04.12.2023

Puncte de extrem local

① Să se determine punctele de extrem local ale urm. funcții:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - y^2 - \cancel{4}x^2 - 2xy$

a) Se studiază continuitatea funcției și se identifică pctele de disc.

f e cont pe $\mathbb{R}^2$ (op. cu f. elem)

Se studiază diferențiabilitatea funcției și se identifică pctele în care funcția nu este diferen.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^3+y^3-3xy+4)'_x = 3x^2 - 3y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^3+y^3-3xy+4)'_y = 3y^2 - 3x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ funcții cont. pe } \mathbb{R}^2 \end{array}\right| \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2) \\ \mathbb{R}^2 \text{ e mulțime deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

Se identifică pctele critice ale funcției (se egalează cu 0 deriv. parțiale)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 0$ sau $y = 1 \Rightarrow S = \{(0,0); (1,1)\}$ unde $(x,y) \in S$

Punctele critice ale funcției sunt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ și $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.

Se studiază diferențiabilitatea de ord 2 a funcției și se identif. punctele în care funcția nu e diferențiabilă.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (3x^2 - 3y)'_x = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (3y^2 - 3x)'_x = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (3x^2 - 3y)'_y = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (3y^2-3x)'_y = 6y$$

Toate deriv. parțiale de ord 2 sunt funcții continue pe $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ de clasă $C^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ diferențiabilă de 2 ori pe $\mathbb{R}^2$

Se verifică dacă punctele critice în care funcția e diferențiabilă de 2 ori sunt puncte de extrem local.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Se alege minorul de ord 1 $\Delta_1 = a_{11} = 0$

Se alege minorul de ord 2 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9$

Dacă
- amândoi minorii sunt $>0 \Rightarrow$ pct. critic (x,y) verif e minim local
- $\Delta_1 < 0$ și $\Delta_2 > 0 \Rightarrow$ pct. critic (x,y) verif e max local
- amândoi sunt ~~pozitivi~~ ~~sau neg~~ neg. și cel puțin unul $=0 \Rightarrow$ nu se știe
- altă situație $\Rightarrow$ nu e punct de extrem

$\Delta_1 = 0$ și $\Delta_2 = -9 \Rightarrow (0,0)$ nu e pct. de extrem local

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = a_{11} = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0 \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1,1)$ pct. de minim local

b) f cont. pe $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^4+y^4-x^2-y^2-2xy)'_x = 4x^3-2x-2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^4+y^4-x^2-y^2-2xy)'_y = 4y^3-2y-2x$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue $\Bigg| \Rightarrow$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ difer. pe $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-2x-2y=0 \\ 4y^3-2y-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3=2(x+y) \\ 4y^3=2(x+y) \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x^3=4y^3 \Rightarrow x^3=y^3 \Rightarrow x=y \Rightarrow 4x^3-2x-2x=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ sau $\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}$ sau $\begin{matrix} x=-1 \\ y=-1 \end{matrix}$

Punctele critice sunt $(0,0)$; $(1,1)$; $(-1,-1) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (4x^3-2x-2y)'_x = 12x^2-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (4y^3-2y-2x)'_{\cancel{x}} = \cancel{12y}-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (4x^3-2x-2y)'_y = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (4y^3-2y-2x)'_y = 12y^2-2$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ sunt f. continue pe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow f \in C^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ difer. de 2 ori de $\mathbb{R}^2$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & -2 \\ -2 & 12y^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = a_{11} = -2 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $\Bigg| \Rightarrow (0,0)$ nu se știe deocamdată

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = 10 > 0 \\ \Delta_2 = 96 > 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow (1,1)$ e pct minim local

$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = 10 > 0 \\ \Delta_2 = 96 > 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow (-1,-1)$ pct. minim local

$f(x,-x) = 2x^4 > 0$

Pt $(0,0) \Rightarrow f(x,y) - f(0,0) = x^4+y^4-x^2-y^2-2xy-0 = x^4+y^4-(x^2+y^2+2xy) =$

$= x^4+y^4-(x+y)^2$

$f(x,0)-f(0,0) = x^4-x^2 = x^2(x^2-1) < 0$ analog $f(0,y)-f(0,0)$

$f(x,x)-f(0,0) = 2x^4-4x^2 = 2x^2(x^2-2) < 0$

Nu are semn ct pe mici vecinătăți a lui $(0,0) \Rightarrow$ nu e pct extrem