Tanislav Alexia
grupa 132

Aplicații liniare. Endomorfisme. Izomorfisme. Automorfisme. Reprezentări în coordonate și vectoriale.

O funcție $T: V \to W$, unde V și W sunt spații vectoriale, se numește aplicație liniară sau morfism de spații vectoriale dacă:

1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$, $\forall x, y \in V$
2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in K$ corp comutativ

Dacă $T: V \to W$ este o aplicație liniară, atunci:

1) $T(0_V) = 0_W$
2) $T(-x) = T(x)$ $\forall x \in W$
3) $Ker(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0_W\}$ subspațiu al lui V
4) $Im(T) = \{y \in W \mid \exists x \in V$ a.î. $y = T(x)\}$ subspațiu al lui V

Aplicația liniară $T: V \to W$ este injectivă dacă și numai dacă $Ker(T) = \{0_V\}$.

Aplicația liniară $T: V \to W$ este surjectivă dacă și numai dacă $Im T = W$.

Spațiile vectoriale peste K, V și W sunt izomorfe, dacă există o aplicație liniară bijectivă (izomorfism) $T: V \to W$.

Morfismul de spații vectoriale se numește automorfism dacă $V = W$, $T: V \to V$.

Izomorfismul de spații vectoriale V, W se numește endomorfism, dacă $V = W$, $T: V \to V$.

Fie V un spațiu vectorial și $\dim_K V = m$, atunci V este izomorf cu K^m ($V \cong K^m$).

Fie V și W spații vectoriale cu $\dim_K V = m$ și $\dim_K W = m$

$B_V = \{e_1, \dots e_m\}$, $B_W = \{f_1, \dots f_m\}$

$T(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$T(e_m) = a_{1m} f_1 + a_{2m} f_m + \dots + a_{mm} + f_m$

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Deci matricea lui T relativ la B_V și B_W este:

$$[T]_{B_V B_W} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [T(e_1)]_{B_W} & [T(e_2)]_{B_W} & & [T(e_m)]_{B_W} \end{matrix}$$