CURS 5

Aplicații liniare - continuare

- Fie V, W sp. vect. $T: V \to W$ aplicații liniare

1) $\mathrm{Ker}\, T = \{0_V\} \iff T$ inj.
2) $\mathrm{Im}\, T = W \iff T$ surj.

$\mathrm{Ker}\, T = \{x \in V \mid T(x) = 0_W\}$

„$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l} T(x) = 0_W \\ T(0_V) = 0_W \end{array}\right| \overset{T \text{ inj.}}{\Rightarrow} x = 0_V$

„$\Leftarrow$" $x, y \in V$ și $T(x) = T(y)$

- Fie V, W sp. vect. peste K. Spunem că V, W sunt izomorfe dacă $\exists\, T: V \to W$ izomorfism de sp. vect. (adică T lin. și surj.): $V \cong W$.

- <u>Obs</u> $T: V \to W$ lin și surj. și inj (bij.) $\Rightarrow T^{-1}$ liniară

(T) V un sp.; $\dim_K V = n \Rightarrow V \cong K^n$

<u>Dem</u>: $B = \{v_1, \dots v_n\}$ bază în V

$\forall x \in V\ \exists!\ x_1, \dots x_n \in K$ a.î. $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$[x]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$; fie $T: V \to \cancel{W}\ K^n$

$V \ni x \longrightarrow T(x) = [x]_B \Rightarrow T(x) + T(y) = [x]_B + [y]_B = [x+y]_B$

(T) <u>Teorema rang defect</u>

Fie V un K sp. vect. cu $\dim_K V = n < \infty$, $T: V \to W$ apl. lin. Atunci:

$\underbrace{\dim_K \mathrm{Ker}(T)}_{\text{defectul}} + \underbrace{\dim_K \mathrm{Im}(T)}_{\text{rangul}} = \dim_K V$

Dem: Fie $B' = \{v_1, \dots v_m\}$ bază în $\operatorname{Ker} T$

Completăm B' până la o bază $B = \{v_1, \dots v_m, v_{m+1} \dots v_n\}$ a lui V

Dem: $B'' = \{T(v_{m+1}), T(v_{m+1}), \dots T(v_n)\}$ bază a lui $\operatorname{Im} T = T(V)$

1) B'' = sist. lin. indep. → dem.

Fie $\alpha_{m+1}, \dots \alpha_n \in K$ a.î. $\alpha_{m+1} T(v_{m+1}), \dots \alpha_n T(v_n) = 0_W$

$$0_W = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i T(v_i) = T \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i v_i \Leftrightarrow \sum_{m+1}^{n} \alpha_i v_i \in \operatorname{Ker} T$$

B' = bază în $\operatorname{Ker} T \Rightarrow \exists \beta_1, \dots \beta_m \in K$ a.î. $\sum_{m+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i\right) - \left(\sum_{m+1}^{n} \alpha_i v_i\right) = 0$$

B = SLI $\Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = \overline{m+1, n}$, $\beta_i = 0 \ \forall i = \overline{1, m}$

2) B'' = sist de generatori pt. $\operatorname{Im} T$

Fie $y \in \operatorname{Im} f$; $\exists x \in V$ a.î. $T(x) = y$

B = bază în $V \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots \alpha_n \in K$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

$$\xrightarrow{\text{aplicăm } T} y = T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = \alpha_1 \underbrace{T(v_1)}_{0} + \dots + \alpha_m \underbrace{T(v_m)}_{0} + \dots + \alpha_n \underbrace{T(v_n)}_{0}$$

$$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

deci B'' bază a lui $\operatorname{Im}(T)$

- **Corolar:** V, W K-sp. vect., $\dim_K V = \dim_K W$ și $T: V \to W$ o apl. lin.

  UASE: T bij, T inj, T surj.

Dem: rezultă din teorema rangului defect.

Matricea unei aplicații liniare

- Fie V, W - ~~apl. lin~~, sp. vect. cu $\dim_K V = n$ și $\dim_K W = m$

$B_V = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B_W = \{f_1, \dots, f_m\}$

$T(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + a_{31} f_3 + \dots + a_{m1} f_m$

$\dots\dots\dots$

$T(e_n) = a_{m1} f_1 + a_{m2} f_2 + \dots + a_{mn} f_m$

$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$

$$[T]_{B_V B_W} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matricea lui T relativ la B_V și B_W

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [T(e_1)]_{B_W} & [T(e_2)]_{B_W} & [T(e_n)]_{B_W} \end{array}$$

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = \{(x+y+z, x+3y-2z)\}$

$$\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+3y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$T(e_1) = (1,1)$; $T(e_2) = (1,3)$; $T(e_3) = (1,-2)$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \right) \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow [T(x)]_{B_W} = [T]_{B_V B_W}$

- B'_V, B'_W alte baze

$[T(x)]_{B_W} = D[T(X)]_{B'_W}$ $\quad B_W \xrightarrow{D} B_{W'}$

$\cancel{[T(x)]_{B_V} = C[T(x)]}$ $\quad [X]_{B_V} = C[X]_{B'_V}$ $\quad B_V \xrightarrow{C} B_{V'}$

- $D[T(x)]_{B'_W} = [T]_{B_V B_W} C [X]_{B'_V} \Rightarrow [T]_{B_{V'} B_{W'}} = D^{-1} [T]_{B_V B_W} C$

- $\mathbb{R}[X]_{\leq 2} = \{aX^2 + bX + c \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$B = \{1, X, X^2\}$

$T[p] = p + p'$ apl. lin.

$T(1) = 1+0 = 1$, $T(X) = X+1$, $T(X^2) = X^2 + 2X$

$$[T]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $T(A) = A^T$

Operații cu aplicații liniare

- Fie V, W K-sp. vect ; $T, S: V \longrightarrow W$ ap lin. , $\alpha \in K$. Atunci:

1) $T+S : V \longrightarrow W$
2) $V \ni x \longrightarrow T(x) + S(x)$
3) $\alpha T : V \longrightarrow W$
4) $x \longrightarrow \alpha T(x)$

- Dacă V, W de dimensiune finită (au baza cu nr. finit de elem.), în B_V e o bază a lui V, B_W a lui W $\Rightarrow \begin{cases} [T+S]_{B_V B_W} = [T]_{B_V B_W} + [S]_{B_V B_W} \\ [\alpha T]_{B_V B_W} = \alpha [T]_{B_V B_W} \end{cases}$

- <u>Corolar:</u> V, W - sp. vect.
$\mathcal{L}(V, W) = \{ T: V \to W, \ T \text{ apl. lin.} \}$
Atunci $\mathcal{L}(V, W)$ K-sp. vect. cu op. def. mai sus

- Dacă $\dim_K V < \infty \Rightarrow \dim_K \mathcal{L}(V, W) = \dim_K V \cdot \dim_K W$

Compunerea aplicațiilor liniare

- V, W K-sp. vect. , $T: V \longrightarrow W$, $S: W \longrightarrow L$ apl. lin.
Atunci $S \circ T : V \longrightarrow L$ apl. lin dacă sp. sunt finit dimensionale
$[(S \circ T)(x)]_{B_L} = [S]_{B_W} [T]_{B_V B_W} [x]_{B_V}$
$[S \circ T] = [S]_{B_V B_W} [T]_{B_L B_W}$

Construcții de spații vectoriale

① Produsul direct

V_1, V_2 sunt K-sp. vect

$V_1 \times V_2 = \{ (x, y) \mid x \in V_1, y \in V_2 \}$ struct. de K-sp. vect. cu operațiile:

$$\begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \end{cases}$$

- Dacă $\dim_K V_1 = m < \infty$, $\dim_K V_2 = n$ $\Rightarrow$ $\dim_K V_1 \times V_2 = m \cdot n$
- $B_1 = \{e_1, \dots, e_m\}$, $B_2 = \{f_1, \dots f_n\}$

  $B = \{(e_i, f_j) \mid i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\}$ bază