# FLP Seminare 6 - 8: Rezolvări

June 14, 2025

## 1 Seminar 6: Rezoluţie

Găsiţi o SLD-respingere pentru următoarele programe Prolog şi ţinte:

### 1.1 Subpunct 1

Programul Prolog și ținta sunt:
1.

```
r :- p,q.     t.     ?- w.
s :- p,q.     q.
v :- t,u.     u.
w :- v,s.     p.
```

Enumerăm clauzele și ținta. Ca rule-of-thumb, reamintim că literalii pozitivi vor fi doar cei care apar *la stânga* unui $:-$ (inclusiv dacă nu avem $:-$ deloc, adică avem ”facts”). Restul vor fi negați. Prima țintă ($G_0$) va fi negația query-ului.

$C_1 : r \vee \neg p \vee \neg q$
$C_2 : s \vee \neg p \vee \neg q$
$C_3 : v \vee \neg t \vee \neg u$
$C_4 : w \vee \neg v \vee \neg s$
$C_5 : t$
$C_6 : q$
$C_7 : u$
$C_8 : p$

---

$G_0 : \underline{\neg w}$ $\qquad$ $C_4 : \underline{w} \vee \neg v \vee \neg s$

$G_1 : \underline{\neg v} \vee \neg s$ $\qquad$ $C_3 : \underline{v} \vee \neg t \vee \neg u$

$G_2 : \underline{\neg t} \vee \neg u \vee \neg s$ $\qquad$ $C_5 : \underline{t}$

$G_3 : \underline{\neg u} \vee \neg s$ $\qquad$ $C_7 : \underline{u}$

$G_4 : \underline{\neg s}$ $\qquad$ $C_2 : \underline{s} \vee \neg p \vee \neg q$

$G_5 : \underline{\neg p} \vee \neg q$ $\qquad$ $C_8 : \underline{p}$

$G_6 : \underline{\neg q}$ $\qquad$ $C_6 : \underline{q}$

$G_7 : \square$

Am obținut o SLD-respingere pentru ținta $w$.

## 1.2 Subpunct 2

Programul Prolog și ținta sunt:
2.

```
q(X,Y) :- q(Y,X), q(Y,f(f(Y))).      ?- q(f(Z),a).
q(a,f(f(X))).
```

Enumerăm clauzele:

$C_1 : q(X, Y) \vee \neg q(Y, X) \vee \neg q(Y, f(f(Y))$

$C_2 : q(a, f(f(X)))$

Notă: în fiecare clauză, variabilele sunt implicit cuantificate universal. Așadar, chiar dacă sunt notate cu același simbol, variabila din clauze diferite au sensuri diferite. De aceea, de fiecare dată când vom invoca o clauză îi vom *redenumi* variabilele, pentru a ne asigura că sunt disjuncte de cele ale țintei cu care o rezolvăm. Asta asigură corectitudinea unificării.

Strict didactic, să încercăm să începem algoritmul astfel:

---

$G_0 : \neg q(f(Z), a)$ $\qquad$ $C_2 : q(a, f(f(X_0)))$

Nu se pot unifica: conflict! Trebuie să găsim o clauză care să se unifice cu ținta curentă. Mai încercăm:

$G_0 : \underline{\neg q(f(Z), a)}$ $\qquad$ $C_1 : \underline{q(X_0, Y_0)} \vee \neg q(Y_0, X_0) \vee \neg q(Y_0, f(f(Y_0))$ $\quad \Theta_0 = \{X_0 \mapsto f(Z), Y_0 \mapsto a\}$

$G_1 : \underline{\neg q(a, f(Z))} \vee \neg q(a, f(f(a))$ $\qquad$ $C_2 : \underline{q(a, f(f(X_1))}$ $\quad \Theta_1 = \{Z \mapsto f(X_1)\}$

$G_2 : \underline{\neg q(a, f(f(a)))}$ $\qquad$ $C_2 : \underline{q(a, f(f(X_2))}$ $\quad \Theta_2 = \{X_2 \mapsto a\}$

$G_3 : \square$

Așadar, am găsit o SLD-respingere, cu substituția $\Theta = \Theta_0 \circ \Theta_1 \circ \Theta_2 = \{Z \mapsto f(X_1), X_0 \mapsto f(f(X_1)), Y_0 \mapsto a, X_2 \mapsto a\}$.

Ne interesează valoarea lui $Z$ prin această substituțîe, pentru că ea era variabila din query. Avem, deci, $Z \mapsto f(X_1)$. (La examen e suficient să precizați valoarea variabilei prin substituție, nu trebuie să scrieți desfășurat compunerea $\Theta_0 \circ ... \circ \Theta_n$).

## 1.3 Subpunct 3

Programul Prolog și ținta sunt:
3.

```
p(X) :- q(X,f(Y)), r(a).     r(X) :- q(X,Y).     ?- p(X), q(Y,Z).
p(X) :- r(X).  r(f(b)).
q(X,Y) :- p(Y).
```

Clauzele și ținta:

$$C_1 : p(X) \vee \neg q(X, f(Y)) \vee \neg r(a)$$
$$C_2 : p(X) \vee \neg r(X)$$
$$C_3 : q(X, Y) \vee \neg p(Y)$$
$$C_4 : r(X) \vee \neg q(X, Y)$$
$$C_5 : r(f(b))$$

---

$$\begin{array}{lrl}
G_0 : \underline{\neg p(X)} \vee \neg q(Y, Z) & C_2 : \underline{p(X_0)} \vee \neg r(X_0) & \Theta_0 = \{X \mapsto X_0\} \\
G_1 : \underline{\neg r(X_0)} \vee \neg q(Y, Z) & C_5 : \underline{r(f(b))} & \Theta_1 = \{X_0 \mapsto f(b)\} \\
G_2 : \underline{\neg q(Y, Z)} & C_3 : \underline{q(X_2, Y_2)} \vee \neg p(Y_2) & \Theta_2 = \{Y \mapsto X_2, Z \mapsto Y_2\} \\
G_3 : \underline{\neg p(Y_2)} & C_2 : \underline{p(X_3)} \vee \neg r(X_3) & \Theta_3 = \{Y_2 \mapsto X_3\} \\
G_4 : \underline{\neg r(X_3)} & C_5 : \underline{r(f(b))} & \Theta_4 = \{Y_3 \mapsto f(b)\} \\
G_5 : \square & &
\end{array}$$

Ne interesează valorile variabilelor $X, Y, Z$ prin substituția $\Theta = \Theta_0 \circ \Theta_1 \circ \Theta_2 \circ \Theta_3 \circ \Theta_4$. Observăm că obținem:
$X \mapsto f(b), Y \mapsto X_2, Z \mapsto f(b)$

## 2 Seminar 7: Lambda-calcul fără tipuri

Reduceţi următorii termeni până la o formă normală:

1.$\underline{(\lambda x.((xy)x)(\lambda z.z))} \to_\beta ((xy)x)[x := \lambda z.z] \equiv_\alpha (\underline{(\lambda z.z)y})(\lambda z.z) \to_\beta z[z := y](\lambda z.z) \equiv_\alpha y(\lambda z.z)$

2.$\underline{((\lambda x.(\lambda y.x))y)}z \to_\beta (\lambda y.x)[x := y]z$

Nu pot face substituția direct, pentru că aș lega accidental variabila $y$ de binderul $\lambda y$. Aplic o alfa-conversie (redenumesc variabila de legare $y$):

$\equiv_\alpha (\lambda u.x)[x := y]z \equiv_\alpha \underline{(\lambda u.y)z} \to_\beta y[u := z] \equiv_\alpha y$

3.$\underline{(\lambda z.(\lambda x.(\lambda y.(zy))))(vy)} \to_\beta (\lambda x.(\lambda y.(zy)))[z := vy]$

Observăm și aici că dacă l-am înlocui pe $z$ direct, am lega accidental o apariție a lui $y$. Așadar: $\equiv_\alpha (\lambda x.(\lambda u.(zu)))[z := vy] \equiv_\alpha \lambda x.\lambda u.(vy)u$

4.$(\underline{(\lambda s.(ss))(\lambda q.q)})(\lambda q.q) \to_\beta ((ss)[s := (\lambda q.q)])(\lambda q.q) \equiv_\alpha (\underline{(\lambda q.q)(\lambda q.q)})(\lambda q.q) \to_\beta \underline{(\lambda q.q)(\lambda q.q)}$
$\to_\beta \lambda q.q$

5.$(\mathbf{mul}\ C_2)C_2$

Desfășurând definiția lui **mul**, obținem:

$(\underline{(\lambda n.\ \lambda m.\ \lambda f.\ n(mf))\ C_2})\ C_2$

$\to_\beta \underline{(\lambda m.\ \lambda f.\ m\ (C_2\ f))C_2}$

$\to_\beta \lambda f.\ C_2\ (C_2\ f)$

Desfășurăm cele două apariții ale lui $C_2$ conform definiției. Pentru a ne ușura treaba, *nu vom folosi același nume de variabilă legată de două ori*:

$\to_\beta \lambda f.\ (\lambda f'.\ \lambda x'.\ f'\ (f'x'))\ (\underline{(\lambda f''.\ \lambda x''.\ f''\ (f''x''))\ f})$

$\to_\beta \lambda f.\ \underline{(\lambda f'.\ \lambda x'.\ f'\ (f'x'))(\lambda x''.\ f\ (fx''))}$

$\to_\beta \lambda f.\ (\lambda x'.\ (\lambda x''.\ f\ (fx''))\ \underline{((\lambda x''.\ f\ (fx''))\ x')})$

$\to_\beta \lambda f.\ (\lambda x'.\ \underline{(\lambda x''.\ f\ (fx''))\ (f\ (f\ x'))})$

$\to_\beta \lambda f.\ (\lambda x'.\ (f\ (f\ f\ (f\ x'))))$

$\equiv_\alpha \lambda f.\ (\lambda x.\ (f\ (f\ f\ (f\ x))))$

$\equiv_\alpha C_4$

Observăm că $2 * 2 = 4$.

# 3 Seminar 8: Lambda-calcul cu tipuri

Considerăm următorii termeni. Pentru fiecare dintre ei, aplicaţi algoritmul de inferenţă a tipurilor şi prezentaţi o deducţie în sistemul de deducţie corespunzător care să arate că termenului i se poate aloca tipul obţinut prin algoritm.

## 3.1 Subpunct 1

1. $M = \lambda xyz.(x(yz))$

Adnotăm variabilele de legare (cele de sub $\lambda$) cu variabile de tip noi:

$M' = \lambda x : X.\ \lambda y : Y.\ \lambda z : Z.\ x(yz)$

Cum nu avem variabile libere în $M$, vom porni algoritmul de inferență a tipurilor de la contextul vid, $\Gamma_M = \varnothing$. Așadar:

$$
\begin{aligned}
& c(\underline{\lambda x : X}.\ \lambda y : Y.\ \lambda z : Z.\ x(yz), \varnothing, T_1) = \\
& = c(\underline{\lambda y : Y}.\ \lambda z : Z.\ x(yz), \{x : X\}, T_2)\ \cup\ \{T_1 = X \to T_2\} \\
& = c(\underline{\lambda z : Z}.\ x(yz), \{x : X, y : Y\}, T_3)\ \cup\ \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3\} \\
& = c(\underline{x(yz)}, \{x : X, y : Y, z : Z\}, T_4)\ \cup\ \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_3 = Z \to T_4\} \\
& = c(\underline{x}, \{x : X, y : Y, z : Z\}, T_5)\ \cup\ c(yz, \{x : X, y : Y, z : Z\}, T_6) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_3 = Z \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4\} \\
& = c(\underline{yz}, \{x : X, y : Y, z : Z\}, T_6) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_3 = Z \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4, X = T_5\} \\
& = c(\underline{y}, \{x : X, y : Y, z : Z\}, T_7)\ \cup\ c(z, \{x : X, y : Y, z : Z\}, T_8) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_3 = Z \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4, X = T_5, T_7 = T_8 \to T_6\} \\
& = c(\underline{z}, \{x : X, y : Y, z : Z\}, T_8) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_3 = Z \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4, X = T_5, T_7 = T_8 \to T_6, Y = T_7\} \\
& = \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_3 = Z \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4, X = T_5, T_7 = T_8 \to T_6, Y = T_7, Z = T_8\}
\end{aligned}
$$

Am obținut o mulțime de constrângeri. Dacă vrem ca termenului $M$ să îi poată fi atribuit un tip, toate aceste constrângeri trebuie satisfăcute simultan. Dar chiar există o soluție (unificator) pentru toate aceste constrângeri? În general, pentru a răspunde la întrebarea aceasta trebuie să aplicvăm un algoritm de unificare, considerând variabilele de tip $X, Y, Z, T_1, ..., T_8$ ca variabile, iar $\to$ ca funcție de două argumente.

Mai jos (figura 1) este o desfășurare completă a algoritmului de unificare. Observați însă că ea este foarte repetitivă. Tocmai de aceeea, aveți șanse să ”ghiciți” soluția pentru $T_1$, fără să rulați algoritmul atât de explicit.

Cum? Hint: plecați de la ecuația în care apare $T_1$, i.e. $T_1 = X \to T_2$. Uitați-vă la variabilele din partea dreaptă a egalului, în cazul acesta $X$ și $T_2$. Încercaţi să aplicați orice ecuație nefolosită în care apar aceste variabile; de exemplu folosiți-vă de $X = T_5$ pentru a rescrie ecuația inițială ca

$T_1 = T_5 \to T_2$, și marcați $X = T_5$ ca folosită. Repetați până când nu mai aveți ecuații nefolosite.

Dar, pentru completitutdine (și corectitudine), în Figura 1 aveți o rulare ”ca la carte” a algoritmului de unificare (aplicat în direcția inversă față de cea propusă ca hint).

Din figura 1, observăm că sistemul de ecuații are un cel mai general unificator, iar substituția lui $T_1$ prin unificatorul găsit este $(T_6 \to T_4) \to ((T_8 \to T_6) \to (T_8 \to T_4))$.
Cum operatorul $\to$ este asociativ la dreapta, asta e totuna cu $(T_6 \to T_4) \to (T_8 \to T_6) \to T_8 \to T_4$.

Să construim o deducție pentru tipul găsit. Pentru a nu ne întinde prea mult, vom nota contextul $\{x : T_6 \to T_4,\ y : T_8 \to T_6,\ z : T_8\}$ cu $\Gamma$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : T_6 \to T_4} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y : T_8 \to T_6} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash z : T_8}}{\Gamma \vdash yz : T_6}}{\Gamma \vdash x(yz) : T_4}}{\dfrac{\{x : T_6 \to T_4,\ y : T_8 \to T_6\} \vdash \lambda z.x(yz) : T_8 \to T_4}{\{x : T_6 \to T_4\} \vdash \lambda yz.x(yz) : (T_8 \to T_6) \to T_8 \to T_4}}}{\varnothing \vdash \lambda xyz.x(yz) : (T_6 \to T_4) \to (T_8 \to T_6) \to T_8 \to T_4}$$

## 3.2 Subpunct 2

2. $M = \lambda xy.(xy(\lambda z.y))$

Avem $M' = \lambda x : X.\ \lambda y : Y\ (xy(\lambda z : Z.\ y))$ și $\Gamma_M = \varnothing$.

$$\begin{aligned}
& c(\underline{\lambda x : X}.\ \lambda y : Y.\ (xy(\lambda z : Z.y)), \varnothing, T_1) = \\
& = c(\underline{\lambda y : Y}.\ (xy(\lambda z : Z.y)), \{x : X\}, T_2) \ \cup\ \{T_1 = X \to T_2\} \\
& = c(\underline{xy(\lambda z : Z.y)}, \{x : X, y : Y\}, T_3) \ \cup\ \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3\} \\
& = c(\underline{xy}, \{x : X, y : Y\}, T_4) \ \cup\ c(\lambda z : Z.\ y, \{x : X, y : Y\}, T_5) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_4 = T_5 \to T_3\} \\
& = c(\underline{x}, \{x : X, y : Y\}, T_6) \ \cup\ c(y, \{x : X, y : Y\}, T_7) \ \cup\ c(\lambda z : Z.\ y, \{x : X, y : Y\}, T_5) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_4 = T_5 \to T_3, T_6 = T_7 \to T_4\} \\
& = c(\underline{y}, \{x : X, y : Y\}, T_7) \ \cup\ c(\lambda z : Z.\ y, \{x : X, y : Y\}, T_5) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_4 = T_5 \to T_3, T_6 = T_7 \to T_4, X = T_6\} \\
& = c(\underline{\lambda z : Z}.\ y, \{x : X, y : Y\}, T_5) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_4 = T_5 \to T_3, T_6 = T_7 \to T_4, X = T_6, Y = T_7\} \\
& = c(\underline{y}, \{x : X, y : Y, z : Z\}, T_8) \cup \\
& \qquad \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_4 = T_5 \to T_3, T_6 = T_7 \to T_4, X = T_6, Y = T_7, T_5 = Z \to T_8\} \\
& = \{T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_4 = T_5 \to T_3, T_6 = T_7 \to T_4, X = T_6, Y = T_7, T_5 = Z \to T_8, Y = T_8\}
\end{aligned}$$

Fără a mai desfășura algoritmul de unificare, observăm că există un cel mai general unificator pentru aceste ecuații, iar valoarea lui $T_1$ prin acest unificator este $(T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3) \to T_7 \to T_3$.

| S | R | pas |
|---|---|---|
| $\varnothing$ | $T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_3 = Z \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4, X = T_5, T_7 = T_8 \to T_6, Y = T_7, \underline{Z = T_8}$ | Rezolvă |
| $Z \mapsto T_8$ | $T_1 = X \to T_2, T_2 = Y \to T_3, T_3 = T_8 \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4, X = T_5, T_7 = T_8 \to T_6, \underline{Y = T_7}$ | Rezolvă |
| $Z \mapsto T_8, Y \mapsto T_7$ | $T_1 = X \to T_2, T_2 = T_7 \to T_3, T_3 = T_8 \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4, X = T_5, \underline{T_7 = T_8 \to T_6}$ | Rezolvă |
| $Z \mapsto T_8, Y \mapsto T_8 \to T_6, T_7 \mapsto T_8 \to T_6$ | $T_1 = X \to T_2, T_2 = (T_8 \to T_6) \to T_3, T_3 = T_8 \to T_4, T_5 = T_6 \to T_4, \underline{X = T_5}$ | Rezolvă |
| $Z \mapsto T_8, Y \mapsto T_8 \to T_6, T_7 \mapsto T_8 \to T_6, X \mapsto T_5$ | $T_1 = T_5 \to T_2, T_2 = (T_8 \to T_6) \to T_3, T_3 = T_8 \to T_4, \underline{T_5 = T_6 \to T_4}$ | Rezolvă |
| $Z \mapsto T_8, Y \mapsto T_8 \to T_6, T_7 \mapsto T_8 \to T_6, X \mapsto T_6 \to T_4, T_5 \mapsto T_6 \to T_4$ | $T_1 = (T_6 \to T_4) \to T_2, T_2 = (T_8 \to T_6) \to T_3, \underline{T_3 = T_8 \to T_4}$ | Rezolvă |
| $Z \mapsto T_8, Y \mapsto T_8 \to T_6, T_7 \mapsto T_8 \to T_6, X \mapsto T_6 \to T_4, T_5 \mapsto T_6 \to T_4, T_3 \mapsto T_8 \to T_4$ | $T_1 = (T_6 \to T_4) \to T_2, \underline{T_2 = (T_8 \to T_6) \to (T_8 \to T_4)}$ | Rezolvă |
| $Z \mapsto T_8, Y \mapsto T_8 \to T_6, T_7 \mapsto T_8 \to T_6, X \mapsto T_6 \to T_4, T_5 \mapsto T_6 \to T_4, T_3 \mapsto T_8 \to T_4 T_2 \mapsto (T_8 \to T_6) \to (T_8 \to T_4)$ | $\underline{T_1 = (T_6 \to T_4) \to ((T_8 \to T_6) \to (T_8 \to T_4))}$ | Rezolvă |
| $Z \mapsto T_8, Y \mapsto T_8 \to T_6, T_7 \mapsto T_8 \to T_6, X \mapsto T_6 \to T_4, T_5 \mapsto T_6 \to T_4, T_3 \mapsto T_8 \to T_4 T_2 \mapsto (T_8 \to T_6) \to (T_8 \to T_4), T_1 \mapsto (T_6 \to T_4) \to ((T_8 \to T_6) \to (T_8 \to T_4))$ | $\varnothing$ | |

Figure 1: Algoritmul de unificare petru subpunctul 1

Dacă obțineți acest rezultat, puteți aplica orice metodă de rezolvare doriți. Important este să validați rezultatul printr-un arbore de deducție. Vedeți Figura 2 pentru soluția la această cerință.

### 3.3 Subpunct 3

3. $M = (\lambda xyz.zxy)(\lambda xyz.y)(\lambda xy.y)$
   Complet analog!

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\{x \,:\, T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3, y \,:\, T_7\} \vdash x \,:\, T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3}
      \quad
      \dfrac{}{\{x \,:\, T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3, y \,:\, T_7\} \vdash y \,:\, T_7}
    }{\{x \,:\, T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3, y \,:\, T_7\} \vdash xy \,:\, (Z \to T_7) \to T_3}
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{}{\{x \,:\, T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3, y \,:\, T_7, z \,:\, Z\} \vdash y \,:\, T_7}
    }{\{x \,:\, T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3, y \,:\, T_7\} \vdash \lambda z.y \,:\, Z \to T_7}
  }{
    \dfrac{\{x \,:\, T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3, y \,:\, T_7\} \vdash xy(\lambda z.y) \,:\, T_3}{\{x \,:\, T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3\} \vdash \lambda y.(xy(\lambda z.y)) \,:\, T_7 \to T_3}
  }
}{\varnothing \vdash \lambda xy.(xy(\lambda z.y)) \,:\, (T_7 \to (Z \to T_7) \to T_3) \to T_7 \to T_3}
$$

Figure 2: Deducție subpunct 2