CURS 1

• Calc. dif. & int
- → ec. diferențiale
- → ec. cu elemente parțiale

⇒ calcul numeric ⇒
⇒ sol. aprox.

Șiruri de nr. reale

• **Def**: S.n. șir de nr $\in \mathbb{R}$ o fct. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$x_n = f(x)$ term. gen. de rang n.

• **Not**: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; $\{x_n\}_n$; $\{x_n\}$; x_n

• **Def**: a) șirul $\{x_n\}$ s.n. majorat (minorat) dacă mulț. elementelor sale este majorată (minorată).

b) șirul $\{x_n\}$ s.n. mărginit dacă $\exists\ M \geq 0$ cu $\{x_n\} \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) șirul $\{x_n\}$ s.n. nemărginit dacă pentru $\forall$ interval real mărginit, $\exists$ cel puțin un termen al șirului în afara acestui interval

ex: $x_n = -n$ este majorat, nu minorat
$x_n = (-1) \cdot n$ nu este nici majorat, nici min.

• **Monotonie**:
- → $\{x_n\}$ cresc / str. cresc dacă $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n$
- → $\{x_n\}$ descresc / str. descresc dacă $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall n$
- → $\{x_n\}$ monoton / str. monoton dacă este (strict) cresc / descresc

ex: $x_n = (-1)^n$
$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$
⇒ nici ↗, nici ↘

• $\{x_n\}$ și $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un șir cresc de nr. nat.
$y_k := x_{n_k}$ s.n. subșir al șirului $\{x_n\}$

- **Conv./Div.**
  - $\{x_n\}$ $\exists$ limită $x \in \mathbb{R}$ = $\boxed{\text{convergent}}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$
    not.: $\lim_{n \to \infty} x_n = x$; $x_n \to x$
  - $\{x_n\}$ nu are limită = $\boxed{\text{divergent}}$

ex: $x_n = (-1)^n$ nu are limită?
Pp. că $\exists$ $l = \lim_{n \to \infty} x_n$
$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} n \text{ par} \Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{2} \\ n \text{ impar} \Rightarrow |1 + l| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2 = |(1 + l) + (1 - l)| \leq |1 + l| + |1 - l| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

T Limita unui șir convergent este unică

T $\forall$ subșir al unui șir convergent, converge la lim. șirului

T $\forall$ șir convergent e mărginit (reciproca $\nexists$)
ex. $x_n = (-1)^n$ nemărg. și conv.

T Criteriul comparației: $\{x_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \geq 0$ $\forall n$, $\alpha_n \to 0$
Dacă $|x_n - x| \leq \alpha_n$ $\forall n \Rightarrow x_n \to x$.

T $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $x_n \to x$ și $y_n \to y$ atunci

a) $x_n + y_n \to x + y$
b) $a \in \mathbb{R}$; $a \cdot x_n \to ax$
c) $x_n y_n \to xy$
d) $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ dacă $x \neq 0$
e) $x_n \leq y_n$ $\forall n \Rightarrow x \leq y$

- Criteriul cleștelui: $x_n \leq z_n \leq y_n$ $\forall n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ $\Rightarrow z_n \to x$

T TEOREMA CONVERGENȚEI ȘIRURILOR MONOTONE

a) $\{x_n\}$ cresc. și mărg. $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ convergent
b) $\{x_n\}$ descresc. și minorat $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ convergent

- Lema lui Cesaro

$\forall$ şir mărginit admite un subşir convergent

- Şir Cauchy (fundamental) dacă:

$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x_m| < \varepsilon$; $\forall n, m \geq n_\varepsilon$

$m = n+p$

(T) $\{x_n\}$ convergent $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ este Cauchy

ex: $x_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n}$ este Cauchy

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\sin (n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin (n+2)x}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin (n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - 1/2^p}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} \to 0$$

ex: $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ nu este Cauchy

pt $\varepsilon = 1$ $|x_{2n} - x_n| < 1$

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right| \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} > 1, \infty$$

Şiruri cu limită $\pm\infty$

- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
- $\{x_n\}$ are $\lim = +\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \geq \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$
- $\{x_n\}$ are $\lim = -\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$

(T) $\left.\begin{array}{l}\{x_n\}, \{y_n\} \\ x_n \leq y_n \ \forall n\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \text{dacă } x_n \to +\infty \Rightarrow y_n \to +\infty \\ \text{dacă } y_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty \end{cases}$

(T) a) $x_n \to +\infty$, $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ $\Rightarrow$ $x_n + y_n \to +\infty$

b) $x_n \to -\infty$, $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$ $\Rightarrow$ $x_n + y_n \to 0$

c) $x_n \to +\infty$; $y_n \to y$; $y > 0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \to +\infty$

d) $x_n \to -\infty$; $y_n \to y$; $y > 0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \to -\infty$

T a) $x_n \to +\infty \Rightarrow 1/x_n \to 0$

b) $x_n \to -\infty \Rightarrow 1/x_n \to 0$

T $x_n \to 0$, $x_n \lesseqgtr 0$ $\forall n \Rightarrow 1/x_n \to \pm\infty$

T a) $\{x_n\}$ cresc. și nemărg. $\Rightarrow x_n \to +\infty$

b) $\{x_n\}$ descresc. și nemărg. $\Rightarrow x_n \to -\infty$

Limita superioară / inferioară

- $A \subseteq \mathbb{R}$
  - $\to$ A majorată $\Rightarrow \sup A$ – c.m. mic majorant a lui A
  - $\to$ A minorată $\Rightarrow \inf A$ – c.m. mare minorant a lui A
- $\{x_n\} \Rightarrow \begin{cases} y_n := \sup \{x_k ; k \geq n\} \\ z_n := \inf \{x_k ; k \geq n\} \end{cases}$
- Def: Limită sup. a $\{x_n\}$: $y := \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \{x_k ; k \geq n\}$

  notație: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$
- Def: Limită inf. a $\{x_n\}$: $z := \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf \{x_k ; k \geq n\}$

  notație: $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$ sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

  ex. $x_n = (-1)^n$, $x_{2k} = 1$, $x_{2k+1} = -1$

  $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$

T $\{x_n\}$ are lim $x \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = x = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

(T) $\{x_n\}$ $\to$ ∃ un subșir monoton care converge la $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$
$\to$ ∃ —— " —— $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

(T) $\{x_n\}$, A = mult. tuturor lim. ale tuturor subșirurilor $\{x_n\}$
- $A \neq \emptyset$
- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} = \inf A$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup A$
- x_n convergent $\Leftrightarrow$ A are un singur element

ex: $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$
$A = \{-\sqrt{3}/2\,;\, 0\,;\, \sqrt{3}/2\}$ $\Rightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\sqrt{3}/2$ și $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sqrt{3}/2$

ex: $\mathbb{Q}$; $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$A = \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \begin{cases} \lim\inf = -\infty \\ \lim\sup = +\infty \end{cases}$

ex: $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{n(n+1)/2}$
$x_{4n} = 2$ $\quad x_{4n+2} = -4$
$x_{4n+1} = 0$ $\quad x_{4n+3} = 6$
$\Rightarrow \begin{cases} \lim\inf = -4 \\ \lim\sup = 6 \end{cases}$

(T) $\{x_n\}$, $x_n > 0\ \forall n \Rightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \le$
$\le \lim\limits_{n\to\infty} \sup \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Corolar: $\{x_n\}$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Dacă ∃ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$; $l \in [0, \infty] \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

Serii de nr. reale

- $\{x_n\}$; $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ $\Rightarrow$ șirul sumelor parțiale
- Cuplul $(\{x_n\}; \{S_n\})$ s.n. $\boxed{\text{seria}}$ asociată lui $\{x_n\}$

Notație: $\sum\limits_{n\ge 0} x_n$ sau $\sum\limits_{n\ge 0}^{\infty} x_n$ sau $\sum x_n$

- Seria convergentă = $\{S_n\}$ e convergentă
- Seria absolut convergentă = $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ e convergentă
- Seria divergentă = nu este conv.

T Dacă seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ convergentă $\Rightarrow \{x_n\}$ converge la 0

- Corolar:

Dacă șirul $\{x_n\}$ nu converge la 0 $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ divergentă
Reciproca $\nexists$

- Dacă într-o serie se înlocuiesc un nr. finit de term. cu alte valori $\Rightarrow$ seria obținută are aceeași natură ca seria inițială

ex: seria geometrică $\sum_{n\geq 0} q^n$

$S_n = 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$

S_n conv. $\Rightarrow |q| < 1$
S_n div. $\Rightarrow |q| \geq 1$

ex: $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$

ex: $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ div. $\Rightarrow S_n \to 1$ și $S_{2n+1} \to 0$

ex: seria armonică $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ nu e conv.

- Criteriul de convergență

T1. Criteriul lui Cauchy

Seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ conv. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

T2. Criteriul lui Abel

$\{x_n\}$; $x_n \searrow$, conv. la 0
$\{y_n\}$; $s_n = y_1 + \dots + y_n$ e mărg. $\Big| \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n y_n$ e conv.

T3. Criteriul lui Dirichlet

$\{x_n\}$; $x_n \searrow$, conv.
$\{y_n\}$; $\sum_{n\geq 0} y_n$ conv. $\Big| \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n \cdot y_n$ e conv.

T4. Criteriul lui Leibniz

$\{x_n\}$; $x_n \searrow$, conv. la 0 $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} (-1)^n x_n$ conv.

T5. Primul criteriu al comparației

$\{x_n\}$; $\{y_n\}$; $x_n \leq y_n$; $\forall n$.

a) Seria $\sum_{n\geq 0} y_n$ e conv. $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ conv.

b) seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ div. $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} y_n$ div.

ex: $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha < 1$ div.

T6. Al doilea criteriu al comparației

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$; $x_n, y_n > 0$ $\forall n$

Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ $\forall n$ atunci

a) $\sum y_n$ conv. $\Rightarrow \sum x_n$ conv.

b) $\sum x_n$ div $\Rightarrow \sum y_n$ div

T7. Criteriul raportului la limită

$\{x_n\}$; $\{y_n\}$; P.p. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in \mathbb{R} \neq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum x_n$ și $\sum y_n$ au aceeași natură (conv / div) ex: $\sum_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n}$; $x_n = \sin\frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$

T8 Criteriul raportului D'Alembert

$\{x_n\}$, $x_n > 0$ $\forall n$ P.p. că $\exists$ $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

a) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ conv.

b) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ div.

T9 Criteriul rădăcinii Cauchy

$\{x_n\}$, $x_n > 0$ $\forall n$ P.p. că $\exists$ $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

a) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ conv

b) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ div