LMC   SALA 1 - JOI 16 NOV. - SEMINAR.

08.11.2023

Seminar

Simbolurei $= V \cup \{\neg, \to, (,)\}$

1) v e expresie
2) ¬v e expresie
3) ¬¬ e expresie
4) v¬ e expresie

$v \in$ Formule

$\varphi \in$ Formule $\to \neg\varphi \in$ Formule

$\varphi, \psi \in$ Formule $\Rightarrow \varphi \to \psi \in$ Formule

$\varphi, \psi \in$ Formule $\Rightarrow \neg\varphi \to \psi \in$ Formule

1) $v \in$ Expr $\Rightarrow v \in$ Formule
2) $\neg v \in$ Expr $\Rightarrow \neg v \in$ Formule
3) $\neg\neg \in$ Expr $\Rightarrow \neg\neg \notin$ Formule
4) $v\neg \in$ Expr $\Rightarrow v\neg \notin$ Formule

① a) $\text{Expr} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Simbolurei}^n = \text{Sim}^0 \cup \text{Sim} \cup \text{Sim}^n$; $n \geq 2$

$\text{Sim}^0 = \lambda$ mulțime finită $\xRightarrow{\Delta 1.7.}$ Sim^0 = mult. cel mult nr. ~~(2)~~

$V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - mulțime nr.

$\{\neg, \to, (,)\}$ = mult. finită, cel mult. nr, $\neq \emptyset$ $\xRightarrow{1.10}$ Sim = numărabilă $\Rightarrow$

$\xRightarrow{1.10}$ $\text{Sim}^0 \cup \text{Sim}$ = mult. numărabilă $\xRightarrow{\Delta 1.7.}$ Sim^n = mult. cel mult nr $\xRightarrow{1.13.}$

$\xRightarrow{1.13}$ $\bigcup_{n \geq 2} \text{Sim}^n$ = mult. cel mult numărabilă

Din tot $\xRightarrow{1.10}$ Expr = mult. numărabilă

b) $\forall$ formulă e o expresie $\Rightarrow$ Form = cel mult numărabilă

$\forall$ variabilă e considerată o formulă

V = mult. numărabilă infinită

$V \subset$ Form $\Rightarrow$ Form - infinită

$\Rightarrow$ Form = finită și numărabilă

② a) $e^+(\neg v \to \neg(p \vee q)) = e^+(\neg v) \to e^+(\neg(p \vee q)) \equiv \neg e^+(v) \to \neg e^+(p \vee q)$

$\equiv \neg e(v) \to \neg(e^+(p) \vee e^+(q)) \equiv \neg e(v) \to \neg(e(p) \vee e(q)) \equiv$ ☆

Când avem o singură var, „e^+" se transformă în „e"

$\star \equiv \neg 1 \to \neg(0 \vee 0) \equiv 0 \to \neg 0 \equiv$ (aici am folosit modelul e)

$e: V \to \{0,1\}$; $e(x) = \begin{cases} 1, & x = v \\ 0, & altfel \end{cases}$ (unde $v, p, q \in V$)

$e_2: V \to \{0,1\}$; $e_2(x) = 1 \ \forall x \in V$

$e_3: V \to \{0,1\}$; $e_3(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{v, p, q\} \\ 0, & altfel \end{cases}$

sunt toate modele

b) $\psi \vDash \varphi \to \psi \Leftrightarrow Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi \to \psi)$

Fie $e: V \to \{0,1\}$ a.î. $e \in Mod(\psi) \Leftrightarrow e^+(\psi) = 1$

$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1 = 1 \Rightarrow$ ~~(a→1=1)~~ $e \in Mod(\varphi \to \psi) \Rightarrow$

$\Rightarrow Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi \to \psi)$

c) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi \Leftrightarrow \underbrace{e^+(\varphi \to (\psi \to \chi))}_{A} = \underbrace{e^+((\varphi \wedge \psi) \to \chi)}_{B}$

Fie $e: V \to \{0,1\}$

Cazul I: $e^+(\varphi) = 1 \begin{cases} \Rightarrow A = 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\psi) \to e^+(\chi) \\ \Rightarrow B = (1 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = e^+(\psi) \to e^+(\chi) \end{cases} \Rightarrow A = B$

Cazul II: $e^+(\varphi) = 0 \begin{cases} \Rightarrow A = 0 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\chi) = 1 \\ \Rightarrow B = (0 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = 0 \to e^+(\chi) = 1 \end{cases} \Rightarrow A = B$

(3) a) $e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \to e^+(v_2) = 1 \to 1 = 1 \Rightarrow e \vDash v_0 \to v_2$

b) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4 \Rightarrow \star$

Fie $e_1: V \to \{0,1\}$, $e_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{v_0, v_3\} \\ 0, & altfel \end{cases}$ | $e_2(x) = \begin{cases} 0, & x = v_4 \\ 1, & altfel \end{cases}$

$\star \Rightarrow e_1^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) = 1 \wedge 1 \wedge (\neg 0) = 1$

și e_1 și e_2 sunt modele

(4) $\neg\varphi$ nesatisfiabilă ~~$\Leftrightarrow$~~ ?

φ tautologie $\Leftrightarrow$ pt orice $e: V \to \{0,1\}$, $e^+(\varphi) = 1$

$\Leftrightarrow$ pt orice $e: V \to \{0,1\}$, $\neg e^+(\varphi) = \neg 1$

$\Leftrightarrow$ pt orice $e: V \to \{0,1\}$, $e^+(\neg\varphi) = 0$

$\Leftrightarrow \nexists\ e: V \to \{0,1\}$ a.î. $e^+(\neg\varphi) = 1$

$\Leftrightarrow \neg\varphi$ nesatisfiabilă