CURS 8

DERIVATELE PARȚIALE DE ORDIN SUPERIOR - CONTINUARE

T Teorema lui Schwarz

Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Dacă $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_j}$ (unde $i \neq j$); în a, finite

într-o vecinătate V_a și funcțiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_i}$

sunt continue $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_i}$

- $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ s.n. diferențiabilă de ordin $q \geq 2$ în $a \in D$ dacă f deriv parțiale de ord $q-1$ vecin V_a și derivatele parțiale de ordin $q-1$ sunt diferențiabile în a (toate)

T $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in D$, f de q ori deriv. parțială pe $\mathring{D}$ și deriv. parțiale de ord q sunt continue în $a \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ e de q ori diferențiabilă în $a \in D$

- $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de q ori difer. în $a \in D$ = diferențiabila de ordin q al lui f în a (puterea = ordin de deriv)

$$d^q f(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad d^q f(a)(h) = \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)^{(q)}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^{(q)} = \frac{\partial^q f}{\partial x_1^q}(a)$$

- matricea $Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$, $i = \overline{1,m}$ și $j = \overline{1,m}$

se numește matricea Hesiană a lui f în $a \in D$

T Formula lui Taylor

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in D$, f de $(q+1)$ ori difer. în a

$r > 0$ a.î. $B(a, r) \subset D$

Atunci $\forall x \in B(a, r)$ $\exists$ $\xi \in [a, x]$ a.î.

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(x-a) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{q!} d^q f(a)(x-a) + \frac{1}{(q+1)!} d^{q+1} f(\xi)(x-a)$$

T $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f de 2 ori difer. în $a \in (a_1, a_2) \in D$

$r > 0$ a.î. $B((a_1, a_2), r) \subset D$

Atunci $\forall (x, y) \in B((a_1, a_2), r)$, $\exists$ $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [(a_1, a_2), (x, y)]$

a.î. $f(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\right.$

$(x-a_2)\Big] + \frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi)(x-a_1)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(\xi)\cdot$

$(x-a_1)(y-a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi)(y-a_2)^2\Big]$

EXTREME LOCALE PT FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

- $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
  - $a \in A$ s.m. pct. de minim global (absolut) al lui f pe A dacă $f(x) \geq f(a)\ \forall x \in A$
  - $a \in A$ s.m. pct de maxim global (absolut) al lui f pe A dacă $f(x) \leq f(a)\ \forall x \in A$
  - $a \in A$ s.m. pct de minim local (relativ) pt f dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \geq f(a)\ \forall x \in A \cap V$
  - $a \in A$ s.m. pct. de maxim local (relativ) pt f dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \leq f(a)\ \forall x \in A \cap V$
- $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ difer. în $a \in D$ dacă $df(a) = 0$

  a = pct critic (staționar) pt. f

T. Teorema lui Fermat

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferențiabilă în $a \in D$

$df(a) = 0 \Rightarrow a$ = punct de extrem local (min / max).

- $a \in D$, $df(a) = 0$, dar nu este pct. de extrem local $\rightarrow$

  $\Rightarrow a$ = punct șa / critic degenerat

T $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de clasă $C^2(\Delta)$

Atunci
- a = pct min. local $\Rightarrow d^2f(a) \geq 0$
- a = pct max. local $\Rightarrow d^2f(a) \leq 0$

- Matricea $A = (a_{ij})$ $i = \overline{1,m}$ și $j = \overline{1,m}$ este <u>matrice simetrică</u>

$a_{ij} = a_{ji}$, $i \neq j$

$\mathcal{J}(x) = \sum\limits_{i,j=\overline{1,m}} a_{ij} x_i x_j \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathbb{R}^m$

- $\mathcal{J}$ <u>pozitiv definită</u> $\Rightarrow \mathcal{J}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^m, \neq 0$
- $\mathcal{J}$ <u>negativ definită</u> $\Rightarrow \mathcal{J}(x) < 0$

T $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de clasă $C^2(\Delta)$; $a \in \Delta$ pct critic

Atunci
- $d^2f(a)$ pozitiv def. $\Rightarrow a$ = pct minim local
- $d^2f(a)$ negativ def. $\Rightarrow a$ = pct maxim local

T $m = 2$, $f: \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2, $a \in \mathring{D}$ pct critic

$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$; $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$; $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

Atunci
- $B^2 - AC < 0$; $A > 0 \Rightarrow a$ = pct minim local
- $B^2 - AC < 0$; $A > 0 \Rightarrow a$ = pct maxim local
- $B^2 - AC > 0$; a = punct șa

T $m = 3$, f $\mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clasă $C^2(\mathring{D})$, a = pct critic

$\Delta_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \end{vmatrix}$$

Dacă
- $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ $\Rightarrow$ $a =$ pct minim local
- $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$; $\Delta_3 > 0$ $\Rightarrow$ $a =$ pct maxim local
- în rest $a =$ pct șa

EXTREME CU LEGĂTURI. METODA MULTIPLICATORILOR LAGRANGE

- $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de clasă C^1

  $g : D \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^1

  Vrem puncte de extrem care satisfac restricția $g(x, y) = 0$
- $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

  $A = \{ (x, y) \in D \; ; \; g(x, y) = 0 \}$

  $(x_0, y_0) \in A$ pct de extrem cu legături dacă $\exists V \in \mathcal{V}_{(x_0, y_0)}$ $V \subset D$ a.î. $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ păstrează semn constant pe $V \cap A$
- (x_0, y_0) punct de minim cu legături $\Rightarrow f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$
- (x_0, y_0) punct de maxim cu legături $\Rightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$
- (x_0, y_0) punct critic (staționar) cu legături dacă e pct critic staționar pentru $f|_A$

T Existența multiplicatorilor Lagrange

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $C^1(D)$, $g: D \to \mathbb{R}^m$

$(x_0, y_0) \in D$ pct extrem local care satisface $g(x_0, y_0) = 0$

și $\det(J_g^y(x_0, y_0)) \neq 0$.

Atunci $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ a.î. $L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots +$

$+ \lambda_m g_m \Rightarrow (x_0, y_0)$ verifică ecuațiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(x, y) = 0, \ i = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i}(x, y) = 0, \ i = \overline{1,m} \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ = multiplicatori Lagrange

T → (x_0, y_0) pct critic pt L

T f, g de clasă C^2 pe D

$d^2 L(x_0, y_0) = \sum_{i,j=\overline{1,n}} a_{i,j} \, dx_i \, dx_j$ diferențiala de ordin 2

în L calculată în (x_0, y_0)

- Fie $\Delta_1 = a_{11}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ...

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Atunci
- $\Delta_i > 0 \ \forall i = \overline{1,n} \to (x_0, y_0)$ pct de min local cu legături
- $(-1)^i \Delta_i > 0 \ \forall i = \overline{1,n} \to (x_0, y_0)$ pct max local cu legături