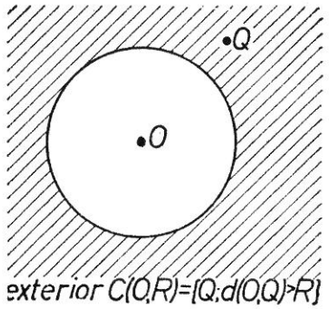

Fig. II.3

iar *exteriorul* cercului $C(O, R)$ (fig. II.3) este definit prin formula

$$\text{ext } C(O, R) = \{Q;\ d(O, Q) > R\}.$$

Discul de centru O și rază R este mulțimea

$$D(O, R) = \{A;\ d(O, A) \leqslant R\} = \\ = \text{int } C(O, R) \cup C(O, R).$$

Din axioma de purtare congruentă a segmentelor rezultă că:

Orice dreaptă d, care trece prin punctul O, intersectează cercul $C(O, R)$ în două puncte A, B astfel ca O să fie mijlocul segmentului $|AB|$ (fig. II.4).

Rezultă că *cercul $C(O, R)$ este o figură simetrică față de centrul O.*

Dacă o dreaptă d trece prin centrul cercului $C(O, R)$ și taie acest cerc în punctele A, B, se spune că segmentul $|AB|$ este *diametrul* determinat de dreapta d în cercul $C(O, R)$.

Orice punct al segmentului $|AB|$ este un punct interior cercului $C(O, R)$, deoarece pentru $Q \in |AB|$, avem $d(O, Q) < d(O, A) = d(O, B) = R$.

Fie Q un punct pe diametrul $|AB|$ și fie d' perpendiculara ridicată în Q pe dreapta $d = AB$ (fig. II.5). Pe dreapta d' există două puncte M, N

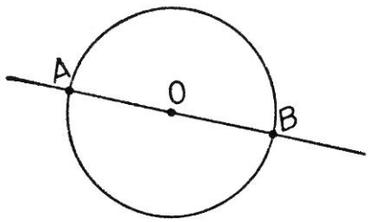

Fig. II.4

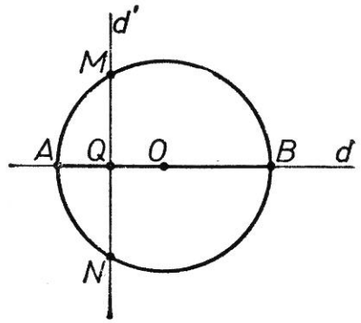

Fig. II.5

astfel ca $d(Q, M) = d(Q, N) = \sqrt{R^2 - d(O, Q)^2}$ și $Q \in |MN|$. Vom avea, aplicînd teorema lui Pitagora, $d(O, M) = d(O, N) = R$, deci punctele M, N aparțin cercului $C(O, R)$. Punctele M, N sînt simetrice față de dreapta d. Cînd punctul Q descrie diametrul $|AB|$, punctele M, N descriu cercul $C(O, R)$, exceptînd punctele A, B. Deci punctele cercului $C(O, R)$ se împart în perechi de puncte simetrice față de diametrul $|AB|$, cu excepția punctelor A, B, care sînt fiecare propriul său simetric față de AB.

Teoremă. Interiorul unui cerc este o mulțime convexă.

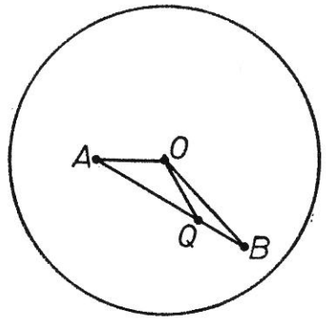

Fig. II.6

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că, dacă A, B sînt două puncte interioare cercului $C = C(O, R)$ (fig. II.6) atunci pentru orice punct $Q \in |AB|$ avem $Q \in \text{int } C$. Deci trebuie să demonstrăm implicația

$$d(O, A) < R,\ d(O, B) < R.$$
$$Q \in |AB| \Rightarrow d(O, Q) < R.$$

Dar la pag. 32 am demonstrat că segmentul care unește un vîrf al unui triunghi cu un punct situat pe latura opusă acelui vîrf este mai mic decît cea mai mare din laturile ce pornesc din vîrful considerat. Implicația precedentă este deci dovedită.

Intersecția unei drepte cu un cerc

Vom presupune cercul $C = C(O, R)$ fixat și vom studia intersecția unei drepte d cu cercul C, considerînd toate cazurile posibile.

Dacă dreapta d trece prin centrul O, intersecția $d \cap C$ este formată din două puncte simetrice față de punctul O (fig. II.4).

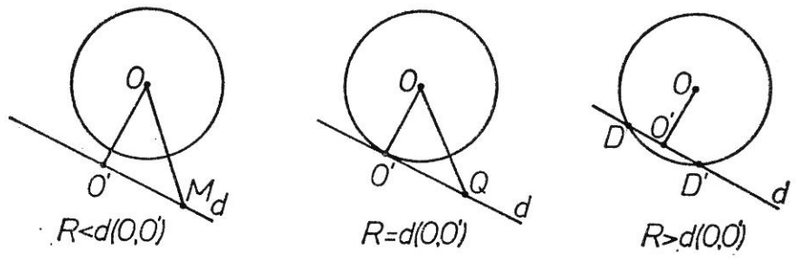

Fig. II.7

Să presupunem atunci că d nu trece prin O și să notăm prin O' proiecția ortogonală a punctului O pe dreapta d. Dreapta $d' = OO'$ este atunci perpendiculară pe d. Pentru un punct oarecare $M \in d$ avem $d(O, M) = \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', M)^2} \geqslant d(O, O')$.

Rezultă că dacă $d(O, O') > R$, atunci toate punctele dreptei d sînt exterioare cercului C și intersecția $C \cap d$ este vidă (fig. II.7).

Dacă $d(O, O') = R$, O' aparține cercului C și, pentru orice punct $Q \in d$ diferit de O', avem $d(O, Q) > R$, deci $Q \notin C$. Aceasta înseamnă că, în cazul

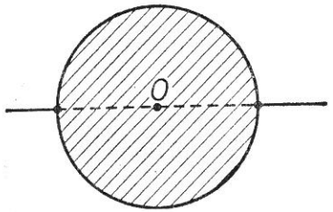

Fig. II.8

$d(O, O') = R$, O' este unicul punct comun dreptei d și cercului C. Se spune că dreapta d este *tangentă* în O' cercului C.

Dacă $d(O, O') < R$, există două puncte D, D' pe dreapta d astfel ca $d(O', D) = d(O', D') = \sqrt{R^2 - d(O, O')^2}$, $O' \in |DD'|$. Puntele D, D' sînt punctele ce formează intersecția $d \cap C$ (fig. II.7).

În rezumat:

Un cerc și o dreaptă pot avea cel mult două puncte comune. Dacă dreapta d are un singur punct comun cu cercul C, atunci d este tangentă la C într-un punct O' și este perpendiculară pe dreapta ce unește punctul O' cu centrul cercului C.

Dacă o dreaptă d intersectează cercul C în două puncte distincte, se spune că d este o *secantă* la C.

Arce și corzi într-un cerc

Fie cercul $C = C(O, R)$ și dreapta d trecînd prin două puncte A, B ale cercului C, deci astfel ca $d \cap C = \{A, B\}$. Vom presupune că O nu aparține dreptei d, deci că $|AB|$ nu este un diametru, și că $A \neq B$. Vom extinde în primul rînd o proprietate verificată pentru un diametru (fig. II.9):

Dacă A, B sînt două puncte distincte ale unui cerc C, atunci

(1) $$|AB| = AB \cap \operatorname{int} C.$$

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm incluziunile.

(1') $$|AB| \subset \operatorname{int} C \cap d, \quad \operatorname{int} C \cap d \subset |AB|, \quad d = AB.$$

Dacă $P \in |AB|$ (fig. II.10) și dacă notăm prin O' mijlocul segmentului $|AB|$, avem $d(O', P) < d(O', A) = d(O', B)$, deci $d(O, P) = \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', P)^2} < \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', A)^2} = d(O, A) = R$, deci $P \in \operatorname{int} C$. Avem de asemenea $P \in AB$, deci în definitiv $P \in \operatorname{int} C \cap d$.

Reciproc, dacă $P \in \operatorname{int} C \cap d$, atunci $d(O', P) = \sqrt{d(O, P)^2 - d(O, O')^2} < \sqrt{R^2 - d(O, O')^2} = d(O', A)$, deci $P \in |AB|$.

În general, un segment $|AB|$, avînd capetele A, B pe un cerc C, se numește *coardă* în cercul C. Vom considera în acest paragraf numai corzi, care nu sînt diametri.

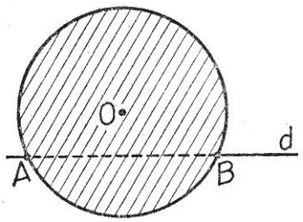

Fig. II.9

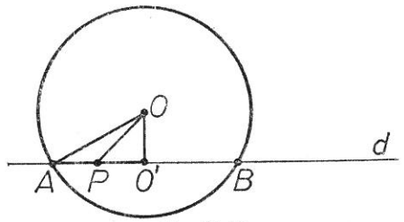

Fig. II.10

$0 < d(O, [AB]) < R$ - condiția ca $[AB]$ să aparțină int C

Din considerațiile făcute anterior rezultă că *proiecția centrului cercului C pe o coardă $|AB|$ este mijlocul acestei corzi.*

Din teorema I de congruență rezultă că:

Dacă $|AB|$, $|A'B'|$ sînt două corzi în cercul C, atunci relația $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$ implică $d(A, B) = d(A', B')$ (fig. II. 11).

Din teorema III de congruență rezultă proprietatea reciprocă:

Dacă $d(A, B) = d(A', B')$, atunci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$.

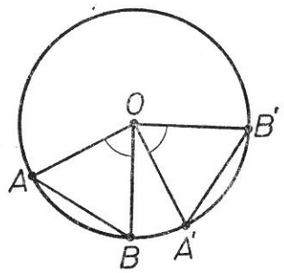

Fig. II.11

Fie d dreapta ce conține coarda $|AB|$ în cercul C, astfel ca $O \notin d$. Fie S' semiplanul limitat de d și care conține punctul O și fie S'' semiplanul opus. Mulțimile

$$C' = S' \cap C, \quad C'' = S'' \cap C$$

se numesc *arcele* limitate de punctele A, B pe cercul C [illegible] se numește *arcul mare*, iar C'' *arcul mic*, avînd capetele A, B (fig. II.12).

Fie M un punct situat pe arcul mic C'' (fig. II.13). Atunci punctele O, M sînt în semiplane opuse față de AB, deci segmentul $|OM|$ are un punct comun

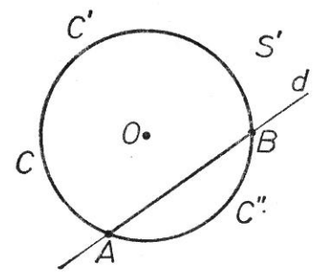

Fig. II.12

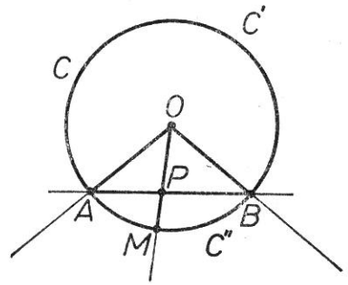

Fig. II.13

P cu dreapta d. Punctul P este interior cercului C și aparține dreptei AB, deci $P \in AB \cap \operatorname{int} C = |AB|$. Punctele A, B fiind situate pe laturile unghiului $\widehat{AOB}$, rezultă că P este un punct interior unghiului $\widehat{AOB}$. Deci:

Punctele arcului mic C'' aparțin interiorului unghiului $\widehat{AOB}$.

Reciproc, dacă M este un punct pe cercul C, interior unghiului $\widehat{AOB}$, atunci semidreapta $|OM$ intersectează segmentul $|AB|$ într-un punct P și $d(O, P) < d(O, M) = R$, deci $P \in |OM|$; aceasta înseamnă că M este în semiplanul opus punctului O față de dreapta AB, deci $M \in S''$. Dar $M \in C$, deci $M \in S'' \cap C = C''$. Deci:

Punctele cercului C, interioare unghiului $\widehat{AOB}$, aparțin arcului mic C''.

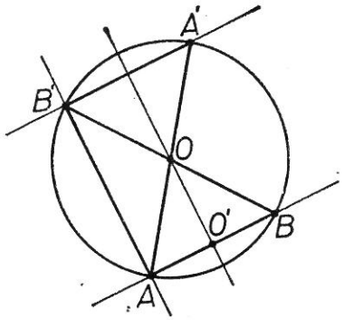

Fig. II.14

Teoremă. Dacă $|AB|$ este o coardă în cercul C, astfel ca $O \notin AB$ și dacă A', B' sînt simetricele punctelor A, B față de centrul O, atunci avem $AB' \perp AB$ și $A'B' \parallel AB$ (fig. II.14).

Demonstrație. Fie O' mijlocul segmentului $|AB|$. Din teorema lui Thales restrînsă rezultă $AB' \parallel OO'$. Dar $OO' \perp AB$, deci $AB' \perp AB$. La fel se arată că $AB' \perp A'B'$ și rezultă $A'B' \parallel AB$.

Punctele A', B' aparțin semiplanului S', deci arcului mare C'.

2. Unghiuri înscrise într-un cerc

Fie $|AB|$ o coardă în cercul C, de centru O, astfel ca $O \notin AB$. Notăm prin C', respectiv C'' arcul mare și arcul mic definite de punctele A, B pe cercul C.

Teoremă. Dacă $M \in C'$, atunci $2\widehat{AMB} \equiv \widehat{AOB}$ și $\widehat{AMB}$ este un unghi ascuțit.

Demonstrație. Fie M' simetricul punctului M față de centrul O. Distingem mai multe cazuri:

1. $M' = A$. Aplicînd teorema 2 a unghiului exterior triunghiului isoscel MOB, obținem $\widehat{AOB} = \widehat{M'OB} \equiv 2\widehat{OMB} = 2\widehat{AMB}$ (fig. II.15).

Cazul $M' = B$ se tratează în același fel.

2. $M' \in C''$. În acest caz, punctele M, M' sînt în semiplane opuse față de dreapta AB, deci segmentul $|MM'|$ are un punct comun P cu dreapta AB (fig. II.16). Punctul P este interior cercului C, deci aparține segmentului

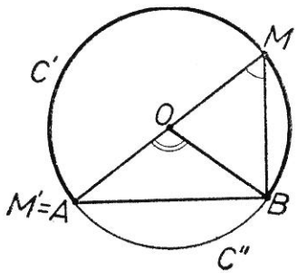

Fig. II.15

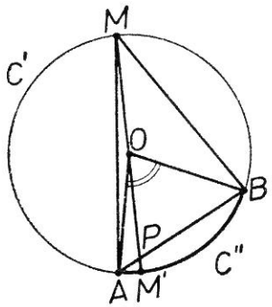

Fig. II.16

$|AB| = AB \cap \text{int } C$. Rezultă că semidreapta $|MP = |MM'$ este interioară unghiului $\widehat{AMB}$ și atunci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMM'} + \widehat{M'MB}$.

Rezultă $2\widehat{AMB} \equiv 2\widehat{AMM'} + 2\widehat{M'MB} \equiv \widehat{AOM'} + \widehat{M'OB} = \widehat{AOB}$.

3. $M' \in C'$. În acest caz, punctele M, M' sînt în același semiplan față de dreapta AB, deci segmentul $|MM'|$ nu intersectează dreapta AB(fig.II.17). Atunci nici segmentul $|AB|$ nu intersectează dreapta MM', deoarece un punct din intersecția $|AB| \cap MM'$ fiind interior cercului C, va fi pe segmentele $|AB|$, $|MM'|$, deci s-ar găsi în $|MM'| \cap AB$. Rezultă că semidreptele $|MA$, $|MB$ sînt de aceeași parte a dreptei MM'. Atunci fie $|MB$ este interioară unghiului $\widehat{AMM'}$, fie $|MA$ este interioară unghiului $\widehat{BMM'}$. În primul caz, avem $\widehat{AMM'} \equiv \widehat{AMB} + \widehat{BMM'}$, deci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMM'} - \widehat{BMM'}$, $2\widehat{AMB} \equiv 2\widehat{AMM'} - 2\widehat{BMM'} \equiv \widehat{AOM'} - \widehat{BOM'} \equiv \widehat{AOB}$. Al doilea caz, se obține din primul, schimbînd A cu B.

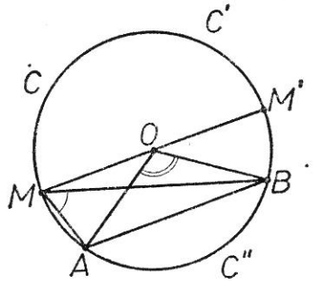

Fig. II.17

Teorema este demonstrată.

Corolar. Dacă M, P sînt două puncte oarecare pe arcul mare limitat de punctele A, B pe cercul C, atunci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{APB}$, și $\widehat{AMB}$ este un unghi ascuțit.

Teoremă. Dacă N este un punct pe arcul mic C'', limitat de punctele A, B pe cercul C, atunci, pentru orice punct $M \in C'$, avem

(2) $$\widehat{ANB} + \widehat{AMB} \equiv \textit{unghi alungit} \quad \text{(fig. II.18).}$$

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm formula (2) pentru o alegere particulară a punctului M pe arcul C'. Să luăm $M = N'$, simetricul lui N față de centrul O. Segmentele $|NN'|$, $|AB|$ au un punct comun P și avem (fig. II.19).

$$\widehat{ANB} \equiv \widehat{ANN'} + \widehat{N'NB}, \quad \widehat{AMB} = \widehat{AN'B} \equiv \widehat{AN'N} + \widehat{NN'B}.$$

În triunghiurile dreptunghice ANN', BNN' avem $\widehat{AN'N} + \widehat{ANN'} \equiv$ dr, $\widehat{BN'N} + \widehat{BNN'} \equiv$ dr, unde dr este un unghi drept. Rezultă

$$\widehat{ANB} + \widehat{AN'B} \equiv 2 \text{ dr} = \text{unghi alungit.}$$

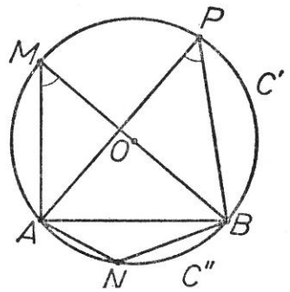

Fig. II.18

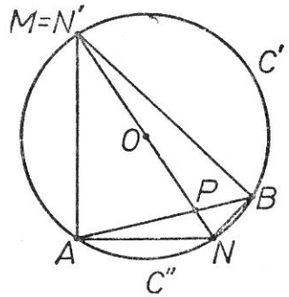

Fig. II.19

Formula (2) este acuma o consecință a corolarului precedent.

Din formula (2) rezultă următorul

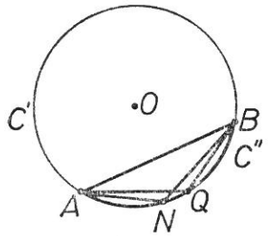

Fig. II.20

Corolar. Dacă N, Q sînt două puncte arbitrare pe arcul mic C'', limitat de punctele A, B pe cercul C, atunci $\widehat{ANB} \equiv \widehat{AQB}$ și $\widehat{ANB}$ este un unghi obtuz (fig. II.20).

Tangenta t la cercul C într-un punct $A \in C$ poate fi considerată ca o poziție limită a unei secante la cerc, duse prin punctul A. Teorema următoare este o completare a teoremelor date anterior.

Teoremă. Fie t tangenta în punctul $A \in C$ la cercul C și fie s semidreapta $t \cap S''$, unde S'' este semiplanul limitat de secanta AB, opus punctului O. Dacă $B \in C$, avem $\widehat{2sh} \equiv \widehat{AOB}$, unde $h = |AB$.

Demonstrație. Unghiul $\widehat{sh}$ este complementul unghiului $\widehat{OAB}$, deci $\widehat{2sh} \equiv$ $\equiv 2\text{dr} - 2\widehat{OAB} \equiv \widehat{AOB}$ (fig. II.21).

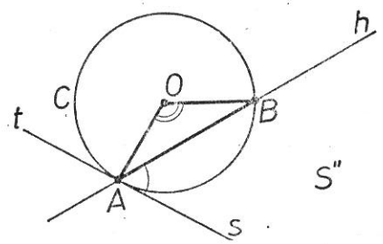

Fig. II.21

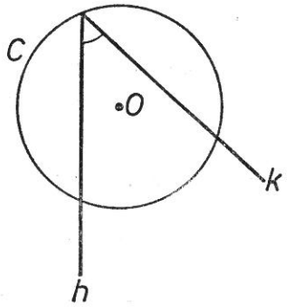

Fig. II.22

Definiție. Un unghi $\widehat{hk}$, avînd vîrful pe cercul C și astfel ca laturile h, k să intersecteze cercul C, se numește unghi înscris în cercul C (fig. II.22).

Primele două teoreme demonstrate în acest paragraf exprimă proprietăți ale unghiurilor înscrise într-un cerc.

Exerciții

1. *Fie $ABCD$ un dreptunghi înscris în cercul K. Să se arate că $|AC|$ este un diametru în cercul K. Fie M un punct pe arcul mic $\widehat{BC}$. Să se arate că proiecția punctului M pe dreapta AB este un punct exterior segmentului $|AB|$.*

2. *Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuțite, înscris în cercul K și fie M un punct pe arcul mic $\widehat{BC}$. Fie A' punctul diametral opus lui A în cercul K. Să se arate că $A' \in \widehat{BC}$. Apoi să se arate că dacă $M \in \widehat{A'B}$, atunci proiecția lui M pe dreapta AB este exterioară segmentului $|AB|$, iar proiecția punctului M pe dreapta AC aparține segmentului $|AC|$.*

3. *Să se examineze pozițiile punctelor considerate în exercițiul 3, în cazul în care unul din unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ este obtuz.*

3. Măsura unui arc de cerc

$\frac{L_c}{d} = \pi$

Se știe că lungimea unui cerc de rază R, este $2\pi R$, unde π este un număr real, ale cărui prime zecimale sînt date de *formula lui Ludolf*:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288...$$

Aproximările numărului π se obțin considerînd poligoane regulate convexe, înscrise într-un cerc de rază 1, și avînd numărul laturilor de forma 2^k, unde k este un număr întreg mai mare decît 1.

Exerciţii

1. *Dacă un poligon regulat înscris într-un cerc de rază 1 are latura de lungime x, atunci poligonul regulat cu număr dublu de laturi va avea lungimile laturilor egale cu*

$$\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}.$$

(Indicaţie. Se aplică teorema lui Pitagora.*)*

2. *Această formulă permite să calculăm lungimile laturilor poligoanelor convexe regulate, înscrise într-un cerc de rază 1 şi avînd 4, 8, 16, 32, 64, ... laturi. Se obţin succesiv lungimile*

$$\sqrt{2}, \sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$
$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}, \ldots$$

Semiperimetrele acestor poligoane au valorile aproximative

2,8284271; 3,0614674; 3,1214451;
3,1365485; 3,1403311.

Pentru poligonul regulat cu 2^{15} laturi, semiperimetrul are valoarea aproximativă 3,1415926.

Doi diametri perpendiculari ai unui cerc de rază 1 împart circumferinţa cercului în patru arce congruente, care au aceeaşi lungime, egală cu $\pi/2$. Dacă împărţim circumferinţa cercului în 2^k arce egale, luînd $k = 2, 3, 4, \ldots$, obţinem diviziuni ale circumferinţei în arce de lungimi $\pi \cdot 2^{-k+1}$; aceste arce pot fi utilizate ca etalon pentru calculul aproximativ al unui arc de cerc arbitrar. Considerînd aproximări din ce în ce mai bune, se obţin valori din ce în ce mai apropiate de lungimea exactă a arcului considerat. Lungimea exactă este un număr real pozitiv.

4. Măsura unghiulară a unui arc de cerc

Reamintim că unghiurile se măsoară în grade sexagesimale, în radiani sau în unghiuri drepte. Uneori, se folosesc *gradele centezimale*, un unghi drept avînd 100 grade centezimale. Oricare ar fi sistemul de măsurare, două unghiuri au aceeaşi măsură dacă şi numai dacă sînt congruente.

Exerciţii

1. *Să se indice măsura în grade sexagesimale a unui unghi de un radian.*

R. $\frac{180^\circ}{\pi} \cong 57{,}30^\circ$.

2. *Să se exprime măsura în radiani a unui unghi de 1 grad sexagesimal.*

R. $\frac{\pi}{180} \cong 0{,}0175$.

3. *Care este eroarea care se face dacă se calculează lungimea unui cerc de rază egală cu distanţa ce o parcurge lumina în 8,75 ani (distanţa de la Pămînt la steaua Sirius, cea mai strălucitoare) dacă se ia pentru π valoarea aproximativă dată de formula lui Ludolf?*

R. 10^{-15} mm.

Atunci cînd sistemul de măsurare a unghiurilor nu este fixat, notăm prin măs $\widehat{hk}$ măsura unghiului $\widehat{hk}$.

Fiind date două puncte distincte A, B pe un cerc C de centru O, ştim că punctele A, B împart cercul C în două arce, care sînt congruente dacă $|AB|$ este un diametru; dacă $|AB|$ nu este un diametru, dintre cele două arce distingem arcul mare şi arcul mic (fig. II.23). În general, fiecare din arcele limitate de punctele A, B pe cercul C se notează indicînd un punct al arcului. Astfel, dacă M este un punct pe cercul C, diferit de A şi de B, notăm prin $\widehat{AMB}$ arcul limitat de A şi B şi conţinînd punctul M.

Arcul mic limitat de punctele A, B este intersecţia cercului C cu interiorul unghiului $\widehat{AOB}$. Notînd prin M un punct pe arcul mic, definim *măsura unghiulară* a arcului $\widehat{AMB}$ prin formula

(1) $$\text{măs } \widehat{AMB} = \text{măs } \widehat{AOB}.$$

Dacă N este un punct situat pe arcul mare limitat de A şi B, definim măsura unghiulară a arcului $\widehat{ANB}$ punînd

(2) $$\text{măs } \widehat{ANB} = 4 \text{ măs dr} - \text{măs } \widehat{AMB},$$

unde dr este un unghi drept (fig. II.24).

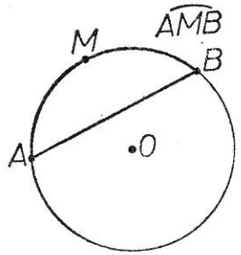

Fig. II.23

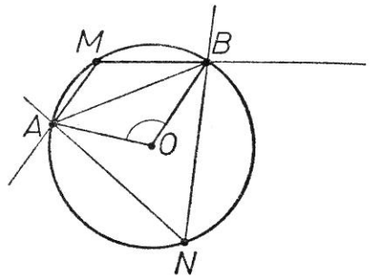

Fig. II.24

Dacă $|AB|$ este un diametru în cercul C, definim

(3) $$\text{măs } \widehat{ANB} = \text{măs } \widehat{AMB} = 2 \text{ măs dr}.$$

În orice din cazuri, avem

(4) $$\text{măs } \widehat{AMB} + \text{măs } \widehat{ANB} = 4 \text{ măs dr}.$$

Reamintim că, în grade sexagesimale, avem măs dr $= 90^\circ$, iar în radiani, măs dr $= \pi/2$.

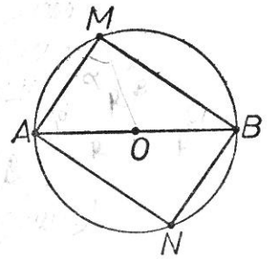

Fig. II.25

Folosind măsura unghiulară a unui arc de cerc, putem formula teorema stabilită în paragraful 2 sub forma următoare:

Teoremă. Dacă A, B, M, N sînt patru puncte distincte pe un cerc C astfel ca M și N se găsesc în semiplane opuse față de dreapta AB, atunci

$$2 \text{ măs } \widehat{AMB} = \text{măs } \widehat{ANB}$$

Dacă $|AB|$ este un diametru, avem (fig. II.25)

$$\text{măs } \widehat{AMB} = \text{măs dr.}$$

5. Unghiuri cu vîrful exterior unui cerc

Definiție. Numim unghi exterior unui cerc C, orice unghi $\widehat{hk}$, avînd vîrful în exteriorul cercului C și astfel ca laturile h, k să fie secante sau tangente cercului C.

Ne propunem să demonstrăm acum o teoremă care exprimă măsura unui unghi exterior cu ajutorul măsurilor unghiulare ale arcelor definite de laturile unghiului pe cercul C.

Teoremă. Fie A un punct exterior cercului C și fie B, D, E, F, M, N puncte pe cercul C astfel ca

$B \in |AF|$, $D \in |AE|$, $|AM| \cap |EF| \neq \emptyset$, $N \in |AM|$ (fig. II.26).

În aceste condiții, avem

$$2 \text{ măs } \widehat{EAF} = \text{măs } \widehat{EMF} - \text{măs } \widehat{BND}.$$

Demonstrație. Aplicînd teorema a doua a unghiului exterior triunghiului ADF, obținem

$$\text{măs } \widehat{FAE} = \text{măs } \widehat{FDE} - \text{măs } \widehat{AFD}.$$

Aplicînd în continuare ultima teoremă stabilită în paragraful precedent, avem

$$2 \text{ măs } \widehat{FAE} = 2 \text{ măs } \widehat{EDE} - 2 \text{ măs } \widehat{AFD} = \text{măs } \widehat{EMF} - \text{măs } \widehat{BND}$$

(fig. II.27).

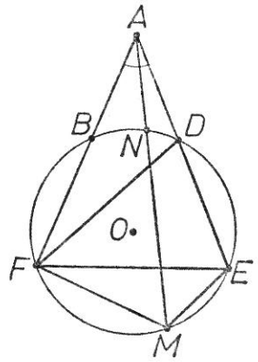

Fig. II.26

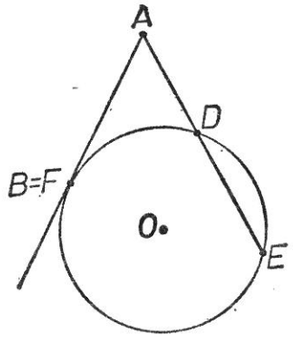

Fig. II.27

Observație. Teorema rămîne adevărată dacă $B = F$ sau $D = E$, deci atunci cînd una sau alta (sau amîndouă) din laturile unghiului $\widehat{EAF}$ este (sînt) tangente cercului C.

6. Unghiuri cu vîrful interior unui cerc

Definiție. Un unghi cu vîrful în interiorul cercului C se numește unghi interior acestui cerc.

Teoremă Fie $\widehat{hk}$ un unghi interior cercului C, avînd vîrful în punctul A. Fie B, D, E, F, M, N puncte pe cercul C astfel ca

$B \in h$, $D \in k$, $A \in |BF|$, $A \in |DE|$, $M \in int\ \widehat{hk}$, $A \in |MN|$.

În aceste condiții, avem

$$2 \text{ măs } \widehat{hk} = \text{măs } \widehat{BMD} + \text{măs } \widehat{ENF} \text{ (fig. II.28).}$$

Demonstrație. Aplicăm teorema a doua a unghiului exterior triunghiului ABE. Obținem

$$2 \text{ măs } \widehat{hk} = 2 \text{ măs } \widehat{BAD} = 2 \text{ măs } \widehat{EBF} +$$

$$+ 2 \text{ măs } \widehat{BED} = \text{măs } \widehat{ENF} + \text{măs } \widehat{BMD}.$$

Aplicație

Fie C, C_1 două cercuri avînd aceeași rază R și o coardă comună $|AB|$. Fie M, M_1 două puncte situate pe cele două cercuri și simetrice față de dreapta AB (fig. II.29). Să considerăm arcele $a = \widehat{AMB}$, $b = \widehat{AM_1B}$, $a' = C - a - \{A, B\}$, $b' = C_1 - b - \{A, B\}$.

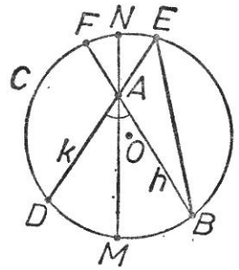

Fig. II.28

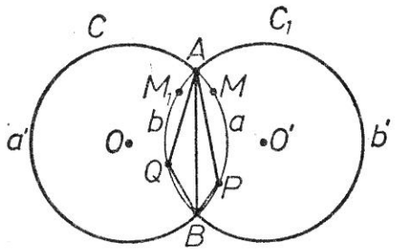

Fig. II.29

Pentru orice punct $P \in a$ și pentru orice punct $Q \in b$ avem $\widehat{APB} \equiv \widehat{AQB}$, deoarece 2măs $\widehat{APB}$ = 2măs $\widehat{AQB}$ = măs a' = măs b'.

Arcele a, b se găsesc în semiplane opuse față de dreapta AB. Fie S un punct situat în același semiplan cu arcul a. Dacă S este exterior cercului C, avem

$$2\text{măs } \widehat{ASB} < \text{măs } a'$$

iar dacă S este interior cercului C, avem

$$2\text{măs } \widehat{ASB} > \text{măs } a'.$$

Concluzii asemănătoare se pot deduce pentru punctele situate în același semiplan cu b. Notînd prin α măsura unghiulară a arcului a', putem enunța următoarea proprietate:

Fiind dat un arc de cerc a', avînd capetele A, B, locul geometric al punctelor P din plan, pentru care măs $\widehat{APB} = \frac{1}{2}$ măs a', este format din două arce de cerc, simetrice față de dreapta AB și avînd capetele în punctele A, B, unul din aceste arce fiind pe același cerc cu arcul a'.

Arcele a, b, care formează locul geometric indicat, se numesc *arce capabile de unghiul* $\widehat{AMB}$ și limitate de punctele A, B.

Construcția unui arc capabil de un unghi dat

Pentru a construi un arc capabil de un unghi dat $\widehat{hk}$ și avînd capetele date A, B, construim un unghi congruent cu $\widehat{hk}$, avînd vîrful în punctul A și avînd semidreapta $|AB$ drept una din laturi (fig. II.30). A doua latură m a acestu unghi va fi tangentă unui cerc C, care conține un arc capabil de unghiul $\widehat{hk}$. Centrul cercului C va fi punctul de intersecție al mediatoarei segmentului $|AB|$ cu perpendiculara în A pe dreapta ce conține semidreapta m.

Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi drept, locul geometric la care ne-am referit este ormat din cercul de diametru $|AB|$, din care am scos punctele A, B.

Puterea unui punct față de un cerc

Tot ca aplicație la teoremele referitoare la unghiuri, demonstrate anterior, putem rezolva următoarea problemă:

Fie A, B, A', B' patru puncte pe un cerc C, astfel ca dreptele AB, $A'B'$ să se intersecteze într-un punct P (fig. II.31). Să se demonstreze că

(1) $d(P, A) \cdot d(P, B) = d(P, A') \cdot d(P, B')$.

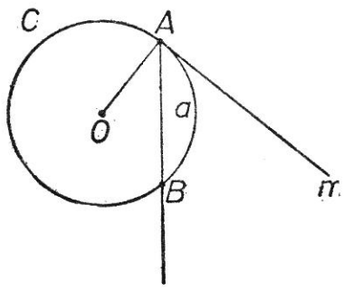

Fig. II.30

Rezolvare. Triunghiurile PAB', $PA'B$ sînt asemenea, avînd unghiul din P comun și $\widehat{PBA'} \equiv \widehat{PB'A}$. Din teorema triunghiurilor asemenea deducem

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B')} = \frac{d(P, A')}{d(P, B)}$$

și relația (1) se obține imediat.

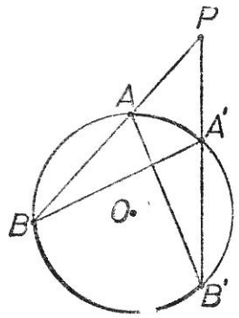

Fig. II.31

Formula (1) poate fi reținută în modul următor:

Dacă o secantă variabilă trece printr-un punct fix P și intersectează un cerc C în punctele A, B, produsul $d(P, A) \cdot d(P, B)$ este constant.

Valoarea constantă a produsului $d(P, A) \cdot d(P, B)$, cînd secanta PAB se rotește în jurul punctului P, se numește *puterea* punctului P față de cercul C.

Puterea unui punct P față de un cerc C, de centru O și rază R, poate fi ușor calculată, dacă se mai cunoaște distanța $d = d(O, P)$.

Dacă $d > R$, punctul P este exterior cercului C. Fie A, B punctele de intersecție ale dreptei OP cu cercul C, astfel ca $A \in |OP|$. Avem $d(P, A) = d - R$, $d(P, B) = d + R$, deci puterea punctului P față de cercul C va fi numărul

$$p(P, C) = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2.$$

Dacă $d < R$, P este un punct interior cercului C. Dacă $PO \cap C = \{A, B\}$ și $P \in |OA|$, atunci avem $d(P, A) = R - d$, $d(P, B) = R + d$, deci

$$p(P, C) = R^2 - d^2.$$

Pentru punctele situate pe cerc, puterea p este zero.

Centrul O are puterea R^2.

Uneori puterea unui punct dată de un cerc se consideră cu semn, pentru a distinge cazul în care P este punct exterior de cazul în care P este interior. Anume se definește *puterea cu semn* a punctului P față de cercul C prin formula

$$\bar{p}(P, C) = d(P, A) \cdot d(P, B) \cos \widehat{APB},$$

unde A, B sînt punctele de intersecție ale unei drepte duse prin P cu cercul C. Pentru puncte exterioare avem

$$\bar{p}(P, C) = d^2 - R^2 > 0$$

iar pentru puncte interioare, $\bar{p} = -p$, deci,

$$\bar{p}(P, C) = d^2 - R^2 < 0.$$

Deci puterea cu semn este dată de o aceeași formulă, independent de poziția punctului P, dar semnul ei este pozitiv pentru punctele exterioare cercului C și este negativă pentru punctele interioare.

Exercițiu. *Dacă P este exterior cercului C, să notăm prin r numărul $p(P, C) = \sqrt{d^2 - R^2}$. Să se arate că cercul $C' = C(P, r)$ intersectează cercul C în două puncte T, T' și că dreptele PT, PT' sînt tangente cercului C.*

7. Poziția relativă a două cercuri

Fie $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$ două cercuri. Notăm $c = d(O, O')$. Dacă $O \neq O'$, dreapta OO' se numește *linia centrelor* cercurilor C, C'.

Teoremă. Două cercuri distincte au cel mult două puncte comune.

Demonstrație (prin reducere la absurd). Presupunem că cercurile C, C' au trei puncte distincte A, B, D în comun. Aceste puncte nu pot fi coliniare, deoarece o dreaptă poate avea în comun cu un cerc cel mult două puncte. Deci punctele A, B, D formează un triunghi. Punctele O, O' trebuie să se găsească pe mediatoarele laturilor triunghiului ABD. Dar aceste mediatoare au un singur punct comun, deoarece două drepte distincte neparalele au exact un punct comun. Deci $O = O'$. Apoi $R = d(O, A) = d(O', A) = R'$. Deci $C = C'$, contrar ipotezei. Rezultă că cercurile C, C' nu pot avea trei puncte distincte în comun.

Dacă două cercuri distincte C, C' au două puncte comune A, B, se spune că C, C' sînt *cercuri secante*. Fiind date două puncte distincte A, B, orice cerc ce conține aceste puncte are centrul pe mediatoarea segmentului $|AB|$. Reciproc, orice punct al acestei mediatoare este centrul unui cerc ce trece prin A și B.

Dacă două cercuri distincte $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$ au două puncte comune A, B, aceste puncte nu se află pe linia centrelor OO', deci punctele O, O', A formează un triunghi (fig. II.32). Lungimile laturilor acestui triunghi sînt $R = d(O, A)$, $R' = d(O', A)$, $c = d(O, O')$. Rezultă că avem, dacă $R > R'$,

$$O \leqslant R - R' < c < R + R'. \tag{1}$$

Reciproc, dacă numerele R, R' c verifică inegalitățile (1), atunci cercurile C, C' de centre O, O' situate la distanța c și de raze R, R' sînt secante (vezi Aplicația 2, p. 76).

Exercițiu. *Să se arate că linia centrelor a două cercuri secante este perpendiculară pe coarda comună.*

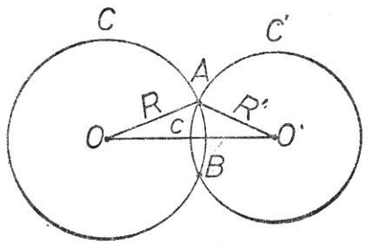

Fig. II.32

Două cercuri, care au un singur punct comun, se numesc *cercuri tangente*.

Dacă două cercuri distincte $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$ au un punct comun A, atunci $O \neq O'$ și simetricul punctului A față de dreapta OO' este deasemenea punct comun celor două cercuri. Dacă C, C' sînt cercuri tangente, trebuie să avem $A \in OO'$. Deci:

Dacă două cercuri distincte C, C' sînt tangente, atunci punctul lor comun aparține liniei centrelor. Perpendiculara în punctul comun pe linia centrelor este tangentă comună cercurilor C, C'.

Fie A punctul comun cercurilor tangente C, C'. Sînt posibile trei cazuri:

1. $A \in |OO'|$. Atunci O, O' se găsesc în semiplane opuse față de tangenta comună t (fig. II.33). Pentru un punct P interior lui C avem $d(O, P) < R = d(O, A)$, deci P este în același semiplan cu O față de t. Aceeași proprietate este adevărată pentru orice punct $P \in C$ diferit de A. De asemenea, punctele interioare lui C' și punctele de pe C', diferite de A, sînt în același semiplan cu O' față de tangenta comună t. Se spune că cercurile C, C' sînt *tangente exterior*.

2. $O \in |AO'|$. Pentru orice punct P, interior lui C sau situat pe C și distinct de A, avem $d(O', P) < d(O, O') + d(O, P) \leqslant c + R = R'$, deci P este interior cercului C'. Se spune că cercurile C, C' sînt *tangente interior*, cu C interior (fig. II.34).

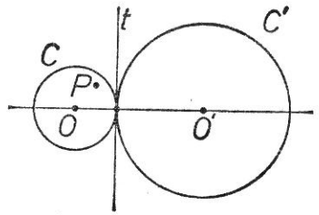

Fig. II.33

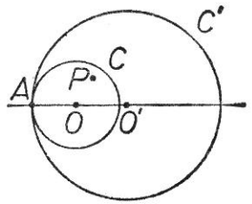

Fig. II.34

3. $O' \in |AO|$. Acest caz este analog cazului precedent, obținîndu-se din acela permutînd cercurile C, C' între ele. Cele două cercuri sînt de asemenea tangente interior, dar cu C' interior.

Pentru două cercuri tangente exterior avem $c = R + R'$, iar pentru două cercuri tangente interior, $c = |R - R'|$.

Rezultă că dacă două cercuri $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$, cu $c = d(O, O')$, au unul sau două puncte comune, atunci avem

$$|R - R'| \leqslant c \leqslant R + R'. \tag{2}$$

Dacă cercurile $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$ n-au nici un punct comun, atunci avem fie $c > R + R'$, fie $c < |R - R'|$.

Să presupunem că cercurile C, C' sînt astfel încît $c > R + R'$ (fig. II.35). În acest caz, pentru orice punct $P \in C'$, vom avea $d(O, P) > d(O, O') - d(O', P) = c - R' > R$, deci P este exterior cercului C. Deci toate punctele cercului C' sînt exterioare cercului C. La fel se arată că toate punctele cercului C sînt exterioare cercului C'. De aceea se spune că, în cazul $c > R + R'$, cercurile C, C' sînt *exterioare*.

Dacă $c < |R - R'|$, sînt posibile două cazuri:

1. $R > R'$, $c < R - R'$. În acest caz, $c < R$, deci $d(O, O') < R$, deci O' este punct interior cercului C. Pentru orice punct $P \in C'$ avem $d(O, P) <$

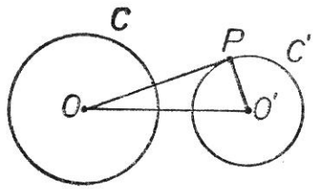

Fig. II.35

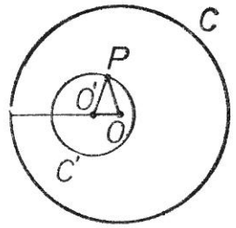

Fig. II.36

$< d(O, O') + d(O', P) = c + R' < R$; deci orice punct al cercului C' este interior cercului C. Se spune că cercul C' este *interior* cercului C (fig. II.36).

2. $R' > R$, $c < R' - R$. Procedînd ca în cazul precedent, arătăm că toate punctele cercului C sînt interioare cercului C', deci că cercul C este interior cercului C'.

În rezumat, putem alcătui următorul tablou, care ilustrează poziţiile relative posibile a două cercuri, în funcţie de parametrii R, R', c:

Cercuri secante: $|R - R'| < c < R + R'$.

Cercuri tangente interior: $c = R - R'$ sau $c = R' - R$.

Cercuri tangente exterior: $c = R + R'$.

Cercuri exterioare: $c > R + R'$.

Cercul C' este interior cercului C: $c < R - R'$, $R' < R$.

Pentru două cercuri concentrice avem $c = 0$, deci unul din cele două cercuri va fi interior celuilalt.

Unghiul a două cercuri

Fie C, C' două cercuri secante în punctele A, B. Triunghiurile AOO', BOO' sînt congruente, deci au $\widehat{OAO'} \equiv \widehat{OBO'}$ (fig. II.37).

Să notăm prin D, D' punctele în care tangentele t, t', duse în punctul A la cercul C, respectiv C', intersectează linia centrelor OO'. Dreptele BD, BD' sînt atunci tangente în B cercurilor C, C' şi avem $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{DBD'}$. Se spune că $\widehat{DAD'}$ sau $\widehat{DBD'}$ reprezintă *unghiul* sub care se taie cercurile C, C'.

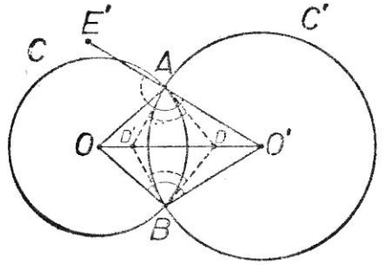

Fig. II.37

Fie E' un punct astfel ca $A \in |O'E'|$. Din relaţiile $t \perp OA$, $t' \perp O'A$ rezultă că avem $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{OAE'}$, sau $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{OAO'}$. Rezultă că:

Unghiul sub care se taie două cercuri este congruent cu unghiul format de semidreptele $|AO$, $|AO'$, care pleacă din punctul comun A şi conţin centrele O, O', sau cu suplementul acestui unghi.

Definiţie. **Două cercuri ortogonale sînt două cercuri care se taie sub un unghi drept.**

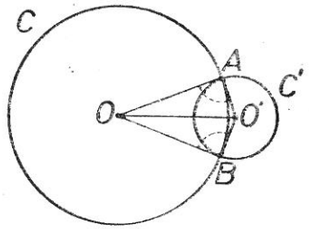

Fig. II.38

Rezultă că dacă C, C' sînt două cercuri ortogonale, atunci ele au două puncte comune A, B şi tangentele în aceste puncte la C şi la C' sînt perpendiculare (fig. II.38). Aceasta înseamnă că OA este tangentă la cercul C', iar $O'A$ este tangentă la cercul C, şi că triunghiul AOO' este dreptunghic în A. Prin urmare, pentru două cercuri ortogonale $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$, avem

$$d(O, O')^2 = R^2 + R'^2.$$

Reciproc, dacă ultima relaţie este îndeplinită, triunghiul AOO' este dreptunghic în A şi cercurile C, C' sînt ortogonale.

Să mai observăm că dacă cercurile C, C' sînt ortogonale, atunci puterea centrului O' al cercului C' faţă de C este egală cu pătratul razei R' a cercului C', deci $p(O', C) = R'^2$. De asemenea, avem $p(O, C') = R^2$.

Exerciţiu. *Fie C, C' două cercuri ortogonale şi fie M, N, M', N' punctele în care linia centrelor OO' intersectează aceste cercuri. Presupunem că $M, N \in C$ şi că $M' \in |MN|$. Să se arate că $d(O, M')\, d(O, N') = d(O, M)^2$ şi că*

$$\frac{d(M', M)}{d(M', N)} = \frac{d(N', M)}{d(N', N)}.$$

(*Indicaţie.* Pentru prima relaţie, se consideră puterea punctului O faţă de C'. A doua relaţie se obţine pe cale algebrică din prima.)

8. Axa radicală a două cercuri

Propoziţie ajutătoare. Fiind date în plan două puncte fixe A şi B, locul geometric al punctelor P din plan, astfel încît $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = k$, o constantă dată, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB, $(A \neq B)$.

Demonstraţie. Fie P un punct al locului geometric căutat şi fie T proiecţia lui P pe dreapta AB (fig. II.39). Aplicînd teorema lui Pitagora triunghiurile dreptunghice TAP, TBP obţinem:

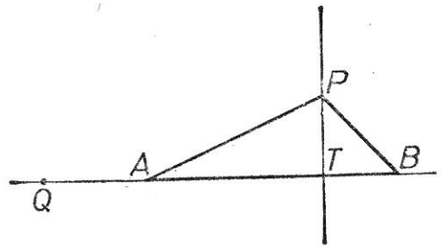

Fig. II.39

$d(P, A)^2 = d(P, T)^2 + d(A, T)^2$, $d(P, B)^2 = d(P, T)^2 + d(B, T)^2$, deci $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = d(A, T)^2 - d(B, T)^2$. P va fi un punct al locului dacă şi numai dacă $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = k$, deci dacă şi numai dacă $d(A, T)^2 - d(B, T)^2 = k$. Dacă alegem pe dreapta AB un punct Q

ca origine și dacă punctele A, B, T au abscisele a, b, t, ultima condiție se poate scrie sub forma

$$(t-a)^2-(t-b)^2=k$$

sau $2(b-a)t=k+b^2-a^2$. Punctele A, B fiind distincte, avem $b \neq a$, deci $t=(k+b^2-a^2)/2(b-a)$. Rezultă că punctul T este unic determinat; punctele locului geometric căutat sînt punctele P, care au acest punct T ca proiecție ortogonală pe dreapta AB. Deci locul geometric căutat este dreapta perpendiculară pe dreapta AB și trecînd prin T.

Exercițiu. *Să se demonstreze că diagonalele unui patrulater sînt perpendiculare dacă și numai dacă suma pătratelor a două laturi opuse este egală cu suma pătratelor celorlalte două laturi.*

Să demonstrăm acuma următoarea teoremă:

Teoremă. Fiind date două cercuri $C=C(O, R)$, $C'=C(O', R')$, de centre diferite, locul geometric al punctelor P, care au puteri cu semn egale față de C și C', este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor OO'.

Demonstrație. Fie P un punct al locului. Puterile lui P față de cercurile C, C' au expresiile (fig. II.40):

$$\bar{p}(P, C)=d(O, P)^2-R^2,\ \bar{p}(P, C')=d(O', P)^2-R'^2.$$

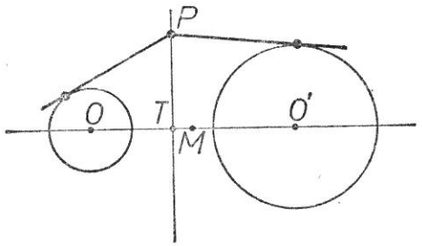

Fig. II.40

Condiția ca P să aparțină locului geometric considerat se scrie

$$d(O, P)^2-R^2=d(O', P)^2-R'^2$$

sau

$$d(P, O)^2-d(O', P)^2=R^2-R'^2.$$

Deci sîntem în condițiile aplicării propoziției precedente, unde trebuie să facem $A=O$, $B=O'$ și $k=R^2-R'^2$. Rezultă că locul geometric al punctelor P, care au proprietatea indicată, este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor OO'. Dacă notăm prin T intersecția locului cu dreapta OO' și dacă presupunem că, față de un sistem de coordonate ales pe dreapta OO', punctele O, O', T au abscisele respectiv a, a', t, atunci avem

$$t=\frac{R^2-R'^2+a'^2-a^2}{2(a'-a)}.$$

Dacă, alegem drept origine a absciselor mijlocul M al segmentului $|OO'|$, atunci $a'=-a$ și expresia lui t devine

$$t=\frac{R'^2-R^2}{4a}.$$

unde $2\,|a|=d(O, O')$.

Definiție. Locul geometric al punctelor care au puteri egale față de două cercuri, se numește axa radicală a celor două cercuri (Gaultier — 1813).

Reținem că axa radicală este definită numai în cazul, în care centrele cercurilor considerate sînt distincte.

Observații. **1.** Fiind date două cercuri concentrice distincte, nu există nici un punct care să aibă puteri egale față de cele două cercuri.

2. Două cercuri secante au ca axă radicală secanta comună, deoarece fiecare din punctele comune celor două cercuri are puterea egală cu zero față de fiecare cerc.

3. Axa radicală a două cercuri tangente este tangenta comună, deoarece punctul de tangență are puterea egală cu zero față de fiecare cerc și deoarece tangenta comună este perpendiculară pe linia centrelor.

4. Fiind date trei cercuri cu centrele necoliniare, există un unic punct, numit *centrul radical*, ca reare puterile egale față de cele trei cercuri; într-adevăr, notînd prin C, C', C'' cele trei cercuri, axa radicală a cercurilor C, C' intersectează axa radicală a cercurilor C, C'' într-un punct P, care are puteri egale față de cercurile C, C', C''. Punctul P va aparține și axei radicale a cercurilor C', C''.

5. Din formula care dă abscisa punctului T, în care axa radicală intersectează linia centrelor, anume $t=-(R^2-R'^2)/4a$, rezultă că t are același semn cu a' dacă $R>R'$; acesta este cazul, în care axa radicală este mai apropiată de O' decît de O.

6. Dacă $R>R'$, și $a>0$ și dacă cercurile sînt exterioare, avem $R+R'<2a$, deci $|t|<(R-R')/2<(R+R')/2<a$. Aceasta înseamnă că axa radicală a două cercuri exterioare intersectează linia centrelor într-un punct situat pe segmentul $|OO'|$.

7. Dacă cercul C este interior cercului C', avem $R<R'$. În acest caz, axa radicală a cercurilor, C, C' este exterioară celor două cercuri.

Aplicație.

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă:

Fiind date două puncte distincte A, B, să se determine locul geometric I, al punctelor P, pentru care raportul $d(P, A)/d(P, B)$ este egal cu un număr pozitiv dat k, $k \neq 1$.

Rezolvare. Fie M, N punctele dreptei AB, pentru care avem $M \in |AB|$, $N \in |AB|$ și

$$|MA|=k\,|MB|,\ |NA|=k\,|NB| \quad \text{(fig. II.41).}$$

Dacă P este un punct al locului geometric căutat L, PM și PN sînt bisectoarele unghiului $\widehat{APB}$, respectiv al suplementului acestui unghi, deci punctul P se află pe cercul C de diametru $|MN|$, deoarece unghiul $\widehat{MPN}$ este drept. Deci avem $L \subset C$.

Vom arăta că avem și incluziunea inversă $C \subset L$. Va rezulta atunci că $L=C$.

Pentru a arăta că orice punct de pe cercul C este un punct al locului geometric L, este suficient să arătăm că orice dreaptă d, dusă prin punctul M, intersectează locul L cel puțin într-un punct P (fig. II.42).

Punctul $P \in d \cap L$ este ușor de aflat: considerăm simetricul B' al punctului B față de dreapta

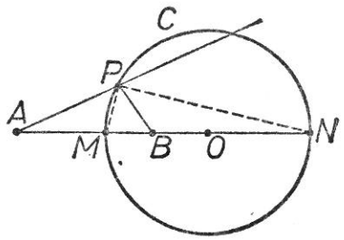

Fig. II.41

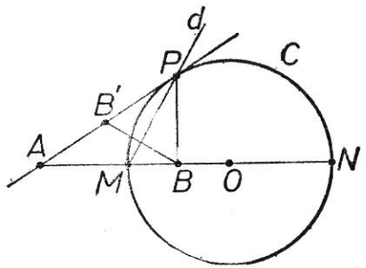

Fig. II.42

d şi punem $\{P\} = AB' \cap d$. Dreapta PM este bisectoarea unghiului $\widehat{APB}$ şi rezultă

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = \frac{d(M, A)}{d(M, B)} = k,$$

deci $P \in L$.

Datorită faptului că orice dreaptă dusă prin M intersectează locul geometric L într-un punct P şi punctul P trebuind să aparţină mulţimii $L \subset C$, rezultă că orice punct $P \in C$ este un punct al lui L, deci $L = C$.

Aplicaţie. Fie A', A'', B', B'', C', C'' picioarele bisectoarelor interioare şi exterioare ale triunghiului ABC şi fie C_A, C_B, C_C cercurile de diametre $|A'A''|$, $|B'B''|$, $|C'C''|$. Să arătăm că aceste cercuri au două puncte comune. (Teorema lui Apollonius) (fig. II.43).

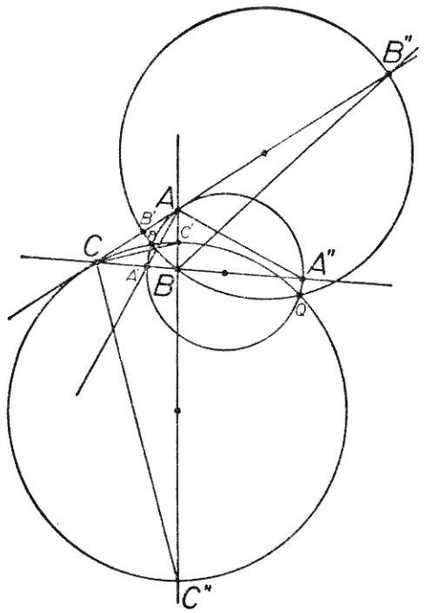

Fig. II.43

Demonstraţie. Fie $|AB|$ cea mai mică din laturile triunghiului ABC. În acest caz avem $B \in |A'A''|$ şi $A \in |B'B''|$. Cercul C_B va trece prin punctul B şi va avea A ca punct interior iar cercul C_A va trece prin A şi va avea B ca punct interior. Rezultă că cele două cercuri sînt secante în două puncte P, Q. Pentru aceste puncte avem

$$\frac{d(P, B)}{d(P, C)} = \frac{d(A, B)}{d(A, C)} = \frac{d(Q, B)}{d(Q, C)},$$

$$\frac{d(P, A)}{d(P, C)} = \frac{d(B, A)}{d(B, C)} = \frac{d(Q, A)}{d(Q, C)}$$

deci

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = \frac{d(Q, A)}{d(Q, B)} = \frac{d(C, A)}{d(C, B)}.$$

Ultimele relaţii arată că avem $P \in C_C$ şi $Q \in C_C$, deci cercurile C_A, C_B, C_C, au punctele P, Q comune.

O consecinţă imediată a acestui rezultat este că centrele cercurilor C_A, C_B, C_C, deci mijloacele segmentelor $|A'A''|$, $|B'B''|$, $|C'C''|$ sînt trei puncte coliniare, situate pe mediatoarea segmentului $|PQ|$.

Notă. Cercurile C_A, C_B, C_C se numesc *cercurile lui Apollonius* ale triunghiului ABC.

Exerciţii

1. *Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Să se arate că există un unic cerc K, care să conţină aceste puncte.*

(*Indicaţie.* Punctul de intersecţie al mediatoarelor triunghiului ABC este egal depărtat de punctele A, B, C, deci este centrul unui cerc ce conţine aceste puncte, numit *cercul circumscris* triunghiului ABC.)

2. *Fiind date trei puncte necoliniare, să se arate că există patru cercuri, tangente fiecăreia din dreptele AB, BC, CA.*

(*Indicaţie.* Bisectoarele interioare şi exterioare ale triunghiului ABC sînt concurente trei cîte trei în patru puncte I, I_A, I_B, I_C; fiecare din aceste puncte este egal depărtat de dreptele AB, BC, CA, deci este centrul unui cerc tangent acestor drepte. Presupunînd că am notat prin I punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor interioare, I va fi interior triunghiului ABC şi cercul cu centrul I şi tangent dreptelor AB, BC, CA va avea toate punctele interioare triunghiului ABC. Acest cerc se numeşte *cercul înscris* triunghiului ABC, iar celelalte trei cercuri tangente se numesc *cercurile exînscrise* triunghiului ABC.)

3. *Să se arate că, într-un cerc, o coardă nu poate fi mai mare decît un diametru.*

4. *Fiind dat un cerc C şi un punct A în planul său, nesituat pe C, să se ducă prin A o dreaptă d astfel ca d să intersecteze interiorul cercului C după o coardă de lungime minimă sau maximă. Discuţie.*

5. *Fiind date într-un plan un cerc C şi un punct A, să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor determinate de cercul C pe dreptele ce trec prin A.*

6. *Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor $|AB|$ avînd capetele pe un cerc dat şi lungimile egale cu un număr dat. Discuţie.*

7. *Fie C, C' două cercuri ortogonale, avînd centrele O, O' şi secante în punctele A, B. Fie M un punct pe cercul de diametru $|OO'|$. Să se arate că suma puterilor cu semn ale punctului M faţă de cercurile C, C' este egală cu 0.*

8. *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că* $\sin \frac{\widehat{BOC}}{2} = \sin \widehat{A}$.

(*Indicaţie.* Fie $\widehat{A}$, fie suplementul său, este congruent cu $\frac{\widehat{BOC}}{2}$. Dar două unghiuri suplementare au sinusurile egale, prin definiţie.)

9. *Fie a, b, c, R lungimile laturilor triunghiului ABC şi raza cercului circumscris acestui triunghi. Să se demonstreze că*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R.$$

(*Indicaţie.* Se consideră triunghiurile dreptunghice formate de centrul cercului circumscris, cîte un vîrf şi mijlocul unei laturi ce pleacă din acest vîrf. Apoi se aplică definiţia sinusului unui unghi şi exerciţiul precedent.)

10. *Fie A', B', C', H picioarele înălţimilor triunghiului ABC şi ortocentrul acestui triunghi. Să se arate că H se găseşte pe fiecare din cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ şi că dreptele AB, BC, CA, AA', BB', CC' sînt bisectoarele unghiurilor interioare şi exterioare triunghiului $A'B'C'$.*

(*Indicaţie.* Se vor considera separat cazul unui triunghi ABC cu toate unghiurile ascuţite şi al unui triunghi cu un unghi obtuz. În fiecare din aceste cazuri, se vor aplica proprietăţile unghiurilor înscrise într-un cerc şi arcelor capabile de un unghi dat.)

11. *Fie $P_1P_2 \ldots P_n$ un poligon regulat cu n laturi, deci un poligon în care avem, pentru orice indice i, $|P_{i-1}P_i| \equiv |P_iP_{i+1}|$ şi $\widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}} \equiv \widehat{P_iP_{i+1}P_{i+2}}$, unde convenim ca $P_{n+1} = P_i$. Să se arate că există două cercuri concentrice C, C', astfel ca C să conţină toate vîrfurile acestui poligon, iar C' să fie tangent fiecăreia din dreptele P_iP_{i+1}.*

(*Indicație.* Se va observa că triunghiurile $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ sînt isoscele și congruente două cîte două. Se va deduce că mediatoarele laturilor $|P_iP_{i+1}|$ trec printr-un punct comun O, care este egal depărtat de punctele P_i și este de asemenea egal depărtat de dreptele P_iP_{i+1})

Observație. Cercurile C, C' se numesc *cercul circumscris* respectiv *cercul înscris* poligonului $P_1P_2...P_n$.

12. *Să se arate că dacă A,B,C,D sînt patru puncte pe un cerc, atunci $|AB| \cap CD = AB \cap |CD| = |AB| \cap |CD|$.*

9. Patrulatere inscriptibile

Fiind dat un cerc K, se numește patrulater înscris în cercul K orice patrulater $ABCD$ care are vîrfurile A, B, C, D pe cercul K. Un patrulater $ABCD$ se numește *inscriptibil*, dacă există un cerc K astfel ca $ABCD$ să fie înscris în K, (fig. II.44).

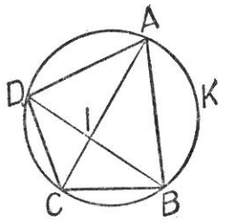

Fig. II.44

Reamintim că un patrulater este o linie poligonală închisă, formată din patru laturi care sînt disjuncte două cîte două.

Dacă $ABCD$ este un patrulater înscris în cercul K, atunci punctele C, D sînt de aceeași parte a dreptei AB, deoarece dacă C, D ar fi în semiplane opuse față de AB, atunci am avea $|AB| \cap |CD| = AB \cap |CD| \neq \emptyset$, ceea ce nu este posibil, deoarece $|AB|$, $|CD|$ sînt două laturi ale unui patrulater. La fel se arată că A, D sînt de aceeași parte a dreptei BC, că A, B sînt de aceeași parte a dreptei CD și că B, C sînt de aceeași parte a dreptei AD. Rezultă că:

Orice patrulater inscriptibil este convex.

Să demonstrăm.

Teorema 1. Într-un patrulater inscriptibil, suma a două unghiuri opuse este un unghi alungit.

Demonstrație. Într-un patrulater convex $ABCD$, diagonalele $|AC|$, $|BD|$ au un punct comun I. Rezultă că punctele A, C sînt în semiplane opuse față de dreapta BD. Dacă $ABCD$ este înscris într-un cerc K, punctele A, C se vor găsi pe cîte unul din cele două arce limitate pe cercul K de coarda $|BD|$. Din proprietățile unghiurilor înscrise într-un cerc, rezultă

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 2 \text{ dr},$$

unde dr desemnează un unghi drept.

Teorema 2. Într-un patrulater inscriptibil, unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

Demonstrație. Punctele C și D fiind de aceeași parte a coardei $|AB|$, din proprietățile unghiurilor înscrise într-un cerc rezultă

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}.$$

Exercițiu. *Să se arate că, într-un patrulater inscriptibil, fiecare unghi este congruent cu suplementul unghiului opus.*

Reciproca teoremei 1. Dacă în patrulaterul convex $ABCD$ suma a două unghiuri opuse este un unghi alungit, atunci acel patrulater este inscriptibil.

Demonstrație. Fiind dat unghiul $\widehat{BAD}$, știm că locul geometric al punctelor C, pentru care unghiul $\widehat{BCD}$ este congruent cu suplementul unghiului $\widehat{BAD}$, este format din două arce de cerc simetrice față de dreapta BD, unul din aceste arce fiind situat pe cercul K, ce conține punctele A, B, D, și în semiplanul opus lui A față de BD. Dacă $ABCD$ este patrulater, punctele A, C trebuie să fie în semiplanele opuse față de BD, deci C se găsește pe arcul limitat de punctele B, D și opus arcului $\widehat{BAD}$. Deci $ABCD$ este un patrulater înscris cercului K.

Exercițiu. *Dacă într-un patrulater convex un unghi este congruent cu suplementul unghiului opus, atunci acel patrulater este inscriptibil.*

Reciproca teoremei 2. Dacă într-un patrulater convex unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă, atunci acel patrulater este inscriptibil.

Demonstrație. Din ipoteză, $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACB}$ și C, D se găsesc de aceeași parte a dreptei AB. Rezultă că D se găsește pe arcul de cerc $\widehat{ACB}$ și deci $ABCD$ este un patrulater inscriptibil.

1. *Să se construiască un patrulater $ABCD$ astfel ca $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}$ și totuși $ABCD$ să nu fie inscriptibil.*

2. *Să se construiască un patrulater $ABCD$ astfel cu unghiul $\widehat{ADC}$ să fie congruent cu suplementul unghiului $\widehat{ABC}$ și totuși $ABCD$ să nu fie inscriptibil.*

3. *Să se arate că dreptunghiurile, trapezele isoscele și în particular pătratele sînt patrulatere înscriptibile.*

10. Mişcarea circulară uniformă

Fie C un cerc de centru O şi rază R. Să presupunem că un punct se mişcă pe acest cerc, astfel încît poziţia lui pe cerc este o funcţie de timpul t. Să notăm prin F această funcţie. Atunci, pentru fiecare valoare a lui t, $F(t)$ este un punct pe cercul C.

Se spune că funcţia $F : \mathbf{R} \to C$ defineşte o mişcare circulară. Această mişcare se numeşte uniformă, dacă este îndeplinită următoarea condiţie:

Fiind date patru momente t_1, t_2, t_1', t_2' astfel ca $t_1' - t_2' = t_2 - t_1$, dacă notăm $M_1 = F(t_1)$, $M_2 = F(t_2)$, $M_1' = F(t_1)$, $M_2' = F(t_2)$, avem (fig. II.45)

$$\widehat{M_1OM_2} \equiv \widehat{M_1'OM_2'}.$$

Se mai spune în acest caz că punctul $M = F(t)$ are o mişcare de rotaţie în jurul punctului O. Dacă presupunem că $|t_2 - t_1|$ este unitatea de măsură u a timpului, unghiul $\widehat{M_1OM_2}$ se numeşte *viteza de rotaţie* sau *viteza unghiulară* a punctului M.

Viteza unghiulară fiind presupusă dată, sînt posibile două mişcări cu această viteză, cele două mişcări diferind prin *sensul de rotaţie*.

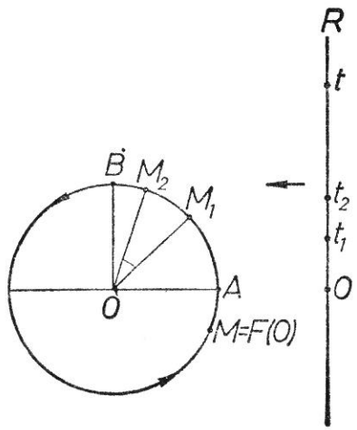

Fig. II.45

Exerciţiu. *Fie M, N două puncte, care se mişcă pe două cercuri concentrice cu aceeaşi viteză unghiulară şi în acelaşi sens. Să se arate că distanţa $d(M, N)$ este constantă.*

Fie $M_0 = F(0)$ poziţia pe care o are punctul $M = F(t)$ la momentul $t = 0$ (fig. II.45). Lungimea cercului C fiind finită şi egală cu $2\pi R$, punctul M va reveni în poziţia M_0 după o perioadă de timp $T = 2\pi/\alpha$, unde α este viteza unghiulară a mişcării. Numărul $T = 2\pi/\alpha$ se numeşte *perioada mişcării circulare considerate*. Mişcarea fiind uniformă, vom avea $F(t + T) = F(t)$, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$. Dacă viteza unghiulară α este de un radian în unitatea de timp, deci dacă $\alpha = 1$ radian/u, atunci $T = 2\pi \times$ unitatea de timp.

Exerciţii

1. *Locul geometric al punctelor care au puterea faţă de un cerc dat, egală cu un număr dat, este un cerc sau un punct sau mulţimea vidă.*

2. *Fie C, C' două cercuri exterioare. Locul geometric al centrelor cercurilor ortogonale cu fiecare din cercurile C, C' este axa radicală a cercurilor C, C'.*

(Se ţine seama că dacă C, C'' sînt două cercuri ortogonale, atunci puterea centrului cercului C'' faţă de cercul C este egală cu pătratul razei cercului C''.)

3. *Fie pe un cerc C punctul fix A şi un punct mobil M. Fie d perpendiculara în M pe dreapta AM şi fie punctele $L \in d$, $L' \in d$ astfel ca unghiurile $\widehat{LAM}$, $\widehat{L'AM}$ să fie congruente cu un unghi fix α. Se cere locul geometric al punctelor L, L'.*

(Se observă că dreapta d trece prin punctul B diametral opus lui A pe cercul C şi că unghiurile $\widehat{ALB}$, $\widehat{AL'B}$ sînt congruente cu două unghiuri constante. Locurile geometrice căutate sînt formate de arce de cercuri avînd capetele A, B).

4. *Se dă un punct fix A şi o dreaptă fixă d, astfel ca $A \notin d$. Se cere locul geometric al punctelor N, astfel ca produsul $\overline{AN} \cdot \overline{AM}$ să fie egal cu un număr dat k, unde $\{M\} = |AN \cap d$, $k > 0$.*

(Se consideră dreapta $AP \perp d$, $P \in d$ şi punctul $Q \in |AP$ astfel ca $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = k$. Locul geometric căutat este cercul de diametru $|AQ|$.)

5. *Fie A, B, C, M patru puncte distincte pe un cerc K. Notăm prin P, Q, R proiecţiile punctului M pe dreptele BC, CA, AB. Să se arate că punctele P, Q, R sînt coliniare (teorema lui Simson). Se va presupune că $C \in |BP|$, $Q \in |AC|$.*

(Se observă că patrulaterele $AMQR$, $CPMQ$ sînt inscriptibile. Dacă se presupune că M este pe arcul subîntins de coarda $|AC|$, avem $Q \in |AC|$. Se deduce că măs $\widehat{RQM} +$ $+$ măs $\widehat{MQP} = 180°$, deci punctele R, Q, P sînt coliniare.)

6. *Fie $|AB|$, $|CD|$ două coarde perpendiculare în cercul K, avînd punctul comun M şi netrecînd prin centrul cercului K. Presupunînd $|MA| > |MB|$ şi $|MC| > |MD|$ să se arate că există un patrulater cu vîrfurile pe K şi cu laturile congruente cu $|AB|$, $|CD|$, $|MA| - |MB|$, $|MC| - |MD|$.*

(M. Chiriţă, G. Nagy).

(*Indicaţie.* Se construiesc dreptunghiurile $CDC'D'$ şi $ABA'B'$ înscrise în cercul K şi se observă că

$$|MA| - |MB| \equiv |CD'|, \quad |MC| - |MD| \equiv |A'B|.)$$

11. Aplicaţii practice

1. *Două mobile M, M' se rotesc pe două cercuri tangente exterior, cu aceeaşi viteză unghiulară şi în acelaşi sens, plecînd din punctul comun* (fig. II.46).

a. *Să se arate că dreapta MM' trece mereu prin punctul de contact al celor două cercuri.*

b. *Să se exprime distanţa $d(M, M')$ în funcţie de viteza unghiulară ω şi de timpul t, scurs de la momentul iniţial.*

2. *Două roţi se rotesc fiecare în jurul axei sale, astfel încît ele se ating fără să alunece una faţă de alta* (fig. II.47).

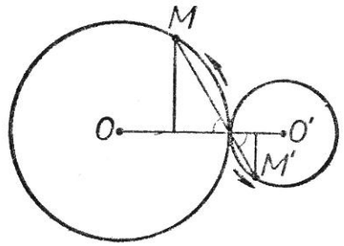

Fig. II.46

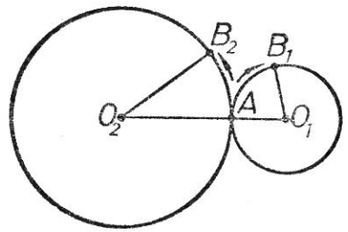

Fig. II.47

Să se arate că raportul vitezelor unghiulare ale celor două rotații este egal cu inversul raportului razelor celor două roți.

Soluție. Alunecarea fiind exclusă, dacă la un moment dat t_0 roțile au punctul comun A, iar dacă la momentul t_1 acest punct ajunge pe prima roată în poziția B_1 iar pe a doua roată în poziția B_2, avem lungimea AB_1 = lungimea $\widehat{AB_2}$.

Dar avem măs $\widehat{AO_2B_2} = (t_1 - t_0)\omega_2$; măs $\widehat{AO_1B_1} = (t_1 - t_0)\omega_1$; deci din formula $\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{2\pi}$ deducem: lungimea $AB_1 = R_1(t_1 - t_0)\ \omega_1$, lungimea $\widehat{AB_2} = R_2(t_1 - t_0)\omega_2$; rezultă

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2.$$

Această relație este utilizată la *angrenaje*. Dacă roțile sînt tangente exterior, rotațiile lor au sensuri opuse, iar dacă roțile sînt tangente interior, rotațiile sînt de același sens.

La *angrenaje cilindrice* se folosesc roți dințate. Dacă roata de rază R_1 are n_1 dinți, iar cea de rază R_2 are n_2 dinți, distanța între axele a doi dinți consecutivi fiind aceeași la cele două roți, trebuie să avem

$$\frac{2\pi R_1}{n_1} = \frac{2\pi R_2}{n_2}, \text{ deci } \frac{R_1}{n_1} = \frac{R_2}{n_2}.$$

Exerciții

1. *Să se arate că dacă două roți de raze R_1 și R_2 sînt depărtate și dacă mișcarea uneia este transmisă la cealaltă cu ajutorul unei curele, atunci vitezele unghiulare ale roților sînt invers proporționale cu razele, deci $R_1\omega_1 = R_2\omega_2$.*

2. *Să presupunem că o roată de rază R se rostogolește pe o tijă dreaptă fără să alunece nici un moment* (fig. II.48).

Să se arate că dacă un punt A al roții a ajuns, după un interval de timp t, în poziția B', astfel ca unghiul vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'B'}$ să fie de $\alpha°$, atunci punctul de contact M ajunge, în același interval de timp, în poziția M', astfel ca

$$d(M, M') = \frac{2\pi R\alpha}{360}.$$

Să se deducă că viteza lui M este egală cu produsul razei R cu viteza unghiulară de rotație a roții în jurul axei sale.

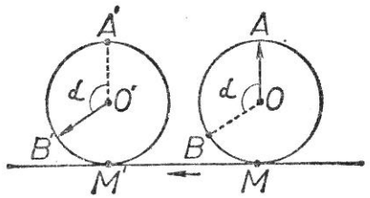

Fig. II.48

3. *Să presupunem că două puncte A_1, A_2 se deplasează pe două cercuri C_1, C_2, de centre O_1 și O_2 și de raze egale, astfel încît $d(A_1, A_2) = d(O_1, O_2)$.*

Să se arate că A_1 și A_2 au vitezele egale. Se va considera cazul în care $O_1A_1A_2O_2$ este un paralelogram și acela în care $A_1O_1A_2O_2$ este trapez isoscel (fig. II.49, *a*, 49, *b*).

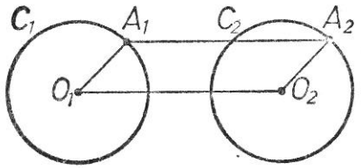

Fig. II.49, a

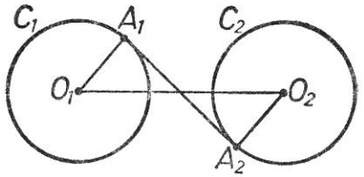

Fig. II.49, b

4. *Un cerc C, se rostogolește fără alunecare pe un cerc C, de rază dublă, în interiorul acestuia* (fig. II.50). *Arătați că fiecare punct M al cercului C_1 descrie un diametru al cercului C. Exprimați segmentul $|OM|$ în funcție de viteza unghiulară cu care se rotește linia centrelor OO_1 și de timpul t.*

(*Indicație.* Fie A punctul de tangență la un moment t și fie $M \in |OP|$, $P \in C$. Arcele $\widehat{AM}$, $\widehat{AP}$ au lungimi egale, deci, la un moment t punctul M va coincide cu punctul de tangență P. În intervalul $t' - t$, raza $|OO_1$ se rotește cu unghiul $\widehat{AOP}$, iar M parcurge distanța $d(M, P)$. Avem

$$|OM| = |OA| \cdot \cos \widehat{AOP} = |OA| \cdot \cos(t' - t)\omega.)$$

5. *Două mobile, M_1, M_2 se rotesc pe două cercuri cu centrul O, cu vitezele unghiulare constante ω_1, ω_2, în același sens. Știind că la momentul $t = t_0$ unghiul $\widehat{M_1OM_2}$ are măsura α, să se determine momentele*

$$t_1, t_2, \ldots$$

în care mobilele M_1, M_2 se vor găsi pe o aceeași semidreaptă cu originea O (fig. II.51).

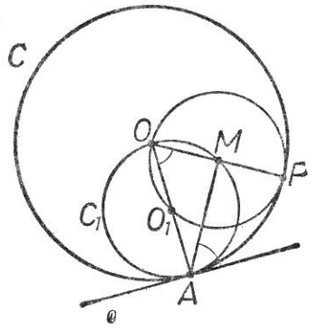

Fig. II.50

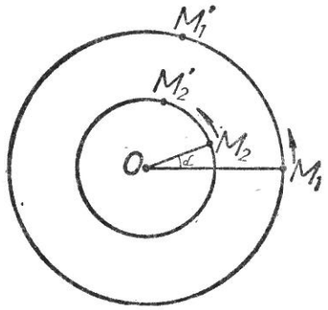

Fig. II.51

Soluție. După momentul T, punctele M_1, M_2 se vor găsi pe aceeași semidreaptă, dacă există un număr întreg k, astfel încît să avem

$$\alpha + T\omega_2 = T\omega_1 - 2k\pi$$

sau dacă

$$T = \frac{\alpha + 2k\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Deci punctele M_1 şi M_2 se vor găsi pe cîte o aceeaşi semidreaptă $|OM$ la momentele

$$t_k = t_0 + T_k = t_0 + \frac{\alpha}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{2k\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Dacă M_1, M_2 sînt acele unui ceasornic, avem pentru $t_0 = 0$,

$$\alpha = 0, \omega_1 = \frac{2\pi}{60}\min^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{720}\min^{-1},$$

$$T_k = \frac{k}{\frac{1}{60} - \frac{1}{720}}\min = \frac{k}{\frac{660}{60 \cdot 720}}\min = \frac{720k}{11}\text{ minute},$$

deci acele se întîlnesc la intervale de $\frac{720}{11}$ minute $= 1$ oră $+ \frac{60}{11}$ minute.

Exerciţii

1. *Păstrînd notaţiile, să se determine momentele t_1, t_2, ... în care mobilele M_1, M_2 sînt astfel încît $O \in |M_1M_2|$.*

2. *Să presupunem că aplicaţia $F : R \to C$ defineşte o mişcare circulară uniformă a unui mobil M, pe cercul C, astfel încît punctul $M = F(t)$ să parcurgă acest cerc, o dată, în 2π secunde. Fie $A = F(O)$ poziţia punctului M la momentul $t = 0$. Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale aplicaţiei F :*

1) *Oricare ar fi momentul t, avem $F(t = F(t + 2\pi)$;*

2) *Dacă $B = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $A' = F(\pi)$, $B' = F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, atunci unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB}$, $\widehat{A'OB'}$ şi $\widehat{B'OA}$ sînt drepte, O fiind centrul cercului O.*

3) *Oricare ar fi momentul t, punctele $F(t)$ şi $F(t + \pi)$ sînt simetrice faţă de centrul O.*

4) *Dacă $t \in [-\pi, \pi]$, atunci măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOF(t)}$ este egală cu $|t|$.*

5) *Oricare ar fi momentul t, punctele $F(t)$ şi $F(\pi - t)$ sînt simetrice faţă de dreapta OB, iar punctele $F(t)$ şi $F(-t)$ sînt simetrice faţă de dreapta OA.*

3. *Folosind regula de trecere de la măsura unui unghi în radiani la măsura sa în grade sexagesimale şi utilizînd tabelul de la pagina 71, să determine poziţia aproximativă a punctului $F(t)$ pentru $t = 1$, $t = 2$, ..., $t = 10$.*

Capitolul **III**

Elemente de trigonometrie plană

1. Vectori

Se numeşte *vector legat* sau *vector* o pereche ordonată de puncte, deci o mulţime formată din două puncte, dintre care unul este numit *origine*, iar al doilea *extremitate*. Vectorul avînd originea A şi extremitatea B va fi notat $\overrightarrow{AB}$. Termenul vector vine de la cuvîntul latinesc „vehere", care înseamnă „a merge". Cînd ne referim la vectorul $\overrightarrow{AB}$ ne putem gîndi la un mobil, care se deplasează, mergînd din punctul A în punctul B (fig. III.1). De aceea un vector $\overrightarrow{AB}$ se reprezintă printr-o săgeată de la punctul A la punctul B.

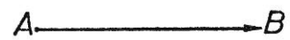

Fig. III.1

Doi vectori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt egali dacă şi numai dacă $A = A'$, şi $B = B'$.

Un vector, a cărui origine coincide cu extremitatea sa, se numeşte *vector nul*. Fiecare punct A defineşte vectorul nul $\overrightarrow{AA}$.

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este un vector nenul, punctele A şi B sînt distincte şi definesc o dreaptă, care se numeşte *suportul* vectorului $\overrightarrow{AB}$ (fig. III.2).

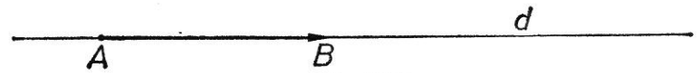

Fig. III.2

Doi vectori care sînt nenuli şi au acelaşi suport, se numesc *vectori coliniari* (fig. III.3).

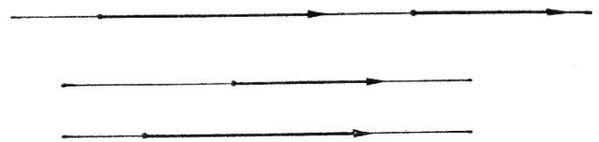
Fig. III.3

Doi vectori nenuli, care au suporții paraleli, se numesc *vectori paraleli*.

Uneori, un vector se notează printr-o singură literă, deasupra căreia se pune o săgeată. De exemplu, putem scrie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Pentru a exprima că $\vec{u}$ este un vector nul, scriem $\vec{u} \in \vec{0}$, $\vec{0}$ fiind mulțimea vectorilor nuli.

Definiție. **Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ doi vectori nenuli și paraleli. Spunem că vectorii considerați sînt echipolenți, dacă figura $ABB'A'$ este un paralelogram, deci dacă $AB \parallel A'B'$ și dacă $AA' \parallel BB'$** (fig. III.4).

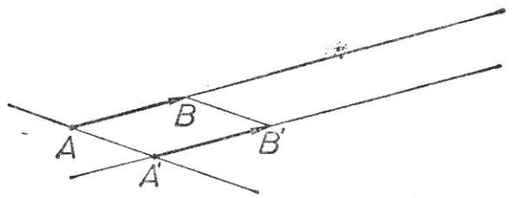

Fig. III.4

Definiție. **Vom spune că doi vectori nenuli și paraleli au același sens, dacă extremitățile lor se găsesc de o aceeași parte a dreptei definite de originile lor.**

Deci vectorii nenuli și paraleli $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt de același sens, dacă punctele B, D se găsesc de aceeași parte a dreptei AC.

Definițiile date pierd orice semnificație, dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ respectiv $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sînt coliniari. Totuși, putem defini echipolența, respectiv relația de a avea același sens și pentru vectori coliniari, dacă procedăm în modul următor: alegem un punct O, exterior dreptei d, care conține vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ și considerăm paralelogramul $OABP$, care are latura $|OP|$ paralelă cu d. Vom spune că vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt echipolenți, dacă vectorii paraleli $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt echipolenți; vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ se zic de același sens, dacă vectorii paraleli $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt de același sens, (fig. III.5).

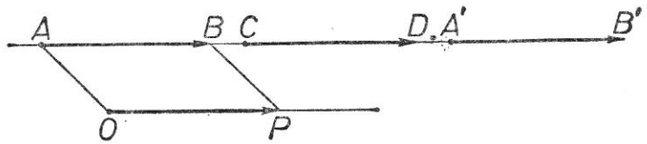

Fig. III.5

Exerciții

1. *Să se arate că relația de echipolență a vectorilor este relație de echivalență, deci că este reflexivă, simetrică și tranzitivă.*

2. *Să se arate că relația exprimată prin cuvintele „au același sens" este o relație de echivalență.*

3. *Să se arate că definițiile echipolenței și relației privind sensul a doi vectori nenuli și coliniari nu depind de alegerea punctului O.*

Doi vectori nuli se consideră totdeauna echipolenți. Pentru a exprima că vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt echipolenți, scriem $\vec{u} \sim \vec{v}$.

Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ doi vectori necoliniari și fie O un punct oarecare. Să considerăm punctele M și N astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{CD}$. Se formează astfel unghiul $\widehat{MON}$ (fig. III.6), despre care vom spune că *reprezintă unghiul vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Dacă se consideră alte puncte O', M', N' astfel ca $\overrightarrow{O'M'} \sim \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{O'N'} \sim \overrightarrow{CD}$, atunci $\widehat{M'O'N'} \equiv \widehat{MON}$, deci *două unghiuri, care reprezintă unghiul a doi vectori nenuli, sînt congruente.*

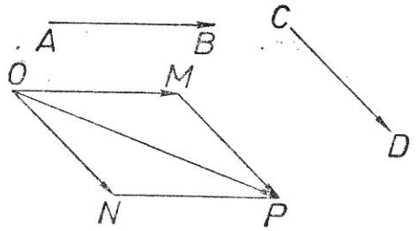

Fig. III.6

Să completăm construcția efectuată anterior, considerînd paralelogramele $MONP$, $M'O'N'P'$. Avem

(1) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{O'M'}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{O'N'}$, $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}$.

Vom spune că vectorul $\overrightarrow{OP}$ *reprezintă suma* în O a vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ și vom scrie

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) \text{ sau } \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}$$

Potrivit acestei definiții, avem

$$\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O'), \ \overrightarrow{O'P'} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Ultima formulă (1) arată că *doi vectori, care reprezintă suma altor doi vectori, în două puncte oarecare, sînt echipolenți.* Deci $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}$.

Din proprietățile paralelogramului rezultă formulele (fig. III.6).

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \text{ (în } O) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \text{ (în } O) = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} \text{ (în } O) =$$
$$= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \text{ (în } O).$$

Avem prin urmare, pentru orice doi vectori, $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$, și pentru orice punct O, proprietatea de *comutativitate*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \text{ (în } O).}$$

Pentru a obține suma în A a vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, putem proceda în modul următor: considerăm punctul P, astfel ca $\overrightarrow{BP} \sim \overrightarrow{CD}$; atunci

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } A) = \overrightarrow{AP}.$$

Fie vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ și $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$. Să alegem un punct oarecare O și să construim punctele M, N, P astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \vec{u}$, $\overrightarrow{MN} \sim \vec{v}$ și $\overrightarrow{NP} \sim \vec{w}$. Avem atunci (fig. III.7).

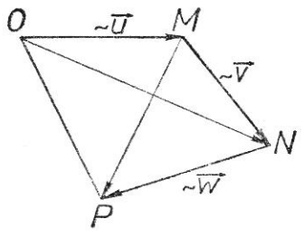

Fig. III.7

$$\overrightarrow{ON} = \vec{u} + \vec{v} \text{ (în } O), \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \vec{w} \text{ (în } O) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \text{ (în } O).$$

$$\overrightarrow{MP} = \vec{v} + \vec{w} \text{ (în } M), \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \text{ (în } O) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ (în } O).$$

Rezultă că *adunarea vectorilor într-un punct are proprietatea de asociativitate*

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \text{ (în } O) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ (în } O).}$$

Exercițiu. *Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{C'D'}$ și un punct O. Arătați că*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'} \text{ (în } O).$$

Fie m segmentul etalon, ales ca unitate de măsurare a lungimii segmentelor și a distanțelor între puncte. Am notat prin $d(A, B)$ distanța dintre punctele A, B. Dacă $A \neq B$, $d(A, B)$ coincide cu lungimea segmentului $|AB|$, iar dacă $A = B$, avem prin definiție $d(A, B) = 0$.

Definiție. După fixarea segmentului etalon, definim norma unui vector $\overrightarrow{AB}$ prin formula

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B).}$$

Deci norma unui vector este egală cu distanța dintre originea și extremitatea acelui vector.

În particular, *vectorii nuli au norma egală cu 0*. Reciproc, *dacă un vector $\vec{v}$ are norma $\|\vec{v}\|$ egală cu 0, atunci vectorul $\vec{v}$ este nul*. Un vector de normă **1** se numește *versor*.

Exercițiu. *Arătați că doi vectori echipolenți au normele egale.*

Fiind dat un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, vom spune că vectorul $\vec{v}' = \overrightarrow{BA}$ este un *opus* al vectorului $\vec{v}$, deoarece avem, oricare ar fi punctul O,

$$\vec{v} + \vec{v}' \text{(în } O) = \overrightarrow{OO}.$$

În general, vom numi *vector opus* vectorului $\vec{v}$, orice vector echipolent cu vectorul $\vec{v}'$.

Definim *diferența* a doi vectori $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ și $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, într-un punct O, prin formula

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \text{ (în } O).$$

Dacă notăm $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ (în O), atunci avem $\vec{u} + \overrightarrow{CD}$ (în A) $= \overrightarrow{AB}$. Oricare ar fi punctele L, M, N, avem

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM} \text{ (în } M),$$

deoarece $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{LM}$ (în L) $= \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$ (în L) $= \overrightarrow{LN}$.

Dacă se completează figura LMN la un paralelogram $LMNP$, avem

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LP} \text{ (în } L) = \overrightarrow{LN}, \quad \overrightarrow{LP} - \overrightarrow{LM} \text{ (în } M) = \overrightarrow{MP}$$

și rezultă că cei doi vectori diagonali $\overrightarrow{LN}$, $\overrightarrow{MP}$ dau suma și diferența vectorilor $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{LP}$, pe care am construit paralelogramul $LMNP$. (fig. III.8).

Fiind dat un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ și un număr real x, definim *produsul* $x \cdot \vec{v}$ în modul următor:

Dacă $B = A$ sau dacă $x = 0$, $x \cdot \vec{v}$ este vectorul nul $\overrightarrow{AA}$.

Dacă $B \neq A$ și dacă $x > 0$, $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector $\overrightarrow{AB'}$, pentru care

$$B' \in |AB, \quad |AB'| \equiv x \cdot |AB|.$$

Dacă $B \neq A$ și dacă $x < 0$, atunci $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector $\overrightarrow{AB''}$, pentru care

$$A \in |BB''|, \quad |AB''| \equiv (-x) \cdot |AB|.$$

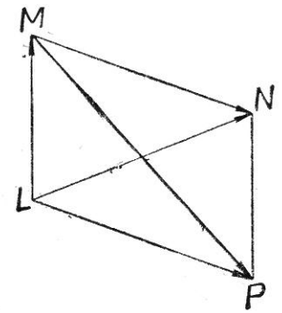

Fig. III.8

În particular, avem $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ și $(-1)\,\vec{v}$ este un opus al vectorului $\vec{v}$. Oricare ar fi numerele reale x și y și pentru orice vector v, avem

$$(2) \qquad \boxed{x \cdot (y \cdot \vec{v}) = (xy) \cdot \vec{v}.}$$

Ultima formulă se stabilește observînd că cei doi membri reprezintă vectori avînd aceeași origine, aceeași dreaptă suport (dacă cei doi vectori sînt nenuli); în plus, cei doi vectori au același sens, oricare ar fi semnele lui x și y și ei au de asemenea aceeași normă $|xy| \cdot \|\vec{v}\|$.

Să arătăm că, *oricare ar fi vectorii* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ *și oricare ar fi numărul real* x, *avem*

$$x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}. \tag{3}$$

Pentru demonstrație, să considerăm un punct O și să construim punctele M, N astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \vec{u}$ și $\overrightarrow{ON} \sim \vec{v}$. Fie apoi punctele M', N' pentru care

$$\overrightarrow{OM'} \sim x \cdot \vec{u}, \ \overrightarrow{ON'} \sim x \cdot \vec{v}.$$

Să presupunem că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli și necoliniari. Atunci $M \neq O$

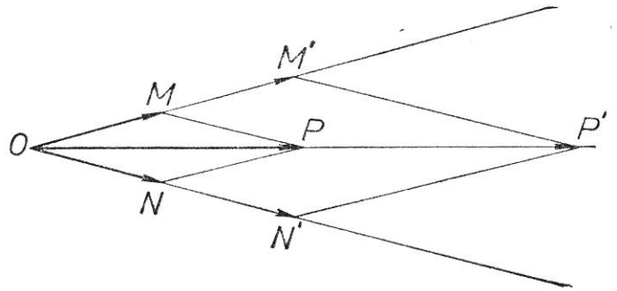

Fig. III.9

și $N \neq O$ și avem $M' \in OM$, $N' \in ON$. Dacă definim punctele P, P' prin formulele (fig. III.9).

$$\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}, \ \overrightarrow{OP'} \sim x \cdot \overrightarrow{OP},$$

din teorema lui Thales deducem relațiile

$$MN \parallel M'N', \ M'P' \parallel MP \parallel ON, \ N'P' \parallel NP \parallel OM,$$

$$\overrightarrow{M'P'} \sim x \cdot \overrightarrow{MP} \sim x \cdot \overrightarrow{ON}, \ \overrightarrow{N'P'} \sim x \cdot \overrightarrow{NP} \sim x \cdot \overrightarrow{OM},$$

deci avem

$$\overrightarrow{OP'} \sim x \cdot \overrightarrow{OP}, \ \overrightarrow{OP'} \sim \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} \sim x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{ON}$$

sau

$$\overrightarrow{OP'} \sim x \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \sim x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{ON}.$$

Dacă unul din vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ este nul, relația (3) este evidentă.

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli dar coliniari, există un număr real r astfel

ca $\vec{v} \sim r \cdot \vec{u}$. În acest caz, avem $\vec{u} + \vec{v} \sim (1 + r)\vec{u}$, $x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x(1 + r) \cdot \vec{u}$, $x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v} \sim x \cdot \vec{u} + xr \cdot \vec{u} \sim (x + xr) \cdot \vec{u} = x(1 + r) \cdot \vec{u}$, deci și în acest caz, relația (3) este adevărată.

Produsul scalar a doi vectori

Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori. Definim **produsul scalar** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ al acestor vectori prin formula

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}, \text{ dacă } \vec{u} \notin \vec{0} \text{ și } \vec{v} \notin \vec{0}. \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \text{ dacă } \vec{u} \in \vec{0} \text{ sau } \vec{v} \in \vec{0}. \end{array}}$$

Din această definiție deducem următoarele proprietăți:

Produsul scalar a doi vectori este simetric, deci $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Produsul scalar a doi vectori nu se schimbă, dacă înlocuim cei doi vectori prin doi vectori echipolenți lor. Deci $\vec{u'} \sim \vec{u}$ și $\vec{v'} \sim \vec{v}$ implică $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u'} \cdot \vec{v'}$.

Produsul scalar a doi vectori este nul fie în cazul în care unul cel puțin din cei doi vectori este nul, fie în cazul în care cei doi vectori sînt nenuli și perpendiculari.

Produsul scalar a doi vectori, care fac un unghi ascuțit, este pozitiv.

Produsul scalar a doi vectori, care fac un unghi obtuz, este negativ.

Unghiul a doi vectori nenuli $\vec{u}$ și $\vec{v}$ poate fi calculat din formula

$$\boxed{\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}}$$

Din inegalitatea $|\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}| \leqslant 1$, deducem *inegalitatea lui Schwartz-Cauchy-Buniakowski*:

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.}$$

Dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt nenuli și paraleli sau coliniari, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \pm 1$.

Mai precis, dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ au același sens, atunci $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = 1$ și rezultă $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. În particular, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, deci:

Produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul normei acelui vector.

Dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt de sensuri opuse, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = -1$ și

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = - \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|.$$

Dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt nenuli, necoliniari și neparaleli, atunci $-1 < \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} < 1$ și rezultă $| \vec{u} \cdot \vec{v} | < \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|$.

Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt vectori nenuli și dacă x este un număr pozitiv, atunci unghiul vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$ este egal cu unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}$, $\vec{v}$, deoarece înmulțirea vectorului $\vec{u}$ cu un număr pozitiv dă un vector de același sens cu $\vec{u}$. Rezultă că, pentru $x > 0$, avem

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = x \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = x(\| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = x(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Dacă $x < 0$, atunci unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}$ și $\vec{v}$ se reprezintă prin suplementul unghiului vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, deoarece vectorul $x \cdot \vec{u}$ are sensul opus lui $\vec{u}$. Rezultă, pentru $x < 0$, $\cos \widehat{(x\vec{u})\vec{v}} = - \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}$, deci

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \| x \cdot \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| (-\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = (-x) \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| (-\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Deci *avem, pentru orice doi vectori nenuli și orice număr real nenul* x,

$$(x\vec{u}) \cdot \vec{v} = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}). \tag{4}$$

Această relație este evident verificată și în cazul în care unul din vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sau numărul x este nul. Deci formula (4) este generală.

Exerciții

1. *Să se arate că, oricare ar fi punctele O, A, B, C, D într-un plan, avem*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \ (\text{în } O) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \ (\text{în } O),$$
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \ (\text{în } O) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \ (\text{în } O).$$

2. *Se dau punctele A, B, C, D. Să se construiască vectorii* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB}$ *(în D),* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$ *(în A),* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ *(în B),* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ *(în C).*

3. *Se dau punctele A, B, C, M astfel ca* $\overrightarrow{BM} \sim \overrightarrow{MC}$. *Să se construiască vectorii* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ *(în M),* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{MA}$ *(în A),* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA}$ *(în M),* $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM}$ *(în C).*

4. *Se dau punctele A, B, C, I, J astfel ca* $\overrightarrow{CI} \sim \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} \sim \overrightarrow{BA}$. *Să se arate că punctele C, I, J sînt coliniare.*

5. *Fie M, N, G mijloacele segmentelor* $| AB |$, $| CD |$, $| MN |$ *dintr-un același plan. Să se arate că, oricare ar fi punctul O din acest plan,*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \ (\text{în } O) = 2\overrightarrow{OM}, \ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \ (\text{în } O) = 4\overrightarrow{OG}.$$

6. *Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, să se arate că există un punct P astfel ca* $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \in \vec{0}$.

7. *Fiind date două puncte A, B să se arate dacă există punctele P, Q, R, S care verifică relațiile*

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} \ (\text{în } A) = 2\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB} \ (\text{în } A) = -\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{RA} - \overrightarrow{RB} \ (\text{în } A) = \overrightarrow{AB},$$
$$2\overrightarrow{SA} - 3\overrightarrow{SB} \ (\text{în } A) = \overrightarrow{AB}.$$

În enunțurile următoare, $\vec{i}$, $\vec{j}$ *reprezintă doi versori ortogonali, avînd originea într-un punct O. Dacă P este un punct în planul vectorilor* $\vec{i}$, $\vec{j}$, *notația* $P(x, y)$ *va însemna că x și y sînt componentele vectorului de poziție* $\overrightarrow{OP}$ *față de axele avînd* $\vec{i}$ *și* $\vec{j}$ *ca versori, deci* $\overrightarrow{OP} \sim x\vec{i} + y\vec{j}$.

8. *Se dau punctele* $A(2, 2)$, $B(-3, -1)$, $C(3, -2)$.

a) *Notînd prin I mijlocul segmentului* $| AB |$, *să se determine componentele vectorului* $\overrightarrow{OI}$ *față de* $\vec{i}$ *și* $\vec{j}$.

b) *Fie M, N punctele de pe dreapta AB pentru care* $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$ *și* $\overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{NA}$. *Să se arate că*

$$5\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \ 3\overrightarrow{ON} = 4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

c) *Fie G punctul de pe dreapta CI, pentru care* $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GI}$. *Să se arate că* $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. *Să se calculeze componentele vectorului* $\overrightarrow{OG}$.

9. *Se dau punctele* $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -2)$. *Fie I, J punctele care verifică relațiile* $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} \in \vec{0}$, $3\overrightarrow{JA} - 5\overrightarrow{JB} \in \vec{0}$. *Să se arate că* $8\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}$ *și* $-2\overrightarrow{OJ} = 3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$. *Să se determine componentele vectorilor* $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$.

10. *Să se calculeze normele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ *și produsele scalare* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ *luînd pentru A, B, C punctele definite prin formulele:*

a) $A(0, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(2, 2)$,
b) $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 2)$,
c) $A(2, 3)$, $B(-4, 0)$, $C(0, 3)$,
d) $A(8, 0)$, $B(1, -2)$, $C(-3, 4)$.

11. *Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, notăm prin I, J, K, L mijloacele segmentelor* $| AB |$, *respectiv* $| CD |$, $| AD |$, $| BC |$.

a) *Să se arate că* $| IJ |$ *și* $| KL |$ *au același mijloc.*
b) *Ce fel de patrulater este figura ILJK, dacă ABCD este un patrulater?*
c) *Cum sînt punctele I, J, K, L în cazul în care figura ABCD este un patrulater?*
d) *Să se arate că, oricare ar fi punctele A, B, C, D în planul p, avem* $\overrightarrow{IL} \sim \overrightarrow{KJ}$ *și* $\overrightarrow{IK} \sim \overrightarrow{LJ}$.

12. *Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime egală cu unitatea. Să se calculeze produsul scalar* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

13. *Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime 1 și fie AA', înălțimea din A a acestui triunghi,* $A' \in BC$. *Să se calculeze produsele scalare* $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{BA}$.

14. *Fie ABCD un pătrat cu laturile de lungime l. Să se calculeze produsul scalar* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

15. *Fie A, B, C trei vîrfuri consecutive ale unui hexagon convex regulat de laturi congruente ca etalonul m. Să se calculeze produsele scalare* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. Funcţii trigonometrice

Fie într-un plan p triunghiul dreptunghic isoscel OAB, avînd $OA \perp OB$ şi $|OA| \equiv |OB| = m$, unde m este segmentul etalon.

Să considerăm vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Avem $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$ şi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

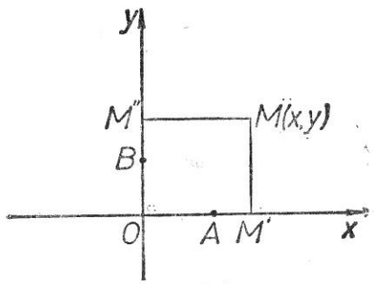

Fig. III.10

Spunem că vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ formează un *reper ortonormat* în planul p.

Dacă M este un punct oarecare din planul p, notăm prin M' proiecţia ortogonală a lui M pe dreapta OA, iar prin M'' notăm proiecţia ortogonală punctului M pe dreapta OB. Există un cuplu unic de numere reale (x, y), astfel încît să avem (fig. III.10):

(1) $\overrightarrow{OM'} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM''} = y \cdot \overrightarrow{OB}$.

Numerele x şi y se numesc *coordonatele punctului* M faţă de reperul format de vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$; se spune că x este *abscisa* lui M, iar y este *ordonata* lui M faţă de reperul $(\vec{a}, \vec{b})$. Se scrie, dacă reperul $(\vec{a}, \vec{b})$ este fixat, $M(x, y)$ pentru a exprima că punctul M are coordonatele x şi y.

Pentru orice cuplu (x, y) de numere reale, există un singur punct M în planul p, astfel ca x să fie abscisa lui M, iar y să fie ordonata lui M. Punctul M este dat de formula

(2) $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ (în O).

Formulele (1) şi (2) stabilesc o aplicaţie bijectivă $\mathcal{C}$ de la mulţimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a cuplurilor de numere reale la mulţimea punctelor din planul p, deci $\mathcal{C}: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to p$.

Considerînd semnele coordonatelor x şi y, putem împărţi planul p în patru cadrane, care coincid cu interioarele celor patru unghiuri drepte formate de dreptele OA, OB (fig. III.11), anume:

Cadranul I $= \{M(x, y);\ x > 0,\ y > 0\}$

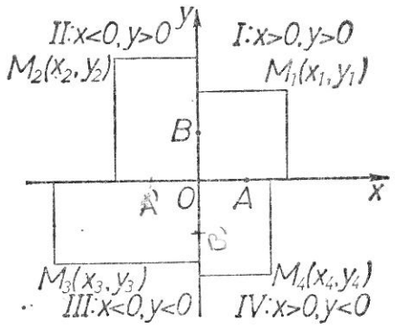

Fig. III.11

Cadranul II $= \{M(x, y);\ x < 0,\ y > 0\}$
Cadranul III $= \{M(x, y);\ x < 0,\ y < 0\}$
Cadranul IV $= \{M(x, y);\ x > 0,\ y < 0\}$.

Planul p este egal, ca mulţime de puncte, cu reuniunea acestor patru cadrane şi a dreptelor OA, OB. Avem $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Vom mai considera punctele $A'(-1, 0) \in OA$ şi $B'(0, -1) \in OB$. Punctele A, A', B, B' se găsesc pe cercul de centru O şi de rază 1, care va fi numit *cercul unitate* sau *cercul trigonometric* din planul p. Inegalităţile $y > 0$ şi $y < 0$ definesc semiplanele limitate de dreapta OA în planul p; aceste semiplane vor fi numite *semiplanul superior* respectiv *semiplanul inferior* din planul p.

În primul capitol al acestui manual, am introdus funcţiile sinus şi cosinus definite pe *mulţimea unghiurilor*. Vom defini acum funcţii asemănătoare, dar definite pe *mulţimea numerelor reale*. Trecerea de la primul tip de funcţii la tipul de funcţii pe care le vom introduce acuma se face înlocuind fiecare unghi prin măsura sa în radiani. Dar noile funcţii vor fi definite pe toată axa reală $\mathbf{R}$, deşi măsura în radiani a unui unghi nu poate depăşi numărul π, care corespunde unghiurilor alungite. Pentru a obţine o *prelungire* a funcţiilor sinus şi cosinus, în afara intervalului $[0, \pi]$, vom construi o aplicaţie surjectivă F, de la axa reală $\mathbf{R}$ la cercul trigonometric C, avînd raza 1 şi centrul în originea unui reper ortonormat $(\vec{a}, \vec{b})$ fixat într-un plan p).

Aplicaţia

$$F : R \to C$$

este definită prin următoarele proprietăţi (fig. III.12):

1) $F(t + 2\pi) = F(t),\ \forall\, t \in \mathbf{R}$.

2) Dacă $t \in (0, \pi)$, **punctul** $F(t)$ **va fi acel punct al cercului** C, **situat în semiplanul superior şi astfel ca măsura în radiani a unghiului** $\widehat{F(t)OA}$ **să fie egală cu** t.

3) Punem apoi $F(0) = A$ **şi** $F(\pi) = A'$ (fig. III.13).

4) Dacă $t \in (-\pi, 0)$, $F(t)$ **va fi acel punct al cercului** C, **situat în semiplanul inferior şi pentru care măsura în radiani a unghiului** $\widehat{F(t)OA}$ **este egală cu** $-t$.

5) Punem $F(-\pi) = F(\pi) = A'$.

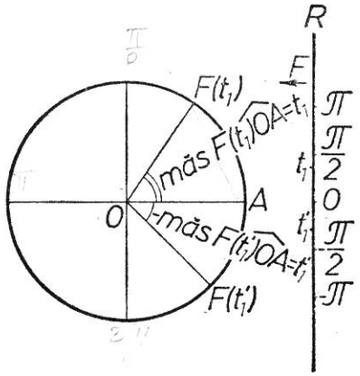

Fig. III.12

Potrivit acestei definiţii, vom avea (fig. III.13)

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B,\quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'.$$

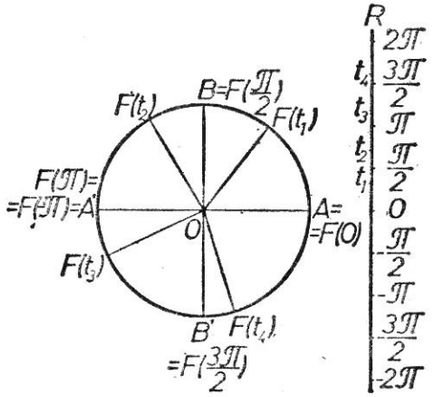

Fig. III.13

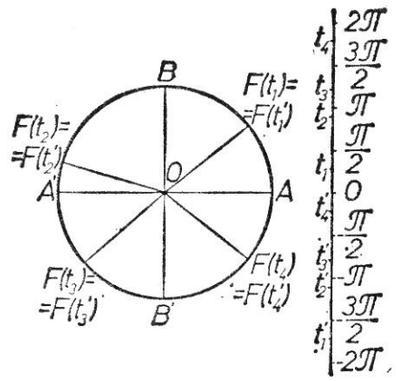

Fig. III.14

Dacă t este un număr real arbitrar, există un număr întreg k, astfel încît să avem $t + 2k\pi \in [0, 2\pi)$ şi numărul k este determinat în mod unic prin această proprietate.

Dacă t este un număr pozitiv sau nul, să notăm prin k partea întreagă a raportului $t/2\pi$ şi prin r diferenţa $t - 2k\pi$. Vom avea atunci

$$t = 2k\pi + r,\ r \in [0, 2\pi),\ k \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 0.$$

Dacă t este un număr negativ, considerăm numărul pozitiv $-t$ şi scriem acest număr sub forma de mai sus:

$$-t = 2k\pi + r,\ r \in [0, 2\pi),\ k \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 0.$$

Vom avea atunci

$$t = -2k\pi - r = 2k'\pi + r',$$

unde,

$$k' = -k - 1,\ r' = 2\pi - r \in (0, 2\pi].$$

Rezultă că *orice număr real t poate fi scris sub forma*

(1) $$t = 2k\pi + r,\ k \in \mathbf{Z},\ r \in [0, 2\pi).$$

Din condiţia 1) rezultă $F(t) = F(r)$.

Exerciţii:

1. *Să se scrie sub forma (1) numerele* 100, 200, ..., 1 000.

2. *Fie T, t două numere reale astfel ca $T > 0$. Să se arate că există o singură pereche de numere $k \in \mathbf{Z}$, $r \in [0, T)$ astfel ca să avem*

$$t = kT + r.$$

3. *Să se arate că funcţia $F : \mathbf{R} \to C$ construită mai sus are următoarele proprietăţi:*

1°. $F(0) = A,\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B,\ F(\pi) = F(-\pi) = A',\ F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'.$

2°. *Aplicaţia F este periodică de perioadă 2π, adică avem $F(t + 2\pi) = F(t)$, pentru orice număr real t şi $0 < |t - t'| < 2\pi$ implică $F(t) \neq F(t')$.*

3°. *Dacă $|t| < \pi$, atunci punctul $M = F(t)$ este astfel încît măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOA}$ este egală cu $|t|$.*

4°. *Dacă t, t' sînt două numere reale astfel ca $|t - t'| < \pi$, atunci punctele $M = F(t)$, $M' = F(t')$ sînt astfel încît măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$ este egală cu $|t - t'|$,* (fig. III.15).

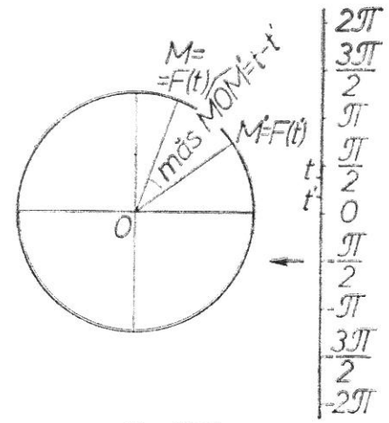

Fig. III.15

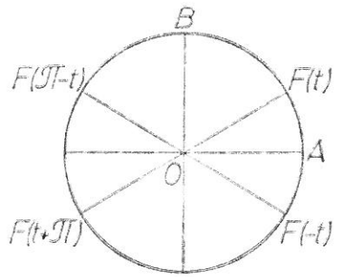

Fig. III.16

5°. *Oricare ar fi $t \in R$, avem:*

— *punctele $F(t)$, $F(\pi + t)$ sînt simetrice faţă de punctul O,* (fig. III.16).

— *punctele $F(t)$, $F(\pi - t)$ sînt simetrice faţă de dreapta OB.*

— *punctele $F(t)$, $F(-t)$ sînt simetrice faţă de dreapta OA.*

(*Indicaţie.* Pentru a verifica aceste proprietăţi, putem presupune că $t \in [0, 2\pi]$, deoarece scăzînd din t un multiplu întreg convenabil de 2π, putem ajunge la această situaţie)

Aplicaţia F este surjectivă, dar nu este injectivă, deoarece F este o aplicaţie periodică. Se spune că F constituie *aplicaţia de acoperire universală* a cercului C; prin această aplicaţie, cercul C este acoperit de o infinitate de ori de dreapta reală; dacă J este un interval de lungime mai mică decît 2π, inclus în $\mathbf{R}$, atunci imaginea lui J prin F este un arc de cerc avînd aceeaşi lungime cu J. Deci restricţiile $F \mid J$ ale aplicaţiei F, la intervale J, de lungimi mai mici decît 2π, sînt aplicaţii injective. Se spune că aceste intervale J sînt *intervale de injectivitate* ale aplicaţiei F.

Cu ajutorul aplicaţiei $F : \mathbf{R} \to C$ vom defini acum funcţiile (fig. III.17)

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1] \subset \mathbf{R},$$
$$\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1] \subset \mathbf{R}$$

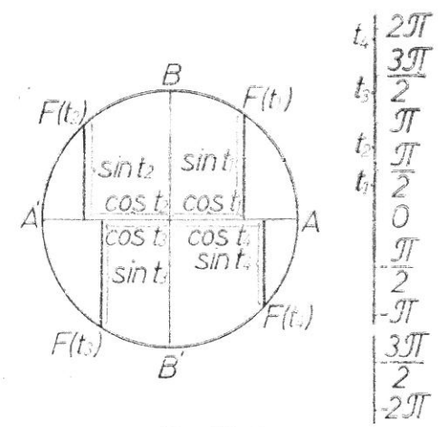

Fig. III.17

punînd

(1) $$\overrightarrow{OF(t)} = \cos t \cdot \vec{a} + \sin t \cdot \vec{b}.$$

D e f i n i ţ i e. **Pentru fiecare număr $t \in \mathbf{R}$, numărul cos t este abscisa punctului $F(t)$, iar sin t este ordonata acestui punct.**

Din relaţia $F(t) \in C$ rezultă că avem, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$,

(2) $$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Proprietăţile aplicaţiei F arată că avem

(3) $$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0,\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Proprietatea 1) arată că *funcţiile sinus şi cosinus sînt periodice cu perioada* 2π, deci avem, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$.

(4) $$\cos(t + 2\pi) = \cos t,\ \sin(t + 2\pi) = \sin t.$$

Proprietatea 2) arată că **sinusul unui unghi cu vîrful în punctul O este egal cu sinusul numărului real t, care este egal cu lungimea arcului dat de intersecţia interiorului acelui unghi cu cercul C.** O proprietate analoagă se poate arăta pentru funcţia cosinus.

Proprietăţile de la punctul 5°, pag. 129, pot fi explicitate sub forma:

(5) $\cos(t + \pi) = -\cos t,\ \sin(t + \pi) = -\sin t$, (fig. III.18).

(6) $\cos(\pi - t) = -\cos t,\ \sin(\pi - t) = \sin t$, (fig. III.19).

(7) $\cos(-t) = \cos(t),\ \sin(-t) = -\sin t$, (fig. III.20).

Să mai reţinem următoarele consecinţe imediate ale definiţiilor date:

Mulţimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = -1$, este formată din numerele $\pi + 2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Mulţimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = 0$, este formată din numerele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Mulţimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = 1$, este formată din numerele de forma $2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Am definit aplicaţia $F : \mathbf{R} \to C$ astfel ca, pentru orice $t \in (0, \pi)$, măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOF(t)}$ să fie egală cu t. Din felul în care am definit

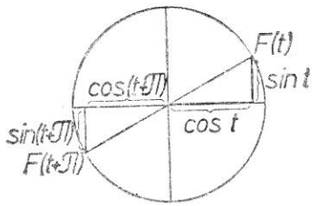

Fig. III.18

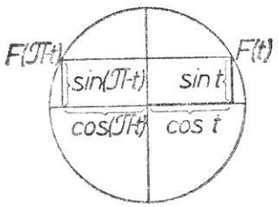

Fig. III.19

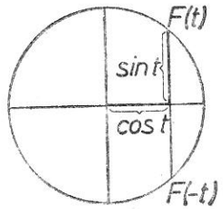

Fig. III.20

funcţiile sinus şi cosinus, odată pe mulţimea unghiurilor, şi apoi pe dreapta reală, deducem că, pentru $t \in [0, \pi]$, avem

$$\cos \widehat{AOF(t)} = \cos t,\ \sin \widehat{AOF(t)} = \sin t.$$

Aceste relaţii permit să calculăm, pe cale geometrică, valorile funcţiilor sinus şi cosinus.

De exemplu, dacă avem un triunghi echilateral PQR şi dacă notăm prin M mijlocul laturii $|QR|$, atunci triunghiul PQM este dreptunghic şi, considerînd măsurile în radiani ale unghiurilor indicate, avem (fig. III.21)

$$\text{măs } \widehat{PQM} = \frac{\pi}{3},\ \text{măs } \widehat{QPM} = \frac{\pi}{6}.$$

Pe de altă parte, dacă notăm prin a lungimea laturii $|PQ|$, atunci

$$d(P, Q) = a,\ d(M, P) = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ d(Q, M) = \frac{1}{2}a,$$

$$\sin \widehat{PQM} = \cos \widehat{QPM} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \widehat{QPM} = \cos \widehat{PQM} = \frac{1}{2}.$$

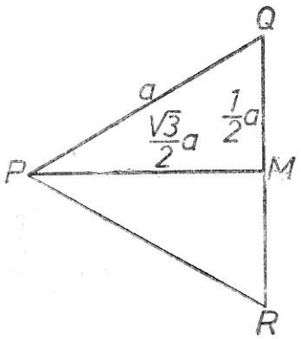

Fig. III.21

Rezultă formulele

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Să considerăm acuma un triunghi dreptunghic isoscel LMN, avînd unghiul $\hat{L}$ drept şi $|LM| = |LN|$. În acest caz (fig. III.22),

$$\text{măs } \widehat{LMN} = \text{măs } \widehat{LNM} = \frac{\pi}{4},$$

$$|MN| = \sqrt{2}\,|LM| = \sqrt{2}\,|LN|$$

şi deducem

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

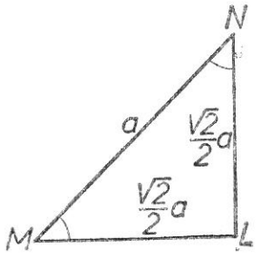

Fig. III.22

Exerciţiu. *Să se calculeze valorile funcţiilor sinus şi cosinus corespunzătoare valorilor* $t = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}$.

Să observăm că, dacă numărul t parcurge axa reală $\mathbf{R}$ de la $-\infty$ la $+\infty$, atunci punctul $F(t)$ descrie cercul C în sensul indicat de săgeată (fig. III.23). Dacă t parcurge semiaxa pozitivă $\mathbf{R}_+$, plecînd din O, $F(t)$ va merge de la A la B, apoi la A', la B', venind din nou în A şi repetînd acest traseu de o infinitate de ori.

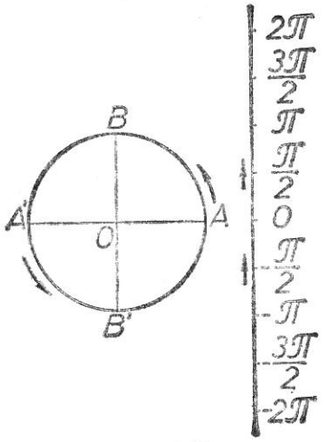

Fig. III.23

Funcția F, deci și funcțiile sinus și cosinus, sînt definite pe $\mathbf{R}$. Am arătat că $\sin(-t) = -\sin t$, deci *funcția sinus este o funcție impară*. Avem $\cos(-t) = \cos t$, deci *funcția cosinus este o funcție pară*.

Exemple.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin(-\pi) = -\sin\pi = 0, \quad \cos(-\pi) = \cos\pi = -1,$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin(-2\pi) = -\sin(2\pi) = 0, \quad \cos(-2\pi) = \cos(2\pi) = 1.$$

Periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție numerică definită pe toată axa reală și fie T un număr pozitiv. Se spune că T este o *perioadă* pentru funcția f dacă avem, pentru orice număr $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t + T) = f(t):$$

dacă funcția f admite o perioadă T, se spune că f este o *funcție periodică* cu perioada T.

Am arătat că funcțiile sinus și cosinus sînt funcții periodice de perioadă $T = 2\pi$.

Dacă o funcție f este periodică de perioadă T, atunci f admite ca perioade fiecare multiplu întreg pozitiv de T, deoarece avem

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \ldots = f(t + pT) = \ldots, (p \in \mathbf{N}).$$

Dacă știm că o funcție f este periodică de perioadă $T > 0$, se pune problema de a ști dacă nu cumva f admite o perioadă T', pozitivă, și mai mică decît T, sau dacă f nu admite și alte perioade, în afară de multiplii întregi pozitivi ai perioadei T. Este util să reținem următoarele proprietăți:

1. *Funcțiile sinus și cosinus nu admit nici o perioadă mai mică decît* 2π.

2. *Dacă o funcție f admite o perioadă T, dar nu admite nici o perioadă mai mică decît T, atunci singurele perioade ale funcției f sînt multiplii întregi pozitivi ai perioadei T.*

Demonstrația proprietății 1. Să presupunem că funcția sinus ar admite o perioadă T', astfel ca $0 < T' < 2\pi$. Am avea atunci $\sin(t + T') = \sin t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$; în particular, am avea $\sin T' = \sin 0 = 0$. Dar singurul număr T', care satisface condițiile $0 < T' < 2\pi$, și $T' = 0$ este numărul π. Dar π nu este o perioadă pentru funcția sinus, deoarece $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$. Deci 2π *este cea mai mică perioadă a funcției sinus.*

Să presupunem că funcția cosinus ar admite o perioadă mai mică decît 2π. Fie T'' o astfel de perioadă. Am avea atunci $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos(t + T'') = \cos t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. În particular, $\cos T'' = \cos 0 = 1$. Dar nu există nici un număr real T'' astfel ca $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos T'' = 1$. Deci *cea mai mică perioadă a funcției cosinus este tot* 2π.

Demonstrația proprietății 2. Să presupunem că T este cea mai mică perioadă a funcției f și fie T' o perioadă arbitrară a lui f. Avem atunci

$$f(t) = f(t + pT) = f(t + qT'),$$

oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$ și oricare ar fi întregii pozitivi p și q.

Fie m cel mai mare număr întreg pozitiv, pentru care avem $mT < T'$. În acest caz, $T'' = T' - mT$ este un număr pozitiv mai mic decît T. Pentru orice număr real t, vom avea

$$f(t + T'') = f(t + T' - mT) = f(t - mT + T') = f(t - mT)$$

și rezultă

$$f(t) = f(t - mT + mT) = f(t - mT) = f(t + T''),$$

deci T'' este o perioadă a funcției f, dacă $T'' \neq 0$. Dar $T'' < T$ și f nu admite perioade mai mici decît T. Deci avem $T'' = 0$ și $T' = mT$. Deci orice perioadă a funcției f este un multiplu întreg pozitiv al perioadei minime T.

Aplicînd ultima proprietate funcțiilor sinus și cosinus, deducem că singurele perioade ale acestor funcții sînt multiplii întregi pozitivi ai numărului 2π.

Dacă o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admite o perioadă minimă, se spune că această perioadă este *perioada principală* a funcției f.

Să observăm că dacă o funcție f admite perioada T, atunci avem, pentru orice $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t - T) = f(t)$$

deoarece putem scrie $f(t) = f(t - T + T) = f(t - T)$. Avem prin urmare

$$f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = \ldots = f(t \pm pT) = \ldots,$$

deci pentru orice întreg n și pentru orice număr real t,

$$f(t + nT) = f(t) \quad (t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}).$$

Aplicînd această observație funcțiilor sinus și cosinus, putem scrie

$$\sin(t + 2n\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2n\pi) = \cos t.$$

În particular, să reținem formulele:

$$\sin(2n\pi) = 0, \quad \cos(2n\pi) = 1, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Aplicații. 1. *Să se determine perioada principală a funcției*

$$f : \mathbf{R} \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin(2x) = \sin 2x.$$

Soluție. Din condiția de periodicitate $f(x + T) = f(x)$ deducem $\sin(2x + 2T) = \sin(2x)$; această condiție trebuie să fie îndeplinită pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Punînd $2x = t$, deducem $\sin(t + 2T) = \sin t$; din proprietățile stabilite anterior deducem $2T = 2\pi$, sau $T = \pi$. Deci perioada principală a funcției date este π.

2. *Generalizare. Să determinăm perioada principală a funcției*

$$g : \mathbf{R} \to [-1, 1], \quad g(x) = \sin(mx) = \sin mx,$$

unde m este un număr real diferit de zero.

Procedînd ca în cazul precedent, obținem condiția $\sin(mx + mT) = \sin(mx)$ sau $\sin(t + mT) = \sin t$, care trebuie să fie verificată pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Cel mai mic număr pozitiv T, care verifică această condiție, este $T = 2\pi/m$.

3. *Ne propunem acum să determinăm perioada principală a funcției*

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h(x) = \sin 4x + \cos 6x.$$

Dacă T este o perioadă pentru h, avem

$$\sin(4x + 4T) + \cos(6x + 6T) = \sin 4x + \cos 6x,\ x \in \mathbf{R}.$$

Luînd $x = 0$ și apoi $x = \frac{\pi}{2}$ obținem ecuațiile

$$\sin 4T + \cos 6T = 1,\ \sin 4T - \cos 6T = -1,$$

din care rezultă $\sin 4T = 0$ și $\cos 6T = 1$. Cel mai mic număr pozitiv care verifică aceste relații este $T = \pi$. Se verifică că π este într-adevăr o perioadă a funcției h și rezultă că π este perioada principală.

Exerciții

1. *Să se determine perioadele principale ale următoarelor funcții numerice, definite pe* $\mathbf{R}$: $f(x) = \sin 3x - \cos 5x$, $g(x) = \sin 5x - \sin 7x$, $k(x) = \cos 10x - \cos 14x$.
2. *Să se arate că funcția* $h(x) = \sin x + \cos(\sqrt{2}\, x)$ *nu este periodică.*

Observație importantă. Dacă știm despre o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ că admite o perioadă T, pentru a studia comportarea funcției f va fi suficient a ne limita să studiem comportarea funcției f pe un interval oarecare de lungime T, deci pe un interval de forma $[a, a + T)$. Într-adevăr, oricare ar fi numărul t, există un întreg n astfel ca $t - nT$ să aparțină intervalului considerat și, în plus, $f(t) = f(t - nT)$. Dacă de exemplu vrem să determinăm valorile lui t pentru care avem $f(t) = 0$, va fi suficient să găsim valorile care verifică această condiție și care se găsesc în intervalul $[a, a + T)$. Orice altă valoare a lui t, pentru care $f(t) = 0$, se va obține dintr-una din valorile găsite în intervalul considerat, adăugînd multiplii întregi ai perioadei T.

În același mod, pentru a obține punctele t în care funcția f are o anumită valoare y, va fi suficient să determinăm punctele cu această proprietate, care aparțin intervalului considerat. În particular, putem afla în acest fel punctele t, pentru care $f(t)$ este o valoare de maxim sau de minim.

Exercițiu. *Să se determine valorile lui t pentru care funcția sinus are una din valorile* $-1, -\sqrt{3}/2, -1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 1, 0$.

3. Formule de reducere la primul cadran

Folosind periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus, am redus problema determinării valorilor acestor funcții la aceea a determinării valorilor restricțiilor funcțiilor sinus și cosinus la intervalul $[0, 2\pi)$.

Folosind proprietățile de simetrie ale aplicației $F : \mathbf{R} \to C$ și ținînd seama de faptul că punctul $F(t)$ are coordonatele $(\cos t, \sin t)$, putem reduce mai departe studiul valorilor funcțiilor sinus și cosinus (fig. III. 24) restrîngînd aceste funcții la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pentru valorile lui t cuprinse în acest interval, punctul $F(t)$ se va găsi în primul cadran, dacă exceptăm valorile extreme 0 și $\pi/2$, care dau punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

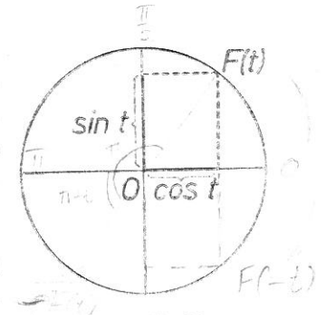

Fig. III. 24

Formula $\overrightarrow{OF(t + \pi)} = -\overrightarrow{OF(t)}$ permite să considerăm numai punete t din intervalul $[0, \pi)$, care dau punete $F(t)$ aparținînd primelor două cadrane, dacă exceptăm punctele A, B. Dacă $t \in [\pi, 2\pi)$, putem calcula $\cos t$ și $\sin t$ folosind relațiile

$$\cos t = -\cos(t - \pi),\ \sin t = -\sin(t - \pi),$$

în care $t - \pi \in [0, \pi)$. Mai departe, dacă avem un număr u în intervalul $[\pi/2, \pi)$, putem calcula numerele $\cos u$ și $\sin u$ din relațiile

$$\cos u = -\cos(\pi - u),\ \sin u = \sin(\pi - u),$$

în care $\pi - u \in (0, \pi/2]$.

Formulele

$$\cos t = \sin(\pi/2 - t),\ \sin t = \cos(\pi/2 - t)$$

arată în sfîrșit că, pentru a cunoaște toate valorile funcțiilor sinus și cosinus, este suficient să cunoaștem valorile pe care le iau aceste funcții în punctele intervalului $[0, \pi/4]$. Primele 3 zecimale ale acestor valori se obțin din tabelul de la pag. 71–72, trecînd de la radiani la grade sexagesimale.

Aplicații. Din observațiile făcute anterior, deducem formulele

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4},$$

$$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

4. Reprezentarea grafică a funcției sinus

Să considerăm, într-un plan p, un reper ortonormat $(\vec{a}, \vec{b})$, format din vectorii unitari și ortogonali $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Fiecare punct P din planul p

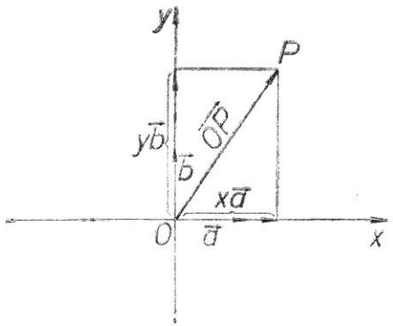

Fig. III.25

va fi determinat de un cuplu (x, y) de numere reale, astfel ca (fig. III.25)

$$\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Ne propunem să trasăm locul geometric al punctelor P avînd coordonatele de forma $x = t$, $y = \sin t$; din aceste ecuații deducem $y = \sin x$. Acest loc geometric reprezintă graficul funcției sinus în planul p.

Să împărțim axa OA în intervale de lungimi egale cu 2π și avînd extremitățile în punctele M_k $(2k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, (fig. III.26).

Punctele M_k aparțin locului geometric considerat, deci graficului funcției sinus. Funcția sinus fiind periodică de perioadă 2π, graficul acestei funcții este format dintr-o infinitate de arce S avînd extremitățile în cîte două puncte

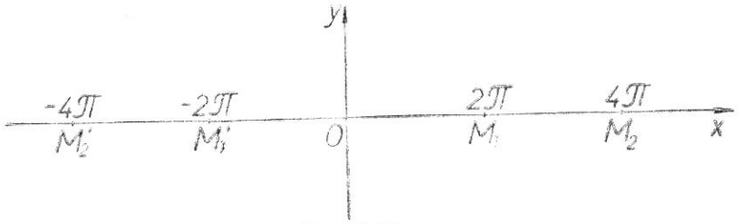

Fig. III.26

consecutive M_{k-1}, M_k. Arcul S_k constituie reprezentarea grafică a restricției funcției sinus la intervalul $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$ și fiecare din arcele S_k se poate obține din arcul S_1 printr-o translație de-a lungul axei OA, anume prin translația

$$y' = y, \; x' = x + 2(k-1)\pi.$$

Deci arcele S_k sînt congruente două cîte două, în particular, ele sînt congruente cu arcul S_1.

Această observație arată că este suficient să trasăm graficul funcției sinus restrînsă la intervalul $[0, 2\pi]$, deci este suficient să trasăm arcul S_1.

Cînd x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[-1, 1]$ în ambele sensuri, după cum urmează (fig. III.27):

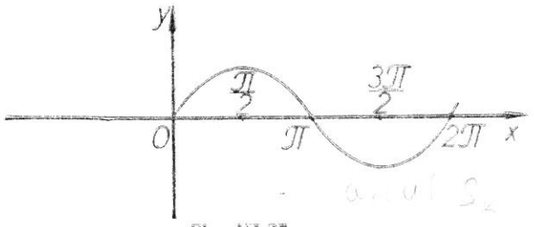

Fig. III.27

Pentru $x = 0$, $\sin x = 0$. Cînd x parcurge subintervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[0, 1]$ crescînd de la 0 la 1. Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ are valoarea maximă 1. Cînd x trece în intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ funcția sinus devine descrescătoare, numărul $\sin x$ coborînd de la valoarea maximă 1 la valoarea 0. În intervalul următor $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, funcția sinus continuă să descrească, valorile ei coborînd de la 0 la -1, care este valoarea minimă pe care poate s-o ia funcția sinus. De la această valoare minimă, numărul $\sin x$ începe să crească din nou, mergînd de la -1 la 0, ajungînd la 0 pentru $x = 2\pi$.

Figura III.28 reprezintă graficul funcției sinus prelungită în afara intervalului $[0, 2\pi]$. Ne putem imagina acum forma întregului grafic.

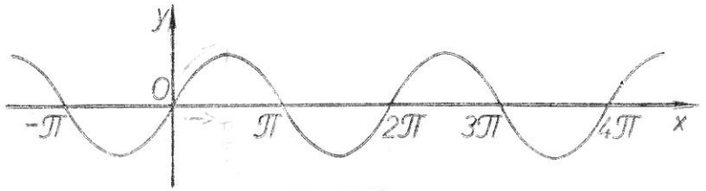

Fig. III.28

Intervale de monotonie. Din indicațiile date, rezultă că funcția sinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Dimpotrivă, funcția sinus este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

Aplicație. Să se afle semnul diferenței $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{11}$.

Se observă că $\frac{\pi}{11} < \frac{\pi}{9}$ și că numerele $\frac{\pi}{11}$, $\frac{\pi}{9}$ aparțin intervalului $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pe care funcția sinus este crescătoare. Avem deci $\sin\frac{\pi}{11} < \sin\frac{\pi}{9}$ și $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{11} > 0$.

Semnul funcției sinus

Din observațiile făcute, deducem că funcția sinus este pozitivă pe fiecare interval deschis $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, unde $k \in \mathbf{Z}$, și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval deschis $(\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

A p l i c a ţ i e. Să se afle semnul expresiei

$$E = \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\sin\frac{23\pi}{7}\sin 3\sin 5.$$

Soluţie. Avem $\frac{\pi}{9} \in (0, \pi)$, deci $\sin\frac{\pi}{9} > 0$; $\frac{11\pi}{9} \in (\pi, 2\pi)$, $\sin\frac{11\pi}{9} < 0$, $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\frac{8\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$, $\sin\frac{8\pi}{7} < 0$; $\frac{23\pi}{7} \in (3\pi, 4\pi)$, $\sin\frac{23\pi}{7} < 0$; $3 \in (0, \pi)$, $\sin 3 > 0$; $5 \in (\pi, 2\pi)$, $\sin 5 < 0$.

Rezultă $E < 0$.

A p l i c a ţ i e. Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbf{R} \to [-2, 2]$, $f(x) = 2\sin x$.

Soluţie. Funcţia f are aceeaşi perioadă şi aceleaşi intervale de monotonie ca funcţia sinus. Graficul lui f se obţine din graficul funcţiei sinus printr-o *dilatare* în lungul axei OB. Graficul funcţiei f intersectează axa OA în punctele M_k $(k\pi, 0)$ şi are punctele de maxim $L_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\right)$ şi punctele de minim $L_k'\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -2\right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Graficul funcţiei f este reprezentat în figura III.29.

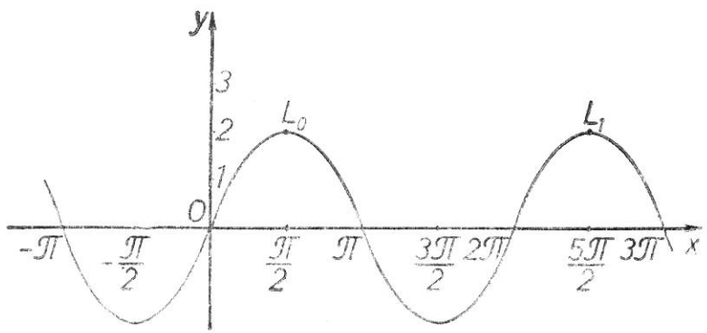

Fig. III.29

A p l i c a ţ i e. Să se reprezinte grafic funcţia $g : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $g(x) = \sin 2x$.

Soluţie. Funcţia g este periodică de perioadă π. Dacă $(x, y = \sin 2x)$ este un punct al graficului funcţiei g, atunci punctul $(2x, \sin 2x)$ va fi un punct al graficului funcţiei sinus. Deci graficul funcţiei g se obţine din graficul funcţiei sinus efectuînd o *contracţie* de-a lungul axei OA. Graficul funcţiei g intersectează axa OA în punctele $P_k\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Valoarea maximă a funcţiei g este 1 şi este atinsă în punctele de abscise $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, iar valoarea

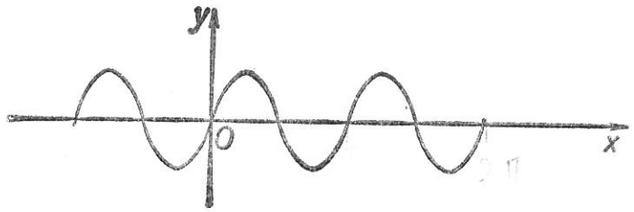

Fig. III.30

minimă este atinsă în punctele de abscise $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Reprezentarea grafică a funcţiei g este dată în figura III.30.

5. Reprezentarea grafică a funcţiei cosinus

Pentru orice număr real x avem $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$. Rezultă că, din orice punct $(x, y = \cos x)$ al graficului funcţiei cosinus, se obţine un punct al graficului funcţiei sinus, făcînd o translaţie de-a lungul axei OA, punînd $x' = x + \frac{\pi}{2}$, $y' = y$. Într-adevăr, dacă $y' = \sin x'$, atunci $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Deci putem obţine graficul funcţiei cosinus, considerînd graficul funcţiei sinus şi mutînd axa OB, paralel cu ea însăşi, din punctul $O(0, 0)$ în punctul $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Figura III.31 reprezintă graficul funcţiei cosinus.

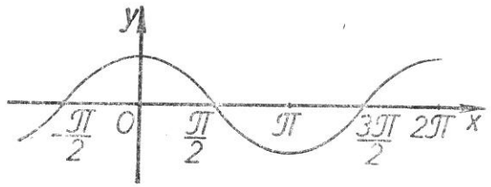

Fig. III.31

Acest grafic intersectează axa OA în punctele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; punctele de maxim au coordonatele $(2k\pi, 1)$, $k \in \mathbf{Z}$, iar punctele de minim au coordonatele $(2k\pi + \pi, -1)$.

Funcţia cosinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$, şi este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

A p l i c a ţ i e. Să se stabilească semnele expresiilor

$$E_1 = \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{5}, \quad E_3 = \cos\frac{9\pi}{7} - \cos\frac{8\pi}{7}.$$

Soluție. Avem $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5} \in (0, \pi)$ și $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$. Funcția cosinus fiind descrescătoare pe intervalul $(0, \pi)$, avem $E_1 < 0$.

Pentru a doua expresie, observăm că $\frac{8\pi}{7} < \frac{9\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$; pe acest interval, funcția cosinus este crescătoare, deci $E_2 > 0$.

Semnul funcției cosinus. Din reprezentarea grafică a funcției cosinus rezultă că această funcție este pozitivă pe orice interval deschis de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval de forma $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Exercițiu. *Să se afle semnul numărului* cos 1 234.

6. Formule de adunare și scădere

Fie u și v două unghiuri ascuțite, astfel ca suma $u + v$ să fie reprezentată de asemenea prin unghiuri ascuțite. Să construim, într-un plan p, trei semidrepte h, k, m, cu aceeași origine, astfel ca acestea să formeze unghiurile adiacente $\widehat{hk} = u$ și $\widehat{km} = v$. În acest caz, unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, $\widehat{hm}$ vor fi unghiuri ascuțite și semidreapta k va fi interioară unghiului $\widehat{hm}$, (fig. III. 32).

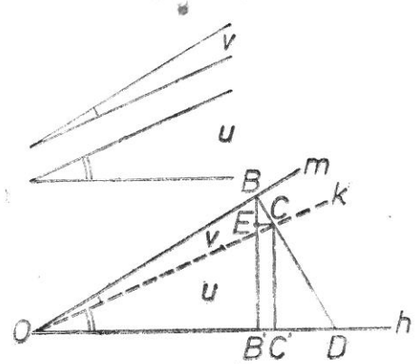

Fig. III.32

Să alegem un punct arbitrar $B \in m$ și să construim punctele $C \in k$, $B' \in h$, $C' \in h$ astfel ca

(1) $$BC \perp OC,\ CC' \perp OC',\ BB' \perp OB'.$$

Dreapta BC intersectează semidreapta h într-un punct D, astfel încît:

(2) $$B' \in |OD|,\ B' \in |OC'|,\ C' \in |B'D|.$$

Aplicînd de mai multe ori teorema proiecției, obținem relațiile

(3) $$|OB'| = |OB| \cos\widehat{hm} = |OB| \cos(u + v),$$

(4) $$|OC| = |OB| \cos\widehat{km} = |OB| \cos v,$$

(5) $$|OC'| = |OC| \cos\widehat{hk} = |OB| \cos v \cos u,$$

(6) $$|B'C'| = |BC| \cos \widehat{BDB'},\ |BC| = |OB| \cos\widehat{OBC}.$$

Din triunghiurile dreptunghice OCD și OBC rezultă

$$\cos \widehat{BDB'} = \cos \widehat{BDO} = \sin \widehat{COD} = \sin u,$$

$$\cos \widehat{OBC} = \sin \widehat{COB} = \sin v,$$

astfel încît formulele (6) pot fi scrise sub forma

(7) $$|B'C'| = |BC| \sin u = |OB| \sin v \sin u.$$

Din relațiile de ordonare (2) rezultă formula

$$|OC'| = |OB'| + |B'C'|$$

iar egalitățile (3), (5) și (7) dau

(8) $$|OB| \cos u \cos v = |OB| \cos (u + v) + |OB| \sin u \sin v.$$

Avem deci egalitatea $\cos u \cos v = \cos (u + v) + \sin u \sin v$ sau

(9) $$\boxed{\cos (u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v.}$$

Demonstrația care ne-a condus la relația (9) este valabilă ori de cîte ori unghiurile u, v și $u + v$ sînt ascuțite.

Dacă unghiurile u și v sînt ascuțite, dar unghiul $u + v$ este obtuz, deci dacă avem situația din figura III.33, atunci vom avea $O \in |B'C'|$ și, notînd prin w unghiul $\widehat{BOB'}$, care este suplementul unghiului $\widehat{hm} = \widehat{BOD}$, avem

(10) $$O \in |B'C'|,$$
$$\cos w = -\cos(u + v).$$

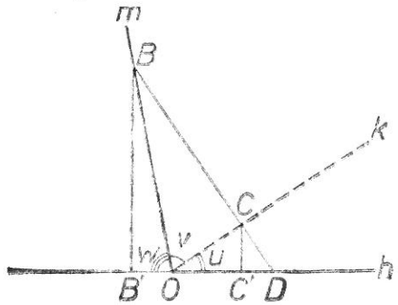

Fig. III.33

Aplicînd din nou, de mai multe ori teorema proiecției, vom avea

$$|OB'| = |OB| \cos w,\ |OC'| = |OC| \cos u = |OB| \cos v \cos u,$$

$$|B'C'| = |BC| \cos \widehat{BDB'} = |OB| \sin v \sin u$$

și rezultă egalitatea

$$|OB| \sin u \sin v = |OB'| + |OC'| = |OB| (\cos w + \cos u \cos v)$$

sau

$$\sin u \sin v = \cos w + \cos u \cos v.$$

Avem deci

$$\cos (u + v) = -\cos w = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

și rezultă că egalitatea (9) este adevărată și în cazul în care u și v sînt unghiuri ascuțite, iar $u + v$ este unghi obtuz.

Dacă $u + v$ este un unghi drept, atunci $\cos(u + v) = 0$, $\cos u = \sin v$ și $\cos v = \sin u$, astfel încît egalitatea (9) rămîne adevărată.

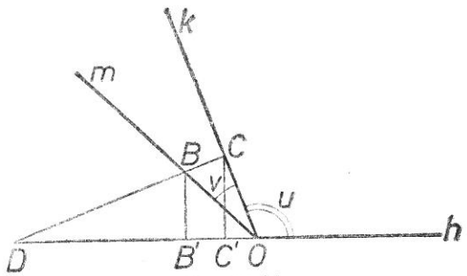

Fig. III.34

Dacă u şi v sînt unghiuri astfel încît u este obtuz sau drept şi dacă suma $u+v$ este definită, deci dacă sîntem în situaţia ilustrată în figura III.34, atunci vom avea relaţiile de ordonare

$$(11)\qquad C' \in |OB'|,\quad B' \in |OD|,\quad C' \in |OD|.$$

Exerciţiu. *Să se demonstreze egalitatea* (9) *în condiţiile* (11).

Formula (9) este adevărată ori de cîte ori u şi v sînt unghiuri astfel încît suma $u+v$ este definită. Dacă $u+v$ este un unghi alungit, atunci unghiurile u şi v sînt suplementare şi avem

$$\cos u = -\cos v,\ \sin u = \sin v,\ \cos(u+v) = -1$$

astfel încît formula (9) este de asemenea adevărată.

Formula (9) permite calculul cosinusului sumei a două unghiuri, cunoscînd sinusurile şi cosinusurile celor două unghiuri.

Ne propunem să stabilim o formulă analoagă pentru sinusul sumei a două unghiuri.

Vom considera separat fiecare din cazurile pe care le-am distins anterior pentru calculul cosinusului sumei $u+v$.

În cazul figurii III.32, deci în cazul în care unghiurile u, v şi $u+v$ sînt ascuţite, avem

$$|BB'| = |OB| \sin(u+v),\quad |CC'| = |OC| \sin u = |OB| \cos v \sin u,$$
$$|BC| = |OB| \sin v.$$

Dacă notăm prin E proiecţia ortogonală a punctului C pe dreapta BB', vom avea $E \in |BB'|$ şi

$$|B'E| = |CC'|,\ |BB'| = |BE| + |B'E|,\ |BE| = |BC| \cos \widehat{CBE} = |BC| \cos u.$$

Rezultă formula

$$|OB| \sin(u+v) = |CC'| + |BE| = |OB| \sin u \cos v + |OB| \sin v \cos u$$

şi avem deci

$$(12)\qquad \boxed{\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u}$$

Exerciţiu. *Să se demonstreze egalitatea* (12) *în cazurile în care unghiul u sau unghiul v este ascuţit şi în cazul în care unghiurile u, v sînt suplementare.*

Formula (12) este valabilă pentru orice unghiuri u şi v, pentru care suma este definită, şi permite calculul sinusului sumei $u+v$ în funcţie de sinusurile şi cosinusurile unghiurilor u şi v.

Să reţinem deci formulele

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v,\\ \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v.\end{aligned}}$$

adevărate pentru orice două unghiuri u şi v, pentru care suma $u+v$ este definită.

Aplicaţii. Am arătat că

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rezultă, folosind formulele scrise mai sus,

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Pentru a da o altă aplicaţie, să observăm că din formula (9) rezultă, dacă presupunem $v = u =$ unghi ascuţit,

$$\cos 2u = \cos u \cos u - \sin u \sin u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1.$$

Din ultima egalitate deducem formula

$$(14)\qquad \cos u = \sqrt{\frac{1 + \cos 2u}{2}},\quad \left(u \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Am ţinut seama de faptul că, unghiul u fiind ascuţit, cosinusul său trebuie să fie pozitiv.

Să presupunem în ultima formulă că u este un unghi de 15°, deci că $2u$ este un unghi de 30°. În acest caz, vom avea $\cos 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi formula (14) dă

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Exerciţii

1. *Să se calculeze* sin 15°. R. $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

2. *Să se calculeze* cos (22°30′) *şi* sin (22°30′), *apoi* cos 7°30′, sin 7°30′.

Fie a şi b două numere reale. Ştim că există două numere întregi m şi n astfel ca numerele $a' = a - 2m\pi$, $b' = b - 2n\pi$ să aparţină intervalului $[0, 2\pi)$, deci astfel ca să avem

$$(1)\qquad a = a' + 2m\pi,\ 0 \leqslant a' < 2\pi,\ b = b' + 2n\pi,\ 0 \leqslant b' < 2\pi.$$

De exemplu, dacă a este un număr pozitiv, împărțim numărul a la 2π și notăm cu m partea întreagă a cîtului, iar prin a' restul. Dacă a este un număr negativ, $-a$ va fi pozitiv și avem o relație de forma $-a = a^* + 2h\pi$, unde $0 \leqslant a^* < 2\pi$ și $h \in \mathbf{Z}$, $h \geqslant 0$. Vom putea scrie atunci, dacă $a^* > 0$,

$$a = -a^* - 2h\pi = (2\pi - a^*) + 2m\pi, \quad m = -h - 1.$$

Deci relațiile (1) pot fi într-adevăr realizate.

Fiecare din numerele a', b' se va găsi într-unul din intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Aceasta înseamnă că există numere naturale p și q, cel mult egale cu 3, astfel ca să avem

(2) $$a'' = a' - p\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \quad b'' = b' - q\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Din formulele (1) rezultă că avem

(3) $$\cos a = \cos a', \ \sin a = \sin a', \ \cos b = \cos b', \ \sin b = \sin b',$$

(4) $$\cos(a + b) = \cos(a' + b'), \ \sin(a + b) = \sin(a' + b').$$

Dacă în formulele (2) avem $p = q = 0$, atunci există unghiuri ascuțite u și v, astfel ca măsurile în radiani ale unghiurilor u, v, $u + v$ să fie egale cu numerele a', b', $a' + b'$. Avem atunci

(5) $$\cos a' = \cos u, \ \sin a' = \sin u, \ \cos b' = \cos v, \ \sin b' = \sin v,$$

(6) $$\cos(a' + b') = \cos(u + v), \ \sin(a' + b') = \sin(u + v).$$

Din formulele (3) — (6) și din formulele cunoscute pentru unghiuri deducem egalitățile

(7) $$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

(8) $$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

În cazul general, vom avea formulele analoage pentru a'' și b'', deoarece aceste numere aparțin intervalului $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; deci putem scrie

(9) $$\cos(a'' + b'') = \cos a'' \cos b'' - \sin a'' \sin b'',$$

(10) $$\sin(a'' + b'') = \sin a'' \cos b'' + \cos a'' \sin b''.$$

Pentru a arăta că formulele (7) și (8) sînt generale, deci că sînt adevărate pentru orice valori date variabilelor a și b, este suficient să arătăm că:

Dacă formulele (7) și (8) sînt verificate de numerele a și b, atunci ele vor fi verificate și de numerele $a' = a + \frac{\pi}{2}$ și b.

Demonstrație. Ne vom sprijini pe identitățile generale

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t, \ \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t.$$

Avem, ținînd seama de aceste identități și de formulele (7) și (8),

$$\cos(a' + b) = \cos\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a + b) = -\sin a \cos b - \cos a \sin b =$$
$$= \cos a' \cos b - \sin a' \sin b,$$

$$\sin(a' + b) = \sin\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b =$$
$$= \sin a' \cos b + \cos a' \sin b.$$

Rezultă că formulele (7) și (8) sînt verificate și de numerele a' și b. Repetînd raționamentul, vom arăta că aceste formule sînt verificate de fiecare din perechile de numere

$$(a'', b''), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 2\frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b''\right),$$

$$\left(a'', b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(a'', b'' + \pi), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right), (a'' + \pi, b'' + \pi), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right),$$

$$\left(a'', b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{3\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right).$$

În rezumat, putem enunța următorul rezultat fundamental:

Oricare ar fi numerele reale a și b, avem

(11) $$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

(12) $$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Dacă în aceste identități punem $b = -b'$, obținem identitățile:

(13) $$\sin(a - b') = \sin a \cos b' - \cos a \sin b',$$

(14) $$\cos(a - b') = \cos a \cos b' + \sin a \sin b'.$$

Aceste formule permit să se calculeze sinusurile și cosinusurile sumei și diferenței a două unghiuri, cunoscînd sinusurile și cosinusurile celor două unghiuri.

Aplicații. 1. *Să se arate ce devin formulele precedente, cînd luăm:*

$$a = 0, \ a = \frac{\pi}{2}, \ a = \pi, \ a = 2\pi$$

sau

$$b' = 0, \ b' = \frac{\pi}{2}, \ b' = \pi, \ b' = 2\pi.$$

Soluție. Se obțin formulele cunoscute

$$\sin(-v) = -\sin v, \quad \cos(-v) = \cos v, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \cos v,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \mp \sin v, \ \sin(\pi \pm v) = \mp \sin v, \ \cos(\pi \pm v) = -\cos v,$$

$$\sin(2\pi \pm v) = \pm \sin v, \ \cos(2\pi \pm v) = \cos v,$$

$$\sin\left(u-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos u,\quad \cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)=\sin u,$$

$$\sin(u-\pi)=-\sin u,\quad \cos(u-\pi)=-\cos u,$$

$$\sin(u-2\pi)=\sin u,\quad \cos(u-2\pi)=\cos u.$$

2. *Să se calculeze* $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$ *şi* $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Soluţie. Avem $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, deci $\sin\frac{\pi}{12}=$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

3. *Să se arate că* $\sin(u+v)\cos u-\cos(u+v)\sin u=\sin v$ *şi* $\cos(u+v)\cos u+\sin(u+v)\sin u=\cos v$.

Soluţie. Avem $v=(u+v)-u$, $\sin v=\sin[(u+v)-u]$. Aplicînd formula (13), se obţine prima relaţie. A doua relaţie se va obţine aplicînd formula (14).

7. Funcţiile tangentă şi cotangentă

Funcţia tangentă. Să notăm prin M mulţimea numerelor reale de forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$, unde $k\in\mathbb{Z}$. Pentru fiecare număr $x\notin M$, dreapta $OF(x)$ intersectează dreapta D, trecînd prin punctul $A(1,0)$ şi paralelă la OB, într-un punct T' (fig. III.35; 36) care are coordonatele de forma $(1, u)$. Punctul T depinde de x, deci u este o funcţie de x. Această funcţie este definită pe mulţimea $\mathbb{R}-M$ şi are valori în $\mathbb{R}$. Se scrie $u=tg\,x$ şi se spune că aplicaţia $x\to u$ este *funcţia tangentă*. Avem deci

$$tg:\mathbb{R}-M\to\mathbb{R},\quad M=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

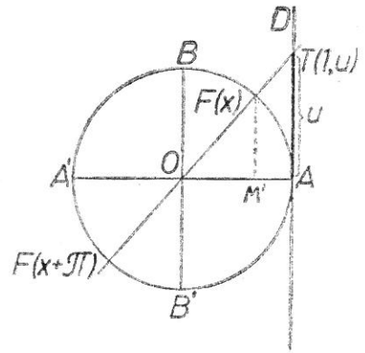

Fig. III.35

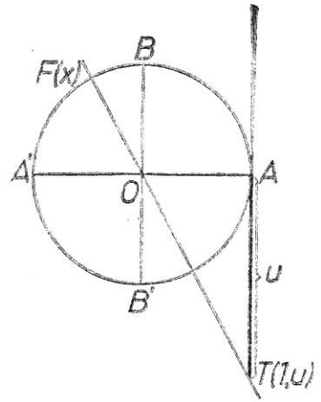

Fig. III.36

Funcţia tangentă are valori pozitive cînd punctul $F(x)\in C$ se găseşte fie în cadranul I, fie în cadranul III, deci tg x este un număr pozitiv dacă $\sin x$ şi $\cos x$ au acelaşi semn. Funcţia tangentă are valori negative pentru acei $x\in\mathbb{R}-M$, pentru care punctul $F(x)$ se găseşte în unul din cadranele II sau IV, deci cînd $\sin x$ şi $\cos x$ au semne contrare.

Din triunghiurile asemenea OAT şi $OM'M$, unde $M=F(x)$ şi $M'(\cos x, 0)$ este proiecţia lui M pe axa OA, deducem, ţinînd seama că $d(O, A)=1$, (fig. III.35)

$$u=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\tag{1}$$

Formula (1) arată cum se exprimă funcţia tangentă cu ajutorul funcţiilor sinus şi cosinus. Observăm că valorile lui x, în care se anulează numitorul fracţiei $\frac{\sin x}{\cos x}$, sînt tocmai elementele mulţimii M, care a fost exclusă din definiţia funcţiei tangentă.

Să notăm prin N mulţimea formată din punctele x, în care se anulează funcţia sinus. Putem defini *funcţia cotangentă*

$$\operatorname{ctg}:\mathbb{R}-N\to\mathbb{R},\quad N=\{k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$$

punînd

$$\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}\tag{2}$$

Această funcţie ia valori pozitive cînd $\sin x$ şi $\cos x$ au acelaşi semn şi ia valori negative, cînd $\sin x$ şi $\cos x$ au semne contrare. Deci numerele tg x şi ctg x au acelaşi semn, pentru orice $x\in\mathbb{R}-(M\cup N)$.

Interpretarea geometrică a funcţiei cotangentă, analoagă celei date pentru funcţia tangentă, se poate obţine considerînd punctul de intersecţie T'

al dreptei OM, $M = F(x)$, cu paralela dusă prin punctul $B(0, 1)$ la axa OA. În acest caz, numărul ctg x este egal cu abscisa punctului T', (fig. III. 37; 38).

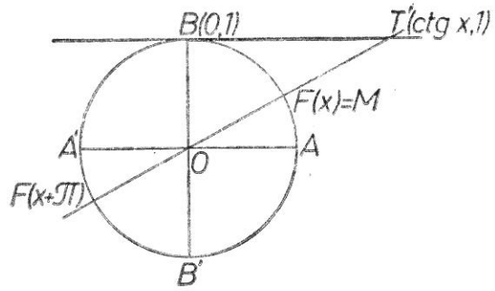

Fig. III.37

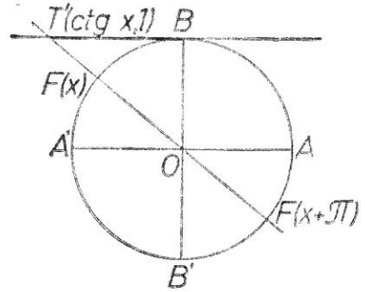

Fig. III.38

Domeniul de definiție al funcției tangentă este egal cu reuniunea intervalelor $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Notînd prin I_k intervalul $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, observăm că funcția tg crește de la $-\infty$ la $+\infty$, pe intervalul I_k.

Funcția tangentă se anulează în punctele, în care se anulează funcția sinus, deci în punctele mulțimii N.

Funcția cotangentă are ca domeniu de definiție reuniunea intervalelor $J_k = (k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Pe fiecare interval J_k, funcția cotangentă descrește de la $+\infty$ la $-\infty$. Funcția cotangentă se anulează în punctele în care se anulează funcția cosinus, deci în punctele mulțimii M.

Reținem că funcțiile tangentă și cotangentă sînt astfel încît fiecare dintre ele se anulează pe mulțimea, pe care cealaltă funcție nu este definită.

În punctele în care ambele funcții, tangentă și cotangentă, sînt simultan definite, aceste funcții sînt legate prin relația

$$\text{tg } x \text{ ctg } x = 1, \quad x \in \mathbf{R} - (M \cup N). \tag{3}$$

Din formulele (1) și (2) rezultă că fiecare din funcțiile tangentă și cotangentă este o funcție periodică, ce admite perioada 2π. Dar, pentru aceste funcții, 2π nu este perioada minimă. Într-adevăr, din relațiile

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

rezultă că avem $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$ pentru orice $x \in \mathbf{R} - M$ și $\text{ctg}(x + \pi) = \text{ctg } x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - N$. **Deci funcțiile tg și ctg admit numărul π drept perioadă.**

Se pune problema de a decide dacă există perioade mai mici decît π pentru funcțiile tg și ctg. Dacă T este o perioadă a funcției tg, trebuie să avem $\text{tg}(x + T) = \text{tg } x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - M$; în particular, $\text{tg } T = \text{tg } 0 = 0$. Deci T trebuie să fie un multiplu întreg de π. Rezultă că *perioada minimă a funcției tangentă este π.*

Fie T o perioadă a funcției cotangentă. Va trebui să avem $\text{ctg } x = \text{ctg}(x + T)$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - N$. În particular, $\text{ctg}\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \text{ctg } \frac{\pi}{2} = 0$. Rezultă că T trebuie căutat printre numerele de forma $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci *perioada minimă a funcției cotangentă este tot π.*

Să observăm că, din moment ce funcția tangentă este crescătoare pe fiecare interval I_k, a cărui lungime este π, nu este posibil ca această funcție să admită perioade mai mici decît π. Aceeași observație este valabilă pentru funcția cotangentă.

Din proprietățile de periodicitate ale funcțiilor tg și ctg rezultă că graficele acestor funcții se obțin din graficele restricțiilor lor la intervalele I_0 respectiv J_0, prin translații de-a lungul axei OA, de mărimi egale cu multiplii întregi de π. Figurile III.39 și III.40 dau reprezentările grafice ale funcțiilor tangentă și cotangentă.

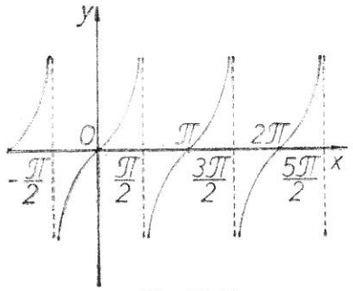

Fig. III.39

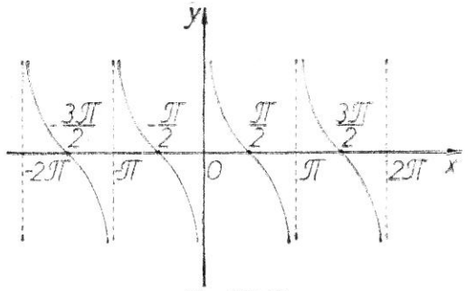

Fig. III.40

Se observă că funcția tangentă ia fiecare valoare reală y de o infinitate de ori, anume o dată în fiecare din intervalele I_k. De asemenea, funcția cotangentă ia orice valoare reală y, o dată în fiecare din intervalele J_k.

De asemenea, se poate observa că fiecare dreaptă d, definită de o ecuație de forma $y = mx + n$, intersectează graficul funcției tangentă într-o infinitate de puncte $P_k(x_k, y_k)$, unde $x_k \in I_k$. Punctele P_k reprezintă soluțiile sistemului de ecuații

$$y = mx + n, \quad y = \text{tg } x$$

iar numerele x_k sînt soluțiile ecuației

$$\text{tg } x = mx + n. \tag{4}$$

Deci:

Ecuația (4) admite o infinitate de soluții x_k, $k \in \mathbf{Z}$, fiecare din aceste soluții fiind situată în intervalul $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Exercițiu. *Fiind date numerele reale m și n, să se precizeze numărul soluțiilor ecuației* ctg $x = mx + n$.

Convenție generală. Ori de cîte ori vom considera o expresie în care apar funcțiile tangentă și cotangentă, sau amîndouă aceste funcții, sau în care apar fracții ce conțin funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate la una sau mai multe variabile, vom presupune că sînt excluse din considerații

acele valori ale variabilelor, pentru care expresia nu are sens. În fiecare caz, elevii vor examina şi vor determina mulţimea valorilor ce trebuie excluse.

Ne propunem să exprimăm numărul $\operatorname{tg}(u+v)$ cu ajutorul numerelor $\operatorname{tg} u$ şi $\operatorname{tg} v$. Avem, folosind formulele cunoscute,

$$\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}=\frac{\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos u\cos v-\sin u\sin v}.$$

Împărţind numărătorul şi numitorul ultimei fracţii prin $\cos u\cos v$ respectiv prin $\sin u\sin v$, obţinem formulele

$$\boxed{\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}=\frac{\operatorname{ctg} v+\operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v-1}}$$

Procedînd în mod analog, obţinem formulele

$$\boxed{\operatorname{tg}(u-v)=\frac{\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}=\frac{\operatorname{ctg} v-\operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v+1}}$$

$$\operatorname{ctg}(u+v)=\frac{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v-1}{\operatorname{ctg} u+\operatorname{ctg} v}=\frac{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}$$

$$\operatorname{ctg}(u-v)=\frac{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v+1}{\operatorname{ctg} v-\operatorname{ctg} u}=\frac{1+\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} v}$$

Aplicaţii. **1.** *Să se arate că*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg} x,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x.$$

Soluţie. Se aplică formula care dă $\operatorname{tg}(u-v)$ în funcţie de $\operatorname{ctg} u$ şi $\operatorname{ctg} v$, apoi formula care dă $\operatorname{ctg}(u-v)$ în funcţie de $\operatorname{ctg} u$ şi $\operatorname{ctg} v$.

2. *Să se calculeze* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Soluţie. Observînd că $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, obţinem

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

Folosind valorile deduse anterior pentru anumite arce, putem întocmi următorul tabel de valori ale funcţiilor tangentă şi cotangentă

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{ctg} x$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Valorile alese pentru x dau puncte $F(x)$ în cadranele IV şi I. Pentru a trece la cadranele II şi III, folosim formulele

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x,\quad \operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x.$$

Folosind periodicitatea funcţiilor tg şi ctg, putem completa tabelul făcînd să apară valorile lui x deduse din cele scrise prin adăugarea multiplilor întregi ai perioadei π.

Exerciţii

Să se stabilească relaţiile

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$.

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

4. *Să se exprime numerele* $\sin(u+v+w)$, $\operatorname{tg}(u+v+w)$ *cu ajutorul valorilor funcţiilor sinus, cosinus şi tangentă, corespunzătoare valorilor* u, v, w *date variabilei independente.*

Soluţie. Avem, folosind formule cunoscute,

$\sin(u+v+w)=\sin(u+v)\cos w+\cos(u+v)\sin w=\sin u\cos v\cos w+$
$+\sin v\cos u\cos w+\sin w\cos u\cos v-\sin u\sin v\sin w.$

$\cos(u+v+w)=\cos(u+v)\cos w-\sin(u+v)\sin w=\cos u\cos v\cos w-$
$-\sin u\sin v\cos w-\sin u\sin w\cos v-\sin v\sin w\cos u.$

$$\operatorname{tg}(u+v+w)=\frac{\sin(u+v+w)}{\cos(u+v+w)}=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v+\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v-\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} w\operatorname{tg} u}.$$

5. *Să se arate că dacă* $u+v+w=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, *atunci*

$$\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v+\operatorname{tg} w=\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w.$$

Soluţie. Se pune în primul membru al ultimei identităţi $\operatorname{tg}(u+v+w)=0$.

6. *Să se exprime numerele* $\sin(u+v+w+t)$, $\cos(u+v+w+t)$ *cu ajutorul numerelor* $\sin u$, $\sin v$, $\sin w$, $\sin t$, $\cos u$, $\cos v$, $\cos w$, $\cos t$.

Dacă în formulele stabilite pentru calculul expresiilor $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$, $\operatorname{tg}(u+v)$, $\sin(u+v+w)$, $\cos(u+v+w)$, $\operatorname{tg}(u+v+w)$ *punem* $u=v=w=x$, *obţinem identităţile*

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\quad \operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=2\sin x\cos^2 x+\cos^2 x\sin x-$$
$$-\sin^3 x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x,$$

$$\cos 3x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos^3 x-\sin^2 x\cos x=2\sin^2 x\cos x=$$
$$=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x.$$

Dacă ţinem seama de identitatea $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, putem scrie

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x,\quad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Pentru $\operatorname{tg} 3x$ și $\operatorname{ctg} 3x$ se obțin formulele

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}.$$

Formulele stabilite în acest fel permit calculul funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, corespunzătoare multiplilor $2x$ și $3x$ ai argumentului x. Metoda folosită poate fi aplicată și pentru calculul valorilor corespunzătoare multiplilor $4x$, $5x$ etc., ca funcții de $\sin x$, $\cos x$ și $\operatorname{tg} x$.

Să observăm că avem, pentru orice număr x, pentru care $\cos x \neq 0$,

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Folosind formulele stabilite pentru $\sin 2x$, $\cos 2x$ și $\operatorname{tg} 2x$, putem acuma să exprimăm numerele $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$, în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Într-adevăr, putem scrie, dacă $\cos \frac{x}{2} \neq 0$,

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Deci am demonstrat că:

Dacă x este astfel încît $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ și dacă notăm $m = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, atunci

$$\boxed{\sin x = \frac{2m}{1 + m^2}, \quad \cos x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2m}{1 - m^2}}.$$

Aceste formule arată că sinusul, cosinusul și tangenta unui număr x, pentru care $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, pot fi exprimate prin funcții raționale de tangenta lui $\frac{x}{2}$.

Aplicații. 1. *Să se afle $\sin x$ și $\cos x$ știind că $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$.*

Soluție. Potrivit formulelor stabilite mai sus avem

$$\sin x = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 9 \cdot 10^{-1} = \frac{3}{5}.$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = \frac{4}{5}.$$

2. *Să se afle numărul $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$.*

Soluție. Să calculăm $\operatorname{tg} x$. Avem

$\operatorname{tg} x = 2(\sqrt{2} - 1)(1 - (\sqrt{2} - 1)^2)^{-1} = 1$. Singurul număr $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x = 1$ este $x = \pi/4$.

8. Transformarea sumelor de două sinusuri sau de două cosinusuri în produse

Din formulele

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

deducem, adunînd membru cu membru,

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

și apoi, scăzînd membru cu membru,

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \sin y \cos x.$$

Dacă notăm

$$x + y = p, \quad x - y = q,$$

vom avea

$$x = \frac{p + q}{2}, \quad y = \frac{p - q}{2}$$

și formulele precedente devin

$$\boxed{\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2} \end{aligned}}$$

În mod *analog, plecînd de la formulele cunoscute*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

obținem, prin adunare și scădere membru cu membru,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y \end{aligned}}$$

Făcînd notațiile indicate mai sus, obținem

$$\boxed{\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2} = 2 \sin \frac{p - q}{2} \sin \frac{q - p}{2} \end{aligned}}$$

Aceste formule arată că sumele și diferențele a două sinusuri sau a două cosinusuri pot fi reprezentate prin produse de sinusuri și cosinusuri. Vom da

unele exemple de aplicare a acestor formule. Menționăm că aceste formule sînt utile, dacă vrem să calculăm efectiv expresii trigonometrice cu ajutorul tablelor de logaritmi, care se studiază în cl. a X-a.

Aplicații. *Să se transforme în produs suma*

$$E = \sin n + \sin 2n + \sin 3n.$$

Soluție. Avem

$$E = (\sin n + \sin 3n) + \sin 2n = 2 \sin 2n \cos n + \sin 2n =$$

$$= 2 \sin 2n \cdot \left(\cos n + \frac{1}{2}\right) = 2 \sin 2n \left(\cos n + \cos \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4 \sin 2n \cos \frac{n + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{n - \frac{\pi}{3}}{2}.$$

Aplicație. *Să se transforme în produse sumele:*

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

$$S' = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x,$$

$$S'' = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x.$$

Soluție. Avem

$S = (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x =$
$= 2 \cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 4 \cos x \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$;

$S' = (\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x) = 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cdot$
$\cdot \cos x = 2 \sin 4x(\cos 3x + \cos x) = 4 \sin 4x \cos 2x \cos x$;

$S'' = (\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 2 \cos 4x \cos 3x +$
$+ 2 \cos 4x \cos x = 2 \cos 4x(\cos 3x + \cos x) = 4 \cos 4x \cos 2x \cos x.$

Observație. Din relațiile stabilite, deducem formula

$$\frac{S'}{S''} = \operatorname{tg} 4x.$$

Exercițiu. *Să se transforme în produse următoarele sume:*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x.$$

9. Identități condiționate

O identitate este o egalitate între două funcții de una sau mai multe variabile independente, care este verificată pentru orice valori date variabilelor independente, astfel încît cele două funcții să fie definite pentru aceste valori.

O egalitate între două funcții, care este verificată în cazul în care variabilele independente verifică o anumită condiție, se numește *identitate condiționată* (de acea condiție).

Exemple

1. Dacă $x + y = 0$, atunci $x^3 = -y^3$.

2. În Trigonometrie, se întîlnesc numeroase relații între liniile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi și care sînt consecințe ale relației măs $\hat{A}$ + + măs $\hat{B}$ + măs $\hat{C} = \pi$. Aceste relații sînt deci identități condiționate.

3. Dacă $u + v + w = \pi$, atunci $\sin(u+v) = \sin w$, $\cos(u+v) = -\cos w$, și

(1) $$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w.$$

Observație. Oricare ar fi numărul întreg k, relația $u + v + w = k\pi$ implică relația (1).

4. Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

(2) $$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Putem scrie pe rînd următoarele egalități:

$$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin(A+B) =$$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

Dacă ținem seama că $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, obținem formula (2).

5. Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

(3) $$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Avem, ținînd seama că $(A + B) + C = \pi$ și $\frac{A+B}{2} +$ $+ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, $(\cos A + \cos B) + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} -$

$$- \cos(A + B) = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A+B}{2} + 1 =$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right) + 1 = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

6. Am demonstrat că, oricare ar fi numerele reale A, B, C, avem

$\sin(A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A +$
$+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$,

$\cos(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C -$
$- \sin B \sin C \cos A - \sin C \sin A \cos B$.

Dacă $A + B + C = \pi$, rezultă

$\sin A \sin B \sin C = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B$,

$\cos A \cos B \cos C = \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \cdot \sin B - 1$.

Exerciţii

1. *Să se demonstreze că dacă $A + B + C = \pi$, atunci:*

a. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$.

b. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

2. *Să se arate că dacă $u + v = w$, atunci*

$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w - 2 \cos u \cos v \cos w = 1$.

3. *În ipoteza $a + b + c = \pi$, să se transforme în produse sumele:*

$\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2} + \cos \frac{c}{2}$, $\sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{a}{2} + \operatorname{ctg} \frac{b}{2} + \operatorname{ctg} \frac{c}{2}$.

4. *În ipoteza $a + b + c + d = 2\pi$, să se transforme în produse sumele*

$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d$, $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d$,

$\sin a - \sin b + \sin c - \sin d$, $\cos a - \cos b + \cos c - \cos d$.

5. *Ştiind că $a + c = 2b$ şi că $t - z = z - y = y - x$, să se transforme în produse sumele*

$\sin a + \sin b + \sin c$, $\sin x + \sin y + \sin z + \sin t$,

$\cos a + \cos b + \cos c$, $\cos x + \cos y + \cos z + \cos t$.

6. *Să se transforme în produs suma*

$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \sin(a + 3b) + \sin(a + 4b)$.

7. *Să se transforme în produs suma*

$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \cos(a + 3b) + \cos(a + 4b)$.

(*Indicaţie pentru ex. 6 şi 7.* Se înmulţeşte fiecare termen cu $\sin \frac{b}{2}$ şi se transformă fiecare produs astfel obţinut într-o diferenţă de cosinusuri respectiv de sinusuri.)

10. Transformarea în produs a sumei a două tangente sau a două cotangente

Uneori sînt utile identităţile următoare

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p + q)}{\cos p \cos q}$$

$$\operatorname{ctg} p + \operatorname{ctg} q = \frac{\cos p}{\sin p} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos p \sin q + \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(q + p)}{\sin p \sin q}$$

care permit să transformăm în produse suma a două tangente sau a două cotangente.

Aplicaţie. Să se transforme în produs suma

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x.$$

Soluţie. Avem

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x) - \operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \sin 3x \frac{\cos 3x - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} =$$

$$= \sin 3x \frac{\cos(2x + x) - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = -\frac{\sin 3x \sin 2x \sin x}{\cos 3x \cos 2x \cos x} = -\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x.$$

A doua soluţie. Observăm că expresia dată se poate scrie sub forma $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x)$ şi că $x + 2x + (-3x) = 0$. Aplicînd un rezultat stabilit anterior, putem scrie

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(-3x) = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

Exerciţiu. *Ştiind că numerele u, v, w reprezintă măsurile în radiani ale unghiurilor unui triunghi, să se transforme în produs suma*

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w.$$

Exerciţii recapitulative

I. *Să se demonstreze următoarele identităţi:*

1. $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

2. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$

3. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

4. $\sin 5a \cos 3a = \frac{1}{2}(\sin 8a + \sin 2a)$

5. $\sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2}(\sin 8a - \sin 2a)$

6. $\sin(a - b)\cos(a + b) + \sin(b - c)\cos(b + c) + \sin(c - a)\cos(c + a) = 0$

7. $\sin(a - b)\sin(a + b) + \sin(b - c)\sin(b + c) + \sin(c - a)\sin(c + a) = 0$

8. $\sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)$, $\cos 2x \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 7x)$

9. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{ctg} 2x$

10. $\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

11. $\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a + b)\sin(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$

12. $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a$

II. *Să se calculeze valorile exprimate prin formulele următoare*

1. $\sin \frac{5\pi}{1}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}$.

$\left(\textit{Indicaţie.}\ \text{Se foloseşte faptul că } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \text{ şi } \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

2. $\sin \frac{7\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{12}$, $\sin \frac{11\pi}{12}$, $\cos \frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$.

III. 1. *Să se arate că dacă $\hat{A}$ este un unghi oarecare, atunci*

$$\cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\cos\hat{A}+1}{2}}, \quad \sin\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\hat{A}}{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\hat{A}}{1+\cos\hat{A}}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\hat{A}}{1-\cos\hat{A}}}$$

2. *Să se calculeze, cu două zecimale exacte,* $\sin\frac{\pi}{24}$, $\cos\frac{\pi}{24}$ *și* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$.

IV. *Să se arate că dacă x este un număr real oarecare, atunci*

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

și să se indice felul în care trebuie alese semnele, când x parcurge dreapta reală.

11. Funcții trigonometrice inverse

Știm de la algebră că dacă $f : E \to F$ este o aplicație bijectivă de la mulțimea E la mulțimea F, deci dacă f asociază fiecărui element x din E un element $y = f(x)$ din F, astfel ca orice element din F să fie asociat unui element și unuia singur din E, atunci există *aplicația inversă* a lui f, notată $f^{-1} : F \to E$ și definită în modul următor:

dacă $y' \in F$, atunci $f^{-1}(y')$ este acel element x' din E, pentru care $f(x') = y'$.

Deci, pentru o aplicație bijectivă $f : E \to F$, relațiile

$$x \in E,\ y = (f^{-1})(x)$$

sînt echivalente cu relațiile

$$y \in F,\ x = f^{-1}(y).$$

Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă au fost definite între următoarele mulțimi[1]:

$$\sin : R \to [-1, 1];\ \cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

$$\operatorname{tg} : \mathbf{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right) \to \mathbf{R},\ \operatorname{ctg} : \mathbf{R} - (\pi\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}.$$

Astfel definite, funcțiile trigonometrice nu sînt bijective, dar sînt surjective. Într-adevăr, orice număr din intervalul închis $[-1, 1]$ este de forma $\sin x$ sau $\cos y$, pentru o infinitate de valori ale lui x și y; de asemenea, orice număr real se poate pune sub forma $\operatorname{tg} u$ sau $\operatorname{ctg} v$ pentru o infinitate de valori ale lui u și v.

Deci orice număr real cuprins între -1 și 1, incluzînd aceste valori, este egal cu sinusul a o infinitate de numere x și este egal cu cosinusul a o infinitate de numere y. Mulțimea numerelor reale x, al căror sinus are o valoare

[1] Pentru o mulțime $A \subset \mathbf{R}$ convenim să notăm prin $n + m\,A$ mulțimea $\{n + ma \mid a \in A\}$, oricare ar fi numerele reale m și n.

dată a, se notează Arcsin a și se citește: Arcsin a = *mulțimea arcelor, al căror sinus este egal cu a.*

Denumirea vine de la faptul că funcțiile trigonometrice au fost definite cu ajutorul unei aplicații $F : \mathbf{R} \to C$, care aplică intervalele dreptei reale $\mathbf{R}$ pe arce ale cercului trigonometric C.

În mod analog:

Se notează prin Arccos b mulțimea arcelor (numerelor reale), al căror cosinus este egal cu numărul $b \in [-1, 1]$.

Se notează prin Arctg m mulțimea arcelor (numerelor reale), ale căror tangente sînt egale cu numărul $m \in \mathbf{R}$.

Se notează prin Arcctg m, mulțimea arcelor (numerelor reale), ale căror cotangente sînt egale cu numărul $m \in \mathbf{R}$.

Mulțimile astfel introduse

$$\text{Arcsin } a,\ \text{Arccos } b,\ \text{Arctg } m,\ \text{Arcctg } m$$

sînt mulțimi infinite de numere reale, conținînd fiecare o infinitate numărabilă de elemente.

Se pune problema de a distinge, în fiecare din aceste mulțimi, cîte un element, printr-o regulă generală și ușor de reținut.

Rezolvarea acestei probleme se poate face în mod natural, avînd în vedere faptul că *fiecare din funcțiile trigonometrice considerate admite cîte un interval, închis sau deschis, pe care funcția respectivă are restricția injectivă și surjectivă.*

Într-adevăr, din studiul făcut asupra funcțiilor trigonometrice, rezultă că:

1. Dacă numărul real x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, numărul $\sin x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la -1 la 1, trecînd prin fiecare punct al acestui interval, o singură dată.

Aceasta înseamnă că dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, atunci există un singur număr $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel ca $\sin x = a$. Numărul x va fi notat prin arcsin a. Avem prin urmare, pentru $a \in [-1, 1]$.

$$\{\text{arcsin } a\} = (\text{Arcsin } a) \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exemple. Avem

$$\text{arcsin } 0 = 0,\ \text{arcsin } (-1) = -\frac{\pi}{2},\ \text{arcsin } 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{arcsin } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\ \text{arcsin } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\ \text{arcsin } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{arcsin } \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6},\ \text{arcsin } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4},\ \text{arcsin } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

2. Dacă numărul x parcurge intervalul $[0, \pi]$, de la 0 la π, atunci numărul $\cos x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la 1 la -1, o singură dată, trecînd prin fiecare punct al acestui interval.

Deci, oricare ar fi numărul $b \in [-1, 1]$, există un singur număr $y \in [0, \pi]$, astfel ca $b = \cos y$. Numărul y, care verifică aceste condiții, va fi notat $y = \arccos b$. Avem deci

$$\{\arccos b\} = (\mathrm{Arccos}\, b) \cap [0, \pi].$$

Exemple. Avem

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 1 = 0, \quad \arccos(-1) = \pi,$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

3. Dacă numărul x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ atunci numărul $\mathrm{tg}\, x$ va parcurge întreaga dreaptă reală $\mathbf{R}$, în sensul pozitiv (crescător), trecînd prin fiecare punct o singură dată.

Dacă $m \in \mathbf{R}$, există deci un singur număr real $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel ca $\mathrm{tg}\, u = m$. Acest număr u va fi notat prin $\mathrm{arctg}\, m$. Avem deci:

$$\{\mathrm{arctg}\ m\} = (\mathrm{Arctg}\ m) \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arctg}\ 0 = 0, \quad \mathrm{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\mathrm{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \quad \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

4. Dacă numărul x parcurge intervalul $(0, \pi)$, de la 0 la π, numărul $\mathrm{ctg}\, x$ va parcurge întreaga dreaptă reală $\mathbf{R}$, în sens negativ (descrescător) trecînd prin fiecare punct, o singură dată. Deci, oricare ar fi numărul real m, există un unic număr $v \in (0, \pi)$, astfel ca $m = \mathrm{ctg}\, v$. Numărul v avînd aceste proprietăți, va fi notat $\mathrm{arcctg}\, m$. Avem deci:

$$\{\mathrm{arcctg}\, m\} = (\mathrm{Arcctg}\, m) \cap (0, \pi).$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arcctg}\ 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{arcctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{arcctg}\ (-1) = \frac{3\pi}{4}, \quad \mathrm{arcctg}\,(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}, \quad \mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Recapitulare. Funcțiile următoare, date de restricții,

$$\sin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],$$

$$\cos \mid [0, \pi] : [0, \pi] \to [-1, 1],$$

$$\mathrm{tg} \mid \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R},$$

$$\mathrm{ctg} \mid (0, \pi) : (0, \pi) \to \mathbf{R}$$

sînt bijective și admit ca inverse funcțiile

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

$$\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{arcctg} : \mathbf{R} \to (0, \pi).$$

Exerciții

1. *Să se indice, pentru fiecare din funcțiile sin, cos, tg și ctg, alte intervale, pe care aceste funcții să aibă restricții bijective.*

2. *Să se indice intervale, pe care funcțiile cos și ctg sînt crescătoare și intervale, pe care funcțiile sin și tg sînt descrescătoare.*

3. *Să se arate că următoarele egalități sînt adevărate, în fiecare punct al domeniului de definiție al funcției respective:*

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad \mathrm{arctg}(-m) = -\mathrm{arctg}\ m,$$
$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b, \quad \mathrm{arcctg}(-m) = \pi - \mathrm{arcctg}\ m.$$

4. *Să se arate că, pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, avem*

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

5. *Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, avem* $\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}$ *și* $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$.

6. *Să se exprime sub o formă cît mai simplă numerele*

$\sin(2\arcsin a)$, $\sin(3\arcsin a)$, $\sin(4\arcsin a)$, $\sin(5\arcsin a)$,
$\cos(2\arcsin a)$, $\cos(3\arcsin a)$, $\cos(4\arcsin a)$, $\cos(5\arcsin a)$,
$\sin(2\arccos a)$, $\sin(3\arccos a)$, $\sin(4\arccos a)$, $\sin(5\arccos a)$,
$\cos(2\arccos a)$, $\cos(3\arccos a)$, $\cos(4\arccos a)$, $\cos(5\arccos a)$.

7. *Să se calculeze* $\sin x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ *știind că* $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$. *Apoi să se calculeze, în aceeași ipoteză,* $\sin 2x$ *și* $\cos 2x$. *Să se deducă valoarea lui x.*

R. $x = \frac{\pi}{12}$.

8. *Se dă* $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)$. *Să se calculeze* $\sin 5x$ *și să se afle x.*

9. *Să se calculeze numerele*

$$\sin\frac{\pi}{12}, \quad \cos\frac{\pi}{12}, \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{12}, \quad \sin\frac{\pi}{10}, \quad \cos\frac{\pi}{10}, \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{10}$$

folosind rezultatele de la exercițiile 7 și 8.

10. *Se dau relațiile*

$$u = \arcsin \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}$$

$$v = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2).$$

Să se calculeze sin $5u$ *și* tg $4v$ *și să se deducă valorile exacte ale numerelor* u *și* v.

R. $u = \frac{\pi}{20}$, $v = \frac{\pi}{24}$.

11. *Să se arate că, pentru orice număr real nenul, avem*

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

12. Ecuații trigonometrice

Dacă x este un număr real variabil, și dacă

$$P(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + hx^p$$

este un polinom cu coeficienții a, b, c..., h, egalitatea

$$P(x) = 0$$

constituie o *relație algebrică* în variabila x. Dacă toți coeficienții a, b, c, ...,h sînt nuli, relația $P(x) = 0$ este adevărată pentru orice valoare dată lui x; se spune că relația $P(x) = 0$ este o identitate sau că este identic verificată.

Fie E o mulțime de numere reale, $E \subset \mathbf{R}$, și fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție numerică definită pe mulțimea E. Dacă $f(x)$ depinde de x prin intermediul unor funcții trigonometrice cunoscute, spunem că și f este o funcție trigonometrică. Dacă f este o funcție trigonometrică, egalitatea

$$f(x) = 0$$

se numește *relație trigonometrică.*

Exemple. Funcțiile

$$\sin x,\ \sin 3x,\ \cos x^2,\ \sin 3x + \cos 2x,\ \operatorname{tg} x - 7\frac{\sin x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

sînt funcții trigonometrice. Egalitățile

$$\sin x = 0,\ \cos(x + 3) - 2 = 0,\ \operatorname{tg}(\sin x) = 0$$

constituie exemple de relații trigonometrice.

O relație trigonometrică poate fi verificată pentru orice valoare dată variabilei x. Exemple: $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

Există relații care nu sînt verificate pentru nici o valoare dată variabilei x. Exemplu: $\sin 3x = 2$.

O relație trigonometrică se mai numește și *ecuație trigonometrică.* Deci o ecuație trigonometrică este o relație de forma $f(x) = 0$, unde $f : E \to \mathbf{R}$ este o funcție trigonometrică definită pe o mulțime $E \subset \mathbf{R}$.

Funcțiile trigonometrice pe care le vom considera vor fi combinații polinomiale sau raționale de funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate unor multipli sau unor submultipli ai numărului x, sau unor funcții mai complicate de x.

Pentru astfel de funcții, mulțimea de definiție poate fi dedusă din însăși expresia care definește funcția f. De exemplu, funcția

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x} + \operatorname{tg} x$$

este definită pe mulțimea E, care se obține din $\mathbf{R}$ scoțînd numerele x, pentru care avem $\sin x = 1$ sau $\cos x = 0$.

Prin urmare, putem da o ecuație $f(x) = 0$, fără a specifica domeniul de definiție al funcției f, urmînd ca acest domeniu să fie dedus din felul în care a fost exprimat membrul stîng $f(x)$ al ecuației.

A rezolva o ecuație $f(x) = 0$ înseamnă a determina mulțimea S formată din toate numerele $x \in \mathbf{R}$, pentru care avem $f(x) = 0$. Mulțimea S se numește *mulțimea soluțiilor* ecuației $f(x) = 0$.

Deci a rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor acelei ecuații.

Mulțimea S a soluțiilor unei ecuații $f(x) = 0$ este o submulțime a mulțimii E, pe care este definită funcția f, sau a mulțimii formate din numerele x, pentru care funcția f are sens, dacă mulțimea E nu a fost specificată.

Vom începe prin rezolvarea ecuațiilor trigonometrice cele mai simple.

Ecuația $\sin x - a = 0$, $a \in \mathbf{R}$. Deci fiind dat un număr real a, trebuie să determinăm mulțimea S a numerelor x, pentru care avem $\sin x = a$.

Avem de distins mai multe cazuri:

Dacă $|a| > 1$, ecuația $\sin x = a$ nu are nici o soluție, deoarece sinusul oricărui număr real este un număr, a cărui valoare absolută nu depășește numărul 1. Deci în cazul $|a| > 1$, mulțimea soluțiilor ecuației date este mulțimea vidă.

Dacă $a = 1$ obținem, ecuația $\sin x = 1$, care admite soluția $x = \frac{\pi}{2}$. Din periodicitatea funcției sinus, rezultă că orice număr de forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este de asemenea o soluție a ecuației $\sin x = 1$. Din studiul efectuat asupra funcției sinus rezultă pe de altă parte că singurele numere reale care verifică ecuația $\sin x = 1$ sînt numerele de forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci mulțimea S a soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ este mulțimea

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Dacă r este un număr real, convenim să notăm prin $r\mathbf{Z}$ mulțimea

$$r\mathbf{Z} = \{rm;\ m \in \mathbf{Z}\}$$

formată din multiplii întregi ai lui r. Mai general, dacă A este o mulțime de numere și dacă $b \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}$, notăm $b + rA = \{b + ra;\ a \in A\}$.

În particular, dacă b, r sînt numere reale, convenim să notăm prin $b + r\mathbf{Z}$ mulțimea

$$b + r\mathbf{Z} = \{b + rm;\ m \in \mathbf{Z}\}.$$

Cu aceste convenții, putem scrie mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ sub forma

$$S = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

În mod asemănător, din proprietățile cunoscute ale funcției sinus deducem că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = -1$ este dată de formula

$$S = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Fie acuma a un număr din intervalul deschis $(-1, 1)$. În intervalul $[0, 2\pi)$ există exact două numere care verifică ecuația $\sin x = a$; dacă x' este unul din aceste numere, al doilea are valoarea $x'' = \pi - x'$, dacă $a > 0$ și $x'' = 3\pi - x'$, dacă $a < 0$.

Intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ conține exact un număr x cu proprietatea $\sin x = a$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$, $a \in (-1, 1)$, este

$$S = (x' + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - x' + 2\pi\mathbf{Z}),$$

unde x' este o soluție particulară; se poate presupune că $x' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

În particular, ecuația $\sin x = 0$ admite ca mulțime a soluțiilor

$$S = \pi\mathbf{Z}.$$

În rezumat, dacă asociem fiecărui număr a din intervalul închis $[-1, 1]$, acel număr x din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pentru care $\sin x = a$ și dacă notăm numărul x astfel definit prin $\arcsin a$, atunci putem enunța următorul rezultat:

Pentru $a \in [-1, 1]$, mulțimea soluțiilor ecuației

$$\sin x = a$$

este

$$\boxed{S = (\arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}).}$$

Exercițiu. *Să se arate că mulțimea soluțiilor ecuației* $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, *se poate defini prin formula*

$$S = \{(-1)^n \arcsin a + n\pi;\ n \in Z\}.$$

Notație. Dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, se notează prin $\mathrm{Arcsin}\, a$ mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$. Deci

$$\mathrm{Arcsin}\, a = (\arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciții

1. *Să se determine numerele*

$$\arcsin\frac{1}{2},\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2},\ \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right),\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. *Să se determine mulțimile*

$$\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2},\ \mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin 2x = 0$.

Soluție. Punînd $y = 2x$, relația $\sin 2x = 0$ este echivalentă cu relația $\sin y = 0$ care este la rîndul ei echivalentă cu condiția

$$y = 2x \in \mathrm{Arcsin}0.$$

Deci soluțiile ecuației $\sin 2x = 0$ se obțin împărțind prin 2 soluțiile ecuației $\sin y = 0$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației $\sin 2x = 0$ este dată de formula $S = \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$. Putem scrie $S = \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}0$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

Soluție. Punînd $y = \frac{x}{3}$, ecuația dată devine $\sin y = \frac{1}{2}$. Soluțiile ultimei ecuații formează mulțimea $\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$. Rezultă că mulțimea S a soluțiilor ecuației date este formată din numerele care se obțin înmulțind cu 3 elementele mulțimii $\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2}$, deci

$$S = \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2} + 6\pi\mathbf{Z}\right) 3\,\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2}.$$

Observație. În cele două rezolvări, am folosit următoarea convenție: Dacă S este o mulțime de numere reale și dacă h este un număr real, notăm $hS = \{hx;\ x \in S\}$, deci mulțimea hS este formată din produsele cu h ale numerelor din mulțimea S.

Exerciții:

1. *Să se arate care sînt mulțimile soluțiilor fiecăreia din ecuațiile*

$$\sin x = 0,\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. *Să se arate că, pentru $a \in [-1, 1]$, mulțimile soluțiilor ecuațiilor* $\sin x = a$ *și* $\sin x = -a$ *sînt simetrice față de originea O a axei reale.*

Ecuația $\cos x = a$, $a \in \mathbf{R}$. Pentru $|a| > 1$, ecuația $\cos x = a$ nu are nici o soluție, deci mulțimea soluțiilor este vidă.

Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, ecuația $\cos x = a$ are o soluție unică în intervalul $[0, \pi]$. Această soluție se notează $\arccos a$. Numerele $\pm \arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sînt de asemenea soluții ale ecuației $\cos x = a$. Din proprie-

tăţile cunoscute ale funcţiei cosinus deducem că orice soluţie a ecuaţiei $\cos x = a$ este un număr de forma $\pm \operatorname{arccos} a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Deci, notînd prin Arccos$a$ mulţimea formată din aceste numere, putem spune că:

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, *este dată de*

$$\boxed{\operatorname{Arccos} a = (\operatorname{arccos} a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (-\operatorname{arccos} a + 2\pi\mathbf{Z}).}$$

Aplicaţii. 1. *Avem*

$$\operatorname{arccos}0 = \frac{\pi}{2},\ \operatorname{arccos}(-1) = \pi,\ \operatorname{arccos}1 = 0,\ \operatorname{arcos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},\ \operatorname{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6};$$

$$\operatorname{Arccos}0 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

$$\operatorname{Arccos}1 = 2\pi\mathbf{Z},\ \operatorname{Arccos}(-1) = \pi + 2\pi\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Exerciţii

1. *Să se determine numerele*

$$\operatorname{arccos}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \operatorname{arccos}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \operatorname{arccos}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\ \operatorname{arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\operatorname{arccos}\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right).$$

2. *Să se determine mulţimile*

$$\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. *Să se rezolve ecuaţia* $2\cos x - 1 = 0$.

4. *Să se determine mulţimea* $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 3\pi]$.

Aplicaţie. Să se rezolve ecuaţia $2\cos x + 1 = 0$.

Soluţie. Relaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $\cos x = -\frac{1}{2}$. Avem $\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, deci mulţimea soluţiilor va fi

$$S = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Exerciţiu. *Să se determine elementele mulţimii* $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 2\pi]$.

Ecuaţia $\operatorname{tg} x = m$.

Domeniul de definiţie al funcţiei tangentă este mulţimea $\mathbf{R} - \operatorname{Arccos} 0$, deci mulţimea soluţiilor oricărei ecuaţii de forma $\operatorname{tg} x = m$ trebuie căutată în acest domeniu.

Codomeniul funcţiei tangentă este întreaga dreaptă reală $\mathbf{R}$; deci orice număr real m este egal cu tangenta unui anumit număr $x \in \mathbf{R}$. Deci oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{tg} x = m$ este nevidă. Printre soluţiile acestei ecuaţii, există una şi numai una singură în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deoarece atunci cînd x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numărul $\operatorname{tg} x$ parcurge toată dreapta $\mathbf{R}$, o singură dată.

Pentru $m \in \mathbf{R}$, numărul $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru care $\operatorname{tg} x = m$, se notează $\operatorname{arctg} m$.

Exemple. Avem

$$\operatorname{arctg}0 = 0,\ \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},\ \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},\ \operatorname{arct\,tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3},\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Numărul $\operatorname{arctg} m$ nu este singura soluţie a ecuaţiei $\operatorname{tg} x = m$, deoarece funcţia tangentă este periodică, cu perioada principală π. Rezultă că orice număr de forma $\operatorname{arctg} m + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este o soluţie a aceleiaşi ecuaţii. Din proprietăţile funcţiei tangentă rezultă că acestea sînt singurele soluţii ale ecuaţiei $\operatorname{tg} x = m$. Deci:

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{tg} x = m$ este

$$\boxed{\operatorname{Arctg} m = \operatorname{arctg} m + \pi\mathbf{Z}.}$$

Exemple. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{tg} x = 0$ este $\pi\mathbf{Z}$, iar mulţimea soluţiile ecuaţiei $\operatorname{tg} x = 1$ este $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}$.

Exerciţii

1. *Să se rezolve ecuaţia* $\operatorname{tg} x = -1$.

2. *Să se rezolve ecuaţia* $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ *şi să se determine valorile lui* x, *care verifică această ecuaţie şi care aparţin intervalului* $(1, 8)$.

Aplicaţie. Să se rezolve ecuaţia $\sin x = m \cos x$.

Soluţie. Nu putem avea, pentru o soluţie x a ecuaţiei date, $\cos x = 0$, deoarece din ecuaţie ar rezulta şi $\sin x = 0$; dar relaţiile $\sin x = 0$ şi $\cos x = 0$ nu pot fi verificate de un acelaşi număr x.

Avînd în vedere că avem $\cos x \neq 0$, deducem că relația dată este echivalentă cu ecuația $\operatorname{tg} x = m$, care a fost analizată anterior. Deci mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = m \cos x$ este mulțimea $\operatorname{Arctg} m$.

Observație. Avem

$$\operatorname{Arcsin} 0 = \operatorname{Arctg} 0 = \pi \mathbf{Z}.$$

Ecuația $\operatorname{ctg} x = m$. Funcția cotangentă este definită pe mulțimea

$$\mathbf{R} - \operatorname{Arcsin} 0,$$

deci soluțiile oricărei ecuații de forma $\operatorname{ctg} x = m$ trebuie căutate în mulțimea $R - \operatorname{Arcsin} 0$.

Orice număr real este egal cu cotangenta unui număr unic din intervalul $(0, \pi)$, deoarece atunci cînd x parcurge intervalul $(0, \pi)$, numărul $\operatorname{ctg} x$ parcurge o singură dată întreaga dreaptă $\mathbf{R}$. Numărul real x, cu proprietățile

$$x \in (0, \pi), \ \operatorname{ctg} x = m$$

se notează $\operatorname{arcctg} m$.

Din proprietățile funcției cotangentă rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{ctg} x = m$ este

$$\boxed{\operatorname{Arcctg} m = \operatorname{arcctg} m + \pi \mathbf{Z}.}$$

Exemple. Avem

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arcctg} 0 = \frac{\pi}{2} + \pi \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{Arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + \pi \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \operatorname{Arcctg} \left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6} + \pi \mathbf{Z}.$$

Exerciții

1. *Să se rezolve ecuația* $\cos x = m \sin x$, *pentru* $m = -1$ *și* $m = -\sqrt{3}$.
2. *Să se arate că ecuațiile* $\cos x = 0$ *și* $\operatorname{ctg} x = 0$ *au aceleași soluții.*

13. Ecuații trigonometrice care se reduc la una sau mai multe ecuații de tipurile $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = p$, $\operatorname{ctg} x = q$.

Aplicînd regulile de calcul algebric și relațiile cunoscute între diferitele funcții trigonometrice, numeroase ecuații trigonometrice pot fi rezolvate prin

reducere la una din ecuațiile studiate anterior, sau la mai multe din aceste ecuații.

Exemplu. Ecuația

$$\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$$

poate fi scrisă sub forma

$$(\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0,$$

din care rezultă că trebuie să fie verificată cel puțin una din relațiile

$$\sin x = 1 \text{ sau } \sin x = 2.$$

Dar ultima relație este imposibilă, deci ecuația dată este echivalentă cu ecuația $\sin x = 1$. Mulțimea soluțiilor va fi mulțimea $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi \mathbf{Z}$.

Mai general, dacă f este o funcție definită pe o mulțime $A \subset \mathbf{R}$, se poate considera relația

$$f(\sin x) = 0.$$

Făcînd înlocuirea $y = \sin x$, ecuația devine

$$f(y) = 0.$$

Ultima ecuație poate avea 0, 1, 2, 3 sau mai multe soluții. Dacă y' este o soluție a ecuației $f(y) = 0$, ecuația $\sin x = y'$ va admite soluții dacă și numai dacă $y' \in [-1, 1]$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $f(\sin x) = 0$ este egală cu reuniunea mulțimilor $\operatorname{Arcsin} y'$, corespunzătoare acelor soluții y' ale ecuației $f(y) = 0$, pentru care $y' \in [-1, 1]$.

Considerații asemănătoare se pot face pentru ecuațiile de forma

$$f(\cos x) = 0, \ f(\operatorname{tg} x) = 0, \ f(\operatorname{ctg} x) = 0.$$

Ecuațiile de forma

$$\sin f(x) = \sin g(x), \ \cos f(x) = \cos g(x)$$

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} h(x), \ \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} h(x),$$

în care f, g, h sînt funcții numerice date, pot fi rezolvate de asemenea folosind proprietățile pe care le cunoaștem ale funcțiilor trigonometrice.

De exemplu o ecuație de forma

$$\sin f(x) = \sin g(x) \tag{1}$$

se rezolvă observînd că un număr x verifică o astfel de ecuație dacă și numai dacă există un număr întreg k, astfel încît să avem

$$f(x) - g(x) = 2k\pi \text{ sau } f(x) + g(x) = (2k + 1)\pi. \tag{2}$$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației (1) este egală cu reuniunea mulțimilor de soluții ale fiecăreia din ecuațiile (2), considerate pentru fiecare număr întreg k.

De exemplu, ecuația

$$\sin(x^2) = \sin x \tag{3}$$

are ca mulțime de soluții reuniunea mulțimilor de soluții ale fiecăreia din ecuațiile

$$x^2 - x = 2k\pi, \quad x^2 + x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Prima din aceste ecuații are soluții reale numai dacă $1 + 8k\pi \geqslant 0$, iar a doua ecuație are soluții numai pentru $1 + (8k+4)\pi \geqslant 0$. Rezultă că *ecuația dată admite o infinitate de soluții*, anume

$$x'_k = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8k\pi}}{2}, \quad x''_k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (8k+4)\pi}}{2}$$

unde k poate lua orice valoare întreagă, cu condiția ca expresiile de sub radicali să fie pozitive, deci $k \geqslant 0$.

Pentru rezolvarea ecuației (3), am utilizat următorul criteriu:

I) Relația $\sin u = \sin v$ are loc dacă și numai dacă există un număr întreg n, astfel ca să avem fie $u - v = 2n\pi$, fie $u + v = (2n+1)\pi$.

Ultimele două condiții sînt echivalente cu condiția $u \in v + 2\pi\mathbf{Z}$, respectiv cu condiția $u \in \pi - v + 2\pi\mathbf{Z}$.

Pentru rezolvarea ecuațiilor

$$\cos f(x) = \cos g(x), \quad \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} h(x), \quad \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} h(x),$$

vom folosi următoarele criterii:

(II) Relația $\cos u = \cos v$ este adevărată dacă și numai dacă există un număr întreg n, astfel încît să avem fie $u - v = 2n\pi$ fie $u + v = 2n\pi$.

(III) Relația $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$ este verificată dacă și numai dacă există un număr întreg n, astfel încît să avem $v = u + n\pi$.

(IV) Relația $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ este verificată dacă și numai dacă există un număr întreg n, astfel ca $v = u + n\pi$.

Aplicații. **1.** *Să se rezolve ecuația* $\cos 2x = \cos 3x$.

Soluție. Aplicînd criteriul (II), obținem ecuațiile

$$3x = 2x + 2n\pi, \quad 3x + 2x = 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$$

care au soluțiile

$$x'_n = 2n\pi, \quad x''_n = \frac{2n}{5}\pi.$$

2. *Să se rezolve ecuația* $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} x$.

Soluție. Aplicînd criteriul (IV), obținem ecuațiile

$$4x = x + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

care au soluțiile

$$x_n = \frac{n}{3}\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Exerciții

Să se rezolve următoarele ecuații:

1. $\sin(2x+1) = \sin(3x^2)$.

2. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

3. $\sin x = \cos 2x$.

4. $\operatorname{tg} px = \operatorname{tg} qx$ $(p, q \in \mathbf{R})$.

5. $\cos px = \cos qx$.

6. $\sin px = \sin qx$

7. $\sin px = \cos qx$.

8. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\sin 2x \sin 3x = \sin x \sin 4x$.

Soluție. Ecuația dată este echivalentă cu fiecare din ecuațiile **următoare:**

$$2 \sin 2x \sin 3x = 2 \sin x \sin 4x,$$

$$\cos x - \cos 5x = \cos 3x - \cos 5x.$$

$$\cos x = \cos 3x;$$

aplicînd criteriul (II), obținem soluțiile $x_n = \frac{n\pi}{}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Exercițiu. *Să se rezolve ecuația* $\cos 2x \cos 3x = \cos x \cos 4x$.

Ecuații trigonometrice care se reduc la ecuații de gradul II

Ecuații de forma $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$.

Făcînd substituția $y = \sin x$, ecuația dată devine

$$ay^2 + by + c = 0. \tag{1}$$

Sînt posibile mai multe cazuri:

1) Rădăcinile ecuației (1) sînt imaginare. Atunci ecuația trigonometrică nu are nici o soluție în $\mathbf{R}$.

2) Rădăcinile ecuației (1) sînt reale, dar sînt amîndouă exterioare intervalului $[-1, 1]$. Nici în acest caz ecuația trigonometrică dată nu are nici o soluție în $\mathbf{R}$.

3) Ecuația (1) are o singură soluție reală y_0 conținută în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = \operatorname{Arcsin} y_0$.

4) Ecuația (1) are două soluții reale y_1, y_2 conținute în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, ecuația trigonometrică dată are ca mulțime a soluțiilor reuniunea $\operatorname{Arcsin} y_1 \cup \operatorname{Arcsin} y_2$.

Observații. Pentru ca ecuația (1) să aibă cel puțin o soluție reală este necesar și suficient să avem $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Dacă $a = 0$, dar $b \neq 0$ și dacă $|c| < |b|$, atunci ecuația dată are ca mulțime a soluțiilor mulțimea $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{c}{b}\right)$.

Ecuația (1) are două rădăcini în intervalul $[-1, 1]$ dacă și numai dacă

$$-\frac{b}{2a} \in (-1, 1),\ a(a-b+c) \geqslant 0 \text{ și } a(a+b+c) \geqslant 0,\ b^2-4ac > 0.$$

Dacă ecuația (1) are o singură rădăcină în intervalul $[-1, 1]$, avem

$$(a-b+c)(a+b+c) \leqslant 0.$$

Ecuațiile de forma $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$ se discută și se rezolvă în mod analog.

Ecuațiile de forma $A \cos 2x + B \cos x + C = 0$ se aduc la forma

$$2A \cos^2 x + B \cos x + C - A = 0.$$

Ecuațiile de forma $A \cos^2 x + B \sin x + C = 0$ se reduc de asemenea la o ecuație de gradul II, deoarece putem folosi identitatea

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Ecuațiile de tipul $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ sau $a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$ se rezolvă de asemenea prin reducere la ecuații de gradul II, făcînd substituțiile $y = \operatorname{tg} x$ respectiv $y = \operatorname{ctg} x$. Discuția acestor ecuații este mai simplă, deoarece orice soluție reală m a ecuației de gradul II conduce la o mulțime de soluții de forma $\operatorname{Arctg} m$, respectiv $\operatorname{Arcctg} m$.

O ecuație omogenă de gradul II în $\sin x$ și $\cos x$, deci o ecuație de forma

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \tag{2}$$

poate fi de asemenea redusă la o ecuație algebrică de gradul doi.

Într-adevăr, dacă $a \neq 0$, orice soluție a ecuației (2) este astfel încît $\cos x \neq 0$, deoarece nu putem avea simultan $\sin x = 0$ și $\cos x = 0$. Deci, în cazul $a \neq 0$ putem împărți primul membru al ecuației (2) prin $\cos x$ și obținem atunci ecuația echivalentă cu (2):

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

care se reduce la o ecuație algebrică de gradul II, prin efectuarea substituției $y = \operatorname{tg} x$.

Dacă $a = 0$, mulțimea soluțiilor ecuației (2) este egală cu reuniunea mulțimilor formate din soluțiile ecuațiilor

$$\cos x = 0 \text{ și } b \sin x + c \cos x = 0.$$

Știm să determinăm mulțimea soluțiilor primei ecuații. Ecuația a doua se reduce la ecuația

$$\operatorname{tg} x = -\frac{c}{b}$$

dacă $b \neq 0$, și se reduce la ecuația $\cos x = 0$ dacă $b = 0$, dar $c \neq 0$.

Aplicații. 1. *Să se rezolve ecuația* $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$

Soluție. Notînd $y = \sin x$ ecuația devine $2y^2 - 7y + 3 = 0$. Soluțiile ultimei ecuații sînt $\frac{1}{2}$ și 3. Convine numai prima din aceste soluții, care

conduce la mulțimea următoare de soluții pentru ecuația trigonometrică dată:

$$S = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

2. *Să se rezolve ecuația* $\cos 2x - 3 \cos x - 1 = 0$.

Soluție. Notăm $y = \cos x$; atunci $\cos 2x = 2y^2 - 1$ și sîntem conduși în rezolvarea ecuației algebrice $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Ultima ecuație are rădăcinile $-\frac{1}{2}$ și 2, dintre care convine numai prima. Deci mulțimea soluțiilor ecuației trigonometrice date este

$$S = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

3. *Să se rezolve ecuația* $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0$.

Soluție. Notăm $y = \operatorname{tg} x$; ecuația dată devine

$$y^2 - 8y + 7 = 0$$

și obținem rădăcinile 1 și 7. Mulțimea soluțiilor ecuației trigonometrice date este deci reuniunea

$$S = \operatorname{Arctg} 1 \cup \operatorname{Arctg} 7.$$

Amintim că $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}$. De asemenea, $\operatorname{Arctg} 7 = \operatorname{arctg} 7 + \pi\mathbf{Z}$.

4. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Rezolvare. Folosim identitatea

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

și obținem ecuația echivalentă cu ecuația dată:

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}.$$

Ultima ecuație are ca mulțime de soluții reuniunea mulțimilor de soluții ale ecuațiilor

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației date este[1]

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup$$
$$\cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

[1] Reamintim că, dacă avem o mulțime A de numere reale, convenim să notăm prin $n + mA$ mulțimea $\{n + ma;\ a \in A\}$, *oricare ar fi numerele reale m și n.*

5. *Să rezolvăm ecuația*

$$4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1.$$

Soluție. Din identitatea $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ deducem

$$\sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x$$

astfel încît ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$4(1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x) = 1$$

și cu ecuația

$$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0.$$

Ultima ecuație poate fi pusă sub forma

$$(2\cos^2 x - 1)^2 = 0$$

și se reduce la ecuația echivalentă $\cos 2x = 0$. Mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} 0 = \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

14. Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$

Pentru ($a = 0$, $b \neq 0$) sau ($a \neq 0$ și $b = 0$) ecuația

(1) $$a \sin x + b \cos x = c$$

este echivalentă cu ecuația $\cos x = \frac{c}{b}$ respectiv cu ecuația $\sin x = \frac{c}{a}$ și fiecare din aceste ecuații a fost discutată.

Dacă $ab \neq 0$ dar $c = 0$, ecuația (1) se scrie $a \sin x + b \cos x = 0$ și este echivalentă cu ecuația $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$, care a fost de asemenea discutată.

Vom studia acum soluțiile unei ecuații de forma (1), în care $abc \neq 0$. O astfel de ecuație poate fi rezolvată prin mai multe metode.

Metoda 1.

Notăm:

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad q = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

și considerăm punctul $M(p, q)$; acest punct aparține cercului trigonometric, deoarece $p^2 + q^2 = 1$. Aplicația $F: \mathbf{R} \to C$ fiind surjectivă, rezultă că există un număr real t, astfel ca să avem

(2) $$p = \cos t, \; q = \sin t, \; t \in [0, 2\pi).$$

În acest caz, vom avea

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos t, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin t.$$

Introducînd aceste valori în ecuația (1), această ecuație capătă forma $\sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos t \sin x + \sin t \cos x) = c$ sau

(3) $$h \sin (t + x) = c, \; h = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ecuația (3) admite o mulțime nevidă de soluții dacă și numai dacă $|c| \leqslant h$. În acest caz, mulțimea soluțiilor va fi

(I) $$S = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{c}{h}\right) - t = \left(\arcsin \frac{c}{h} - t + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\pi - \arcsin \frac{c}{h} - t + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Observație. Aplicarea acestei metode presupune posibilitatea găsirii numărului real t, care să verifice condițiile (2). Existența acestui număr este asigurată, dar aflarea *valorii exacte* a lui t este în general o problemă imposibilă din punct de vedere practic. Totuși, cu ajutorul tabelelor, putem găsi *valoarea aproximativă* a lui t, suficient de apropiată de valoarea exactă, pentru aplicațiile obișnuite. În condițiile unor calcule foarte fine, mașinile electronice de calcul permit obținerea unor aproximații pentru t oricît de bune vrem, în principiu.

În cazuri particulare favorabile, valoarea exactă a lui t poate fi dedusă fără dificultate din relațiile (2).

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

Soluție. Avem $a = b = c = 1$, deci $h = \sqrt{2}$, $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t = \frac{\pi}{4}$.

Ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Potrivit formulei generale, mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = (2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$$

Metoda 2. Presupunem că $b + c \neq 0$.

Notăm $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ și exprimăm $\sin x$ și $\cos x$ cu ajutorul lui y, folosind formulele care dau sinusul și cosinusul unui unghi în funcție de tangenta unghiului pe jumătate. Avem

$$\sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

și ecuația (1) capătă forma

$$2\,ay + b(1 - y^2) = c(1 + y^2)$$

Am obținut o ecuație algebrică de gradul II, care se mai poate scrie

$$(4) \qquad (b + c)y^2 - 2ay + (c - b) = 0.$$

Ecuația (4) are rădăcinile reale, dacă este verificată condiția

$$a^2 - (b + c)(c - b) \geqslant 0$$

sau dacă $a^2 + b^2 \geqslant c^2$. Dar această condiție este echivalentă cu condiția $h \geqslant |c|$, găsită prin aplicarea metodei 1.

Să presupunem că avem

$$a^2 + b^2 > c^2$$

și fie m una din soluțiile ecuației (4). Din ecuația

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = m$$

deducem $x \in 2\operatorname{Arctg} m$, deci mulțimea $2\operatorname{Arctg} m = 2\operatorname{arctg} m + 2\pi\mathbf{Z}$ este o mulțime de soluții ale ecuației (1). Dacă ecuația (4) are două rădăcini reale m_1 și m_2, atunci mulțimea soluțiilor ecuației (1) va fi

$$(\mathrm{II}) \qquad S = 2\operatorname{Arctg} m_1 \cup 2\operatorname{Arctg} m_2.$$

Exercițiu. *Să se arate, în legătură cu rezultatele obținute aplicînd metoda 1 și metoda 2 că, dacă $b + c \neq 0$, atunci formulele* (I) și (II) *definesc mulțimi egale.*

Observație. Dacă $b + c = 0$, deci dacă $b = -c$ atunci ecuația (1) admite soluțiile $(2k + 1)\pi$, pentru $k \in \mathbf{Z}$; într-adevăr, pentru $x = (2k + 1)\pi$ avem $\sin x = 0$ și $\cos x = -1$. Pentru aceste soluții, funcția tangentă nu poate fi aplicată numerelor $\frac{x}{2}$. Deci metoda 2 nu poate conduce la găsirea acestor soluții.

Pentru $b = -c$, putem scrie ecuația (1) sub formele echivalente

$$a \sin x = c(1 + \cos x),$$

$$2\,a \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = 2c \cos^2\frac{x}{2},$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(a \sin\frac{x}{2} - c \cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

care admit ca mulțime de soluții reuniunea

$$S = (\pi + 2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(2\operatorname{Arctg}\frac{c}{a}\right), \quad (a \neq 0).$$

Exemplu. Să rezolvăm prin metoda 2 ecuația $\sin x + \cos x = 1$. Avem $b + c = 2 \neq 0$, deci metoda 2 va furniza toate soluțiile. Punînd $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, se obține ecuația

$$y^2 - y = 0,$$

care are soluțiile 0 și 1. Rezultă că ecuația trigonometrică dată are mulțimea de soluții

$$S = 2\operatorname{Arctg} 0 \cup 2\operatorname{Arctg} 1 = (2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right),$$

care a fost obținută și prin aplicarea metodei 1.

Ecuația

$$(5) \qquad \sin x + \cos x = -1$$

se rezolvă prin metoda 1. Ecuațiile (2) vor fi verificate de $t = \frac{\pi}{4}$ și ecuația (3) devine

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

rezultă că mulțimea de soluții ale ecuației (5) este

$$S = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciții

1. *Să se rezolve ecuațiile*

$$\sin x + 3\cos x = 1, \quad 3\sin x - \cos x = -1.$$

2. *Să se rezolve ecuațiile*

$$3\sin 3x + 4\cos 3x = -5, \quad 3\sin 2x - 4\cos 2x = 5.$$

Alte metode de rezolvare a ecuațiilor trigonometrice

O bună cunoaștere a proprietăților funcțiilor trigonometrice și utilizarea judicioasă a identităților trigonometrice și algebrice permit rezolvarea unei mari varietăți de ecuații trigonometrice.

Trebuie subliniat că nu există o metodă generală pentru rezolvarea oricărei ecuații trigonometrice. Dimpotrivă, se poate afirma că ecuațiile trigonometrice, care pot fi rezolvate efectiv, prin indicarea explicită a mulțimii soluțiilor, constituie o categorie foarte restrînsă, în mulțimea tuturor ecuațiilor trigonometrice care se pot imagina, sau care intervin în practică.

Combinarea metodelor furnizate de algebră și de analiză permit însă, în principiu, să se rezolve *orice* ecuație trigonometrică, *cu o aproximație oricît de bună vrem.* O parte din aceste metode vor fi prezentate în manualele destinate claselor X, XI și XII. În acest capitol, ne limităm a indica numai unele metode elementare, care însă pot fi aplicate multor tipuri de ecuații ce intervin în aplicații practice.

Utilizarea identităților algebrice

Să considerăm ecuația

$$\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$$

Primul membru al acestei ecuații poate fi descompus într-un produs de doi factori; se obține atunci ecuația echivalentă:

$$(\sin x - 1)(\cos x - \sin x) = 0,$$

care are mulțimea de soluții:

$$S = (\operatorname{Arcsin} 1) \cup (\operatorname{Arctg} 1) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi \mathbf{Z}\right).$$

Pentru a da alt exemplu, să considerăm ecuația

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Folosind identitățile $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem transforma ecuația dată în ecuația echivalentă $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, care are mulțimea de soluții

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi \mathbf{Z}\right)\right\}.$$

Să ne propunem acuma să rezolvăm ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

Folosind identitatea

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2},$$

ecuația se poate scrie sub forma echivalentă

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0.$$

Transformînd în produs suma dintre $\cos 2x$ și $\cos 6x$, ecuația devine

$$\cos 4x(2 \cos 2x + 1) = 0.$$

Mulțimea soluțiilor ultimei ecuații este egală cu reuniunea mulțimilor de soluții ale ecuațiilor

$$\cos 4x = 0, \ \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă că ecuația dată are următoarea mulțime de soluții:

$$S = \left(\frac{1}{4} \operatorname{Arccos} 0\right) \cup \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Exerciții. 1. *Să se explicitez membrul drept al ultimei formule.*

2. *Să se rezolve ecuația*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 2.$$

3. *Să se aducă fiecare din ecuațiile următoare la una din formele* $\sin x = a$, $\cos x = a$ *sau* $\operatorname{tg} x = a$. *Să se facă discuția după parametrii* P, Q, R, p, a, b, c.

1) $P \sin^2 x + Q \cos^2 x - R \sin x = 0$.
2) $P \cos 2x + Q \cos x + R = 0$.
3) $p \sin^2 x + Q \cos x + R = 0$.
4) $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$.
5) $\sin 3x = \sin x$.
6) $\cos 3x + \cos x = p \cos 2x$.
7) $\sin x - \sin a = p \sin(x - a)$.
8) $A \operatorname{tg} x + B \operatorname{ctg} x + C = 0$.
9) $a \cos x + b \cos(c - x) = p$.

4. *Să se rezolve ecuațiile*

1) $\arcsin x = \arccos x$.
2) $\arcsin x = 2 \arccos x$.
3) $\arccos x = 2 \arcsin x$.
4) $\arcsin x = 3 \arcsin x$.
5) $\arcsin x = 2 \operatorname{arctg} x$.
6) $\arcsin x = 3 \operatorname{arctg} x$.

5 *Fie* $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ lungimile laturilor unui triunghi și fie S aria acestui triunghi. Să se demonstreze formulele

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$2S = bc \sin A.$$

6. *Fie* O *un punct în planul triunghiului* ABC *și fie* $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$, $a' = d(O, A)$, $b' = d(O, B)$, $c' = d(O, C)$, $L = b'^2 + c'^2 - a^2$, $M = c'^2 + a'^2 - b^2$, $N = a'^2 + b'^2 - c^2$.

Să se demonstreze relația

$$a'^2L^2 + b'^2M^2 + c'^2N^2 = LMN + 4a'^2b'^2c'^2.$$

7. *Fie* $ABCD$ *un patrulater convex și fie* $a = d(A, B)$, $b = d(B, C)$, $c = d(C, D)$, $d = d((D, A)$, $f = d(A, C)$, $u = \widehat{ABC}$, $v = \widehat{ADC}$, S = *aria suprafeței limitată de patrulaterul* $ABCD$. *Să se demonstreze formulele:*

a) $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos u = c^2 + d^2 - 2cd \cos v$;
b) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab \cos u - cd \cos v)$;

c) $2S = ab \sin u + cd \sin v$;

d) $16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8\ abcd\ \cos(u + v)$;

e) $16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16\ abcd \left(\cos \frac{u+v}{2}\right)^2$;

f) dacă $2s = a + b + c + d$, atunci $S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \left(\cos \frac{u+v}{2}\right)^2$.

8. *Să se arate că, printre toate patrulaterele convexe, ale căror lungimi ale laturilor au valori date a, b, c și d, patrulaterul de arie maximă este inscriptibil.*

(*Indicație.* Se folosește ultima formulă din exercițiul precedent și se observă că S este maxim dacă unghiul $u + v$ este alungit.)

9. Fiind dat m numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_m$, astfel ca

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_m < a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1},$$

să se arate că:

a) Există poligoane cu n laturi, de lungimi egale cu numerele date, în ordinea dată.

b) Printre poligoanele considerate la punctul a), există poligoane care limitează o suprafață de arie maximă și aceste poligoane sînt inscriptibile.

10. *Să se arate că aria unui patrulater inscriptibil, avînd lungimile laturilor egale cu a, b, c și d, este dată de formula*

$$S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d),$$

unde $2s = a + b + c + d$.

Cuprins

Introducere 3

Notații folosite 7

Capitolul I

Geometrie euclidiană plană 9

1. Proprietățile figurilor plane 9
2. Axiomele sau postulatele geometriei euclidiene plane 10
3. Proprietăți de incidență ale punctelor și dreptelor dintr-un plan 11
4. Proprietăți de ordonare 11
5. Semidrepte și semiplane 14
6. Unghiuri 15
7. Proprietăți de congruență 18
8. Teoremele de congruență a două triunghiuri 22
9. Compararea unghiurilor 27
10. Inegalități într-un triunghi 31
11. Unghiuri drepte 33
12. Locuri geometrice 35
13. Postulatul lui Euclid 38
14. Măsurarea segmentelor 45
15. Aximele de continuitate (text facultativ) 49
16. Măsurarea unghiurilor 56
17. Teorema lui Thales 60
18. Linii poligonale și poligoane 65
19. Funcțiile sinus și cosinus, definite pe mulțimea unghiurilor 68
20. Relații metrice 73
21. Coordonate pe o dreaptă și într-un plan 79
22. Aplicații practice 83

Capitolul II

Cercul 87

1. Definiții 87
2. Unghiuri înscrise într-un cerc 92
3. Măsura unui arc de cerc 95
4. Măsura unghiulară a unui arc de cerc 96
5. Unghiuri cu vîrful exterior unui cerc 98

6. Unghiuri cu vîrful interior unui cerc 99
7. Poziţiile relative a două cercuri 102
8. Axa radicală a două cercuri 105
9. Patrulatere inscriptibile 110
10. Mişcarea circulară uniformă 112
11. Aplicaţii practice 113

Capitolul III

Elemente de trigonometrie plană 117
1. Vectori 117
2. Funcţii trigonometrice 126
3. Formule de reducere la primul cadran 134
4. Reprezentarea grafică a funcţiei sinus 135
5. Reprezentarea grafică a funcţiei cosinus 139
6. Formule de adunare şi scădere 140
7. Funcţiile tangentă şi cotangentă 146
8. Transformarea în produse a sumelor de două sinusuri sau de două cosinusuri 153
9. Identităţi condiţionate 154
10. Transformarea în produs a sumei a două tangente sau a două cotangente 156
11. Funcţii trigonometrice inverse 158
12. Ecuaţii trigonometrice 162
13. Ecuaţii trigonometrice care se reduc la una sau mai multe ecuaţii de tipurile $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = p$, $\operatorname{ctg} x = q$ 168
14. Ecuaţii de forma $a \sin x + b \cos x = c$ 174

Nr. colilor de tipar: 11,5
Bun de tipar: 14.07.1980

Com. nr. 90 600/26 386
Combinatul Poligrafic
„CASA SCINTEII"
Bucureşti — R.S.R.