CURS 4

Grupuri

- Grup = mulț. nevidă cu o op. alg. + asoc, el. n, el. sim. (± com)
- Morfism de grupuri de la G la G', $f: G \to G'$ a.î.

  $f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in G$
- G, G', G'' grupuri ; $f: G \to G'$ și $g: G' \to G''$ morfisme de grupuri $\Rightarrow g \circ f: G \to G''$ e morfism de grupuri
- $f \circ 1_G = f$ și $1_{G'} \circ f = f$, unde $f: G \to G'$ morfism

  G, G' - grupuri ; $f: G \to G'$ morfism : $f(e) = e'$

  $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}, x \in G$
- Morfism injectiv = G, G' grupuri ; $f: G \to G'$ morfism ; f inj
- Izomorfism = G, G' grupuri, $f: G \to G'$, $g: G' \to G$ a.î.

  $f \circ g = 1_{G'}$ și $g \circ f = 1_G \Rightarrow G \cong G'$
- Endomorfism = $f: G \to G$ morfism, G grup = End(G)
- Automorfism = G endomorfism + izomorfism = Aut(G)
- $f: G \to G'$ morfism, f bij $\Leftrightarrow f$ izomorfism

(T) Teorema lui Cayley

G grup $\Rightarrow \exists$ un morfism inj. de grupuri de la G la $S(G)$

$S(G)$ = grupul permutărilor lui G

- Produs direct de grupuri: G_1, G_2 grupuri, $G = G_1 \times G_2$

  $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$ asoc, el. n, el. sim (± com)

- Injecții canonice = morfisme inj. de grupuri

$s_1 : G_1 \hookrightarrow G_1 \times G_2$; $s_1(x_1) = (x_1, e_2)$

$s_2 : G_2 \to G_1 \times G_2$; $s_2(x_2) = (e_1, x_2)$

- Surjecții canonice = morfisme surj. de grupuri

$p_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$; $p_1(x_1, x_2) = x_1$

$p_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$; $p_2(x_1, x_2) = x_2$

- G_1, G_2, H_1, H_2 grupuri
$f_i : G_i \to H_i$; $i = 1,2$ morf. $\Bigg| \Rightarrow f_1 \times f_2 : G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$ morfism

- $(G_i)_{i \in I}$ familie nevidă de grupuri
Pe prod. cart. : $G = \prod_{i \in I} G_i$ $\Bigg| \Rightarrow (x_i)_{i \in I} \cdot (y_i)_{i \in I} = (x_i y_i)_{i \in I}$

- $(G_i)_{i \in I}$ fam. nevidă de gr.

$p_j : \prod_{i \in I} G_i \to G_j$ j-proiecția canonică, morf. surj. gr.

$s_j : G_j \to \prod_{i \in I} G_i$ j-injecția canonică

$s_j(a_j) = (a_i)_{i \in I}$, $a_i = e_i$ morf. inj. de gr.

$\boxed{p_j \circ s_j = 1_{G_j}}$

- $f_i : G_i \to H_i$ familie morf. grupuri
$(f_i)_{i \in I} \Rightarrow \prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} G_i \to \prod_{i \in I} H_i$ morf. de gr.

- Indicatorul lui Euler

$\varphi(n) = |U(\mathbb{Z}_n)|$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

unde $U(\mathbb{Z}_n)$ = gr. multiplicativ al el. inv. din $\mathbb{Z}_n$