CURS 3

CONTINUITATEA FUNCȚIILOR

LIMITA FUNCȚIILOR

- (X, d_1); (Y, d_2), $\Delta \subseteq X$, $f: \Delta \to Y$, $a \in \Delta'$ punct de acumulare
- $l \in Y$, l = lim funcției în pct. „a" dacă $\forall\ V \in \mathcal{V}_l$ (în Y)

  $\exists\ V \in \mathcal{V}_l$ (în X) a.î. $f((U \setminus \{a\}) \cap \Delta) \subset V$

  $\forall x \in U \cap \Delta$, $x \neq a$, $\Rightarrow f(x) \in V$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

T Caracterizarea noțiunii de limită

(X, d_1); (Y, d_2) spații metrice $\Rightarrow f: \Delta \subseteq X \to Y$, $a \in \Delta'$

- Afirmații echivalente:
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ def. vecinătăți
  - $\forall B_Y(l, \varepsilon)\ \exists B_X(a, \delta)$, $f((B_X(a, \delta) \cap \Delta) \setminus \{a\}) \subset B_Y$
  - $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon$ a.î. $\forall x \neq a$, $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
    $\Rightarrow d_2(f(x), l) < \varepsilon$ def cu ε și δ
  - $\forall\ x_n \in \Delta$, $x_n \neq a$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to l$ def cu șiruri

T Unicitatea limitei

Dacă $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \Rightarrow$ limita e unică

ex: $\exists$ f. fără limită:
- $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
- $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

T Principiul substituției

$A \subset X$, $B \subset Y$, $f: B \setminus \{y_0\} \to Z$, $g: A \to B$

Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$ și $\exists \lim\limits_{x \to y_0} f(y) = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = l$

FUNCȚII CU VALORI REALE

- (X, d) spațiu metric, $D \subseteq X$, $a \in D'$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$
- Dacă $\exists\ l_1 = \lim_{x \to a} f(x)$ și $\exists\ l_2 = \lim_{x \to a} g(x)$ atunci
  - $\exists \lim_{x \to a} (f+g)(x) = l_1 + l_2$
  - $\exists \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$
  - $\exists \lim_{x \to a} (f/g)(x) = l_1 / l_2$, $l_2 \neq 0$ și $g(x) \neq 0$
- Dacă $\exists\ l = \lim_{x \to a} f(x) \neq 0 \Rightarrow \exists\ U \in V_a$ a.î. $f(x)$ ia valori de același semn cu l pt $\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap D$
- Dacă $\exists \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\ U \in V_a$, $\exists\ M > 0$ a.î. $|f(x)| \leq M$

LIMITE LATERALE

- $f: D \subseteq \mathbb{R} \to (Y, d)$; (Y, d) sp. metric $\Leftrightarrow \mathbb{R}^m$
- a = pct. de acumulare din stg pt. D dacă a = pct ac. și pt $D_1 = D \cap (-\infty, a) = \{x \in D ; x < a\}$
- a = pct de acumulare din dr. pt D dacă a = pct. ac. și pt $D_2 = D \cap (a, \infty) = \{x \in D ; x > a\}$
- $l_s = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ sau $l_s = \lim_{x \to a-} f(x)$ sau $l_s = f(a-0)$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{l_s}$ (în Y) $\exists\ U \in V_a$ (în $\mathbb{R}$) a.î. $f((U \setminus \{a\}) \cap D_1) \subset V$
- $l_d = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ sau $l_d = \lim_{x \to a+} f(x)$ sau $l_d = f(a+0)$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{l_d}$ (în Y) $\exists\ V \in V_a$ a.î. $f((U \setminus \{a\}) \cap D_2) \subset V$

(T) $l_s = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \Leftrightarrow \forall x_m \in D_1$, $x_m \neq a$, $x_m \to a$, $f(x_m) \to l_s$
x_m = crește, în $\mathbb{R}$, în Y

(T) $l_d = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \Leftrightarrow \forall x_m \in D_2$, $x_m \neq a$, $x_m \to a$ (în $\mathbb{R}$), $f(x_m) \to l_d$
x_m descrește

(T) (Y, d) spațiu metric $f: \Delta \subseteq \mathbb{R} \to Y$, $a \in \Delta_s' \cap \Delta_d'$

Atunci $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \iff \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ și

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

FUNCȚII CONTINUE

- (X, d_1), (Y, d_2) spații metrice $f: D \subseteq X \to Y$, $a \in D$.
- f continuă în $a \in D \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{f(a)}$ $\exists U \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(U \cap D) \subset V$
- f continuă pe $D \Rightarrow f$ continuă în orice pct din D
- f discontinuă în $a \in D \Rightarrow$ nu e continuă în a (pct de disc.)

(T) f continuă în $a \iff \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Afirmații echivalente:
  - f continuă în a (cu vecinătăți)
  - $\forall B_Y(f(a), \varepsilon)$, $\exists B_X(a, \delta)$ și $f(B(a,\delta) \cap D) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$
  - $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in D$, $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$
  - $\forall x_n \in D$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

(T) F continuă $\iff f_i$ continuă $\forall i$ unde $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$F = (f_1, f_2, \dots f_m)$ și $(f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m})$

(T) Dacă f continuă în $a \in X$ și g cont. în $f(a) \Rightarrow g \circ f$ cont. în a

- Afirmații echivalente:
  - f cont. pe X
  - $\forall D \subset Y$ deschisă $\to f^{-1}(D) \subset X$ deschisă
  - $\forall F \subset Y$ închisă $\Rightarrow f^{-1}(F) \subset X$ închisă
  - $\forall A \subset X \Rightarrow f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

CONTINUITATEA FCT. CU VALORI REALE

- (X, d) spațiu metric, $f: X \to \mathbb{R}$
- $f, g, : X \to \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $M_g = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ continue f și g
- $f+g$; $f-g$; $f \cdot g$; $\alpha \cdot f$ $\Rightarrow$ continue pe X
- f/g continuă pe X / M_g
- $|f|$ sau $|g|$ continuă
- $f(a) > 0$ sau $f(a) < 0 \Rightarrow \exists$ $U \in V_a$ a.î. $f(x) > 0$ sau $f(x) < 0$ $\forall x \in U \cap \Delta$

CONTINUITATE LATERALĂ

- $f: \Delta \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \Delta \cap \Delta'$ pct. acumulare
- f continuă
  - la stg $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$
  - la dr $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

(T) Dacă $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ continuă în a

- „a" pct. discontinuitate de speța I:
  - f nu e cont. în „a"
  - $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \in \mathbb{R}$
- „a" pct. discontinuitate de speța a II-a:
  - f nu e cont. în „a"
  - „a" nu e de speța I

DISCONTINUITĂȚILE FUNCȚIILOR MONOTONE

- $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I = interval
- f cresc / str. cresc $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I$; $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- f descresc./str. descresc $\Rightarrow \forall\ x_1, x_2 \in I$; $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
- f monotonă $\Rightarrow$ cresc./ str. cresc. / descresc. / str. descresc.

T I = interval deschis, f cresc. $\Rightarrow$ toate disc. lui f sunt de speța I

T I = interval, f monotonă $\Rightarrow$ mult. tuturor disc. lui f e cel mult numărabilă.

OPERATORI LINIARI ȘI CONTINUI

- operator/aplicație liniară: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
  - $T(x+y) = T(x) + T(y)$
  - $T(\alpha x) = \alpha T(x)$
- $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m ; T \text{ liniară} \}$

T $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară $\Rightarrow T$ bij. $\Leftrightarrow T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

- $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară și bij $\Rightarrow$ izomorfism liniar
- Baza canonică: $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$
  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$
  $\{e_1, e_2, \dots e_n\} \subset \mathbb{R}^n$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots$
- $T(x) = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \dots = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot T(e_k)$
- Matricea atașată operatorului T: $A_T = (a_{jk}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
  $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$, $a_{jk} = T_j(e_k)$
- $T(x) = A_T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) & & M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ T & \longrightarrow & A_T \end{array}$$

T $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $S: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ liniare $\Rightarrow S \circ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lin., $A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T$

T T bij. $\Leftrightarrow A_T$ inversabilă

T T liniară $\Rightarrow T$ continuă