CURS 4.

ȘIRURI & SERII DE FUNCȚII

CONVERGENȚA UNIFORMĂ A ȘIRULUI DE FUNCȚII

- (X, d) spațiu metric, $A \subset X$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ șir funcții
- $x_0 \in A$ pct convergență al șirului $\{f_n\}$, dacă șirul numeric $\{f_n(x_0)\}$ e convergent
- $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge simplu/punctual la $f : A \to \mathbb{R}$ dacă $f_n(x_0)$ converge la $f(x_0)$, $\forall x_0 \in A$
- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ sau $f_n \to f$
- $\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ a.î. $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
- $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge uniform la $f : A \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow[A]{u} f$

- ex: $f_n(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$
  - $x = 0$, $f_n(0) = 0$
  - $x > 0$, $|f_n(x)| < \dfrac{x}{1+nx} < \dfrac{1}{n} \to 0$

  $\Rightarrow f_n \to f$
  $f_n \to 0$

CRITERII DE CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ

① (X, d) spațiu metric; $A \subseteq X$; $f_n : A \to \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$$

② Criteriul Cauchy

(X, d) spațiu metric; $A \subseteq X$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

f_n șir convergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $n, m \geq n_\varepsilon$ și

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A$

③ Criteriul majorării / Weierstrass.

(X, d) spațiu metric ; $f_n : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq X$, $n \geq 1$, $f : A \to \mathbb{R}$

$\{a_u\}$, $a_u \in \mathbb{R}_+$; $a_u \to 0$

$|f_n(x) - f(x)| \leq a_u, \forall u \in \mathbb{N}, \forall x \in A \Rightarrow f_u \xrightarrow{u} f$

PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR UNIFORM CONVERGENTE

① Transferul de mărginire

(X, d) spațiu metric, $f_n : A \subseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $f : A \to \mathbb{R}$

f_n mărginită și $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f$ mărginită.

② Transferul de existență al limitei într-un punct

(X, d) spațiu metric, $f_n : A \subseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $f : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A'$ (pct. acumulare pt A), $f_n \xrightarrow{u} f$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) \right)$

③ Transfer de continuitate

(X, d) spațiu metric, $f_n : A \subseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $f : A \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A$

$f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n continuă în $x_0 \Rightarrow f$ continuă în x_0

Corolar: $f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n continuă $\Rightarrow f$ continuă ($\nexists$ reciproca)

④ Transfer de integrabilitate

$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann, $n \geq 1$; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f$ integrabilă Riemann pe $[a,b]$

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

⑤ Transfer de derivabilitate

$I \subseteq \mathbb{R}$, I interval mărginit, $f_n : I \to \mathbb{R}$ derivabile

$\left.\begin{array}{l} \exists\, x_0 \in I \text{ a.î. } \{f_n(x_0)\} \text{ convergent} \\ \exists\, g : I \to \mathbb{R} \text{ a.î. } f_n' \xrightarrow{u} g \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, f : I \to \mathbb{R}$ deriv. a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $f' = g$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$

CONVERGENȚA UNIFORMĂ A SERIILOR DE FUNCȚII

- (X, d) spațiu metric $f_n : A \subseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $\sum f_n$ serii de fct.
- $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplu/punctual dacă șirul sumelor parțiale $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ converge simplu
- $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniform la $f : A \to \mathbb{R}$ dacă șirul sumelor parțiale $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ converge uniform la f.

$\sum f_n \overset{u}{=} f$, $n \geq 1$

CRITERII DE CONVERGENȚĂ UNIFORMĂ

① Criteriul lui Cauchy

(X, d) spațiu metric, $f_n : A \subseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ uniform convergentă $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$\forall\, n, p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $|f_{n+1}(x) + f_{(n+2)}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in A$

② Criteriul lui Weierstrass.

(X,d) spațiu metric $A \subseteq X$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $\{a_n\}$ $a_n \in \mathbb{R}$

a.î. $\sum a_n$ convergentă, $n \geq 1$

$|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A \Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ uniform conv.

③ Criteriul lui Abel

(X,d) spațiu metric $A \subseteq X$. $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$\sum f_n$ uniform conv.; $\{g_n\}$ șir uniform mărg.

$|g_n(x)| \leq M$; $g_n(x)$ descresc $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n \cdot g_n$ e uniform conv.

④ Criteriul lui Dirichlet

(X,d) spațiu metric; $f_n, g_n : A \subseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$S_n = \sum_{k\geq 1}^{n} f_k$ uniform mărginit; $\{g_n\}$ șir converge uniform

g_n descresc. $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n g_n$ e uniform conv.

⑤ Criteriul lui Leibniz

(X,d) spațiu metric, $A \subseteq X$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$\{f_n\}$ șir, converge uniform la 0, f_n descresc $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă

PROPRIETĂȚI ALE SERIILOR UNIFORM CONVERGENTE

① Transfer de mărginire

(X,d) spațiu metric, $f_n : A \subseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ f_n mărginite

$\sum_{n\geq 1} f_n$ uniform conv. la $f : A \to \mathbb{R} \Rightarrow f$ mărginită

② Transfer de existență a limitei într-un punct

(X, d) spațiu metric, $f_n: A \subseteq X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $x_0 \in A'$, $f: A \to \mathbb{R}$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$; $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ uniform conv. la $f \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \sum\limits_{n \geq 1} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$

③ Transfer de continuitate

(X, d) spațiu metric $A \subseteq X$, $f_n: A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

f_n continuă în x_0 $\forall n \geq 1$ și $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ uniform conv. la $f \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ cont în x_0

- Corolar: f_n continuă ; $\sum f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f$ continuă