Curs 4

Spații vectoriale

- Fie $V = K$ sp. vect, $B \subset V$, B = bază dacă $\begin{cases} B = \text{sist. generatori} \\ B = \text{SLI (sist. lin. indep.)} \end{cases}$

(T) $\forall$ spațiu vect. are o bază

(T) $V = K$-sp. vect finit generat. Dacă S = sist. finit de generatori $\Rightarrow$ din el se poate extrage o bază

Demonstrație: Considerăm un SLI maximal $B \subset S$. Atunci B = bază
Se presupune că $B \neq$ bază $\Rightarrow \exists\, x \neq 0,\ x \in V \setminus B$
Atunci $B \cup \{x\}$ = SLI $\Rightarrow$ ~~ab~~ maximalitatea lui B

(T) Fie $V = K$ sp. vect, $B_1, B_2 \subset V$ baze $\Big| \Rightarrow B_1$ și B_2 au același nr. de elemente

Demonstrație: rezultă din teorema schimbului

- Fie $V = K$-sp. vect finit generat. Nr de elem. ale unei baze = dimensiunea lui V (nu depinde de baza aleasă)

Notație: $\boxed{\dim_K V}$

Ex:
1) $K^n = \{e_1, \dots e_n\}$ bază $e_i = (0, 0, \dots 1, 0, \dots 0)$ ↳ poz i
2) $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ $\{e_{ij} : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$
e_{ij} = mat care are 1 pe poz (i,j) și 0 în rest
3) $\mathbb{R}[X]$ nu este finit generat
$B = \{1, X, X^2, \dots X^n \dots\}$ baza
4) $\mathbb{R}[X]_{\le n}$
5) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ $\qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $B = \{1, i\}$

- Fie V sp. vect cu $\dim_K V = m$
$B = \{v_1, v_2, \dots v_m\} \subset V$ $\Big| \Rightarrow$ B = bază, sistem gen., SLi

- Fie V sp. vect.
$B = \{e_1, e_2, \dots e_m\} \subset V$ $\Big| \Rightarrow$ B = bază $\Leftrightarrow \forall x \in V\ \exists!\ x_1, x_2 \dots x_m \in K$ a.î.
$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m$

$x_1, x_2, \dots x_m$ = coord. vect. x relativ la B

$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ = mat. (vect. coloană) coord lui $x \in V$

<u>Demonstrație:</u> "$\Rightarrow$" B = bază $\Rightarrow$ B = sistem de gen.

$\forall x \in V$, $\exists x_1, \dots x_m \in K$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$

Unicitatea $\Rightarrow$ p.p. că $x \in V$ și $\exists$ $x_1, \dots x_m \in K$

a.î. $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ și $\exists$ $y_1, \dots y_m$, $y = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i e_i - \sum_{i=1}^{m} y_i e_i = 0 \underset{B = SLi}{\Longrightarrow} x_i - y_i = 0\ \forall i = \overline{1,m}$

"$\Leftarrow$" B = sist. de gen.

Fie $\alpha_1, \dots \alpha_m \in K$ a.î. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0_V$

Evident $0 x_1 + 0 x_2 + \dots + 0 x_m = 0_V$

Deci $\alpha_i = 0\ \forall i = \overline{1,m}$ (din unicitate)

Matricea de trecere de la o bază la alta

- V/K sp. vect, $B = \{e_1, e_2 \dots e_m\}$, $B' = \{f_1, \dots f_m\}$ baze

$x \in V$; $[x]_B$; $[x]_{B'}$

$f_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{m1} e_m$

$f_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{m2} e_m$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f_m = a_{1m} e_1 + a_{2m} e_2 + \dots + a_{mm} e_m$

$f_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$, $j = \overline{1,m}$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(K)$$

$$\begin{array}{ccc} [f_1]_B & [f_2]_B & \dots & [f_m]_B \end{array}$$

C = matricea de trecere de la B la B'

Scriem $B \xrightarrow{C} B'$

- $x \in V$, $x = \sum_{j=1}^{m} x'_j f_j = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) e_i$

$[x]_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} \Rightarrow [x]_B = C \cdot [x]_{B'}$

- C inversabilă $\Rightarrow C^{-1}[x]_B = [x]_{B'}$

Obs: $B \xrightarrow{C'} B' \Rightarrow B' \xrightarrow{C^{-1}} B$

(T) Teorema lui Grassman

Fie V sp. vect ; $V_1, V_2 \subset V$ subspații . Atunci:

$\dim_K (V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K (V_1 \cap V_2)$

Aplicații liniare

- V și W 2 sp. vect , $T: V \to W$ funcții

S.m. aplicație liniară / morfism de spații vect dacă:

1) $T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in V$
2) $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in K$

- $T: V \to W$ aplicație liniară $\Leftrightarrow T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ $\forall x, y \in V ; \forall \alpha, \beta \in K$

- Fie $T: V \to W$ aplicație liniară. Atunci:

  1) $T(0_V) = 0_W$

  2) $T(-x) = T(x) \quad \forall x \in W$

- Exemple: 1) V sp. vect. $\Rightarrow T = 1_V$, $T: V \to V$, $T(x) = x$

  2) — " — $\Rightarrow T: V \to V$, $T(x) = 0_V$

  3) — " — $\Rightarrow \lambda \in K$, $T(x) = \lambda x$

  4) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, x_1 + 2x_2, x_3)$

  $T(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)) = T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta x_3)$

  $= T(2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_3 + \beta y_3), \alpha x_1 + \beta y_1 + 2\alpha x_2 + 2\beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3)$

  $= \alpha(2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) + \beta(2y_1 + y_3, y_1 + 2y_2 + y_3) =$

  $= \alpha T(x_1, x_2, x_3) + \beta T(y_1, y_2, y_3)$

  5) $T: K^m \to K^m$, $T(X) = AX$

  $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m, \quad A \in \mathcal{M}_{m,m}(K)$$

  $T: V \to W$ aplicație liniară, $V = K^m$ și $W = K^m$

- $T: V \to W$ apl. lin. Atunci:

  1) $Ker(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0_W\}$ subsp. $V \longmapsto$ nucleul lui T

  2) $Im(T) = \{y \in W \mid \exists x \in V \text{ a.î. } y = T(x)\}$ subsp. în V