CDI

11. 12. 2023

# Extreme cu legături

① Exercițiu de data trecută (ultimul) - altă modalitate

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$

$C = \{ (0,0), (-1,-1), (1,1) \}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$d^2 f(0,0) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$d^2 f(0,0)((a,b),(a,b)) = a^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + ab \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + ba \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) +$$

$$+ b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = -2a^2 - 2ab - 2ba - 2b^2 =$$

$$= -2a^2 - 4ab - 2b^2 = -2(a^2 + 2ab + b^2) =$$

$$= -2(a+b)^2$$

$(0,0)$ pct de min. local $\Leftrightarrow$ $d^2 f(0,0)((a,b),(a,b)) > 0$ $\forall (a,b) \neq (0,0)$

$(0,0)$ pct de max local $\Leftrightarrow$ $d^2 f(0,0)((a,b),(a,b)) < 0$ $\forall (a,b) \neq (0,0)$

$(1,2) \Rightarrow d^2 f(0,0)((1,2),(1,2)) < 0$

$(2,-2) \Rightarrow d^2 f(0,0)((2,-2),(2,-2)) = 0$

$\Rightarrow (0,0)$ nu e nici, nici

② Să se determine pctele de extrem local ale $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ,

$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Avem o legătură $\Rightarrow$ fol. un singur multiplicator al lui Lagrange $\lambda$

Pt fiecare leg, se fol. câte un multiplicator $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_m$,

unde $m$ = nr. leg.

Se construiește funcția $F: D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) +$

$+ \lambda(x^2+y^2+z^2-3)$ // luăm legătura și o facem $=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-3=0$

$D \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ pt că $D = \mathbb{R}^3$

Se studiază continuitatea funcției $F$.

$F$ cont. pe $\mathbb{R}^4$ (op. cu f. elem)

Se studiază diferențiabilitatea funcției $F$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-3))'_x = 3x^2+2\lambda x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-3))'_y = 3y^2+2\lambda y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-3))'_z = 3z^2+2\lambda z$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3$$

$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^4$ (și $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$)

$\mathbb{R}^4$ mulțime deschisă

$\Rightarrow F \in C^1(\mathbb{R}^4)$

$\Rightarrow F$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^4$

Se identifică pct.ele critice ale lui $f$ condiționate / ale lui $F$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2\lambda x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ sau } x=-2\lambda/3 \\ 3y^2+2\lambda y=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ sau } y=-2\lambda/3 \\ 3z^2+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2-3=0 \end{cases}$$

Cazul I: $x=0 \Rightarrow y^2+z^2-3=0$ ; $y=0$ sau $y=-\frac{2\lambda}{3}$ $\Big| \Rightarrow z=\pm\sqrt{3}$ ~~sau $z=-3+\frac{2\lambda}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$~~

$\Downarrow$

$\lambda = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Pt cazul I: $(x, y, z, \lambda) \in \{(0,0,\sqrt{3},-3\sqrt{3}/2), (0,0,-\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2)\}$

$y = \frac{-2\lambda}{3} \Rightarrow \cancel{z^2 = \frac{24-4\lambda}{9} \Rightarrow z=0, y = \frac{-24}{4}}$

$\cancel{\lambda = \frac{24}{4}}$

$\Rightarrow z = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{24}{4} \Rightarrow \lambda = 3\sqrt{3}/2$ sau $\lambda = -3\sqrt{3}/2$

$(x, y, z) \in \{(0, -\sqrt{3}, 0, 3\sqrt{3}/2); (0, +\sqrt{3}, 0, -3\sqrt{3}/2)\}$

Mai avem 2 de aici, dar ne ia mult $\Rightarrow$ analog .......

Alegem un pct. critic și se calc difer. de ord 2 (fără $\lambda$).

$d^2 f(0,0,\sqrt{3}) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 6x$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 6y$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 6z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 0$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0$

$d^2 f(0,0,\sqrt{3})((a,b,c)(a,b,c)) = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0,\sqrt{3}) + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0,\sqrt{3}) +$

$+ c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}(0,0,\sqrt{3}) + 2ab \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) +$

$+ 2ac \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,\sqrt{3}) + 2bc \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)$

$d^2 f(0,0,\sqrt{3})((a,b,c)(a,b,c)) = 0 + 0 + c^2 6\sqrt{3} + 0 + 0 + 0 = 6c^2\sqrt{3}$

$d^2 f(0,0,\sqrt{3})((0,1,0)(0,1,0)) = 0 \Rightarrow (0,0,\sqrt{3})$ nu este pct. de extrem condiționat de $f$

# Funcții integrabile Riemann

3) Se consideră $f: [\pi/4; \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}, & x \in (\pi/4, \pi/2) \\ -1, & x = \pi/2 \\ 0, & x = \pi/4 \end{cases}$

Să se arate că $f$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)\,dx$

Studiem continuitatea

$f$ cont pe $(\pi/4, \pi/2)$ (op cu f. elem.)

$$\lim_{\substack{x \to \pi/4 \\ x > \pi/4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{2\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{8}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$f(\pi/4) = 0$

$\Rightarrow f$ nu e cont în $\pi/4$

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{1}{1} = 1 \neq -1 = f(\pi/2) \Rightarrow f \text{ nu e cont pe } \pi/2$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ pct. de disc. ale lui $f$ sunt $\{\pi/4; \pi/2\}$

$f$ mărginită $-1 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in [\pi/4; \pi/2]$

$\Rightarrow$ e integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$

// ca să putem integra Riemann, calculăm ori monotonia, ori mărginirea

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin^3(\pi/2 - t) + \cos^3(\pi/2 - t)}\,dt = J$$

$t = \frac{\pi}{2} - x \quad dt = (\frac{\pi}{2} - x)'\,dx = -dx$ ; $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$

$x = \pi/2 \Rightarrow t = 0$

$x = 0 \Rightarrow t = \pi/2$

$$J + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$