CURS 7

SUBGRUPURI NORMALE

- G = grup ; N = subgrup al lui G $\Rightarrow \forall x \in G, h \in N$; $xhx^{-1} \in N \Rightarrow$
  $\Rightarrow N$ = subgrup normal , $N \triangleleft G$
- N = subgrup normal al lui $G \Leftrightarrow \varphi_x(N) \subseteq N$ automorfism int
- N = subgrup al lui G
  - N = subgrup normal
  - R_N^s și R_N^d coincid
  - $Nx = xN \quad \forall x \in G$
  - $G/R_N^s = G/R_N^d$
- $f: G \to G'$ morfism , N = subgr. normal , f surj $\Rightarrow f(N)$ = subgr normal

- $N' =$ subgr. normal al lui G', $f: G \to G'$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(N') =$ subgr. nor.

T. Teorema de corespondență pt. subgrupuri normale

$f: G \to G'$ morfism surjectiv

$\exists$ corespondență bij. între mulț. subgr. normale ale lui G care conțin $\operatorname{Ker} f$ și mulț. tuturor subgr. normale ale lui G', dată prin $N \to f(N)$.

GRUP FACTOR

- $G =$ grup, $N =$ subgrup normal, R_N^s și R_N^d coincid, $x \equiv y \pmod N$
  $\Rightarrow$ G/R_N^s și G/R_N^d coincid $\Rightarrow$ $G/N =$ mulțimea factor
- $G =$ grup, $N =$ subgrup normal, $G/N =$ mulț. factor $\Rightarrow$
  $\Rightarrow p: G \to G/N$ morfism surj. de grupuri, $p(x) = [x]$ cu
  $\operatorname{Ker} p = N$
- G/N = grupul factor (cât) în raport cu subgr. normal N
  $p: G \to G/N$, $p(x) = [x]$. proiecția / surjecția canonică a lui G
- $G =$ grup comutativ $\Rightarrow$ $\forall$ subgr. e normal și $\forall$ grup = grup factor
- $p: G \to G/\{e\}$ izomorfism de grupuri

T. Proprietatea de universalitate a grupurilor factor

$f: G \to G'$ morfism grupuri, $N =$ subgrup normal

Dacă $N \subseteq \operatorname{Ker} f \Rightarrow \exists\ \bar{f}: G/N \to G'$ morf. gr. unic a.î.

$\bar{f} \circ p = f$, unde $p: G \to G/N$ $\Rightarrow$ $\bar{f}$ inj $\Leftrightarrow N = \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \bar{f}$ surj $\Leftrightarrow f$ surj

T Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri

$f: G \to G'$ morfism grupuri $\Rightarrow \exists\ \bar{f}: G/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ izom.

T A II-a teoremă de izomorfism pentru grupuri

G = grup ; K, H = subgrupuri

Dacă K = subgrup normal $\Rightarrow$ HK = subgr al lui G

$\Rightarrow H \cap K$ = subgr. normal al H

$\Rightarrow HK/K \simeq H/H \cap K$

T A III-a teoremă de izomorfism pentru grupuri

G = grup ; H, K = subgrupuri normale ale lui G, $H \leq K$

Atunci K/H = subgr. normal al G și $(G/H)/(K/H) \simeq G/K$