CURS 9

INELE

- **Inel** = mulțime nevidă R împreună cu 2 op. alg: adunare $(a,b) \mapsto a+b$ și înmulțire $(a,b) \mapsto ab$ care satisfac urm. condiții
  - $(R,+)$ grup comutativ
  - $a(bc) = (ab)c \quad \forall a,b,c \in R$
  - $a(b+c) = ab + ac$ înmulțire distributivă față de „+"
  - $ab = ba \Rightarrow R$ e și inel comutativ
- **Element nul** $= 0$ la adunare $\Rightarrow$ el. neutru
- **Element unitate** $= 1$ la înmulțire $\Rightarrow$ el. neutru
- Pe orice gr. abelian netrivial $(G,+)$ se poate introduce o structură de inel (neunitar), definind înmulțirea astfel: $ab = 0 \quad \forall a,b \in G$
- Pe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},+)$ nu se poate defini str. de inel unitar
- $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ inel comut. și $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ inel comut. unitar
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\circ)$ nu este inel
- R inel $\rightarrow 0\cdot a = a\cdot 0 = 0 \quad \forall a \in R$
  - $\rightarrow a(-b) = (-b)a = -(ab)$ și $(-a)(-b) = ab \ ; a,b \in R$
  - $\rightarrow (ma)b = (mb)a = m(ab) \quad \forall m \in \mathbb{Z} \wedge a,b \in R$
  - $\rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \quad \forall a_i, b_j \in R$

→ Binomul lui Newton și propr. $ab = ba$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- R inel, $a \in R \Rightarrow$ <u>a = div. al lui 0 la stg/dr</u> dacă $\exists\, b \in R$, $b \neq 0$ a.î. $ab = 0$ resp. $ba = 0$
- R = inel nenul; R nu are div. ai lui 0 nenuli $\Rightarrow$ $\Rightarrow R$ = <u>inel integru</u>
  dacă R e și comutativ $\Rightarrow$ <u>domeniu de integritate</u>
- R = inel nenul, R integru $\Leftrightarrow \forall a, b \in R$; $ab = 0 \Rightarrow \substack{a=0 \\ b=0}$
- R = inel unitar; $a \in R$ <u>inversabil la stg/dr</u> dacă $\exists\, a' \in R$ a.î. $a'a = 1$, resp. $aa' = 1$
- $a \in U(R)$, unde $U(R)$ - gr. multip. al el. inv. din R
  $\Updownarrow$
  $\exists\, a' \in R$ a.î. $aa' = a'a = 1$
- $(U(R), \cdot)$ grupul unităților lui R
- Elem. inv. nu sunt div. ai lui 0
- R = inel și $x \in R$, <u>x = nilpotent</u> $\Leftarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^n = 0$
- 0 = element nilpotent
- R = inel integru nu are elem. nilpotente nenule
- R = inel și $x \in R$, <u>x = idempotent</u> $\Leftarrow x^2 = x$
- 0 și 1 = elem. idempotente (idem. triviale)
- R = inel unitar, $x \in R$ idempotent $\Rightarrow 1-x$ idempotent
- R = inel integru nu are idempotenți netriviali

SUBINELE. IDEALE

- $(R,+,\cdot)$ inel, $S \subseteq R$ submulțime nevidă

  S = subinel al lui R dacă $(S,+,\cdot)$ este inel
- R = inel unitar, S = subinel cu propr. $1 \in S \Rightarrow S$ = subinel unitar
- R = inel, $S \subseteq R$ submulț $\neq \emptyset$

  S = subinel $\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in S \Rightarrow x - y \in S \\ x, y \in S \Rightarrow xy \in S \end{cases}$
- R = inel $\Rightarrow \{0\}$ și R sunt subinele
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ subinele unitare
- $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ și $\hat{5}\mathbb{Z}_{10} \subset \mathbb{Z}_{10}$ subinele
- R = inel, $I \subseteq R$ submulț. $\neq \emptyset$
- I = ideal la stg/dr al lui R dacă:
  - $x, y \in I \Rightarrow x - y \in I$
  - $a \in R, x \in I \Rightarrow ax \in I$, resp. $xa \in I$

  $I \leq_s R$ ideal la stg și $I \leq_{dr} R$ ideal la dr
- $I \leq_s R$ și $I \leq_d R \Rightarrow I \trianglelefteq R$ ideal bilateral
- $I \leq_s R \Leftrightarrow I \leq_d R \Leftrightarrow I \trianglelefteq R$
- $\forall I$ este subinel (reciprocă falsă)
- R = inel unitar, $I \subseteq R$, $I \leq_s R$ sau $I \leq_d R$ sau $I \trianglelefteq R \Rightarrow$

  $\Rightarrow I = R \Leftrightarrow I$ conține un elem. inversabil
- Lema: R = inel, $I_\alpha \leq_s R$, $\alpha \in A$ familie de ideale la stg R

  $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in R} I_\alpha \leq_s R$ (analog la dr și bilaterale)

- R = inel unitar, $X \subseteq R$ submulțime

Notăm $(X)_s = \cap$ tuturor idealelor la stg care îl au pe X

$\Rightarrow$ $(X)_s$ = ideal la stg R și generat de X

Analog $(X)_d$ și (X)

- $(X)_s$ este cel mai mic ideal la stg care îl are pe X.

- R = inel unitar, $X \subseteq R$ submulțime ; (elem $\in X$) = generatori pt $(X)_s$

Dacă $I \leq_s R$ și $\exists\ X \subseteq I$ submulț. finită a.î. $I = (X)_s \Rightarrow$

$\Rightarrow$ idealul I s.n. finit generat

Dacă card $X = 1 \Rightarrow$ idealul I s.n. principal

- R = inel unitar și $X \subseteq R$ submulțime. Atunci:

$\rightarrow (X)_s = \{ y \in R \mid y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in R ; x_i \in X, m \in \mathbb{N} \}$

$\rightarrow (X)_d = \{ y \in R \mid y = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i \in R ; x_i \in X, m \in \mathbb{N} \}$

$\rightarrow (X) = \{ y \in R \mid y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i b_i \in R ; x_i \in X, m \in \mathbb{N} \}$

- Caz particular: $\left[\begin{array}{l} (x)_s = \{ y \in R \mid y = ax, a \in R \} \\ (x)_d = \{ y \in R \mid y = xa, a \in R \} \end{array} \right.$

$(x)_s = Rx$; $(x)_d = xR$ și $(x) = RxR$

MORFISME DE INELE

- R, R' inele ; $f: R \to R'$ morfism dacă:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x) \cdot f(y) \end{cases}$$

- R, R' inele unitare și $f(1) = 1' \Rightarrow$ morfism unitar

- Morfism inele (în particular) e morf grupuri $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(0) = 0$ și $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in R$
- Morfism nul $\Rightarrow f: R \to R'$, $f(x) = 0'$
- Morfism unitar și inj $\Rightarrow i: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $i(x) = x$
- Morfism unitar și surj $\Rightarrow p: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$, $p(x) = \hat{x}$ surj. can.
- Morfism de evaluare în X:
R=inel (unitar), X = mult $\neq \emptyset$, pt orice $x \in X$ definim
$\varphi_x : R^X \to R$, $\varphi_x(f) = f(x)$.
- $f: R \to R'$ și $g: R' \to R'' \Rightarrow g \circ f : R \to R''$ morf. unitar
$f: R \to R'$ izomorf. (unitar) dacă $\exists$ $g: R' \to R''$ morf cu propr. că $f \circ g = 1_{R'}$ și $g \circ f = 1_R \Rightarrow R \simeq R'$
- $f: R \to R'$ bij morf $\Leftrightarrow$ f izomorf.
- $f: R \to R$ endomorf + bij $\Rightarrow$ automorf
- $f: R \to R'$ morfism
  - $S \subseteq R$ subinel $\Rightarrow f(S) \subseteq R'$ subinel
  - $S' \subseteq R'$ subinel $\Rightarrow f^{-1}(S') \subseteq R$ subinel
  - f surj, $I \trianglelefteq_s R \Rightarrow f(I) \trianglelefteq_s R'$ (analog $\trianglelefteq_d$)
  - $I' \trianglelefteq_d R' \Rightarrow f^{-1}(I') \trianglelefteq_s R$ (analog $\trianglelefteq_s$ și blt)
- $f: R \to R'$ morf $\Rightarrow \operatorname{Im} f \subseteq R'$ subinel și $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ ideal blt

(T) Teorema de corespondență pt ideale

$f: R \to R'$ morf surj. $\Rightarrow$ $\exists$ corep. bij. între mulț. idealelor la stg/dr/blt ale lui R care îl au pe $\operatorname{Ker} f$ și mulț. tuturor idealelor la stg/dr/blt ale lui R' dată prin $I \mapsto f(I)$

Inele factor

- R inel și $I \subseteq R$ ideal bilateral, I subgr $(R,+)$ și $(R/I,+)$ grup comutativ cu $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{ab} \Rightarrow (R/I,+,\cdot)$ inel
- R/I inel factor al lui R în rap. cu idealul bil I
  $p: R \to R/I$, $p(x) = \hat{x}$ morf. surj s.n. proiecț. can lui R pe R/I
- R inel comut $\Rightarrow \forall$ ideal = bil
- R inel unitar (comut) $\Rightarrow R/I$ inel unitar (comut)
- $p: R \to R/\{0\}$ izomorfism
- R inel și $I \subseteq R$ ideal bil $\Rightarrow \exists$ coresp bij între mulț idealelor la stg/dr/bil ale lui R care îl au pe I și mulțimea tuturor idealelor la stg/dr/bil ale lui R/I date prin $J \mapsto J/I$
- Idealele lui $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sunt de forma $d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ cu d/m

(T) Proprietatea de universalitate a inelelor factor

$f: R \to R'$ morf, $I \trianglelefteq R$, dacă $I \subseteq \operatorname{Ker} f \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ un morf $\bar{f}: R/I \to R'$ unic $\bar{f} \circ p = f$, unde
$p: R \to R/I$ proiecție canonică. Mai mult:
$\bar{f}$ inj $\Leftrightarrow I = \operatorname{Ker} f$
$\bar{f}$ surj $\Leftrightarrow \bar{f}$ surj (AȘA SCRIA ÎN CURS)

- $f: R \to R'$ morf $\Rightarrow \operatorname{Ker} f \trianglelefteq R$, $R/\operatorname{Ker} f$ inel factor $\Rightarrow$
  $\Rightarrow \operatorname{Im} f$ subinel al lui R'

(T) Teorema fundamentală de izomorfism pt inele

$f: R \to R'$ morf $\Rightarrow \exists\ \bar{f}: R/\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Im} f$ izomorfism

- R inel, $I \trianglelefteq R$ și $J \trianglelefteq R$, $J \subseteq I \Rightarrow I/J \trianglelefteq R/J$ și $(R/J)/(I/J) \simeq R/I$

TEOREMA CHINEZĂ A RESTURILOR PT IDEALE

- $m_1, m_2 \geq 2 \in \mathbb{Z}$ prime între ele ; izomorf :

$f: \mathbb{Z}/m_1m_2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}$, $f(\hat{x}) = (\bar{x}, \bar{\bar{x}})$

$I_1 = m_1\mathbb{Z}$ și $I_2 = m_2\mathbb{Z} \Rightarrow I_1 + I_2 = \mathbb{Z}$ și $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$

- R inel, $I_1 \trianglelefteq R$ și $I_2 \trianglelefteq R$, $I_1 + I_2 = R \Rightarrow I_1$ și I_2 comaximale

- R inel comut unitar
I_1, I_2 ideale comaximale $\Bigg| \Rightarrow I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$

(T) R inel ; I_1, I_2 ideale comaximale ale lui R.

Atunci $f: R/I_1 \cap I_2 \to R/I_1 \times R/I_2$, $f(\hat{x}) = (\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ izomorf.