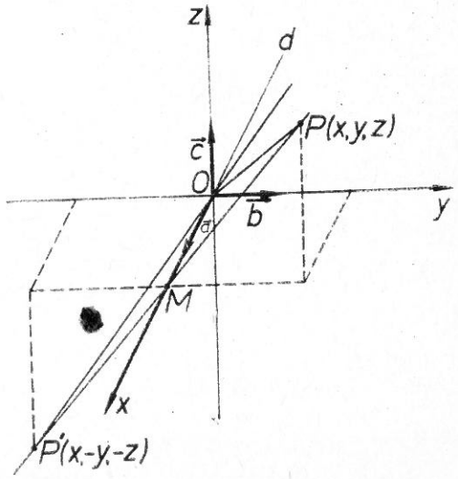


Fig. VIII.18

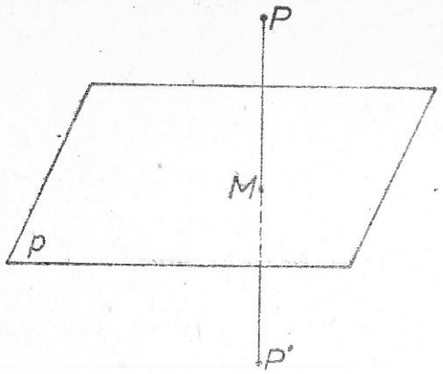


Fig. VIII.19

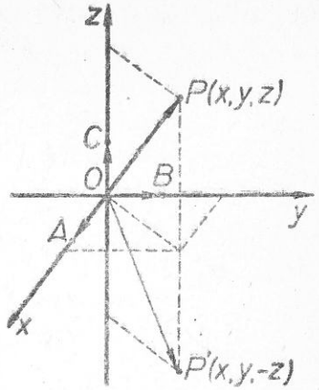


Fig. VIII.20

dacă $P \in p$; planul p este planul mediator al segmentului $[PP']$, dacă $P \notin p$, (fig. VIII.19).

Dacă alegem reperul R astfel ca $p = (OAB)$, atunci simetria față de planul p va asocia unui punct $P(x, y, z)$ punctul $P'(x, y, -z)$. Se verifică ușor că această transformare este o izometrie, (fig. VIII.20).

Exercițiu. *Să se arate că simetria față de un plan este o izometrie.*

Translații în spațiu. Fie $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ un vector arbitrar. Acest vector definește o transformare în spațiu, numită *translație* de vector $\overrightarrow{MN}$. Definiția acestei translații este analoagă definiției date pentru plan:

Fiind dat un punct oarecare P, translația de vector $\overrightarrow{MN}$ asociază punctului P acel punct P', pentru care avem $\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{MN}$.

Dacă alegem reperul R astfel ca $O = M$ și $N \in OA$, și dacă notăm prin $P'(x', y', z')$ imaginea punctului $P(x, y, z)$ prin translația de vector $\overrightarrow{MN}$, atunci avem relația $\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{MN}$. Aceasta înseamnă că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{PP'}$ au componentele scalare egale două cîte două. Componentele scalare ale lui $\overrightarrow{MN}$ sînt de forma $(h, 0, 0)$, iar componentele scalare ale vectorului $\overrightarrow{PP'}$ sînt $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$. Avem deci $x' - x = h$, $y' - y = 0$ și $z' - z = 0$, deci

$$x' = x + h, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

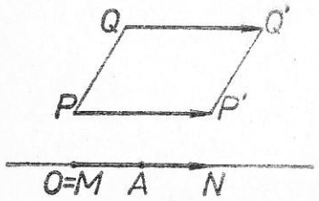


Fig. VIII.21

Dacă avem un al doilea punct Q și dacă $\overrightarrow{QQ'} \sim \overrightarrow{MN}$, atunci $\overrightarrow{QQ'} \sim \overrightarrow{PP'}$, deci $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$. Aceasta înseamnă că $d(P', Q') = d(P, Q)$, deci translația de vector $\overrightarrow{MN}$ este o izometrie, (fig. VIII.21).

Rotații în spațiu. Se numește *rotație proprie* în spațiu orice izometrie care admite o singură dreaptă de puncte fixe. O rotație oarecare este fie transformarea identică, fie o *rotație proprie*. Dreapta de puncte fixe ale unei rotații proprii se numește *axa de rotație*.

Exemplu. Fie p, q *două plane distincte, avînd ca intersecție o dreaptă, d. Fie S și T simetriile față de cele două plane. Compunerea* $S \circ T$ *este o rotație de axă d.*

Exercițiu. Să se arate că produsul a două simetrii față de două plane secante p, q este o rotație de axă $p \cap q$. Să se mai arate că dacă planele p, q sînt perpendiculare, atunci produsul celor două simetrii este o simetrie față de dreapta $p \cap q$.

Produsul dintre o rotație proprie R și o translație de-a lungul axei lui R este o izometrie, care poartă numele de *rototranslație*.

Fie T o rotație de axă d. Să alegem un reper cartezian ortonormat $R = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ avînd originea $O \in d$ și punctul $C \in d$, unde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Pentru un punct $M(x, y, z)$ avem

$$\overrightarrow{OM} \sim x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \tag{1}$$

Fie $M' = T(M)$, $M'(x', y', z')$. Atunci

$$\overrightarrow{OM'} \sim x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}. \tag{2}$$

Din $P \in d$ și $C \in d$ rezultă $T(O) = O$ și $T(C) = C$, deci avem și

$$T(\vec{c}) = \vec{c}.$$

Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ fiind perpendiculari pe axa d, rezultă că vectorii

$$\vec{a}' = T(\vec{a}), \quad \vec{b}' = T(\vec{b})$$

sînt perpendiculari pe axa d. Dacă $A' = T(A)$ și $B' = T(B)$, atunci (fig. VIII.22)

$$\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}, \quad \vec{b}' = \overrightarrow{OB'}. \tag{3}$$

Rezultă că punctele A', B' aparțin planului (OAB). Vectorii $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ sînt unitari și ortogonali, deci sînt de forma

$$\vec{a}' \sim \vec{a}\cos u + \vec{b}\sin u, \tag{4}$$

$$\vec{b}' \sim \vec{a}\cos v + \vec{b}\sin v,$$

unde $\cos u \cos v + \sin u \sin v = 0$. Ultima relație este echivalentă cu

$$\cos(u - v) = 0,$$

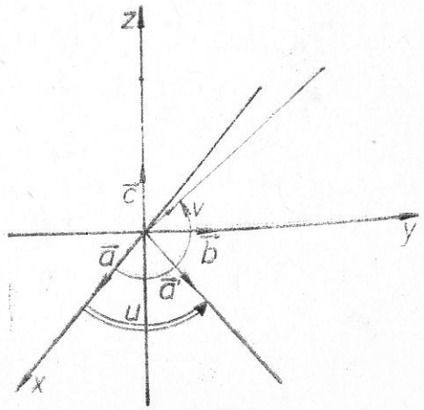


Fig. VIII.22

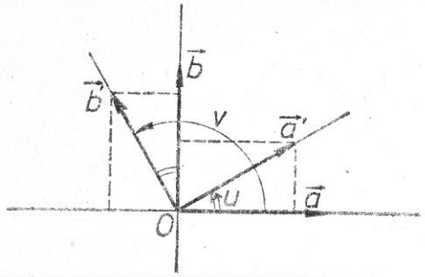


Fig. VIII.23

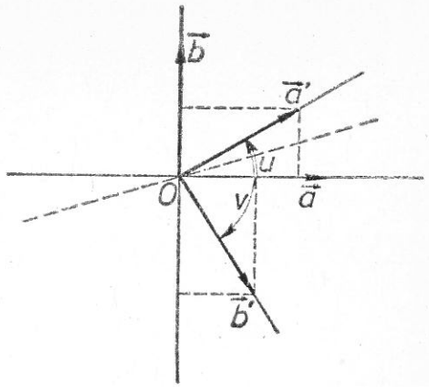


Fig. VIII.24

deci avem $v - u = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Formulele (4) rămîn valabile, dacă scădem din v numărul $2k\pi$. Deci putem presupune că avem

(5) $$v = u + \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad v = u - \frac{\pi}{2}.$$

În cazul $v = u + \frac{\pi}{2}$, formulele (4) devin (fig. VIII.23):

(6) $$\vec{a}' = -\vec{a}\cos u + \vec{b}\sin u, \quad \vec{b}' = -\vec{a}\sin u - \vec{b}\cos u$$

iar în cazul $v = u - \frac{\pi}{2}$, obținem (fig. VIII.24):

(7) $$\vec{a}' = \vec{a}\cos u + \vec{b}\sin u, \quad \vec{b}' = \vec{a}\sin u - \vec{b}\cos u.$$

Formulele (3) și (6) dau

(8) $$\overrightarrow{OM'} = T(\overrightarrow{OM}) = x\vec{a}' + y\vec{b}' + z\vec{c}' =$$
$$= x(\cos u\vec{a} + \sin u\vec{b}) + y(-\sin u\vec{a} + \cos u\vec{b}) + z\vec{c} =$$
$$= (x\cos u - y\sin u)\vec{a} + (x\sin u + y\cos u)\vec{b} + z\vec{c}.$$

Comparînd cu relația (2), obținem formulele care definesc coordonatele punctului $M' = T(M)$ în funcție de coordonatele punctului M:

(9) $$x' = x\cos u - y\sin u, \quad y' = x\sin u + y\cos u, \quad z' = z.$$

Exerciții

1. Să se arate că formulele (9) definesc o rotație de axă OC.

2. Fie M un punct nesituat pe dreapta $d = OC$ și fie $M' = T(M)$ punctul definit de formulele (9). Să se arate că avem

$$\cos \widehat{MOM'} = \cos u.$$

3. Să se arate că o rotație T transformă un plan perpendicular pe axa rotației în el însuși.

4. Să se arate că orice rotație lasă invariant orice cerc care are centrul pe axa de rotație și se găsește într-un plan perpendicular pe axă de rotație.

5. Să se arate că transformarea definită de formulele (3) și (7) admite puncte invariante și în afara axei OC.

6. Să se arate că transformarea definită de formulele (3) și (7) este o simetrie față de un plan ce trece prin dreapta OC.

7. Să se arate că o simetrie față de un plan nu este o rotație.

8. Să se arate că orice rotație în spațiu, față de o axă d, este egală cu produsul a două simetrii față de două plane ce trec prin axa d.

(*Indicație.* Se consideră un punct $M \in d$, apoi punctul $M' = T(M)$; se compune rotația T cu simetria față de planul mediator al segmentului $|MM'|$ și se arată că produsul obținut este o simetrie față de un nou plan și că rotația T este produsul celor două simetrii, luate într-o anumită ordine)

11. Proprietăți ale izometriilor în spațiu

Potrivit definiției date la p. 225, o izometrie în spațiu este o aplicație $T : S \to S$, care asociază fiecărui punct $M \in S$ un punct $M' = T(M)$ astfel încît T să păstreze distanțele între puncte. Asta înseamnă că la două puncte M și N, T asociază două puncte $M' = T(M)$, $N' = T(N)$ astfel ca $d(M', N') = d(M, N)$, (fig. VIII.25).

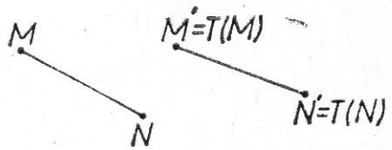


Fig. VIII.25

Exerciții

Folosind modelele de demonstrații date pentru izometrii ale unui plan, să se demonstreze că dacă T este o izometrie în spațiu, atunci:

1. T transformă trei puncte coliniare în trei puncte coliniare.

2. T transformă o dreaptă într-o dreaptă, surjectiv.

3. Dacă $B \in |AC|$ și dacă $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$, atunci $B' \in |A'C'|$.

4. Cu aceleași notații, dacă $\overrightarrow{AC} \sim x\overrightarrow{AB}$, atunci $\overrightarrow{A'C'} \sim x\overrightarrow{A'B}$.

5. Dacă $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$, $D' = T(D)$ și dacă $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, atunci $\overrightarrow{A'D'} \sim \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}$.

6. $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

7. Dacă d, d_1 sînt două drepte perpendiculare, atunci $T(d)$, $T(d_1)$ sînt două drepte perpendiculare.

(*Indicație.* Dacă $AB \perp BC$, atunci $d(A, B)^2 + d(B, C)^2 = d(A, C)^2$, deci $d(A', B')^2 + d(B', C')^2 = d(A', C')^2$).

Să demonstrăm proprietatea:

Imaginea printr-o izometrie a unui plan este un plan (fig. VIII.26).

Demonstrație. Fie $T : S \to S$ o izometrie și fie p un plan. Fie A, B, C trei puncte necoliniare în planul p și fie $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$ imaginile acestor puncte. Punctele A', B', C' sînt necoliniare, deoarece dacă aceste puncte ar fi coliniare, unul dintre ele s-ar găsi între celelalte două. Dacă am avea de exemplu $B' \in |A'C'|$, atunci am avea

$$d(A', B') + d(B', C') = d(A', C'),$$

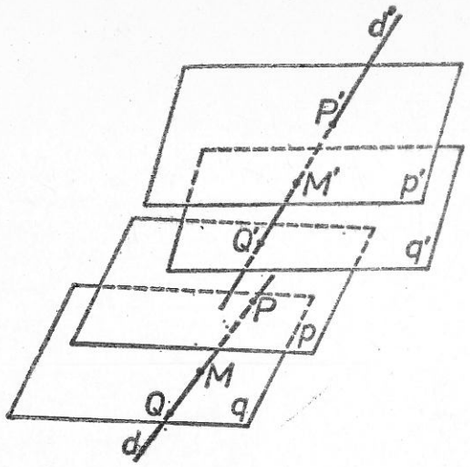


Fig. VIII.26

ceea ce implică $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, deci $B \in |AC|$, contrar ipotezei.

Punctele A', B', C' fiind necoliniare, ele aparțin unui plan unic p'. Vom arăta că $T(p) = p'$. Să arătăm la început că $T(p) \subset p'$.

Fie $M \in p$. Ducem prin M o dreaptă oarecare situată în planul p, astfel ca această dreaptă să intersecteze două din dreptele AB, BC, CA (cel puțin), în două puncte distincte, să spunem P și Q. Să presupunem că $P \in AB$ și $Q \in AC$. Avem $M \in PQ$. Imaginile acestor puncte vor avea proprietățile

$$P' \in A'B', \quad Q' \in A'C', \quad M' \in P'Q'.$$

Dar $A'B' \subset p'$, $A'C' \subset p'$. Rezultă $P' \in p'$ și $Q' \in p'$. Punctele P', Q' sînt distincte, deoarece izometriile sînt aplicații injective. Din $M' \in P'Q'$ rezultă $M' \in p'$; am arătat că $T(p) \subset p'$.

Pentru a arăta că $p' \subset T(p)$ procedăm la fel cum am arătat că o izometrie într-un plan transformă o dreaptă pe o dreaptă.

Exerciții

1. Să se arate că $p' \subset T(p)$.
2. Să se arate că orice izometrie transformă două plane paralele în două plane paralele.

Teoremă. Orice izometrie T a spațiului este o aplicație surjectivă.

Demonstrație. Trebuie arătat că orice punct M' este imaginea unui punct M prin izometria T. Fie p, q două plane paralele. Imaginile acestor plane prin T vor fi două plane p', q', de asemenea paralele. Prin M' să ducem o dreaptă d' neparalelă cu p', deci nici cu q'. Fie punctele (fig. VIII.27)

$$P' \in p' \cap d', \quad Q' \in q' \cap d'.$$

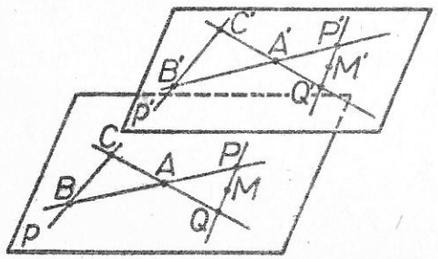


Fig. VIII.27

Din relațiile $T(p) = p'$, $T(q) = q'$ rezultă că există puncte $P \in p$ și $Q \in q$ astfel ca $T(P) = P'$ și $Q' = T(Q)$. Pe dreaptă $d = PQ$ considerăm acel punct M, pentru care avem:

$$d(M, P) = d(M', P'), \quad d(M, Q) = d(M', Q').$$

Atunci vom avea $M' = T(M)$.

Exerciții

1. Să se arate că orice izometrie în spațiu transformă două plane paralele în două plane paralele.
2. Să se arate că orice izometrie transformă două drepte concurente în două drepte concurente.
3. Să se arate că orice izometrie transformă două drepte paralele în două drepte paralele.
4. Să se arate că orice izometrie transformă o dreaptă d, care este paralelă cu un plan p, într-o dreaptă d', paralelă cu planul transformat p', prin aceeași izometrie.
5. Să se arate că imaginile printr-o izometrie a două drepte necoplanare sînt două drepte necoplanare.
6. Să se arate că imaginea printr-o izometrie a unui corp convex este un corp convex.
7. Să se arate că volumul unui corp convex și volumul corpului convex transformat printr-o izometrie sînt egale.
8. Să se arate că imaginea printr-o izometrie a unei suprafețe poliedrale regulate este o suprafață poliedrală regulată.

12. Proprietățile rotațiilor axiale

Fie T o rotație în spațiu față de dreapta d. Atunci T este o izometrie, ce admite fiecare punct al dreptei d ca punct invariant. Deci

$$M \in d \Rightarrow T(M) = M.$$

Fie p un plan perpendicular pe dreapta d și fie $O \in d \cap p$. Atunci O este un punct invariant și $T(p)$ va fi un plan p' ce trece prin O.

Dar orice izometrie păstrează relațiile de perpendicularitate. De exemplu, dacă M este un punct al dreptei d, diferit de O și dacă $A \in p$, atunci triunghiul MOA este dreptunghic în O, deci avem (fig. VIII.28)

$$d(M, O)^2 + d(O, A)^2 = d(M, A')^2.$$

Notînd $A' = T(A)$, din $M' = T(M) = M$ și $O' = T(O)$ rezultă

$$d(M, O)^2 + d(O, A')^2 = d(M, A')^2,$$

deci avem $OA' \perp OM$ sau $OA' \perp d$.

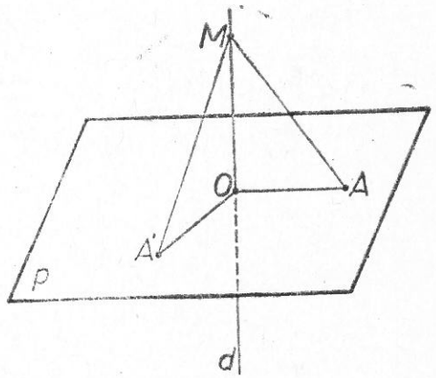


Fig. VIII.28

Aceasta înseamnă că dreapta d este perpendiculară în O pe planul p', care conține toate punctele $A' \in T(p)$. Rezultă $p' = p$. Deci:

Dacă T este o rotație de axă d, atunci orice plan perpendicular pe axa de rotație este invariant prin T.

Exercițiu. Să se arate că rotația T induce în fiecare plan p, perpendicular pe axa de rotație, o rotație în acel plan, centrul acestei rotații fiind punctul de intersecție a axei cu planul.