K. Teleman

M. Florescu
D. Moraru
C. Rădulescu
E. Stătescu

X

Matematică

manual pentru clasa a X-a

Geometrie și trigonometrie

Editura didactică și pedagogică,
București, 1979

Manualul a fost elaborat pe baza programei aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 39490/1978

Referenți: Prof. CABIRIA ANDREIAN
Dr. ALEXANDRU BREZULEANU
Dr. HOREA BANEA

Indicații Generale

S-a căutat ca obiecte diferite să fie notate diferit, pentru a se evita confuzii. Astfe se face deosebire, în formulări și prin notații, între dreapta definită de două puncte, între segmentele închis și deschis avînd aceste puncte ca extremități și între distanța dintre aceleași puncte (care este egală prin definiție cu lungimea segmentelor menționate).

Printr-o formulare de tipul: „Fie A, B două puncte..." subînțelegem că punctele A și B sînt distincte (deoarece altfel nu am avea *două* puncte). Uneori, cînd vrem să subliniem faptul că o anumită formulare are sens numai dacă punctele A, B sînt distincte, folosim și adjectivul „distincte".

Elevii sînt îndemnați să rețină axiomele, teoremele și formulele încadrate în chenare, după ce au înțeles bine sensul acestora. Se va acorda o atenție deosebită definițiilor, care trebuie de asemenea bine însușite.

Se recomandă ca elevii să învețe corect demonstrațiile teoremelor cuprinse în manual. Menționăm că nu toate proprietățile demonstrate au fost intitulate teoreme.

Unele demonstrații bazate pe raționamente logice pot fi înlocuite, din motive metodologice, prin demonstrații practice. Acestea se vor face prin desene sau modele îngrijit executate. Se recomandă ca demonstrațiile practice să însoțească și unele demonstrații logice.

Recomandăm ca elevii să citească un număr cît mai mare de paragrafe din manual, pe baza indicațiilor date de tovarășii profesori. Verificarea și consolidarea cunoștințelor însușite prin lectura manualului se va face prin rezolvări de exerciții și dialog.

Redactor: prof. EUGENIA PANTELIMON
Tehnoredactor: ILINCA PROSAN
Coperta: N. SÎRBU
Desenator: C. HĂLCESCU

Notații folosite

Dreapta ce trece prin punctele A și B $(A \neq B)$: AB sau BA.

Triunghiul cu vîrfurile A, B, C : ABC.

Punctul A aparține dreptei d : $A \in d$.

Punctul A este intersecția dreptelor d, d' $(d \neq d')$: $\{A\} = d \cap d'$.

Segmentul deschis de extremități A, B $(A \neq B)$: $|AB| = |BA|$.

Segmentul închis de extremități A, B $(A \neq B)$: $[AB] = [BA]$.

Semidreapta limitată de punctul A și conținînd punctul B : $|AB$.

Semiplanul limitat de dreapta d și conținînd punctul A : $|dA$.

Semispațiul limitat de planul p și conținînd punctul A : $|pA$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele h, k : $\widehat{hk} = \widehat{kh}$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele $|AB$, $|AC$: $\widehat{BAC}$ sau $\widehat{CAB}$.

Unghiul diedru avînd ca fețe semiplanele u, v : $\widehat{uv}$ sau $\widehat{vu}$.

Unghiul triedru format din semidreptele a, b, c : $\widehat{abc}$.

Segmentul $|AB|$ este congruent cu segmentul $|CD|$: $|AB| \equiv |CD|$.

Unghiul $\widehat{hk}$ este congruent cu unghiul $\widehat{rs}$: $\widehat{hk} \equiv \widehat{rs}$.

Triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $A'B'C'$: $ABC \equiv A'B'C'$.

Figura F este congruentă cu figura F' : $F \equiv F'$.

Unghiurile triunghiului ABC : $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$.

Segmentul etalon: m.

Lungimea segmentelor $|AB|$, $[AB]$: $\overline{AB} = \overline{BA}$ (dacă etalonul este fixat).

Distanța dintre punctele A, B : $d(A, B)$ (dacă etalonul este fixat)

Vectorul legat cu originea A și extremitatea B : $\overrightarrow{AB}$.

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu vectorul $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Norma vectorului $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{v}\|$, $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$.

Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Produsul vectorial al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{u} \times \vec{v}$.

Locul geometric al punctelor care au proprietățile P, P', P'', ... $\{M : M$ are proprietățile P, P', P''...$\}$

Măsura unghiului $\widehat{hk}$: măs $\widehat{hk}$ (de fiecare dată se va specifica dacă este vorba de măsura în grade sau în radiani).

Cercul de centru O și rază R (într-un plan fixat): $C(O, R)$.

Figurile F, F' coincid: $F = F'$.

Unghiuri drepte: dr.

Dreapta reală : $\mathbb{R}$.

Mulțimea numerelor întregi : $\mathbb{Z}$.

23.10.79

Capitolul **III**

Elemente de trigonometrie plană

1. Vectori

Se numește *vector legat* sau *vector* o pereche ordonată de puncte, deci o mulțime formată din două puncte, dintre care unul este numit *origine*, iar al doilea *extremitate*. Vectorul avînd originea A și extremitatea B va fi notat $\overrightarrow{AB}$. Termenul vector vine de la cuvîntul latinesc „vehere", care înseamnă „a merge". Cînd ne referim la vectorul $\overrightarrow{AB}$ ne putem gîndi la un mobil, care se deplasează, mergînd din punctul A în punctul B (fig. III. 1). De aceea un vector $\overrightarrow{AB}$ se reprezintă printr-o săgeată de la punctul A la punctul B.

Fig. III.1

Doi vectori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt egali dacă și numai dacă $A = A'$ și $B = B'$.

Un vector, a cărui origine coincide cu extremitatea sa se numește *vector nul*. Fiecare punct A definește vectorul nul $\overrightarrow{AA}$.

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este un vector nenul, punctele A și B sînt distincte și definesc o dreaptă, care se numește *suportul* vectorului $\overrightarrow{AB}$ (fig. III. 2).

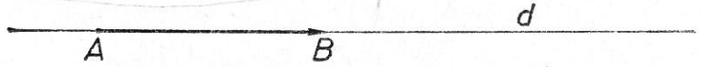

Fig. III.2

Doi vectori care sînt nenuli și au același suport, se numesc *vectori coliniari* (fig. III. 3).

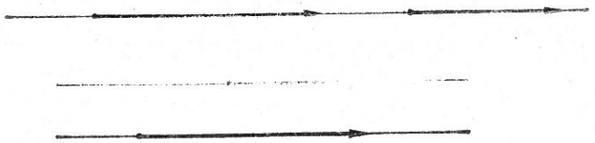

Fig. III.3

Doi vectori nenuli, care au suporții paraleli, se numesc *vectori paraleli*.

Uneori, un vector se notează printr-o singură literă, deasupra căreia se pune o săgeată. De exemplu, putem scrie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Pentru a exprima că $\vec{u}$ este un vector nul, scriem $\vec{u} \in \vec{0}$, $\vec{0}$ fiind mulțimea vectorilor nuli.

D e f i n i ț i e. **Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ doi vectori nenuli și paraleli. Spunem că vectorii considerați sînt echipolenți, dacă figura $ABB'A'$ este un paralelogram, deci dacă $AB \parallel A'B'$ și dacă $AA' \parallel BB'$** (fig. III. 4).

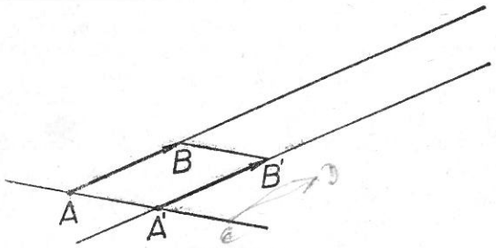

Fig. III.4

D e f i n i ț i e. **Vom spune că doi vectori nenuli și paraleli au același sens, dacă extremitățile lor se găsesc de o aceeași parte a dreptei definite de originile lor.**

Deci vectorii nenuli și paraleli $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt de același sens, dacă punctele B, D se găsesc de aceeași parte a dreptei AC.

Definițiile date pierd orice semnificație, dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ respectiv $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sînt coliniari. Totuși, putem defini echipolența, respectiv relația de a avea același sens și pentru vectori coliniari, dacă procedăm în modul următor: alegem un punct O, exterior dreptei d, care conține vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ și considerăm paralelogramul $OABP$, care are latura OP paralelă cu d. Vom spune că vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt echipolenți, dacă vectorii paraleli $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt echipolenți; vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ se zic de același sens, dacă vectorii paraleli $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt de același sens, (fig. III. 5).

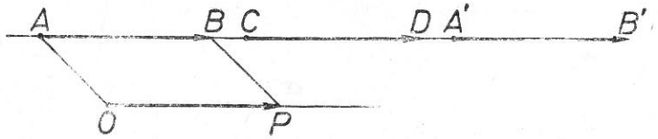

Fig. III.5

Exerciții.

1. *Să se arate că relația de echipolență a vectorilor este relație de echivalență, deci că este reflexivă, simetrică și tranzitivă.*

2. *Să se arate că relația exprimată prin cuvintele „au același sens" este o relație de echivalență.*

3. *Să se arate că definițiile echipolenței și relației privind sensul a doi vectori nenuli și coliniari nu depind de alegerea punctului O.*

Doi vectori nuli se consideră **totdeauna** echipolenți. Pentru a exprima că vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt echipolenți, scriem $\vec{u} \sim \vec{v}$.

Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ doi vectori nenuli și fie O un punct oarecare. Să considerăm punctele M și N astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{CD}$. Se formează astfel unghiul $\widehat{MON}$ (fig. III. 6), despre care vom spune că *reprezintă unghiul vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Dacă se consideră alte puncte O', M', N' astfel ca $\overrightarrow{O'M'} \sim \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{O'N'} \sim \overrightarrow{CD}$, atunci $\widehat{M'O'N'} \equiv \widehat{MON}$, deci *două unghiuri, care reprezintă unghiul a doi vectori nenuli, sînt congruente.*

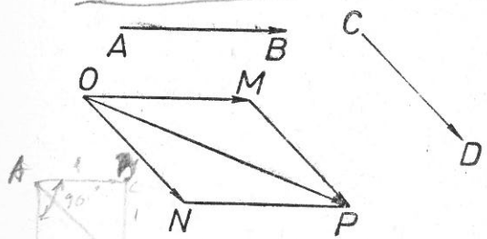

Fig. III.6

Să completăm construcția efectuată anterior, considerînd paralelogramele $MONP$, $M'O'N'P'$. Avem

(1) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{O'M'}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{O'N'}$, $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}$.

Vom spune că vectorul $\overrightarrow{OP}$ *reprezintă suma* în O a vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ și vom scrie

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) \text{ sau } \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}$$

Potrivit acestei definiții, avem

$$\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O'), \ \overrightarrow{O'P'} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Ultima formulă (1) arată că *doi vectori, care reprezintă suma altor doi vectori, în două puncte oarecare, sînt echipolenți.* Deci $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}$.

Din proprietățile paralelogramului rezultă formulele (fig. III. 6).

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \text{ (în } O) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \text{ (în } O) = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} \text{ (în } O) =$$
$$= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \text{ (în } O).$$

Avem prin urmare, pentru orice doi vectori, $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$, și pentru orice punct O, proprietatea de *comutativitate*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\ (\text{în } O) = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\ (\text{în } O).}$$

Pentru a obține suma în A a vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, putem proceda în modul următor: considerăm punctul P, astfel ca $\overrightarrow{BP} \sim \overrightarrow{CD}$; atunci

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\ (\text{în } A) = \overrightarrow{AP}.$$

Fie vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ și $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$. Să alegem un punct oarecare O și să construim punctele M, N, P astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \vec{u}$, $\overrightarrow{MN} \sim \vec{v}$ și $\overrightarrow{NP} \sim \vec{w}$. Avem atunci (fig. III. 7).

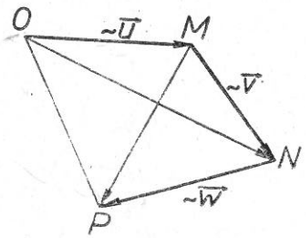

Fig. III.7

$$\overrightarrow{ON} = \vec{u} + \vec{v}\ (\text{în } O),\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \vec{w}\ (\text{în } O) =$$
$$= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}\ (\text{în } O),$$

$$\overrightarrow{MP} = \vec{v} + \vec{w}\ (\text{în } M),\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$
$$(\text{în } O) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\ (\text{în } O).$$

Rezultă că *adunarea vectorilor într-un punct are proprietatea de asociativitate*

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}\ (\text{în } O) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\ (\text{în } O).}$$

Exercițiu. *Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{C'D'}$ și un punct O. Arătați că*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\ (\text{în } O) = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'}\ (\text{în } O).$$

Fie m segmentul etalon, ales ca unitate de măsurare a lungimii segmentelor și a distanțelor între puncte. Am notat prin $d(A, B)$ distanța dintre punctele A, B. Dacă $A \neq B$, $d(A, B)$ coincide cu lungimea segmentului $|AB|$, iar dacă $A = B$, avem prin definiție $d(A, B) = 0$.

D e f i n i ț i e. După fixarea segmentului etalon, definim norma unui vector $\overrightarrow{AB}$ prin formula

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B),}$$

deci norma unui vector este egală cu distanța dintre originea și extremitatea acelui vector.

În particular, *vectorii nuli au norma egală cu 0*. Reciproc, *dacă un vector $\vec{v}$ are norma $\|\vec{v}\|$ egală cu 0, atunci vectorul $\vec{v}$ este nul.* Un vector de normă 1 se numește *versor*.

Exercițiu. *Arătați că doi vectori echipolenți au normele egale.*

Fiind dat un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, vom spune că vectorul $\vec{v}' = \overrightarrow{BA}$ este un *opus* al vectorului $\vec{v}$, deoarece avem, oricare ar fi punctul O,

$$\vec{v} + \vec{v}'\ (\text{în } O) = \vec{O}.$$

În general, vom numi *vector opus* vectorului $\vec{v}$, orice vector echipolent cu vectorul $\vec{v}'$.

Definim *diferența* a doi vectori $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ și $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, într-un punct O, prin formula

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\ (\text{în } O) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\ (\text{în } O).$$

Dacă notăm $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ (în O), atunci avem $\vec{u} + \overrightarrow{CD}$ (în A) $= \overrightarrow{AB}$. Oricare ar fi punctele L, M, N, avem

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM}\ (\text{în } M),$$

deoarece $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{LM}$ (în L) $= \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$ (în L) $= \overrightarrow{LN}$.

Dacă se completează figura LMN la un paralelogram $LMNP$, avem

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LP}\ (\text{în } L) = \overrightarrow{LN},\quad \overrightarrow{LP} - \overrightarrow{LM}\ (\text{în } M) = \overrightarrow{MP}$$

și rezultă că cei doi vectori diagonali $\overrightarrow{LN}$, $\overrightarrow{MP}$, dau suma și diferența vectorilor $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{LP}$, pe care am construit paralelogramul $LMNP$. (fig. III. 8).

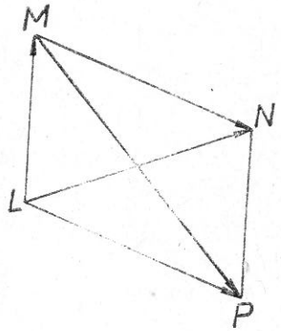

Fig. III.8

Fiind dat un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ și un număr real x, definim *produsul* $x \cdot \vec{v}$ în modul următor:

Dacă $B = A$ sau dacă $x = 0$, $x \cdot \vec{v}$ este vectorul nul $\overrightarrow{AA}$.

Dacă $B \neq A$ și dacă $x > 0$, $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector $\overrightarrow{AB'}$, pentru care

$$B' \in |AB,\ |AB'| \equiv x \cdot |AB|.$$

Dacă $B \neq A$ și dacă $x < 0$, atunci $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector $\overrightarrow{AB''}$, pentru care

$$A \in |BB''|,\ |AB''| \equiv (-x) \cdot |AB|.$$

În particular, avem $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ și $(-1)\,\vec{v}$ este un opus al vectorului $\vec{v}$.

Oricare ar fi numerele reale x și y și pentru orice vector $\vec{v}$, avem

(2) $$\boxed{x \cdot (y \cdot \vec{v}) = (xy) \cdot \vec{v}.}$$

Ultima formulă se stabilește observînd că cei doi membri reprezintă vectori avînd aceeași origine, aceeași dreaptă suport (dacă cei doi vectori sînt nenuli); în plus, cei doi vectori au același sens, oricare ar fi semnele lui x și y și ei au de asemenea aceeași normă $|xy| \cdot \|\vec{v}\|$.

Să arătăm că, *oricare ar fi vectorii* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ *și oricare ar fi numărul real* x, *avem*

$$x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}. \tag{3}$$

Pentru demonstrație, să considerăm un punct O și să construim punctele M, N astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \vec{u}$ și $\overrightarrow{ON} \sim \vec{v}$. Fie apoi punctele M', N' pentru care

$$\overrightarrow{OM'} \sim x \cdot \vec{u}, \quad \overrightarrow{ON'} \sim x \cdot \vec{v}.$$

Să presupunem că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli și necoliniari. Atunci $M \neq O$

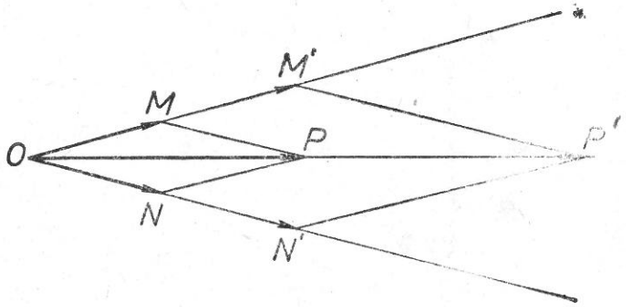

Fig. III.9

și $N \neq O$ și avem $M' \in OM$, $N' \in ON$. Dacă definim punctele P, P' prin formulele (fig. III. 9).

$$\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{OP'} \sim x \cdot \overrightarrow{OP},$$

din teorema lui Thales deducem relațiile

$$MN \parallel M'N', \quad M'P' \parallel MP \parallel ON, \quad N'P' \parallel NP \parallel OM,$$

$$\overrightarrow{M'P'} \sim x \cdot \overrightarrow{MP} \sim x \cdot \overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{N'P'} \sim x \cdot \overrightarrow{NP} \sim x \cdot \overrightarrow{OM},$$

deci avem

$$\overrightarrow{OP'} \sim x \cdot \overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{OP'} \sim \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} \sim x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{ON}$$

sau

$$\overrightarrow{OP'} \sim x \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \sim x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{ON}.$$

Dacă unul din vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ este nul, relația (3) este evidentă.

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli dar coliniari, există un număr real r astfel

ca $\vec{v} \sim r \cdot \vec{u}$. În acest caz, avem $\vec{u} + \vec{v} \sim (1 + r)\vec{u}$, $x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x(1 + r) \cdot \vec{u}$, $x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v} \sim x \cdot \vec{u} + xr \cdot \vec{u} \sim (x + xr) \cdot \vec{u} = x(1 + r) \cdot \vec{u}$, deci și în acest caz, relația (3) este adevărată.

Produsul scalar a doi vectori

Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori. Definim **produsul scalar** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ al acestor vectori prin formula

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}, \text{ dacă } \vec{u} \notin \vec{0} \text{ și } \vec{v} \notin \vec{0}, \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \text{ dacă } \vec{u} \in \vec{0} \text{ sau } \vec{v} \in \vec{0}. \end{array}}$$

Din această definiție deducem următoarele proprietăți:

Produsul scalar a doi vectori este simetric, deci $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Produsul scalar a doi vectori nu se schimbă, dacă înlocuim cei doi vectori prin doi vectori echipolenți lor. Deci $\vec{u'} \sim \vec{u}$ și $\vec{v'} \sim \vec{v}$ implică $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u'} \cdot \vec{v'}$.

Produsul scalar a doi vectori este nul fie în cazul în care unul cel puțin din cei doi vectori este nul, fie în cazul în care cei doi vectori sînt nenuli și perpendiculari.

Produsul sclar a doi vectori, care fac un unghi ascuțit, este pozitiv.

Produsul sclar a doi vectori, care fac un unghi obtuz, este negativ.

Unghiul a doi vectori nenuli $\vec{u}$ și $\vec{v}$ poate fi calculat din formula

$$\boxed{\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}}$$

Din inegalitatea $|\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}| \leq 1$, deducem *inegalitatea lui Schwarz-Cauchy-Buniakowski*:

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.}$$

Dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt nenuli și paraleli sau coliniari, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \pm 1$.

Mai precis, dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ au același sens, atunci $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = 1$ și rezultă $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. În particular, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, deci:

Produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul normei acelui vector.

Dacă vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sînt de sensuri opuse, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = -1$ și

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = - \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Dacă vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sînt nenuli, necoliniari și neparaleli, atunci $-1 < \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} < 1$ și rezultă $|\vec{u} \cdot \vec{v}| < \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt vectori nenuli și dacă x este un număr pozitiv, atunci unghiul vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$ se poate lua egal cu unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}, \vec{v}$, deoarece înmulțirea vectorului $\vec{u}$ cu un număr pozitiv dă un vector de același sens cu $\vec{u}$. Rezultă că, pentru $x > 0$, avem

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = x \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = x(\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = x(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Dacă $x < 0$, atunci unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}$ și $\vec{v}$ se reprezintă prin suplementul unghiului vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$, deoarece vectorul $x \cdot \vec{u}$ are sensul opus lui $\vec{u}$. Rezultă, pentru $x < 0$, $\cos (x\vec{u})\vec{v} = - \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}$, deci

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \|x \cdot \vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| (- \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = (-x) \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| (- \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Deci *avem, pentru orice doi vectori nenuli și orice număr real nenul* x,

$$\boxed{(x\vec{u}) \cdot \vec{v} = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}.$$

Această relație este evident verificată și în cazul în care unul din vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sau numărul x este nul. Deci formula scrisă este generală.

Exerciții

1. *Să se arate că, oricare ar fi punctele O, A, B, C, D într-un plan avem*

$$\vec{AB} + \vec{DC} \ (\text{în } O) = \vec{AC} + \vec{DB} \ (\text{în } O),$$
$$\vec{AC} + \vec{BD} \ (\text{în } O) = \vec{AD} + \vec{BC} \ (\text{în } O).$$

2. *Se dau punctele A, B, C, D. Să se construiască vectorii* $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CB}$ *(în D),* $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CB} + \vec{DA}$ *(în A),* $\vec{AC} + \vec{BD}$ *(în B),* $\vec{AD} + \vec{BC}$ *(în C).*

3. *Se dau punctele A, B, C, M astfel ca* $\vec{BM} \sim \vec{MC}$. *Să se construiască vectorii* $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ *(în M),* $\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{MA}$ *(în A),* $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{MA}$ *(în M),* $\vec{AC} - \vec{AB} + \vec{CM}$ *(în C).*

4. *Se dau punctele A, B, C, I, J astfel ca* $\vec{CI} \sim \vec{AB}$, $\vec{CJ} \sim \vec{BA}$. *Să se arate că punctele C, I, J sînt coliniare.*

5. *Fie M, N, G mijloacele segmentelor* $|AB|$, $|CD|$, $|MN|$ *dintr-un același plan. Să se arate că, oricare ar fi punctul O din acest plan,*

$$\vec{OA} + \vec{OB} \ (\text{în } O) = 2\vec{OM}, \ \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} \ (\text{în } O) = 4\vec{OG}.$$

6. *Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, să se arate că există un punct P astfel ca* $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} \in \vec{0}$.

7. *Fiind date două puncte A, B, să se determine dacă există punctele P, Q, R, S care verifică relațiile*

$$\vec{PA} + \vec{PB} \ (\text{în } A) = 2\vec{AB}, \ \vec{QA} - \vec{QB} \ (\text{în } A) = -\vec{AB}, \ \vec{RA} - \vec{RB} \ (\text{în } A) = \vec{AB},$$
$$2\vec{SA} - 3\vec{SB} \ (\text{în } A) = \vec{AB}.$$

În enunțurile următoare, $\vec{i}, \vec{j}$ *reprezintă doi versori ortogonali, avînd originea într-un punct O. Dacă P este un punct în planul vectorilor* $\vec{i}, \vec{j}$, *notația* $P(x, y)$ *va însemna că* x *și* y *sînt componentele vectorului de poziție* $\vec{OP}$ *față de axele avînd* $\vec{i}$ *și* $\vec{j}$ *ca versori, deci* $\vec{OP} \sim x\vec{i} + y\vec{j}$.

8. *Se dau punctele* $A(2, 2)$, $B(-3, -1)$, $C(3, -2)$.

a) *Notînd prin I mijlocul segmentului* $|AB|$, *să se determine componentele vectorului* $\vec{OI}$ *față de* $\vec{i}$ *și* $\vec{j}$.

b) *Fie M, N punctele de pe dreapta AB pentru care* $\vec{MB} = -4\vec{MA}$ *și* $\vec{NB} = 4\vec{NA}$. *Să se arate că*

$$5\vec{OM} = 4\vec{OA} + \vec{OB}, \ 3\vec{ON} = 4\vec{OA} - \vec{OB}.$$

c) *Fie G punctul de pe dreapta CI, pentru care* $\vec{GC} = -2\vec{GI}$. *Să se arate că* $3\vec{OG} = \vec{OC} + 2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. *Să se calculeze componentele vectorului* $\vec{OG}$.

9. *Se dau punctele* $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -2)$. *Fie I, J punctele care verifică relațiile* $3\vec{IA} + 5\vec{IB} = \vec{0}$, $3\vec{JA} - 5\vec{JB} = \vec{0}$. *Să se arate că* $8\vec{OI} = 3\vec{OA} + 5\vec{OB}$ *și* $-2\vec{OJ} = 3\vec{OA} - 5\vec{OB}$. *Să se determine componentele vectorilor* $\vec{OI}, \vec{OJ}$.

10. *Să se calculeze normele vectorilor* $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ *și produsele scalare* $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$, $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ *luînd pentru A, B, C punctele definite prin formulele:*

a) $A(0, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(2, 2)$,
b) $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 2)$,
c) $A(2, 3)$, $B(-4, 0)$, $C(0, 3)$,
d) $A(8, 0)$, $B(1, -2)$, $C(-3, 4)$.

11. *Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, notăm prin I și J, K, L mijloacele segmentelor* $|AB|$, *respectiv* $|CD|$, $|AD|$, $|BC|$.

a) *Să se arate că* $|IJ|$ *și* $|KL|$ *au același mijloc.*
b) *Ce fel de patrulater este figura ILJK, dacă ABCD este un patrulater?*
c) *Cum sînt punctele I, J, K, L în cazul în care figura ACBD este un patrulater?*
d) *Să se arate că, oricare ar fi punctele A, B, C, D în planul p, avem* $\vec{IL} \sim \vec{KJ}$ *și* $\vec{IK} \sim \vec{LJ}$.

12. *Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime egală cu unitatea. Să se calculeze produsul scalar* $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

13. *Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime 1 și fie* AA', $A' \in BC$, *înălțimea din A a acestui triunghi. Să se calculeze produsele scalare* $\vec{AA'} \cdot \vec{AB}$, $\vec{BA'} \cdot \vec{BA}$.

14. *Fie $ABCD$ un pătrat cu laturile de lungime 1. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.*

15. *Fie A, B, C trei vîrfuri consecutive ale unui hexagon convex regulat de laturi congruente cu etalonul m. Să se calculeze produsele scalare $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.*

2. Funcții trigonometrice

Fie într-un plan p triunghiul dreptunghic isoscel OAB, avînd $OA \perp OB$ și $|OA| \equiv |OB| \equiv m$, unde m este segmentul etalon.

Să considerăm vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Avem $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$ și $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

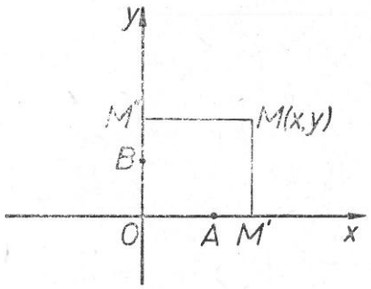

Fig. III.10

Spunem că vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează un *reper ortonormat* în planul p.

Dacă M este un punct oarecare din planul p, notăm prin M' proiecția ortogonală a lui M pe dreapta OA, iar prin M'' notăm proiecția ortogonală punctului M pe dreapta OB. Există un cuplu unic de numere reale (x, y), astfel încît să avem (fig. III. 10):

$$\overrightarrow{OM'} = x \cdot \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM''} = y \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Numerele x și y se numesc *coordonatele punctului* M față de reperul format de vectorii $\vec{a}, \vec{b}$; se spune că x este *abscisa* lui M, iar y este *ordonata* lui M față de reperul $(\vec{a}, \vec{b})$. Se scrie, dacă reperul $(\vec{a}, \vec{b})$ este fixat, $M(x, y)$ pentru a exprima că punctul M are coordonatele x și y.

Pentru orice cuplu (x, y) de numere reale, există un singur punct M în planul p, astfel ca x să fie abscisa lui M, iar y să fie ordonata lui M. Punctul M este dat de formula

(2) $\quad \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ (în O).

Formulele (1) și (2) stabilesc o aplicație bijectivă $\mathcal{C}$ de la mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a cuplurilor de numere reale la mulțimea punctelor din planul p, deci $\mathcal{C}: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to p$.

Considerînd semnele coordonatelor x și y, putem împărți planul p în patru cadrane, care coincid cu interioarele celor patru unghiuri drepte formate de dreptele OA, OB (fig. III.11):

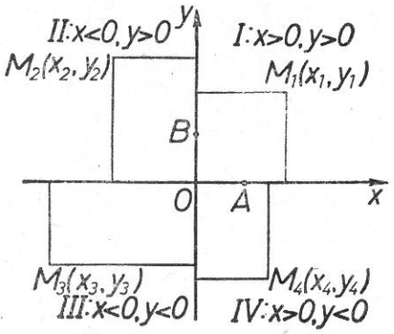

Fig. III.11

Cadranul I $= \{M(x, y);\ x > 0,\ y > 0\}$

23.10.74

Cadranul II $= \{M(x, y);\ x < 0,\ y > 0\}$
Cadranul III $= \{M(x, y);\ x < 0,\ y < 0\}$
Cadranul IV $= \{M(x, y);\ x > 0,\ y < 0\}$.

Planul p este egal, ca mulțime de puncte, cu reuniunea acestor patru cadrane și a dreptelor OA, OB. Avem $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Vom mai considera punctele $A'(-1, 0) \in OA$ și $B'(0, -1) \in OB$. Punctele A, A', B, B' se găsesc pe cercul de centru O și de rază 1, care va fi numit *cercul unitate* sau *cercul trigonometric* din planul p. Inegalitățile $y > 0$ și $y < 0$ definesc semiplanele limitate de dreapta OA în planul p; aceste semiplane vor fi numite *semiplanul superior* respectiv *semiplanul inferior* din planul p.

În primul capitol al acestui manual, am introdus funcțiile sinus și cosinus definite pe *mulțimea unghiurilor*. Vom defini acum funcții asemănătoare, dar definite pe *mulțimea numerelor reale*. Trecerea de la primul tip de funcții la tipul de funcții pe care le vom introduce acuma se face înlocuind fiecare unghi prin măsura sa în radiani. Dar noile funcții vor fi definite pe toată axa reală $\mathbf{R}$, deși măsura în radiani a unui unghi nu poate depăși numărul π, care corespunde unghiurilor alungite. Pentru a obține o astfel de *prelungire* a funcțiilor sinus și cosinus, în afara intervalului $[0, \pi]$, vom construi o aplicație surjectivă foarte importantă notată F, de la axa reală $\mathbf{R}$ la cercul C (avînd raza 1 și centrul în originea unui reper ortonormat $(\vec{a}, \vec{b})$ dintr-un plan p).

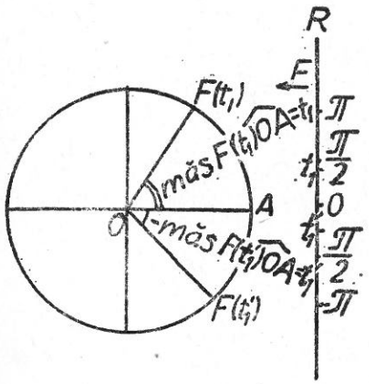

Fig. III.12

Definiție. Aplicația

$$F : R \to C$$

este definită prin următoarele proprietăți (fig. III. 12): 1) $F(t + 2\pi) = F(t)$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

2) Dacă $t \in (0, \pi)$, punctul $F(t)$ va fi acel punct al cercului C, situat în semiplanul superior și astfel ca măsura în radiani a unghiului $\widehat{F(t)OA}$ să fie egală cu t.

3) Punem apoi $F(0) = A$ și $F(\pi) = A'$ (fig. III.13).

4) Dacă $t \in (-\pi, 0)$, $F(t)$ va fi acel punct al cercului C, situat în semiplanul inferior și pentru care măsura în radiani a unghiului $\widehat{F(t)OA}$ este egală cu $-t$.

5) Punem $F(-\pi) = F(\pi) = A'$.

Potrivit acestei definiții, vom avea (fig. III.13)

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B, \quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'.$$

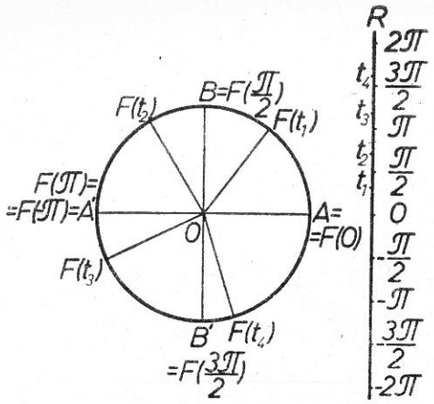

Fig. III.13

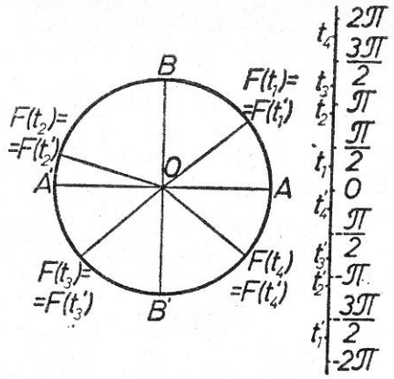

Fig. III.14

Dacă t este un număr real arbitrar, există un număr întreg k, astfel încît să avem $t + 2k\pi \in [0, 2\pi)$ și numărul k este determinat în mod unic prin această proprietate. Prin definiție (fig. III. 14):

$$F(t) = F(t + 2k\pi).$$

Dacă t este un număr pozitiv sau nul, să notăm prin k partea întreagă a raportului $t/2\pi$ și prin r diferența $t - 2k\pi$. Vom avea atunci

$$t = 2k\pi + r,\ r \in [0, 2\pi),\ k \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 0.$$

Dacă t este un număr negativ, considerăm numărul pozitiv $-t$ și scriem acest număr sub forma de mai sus:

$$-t = 2k\pi + r,\ r \in [0, 2\pi),\ k \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 0.$$

Vom avea atunci

$$t = -2k\pi - r = 2k'\pi + r',$$

unde,

$$k' = -k - 1,\ r' = 2\pi - r \in (0, 2\pi].$$

Rezultă că *orice număr real t poate fi scris sub forma*

(1) $$t = 2k\pi + r,\ k \in \mathbf{Z},\ r \in [0, 2\pi).$$

Exerciții:

1. *Să se scrie sub forma (1) numerele* 100, 200, ..., 1 000.

2. *Fie T, t două numere reale astfel ca $T > 0$. Să se arate că există o singură pereche de numere $k \in \mathbf{Z}$, $r \in [0, T)$ astfel ca să avem*

$$t = kT + r.$$

3. *Să se arate că funcția $F : \mathbf{R} \to C$ construită mai sus are următoarele proprietăți:*

1°. $F(0) = A$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B$, $F(\pi) = F(-\pi) = A'$, $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'$.

2°. *Aplicația F este periodică de perioadă 2π, adică avem*

$$F(t + 2\pi) = F(t),$$

pentru orice număr real t.

3°. *Dacă $|t| < \pi$, atunci punctul $M = F(t)$ este astfel încît măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOA}$ este egală cu $|t|$.*

4°. *Dacă t, t' sînt două numere reale astfel ca $|t - t'| < \pi$, atunci punctele $M = F(t)$, $M' = F(t')$ sînt astfel încît măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$ este egală cu $|t - t'|$,* (fig. III.15)

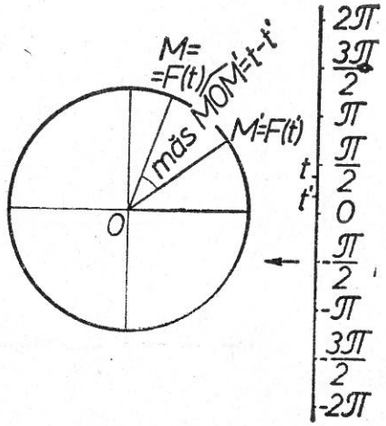

Fig. III.15

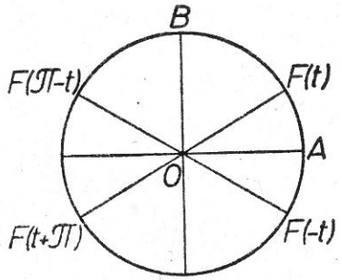

Fig. III.16

5°. *Oricare ar fi $t \in R$, avem:*

— *punctele $F(t)$, $F(\pi + t)$ sînt simetrice față de punctul O,* (fig. III.16).

— *punctele $F(t)$, $F(\pi - t)$ sînt simetrice față de dreapta OB.*

— *punctele $F(t)$, $F(-t)$ sînt simetrice față de dreapta OA.*

(*Indicație.* Pentru a verifica aceste proprietăți, putem presupune că $t \in [0, 2\pi]$, deoarece scăzînd din t un multiplu întreg convenabil de 2π, putem ajunge la această situație).

Aplicația F este surjectivă, dar nu este injectivă, deoarece F este o aplicație periodică. Se spune că F constituie *aplicația de acoperire universală* a cercului C; prin această aplicație, cercul C este acoperit de o infinitate de ori de dreapta reală; dacă J este un interval de lungime mai mică decît 2π, inclus în $\mathbf{R}$, atunci imaginea lui J prin F este un arc de cerc avînd aceeași lungime cu J. Deci restricțiile $F \mid J$ ale aplicației F, la intervale J, de lungimi mai mici decît 2π, sînt aplicații injective. Se spune că aceste intervale J sînt *intervale de injectivitate* ale aplicației F.

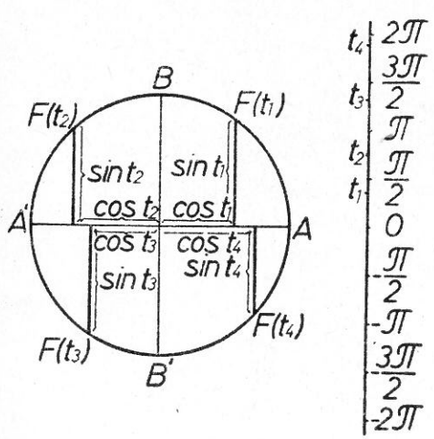

Fig. III.17

Cu ajutorul aplicației $F : \mathbf{R} \to C$ vom defini acum funcțiile (fig. III.17)

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1] \subset \mathbf{R},$$
$$\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1] \subset \mathbf{R}$$

punînd

(1) $$\overrightarrow{OF}(t) = \cos t\,\vec{a} + \sin t\,\vec{b}.$$

Deci, pentru fiecare număr $t \in \mathbf{R}$, numărul $\cos t$ este abscisa punctului $F(t)$, iar $\sin t$ este ordonata acestui punct.

Din relația $F(t) \in C$ rezultă că avem, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$,

(2) $$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Proprietățile de la punctul 1 arată că avem

(3) $$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0,\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Proprietatea 2 arată că *funcțiile sinus și cosinus sînt periodice cu perioada* 2π, deci avem, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$,

(4) $$\cos(t + 2\pi) = \cos t,\ \sin(t + 2\pi) = \sin t.$$

Proprietățile 3 și 4 arată că **sinusul unui unghi cu vîrful în punctul O este egal cu sinusul numărului real, care reprezintă lungimea arcului dat de intersecția interiorului acelui unghi cu cercul C.** O proprietate analoagă se poate arăta pentru funcția cosinus.

Proprietățile de la punctul 5 pot fi explicitate sub forma:

(5) $\cos(t + \pi) = -\cos t$, $\sin(t + \pi) = -\sin t$, (fig. III.18).

(6) $\cos(\pi - t) = -\cos t$, $\sin(\pi - t) = \sin t$, (fig. III.19).

(7) $\cos(-t) = \cos(t)$, $\sin(-t) = -\sin t$, (fig. III.20).

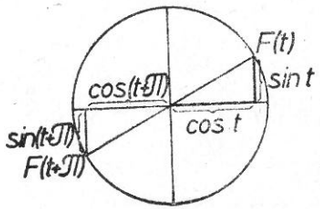

Fig. III.18

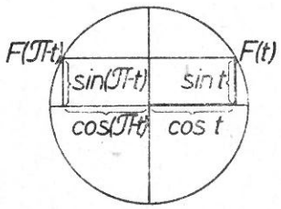

Fig. III.19

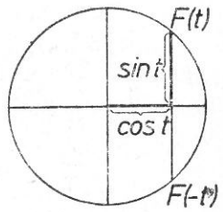

Fig. III.20

Să mai reținem următoarele consecințe imediate ale definițiilor date:

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = -1$, este formată din numerele $\pi + 2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = 0$, este formată din numerele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = 1$, este formată din numerele de forma $2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Am definit aplicația $F : \mathbf{R} \to C$ astfel ca, pentru orice $t \in (0, \pi)$, măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOF}(t)$ să fie egală cu t. Din felul în care am definit

funcțiile sinus și cosinus, odată pe mulțimea unghiurilor, și apoi pe dreapta reală, deducem că, pentru $t \in [0, \pi]$, avem

$$\cos \widehat{AOF}(t) = \cos t,\ \sin \widehat{AOF}(t) = \sin t.$$

Aceste relații permit să calculăm, pe cale geometrică, valorile funcțiilor sinus și cosinus.

De exemplu, dacă avem un triunghi echilateral PQR și dacă notăm prin M mijlocul laturii $|QR|$, atunci triunghiul PQM este dreptunghic și, considerînd măsuri în radiani ale unghiurilor indicate, avem (fig. III. 21)

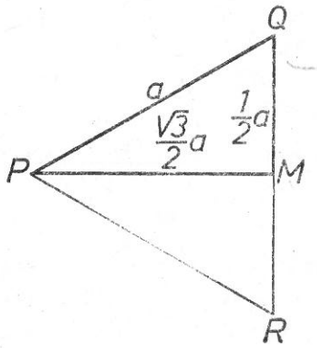

Fig. III.21

$$\text{măs}\ \widehat{PQM} = \frac{\pi}{3},\ \text{măs}\ \widehat{QPM} = \frac{\pi}{6}.$$

Pe de altă parte, dacă notăm prin a lungimea laturii $|PQ|$, atunci

$$d(P, Q) = a,\ d(M, P) = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ d(Q, M) = \frac{1}{2}a,$$

$$\sin \widehat{PQM} = \cos \widehat{QPM} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \widehat{QPM} = \cos \widehat{PQM} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă formulele

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Să considerăm acuma un triunghi dreptunghic isoscel LMN, avînd unghiul $\hat{L}$ drept și $|LM| \equiv |LN|$. În acest caz (fig. III.22),

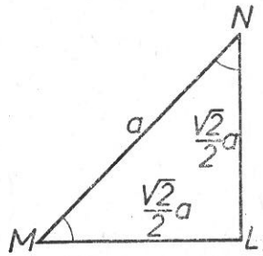

Fig. III.22

$$\text{măs}\ \widehat{LMN} = \text{măs}\ \widehat{LNM} = \frac{\pi}{4},$$

$$|MN| \equiv \sqrt{2}\,|LM| \equiv \sqrt{2}\,|LN|$$

și deducem

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercițiu. *Să se calculeze valorile funcțiilor sinus și cosinus corespunzătoare valorilor* $t = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}$.

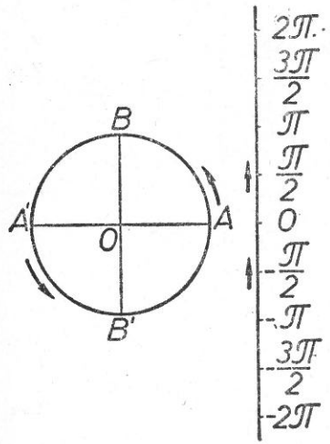

Fig. III.23

Să observăm că, dacă numărul t parcurge axa reală $\mathbf{R}$ de la $-\infty$ la $+\infty$, atunci punctul $F(t)$ descrie cercul C în sensul indicat de săgeată (fig. III.23). Dacă t parcurge semiaxa pozitivă $\mathbf{R}_+$, plecînd din O, $F(t)$ va merge de la A la B, apoi la A', la B', venind din nou în A și repetînd acest traseu de o infinitate de ori.

Funcția F, deci și funcțiile sinus și cosinus, sînt definite pe $\mathbf{R}$; Am arătat că $\sin(-t) = -\sin t$, deci *funcția sinus este o funcție impară*. Avem $\cos(-t) = \cos t$, deci *funcția cosinus este o funcție pară*.

Aplicații.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin(-\pi) = -\sin\pi = 0, \quad \cos(-\pi) = \cos\pi = -1,$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin(-2\pi) = -\sin(2\pi) = 0, \quad \cos(-2\pi) = \cos(2\pi) = 1.$$

Periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție numerică definită pe toată axa reală și fie T un **număr pozitiv.** Se spune că T este o *perioadă* pentru funcția f dacă avem, pentru orice număr $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t + T) = f(t);$$

dacă funcția f admite o perioadă T, se spune că f este o *funcție periodică* cu perioada T.

Am arătat că funcțiile sinus și cosinus sînt funcții periodice de perioadă $T = 2\pi$.

Dacă o funcție f este periodică de perioadă T, atunci f admite ca perioade fiecare multiplu întreg pozitiv de T, deoarece avem

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \ldots = f(t + pT) = \ldots, \quad (p \in \mathbf{N}).$$

Dacă știm că o funcție f este periodică de perioadă $T > 0$, se pune problema de a ști dacă nu cumva f admite o perioadă T', pozitivă, și mai mică decît T, sau dacă f nu admite și alte perioade, în afară de multiplii întregi pozitivi ai perioadei T. Este util să reținem următoarele proprietăți:

1. *Funcțiile sinus și cosinus nu admit nici o perioadă mai mică decît* 2π.

2. *Dacă o funcție f admite o perioadă T, dar nu admite nici o perioadă mai mică decît T, atunci singurele perioade ale funcției f sînt multiplii întregi pozitivi ai perioadei T.*

Demonstrația proprietății. 1. Să presupunem că funcția sinus ar admite o perioadă T', astfel ca $0 < T' < 2\pi$. Am avea atunci $\sin(t + T') = \sin t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$; în particular, am avea $\sin T' = \sin 0 = 0$. Dar singurul număr T', care satisface condițiile $0 < T' < 2\pi$, $\sin T' = 0$ este numărul π. Dar π nu este o perioadă pentru funcția sinus, deoarece $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$. Deci 2π *este cea mai mică perioadă a funcției sinus.*

Să presupunem că funcția cosinus ar admite o perioadă mai mică decît 2π. Fie T'' o astfel de perioadă. Am avea atunci $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos(t + T'') = \cos t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. În particular, $\cos T'' = \cos 0 = 1$. Dar nu există nici un număr real T'' astfel ca $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos T'' = 1$. Deci *cea mai mică perioadă a funcției cosinus este tot* 2π.

Demostrația proprietății 2. Să presupunem că T este cea mai mică perioadă a funcției f și fie T' o perioadă arbitrară a lui f. Avem atunci

$$f(t) = f(t + pT) = f(t + qT'),$$

oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$ și oricare ar fi întregii pozitivi p și q.

Fie m cel mai mare număr întreg pozitiv, pentru care avem $mT < T'$. În acest caz, $T'' = T' - mT$ este un număr pozitiv mai mic decît T. Pentru orice număr real t, vom avea

$$f(t + T'') = f(t + T' - mT) = f(t - mT + T') = f(t - mT)$$

și rezultă

$$f(t) = f(t - mT + mT) = f(t - mT) = f(t + T'')$$

deci T'' este o perioadă a funcției f, dacă $T'' \neq 0$. Dar $T'' < T$ și f nu admite perioade mai mici decît T. Deci avem $T'' = 0$ și $T' = mT$. Deci orice perioadă a funcției f este un multiplu întreg pozitiv al perioadei minime T.

Aplicînd ultima proprietate funcțiilor sinus și cosinus, deducem că singurele perioade ale acestor funcții sînt multiplii întregi pozitivi ai numărului 2π.

Dacă o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admite o perioadă minimă, se spune că această perioadă este *perioada principală* a funcției f.

Să observăm că dacă o funcție f admite perioada T, atunci avem, pentru orice $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t - T) = f(t)$$

deoarece putem scrie $f(t) = f(t - T + T) = f(t - T)$. Avem prin urmare

$$f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = \ldots = f(t \pm pT) = \ldots,$$

deci pentru orice întreg n și pentru orice număr real t,

$$f(t + nT) = f(t) \quad (t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}).$$

Aplicînd această observație funcțiilor sinus și cosinus, putem scrie

$$\sin(t + 2n\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2n\pi) = \cos t.$$

În particular, să reținem formulele:

$$\sin(2n\pi) = 0, \quad \cos(2n\pi) = 1, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Aplicații. **1.** *Să se determine perioada principală a funcției*

$$f : \mathbf{R} \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin(2x) = \sin 2x.$$

Soluție. Din condiția de periodicitate $f(x + T) = f(x)$ deducem $\sin(2x + 2T) = \sin(2x)$; această condiție trebuie să fie îndeplinită pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Punînd $2x = t$, deducem $\sin(t + 2T) = \sin t$; din proprietățile stabilite anterior deducem $2T = 2\pi$, sau $T = \pi$. Deci perioada principală a funcției date este π.

2. *Generalizare.* Să *determinăm perioada principală a funcției*

$$g : \mathbf{R} \to [-1, 1], \quad g(x) = \sin(mx) = \sin mx,$$

unde m este un număr real diferit de zero.

Procedînd ca în cazul precedent, obținem condiția $\sin(mx + mT) = \sin(mx)$ sau $\sin(t + mT) = \sin t$, care trebuie să fie verificată pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Cel mai mic număr pozitiv T, care verifică această condiție, este $T = 2\pi/m$.

3. *Ne propunem acum să determinăm perioada principală a funcției*

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h(x) = \sin 4x + \cos 6x.$$

Dacă T este o perioadă pentru h, avem

$$\sin (4x + 4T) + \cos(6x + 6T) = \sin 4x + \cos 6x,\ x \in \mathbf{R}.$$

Luînd $x = 0$ și apoi $x = \frac{\pi}{2}$ obținem ecuațiile

$$\sin 4T + \cos 6T = 1,\ \sin 4T - \cos 6T = -1,$$

din care rezultă $\sin 4T = 0$ și $\cos 6T = 1$. Cel mai mic număr pozitiv care verifică aceste relații este $T = \pi$. Se verifică că π este într-adevăr o perioadă a funcției h și rezultă că π este perioada principală.

Exerciții

1. *Să se determine perioadele principale ale următoarelor funcții numerice, definite pe* $\mathbf{R}$:
$f(x) = \sin 3x - \cos 5x$, $g(x) = \sin 5x - \sin 7x + \cos 10x - \cos 14x$.

2. *Să se arate că funcția* $h(x) = \sin x + \cos(\sqrt{2}\, x)$ *nu este periodică.*

Observație importantă. Dacă știm despre o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ că admite o perioadă T, pentru a studia comportarea funcției f va fi suficient a ne limita să studiem comportarea funcției f pe un interval oarecare de lungime T, deci pe un interval de forma $[a, a + T)$. Într-adevăr, oricare ar fi numărul t, există un întreg n astfel ca $t - nT$ să aparțină intervalului considerat și, în plus, $f(t) = f(t - nT)$. Dacă de exemplu vrem să determinăm valorile lui t pentru care avem $f(t) = 0$, va fi suficient să găsim valorile care verifică această condiție și care se găsesc în intervalul $[a, a + T)$. Orice altă valoare a lui t, pentru care $f(t) = 0$, se va obține dintr-una din valorile găsite în intervalul considerat, adăugînd multiplii întregi ai perioadei T.

În același mod, pentru a obține punctele t în care funcția f are o anumită valoare y, va fi suficient să determinăm punctele cu această proprietate, care aparțin intervalului considerat. În particular, putem afla în acest fel punctele t, pentru care $f(t)$ este o valoare de maxim sau de minim.

Exercițiu. *Să se determine valorile lui t pentru care funcția* **sinus** *are una din valorile* -1, $-\sqrt{3}/2$, $-1/2$, $-\sqrt{2}/2$, $1/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, 1, 0.

3. Formule de reducere la primul cadran

Folosind periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus, am redus problema determinării valorilor acestor funcții la aceea a determinării valorilor restricțiilor funcțiilor sinus și cosinus la intervalul $[0, 2\pi)$.

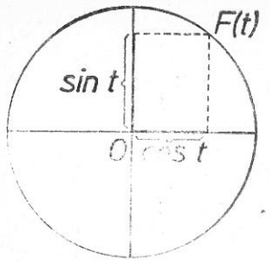

Fig. III.24

Folosind proprietățile de simetrie ale aplicației $F : \mathbf{R} \to C$ și ținînd seama de faptul că punctul $F(t)$ are coordonatele $(\cos t, \sin t)$, putem reduce mai departe studiul valorilor funcțiilor sinus și cosinus (fig. III. 24) restrîngînd aceste funcții la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pentru valorile lui t cuprinse în acest interval, punctul $F(t)$ se va găsi în primul cadran, dacă exceptăm valorile extreme 0 și $\pi/2$, care dau punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

Formula $\overrightarrow{OF(t+\pi)} = -\overrightarrow{OF(t)}$ permite să considerăm numai puncte t din intervalul $[0, \pi)$, care dau puncte $F(t)$ aparținînd primelor două cadrane, dacă exceptăm punctele A, B. Dacă $t \in [\pi, 2\pi)$, putem calcula $\cos t$ și $\sin t$ folosind relațiile

$$\cos t = -\cos(t - \pi),\ \sin t = -\sin(t - \pi),$$

în care $t - \pi \in [0, \pi)$. Mai departe, dacă avem un număr u în intervalul $[\pi/2, \pi)$, putem calcula numerele $\cos u$ și $\sin u$ din relațiile

$$\cos u = -\cos (\pi - u),\ \sin u = \sin (\pi - u),$$

în care $\pi - u \in (0, \pi/2]$.

Formulele

$$\cos t = \sin(\pi/2 - t),\ \sin t = \cos(\pi/2 - t)$$

arată în sfîrșit că, pentru a cunoaște toate valorile funcțiilor sinus și cosinus, este suficient să cunoaștem valorile pe care le iau aceste funcții în punctele intervalului $[0, \pi/4]$.

Aplicații. Din observațiile făcute anterior, deducem formulele

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4},\quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4},$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4},\quad \cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4},$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4},\quad \cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\sin \pi = \sin 0 = 0,\ \cos \pi = -\cos 0 = -1.$$

4. Reprezentarea grafică a funcției sinus

Să considerăm, într-un plan p, un reper ortonormat $(\vec{a}, \vec{b})$, format din vectorii unitari și ortogonali $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Fiecare punct P din planul p

va fi determinat de un cuplu (x, y) de numere reale, astfel ca (fig. III.25)

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Ne propunem să trasăm locul geometric al punctelor P avînd coordonatele de forma $x = t$, $y = \sin t$; din aceste ecuații deducem $y = \sin x$. Acest loc geometric reprezintă graficul funcției sinus în planul p.

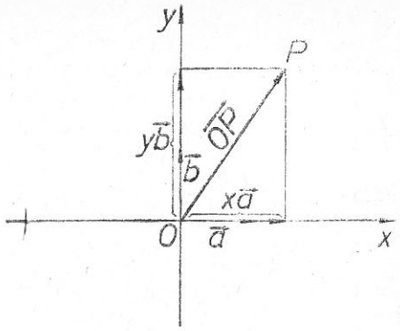

Fig. III.25

Să împărțim axa OA în intervale de lungimi egale cu 2π și avînd extremitățile în punctele $M_k(2k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, (fig. III.26).

Punctele M_k aparțin locului geometric considerat, deci graficului funcției sinus. Funcția sinus fiind periodică de perioadă 2π, graficul acestei funcții este format dintr-o infinitate de arce S_k avînd extremitățile în cîte două puncte

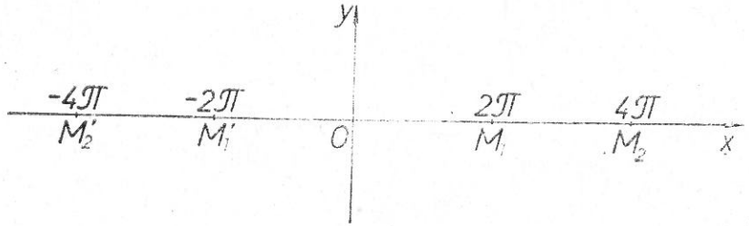

Fig. III.26

consecutive M_{k-1}, M_k. Arcul S_k constituie reprezentarea grafică a restricției funcției sinus la intervalul $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$ și fiecare din arcele S_k se poate obține din arcul S_1 printr-o translație de-a lungul axei OA, anume prin translația

$$y' = y, \quad x' = x + 2(k-1)\pi.$$

Deci arcele S_k sînt congruente două cîte două, în particular, ele sînt congruente cu arcul S_1.

Această observație arată că este suficient să trasăm graficul funcției sinus restrînsă la intervalul $[0, 2\pi]$, deci este suficient să trasăm arcul S_1.

Cînd x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[-1, 1]$ în ambele sensuri, după cum urmează (fig. III. 27):

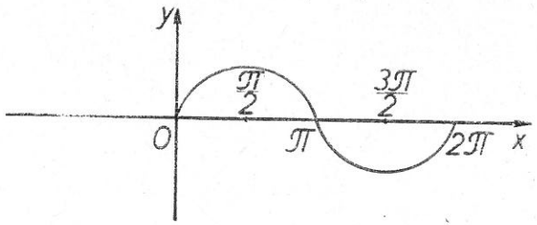

Fig. III.27

Pentru $x = 0$, $\sin x = 0$. Cînd x parcurge subintervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[0, 1]$ crescînd de la 0 la 1. Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ are valoarea maximă 1. Cînd x trece în intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ funcția sinus devine descrescătoare, numărul $\sin x$ coborînd de la valoarea maximă 1 la valoarea 0. În intervalul următor $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, funcția sinus continuă să descrească, valorile ei coborînd de la 0 la -1, care este valoarea minimă pe care poate s-o ia funcția sinus. De la această valoare minimă, numărul $\sin x$ începe să crească din nou, mergînd de la -1 la 0, ajungînd la 0 pentru $x = 2\pi$.

Figura III. 28 reprezintă graficul funcției sinus prelungită în afara intervalului $[0, 2\pi]$. Ne putem imagina acum forma întregului grafic.

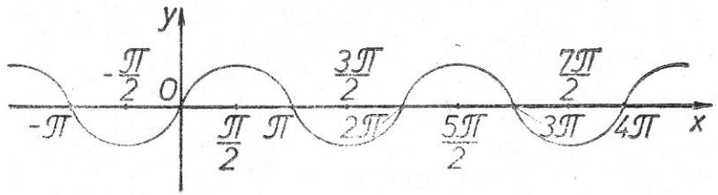

Fig. III.28

Intervale de monotonie. Din indicațiile date, rezultă că funcția sinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Dimpotrivă, funcția sinus este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

Aplicație. Să se afle semnul diferenței $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{11}$.

Se observă că $\frac{\pi}{11} < \frac{\pi}{9}$ și că numerele $\frac{\pi}{11}$, $\frac{\pi}{9}$ aparțin intervalului $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pe care funcția sinus este crescătoare. Avem deci $\sin\frac{\pi}{11} < \sin\frac{\pi}{9}$ și $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{11} > 0$.

Semnul funcției sinus.

Din observațiile făcute, deducem că funcția sinus este pozitivă pe fiecare interval deschis $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, unde $k \in \mathbf{Z}$ și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval deschis $(\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

A p l i c a ţ i e. Să se afle semnul expresiei

$E = \sin\frac{\pi}{9} \sin\frac{11\pi}{9} \sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) \sin\frac{23\pi}{7} \sin 3 \sin 5.$

Soluţie. Avem $\frac{\pi}{9} \in (0, \pi)$, deci $\sin\frac{\pi}{9} > 0$; $\frac{11\pi}{9} \in (\pi, 2\pi)$, $\sin\frac{11\pi}{9} < 0$, $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\frac{8\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$, $\sin\frac{8\pi}{7} < 0$; $\frac{23\pi}{7} \in (3\pi, 4\pi)$, $\sin\frac{23\pi}{7} < 0$; $3 \in (0, \pi)$, $\sin 3 > 0$; $5 \in (\pi, 2\pi)$, $\sin 5 < 0$.

Rezultă $E < 0$.

A p l i c a ţ i e. Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbf{R} \to [-2, 2]$, $f(x) = 2\sin x$.

Soluţie. Funcţia f are aceeaşi perioadă şi aceleaşi intervale de monotonie cu funcţia sinus. Graficul lui f se obţine din graficul funcţiei sinus printr-o *dilatare* în lungul axei OB. Graficul funcţiei f intersectează axa OA în punctele $M_k(k\pi, 0)$ şi are punctele de maxim $L_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\right)$ şi punctele de minim $L'_k\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -2\right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Graficul funcţiei f este reprezentat în figura III. 29.

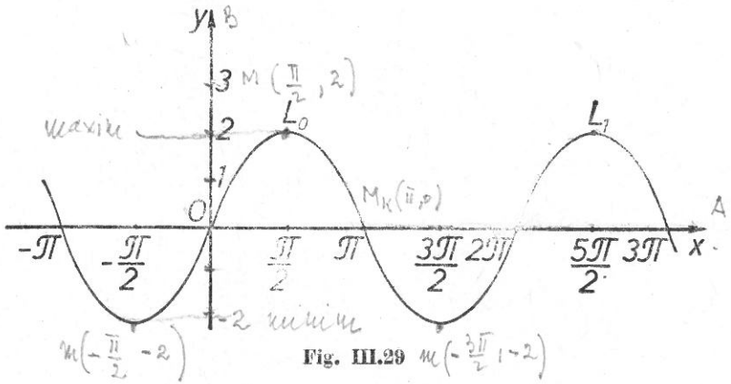

Fig. III.29

A p l i c a ţ i e. Să se reprezinte grafic funcţia $g : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $g(x) = \sin 2x$.

Soluţie. Funcţia g este periodică de perioadă π. Dacă $(x, y = \sin 2x)$ este un punct al graficului funcţiei g, atunci punctul $(2x, \sin 2x)$ va fi un punct al graficului funcţiei sinus. Deci graficul funcţiei g se obţine din graficul funcţiei sinus efectuînd o *contracţie* de-a lungul axei OA. Graficul funcţiei g intersectează axa OA în punctele $P_k\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Valoarea maximă a funcţiei g este 1 şi este atinsă în punctele de abscise $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, iar valoarea

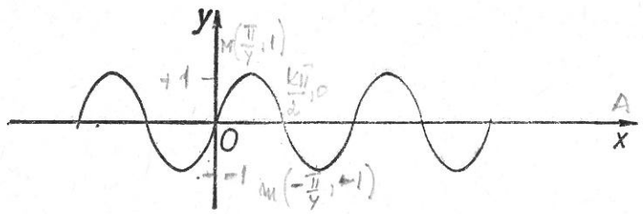

Fig. III.30

minimă este atinsă în punctele de abscise $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Reprezentarea grafică a funcţiei g este dată în figura III. 30.

5. Reprezentarea grafică a funcţiei cosinus

Pentru orice număr real x avem $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$. Rezultă că, din orice punct $(x, y = \cos x)$ al graficului funcţiei cosinus, se obţine un punct al graficului funcţiei sinus, făcînd o translaţie de-a lungul axei OA, punînd $x' = x + \frac{\pi}{2}$, $y' = y$. Într-adevăr, dacă $y' = \sin x'$, atunci $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Deci putem obţine graficul funcţiei cosinus, considerînd graficul funcţiei sinus şi mutînd axa OB, paralel cu ea însăşi, din punctul $O(0, 0)$ în punctul $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Figura III. 31 reprezintă graficul funcţiei cosinus.

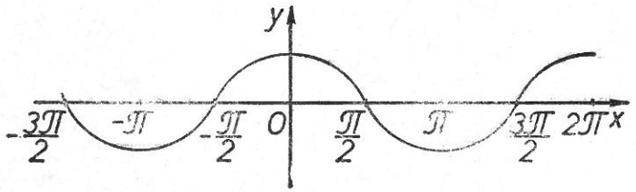

Fig. III.31

Acest grafic intersectează axa OA în punctele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; punctele de maxim au coordonatele $(2k\pi, 1)$, $k \in \mathbf{Z}$, iar punctele de minim au coordonatele $(2k\pi + \pi, -1)$.

Funcţia cosinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$, şi este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

A p l i c a ţ i e. Să se stabilească semnele expresiilor

$E_1 = \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{5}$, $E_3 = \cos\frac{9\pi}{7} - \cos\frac{8\pi}{7}$.

Soluție. Avem $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5} \in (0, \pi)$ și $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$. Funcția cosinus fiind descrescătoare pe intervalul $(0, \pi)$, avem $E_1 < 0$.

Pentru a doua expresie, observăm că $\frac{8\pi}{7} < \frac{9\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$; pe acest interval, funcția cosinus este crescătoare, deci $E_2 > 0$.

Semnul funcției cosinus. Din reprezentarea grafică a funcției cosinus rezultă că această funcție este pozitivă pe orice interval deschis de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval de forma $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Exercițiu. *Să se afle semnul numărului* cos 1 234.

6. Formule de adunare și scădere

Fie u și v două unghiuri ascuțite, astfel ca suma $u + v$ să fie reprezentată de asemenea prin unghiuri ascuțite. Să construim, într-un plan p, trei semidrepte h, k, m cu aceeași origine astfel ca acestea să formeze unghiurile adiacente $\widehat{hk} \equiv u$ și $\widehat{km} \equiv v$. În acest caz, unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, $\widehat{hm}$ vor fi unghiuri ascuțite și semidreapta k va fi interioară unghiului $\widehat{hm}$, (fig. III. 32).

Să alegem un punct arbitrar $B \in m$ și să construim punctele $C \in k$, $B' \in h$, $C' \in h$ astfel ca

(1) $$BC \perp OC, \quad CC' \perp OC', \quad BB' \perp OB'.$$

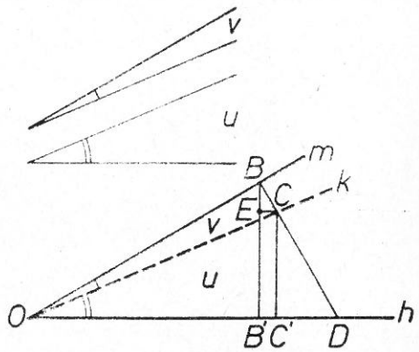

Fig III.32.

Dreapta BC intersectează semidreapta h într-un punct D, astfel încît:

(2) $$B' \in |OD|, \quad B' \in |OC'|, \quad C' \in |B'D|.$$

Aplicînd de mai multe ori teorema proiecției, obținem relațiile

(3) $$|OB'| \equiv |OB| \cos\widehat{hm} \equiv |OB| \cos(u + v),$$

(4) $$|OC| \equiv |OB| \cos\widehat{km} \equiv |OB| \cos v,$$

(5) $$|OC'| \equiv |OC| \cos\widehat{hk} \equiv |OB| \cos v \cos u,$$

(6) $$|B'C'| \equiv |BC| \cos \widehat{BDB'}, \quad |BC| \equiv |OB| \cos\widehat{OBC}.$$

Din triunghiurile dreptunghice OCD și OBC rezultă

$$\cos\widehat{BDB'} = \cos\widehat{BDO} = \sin\widehat{COD} = \sin u,$$

$$\cos\widehat{OBC} = \sin\widehat{COB} = \sin v,$$

astfel încît formulele (6) pot fi scrise sub forma

(7) $$|B'C'| \equiv |BC| \sin u \equiv |OB| \sin v \sin u.$$

Din relațiile de ordonare (2) rezultă formula

$$|OC'| \equiv |OB'| + |B'C'|$$

iar egalitățile (3), (5) și (7) dau

(8) $$|OB| \cos u \cos v = |OB| \cos (u + v) + |OB| \sin u \sin v.$$

Avem deci egalitatea $\cos u \cos v = \cos(u + v) + \sin u \sin v$ sau

(9) $$\boxed{\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v.}$$

Demonstrația care ne-a condus la relația (9) este valabilă ori de cîte ori unghiurile u, v și $u + v$ sînt ascuțite.

Dacă unghiurile u și v sînt ascuțite, dar unghiul $u + v$ este obtuz, deci dacă avem situația din figura III. 33, atunci vom avea $O \in |B'C'|$ și, notînd prin w unghiul $\widehat{BOB'}$, care este suplementul unghiului $\widehat{hm} = \widehat{BOD}$, avem

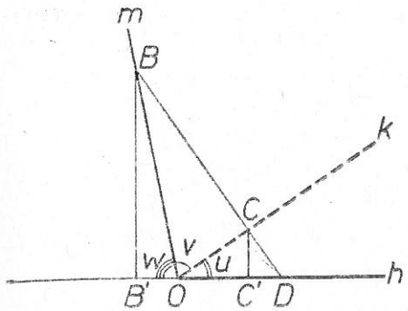

Fig. III.33

(10) $$O \in |B'C'|, \quad \cos w = -\cos(u + v).$$

Aplicînd din nou, de mai multe ori teorema proiecției, vom avea

$$|OB'| \equiv |OB| \cos w, \quad |OC'| \equiv |OC| \cos u \equiv |OB| \cos v \cos u,$$

$$|B'C'| \equiv |BC| \cos \widehat{BDB'} \equiv |OB| \sin v \sin u$$

și rezultă egalitatea

$$|OB| \sin u \sin v \equiv |OB'| + |OC'| \equiv |OB| (\cos w + \cos u \cos v)$$

sau

$$\sin u \sin v = \cos w + \cos u \cos v.$$

Avem deci

$$\cos(u + v) = -\cos w = \cos u \cos v - \sin u \sin v,$$

și rezultă că egalitatea (9) este adevărată și în cazul în care u și v sînt unghiuri ascuțite, iar $u + v$ este unghi obtuz.

Dacă $u + v$ este un unghi drept, atunci $\cos (u + v) = 0$, $\cos u = \sin v$ și $\cos v = \sin u$, astfel încît egalitatea (9) rămîne adevărată.

23.10.74

Dacă u şi v sînt unghiuri astfel încît u este obtuz sau drept şi dacă suma $u + v$ este definită, deci dacă sîntem în situaţia ilustrată în figura III. 34, atunci vom avea relaţiile de ordonare

(11) $\quad C' \in |OB'|,$
$\quad B' \in |OD|, \quad C' \in |OD|.$

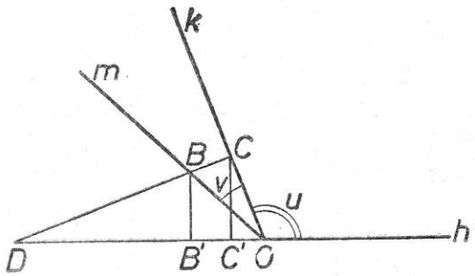

Fig. III.34

Exerciţiu. *Să se demonstreze egalitatea* (9) *în condiţiile* (11).

Formula (9) este adevărată ori de cîte ori u şi v sînt unghiuri astfel încît suma $u + v$ este definită. Dacă $u + v$ este un unghi alungit, atunci unghiurile u şi v sînt suplementare şi avem

$$\cos u = -\cos v, \ \sin u = \sin v, \ \cos(u + v) = -1$$

astfel încît formula (9) este de asemenea adevărată.

Formula (9) permite calculul cosinusului sumei a două unghiuri, cunoscînd sinusurile şi cosinusurile celor două unghiuri.

Ne propunem să stabilim o formulă analoagă pentru sinusul sumei a două unghiuri.

Vom considera separat fiecare din cazurile pe care le-am distins anterior pentru calculul cosinusului sumei $u + v$.

În cazul figurii III. 32, deci în cazul în care unghiurile u, v şi $u + v$ sînt ascuţite, avem

$|BB'| \equiv |OB| \sin(u + v)$, $|CC'| \equiv |OC| \sin u \equiv |OB| \cos v \sin u$, $|BC| \equiv |OB| \sin v$.

Dacă notăm prin E proiecţia ortogonală a punctului C pe dreapta BB', vom avea $E \in |BB'|$ şi

$|B'E| \equiv |CC'|$, $|BB'| \equiv |BE| + |B'E|$, $|BE| \equiv |BC| \cos \widehat{CBE} \equiv |BC| \cos u$.

Rezultă formula

$|OB| \sin(u + v) = |CC'| + |BE| = |OB| \sin u \cos v + |OB| \sin v \cos u$

şi avem deci

(12) $$\boxed{\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u}$$

Exerciţiu. *Să se demonstreze egalitatea* (12) *în cazurile în care unghiul u sau unghiul v este ascuţit şi în cazul în care unghiurile u, v sînt suplementare.*

Formula (12), este valabilă pentru orice unghiuri u şi v, pentru care suma v este definită, şi permite calculul sinusului sumei $u + v$ în funcţie de sinusurile şi cosinusurile unghiurilor u şi v.

$\sqrt{9} \times \sqrt{36} = \sqrt{\frac{324}{224}} \frac{18}{28+8}$ $\quad \sin u+v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Să reţinem deci formulele

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(u + v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v, \\ \sin(u + v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v, \end{aligned}}$$

23.10.74

adevărate pentru orice două unghiuri u şi v, pentru care suma $u + v$ este definită.

Aplicaţii. Am arătat că

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rezultă, folosind formulele scrise mai sus,

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \sin 45° \cos 30° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}.$$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pentru a da o altă aplicaţie să observăm că, din formula (9) rezultă dacă presupunem $v = u =$ unghi ascuţit,

$$\cos 2u = \cos u \cos u - \sin u \sin u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1.$$

Din ultima egalitate deducem formula

(14) $$\cos u = \sqrt{\frac{1 + \cos 2u}{2}}, \quad \left(u \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Am ţinut seama de faptul că, unghiul u fiind ascuţit, cosinusul său trebuie să fie pozitiv.

Să presupunem în ultima formulă că u este un unghi de 15°, deci că $2u$ este un unghi de 30°. În acest caz, vom avea $\cos 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi formula (14) dă

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Exerciţii

1. *Să se calculeze* sin 15°. **R.** $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.
2. *Să se calculeze* cos (22°30′) *şi* sin (22°30′), *apoi* cos 7°30′, sin 7°30′.

Fie a şi b două numere reale. Am arătat că există două numere întregi m şi n astfel ca numerele $a' = a - 2m\pi$, $b' = b - 2n\pi$ să aparţină intervalului $[0, 2\pi)$, deci astfel ca să avem

(1) $$a = a' + 2m\pi, \ 0 \leqslant a' < 2\pi, \ b = b' + 2n\pi, \ 0 \leqslant b' < 2\pi.$$

De exemplu, dacă a este un număr pozitiv, împărțim numărul a la 2π și notăm cu m partea întreagă a citului, iar prin a' restul. Dacă a este un număr negativ, $-a$ va fi pozitiv și avem o relație de forma $-a = a^* + 2h\pi$, unde $0 \leqslant a^* < 2\pi$ și $h \in \mathbf{Z}$, $h \geqslant 0$. Vom putea scrie atunci, dacă $a^* > 0$,

$$a = -a^* - 2h\pi = (2\pi - a^*) + 2m\pi, \quad m = -h - 1.$$

Deci relațiile (1) pot fi într-adevăr realizate.

Fiecare din numerele a', b' se va găsi într-unul din intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Aceasta înseamnă că există numere naturale p și q, cel mult egale cu 3, astfel ca să avem

(2) $$a'' = a' - p\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \quad b'' = b' - q\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Din formulele (1) rezultă că avem

(3) $$\cos a = \cos a', \quad \sin a = \sin a', \quad \cos b = \cos b', \quad \sin b = \sin b',$$

(4) $$\cos(a + b) = \cos(a' + b'), \quad \sin(a + b) = \sin(a' + b').$$

Dacă în formulele (2) avem $p = q = 0$, atunci există unghiuri ascuțite u și v, astfel ca măsurile în radiani ale unghiurilor u, v, $u + v$ să fie egale cu numerele a', b', $a' + b'$. Avem atunci

(5) $$\cos a' = \cos u, \quad \sin a' = \sin u, \quad \cos b' = \cos v, \quad \sin b' = \sin v,$$

(6) $$\cos(a' + b') = \cos(u + v), \quad \sin(a' + b') = \sin(u + v).$$

Din formulele (3) — (6) și din formulele cunoscute pentru unghiuri deducem egalitățile

(7) $$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

(8) $$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

În cazul general, vom avea formulele analoage pentru a'' și b'', deoarece aceste numere aparțin intervalului $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; deci putem scrie

(9) $$\cos(a'' + b'') = \cos a'' \cos b'' - \sin a'' \sin b'',$$

(10) $$\sin(a'' + b'') = \sin a'' \cos b'' + \cos a'' \sin b''.$$

Pentru a arăta că formulele (7) și (8) sînt generale, deci că sînt adevărate pentru orice valori date variabilelor a și b, este suficient să arătăm că:

Dacă formulele (7) și (8) sînt verificate de numerele a și b, atunci ele vor fi verificate și de numerele $a' = a + \frac{\pi}{2}$ și b.

Demonstrație. Ne vom sprijini pe identitățile generale

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t, \quad \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t.$$

Avem, ținînd seama de aceste identități și de formulele (7) și (8),

$$\cos(a' + b) = \cos\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a + b) = -\sin a \cos b - \cos a \sin b =$$
$$= \cos a' \cos b - \sin a' \sin b,$$

$$\sin(a' + b) = \sin\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b =$$
$$= \sin a' \cos b + \cos a' \sin b.$$

Rezultă că formulele (7) și (8) sînt verificate și de numerele a' și b. Repetînd raționamentul, vom arăta că aceste formule sînt verificate de fiecare din perechile de numere

$$(a'', b''), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 2\frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b''\right),$$

$$\left(a'', b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(a'', b'' + \pi), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right), (a'' + \pi, b'' + \pi), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right),$$

$$\left(a'', b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{3\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right)$$

În rezumat, putem enunța următorul rezultat fundamental:
Oricare ar fi numerele reale a și b, avem

(11) $$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

(12) $$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Dacă în aceste identități punem $b = -b'$, obținem identitățile:

(13) $$\sin(a - b') = \sin a \cos b' - \cos a \sin b'.$$

(14) $$\cos(a - b') = \cos a \cos b' + \sin a \sin b'.$$

Aceste formule permit să se calculeze sinusurile și cosinusurile sumei și diferenței a două unghiuri, cunoscînd sinusurile și cosinusurile celor două unghiuri.

Aplicații. 1. *Să se arate ce devin formulele precedente, cînd luăm:*

$$a = 0, \quad a = \frac{\pi}{2}, \quad a = \pi, \quad a = 2\pi$$

sau

$$b' = 0, \quad b' = \frac{\pi}{2}, \quad b' = \pi, \quad b' = 2\pi.$$

Soluție. Se obțin formulele cunoscute

$$\sin(-v) = -\sin v, \quad \cos(-v) = \cos v, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \cos v,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \mp \sin v, \quad \sin(\pi \pm v) = \mp \sin v, \quad \cos(\pi \pm v) = -\cos v,$$

$$\sin(2\pi \pm v) = \pm \sin v, \quad \cos(2\pi \pm v) = \cos v,$$

$$\sin\left(u-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos u,\ \cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)=\sin u,$$

$$\sin(u-\pi)=-\sin u,\ \cos(u-\pi)=-\cos u,$$

$$\sin(u-2\pi)=\sin u,\ \cos(u-2\pi)=\cos u.$$

2. *Să se calculeze* $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$ și $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Soluție. Avem $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, deci $\sin\frac{\pi}{12}=$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

3. *Să se arate că* $\sin(u+v)\cos u-\cos(u+v)\sin u=\sin v$ și $\cos(u+v)\cos u+\sin(u+v)\sin u=\cos v$.

Soluție. Avem $v=(u+v)-u$, $\sin v=\sin[(u+v)-u]$. Aplicînd formula (13), se obține prima relație. A doua relație se va obține aplicînd formula (14).

7. Funcțiile tangentă și cotangentă

Funcția tangentă. Să notăm prin M mulțimea numerelor reale de forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$, unde $k\in\mathbf{Z}$. Pentru fiecare număr $x\notin M$, dreapta $OF(x)$ intersectează dreapta D, trecînd prin punctul A (1, 0) și paralelă la OB, într-un punct T (fig. III. 35; 36) care are coordonatele de forma $(1, u)$. Punctul T depinde de x, deci u este o funcție de x. Această funcție este definită pe mulțimea $\mathbf{R}-M$ și are valori în $\mathbf{R}$. Se scrie $u=tg\ x$ și se spune că aplicația $x\to u$ este *funcția tangentă*. Avem deci

$$tg:\mathbf{R}-M\to\mathbf{R},\ M=\{\tfrac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

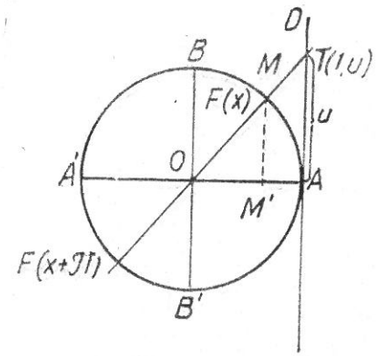

Fig. III.35

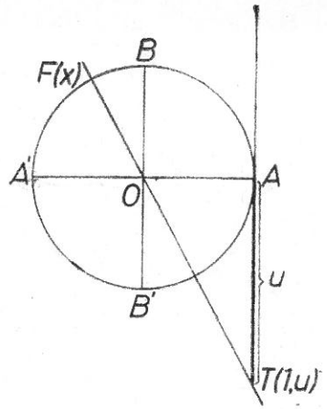

Fig. III.36

Funcția tangentă are valori pozitive cînd punctul $F(x)\in C$ se găsește fie în cadranul I, fie în cadranul III, deci tg x este un număr pozitiv dacă $\sin x$ și $\cos x$ au același semn. Funcția tangentă are valori negative pentru acei $x\in\mathbf{R}-M$, pentru care punctul $F(x)$ se găsește în unul din cadranele II sau IV, deci cînd $\sin x$ și $\cos x$ au semne contrare.

Din triunghiurile asemenea OAT și $OM'M$, unde $M=F(x)$ și $M'(\cos x, 0)$ este proiecția lui M pe axa OA, deducem, ținînd seama că $d(O, A)=1$, (fig. III. 35)

$$u=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x} \tag{1}$$

Formula (1) arată cum se exprimă funcția tangentă cu ajutorul funcțiilor sinus și cosinus. Observăm că valorile lui x, în care se anulează numitorul fracției $\frac{\sin x}{\cos x}$, sînt tocmai elementele mulțimii M, care a fost exclusă din definiția funcției tangentă.

Să notăm prin N mulțimea formată din punctele x, în care se anulează funcția sinus. Putem defini *funcția cotangentă*

$$\operatorname{ctg}:\mathbf{R}-N\to\mathbf{R},\ N=\{k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}$$

punînd

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}. \tag{2}$$

Această funcție ia valori pozitive cînd $\sin x$ și $\cos x$ au același semn și ia valori negative, cînd $\sin x$ și $\cos x$ au semne contrare. Deci numerele tg x și ctg x au același semn, pentru orice $x\in\mathbf{R}-(M\cup N)$.

Interpretarea geometrică a funcției cotangentă, analoagă celei date pentru funcția tangentă, se poate obține considerînd punctul de intersecție T'

al dreptei OM, $M = F(x)$, cu paralela dusă prin punctul $B(0, 1)$ la axa OA. În acest caz, numărul ctg x este egal cu abscisa punctului T; (fig. III. 37; 38).

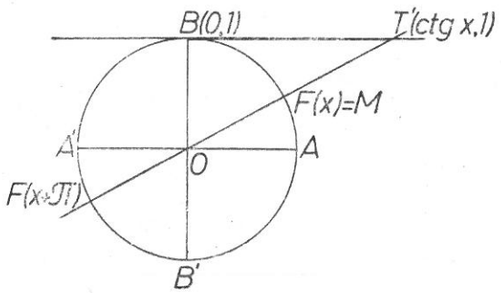

Fig. III.37

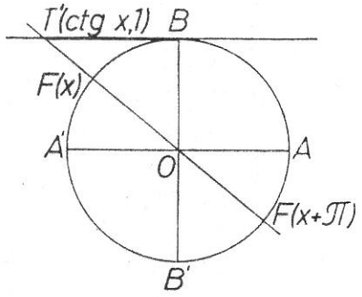

Fig. III.38

Domeniul de definiție al funcției tangentă este egal cu reuniunea intervalelor $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Notînd prin I_k intervalul $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, observăm că funcția tg crește de la $-\infty$ la $+\infty$, pe intervalul I_k.

Funcția tangentă se anulează în punctele, în care se anulează funcția sinus, deci în punctele mulțimii N.

Funcția cotangentă are ca domeniu de definiție reuniunea intervalelor $J_k = (k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Pe fiecare interval J_k, funcția cotangentă descrește de la $+\infty$ la $-\infty$. Funcția cotangentă se anulează în punctele în care se anulează funcția cosinus, deci în punctele mulțimii M.

Reținem că funcțiile tangentă și cotangentă sînt astfel încît fiecare dintre ele se anulează pe mulțimea, pe care cealaltă funcție nu este definită.

În punctele în care ambele funcții, tangentă și cotangentă, sînt simultan definite, aceste funcții sînt legate prin relația

$$\text{tg } x \text{ ctg } x = 1, \ x \in \mathbf{R} - (M \cup N). \tag{3}$$

Din formulele (1) și (2) rezultă că fiecare din funcțiile tangentă și cotangentă este o funcție periodică, ce admite perioada 2π. Dar, pentru aceste funcții, 2π nu este perioada minimă. Într-adevăr, din relațiile

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \ \cos(x + \pi) = -\cos x$$

rezultă că avem $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$ pentru orice $x \in \mathbf{R} - M$ și $\text{ctg } (x + \pi) = \text{ctg } x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - N$. **Deci funcțiile tg *și* ctg admit numărul π drept perioadă.**

Se pune problema de a decide dacă există perioade mai mici decît π pentru funcțiile tg și ctg. Dacă T este o perioadă a funcției tg, trebuie să avem $\text{tg}(x + T) = \text{tg } x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - M$; în particular, $\text{tg } T = \text{tg } 0 = 0$. Deci T trebuie să fie un multiplu întreg de π. Rezultă că *perioada minimă a funcției tangentă este* π.

Fie T o perioadă a funcției cotangentă. Va trebui să avem $\text{ctg } x = \text{ctg}(x + T)$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - N$. În particular, $\text{ctg}\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \text{ctg } \frac{\pi}{2} = 0$. Rezultă că T trebuie căutat printre numerele de forma $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci *perioada minimă a funcției cotangentă este tot* π.

Să observăm că, din moment ce funcția tangentă este crescătoare pe fiecare interval I_k, a cărui lungime este π, nu este posibil ca această funcție să admită perioade mai mici decît π. Aceeași observație este valabilă pentru funcția cotangentă.

Din proprietățile de periodicitate ale funcțiilor tg și ctg rezultă că graficele acestor funcții se obțin din graficele restricțiilor lor la intervalele I_k respectiv J_k, prin translații de-a lungul axei OA, de mărimi egale cu multiplii întregi de π. Figurile III.39 și III. 40 dau reprezentările grafice ale funcțiilor tangentă și cotangentă.

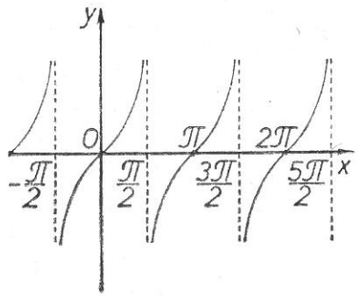

Fig. III. 39

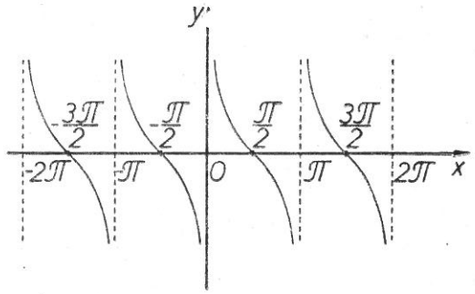

Fig. III. 40

Se observă că funcția tangentă ia fiecare valoare reală y de o infinitate de ori, anume o dată în fiecare din intervalele I_k. De asemenea, funcția cotangentă ia orice valoare reală y, o dată în fiecare din intervalele J_k.

De asemenea, se poate observa că fiecare dreaptă d, definită de o ecuație de forma $y = mx + n$, intersectează graficul funcției tangentă într-o infinitate de puncte $P_k(x_k, y_k)$, unde $x_k \in I_k$. Punctele P_k reprezintă soluțiile sistemului de ecuații

$$y = mx + n, \ y = \text{tg } x$$

iar numerele x_k sînt soluțiile ecuației

$$\text{tg } x = mx + n. \tag{4}$$

Deci:

Ecuația (4) admite o infinitate de soluții x_k, $k \in \mathbf{Z}$, fiecare din aceste soluții fiind situată în intervalul $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Exercițiu. *Fiind date numerele reale m și n, să se precizeze numărul soluțiilor ecuației* $\text{ctg } x = mx + n$.

Convenție generală. Ori de cîte ori vom considera o expresie în care apar funcțiile tangentă și cotangentă, sau amîndouă aceste funcții, sau în care apar fracții ce conțin funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate la

una sau mai multe variabile, vom presupune că sînt excluse din considerații acele valori ale variabilelor, pentru care expresia nu are sens. În fiecare caz, elevii vor examina și vor determina mulțimea valorilor ce trebuie excluse.

Ne propunem să exprimăm numărul $\operatorname{tg}(u+v)$ cu ajutorul numerelor $\operatorname{tg} u$ și $\operatorname{tg} v$. Avem, folosind formulele cunoscute,

$$\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}=\frac{\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos u\cos v-\sin u\sin v}.$$

Împărțind numărătorul și numitorul ultimei fracții prin $\cos u \cos v$ respectiv prin $\sin u \sin v$, obținem formulele

$$\boxed{\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}=\frac{\operatorname{ctg} v+\operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v-1}}$$

Procedînd în mod analog, obținem formulele

$$\boxed{\operatorname{tg}(u-v)=\frac{\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}=\frac{\operatorname{ctg} v-\operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v+1}}$$

$$\operatorname{ctg}(u+v)=\frac{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v-1}{\operatorname{ctg} u+\operatorname{ctg} v}=\frac{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}$$

$$\operatorname{ctg}(u-v)=\frac{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v+1}{\operatorname{ctg} v-\operatorname{ctg} u}=\frac{1+\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} v}.$$

Aplicații. **1.** *Să se arate că*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg} x,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x.$$

Soluție. Se aplică formula care dă $\operatorname{tg}(u-v)$ în funcție de $\operatorname{ctg} u$ și $\operatorname{ctg} v$, apoi formula care dă $\operatorname{ctg}(u-v)$ în funcție de $\operatorname{ctg} u$ și $\operatorname{ctg} v$.

2. *Să se calculeze* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Soluție. Observînd că $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, obținem

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

Folosind valorile deduse anterior pentru anumite arce, putem întocmi următorul tabel de valori ale funcțiilor tangentă și cotangentă

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{ctg} x$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Valorile alese pentru x dau puncte $F(x)$ în cadranele IV și I. Pentru a trece la cadranele II și III, folosim formulele

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x,\quad \operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x.$$

Folosind periodicitatea funcțiilor tg și ctg, putem completa tabelul făcînd să apară valorile lui x deduse din cele scrise prin adăugarea multiplilor întregi ai perioadei π.

Exerciții

Să se stabilească relațiile

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$,

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

4. *Să se exprime numerele* $\sin(u+v+w)$, $\operatorname{tg}(u+v+w)$ *cu ajutorul valorilor funcțiilor sinus, cosinus și tangentă, corespunzătoare valorilor* u, v, w *date variabilei independente.*

Soluție. Avem, folosind formule cunoscute,

$$\begin{aligned}\sin(u+v+w)&=\sin(u+v)\cos w+\cos(u+v)\sin w=\\&=\sin u\cos v\cos w+\sin v\cos u\cos w+\sin w\cos u\cos v-\\&-\sin u\sin v\sin w,\\ \cos(u+v+w)&=\cos(u+v)\cos w-\sin(u+v)\sin w=\\&=\cos u\cos v\cos w-\sin u\sin v\cos w-\sin u\sin w\cos v-\\&-\sin v\sin w\cos u,\\ \operatorname{tg}(u+v+w)&=\frac{\sin(u+v+w)}{\cos(u+v+w)}=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v+\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v-\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} w\operatorname{tg} u}.\end{aligned}$$

5. ***Să se arate că dacă*** $u+v+w=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, ***atunci***

$$\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v+\operatorname{tg} w=\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w.$$

Soluție. Se pune în primul membru al ultimei identități $\operatorname{tg}(u+v+w)=0$.

6. *Să se exprime numerele* $\sin(u+v+w+t)$, $\cos(u+v+w+t)$ *cu ajutorul numerelor* $\sin u$, $\sin v$, $\sin w$, $\sin t$, $\cos u$, $\cos v$, $\cos w$, $\cos t$.

Dacă în formulele stabilite pentru calculul expresiilor $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$, $\operatorname{tg}(u+v)$, $\sin(u+v+w)$, $\cos(u+v+w)$, $\operatorname{tg}(u+v+w)$ *punem* $u=v=w=x$, *obținem identitățile*

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\quad \operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\begin{aligned}\sin 3x&=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=2\sin x\cos^2 x+\cos^2 x\sin x-\\&-\sin^3 x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x,\\ \cos 3x&=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos^3 x-\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x\cos x=\\&=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x.\end{aligned}$$

Dacă ținem seama de identitatea $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, putem scrie

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x,\quad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Pentru tg $3x$ și ctg $3x$ se obțin formulele

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}.$$

Formulele stabilite în acest fel permit calculul funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, corespunzătoare multiplilor $2x$ și $3x$ ai argumentului x. Metoda folosită poate fi aplicată și pentru calculul valorilor corespunzătoare multiplilor $4x$, $5x$ etc., ca funcții de $\sin x$, $\cos x$ și $\operatorname{tg} x$.

Să observăm că avem, pentru orice număr x, pentru care $\cos x \neq 0$,

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Folosind formulele stabilite pentru $\sin 2x$, $\cos 2x$ și $\operatorname{tg} 2x$, putem acuma să exprimăm numerele $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$, în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Într-adevăr, putem scrie, dacă $\cos \frac{x}{2} \neq 0$,

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Deci am demonstrat că:

Dacă x este astfel încît $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ și dacă notăm $m = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, atunci

$$\boxed{\sin x = \frac{2m}{1 + m^2}, \quad \cos x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2m}{1 - m^2}}.$$

Aceste formule arată că sinusul, cosinusul și tangenta unui număr x, pentru care $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, pot fi exprimate prin funcții raționale de tangenta lui $\frac{x}{2}$.

Aplicații. 1. *Să se afle* $\sin x$ *și* $\cos x$ *știind că* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$.

Soluție. Potrivit formulelor stabilite mai sus avem

$$\sin x = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 9 \cdot 10^{-1} = \frac{3}{5}.$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = \frac{4}{5}.$$

2. *Să se afle numărul* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *știind că* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$.

Soluție. Să calculăm $\operatorname{tg} x$. Avem

$\operatorname{tg} x = 2(\sqrt{2} - 1)(1 - (\sqrt{2} - 1)^2)^{-1} = 1$. Singurul număr $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x = 1$ este $x = \pi/4$.

8. Transformarea sumelor de două sinusuri sau de două cosinusuri în produse

Din formulele

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

deducem, adunînd membru cu membru,

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

și apoi, scăzînd membru cu membru,

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \sin y \cos x.$$

Dacă notăm

$$x + y = p, \quad x - y = q,$$

vom avea

$$x = \frac{p + q}{2}, \quad y = \frac{p - q}{2}$$

și formulele precedente devin

$$\boxed{\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2} \end{aligned}}$$

În mod *analog, plecînd de la formulele cunoscute*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

obținem, prin adunare și scădere membru cu membru,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y. \end{aligned}}$$

Făcînd notațiile indicate mai sus, obținem

$$\boxed{\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2} = 2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{q - p}{2} \end{aligned}}$$

Aceste formule arată că sumele și diferențele a două sinusuri sau a două cosinusuri pot fi reprezentate prin produse de sinusuri și cosinusuri. Vom da

unele exemple de aplicare a acestor formule. Menționăm că aceste formule sînt utile, dacă vrem să calculăm efectiv expresii trigonometrice cu ajutorul tablelor de logaritmi, care se studiază în cl. a X-a.

Aplicație. Să se transforme în produs suma

$$E = \sin u + \sin 2u + \sin 3u.$$

Soluție. Avem

$$E = (\sin u + \sin 3u) + \sin 2u = 2 \sin 2u \cos u + \sin 2u =$$

$$= 2 \sin 2u \cdot \left(\cos u + \frac{1}{2}\right) = 2 \sin 2u \left(\cos u + \cos \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4 \sin 2u \cos \frac{u + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{u - \frac{\pi}{3}}{2}.$$

Aplicație. Să se transforme în produse sumele:

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

$$S' = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x,$$

$$S'' = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x.$$

Soluție. Avem

$$S = (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x =$$

$$= 2 \cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 2 \cos x \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$S' = (\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x) = 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cdot$$
$$\cdot \cos x = 2 \sin 4x(\cos 3x + \cos x) = 4 \sin 4x \cos 2x \cos x;$$

$$S'' = (\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 2 \cos 4x \cos 3x +$$
$$+ 2 \cos 4x \cos x = 2 \cos 4x(\cos 3x + \cos x) = 4 \cos 4x \cos 2x \cos x.$$

***Observație.* Din relațiile stabilite, deducem formula**

$$\frac{S'}{S''} = \operatorname{tg} 4x.$$

Exercițiu. *Să se transforme în produse următoarele sume:*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x.$$

9. Identități condiționate

O identitate este o egalitate între două funcții de una sau mai multe variabile independente, care este verificată pentru orice valori date variabilelor independente, astfel încît cele două funcții să fie definite pentru aceste valori.

O egalitate între două funcții, care este verificată în cazul în care variabilele independente verifică o anumită condiție, se numește *identitate condiționată* (de acea condiție).

Exemple

1. Dacă $x + y = 0$, atunci $x^3 = -y^3$.

2. În Trigonometrie, se întîlnesc numeroase relații între liniile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi și care sînt consecințe ale relației măs $\hat{A}$ + măs $\hat{B}$ + măs $\hat{C} = \pi$. Aceste relații sînt deci identități condiționate.

3. Dacă $u + v + w = \pi$, atunci: $\sin(u + v) = \sin w$, $\cos(u + v) = -\cos w$, și

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w. \tag{1}$$

Observație. Oricare ar fi numărul întreg k, relația $u + v + w = k\pi$ implică relația (1).

Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \tag{2}$$

Demonstrație. Putem scrie pe rînd următoarele egalități:

$$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} + \sin (A + B) =$$

$$= 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} + 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A + B}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{A + B}{2} \left(\cos \frac{A - B}{2} + \cos \frac{A + B}{2}\right) = 4 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$$

Dacă ținem seama că $\frac{A + B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, obținem formula (2).

4. Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \tag{3}$$

Demonstrație. Avem, ținînd seama că $(A + B) + C = \pi$ și $\frac{A + B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, $(\cos A + \cos B) + \cos C = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} -$

$$- \cos(A + B) = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A + B}{2} + 1 =$$

$$= 2 \cos \frac{A + B}{2} \left(\cos \frac{A - B}{2} - \cos \frac{A + B}{2}\right) + 1 = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

4. Am demonstrat că, oricare ar fi numerele reale A, B, C, avem

$$\sin (A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A +$$
$$+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C,$$

$$\cos (A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C -$$
$$- \sin B \sin C \cdot \cos A - \sin C \sin A \cos B.$$

Dacă $A + B + C = \pi$, rezultă

$\sin A \sin B \sin C = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B$,

$\cos A \cos B \cos C = \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \cdot \sin B - 1$.

Exerciţii

1. *Să se demonstreze că dacă $A + B + C = \pi$, atunci:*

a. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$,

b. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

2. *Să se arate că dacă $u + v = w$, atunci*

$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w - 2\cos u \cos v \cos w = 1$.

3. *În ipoteza $a + b + c = \pi$, să se transforme în produse sumele:*

$\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2} + \cos \frac{c}{2}$, $\sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{a}{2} + \operatorname{ctg} \frac{b}{2} + \operatorname{ctg} \frac{c}{2}$.

4. *În ipoteza $a + b + c + d = 2\pi$, să se transforme în produse sumele*

$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d$, $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d$,

$\sin a - \sin b + \sin c - \sin d$, $\cos a - \cos b + \cos c - \cos d$.

5. *Ştiind că $a + c = 2b$ şi că $t - z = z - y = y - x$, să se transforme în produse sumele*

$\sin a + \sin b + \sin c$, $\sin x + \sin y + \sin z + \sin t$,

$\cos a + \cos b + \cos c$, $\cos x + \cos y + \cos z + \cos t$.

6. *Să se transforme în produs suma*

$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \sin(a + 3b) + \sin(a + 4b)$.

7. *Să se transforme în produs suma*

$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \cos(a + 3b) + \cos(a + 4b)$.

(*Indicaţie pentru ex. 6 şi 7.* Se înmulţeşte fiecare termen cu $\sin \frac{b}{2}$ şi se transformă fiecare produs astfel obţinut într-o diferenţă de cosinusuri respectiv de sinusuri).

10. Transformarea în produs a sumei a două tangente sau a două cotangente

Uneori sînt utile identităţile următoare

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q \pm \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}$$

$$\operatorname{ctg} p \pm \operatorname{ctg} q = \frac{\cos p}{\sin p} \pm \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos p \sin q \pm \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}$$

care permit să transformăm în produse suma a două tangente sau a două cotangente.

Aplicaţie. Să se transforme în produs suma

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x.$$

Soluţie. Avem

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x) - \operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \sin 3x \frac{\cos 3x - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} =$$

$$= \sin 3x \frac{\cos(2x + x) - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = -\frac{\sin 3x \sin 2x \sin x}{\cos 3x \cos 2x \cos x} = -\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x.$$

A doua soluţie. Observăm că expresia dată se poate scrie sub forma $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x)$ şi că $x + 2x + (-3x) = 0$. Aplicînd un rezultat stabilit anterior, putem scrie

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(-3x) = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

Exerciţiu. *Ştiind că numerele u, v, w reprezintă măsurile în radiani ale unghiurilor unui triunghi, să se transforme în produs suma*

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w.$$

Exerciţii recapitulative

I. *Să se demonstreze următoarele identităţi:*

1. $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

2. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$

3. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

4. $\sin 5a \cos 3a = \frac{1}{2}(\sin 8a + \sin 2a)$

5. $\sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2}(\sin 8a - \sin 2a)$

6. $\sin(a - b)\cos(a + b) + \sin(b - c)\cos(b + c) + \sin(c - a)\cos(c + a) = 0$

7. $\sin(a - b)\sin(a + b) + \sin(b - c)\sin(b + c) + \sin(c - a)\sin(c + a) = 0$

8. $\sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)$, $\cos 2x \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 7x)$,

9. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{ctg} 2x$

10. $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

11. $\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a + b)\sin(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$

12. $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a$

II. *Să se calculeze valorile exprimate prin formulele următoare*

1. $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}$.

(*Indicaţie.* Se foloseşte faptul că $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ şi $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$)

2. $\sin \frac{7\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{12}$, $\sin \frac{11\pi}{12}$, $\cos \frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$.

III. 1. *Să se arate că dacă $\hat{A}$ este un unghi, oarecare atunci*

$$\cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\cos\hat{A}+1}{2}}, \quad \sin\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\hat{A}}{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\hat{A}}{1+\cos\hat{A}}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\hat{A}}{1-\cos\hat{A}}}$$

2. *Să se calculeze, cu două zecimale exacte,* $\sin\frac{\pi}{24}$, $\cos\frac{\pi}{24}$ *și* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$.

IV. *Să se arate că dacă x este un număr real oarecare, atunci*

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

și să se indice felul în care trebuie alese semnele, cînd x parcurge dreapta reală.

11. Funcții trigonometrice inverse

Știm de la algebră că dacă $f : E \to F$ este o aplicație bijectivă de la mulțimea E la mulțimea F, deci dacă f asociază fiecărui element x din E un element $y = f(x)$ din F, astfel ca orice element din F să fie asociat unui element și unuia singur din E, atunci există *aplicația inversă* a lui f, notată $f^{-1} : F \to E$ și definită în modul următor:

dacă $y' \in F$, atunci $f^{-1}(y')$ este acel element x' din E, pentru care $f(x') = y'$.

Deci, pentru o aplicație bijectivă $f : E \to F$, relațiile

$$x \in E,\ y = f(x)$$

sînt echivalente cu relațiile

$$y \in F,\ x = f^{-1}(y).$$

Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă au fost definite între următoarele mulțimi[1]:

$$\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1];\ \cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

$$\operatorname{tg} : \mathbf{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right) \to \mathbf{R},\ \operatorname{ctg} : \mathbf{R} - (\pi\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}.$$

Astfel definite, funcțiile trigonometrice nu sînt bijective, dar sînt surjective. Într-adevăr, orice număr din intervalul închis $[-1, 1]$ este de forma $\sin x$ sau $\cos y$, pentru o infinitate de valori ale lui x și y; de asemenea, orice număr real se poate pune sub forma $\operatorname{tg} u$ sau $\operatorname{ctg} v$ pentru o infinitate de valori ale lui u și v.

Deci orice număr real cuprins între -1 și 1, incluzînd aceste valori, este egal cu sinusul a o infinitate de numere x și este egal cu cosinusul a o infinitate de numere y. Mulțimea numerelor reale x, al căror sinus are o valoare

[1] Pentru o mulțime $A \subset \mathbf{R}$ convenim să notăm prin $n + m\ A$ mulțimea $\{n + ma;\ a \in A\}$, oricare ar fi numerele reale m și n.

dată a, se notează Arcsin a și se citește: Arcsin a = *mulțimea arcelor, al căror sinus este egal cu a.*

Denumirea vine de la faptul că funcțiile trigonometrice au fost definite cu ajutorul unei aplicații $F : \mathbf{R} \to C$, care aplică intervalele dreptei reale $\mathbf{R}$ pe arce ale cercului trigonometric C.

În mod analog:

Se notează prin Arccos b mulțimea arcelor (numerelor reale), al căror cosinus este egal cu numărul $b \in [-1, 1]$.

Se notează prin Arctg m mulțimea arcelor (numerelor reale), ale căror tangente sînt egale cu numărul $m \in \mathbf{R}$.

Se notează prin Arcctg m, mulțimea arcelor (numerelor reale), ale căror cotangente sînt egale cu numărul $m \in \mathbf{R}$.

Mulțimile astfel introduse

$$\text{Arcsin } a,\ \text{Arccos } b,\ \text{Arctg } m,\ \text{Arcctg } m$$

sînt mulțimi infinite de numere reale, conținînd fiecare o infinitate numărabilă de elemente.

Se pune problema de a distinge, în fiecare din aceste mulțimi, cîte un element, printr-o regulă generală și ușor de reținut.

Rezolvarea acestei probleme se poate face în mod natural, avînd în vedere faptul că *fiecare din funcțiile trigonometrice considerate admite cîte un interval, închis sau deschis, pe care funcția respectivă are restricția injectivă și surjectivă.*

Într-adevăr, din studiul făcut asupra funcțiilor trigonometrice, rezultă că:

1. Dacă numărul real x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, **numărul sin x va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la -1 la 1, trecînd prin fiecare punct al acestui interval, o singură dată.**

Aceasta înseamnă că dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, atunci există un singur număr $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel ca $\sin x = a$. Numărul x va fi notat prin arcsin a. Avem prin urmare, pentru $a \in [-1, 1]$,

$$\{\text{arcsin } a\} = (\text{Arcsin } a) \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exemple. Avem

$$\text{arcsin } 0 = 0,\ \text{arcsin } (-1) = -\frac{\pi}{2},\ \text{arcsin } 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{arcsin } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\ \text{arcsin } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\ \text{arcsin } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{arcsin } \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6},\ \text{arcsin } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4},\ \text{arcsin } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

2. Dacă numărul x parcurge intervalul $[0, \pi]$, de la 0 la π, atunci numărul $\cos x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la 1 la -1, o singură dată, trecînd prin fiecare punct al acestui interval.

Deci, oricare ar fi numărul $b \in [-1, 1]$, există un singur număr $y \in [0, \pi]$, astfel ca $b = \cos y$. Numărul y, care verifică aceste condiții, va fi notat $y = \arccos b$. Avem deci

$$\{\arccos b\} = (\mathrm{Arccos}\, b) \cap [0, \pi].$$

Exemple. Avem

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 1 = 0, \quad \arccos(-1) = \pi,$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

3. Dacă numărul x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ atunci numărul $\mathrm{tg}\, x$ va parcurge întreaga dreaptă reală $\mathbf{R}$, în sensul pozitiv (crescător), trecînd prin fiecare punct o singură dată.

Dacă $m \in \mathbf{R}$, există deci un singur număr real $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel ca $\mathrm{tg}\, u = m$. Acest număr u va fi notat prin $\mathrm{arctg}\, m$. Avem deci:

$$\{\mathrm{arctg}\, m\} = (\mathrm{Arctg}\, m) \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arctg}\, 0 = 0, \quad \mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{arctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \mathrm{arc\,tg}\, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\mathrm{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \quad \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

4. Dacă numărul x parcurge intervalul $(0, \pi)$, de la 0 la π, numărul $\mathrm{ctg}\, x$ va parcurge întreaga dreaptă reală $\mathbf{R}$, în sens negativ (descrescător) trecînd prin fiecare punct, o singură dată. Deci, oricare ar fi numărul real m, există un unic număr $v \in (0, \pi)$, astfel ca $m = \mathrm{ctg}\, v$. Numărul v avînd aceste proprietăți, va fi notat $\mathrm{arcctg}\, m$. Avem deci:

$$\{\mathrm{arcctg}\, m\} = (\mathrm{Arcctg}\, m) \cap (0, \pi).$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arcctg}\, 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{arcctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{arcctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \mathrm{arcctg}\, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3},$$

$$\mathrm{arcctg}\,(-1) = \frac{3\pi}{4}, \quad \mathrm{arcctg}\,(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6} \quad \mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Recapitulare. Funcțiile următoare, date de restricții,

$$\sin\left|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\right.$$

$$\cos\,|\,[0, \pi] : [0, \pi] \to [-1, 1],$$

$$\mathrm{tg}\left|\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R},\right.$$

$$\mathrm{ctg}\,|\,(0, \pi) : (0, \pi) \to \mathbf{R}$$

sînt bijective și admit ca inverse funcțiile

$$\arcsin: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi],$$

$$\mathrm{arctg}: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{arcctg}: \mathbf{R} \to (0, \pi).$$

Exerciții

1. *Să se indice, pentru fiecare din funcțiile sin, cos, tg și ctg, alte intervale, pe care aceste funcții să aibă restricții bijective.*

2. *Să se indice intervale, pe care funcțiile cos și ctg sînt crescătoare și intervale, pe care funcțiile sin și tg sînt descrescătoare.*

3. *Să se arate că următoarele egalități sînt adevărate, în fiecare punct al domeniului de definiție al funcției respective:*

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad \mathrm{arctg}(-m) = -\mathrm{arctg}\, m,$$

$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b, \quad \mathrm{arcctg}(-m) = \pi - \mathrm{arcctg}\, m.$$

4. *Să se arate că, pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, avem*

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$

5. *Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, avem* $\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}$ *și* $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$.

6. *Să se exprime sub o formă cît mai simplă numerele*

$\sin(2\arcsin a)$, $\sin(3\arcsin a)$, $\sin(4\arcsin a)$, $\sin(5\arcsin a)$,
$\cos(2\arcsin a)$, $\cos(3\arcsin a)$, $\cos(4\arcsin a)$, $\cos(5\arcsin a)$,
$\sin(2\arccos a)$, $\sin(3\arccos a)$, $\sin(4\arccos a)$, $\sin(5\arccos a)$,
$\cos(2\arccos a)$, $\cos(3\arccos a)$, $\cos(4\arccos a)$, $\cos(5\arccos a)$.

7. *Să se calculeze* $\sin x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ *știind că* $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$ *Apoi să se calculeze, în aceeași ipoteză,* $\sin 2x$ *și* $\cos 2x$. *Să se deducă valoarea lui x.*

R. $x = \frac{\pi}{12}$.

8. *Se dă* $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)$. *Să se calculeze* $\sin 5x$ *și să se afle x.*

9. *Să se calculeze numerele*

$$\sin\frac{\pi}{12}, \quad \cos\frac{\pi}{12}, \quad \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12}, \quad \sin\frac{\pi}{10}, \quad \cos\frac{\pi}{10}, \quad \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{10}$$

folosind rezultatele de la exercițiile 7 și 8.

10. *Se dau relațiile*

$$u = \arcsin\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}$$

$$v = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2).$$

Să se calculeze $\sin 5u$ *și* $\operatorname{tg} 4v$ *și să se deducă valorile exacte ale numerelor* u *și* v.

R. $u = \frac{\pi}{20}$, $v = \frac{\pi}{24}$.

11. *Să se arate că, pentru orice număr real nenul, avem*

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

12. Ecuații trigonometrice

Dacă x este un număr real variabil, și dacă

$$P(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + hx^p$$

este un polinom cu coeficienții $a, b, c, \ldots, h$, egalitatea

$$P(x) = 0$$

constituie o *relație algebrică* în variabila x. Dacă toți coeficienții $a, b, c, \ldots, h$ sînt nuli, relația $P(x) = 0$ este adevărată pentru orice valoare dată lui x; se spune că relația $P(x) = 0$ este o identitate sau că este identic verificată.

Fie E o mulțime de numere reale, $E \subset \mathbf{R}$, și fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție numerică definită pe mulțimea E. Dacă $f(x)$ depinde de x prin intermediul unor funcții trigonometrice cunoscute, spunem că și f este o funcție trigonometrică. Dacă f este o funcție trigonometrică, egalitatea

$$f(x) = 0$$

se numește ***relație trigonometrică***.

Exemple. Funcțiile

$$\sin x,\ \sin 3x,\ \cos x^2,\ \sin 3x + \cos 2x,\ \operatorname{tg} x - 7\,\frac{\sin x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

sînt funcții trigonometrice. Egalitățile

$$\sin x = 0,\ \cos(x + 3) - 2 = 0,\ \operatorname{tg}(\sin x) = 0$$

constituie exemple de relații trigonometrice.

O relație trigonometrică poate fi verificată pentru orice valoare dată variabilei x. Exemplu: $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

Există relații care nu sînt verificate pentru nici o valoare dată variabilei x. Exemplu: $\sin 3x = 2$.

O relație trigonometrică se mai numește și *ecuație trigonometrică*. Deci o ecuație trigonometrică este o relație de forma $f(x) = 0$, unde $f : E \to \mathbf{R}$ este o funcție trigonometrică definită pe o mulțime $E \subset \mathbf{R}$.

Funcțiile trigonometrice pe care le vom considera vor fi combinații polinomiale sau raționale de funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate unor multipli sau unor submultipli ai numărului x, sau unor funcții mai complicate de x.

Pentru astfel de funcții, mulțimea de definiție poate fi dedusă din însăși expresia care definește funcția f. De exemplu, funcția

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x} + \operatorname{tg} x$$

este definită pe mulțimea E, care se obține din $\mathbf{R}$ scoțînd numerele x, pentru care avem $\sin x = 1$ sau $\cos x = 0$.

Prin urmare, putem da o ecuație $f(x) = 0$, fără a specifica domeniul de definiție al funcției f, urmînd ca acest domeniu să fie dedus din felul în care a fost exprimat membrul stîng $f(x)$ al ecuației.

A rezolva o ecuație $f(x) = 0$ înseamnă a determina mulțimea S formată din toate numerele $x \in \mathbf{R}$, pentru care avem $f(x) = 0$. Mulțimea S se numește *mulțimea soluțiilor* ecuației $f(x) = 0$.

Deci a rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor acelei ecuații.

Mulțimea S a soluțiilor unei ecuații $f(x) = 0$ este o submulțime a mulțimii E, pe care este definită funcția f, sau a mulțimii formate din numerele x, pentru care funcția f are sens, dacă mulțimea E nu a fost specificată.

Vom începe prin rezolvarea ecuațiilor trigonometrice cele mai simple.

Ecuația $\sin x - a = 0$, $a \in \mathbf{R}$. Deci fiind dat un număr real a, trebuie să determinăm mulțimea S a numerelor x, pentru care avem $\sin x = a$.

Avem de distins mai multe cazuri:

Dacă $|a| > 1$, ecuația $\sin x = a$ nu are nici o soluție, deoarece sinusul oricărui număr real este un număr, a cărui valoare absolută nu depășește numărul 1. Deci în cazul $|a| > 1$, mulțimea soluțiilor ecuației date este mulțimea vidă.

Dacă $a = 1$ obținem, ecuația $\sin x = 1$, care admite soluția $x = \frac{\pi}{2}$. Din periodicitatea funcției sinus, rezultă că orice număr de forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este de asemenea o soluție a ecuației $\sin x = 1$. Din studiul efectuat asupra funcției sinus rezultă pe de altă parte că singurele numere reale care verifică ecuația $\sin x = 1$ sînt numerele de forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci mulțimea S a soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ este mulțimea

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Dacă r este un număr real, convenim să notăm prin $r\mathbf{Z}$ mulțimea

$$r\mathbf{Z} = \{rm;\ m \in \mathbf{Z}\}$$

formată din multiplii întregi ai lui r. Mai general, dacă A este o mulțime de numere și dacă $b \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}$, notăm $b + rA = \{b + ra;\ a \in A\}$.

În particular, dacă b, r sînt numere reale, convenim să notăm prin $b + r\mathbf{Z}$ mulțimea

$$b + r\mathbf{Z} = \{b + rm;\ m \in \mathbf{Z}\}.$$

Cu aceste convenții, putem scrie mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ sub forma

$$S = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

În mod asemănător, din proprietățile cunoscute ale funcției sinus deducem că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = -1$ este dată de formula

$$S = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Fie acuma a un număr din intervalul deschis $(-1, 1)$. În intervalul $[0, 2\pi]$ există exact două numere care verifică ecuația $\sin x = a$; dacă x' este unul din aceste numere, al doilea are valoarea $x'' = \pi - x'$, dacă $a > 0$ și $x'' = 3\pi - x'$, dacă $a < 0$.

Intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ conține exact un număr x cu proprietateasin $x = a$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$, $a \in (-1, 1)$, este

$$S = (x' + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - x' + 2\pi\mathbf{Z}),$$

unde x' este o soluție particulară; se poate presupune că $x' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

În particular, ecuația $\sin x = 0$ admite ca mulțime a soluțiilor

$$S = \pi\,\mathbf{Z}.$$

În rezumat, dacă asociem fiecărui număr a din intervalul închis $[-1, 1]$, acel număr x din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pentru care $\sin x = a$ și dacă notăm numărul x astfel definit prin $\arcsin a$, atunci putem enunța următorul rezultat:

Pentru $a \in [-1, 1]$, mulțimea soluțiilor ecuației

$$\sin x = a$$

este

$$\boxed{S = (\arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}).}$$

Exercițiu. *Să se arate că mulțimea soluțiilor ecuației* $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, *se poate defini prin formula*

$$S = \{(-1)^n \arcsin a + n\pi;\ n \in \mathbf{Z}\}.$$

Notație. Dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, se notează prin $\mathrm{Arcsin}\,a$ mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$. Deci

$$\mathrm{Arcsin}\,a = (\arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciții

1. *Să se determine numerele*

$$\arcsin\frac{1}{2},\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2},\ \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right),\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. *Să se determine mulțimile*

$$\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2},\ \mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin 2x = 0$.

Soluție. Punînd $y = 2x$, relația $\sin 2x = 0$ este echivalentă cu relația $\sin y = 0$ care este la rîndul ei echivalentă cu condiția

$$y = 2x \in \mathrm{Arcsin}0.$$

Deci soluțiile ecuației $\sin 2x = 0$ se obțin împărțind prin 2 soluțiile ecuației $\sin y = 0$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației $\sin 2x = 0$ este dată de formula $S = \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$. Putem scrie $S = \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}0$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

Soluție. Punînd $y = \frac{x}{3}$, ecuația dată devine $\sin y = \frac{1}{2}$. Soluțiile ultimei ecuații formează mulțimea $\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$. Rezultă că mulțimea S a soluțiilor ecuației date este formată din numerele care se obțin înmulțind cu 3 elementele mulțimii $\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2}$, deci

$$S = \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\,\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2} + 6\pi\,\mathbf{Z}\right) = 3\,\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2}.$$

Observație. **În cele două rezolvări, am folosit următoarea convenție: Dacă S este o mulțime de numere reale și dacă h este un număr real, notăm $hS = \{hx;\ x \in S\}$, deci mulțimea hS este formată din produsele cu h ale numerelor din mulțimea S.**

Exerciții.

1. *Să se arate care sînt mulțimile soluțiilor fiecăreia din ecuațiile*

$$\sin x = 0,\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. *Să se arate că, pentru* $a \in [-1, 1]$, *mulțimile soluțiilor ecuațiilor* $\sin x = a$ *și* $\sin x = -a$ *sînt simetrice față de originea O a axei reale.*

Ecuația $\cos x = a$, $a \in \mathbf{R}$. Pentru $|a| > 1$, ecuația $\cos x = a$ nu are nici o soluție, deci mulțimea soluțiilor este vidă.

Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, ecuația $\cos x = a$ are o soluție unică în intervalul $[0, \pi]$. Această soluție se notează $\arccos a$. Numerele $\pm\arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sînt de asemenea soluții ale ecuației $\cos x = a$. Din proprie-

tăţile cunoscute ale funcţiei cosinus deducem că orice soluţie a ecuaţiei $\cos x = a$ este un număr de forma $\pm\arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Deci, notînd prin $\mathrm{Arccos}\,a$ mulţimea formată din aceste numere, putem spune că:

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, *este dată de*

$$\boxed{\mathrm{Arccos}\,a = S = (\arccos a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (-\arccos a) + 2\pi\mathbf{Z}).}$$

Aplicaţii. 1. *Avem*

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2},\quad \arccos(-1) = \pi,\quad \arccos 1 = 0,\quad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6};$$

$$\mathrm{Arccos}\,0 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

$$\mathrm{Arccos}\,1 = 2\pi\mathbf{Z},\quad \mathrm{Arccos}(-1) = \pi + 2\pi\mathbf{Z},$$

$$\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Exerciţii

1. *Să se determine numerele*

$$\arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\quad \arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right).$$

2. *Să se determine mulţimile*

$$\mathrm{Arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \mathrm{Arccos}\,\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \mathrm{Arccos}\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \mathrm{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \mathrm{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. *Să se rezolve ecuaţia* $2\cos x + 1 = 0$.

4. *Să se determine mulţimea* $\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 3\pi]$.

Aplicaţie. Să se rezolve ecuaţia $2\cos x + 1 = 0$.

Soluţie. Relaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $\cos x = -\frac{1}{2}$. Avem $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, deci mulţimea soluţiilor va fi

$$S = \mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Exerciţiu. *Să se determine elementele mulţimii* $\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 2\pi]$.

Ecuaţia $\mathrm{tg}\,x = m$.

Domeniul de definiţie al funcţiei tangentă este mulţimea $\mathbf{R} - \mathrm{Arccos}\,0$, deci mulţimea soluţiilor oricărei ecuaţii de forma $\mathrm{tg}\,x = m$ trebuie căutată în acest domeniu.

Codomeniul funcţiei tangentă este întreaga dreaptă reală $\mathbf{R}$; deci orice număr real m este egal cu tangenta unui anumit număr $x \in \mathbf{R}$. Deci oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\mathrm{tg}\,x = m$ este nevidă. Printre soluţiile acestei ecuaţii, există una şi una singură în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ deoarece atunci cînd x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numărul $\mathrm{tg}\,x$ parcurge toată dreapta $\mathbf{R}$, o singură dată.

Pentru $m \in \mathbf{R}$, numărul $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\mathrm{tg}\,x = m$ se notează $\mathrm{arctg}\,m$.

Exemple. Avem

$$\mathrm{arctg}\,0 = 0,\quad \mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4},\quad \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},\quad \mathrm{arc\,tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3},\quad \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Numărul $\mathrm{arctg}\,m$ nu este singura soluţie a ecuaţiei $\mathrm{tg}\,x = m$, deoarece funcţia tangentă este periodică, cu perioada principală π. Rezultă că orice număr de forma $\mathrm{arctg}\,m + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este o soluţie a aceleiaşi ecuaţii. Din proprietăţile funcţiei tangentă rezultă că acestea sînt singurele soluţii ale ecuaţiei $\mathrm{tg}\,x = m$. Deci:

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\mathrm{tg}\,x = m$ este

$$\boxed{\mathrm{Arctg}\,m = \mathrm{arctg}\,m + \pi\mathbf{Z}.}$$

Exemple. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\mathrm{tg}\,x = 0$ este $\pi\mathbf{Z}$, iar mulţimea soluţiile ecuaţiei $\mathrm{tg}\,x = 1$ este $\mathrm{Arctg}\,1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}$.

Exerciţii

1. *Să se rezolve ecuaţia* $\mathrm{tg}\,x = -1$.

2. *Să se rezolve ecuaţia* $\mathrm{tg}\,x + \sqrt{3} = 0$ *şi să se determine valorile lui* x, *care verifică această ecuaţie şi care aparţin intervalului* $(1, 8)$.

Aplicaţie. Să se rezolve ecuaţia $\sin x = m\cos x$.

Soluţie. Nu putem avea, pentru o soluţie x a ecuaţiei date, $\cos x = 0$ deoarece din ecuaţie ar rezulta şi $\sin x = 0$; dar relaţiile $\sin x = 0$ şi $\cos x = 0$ nu pot fi verificate de un acelaşi număr x.

Avînd în vedere că avem $\cos x \neq 0$, deducem că relația dată este echivalentă cu ecuația $\operatorname{tg} x = m$, care a fost analizată anterior. Deci mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = m \cos x$ este mulțimea $\operatorname{Arctg} m$.

Observație. Avem

$$\operatorname{Arcsin} 0 = \operatorname{Arctg} 0 = \pi \mathbf{Z}.$$

Ecuația $\operatorname{ctg} x = m$. Funcția cotangentă este definită pe mulțimea

$$\mathbf{R} - \operatorname{Arcsin} 0,$$

deci soluțiile oricărei ecuații de forma $\operatorname{ctg} x = m$ trebuie căutate în mulțimea $R - \operatorname{Arcsin} 0$.

Orice număr real este egal cu cotangenta unui număr unic din intervalul $(0, \pi)$, deoarece atunci cînd x parcurge intervalul $(0, \pi)$, numărul $\operatorname{ctg} x$ parcurge o singură dată întreaga dreaptă $\mathbf{R}$. Numărul real x, cu proprietățile

$$x \in (0, \pi), \ \operatorname{ctg} x = m$$

se notează $\operatorname{arcctg} m$.

Din proprietățile funcției cotangentă rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{ctg} x = m$ este

$$\boxed{\operatorname{Arcctg} m = \operatorname{arcctg} m + \pi \mathbf{Z}.}$$

Exemple. Avem

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arcctg} 0 = \frac{\pi}{2} + \pi \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{Arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + \pi \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \operatorname{Arcctg} \left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6} + \pi \mathbf{Z}.$$

Exerciții

1. *Să se rezolve ecuația* $\cos x = m \sin x$, *pentru* $m = -1$ *și* $m = -\sqrt{3}$.
2. *Să se arate că ecuațiile* $\cos x = 0$ *și* $\operatorname{ctg} x = 0$ *au aceleași soluții.*

13. Ecuații trigonometrice care se reduc la una sau mai multe ecuații de tipurile $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = p$, $\operatorname{ctg} x = q$.

Aplicînd regulile de calcul algebric și relațiile cunoscute între diferitele funcții trigonometrice, numeroase ecuații trigonometrice pot fi rezolvate prin

reducere la una din ecuațiile studiate anterior, sau la mai multe din aceste ecuații.

Exemplu. Ecuația

$$\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$$

poate fi scrisă sub forma

$$(\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0,$$

din care rezultă că trebuie să fie verificată cel puțin una din relațiile

$$\sin x = 1 \text{ sau } \sin x = 2.$$

Dar ultima relație este imposibilă, deci ecuația dată este echivalentă cu ecuația $\sin x = 1$. Mulțimea soluțiilor va fi mulțimea $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi \mathbf{Z}$.

Mai general, dacă f este o funcție definită pe o mulțime $A \subset \mathbf{R}$, se poate considera relația

$$f(\sin x) = 0.$$

Făcînd înlocuirea $y = \sin x$, ecuația devine

$$f(y) = 0.$$

Ultima ecuație poate avea 0, 1, 2, 3 sau mai multe soluții. Dacă y' este o soluție a ecuației $f(y) = 0$, ecuația $\sin x = y'$ va admite soluții dacă și numai dacă $y' \in [-1, 1]$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $f(\sin x) = 0$ este egală cu reuniunea mulțimilor $\operatorname{Arcsin} y'$, corespunzătoare acelor soluții y' ale ecuației $f(y) = 0$, pentru care $y' \in [-1, 1]$.

Considerații asemănătoare se pot face pentru ecuațiile de forma

$$f(\cos x) = 0, \ f(\operatorname{tg} x) = 0, \ f(\operatorname{ctg} x) = 0.$$

Ecuațiile de forma

$$\sin f(x) = \sin g(x), \ \cos f(x) = \cos g(x)$$

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} h(x), \ \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} h(x),$$

în care f, g, h sînt funcții numerice date, pot fi rezolvate de asemenea folosind proprietățile pe care le cunoaștem ale funcțiilor trigonometrice.

De exemplu o ecuație de forma

$$\sin f(x) = \sin g(x) \tag{1}$$

se rezolvă observînd că un număr x verifică o astfel de ecuație dacă și numai dacă există un număr întreg k, astfel încît să avem

$$f(x) - g(x) = 2k\pi \text{ sau } f(x) + g(x) = (2k+1)\pi. \tag{2}$$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației (1) este egală cu reuniunea mulțimilor de soluții ale fiecăreia din ecuațiile (2), considerate, pentru fiecare număr întreg k.

De exemplu, ecuația

$$\sin(x^2) = \sin x \tag{3}$$

are ca mulțime de soluții reuniunea mulțimilor de soluții ale fiecăreia din ecuațiile

$$x^2 - x = 2k\pi, \quad x^2 + x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Prima din aceste ecuații are soluții reale numai dacă $1 + 8k\pi \geqslant 0$, iar a doua ecuație are soluții numai pentru $1 + (8k+4)\pi \geqslant 0$. Rezultă că *ecuația dată admite o infinitate de soluții*, anume

$$x_k' = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8k\pi}}{2}, \quad x_k'' = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (8k+4)\pi}}{2}$$

unde k poate lua orice valoare întreagă, cu condiția ca expresiile de sub radicali să fie pozitive.

Pentru rezolvarea ecuației (3), am utilizat următorul criteriu:

(I) Relația $\sin u = \sin v$ are loc dacă și numai dacă există un număr întreg n, astfel ca să avem fie $u - v = 2n\pi$, fie $u + v = (2n+1)\pi$.

Ultimele două condiții cînt echivalente cu condiția $u \in v + 2\pi\mathbf{Z}$, respectiv cu condiția $u \in \pi - v + 2\pi\mathbf{Z}$.

Pentru rezolvarea ecuațiilor

$$\cos f(x) = \cos g(x), \ \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} h(x), \ \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} h(x),$$

vom folosi următoarele criterii:

(II) Relația $\cos u = \cos v$ este adevărată dacă și numai dacă există un număr întreg n, astfel încît să avem fie $u - v = 2n\pi$ fie $u + v = 2n\pi$.

(III) Relația $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$ este verificată dacă și numai dacă există un număr întreg n, astfel încît să avem $v = u + n\pi$.

(IV) Relația $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ este verificată dacă și numai dacă există un număr întreg n, astfel ca $v = u + n\pi$.

Aplicații. **1.** *Să se rezolve ecuația* $\cos 2x = \cos 3x$.

Soluție. Aplicînd criteriul (II), obținem ecuațiile

$$3x = 2x + 2n\pi, \quad 3x + 2x = 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$$

care au soluțiile

$$x_n' = 2n\pi, \quad x_n'' = \frac{2n}{5}\pi.$$

2. *Să se rezolve ecuația* $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} x$.

Soluție. Aplicînd criteriul (IV), obținem ecuațiile

$$4x = x + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

care au soluțiile

$$x_n = \frac{n}{3}\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Exerciții.

Să se rezolve următoarele ecuații:

1. $\sin(2x+1) = \sin(3x^2)$.
2. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
3. $\sin x = \cos 2x$.
4. $\operatorname{tg} px = \operatorname{tg} qx \ (p, q \in \mathbf{R})$
5. $\cos px = \cos qx$.
6. $\sin px = \sin qx$.
7. $\sin px = \cos qx$.
8. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\sin 2x \sin 3x = \sin x \sin 4x$.

Soluție. Ecuația dată este echivalentă cu fiecare din ecuațiile următoare:

$$2 \sin 2x \sin 3x = 2 \sin x \sin 4x,$$

$$\cos x - \cos 5x = \cos 3x - \cos 5x,$$

$$\cos x = \cos 3x;$$

aplicînd criteriul (II), obținem soluțiile $x_n = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

Exercițiu. *Să se rezolve ecuația* $\cos 2x \cos 3x = \cos x \cos 4x$.

Ecuații trigonometrice care se reduc la ecuații de gradul II

Ecuații de forma $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$.

Făcînd substituția $y = \sin x$, ecuația dată devine

$$ay^2 + by + c = 0. \tag{1}$$

Sînt posibile mai multe cazuri:

1) Rădăcinile ecuației (1) sînt imaginare. Atunci ecuația trigonometrică nu are nici o soluție în $\mathbf{R}$.

2) Rădăcinile ecuației (1) sînt reale, dar sînt amîndouă exterioare intervalului $[-1, 1]$. Nici în acest caz ecuația trigonometrică dată nu are nici o soluție în $\mathbf{R}$.

3) Ecuația (1) are o singură soluție reală y_0 conținută în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = \operatorname{Arcsin} y_0$.

4) Ecuația (1) are două soluții reale y_1, y_2 conținute în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, ecuația trigonometrică dată are ca mulțime a soluțiilor reuniunea $\operatorname{Arcsin} y_1 \cup \operatorname{Arcsin} y_2$.

Observații. Pentru ca ecuația (1) să aibă cel puțin o soluție reală este necesar și suficient să avem $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Dacă $a = 0$, dar $b \neq 0$ și dacă $|c| < |b|$, atunci ecuația dată are ca mulțime a soluțiilor mulțimea $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{c}{b}\right)$.

Ecuația (1) are două rădăcini în intervalul $[-1, 1]$ dacă și numai dacă

$$-\frac{b}{2a} \in (-1, 1),\ a(a-b+c) \geqslant 0 \text{ și } a(a+b+c) \geqslant 0,\ b^2 - 4ac > 0.$$

Dacă ecuația (1) are o singură rădăcină în intervalul $[-1, 1]$, avem

$$(a-b+c)(a+b+c) \leqslant 0.$$

Ecuațiile de forma $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$ se discută și se rezolvă în mod analog.

Ecuațiile de forma $A \cos 2x + B \cos x + C = 0$ se aduc la forma

$$2A \cos^2 x + B \cos x + C - A = 0.$$

Ecuațiile de forma $A \cos 2x + B \sin x + C = 0$ se reduc de asemenea la o ecuație de gradul II, deoarece putem folosi identitatea

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Ecuațiile de tipul $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ sau $a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$ se rezolvă de asemenea prin reducere la ecuații de gradul II, făcînd substituțiile $y = \operatorname{tg} x$ respectiv $y = \operatorname{ctg} x$. Discuția acestor ecuații este mai simplă, deoarece orice soluție reală m a ecuației de gradul II conduce la o mulțime de soluții de forma $\operatorname{Arctg} m$, respectiv $\operatorname{Arcctg} m$.

O ecuație omogenă de gradul II în $\sin x$ și $\cos x$, deci o ecuație de forma

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \tag{2}$$

poate fi de asemenea redusă la o ecuație algebrică de gradul doi.

Într-adevăr, dacă $a \neq 0$, orice soluție a ecuației (2) este astfel încît $\cos x \neq 0$ deoarece nu putem avea simultan $\sin x = 0$ și $\cos x = 0$. Deci, în cazul $a \neq 0$ putem împărți primul membru al ecuației (2) prin $\cos x$ și obținem atunci ecuația echivalentă cu (2),

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

care se reduce la o ecuație algebrică de gradul II, prin efectuarea substituției $y = \operatorname{tg} x$.

Dacă $a = 0$, mulțimea soluțiilor ecuației (2) este egală cu reuniunea mulțimilor formate din soluțiile ecuațiilor

$$\cos x = 0 \text{ și } b \sin x + c \cos x = 0.$$

Știm să determinăm mulțimea soluțiilor primei ecuații. Ecuația a doua se reduce la ecuația

$$\operatorname{tg} x = -\frac{c}{b}$$

dacă $b \neq 0$, și se reduce la ecuația $\cos x = 0$ dacă $b = 0$ dar $c \neq 0$.

Aplicații. 1. *Să se rezolve ecuația* $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$.

Soluție. Notînd $y = \sin x$ ecuația devine $2y^2 - 7y + 3 = 0$. Soluțiile ultimei ecuații sînt $\frac{1}{2}$ și 3. Convine numai prima din aceste soluții, care conduce la mulțimea următoare de soluții pentru ecuația trigonometrică dată:

$$S = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi \mathbf{Z}\right).$$

2. *Să se rezolve ecuația* $\cos 2x - 3 \cos x - 1 = 0$.

Soluție. Notăm $y = \cos x$; atunci $\cos 2x = 2y^2 - 1$ și sîntem conduși la rezolvarea ecuației algebrice $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Ultima ecuație are rădăcinile $-\frac{1}{2}$ și 2, dintre care convine numai prima. Deci mulțimea soluțiilor ecuației trigonometrice date este

$$S = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi \mathbf{Z}\right).$$

3. *Să se rezolve ecuația* $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0$.

Soluție. Notăm $y = \operatorname{tg} x$; ecuația dată devine

$$y^2 - 8y + 7 = 0$$

și obținem rădăcinile 1 și 7. Mulțimea soluțiilor ecuației trigonometrice date este deci reuniunea

$$S = \operatorname{Arctg} 1 \cup \operatorname{Arctg} 7.$$

Amintim că $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi \mathbf{Z}$. De asemenea, $\operatorname{Arctg} 7 = \operatorname{arctg} 7 + \pi \mathbf{Z}$.

4. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Rezolvare. Folosim identitatea

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

și obținem ecuația echivalentă cu ecuația dată,

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}.$$

Ultima ecuație are ca mulțime de soluții reuniunea mulțimilor de soluții ale ecuațiilor

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației date este[1]

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + \pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi \mathbf{Z}\right) \cup$$
$$\cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi \mathbf{Z}\right).$$

[1] Reamintim că, dacă avem o mulțime A de numere reale, convenim să notăm prin $n + mA$ mulțimea $\{n + ma;\ a \in A\}$, *oricare ar fi numerele reale* m *și* n.

5. *Să rezolvăm ecuația*

$$4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1.$$

Soluție. Din identitatea $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ deducem

$$\sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x$$

astfel încît ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$4(1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x) = 1,$$

și cu ecuația

$$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0.$$

Ultima ecuație poate fi pus sub forma

$$(2\cos^2 x - 1)^2 = 0$$

și se reduce la ecuația echivalentă $\cos 2x = 0$. Mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} 0 = \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right):$$

14. Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$

Pentru ($a = 0$, $b \neq 0$) sau ($a \neq 0$ și $b = 0$) ecuația

(1) $$a \sin x + b \cos x = c$$

este echivalentă cu ecuația $\cos x = \frac{c}{b}$ respectiv cu ecuația $\sin x = \frac{c}{a}$ și fiecare din aceste ecuații a fost discutată.

Dacă $ab \neq 0$ dar $c = 0$, ecuația (1) se scrie $a \sin x + b \cos x = 0$ și este echivalentă cu ecuația $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$, care a fost de asemenea discutată.

Vom studia acum soluțiile unei ecuații de forma (1), în care $abc \neq 0$. O astfel de ecuație poate fi rezolvată prin mai multe metode.

Metoda 1.

Notăm:

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad q = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

și considerăm punctul $M(p, q)$; acest punct aparține cercului trigonometric, deoarece $p^2 + q^2 = 1$. Aplicația $F : \mathbf{R} \to C$ fiind surjectivă, rezultă că există un număr real t, astfel ca să avem

2) $$p = \cos t, \; q = \sin t, \; t \in [0, 2\pi).$$

În acest caz, vom avea

$$a = \sqrt{a^2 + b^2}\cos t, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2}\sin t.$$

Introducînd aceste valori în ecuația (1), această ecuație capătă forma $\sqrt{a^2 + b^2}(\cos t \sin x + \sin t \cos x) = c$ sau

(3) $$h \sin(t + x) = c, \; h = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ecuația (3) admite o mulțime nevidă de soluții dacă și numai dacă $|c| \leq h$. În acest caz, mulțimea soluțiilor va fi

(1) $$S = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{c}{h}\right) - t = \left(\arcsin\frac{c}{h} - t + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\pi - \arcsin\frac{c}{h} - t + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Observație. Aplicarea acestei metode presupune posibilitatea găsirii numărului real t, care să verifice condițiile (2). Existența acestui număr este asigurată, dar aflarea *valorii exacte* a lui t este în general o problemă imposibilă din punct de vedere practic. Totuși, cu ajutorul tabelelor, putem găsi *valoarea aproximativă* a lui t, suficient de apropiată de valoarea exactă, pentru aplicațiile obișnuite. În condițiile unor calcule foarte fine, mașinile electronice de calcul permit obținerea unor aproximații pentru t oricît de bune vrem, în principiu.

În cazuri particulare favorabile, valoarea exactă a lui t poate fi dedusă fără dificultate din relațiile (2).

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

Soluție. Avem $a = b = c = 1$, deci $h = \sqrt{2}$, $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t = \frac{\pi}{4}$.

Ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Potrivit formulei generale, mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = (2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Metoda 2. Presupunem că $b + c \neq 0$.

Notăm $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ și exprimăm $\sin x$ și $\cos x$ cu ajutorul lui y, folosind formulele care dau sinusul și cosinusul unui unghi în funcție de tangenta unghiului pe jumătate. Avem

$$\sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

și ecuația (1) capătă forma

$$2\ ay + b(1 - y^2) = c(1 + y^2).$$

Am obținut o ecuație algebrică de gradul II, care se mai poate scrie

$$(b + c)y^2 - 2\ ay + (c - b) = 0. \tag{4}$$

Ecuația (4) are rădăcinile reale, dacă este verificată condiția

$$a^2 - (b + c)(c - b) \geqslant 0$$

sau dacă $a^2 + b^2 \geqslant c^2$. Dar această condiție este echivalentă cu condiția $h \geqslant |c|$, găsită prin aplicarea metodei 1.

Să presupunem că avem

$$a^2 + b^2 > c^2$$

și fie m una din soluțiile ecuației (4). Din ecuația

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = m$$

deducem $x \in 2 \operatorname{Arctg} m$, deci mulțimea $2 \operatorname{Arctg} m = 2 \operatorname{arctg} m + 2\pi\mathbf{Z}$ este o mulțime de soluții ale ecuației (1). Dacă ecuația (4) are două rădăcini reale m_1 și m_2, atunci mulțimea soluțiilor ecuației (1) va fi

$$S = 2 \operatorname{Arctg} m_1 \cup 2 \operatorname{Arctg} m_2. \tag{II}$$

Exercițiu. *Să se arate, în legătură cu rezultatele obținute aplicînd metoda 1 și metoda 2 că, dacă $b + c \neq 0$, atunci formulele (I) și (II) definesc mulțimi egale.*

Observație. Dacă $b + c = 0$, deci dacă $b = -c$ atunci ecuația (1) admite soluțiile $(2k + 1)\pi$, pentru $k \in \mathbf{Z}$; într-adevăr, pentru $x = (2k + 1)\pi$ avem $\sin x = 0$ și $\cos x = -1$. Pentru aceste soluții, funcția tangentă nu poate fi aplicată numerelor $\frac{x}{2}$. Deci metoda 2 nu poate conduce la găsirea acestor soluții.

Pentru $b = -c$, putem scrie ecuația (1) sub formele echivalente

$$a \sin x = c(1 + \cos x),$$

$$2\ a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2c \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(a \sin \frac{x}{2} - c \cos \frac{x}{2}\right) = 0,$$

care admit ca mulțime de soluții reuniunea

$$S = (\pi + 2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(2 \operatorname{Arctg} \frac{c}{a}\right), \quad (a \neq 0).$$

Exemplu. Să rezolvăm prin metoda 2 ecuația $\sin x + \cos x = 1$. Avem $b + c = 2 \neq 0$, deci metoda 2 va furniza toate soluțiile.

Punînd $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, se obține ecuația

$$y^2 - y = 0,$$

care are soluțiile 0 și 1. Rezultă că ecuația trigonometrică dată are mulțimea de soluții

$$S = 2 \operatorname{Arctg} 0 \cup 2 \operatorname{Arctg} 1 = (2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right),$$

care a fost obținută și prin aplicarea metodei 1.

Ecuația

$$\sin x + \cos x = -1 \tag{5}$$

se rezolvă prin metoda 1. Ecuațiile (2) vor fi verificate de $t = \frac{\pi}{4}$ și ecuația (3) devine

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

rezultă că mulțimea de soluții ale ecuației (5) este

$$S = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciții

1. *Să se rezolve ecuațiile*

$$\sin x + 3\cos x = 1, \quad 3\sin x - \cos x = -1.$$

2. *Să se rezolve ecuațiile*

$$3\sin 3x + 4\cos 3x = -5, \quad 3\sin 2x - 4\cos 2x = 5.$$

Alte metode de rezolvare a ecuațiilor trigonometrice

O bună cunoaștere a proprietăților funcțiilor trigonometrice și utilizarea judicioasă a identităților trigonometrice și algebrice permit rezolvarea unei mari varietăți de ecuații trigonometrice.

Trebuie subliniat că nu există o metodă generală pentru rezolvarea oricărei ecuații trigonometrice. Dimpotrivă, se poate afirma că ecuațiile trigonometrice, care pot fi rezolvate efectiv, prin indicarea explicită a mulțimii soluțiilor, constituie o categorie foarte restrînsă, în mulțimea tuturor ecuațiilor trigonometrice care se pot imagina, sau care intervin în practică.

Combinarea metodelor furnizate de algebră și de analiză permit însă, în principiu, să se rezolve *orice* ecuație trigonometrică, *cu o aproximație oricît de bună vrem*. O parte din aceste metode vor fi prezentate în manualele destinate claselor X, XI și XII. În acest capitol, ne limităm a indica numai unele metode elementare, care însă pot fi aplicate multor tipuri de ecuații ce intervin în aplicații practice.

Utilizarea identităților algebrice.

Să considerăm ecuația

$$\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$$

Primul membru al acestei ecuații poate fi descompus într-un produs de doi factori; se obține atunci ecuația echivalentă:

$$(\sin x - 1)(\cos x - \sin x) = 0,$$

care are mulțimea de soluții:

$$S = (\text{Arcsin } 1) \cup (\text{Arctg } 1) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

Pentru a da alt exemplu, să considerăm ecuația

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Folosind identitățile $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem transforma ecuația dată în ecuația echivalentă $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, care are mulțimea de soluții

$$S = \frac{1}{2} \text{Arccos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right)\right\}.$$

Să ne propunem acuma să rezolvăm ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

Folosind identitatea

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

ecuația se poate scrie sub forma echivalentă

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0.$$

Transformînd în produs suma dintre $\cos 2x$ și $\cos 6x$, ecuația devine

$$\cos 4x(2 \cos 2x + 1) = 0.$$

Mulțimea soluțiilor ultimei ecuații este egală cu reuniunea mulțimilor de soluții ale ecuațiilor

$$\cos 4x = 0, \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă că ecuația dată are următoarea mulțime de soluții:

$$S = \left(\frac{1}{4} \text{ Arccos } 0\right) \cup \left(\frac{1}{2} \text{ Arccos} \left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Exerciții. 1. *Să se explicitezе membrul drept al ultimei formule.*

2. *Să se rezolve ecuația*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 2.$$

Capitolul **IV**

Aplicaţii ale trigonometriei în geometrie şi algebră

1. Relaţii metrice într-un triunghi oarecare

Fie ABC un triunghi oarecare. Vom nota prin a, b, c lungimile laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$, măsurate cu ajutorul unui segment etalon fixat m. Vom nota prin A', B', C' punctele de intersecţie ale înălţimilor din A respectiv B, C, cu suporţii laturilor opuse acestor vîrfuri, astfel ca (fig. IV.1)

$$A' \in BC, \quad B' \in CA, \quad C' \in AB.$$

Notăm apoi prin a', b', c' lungimile segmentelor $|AA'|$, respectiv $|BB'|$, $|CC'|$. Avem atunci următoarele egalităţi, care rezultă din definiţiile funcţiilor sinus şi cosinus, definite pe mulţimea unghiurilor:

(1) $a' = c \sin B = b \sin C$, $b' = a \sin C = c \sin A$, $c' = b \sin A = a \sin B$,

care arată că numerele a, b, c sînt proporţionale cu $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, deci

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

Dacă notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi cu A'' mijlocul laturii $|BC|$, şi dacă notăm prin R raza cercului circumscris, din triunghiul dreptunghic $OA''B$ rezultă (fig. IV.2)

(3) $$\frac{a}{2} = d(A'', B) = R \sin \widehat{A''OB}.$$

Dar unghiul $\widehat{A''OB}$ este congruent cu unghiul $\hat{A}$, dacă $\hat{A}$ este un unghi ascuţit, şi $\widehat{A''OB}$ este congruent cu suplementul unghiului $\hat{A}$, dacă $\hat{A}$ este un unghi obtuz. Deci, în toate cazurile, avem (fig. IV.2 şi IV.3)

(4) $$\sin \widehat{A''OB} = \sin \hat{A}$$

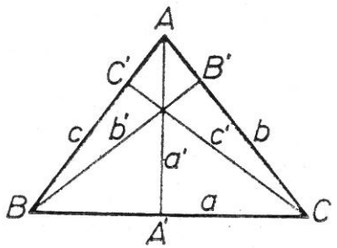

Fig. IV.1

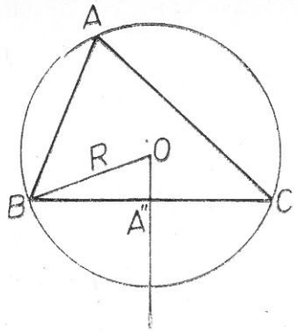

Fig. IV.2

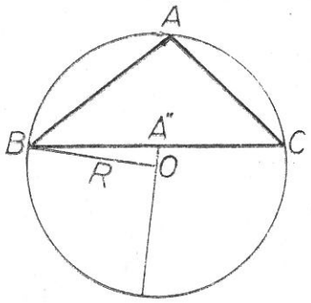

Fig. IV.3

şi formula (3) devine

(5) $$a = 2R \sin A.$$

Relaţia (5) arată că valoarea comună a rapoartelor din (2) este egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului ABC, deci că avem

(6) **Teorema sinusurilor.** În orice triunghi ABC:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.}$$

Dacă unghiul $\hat{B}$ este ascuţit, avem, din triunghiul dreptunghic $AA'B$,

(7) $$d(A', B) = c \cos B$$

iar dacă unghiul $\hat{B}$ este obtuz (fig. IV.4),

(8) $$d(A', B) = -c \cos B,$$

deoarece în acest caz, avem $B \in |A'C|$.

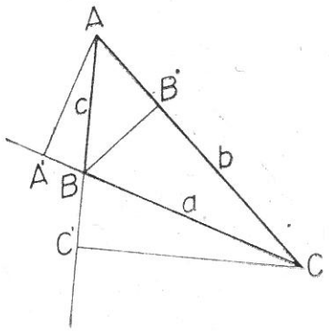

Fig. IV.4

Dacă amîndouă unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt ascuţite, vom avea

$A' \in |BC|$, $a = d(A', B) + d(A', C)$,
$d(A', B) = c \cos B$, $d(A', C) = b \cos C$

deci

(9) $$a = c \cos B + b \cos C.$$

Formula (9) este verificată şi în cazurile în care $\hat{B}$ (sau $\hat{C}$) este un unghi obtuz. De exemplu, dacă $\hat{B}$ este obtuz, atunci

$$a = d(A', C) - d(A', B) = b \cos C - (-c \cos B) = b \cos C + c \cos B.$$

Deci *formula (9) este verificată în orice triunghi.*

Permutînd circular literele (a, b, c) și literele (A, B, C), obținem alte două relații analoage relației (9), anume:

(10) $$b = a\cos C + c\cos A, \quad c = b\cos A + a\cos B.$$

Dacă înmulțim relațiile (10), membru cu membru, prin b, respectiv c și dacă adunăm membru cu membru relațiile astfel obținute, ajungem la

(11) $$b^2 + c^2 = a(b\cos C + c\cos B) + 2bc\cos A.$$

Dacă ținem seama de relația (9), putem scrie (11) sub forma

(11') $$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$$

sau

(12) $$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.}$$

Din formula (11') mai deducem relația

(13) $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Formula (12) permite calculul lungimii a cînd se cunosc lungimile laturilor b, c și unghiul $\hat{A}$, iar formula (13) permite determinarea unghiului $\hat{A}$, cînd se cunosc lungimile tuturor laturilor triunghiului ABC.

Un triunghi este determinat, din punct de vedere metric, dacă se cunosc lungimile laturilor sale și măsurile unghiurilor lui.

Teoremele de congruență ale triunghiurilor arată că un triunghi este determinat, din punct de vedere metric, dacă se cunosc trei din mărimile a, b, c, măs $\hat{A}$, măs $\hat{B}$, măs $\hat{C}$, în următoarele situații:

I : b, c, măs $\hat{A}$; II : a, măs $\hat{B}$, măs $\hat{C}$; III : a, b, c.

Pentru aplicațiile practice și pentru numeroase considerații teoretice, este important să putem calcula toate elementele a, b, c, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ în fiecare din cazurile I, II, III.

În cazul I, formula (12) permite calculul lungimii a, iar relațiile (2) permit calculul unghiurilor $\hat{B}$, $\hat{C}$:

(14) $$\sin B = \frac{b\sin A}{a}, \quad \sin C = \frac{c\sin A}{a}.$$

În cazul II, știm că $\sin A = \sin(B + C)$ și din formulele (2) deducem

$$b = \frac{a\sin B}{\sin(B + C)}, \quad c = \frac{a\sin C}{\sin(B + C)}.$$

În cazul III, putem afla măsurile unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ folosind formula (13) și analoagele ei, obținute prin permutări circulare:

(15) $$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

În aplicații practice, utilizarea directă a formulelor (13), (15) și în general a unor formule care conțin sume de pătrate, face să apară erori mari, prin aproximările folosite. Într-adevăr, în general, nu putem cunoaște valorile exacte ale funcțiilor trigonometrice, aceste funcții fiind date de tabele, ce dau un anumit număr de zecimale. Erorile introduse prin folosirea tabelelor scad simțitor, dacă se pot folosi așa-numitele formule *calculabile prin logaritmi*, adică formule în care sumele sînt înlocuite cu produse. Tabelele de valori ale funcțiilor trigonometrice indică și logaritmii acestor valori (se va învăța în clasa a X-a).

Exemplu de formulă calculabilă prin logaritmi. Ne propunem să transformăm într-o formulă calculabilă prin logaritmi formula (13), care dă măsura unghiului $\hat{A}$ în funcție de lungimile a, b, c. Putem scrie

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos A + 1}{2}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}}.$$

Dacă introducem notațiile uzuale

$$a + b + c = 2p, \quad -a + b + c = 2(p - a), \quad a - b + c = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2(p - c),$$

obținem formula

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}.$$

Prin permutări circulare, se obțin relațiile

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p - b)}{ca}}, \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p - c)}{ab}}.$$

Exerciții

1. *Să se demonstreze relațiile*

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}, \quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - c)(p - a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}}.$$

2. *Să se deducă formule de calcul pentru* $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Din formula (13) rezultă

$$\sin^2 A = 1 - \frac{(a^2 - b^2 - c^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4b^2c^2} =$$

$$= \frac{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)\,(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4b^2c^2} = \frac{[(b + c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b - c)^2]}{4b^2c^2} =$$

$$= \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)\,(a - b + c)\,(a + b - c)}{4b^2c^2} = 4\,\frac{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}{b^2c^2}.$$

Avînd în vedere că $\hat{A}$ este un unghi, avem $\sin A > 0$ şi deducem

(16) $$\sin A = 2\,\frac{\sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}}{bc}.$$

Să ne amintim formula, care exprimă aria unui triunghi în funcţie de lungimea unei laturi şi a înălţimii care cade pe acea latură:

$$2S = aa' = bb' = cc'.$$

Avem însă $a' = c \sin B = B \sin C$, $b' = a \sin C = c \sin A$, $c' = b \sin A = a \sin B$ şi rezultă pentru calculul ariei S următoarele formule

(17) $$2S = ac \sin B = ab \sin C = bc \sin A.$$

Dacă ţinem seama de formula (16), deducem *formula lui Heron*:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

O aplicaţie a teoremei sinusurilor. Fie a, b, m, n patru drepte coplanare trecînd printr-un punct O şi fie d o dreaptă, care nu trece prin punctul O şi care intersectează dreptele a, b, m, n respectiv în punctele A, B, M, N. În acest caz, este adevărată egalitatea

(1) $$\frac{|MA|}{|NA|} : \frac{|MB|}{|NB|} = \frac{\sin \widehat{AOM}}{\sin \widehat{AON}} : \frac{\sin \widehat{BOM}}{\sin \widehat{BON}}.$$

Demonstraţie. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul OMA, obţinem (fig. IV.5)

(2) $$\frac{|MA|}{|OA|} = \frac{d(M, A)}{d(O, A)} = \frac{\sin \widehat{AOM}}{\sin \widehat{OMA}}.$$

Aplicînd aceeaşi teoremă în triunghiul ONA, obţinem

(3) $$\frac{|NA|}{|OA|} = \frac{\sin \widehat{AON}}{\sin \widehat{ONA}}.$$

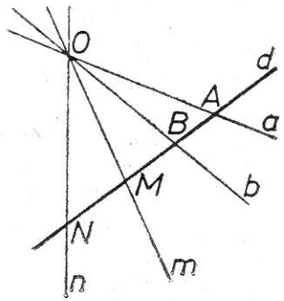

Fig. IV.5

Împărţind relaţiile (2) şi (3) membru cu membru, obţinem

(4) $$\frac{|MA|}{|NA|} = \frac{\sin \widehat{AOM}}{\sin \widehat{AON}} \cdot \frac{\sin \widehat{ONA}}{\sin \widehat{OMA}}.$$

Înlocuind punctul A prin punctul B, obţinem relaţia

(5) $$\frac{|MB|}{|NB|} = \frac{\sin \widehat{BOM}}{\sin \widehat{BON}} \cdot \frac{\sin \widehat{ONB}}{\sin \widehat{OMB}}.$$

Dacă împărţim acuma relaţiile (4) şi (5) membru cu membru, obţinem relaţia (1), deoarece $\sin \widehat{ONA} = \sin \widehat{ONB}$ şi $\sin \widehat{OMA} = \sin \widehat{OMB}$.

Corolar. Fiind date patru drepte coplanare şi concurente a, b, m, n şi alte două drepte d şi d', care intersectează primele patru drepte în punctele A, B, M, N respectiv A', B', M', N', avem:

(6) $$\frac{|MA|}{|NA|} : \frac{|MB|}{|NB|} = \frac{|M'A'|}{|N'A'|} : \frac{|M'B'|}{|N'B'|}.$$

Demonstraţie. Fiecare din cele două birapoarte care apar în cei doi membri ai relaţiei (6) este egal cu un biraport de patru sinusuri, anume cu un biraport format cu sinusurile unghiurilor care apar în membrul drept al egalităţii (1).

Raportul dublu care apare în membrul stîng al egalităţii (1) se numeşte *biraportul* sau *raportul anarmonic* al figurii $ABMN$, iar membrul drept al aceleiaşi egalităţi se numeşte raportul anarmonic al dreptelor a, b, m, n.

Exerciţii

1. Să se determine măsurile în grade sexagesimale ale unghiurilor unui triunghi, cunoscînd lungimile laturilor $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$.

2. Un turn, asimilat cu un segment $[AB]$, este privit de un observator din punctele M şi N astfel ca $M \in |AN|$, A fiind baza turnului. Ştiind că $d(M, N) = 100$ m şi că unghiurile $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$ au măsurile în grade sexagesimale egale cu 57° respectiv 46°, să se determine înălţimea turnului şi distanţele $d(A, M)$, $d(A, N)$.

3. Două puncte inaccesibile A, B sînt privite din punctele M, N. Cunoscînd distanţa $d(M, N) = d$ şi unghiurile $\widehat{MNB}$, $\widehat{MNA}$, $\widehat{NMB}$, $\widehat{NMA}$ şi ştiind că punctele A, B, M, N sînt într-un acelaşi plan, să se determine distanţa $d(A, B)$.

4. Un astronom priveşte un astru A de pe bolta cerească în două momente ale anului, la un interval de 6 luni, cînd Pămîntul ocupă două poziţii B, B', diametral opuse pe traiectoria sa în jurul Soarelui. Cu ajutorul instrumentelor de care dispune, observatorul este capabil să măsoare unghiul BAB' şi găseşte valoarea în grade u. Cunoscînd că distanţa $d(B, B')$ este egală cu D (= 300 000 000 km) şi presupunînd că triunghiul ABB' este isoscel ($|AB| = |AB'|$), să se calculeze distanţa $d(B, A)$ pentru $u = 1°, 2°, \ldots, 10°$.

5. Unghiurile unui triunghi au măsurile egale cu 50°, 60° și 70°. Știind că raza cercului circumscris este 1, să se calculeze lungimile laturilor acelui triunghi.

6. Un triunghi are două unghiuri de 36° și laturile ce formează al treilea unghi au lungimea 1. Să se determine lungimea celei de a treia laturi.

2. Exprimarea numerelor complexe de modul 1 cu ajutorul funcțiilor trigonometrice

Fiecărui număr real t îi vom asocia numărul complex $\cos t + i \sin t$, care va fi notat e^{it}. Avem deci, pentru $t \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t.} \tag{1}$$

Din această definiție a simbolului e^{it} deducem următoarele proprietăți:

1. *Oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$, numărul complex e^{it} are modulul egal cu unitatea.* Într-adevăr, avem

$$|e^{it}| = |\cos t + i \sin t| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1} = 1.$$

2. *Numărul complex e^{it} este egal cu 1 pentru $t = 0$.*
Într-adevăr, avem $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, deci $e^{i0} = 1 + i \cdot 0 = 1$.

3. Alte cazuri particulare sînt date de relațiile

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{i2\pi} = 1.$$

4. *Pentru orice două numere reale u și t avem*

$$\boxed{e^{iu}e^{it} = e^{i(u+t)}.}$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} e^{iu}e^{it} &= (\cos u + i \sin u)(\cos t + i \sin t) = \\ &= (\cos u \cos t - \sin u \sin t) + i(\cos u \sin t + \cos t \sin u) = \\ &= \cos(u + t) + i \sin(u + t) = e^{i(u+t)}. \end{aligned}$$

5. *Oricare ar fi numărul real t, avem*

$$(e^{it})^2 = e^{i2t}, \ (e^{it})^3 = e^{i3t}, \ (e^{it})^4 = e^{i4t}, \ \ldots$$

și în general, pentru orice număr natural n,

$$(e^{it})^n = e^{int}.$$

Într-adevăr, putem scrie, folosind proprietatea 4,

$$\begin{aligned} (e^{it})^2 &= e^{it}e^{it} = e^{i(t+t)} = e^{i2t}, \\ (e^{it})^3 &= (e^{it})^2 e^{it} = e^{i2t}e^{it} = e^{i3t}, \ \ldots \end{aligned}$$

Observație. În loc de e^{int}, pentru $t \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$, se convine să se scrie e^{nit}.

6. *Pentru orice număr $t \in \mathbf{R}$, avem*

$$e^{it} \cdot e^{i(-t)} = 1.$$

Într-adevăr, avem, în virtutea proprietății 4,

$$e^{it}e^{i(-t)} = e^{i(t-t)} = e^{i0} = 1.$$

Observație. În loc de e^{i0} se scrie e^0 și în loc de $e^{i(-t)}$ se scrie e^{-it}. Proprietatea 6 poate fi deci scrisă sub forma

$$e^{it}e^{-it} = 1.$$

7. *Numărul e^{-it} este complex conjugat lui e^{it}.*
Într-adevăr, avem

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t = \overline{e^{it}}.$$

8. *Numărul e^{-it} este inversul numărului complex e^{it}.*
Demonstrație. Am arătat că avem $e^{-it}e^{it} = 1$, deci e^{-it} este inversul lui e^{it}.

9. *Orice număr complex de modul 1 se poate pune într-o infinitate de feluri, sub forma e^{it}.*
Demonstrație. Fie $z = x + iy$ un număr complex de modul 1. Avem atunci

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Din proprietățile funcțiilor sinus și cosinus știm că există o infinitate de numere reale t, astfel ca să avem $x = \cos t$ și $y = \sin t$. Pentru un astfel de număr, avem

$$z = \cos t + i \sin t = e^{it}.$$

10. *Pentru orice număr real t și orice număr întreg n avem*

$$e^{i(t+2n\pi)} = e^{it}.$$

Într-adevăr, putem scrie

$$e^{i(t+2n\pi)} = e^{it}e^{2ni\pi} = e^{it},$$

deoarece $e^{2ni\pi} = \cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi) = 1 + i0 = 1$.

11. ***Dacă t și u sînt numere reale astfel încît $e^{it} = e^{iu}$, atunci diferența $t - u$ este egală cu un multiplu întreg de 2π.***

Într-adevăr, din $e^{it} = e^{iu}$ rezultă $\cos t + i \sin t = \cos u + i \sin u$ deci $\cos t = \cos u$ și $\sin t = \sin u$; ultimele două egalități implică existența unui număr întreg n cu proprietatea $t - u = 2n\pi$.

Legea care asociază fiecărui număr real t numărul complex $e^{it} = \cos t + i \sin t$ este o aplicație de la mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale la mulțimea numerelor complexe de modul 1. Această aplicație se notează uneori prin exp. Avem deci, prin convenție de notație,

$$\boxed{\exp(t) = e^{it}.}$$

Proprietățile demonstrate pot fi exprimate prin formulele:

$$\exp(0) = \exp(2\pi) = 1,\ \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i},\ \exp(\pi) = -1,\ \exp(t)\cdot\exp(u) =$$

$$= \exp(t+u),\ \exp(t)\cdot\exp(-t) = 1,\ \exp(-t) = \overline{\exp(t)},\ \exp(t+2n\pi) = \exp(t).$$

De asemenea, proprietatea 9 poate fi formulată spunînd că aplicația exp este surjectivă de la $\mathbf{R}$ la mulțimea numerelor complexe de modul 1.

Proprietatea 10 arată că exp este o aplicație periodică de perioadă 2π, iar proprietatea 11 arată că 2π este perioada principală a funcției exp.

Exerciții

1. Să se calculeze $\exp(t)$ pentru următoarele valori ale lui t:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{10}.$$

2. Să se arate că $\exp(t+\pi) = -\exp(t)$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$.

Aplicație. Formula lui Moivre. Dacă z este un număr complex și dacă n este un număr natural, $n = 0, 1, 2, \ldots$, definim *puterile întregi nenegative* ale lui z prin formulele

$$z^0 = 1,\ z^1 = z,\ z^2 = z\cdot z,\ z^3 = z^2\cdot z, \ldots, z^{n+1} = z^n\cdot z, \ldots$$

Reamintim că *produsul a două numere* naturale se definește prin formule asemănătoare:

$$m\cdot 0 = 0,\ m\cdot 1 = m,\ m\cdot 2 = m+m, \ldots, m(n+1) = mn+m, \ldots$$

Astfel de noțiuni se numesc noțiuni introduse *prin inducție*, în raport cu n. Principiul inducției afirmă că, prin astfel de formule, simbolurile z^n și mn sînt definite pentru orice n.

Așa cum am introdus o *definiție* cu ajutorul inducției, putem da și o *demonstrație* prin inducție.

De exemplu, asociativitatea înmulțirii numerelor naturale, exprimată prin formula $(mn)p = m(np)$, dau comutativitatea, exprimată prin formula $mn = nm$, se demonstrează prin inducție. Anume, se arată că aceste proprietăți sînt adevărate pentru $m = 0$ și apoi se arată că, admițînd aceste proprietăți adevărate pentru o valoare a lui m, atunci ele sînt adevărate și pentru valoarea succesivă $m+1$.

Pe aceeași cale, putem demonstra *formula lui Moivre*, valabilă pentru orice număr real t și orice număr natural n:

$$(1)\qquad \boxed{(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt)}\ .$$

Formula (1) este evident verificată pentru $n = 0$ și pentru orice t, deoarece pentru $n = 0$, ambii membrii ai relației (1) sînt egali cu 1.

Să presupunem formula (1) adevărată pentru numărul natural n și să notăm $z = \cos t + \mathrm{i}\sin t = e^{\mathrm{i}t}$. Avem atunci

$$z^{n+1} = (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^{n+1} = z^n\cdot z = (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n\cdot(\cos t + \mathrm{i}\sin t).$$

Folosind formula (1), pe care o admitem adevărată pentru numărul n,

$$z^{n+1} = [\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt)](\cos t + \mathrm{i}\sin t) = \cos(nt)\cos t - \sin(nt)\sin t +$$

$$+ \mathrm{i}[\sin(nt)\cos t + \cos(nt)\sin t] = \cos(nt+t) + \mathrm{i}\sin(nt+t).$$

Din (1) rezultă deci

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^{n+1} = \cos(n+1)t + \mathrm{i}\sin(n+1)t.$$

Deducem că *formula (1) este verificată pentru orice număr natural n*, deci formula lui Moivre este demonstrată.

Exerciții

1. Să se demonstreze formula lui Moivre direct, pentru $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ și $n = 5$.
2. Din formula lui Moivre pentru $n = 3$ să se deducă identitățile:

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t\sin^2 t,\quad \sin 3t = 3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t.$$

3. Să se demonstreze identitățile

$$\sin t = \frac{e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}},\quad \cos t = \frac{e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}}{2}.$$

3. Forma trigonometrică a unui număr complex

Dacă avem un număr complex $z = x + \mathrm{i}y$, unde $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ și $\mathrm{i}^2 = -1$ definim *modulul* lui z prin formula

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Modulul numărului z este un număr real pozitiv sau nul. Avem $|z| = 0$ dacă și numai dacă $z = 0$. Dacă $z \neq 0$, atunci $|z|$ este un număr pozitiv.

Dacă avem două numere complexe

$$z = x + \mathrm{i}y,\quad z' = x' + \mathrm{i}y',$$

produsul zz' este dat de formula

$$zz' = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$$

și modulul produsului este

$$|zz'| = \sqrt{(xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2} = \sqrt{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)}.$$

Avem deci

$$|zz'| = |z|\cdot|z'|.$$

Pentru orice număr complex nenul z, numărul $\frac{z}{|z|}$ este un număr complex de modul 1. Într-adevăr, dacă notăm $r = |z|$, atunci avem

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{r} = \frac{x}{r} + i\frac{y}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

deci

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^2}} = 1.$$

Rezultă că există un număr $t \in [0, 2\pi)$, astfel ca să avem

(1) $$\frac{z}{|z|} = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

sau

(2) $$z = r\, e^{it} = r(\cos t + i \sin t).$$

Vom nota prin $\arg z$ numărul real t, care verifică relația (2) și condiția $t \in [0, 2\pi)$; numărul $\arg z$ se va numi *argumentul redus* al numărului complex nenul z. Rezultă că, pentru orice număr complex nenul z avem identitatea

(3) $$\boxed{z = |z|\, e^{i \arg z}, \quad \arg z \in [0, 2\pi).}$$

Argumentul redus $\arg z$ nu este singurul număr real care verifică egalitatea (2); știm că orice număr de forma

(4) $$t = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

verifică această egalitate. Orice număr de forma (4) se numește *argument* al numărului complex z.

Reciproc, dacă un număr real t verifică egalitatea (2), atunci există un număr întreg k, pozitiv, sau negativ sau nul, astfel încît să avem (4). Mulțimea numerelor t de forma (4) va fi notată $\operatorname{Arg} z$. Avem deci, prin definiție, următoarea formulă, care dă *mulțimea argumentelor* numărului complex z:

(5) $$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi; \quad k \in \mathbf{Z}\} = \arg z + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Numărul $\arg z$ și mulțimea $\operatorname{Arg} z$ sînt definite numai pentru numerele complexe z diferite de zero.

Deci, dacă z este un număr complex diferit de zero, $z = x + iy$, și dacă $r = |z|$, $t \in \operatorname{Arg} z$, atunci avem

(6) $$z = x + iy = r\, e^{it}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă $z = 0$, deci dacă $x = y = r = 0$, atunci relația (6) va fi verificată de *orice* număr real t. *Argumentul numărului complex 0 nu este definit.*

Din egalitățile (6) rezultă formulele importante

(7) $$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

și, dacă $r \neq 0$,

(8) $$\cos t = \frac{x}{r}, \quad \sin t = \frac{y}{r}.$$

Dacă z nu este un număr pur imaginar, deci dacă $x \neq 0$, atunci $\cos t \neq 0$ și din relațiile (7) sau (8) deducem relația importantă

(9) $$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} t,$$

valabilă pentru orice număr $t \in \operatorname{Arg} z$, în particular pentru $t = \arg z$.

Exemple. Dacă $z = 0$, avem $r = 0$ și argumentul lui z nu este definit. Dacă $z = 1$, avem $r = 1$ și $\arg 1 = 0$. Dacă $z = i$, avem $r = 1$ și $\arg z = \pi/2$.

Dacă $z = 1 - i\sqrt{3}$, atunci $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos(\arg z) = \frac{1}{2}$ și $\sin(\arg z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\arg z = \frac{5\pi}{3}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}$.

Dacă $z = -1 + i\sqrt{3}$, atunci $r = 2$ și $\arg z = \frac{2\pi}{3}$.

Expresia

$$|z|\, e^{i \arg z} = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$$

poartă numele de *formă trigonometrică* a numărului complex z, $z \neq 0$.

Am arătat că avem egalitatea

(10) $$z = r(\cos t + i \sin t)$$

dacă $r = |z|$ și dacă $t \in \operatorname{Arg} z$.

Numărul pozitiv r și numărul real $\arg z \in [0, 2\pi)$ sînt asociate în mod unic numărului complex nenul z. Reciproc, fiind date numerele $r > 0$ și $t \in \mathbf{R}$, formula (10) definește un număr complex nenul. Numerele complexe $z = r(\cos t + i \sin t)$, $z' = r'(\cos t' + i \sin t')$, cu $r > 0$, $r' > 0$, sînt egale dacă și numai dacă avem

(11) $$r = r' \text{ și } t - t' \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

Rezultă că: *Două numere complexe nenule sînt egale dacă și numai dacă ele au același modul și dacă diferența argumentelor lor este un multiplu întreg de 2π.*

Condiția ca două numere complexe să fie conjugate.

Fie $z = r(\cos t + i \sin t)$ un număr complex. Conjugatul complex al lui z va fi dat de formula $\bar{z} = r(\cos t - i \sin t) = r(\cos t' + i \sin t')$, unde

(12) $$t' = -t + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Rezultă că $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$, dacă $\arg z \neq 0$ și $\arg \bar{z} = \arg z$, dacă $\arg z = \pi$ sau $\arg z = 0$, deci dacă z este un număr real, nenul; în ultimul caz, $\bar{z} = z$.

Mulțimea argumentelor numărului conjugat $\bar{z}$ este dată de formula

$$\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z = \{-t;\ t \in \operatorname{Arg} z\}.$$

Exercițiu. Să se determine modulele și argumentele numerelor -3, 3, $-3i$, $3i$, $2 + 2\sqrt{3}i$, $\sqrt{3} - i$.

4. Înmulțirea numerelor complexe scrise sub formă trigonometrică

Fie z și z' două numere complexe. Să presupunem că am scris aceste numere sub formă trigonometrică:

$$z = r(\cos t + i \sin t), \quad z' = r'(\cos t' + i \sin t').$$

Produsul acestor numere va fi dat de formula

$$zz' = rr'e^{it}e^{it'} = rr'e^{i(t+t')},$$

unde

$$e^{i(t+t')} = \cos(t + t') + i \sin(t + t').$$

Numărul $t + t'$ aparține mulțimii $\mathrm{Arg}(zz')$, dar în general nu este egal cu argumentul redus al lui zz', deoarece este posibil ca să avem $t + t' \geqslant 2\pi$. Din relația $t + t' \in \mathrm{Arg}(zz')$ rezultă însă că avem

(13) $$\arg(zz') - (\arg z + \arg z') \in 2\pi\mathbf{Z},$$

deci *diferența* $\arg(zz') - (\arg z + \arg z')$ *este un multiplu întreg de* 2π.

Relația (13) poate fi exprimată simbolic prin formula

(14) $$\boxed{\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}\, z + \arg z' = \arg z + \mathrm{Arg}\, z'.}$$

Formula care dă produsul a două numere complexe scrise sub formă trigonometrică, poate fi generalizată, considerînd n numere complexe

$$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1), \ldots, z_n = r_n(\cos t_n + i \sin t_n).$$

Vom avea

(15) $$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(t_1 + \ldots + t_n) + i \sin(t_1 + \ldots + t_n)].$$

În particular, dacă numerele $z_1, \ldots, z_n$ sînt egale cu același număr z obținem formula următoare, care dă puterea a n — a a lui z:

(15') $$z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt).$$

Să presupunem că numerele complexe $z = re^{it}$ și $z' = r'e^{it'}$ sînt inverse unul celuilalt, deci că $zz' = 1$. În acest caz, vom avea

$$rr'e^{i(t+t')} = 1,$$

deci $r' = r^{-1}$ și $t + t' \in 2\pi\mathbf{Z}$. Ultima relație poate fi exprimată astfel:

(16) $$-\arg z' \in \mathrm{Arg}\, z.$$

Avem deci

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad -\arg(z^{-1}) \in \mathrm{Arg}\, z.$$

Fie w și z două numere complexe.

Cîtul numerelor complexe w și z, deci produsul wz^{-1} va fi definit de formulele

(17) $$|wz^{-1}| = |w| \cdot |z|^{-1}, \quad \arg(wz^{-1}) \in \arg w - \arg z + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Aplicație. Să calculăm numărul complex

$$c = \frac{512}{(\sqrt{3} + i)^9}.$$

Avem $|c| = 512\,|\sqrt{3} + i|^{-9} = 512 \cdot 2^{-9} = 1$ și $\arg c \in \arg(512) - \arg(\sqrt{3} + i)^9 + 2\pi\mathbf{Z} = -9\arg(\sqrt{3} + i) + 2\pi\mathbf{Z}$. Dar

$$\arg(\sqrt{3} + i) = \arg\frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\pi}{6},$$

deci $9 \arg(\sqrt{3} + i) = 3\pi/2$ și vom avea

$$\arg c \in -\frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Rezultă

$$c = e^{i\arg c} = e^{-3i\pi/2} = i.$$

Exercițiu. Să se demonstreze formulele (15) și (15').

(*Indicație.* Se va folosi inducția matematică).

5. Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex

Definiție. Fie z un număr nenul și fie n un număr natural mai mare decît 1. Se numește rădăcină de ordinul n a lui z orice număr complex Z, care verifică ecuația

(1) $$Z^n = z.$$

Dacă notăm $z = re^{it}$ și $Z = Re^{iT}$, unde $r > 0$, $R > 0$, $t \in \mathbf{R}$, $T \in \mathbf{R}$, ecuația (1) este echivalentă cu relațiile

(2) $$R^n = r, \quad nT - t \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

Prima din aceste relații are o soluție unică:

(3) $$R = r^{1/n},$$

deci R trebuie să fie rădăcina pozitivă de ordinul n a numărului pozitiv r. Se știe de la algebră că această rădăcină există și este unică.

A doua relație (2) este echivalentă cu existența unui număr întreg k, astfel ca să avem

(4) $$nT = t + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Avem deci

(5) $$T = \frac{t + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Pentru orice alegere a lui k în formula (5), luînd pentru R valoarea dată de (3), obținem o soluție a ecuației (1), dacă punem $Z = Re^{iT}$. Dînd lui k în formula (5) valorile $0, 1, 2, \ldots, n-1$, obținem pentru T valorile

$$(6) \qquad T_0 = \frac{t}{n}, \quad T_1 = \frac{t+2\pi}{n}, \ldots, T_k = \frac{t+2k\pi}{n}, \ldots, T_{n-1} = \frac{t+2(n-1)\pi}{n}.$$

Să notăm

$$(7) \qquad Z_k = r^{1/n} e^{iT_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Obținem atunci n numere complexe și fiecare din aceste numere verifică ecuația (1). Aceste numere sînt distincte două cîte două, deoarece diferența a două oarecare din numerele șirului (6) este diferită de orice multiplu întreg de 2π. Rezultă că:

Ecuația (1) admite n soluții distincte, date de formulele (7) și (6).

Se pune problema de a vedea dacă ecuația (1) admite vreo soluție diferită de soluțiile indicate. Am arătat că orice soluție a ecuației (1) este de forma $Z = Re^{iT}$ cu R dat de (3) și cu T de forma (5). În aparență, ecuația (5) furnizează o infinitate de soluții, deoarece putem da o infinitate de valori parametrului $k \in Z$. În realitate, dacă dăm lui k o valoare diferită de valorile considerate mai sus, deci diferită de $0, 1, 2, \ldots, n-1$, acea valoare k va diferi de una din valorile $0, 1, \ldots, n-1$ printr-un multiplu întreg de n. Deci vom avea o relație de forma $k = h + qn$, unde $h \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ și $q \in \mathbf{Z}$. În acest caz, soluția $Z = Re^{i(t+2k\pi)/n}$ va fi egală cu numărul $Re^{i(t+2h\pi)/n} = Re^{iT_h} = Z_h$, care aparține șirului (7). Deci:

Șirul (7) conține toate soluțiile ecuației (1).

Deci am demonstrat că:

Dacă avem un număr complex nenul $z = re^{it}$ și un număr natural n, atunci există exact n rădăcini de ordinul n ale lui z și aceste rădăcini sînt date de formula

$$(8) \qquad Z_k = r^{1/n} e^{i(t+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dacă $t = \arg z$, deci dacă $t \in [0, 2\pi)$, atunci numerele $T_k = \frac{t+2k\pi}{n}$, cu $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, aparțin de asemenea intervalului $[0, 2\pi)$, deci T_k este argumentul redus al numărului Z_k. Deci argumentele reduse ale rădăcinilor ecuației (1) sînt date de relația

$$(9) \qquad \arg Z_k = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

În particular, dacă modulul lui z este egal cu 1, atunci fiecare din rădăcinile (8) va avea modulul egal cu 1.

Dacă $z = 1$, rădăcinile ecuației (1) vor fi rădăcinile de ordinul n ale unității. Aceste rădăcini sînt soluțiile ecuației

$$(10) \qquad Z^n = 1.$$

Potrivit rezultatului stabilit mai sus, *există exact n rădăcini de ordinul n ale unității și aceste rădăcini sînt date de formula*

$$(11) \qquad U_k = e^{i2k\pi/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pentru $k = 0$ se obține $U_0 = 1$, iar pentru $k = 1$, obținem rădăcina

$$U_1 = e^{2\pi i/n}.$$

Avem, pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$U_k = (U_1)^k,$$

deci rădăcinile de ordinul n ale unității sînt egale cu puterile de grade mai mici decît n ale unei rădăcini particulare U_1. Se spune că U_1 este o rădăcină *primitivă* de ordinul n a unității.

Exerciții

1. Fie Z o rădăcină de ordinul n a ecuației $Z^n = z$ și fie U o rădăcină de ordinul n a unității. Să se arate că UZ este o rădăcină de ordinul n a lui z.

2. Să se arate că orice rădăcină de ordinul n a numărului complex z este de forma $Z(U_1)^k$, unde Z este o rădăcină particulară de ordinul n a lui z, iar U_1 este rădăcina primitivă a unității, indicată mai sus.

Aplicație. Să se rezolve ecuația

$$(12) \qquad Z^{n-1} + Z^{n-2} + \ldots + Z + 1 = 0.$$

Soluție. Avem identitatea

$$(13) \qquad Z^n - 1 = (Z-1)(Z^{n-1} + Z^{n-2} + \ldots + Z + 1),$$

din care rezultă că soluțiile ecuației (12) sînt soluțiile diferite de 1 ale ecuației (10). Aceste soluții au fost determinate. Rezultă că soluțiile ecuației (12) sînt date de formula (11), în care luăm

$$k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Deci rădăcinile ecuației (12) sînt puterile de grade $1, 2, \ldots, n-1$ ale rădăcinii primitive U_1. În particular, U_1 este o rădăcină a ecuației (12).

Exercițiu. Să se arate că produsul a două rădăcini de ordinul n ale unității și inversa unei rădăcini de ordinul n a unității sînt rădăcini de ordinul n ale unității.

Exemple. 1. Rădăcinile de ordinul 3 ale unității sînt

$$1, \ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Exerciții

1. Fie $1, U_1$ și U_2 rădăcinile de ordinul trei ale unității. Să se arate că $U_1 = \overline{U}_2$ și $(U_1)^2 = (U_1)^{-1} = U_2$, $(U_2)^2 = (U_2)^{-1} = U_1$.

2. Să se arate că $1, U_1$ și U_2 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral înscris în cercul unitate $C(0, 1)$.

3. Să se indice rădăcinile ecuației

$$Z^2 + Z + 1 = 0.$$

4. Să se arate că rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex nenul z sînt afixele vîrfurilor unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul $C(0, R)$, $R = |z|^{1/n}$.

5. Să se determine și să se reprezinte geometric rădăcinile de ordinul patru ale unității.

6. Se știe că numărul complex Z verifică ecuația $Z^4 = z$; să se arate că numerele $-Z, iZ$ și $-iZ$ verifică aceeași ecuație.

Aplicație. Să se calculeze $z = (1 - 2i)^4$ și să se deducă expresiile rădăcinilor de ordinul patru din $-7 + 24i$.

Soluție. Avem

$$z = 1 + 4(-2i) + 6(-2i)^2 + 4(-2i)^3 + (-2i)^4 = -7 + 24\,i.$$

Rezultă că rădăcinile de ordinul patru din $-7 + 24\,i$ sînt următoarele numere complexe

$$1 - 2i,\ -1 + 2i,\ 2 + i,\ -2 - i,$$

care se obțin din $1 - 2i$ înmulțindu-l cu -1, i și $-i$.

Exerciții

1. Să notăm prin L_n lungimea laturilor unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc de rază R. Să se demonstreze formulele:

$$L_3 = R\sqrt{3},\ L_4 = R\sqrt{2},\ L_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\ L_6 = R,\ L_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$L_{10} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5} - 1),\ L_{12} = \frac{1}{2}R(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Pentru fiecare din aceste poligoane, să se determine raza cercului înscris.

2. Să se stabilească următoarele formule:

$$\operatorname{tg} 7°30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2,$$

$$\sin 9° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}\right),\ \cos 9° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}\right),$$

$$\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),\ \cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$\sin 18° = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}),\ \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$\sin 27° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right),\ \cos 27° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right),$$

$$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\ \cos 36° = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

3. Să se determine rădăcinile unității de ordinele 5, 6, 8, 10 și 12.

6. Interpretări geometrice ale unor relații între numere complexe

Să alegem, într-un plan α, un sistem de coordonate carteziene ortogonale, definit de reperul $(\vec{a}, \vec{b})$, unde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $OA \perp OB$, $|OA| = |OB| = m$.

Fiecărui punct P din planul α i se asociază un cuplu de numere reale (x, y), unde x este abscisa lui P iar y este ordonata lui P. Reciproc, fiecărui cuplu de numere reale (x, y) i se asociază un punct $P \in \alpha$, astfel încît x este abscisa lui P, iar y este ordonata lui P (fig. IV.6).

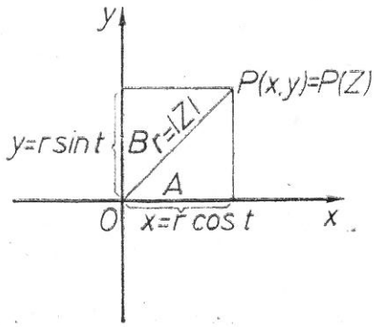

Fig. IV.6

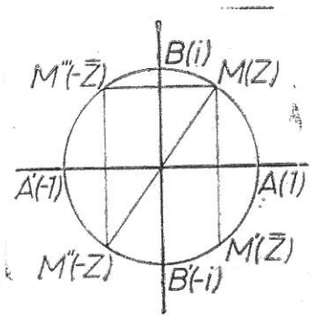

Fig. IV.7

Vom asocia acuma punctului $P(x, y)$ numărul complex $z = x + iy$ și vom spune că z este *afixul* punctului P.

Din felul în care am definit aceste aplicații, rezultă următoarele:

Aplicațiile $P \to (x, y)$, $(x, y) \to z = x + iy$, $P \to z$ sînt bijective.

Afixul punctului O este numărul complex 0.

Afixul punctului A este numărul complex 1.

Afixul punctului B este numărul complex i.

Afixele punctelor de pe axa OA sînt numere reale, iar afixele punctelor de pe axa OB sînt numere pur imaginare.

Fie z afixul unui punct M din planul α. Dacă notăm prin M', M'' și M''', punctele avînd ca afixe numerele $\bar{z}$, respectiv $-z$ și $-\bar{z}$, atunci (fig. IV.7).

Punctul $M'(\bar{z})$ este simetricul lui $M(z)$ față de axa OA.

Punctul $M''(-z)$ este simetricul lui $M(z)$ față de originea O.

Punctul $M'''(-\bar{z})$ este simetricul lui M'' față de OA și al lui M față de OB.

Punctul $A'(-1, 0)$ are afixul -1, iar punctul B' are afixul $-i$.

Dacă z și z' sînt afixele a două puncte M, M', atunci $z + z'$ va fi afixul acelui punct P, pentru care figura $OMPM'$ este un paralelogram, dacă presupunem că punctele O, M, M' nu sînt coliniare (fig. IV.8)

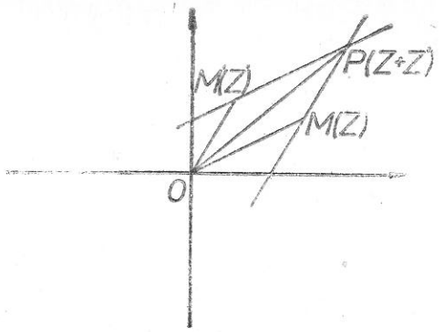

Fig. IV.8

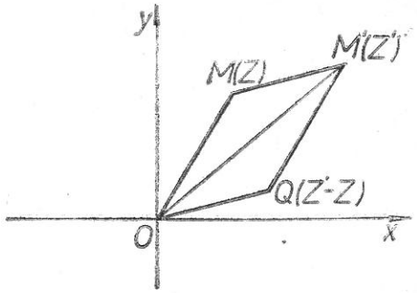

Fig. IV.9

În aceeași ipoteză ($M' \notin OM$), numărul $z' - z$ este afixul acelui punct Q, pentru care figura $OMM'Q$ este un paralelogram (fig. IV.9)

Modulul afixului z al unui punct M este egal cu distanța $d(O, M)$, măsurată cu ajutorul etalonului $|OA|$. Punctele al căror afix au modulul egal cu un număr pozitiv dat, sînt situate pe cercul cu centrul în originea O și de rază egală cu numărul pozitiv dat.

Punctele situate pe cercul de centru O și de rază 1 au ca afixe numere complexe de modul 1.

Punctele ale căror afixe au argumentul egal cu un număr real dat sînt situate pe o dreaptă trecînd prin originea O.

Fie M un punct astfel ca $d(O, M) = 1$ și fie z afixul lui M și fie t argumentul redus al lui M. Atunci t este egal cu lungimea arcului de cerc, situat pe cercul $C = C(0, 1)$ și avînd extremitățile A și M, parcurs de la A la M în sens de la A la B (fig. IV.10). Dacă $t \leqslant \pi$, numărul t reprezintă măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOM}$.

Raportul a două numere complexe nenule z și z' este real dacă și numai dacă punctele $M(z)$, $M'(z')$, care au z și z' ca afixe, sînt coliniare cu O, deci dacă $M' \in OM$.

Dacă raportul z/z' este pozitiv, atunci semidreptele $|OM$, $|OM'$ coincid, iar dacă acest raport este negativ, atunci semidreptele $|OM$, $|OM'$ sînt opuse.

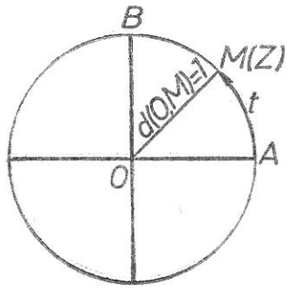

Fig. IV.10

Dacă $\arg(z/z') < \pi$, atunci măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$ este egală cu $\arg(z/z')$.

Dacă punctele M, M' au afixele z și z', atunci $d(M, M') = |z - z'|$.

Fie M, M' și P punctele de afixe z, z' și $z + z'$. Avem

$$d(M', P) = |z| = d(O, M),\ |z'| = d(O, M'),$$
$$|z + z'| = d(O, P).$$

Egalitatea

(1) $$|z + z'| = |z| + |z'|$$

este deci echivalentă cu relația

$$d(O, P) = d(O, M') + d(M', P),$$

care are loc numai dacă $M' \in |OP|$. În acest caz, punctele O, M, M', P sînt coliniare. Rezultă că egalitatea (1) este echivalentă cu relația

$$M' \in |OM.$$

În mod asemănător se arată că egalitatea

$$|z - z'| = |z| + |z'|$$

este echivalentă cu relația

$$O \in |MM'|.$$

Aplicații

(pentru cercuri)

Dacă avem două puncte P și Q de afixe p respectiv q, avem

(1) $$\cos \widehat{POQ} = \cos\arg\frac{p}{q} = \cos(\arg p - \arg q) = \cos(\arg q - \arg p),$$

deoarece măsura în radiani a unghiului $\widehat{POQ}$ este egală cu cel mai mic dintre numerele $\arg(p/q)$, $2\pi - \arg(p/q)$ și aceste numere au același cosinus (fig. IV.11). Avem de asemenea

$$\sin \widehat{POQ} = \pm\sin(\arg p - \arg q).$$

Fie m, p, q afixele a trei puncte distincte M, P, Q din planul p și fie P', Q' punctele de afixe $p - m$, respectiv $q - m$. Avem atunci (fig. IV.12)

(2) $$\widehat{PMQ} = \widehat{P'OQ'},\ \cos \widehat{PMQ} = \cos \widehat{P'OQ'} = \cos\arg\frac{p - m}{q - m},\ \sin \widehat{PMQ} =$$
$$= \pm \sin\arg\frac{p - m}{q - m}.$$

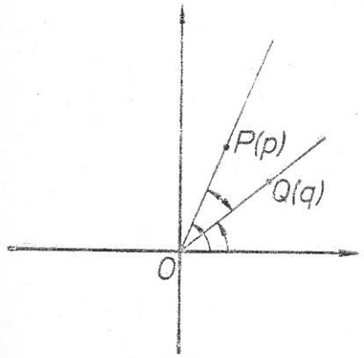

Fig. IV. 11

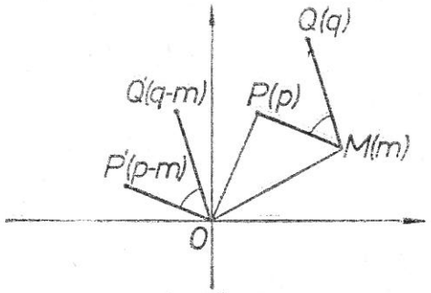

Fig. IV. 12

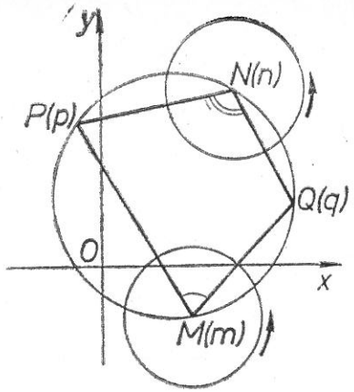

Fig. IV. 13

Din această formulă putem deduce condiția pe care trebuie s-o satisfacă afixele a patru puncte M, P, N, Q, pentru ca figura $MPNQ$ să fie un patrulater inscriptibil. Într-adevăr, pentru ca $MPNQ$ să fie un patrulater inscriptibil, trebuie și este suficient să avem (fig. IV.13).

$$\text{măs}\,\widehat{PMQ} = \pi - \text{măs}\,\widehat{PNQ}$$

sau

(3) $\cos\widehat{PMQ} = -\cos\widehat{PNQ}$, $\sin\widehat{PMQ} = \sin\widehat{PNQ}$.

Dacă notăm prin m, n, p, q afixele punctelor M, N, P, Q, din egalitățile (2) și (3) deducem (fig. IV.13)

(4) $$\operatorname{cosarg}\frac{p-m}{q-m} = -\operatorname{cosarg}\frac{p-n}{q-n},\quad -\operatorname{sinarg}\frac{p-m}{q-m} = \operatorname{sinarg}\frac{p-n}{q-n}.$$

Dacă notăm prin u și v rapoartele

$$u = \frac{p-m}{q-m},\quad v = \frac{p-n}{q-n},$$

atunci condițiile (4) devin

(5) $$\operatorname{cosarg} u = -\operatorname{cosarg} v,\quad -\operatorname{sinarg} u = \operatorname{sinarg} v.$$

Ultimele formule arată că punctele U, V, avînd afixele u și v, sînt situate pe două semidrepte $|OU$, $|OV$ situate în prelungire, deci astfel încît avem $O \in |UV|$ (fig. IV.14). Aceasta înseamnă că diferența $\arg u - \arg v$ este egală cu π sau cu $-\pi$ și că $\left|\arg\frac{u}{v}\right| = \pi$; rezultă că $\frac{u}{v}$ trebuie să fie un număr real negativ. Reciproc, dacă raportul $\frac{u}{v}$ este un număr real negativ, atunci relațiile (5) și deci și (4) sînt verificate și punctele M, N, P, Q formează un patrulater inscriptibil $MPNQ$. Deci:

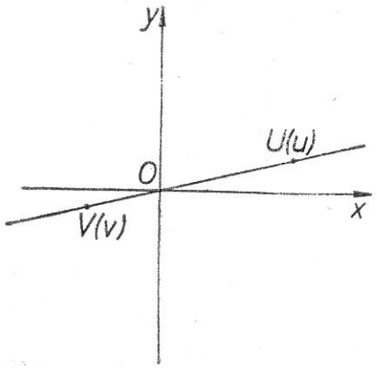

Fig. IV. 14

Condiția necesară și suficientă ca figura **MPNQ** *să fie un patrulater inscriptibil este ca afixele punctelor* **M, P, N, Q** *să verifice condiția*

(6) $$\frac{p-m}{q-m} : \frac{p-n}{q-n} < 0.$$

Condiția (6) mai poate fi scrisă sub forma

(7) $$(q-n)(p-m) = r(q-m)(n-p),\qquad r \in \mathbf{R},\ r > 0.$$

Formulele (7) arată că punctele E și F, de afixe $(q-n)(p-m)$ respectiv $(q-m)(n-p)$, sînt situate pe o aceeași semidreaptă cu originea O, deci că avem $|OE = |OF$. Punctul G, de afix $(q-n)(p-m) + (q-m)(n-p) = -(q-p)(m-n)$, se va găsi pe aceeași semidreaptă și vom avea

$$d(O, G) = d(O, E) + d(O, F).$$

Rezultă că dacă relația (6) este verificată, deci *dacă $MPNQ$ este un patrulater inscriptibil, atunci avem*

$$|q-p|\cdot|m-n| = |q-n|\cdot|p-m| + |q-m|\cdot|n-p|$$

sau

(8) $$d(P, Q)\, d(M, N) = d(N, Q)\, d(M, P) + d(M, Q)\, d(N, P).$$

Formula (8) este o relație verificată de diagonalele $|PQ|$, $|MN|$ și de laturile $|NQ|$, $|QM|$, $|MP|$, $|PN|$ ale unui patrulater inscriptibil oarecare $MPNQ$. Această formulă a fost descoperită de *Ptolomeu*.

Exercițiu. Să se arate că dacă patru puncte distincte M, N, P, Q au afixele m, n, p, q atunci o condiție necesară și suficientă ca cele patru puncte să fie coliniare sau conciclice este ca biraportul

$$\frac{m-p}{n-p} : \frac{m-q}{n-q}$$

să fie un număr real. Dacă figura $QNPM$ este un patrulater inscriptibil, atunci biraportul precedent este un număr real negativ.

Aplicație.

Teorema lui Pompeiu. Fie Q, M, N, P patru puncte în planul p și fie q, m, n, p afixele acestor puncte. Avem identitatea

(1) $$(q-m)(n-p) + (q-n)(p-m) + (q-p)(m-n) = 0.$$

Să notăm

(2) $$a = (q-m)(n-p),\quad b = (q-n)(p-m),\quad c = (q-p)(m-n).$$

Avem atunci

$$a + b + c = 0.$$

Fie E, F, O punctele de afixe a, respectiv $a + b$ și $a + b + c = 0$. Dacă punctele O, E, F nu sînt coliniare, atunci ele formează un triunghi, avînd lungimile laturilor egale cu modulele numerelor a, b, c (fig. IV.15). Dacă O, E, F sînt coliniare, spunem că ele formează un *triunghi degenerat*.

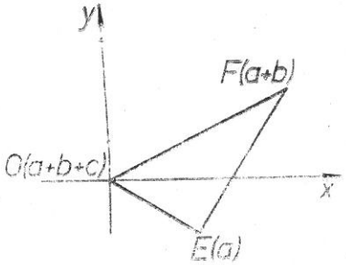

Fig. IV. 15

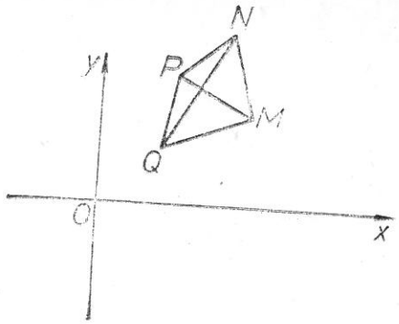

Fig. IV. 16

Din relațiile (2) rezultă că avem

(3) $|a| = d(Q, M)\, d(N, P)$, $|b| = d(Q, N)\, d(M, P)$, $|c| = d(Q, P)\, d(M, N)$.

Am demonstrat următoarea (fig. IV.16)

Teoremă. **Dacă avem un punct Q în planul unui triunghi MNP, atunci produsele dintre distanțele de la Q la vîrfurile triunghiului MNP cu lungimile laturilor opuse acestor vîrfuri sînt egale cu lungimile laturilor unui nou triunghi, eventual degenerat.**

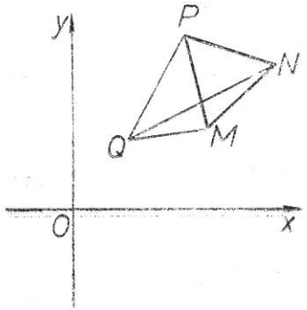

Fig. IV.17

În particular, dacă triunghiul MNP este echilateral, deci dacă (fig. IV.17)

$$d(M, N) = d(N, P) = d(M, P),$$

atunci numerele $|a|$, $|b|$, $|c|$ sînt proporționale cu distanțele de la punctul Q la vîrfurile triunghiului MNP.

Teorema lui Pompeiu. **Distanțele de la un punct din planul unui triunghi echilateral, la vîrfurile acelui triunghi, sînt egale cu lungimile laturilor unui alt triunghi, care poate fi eventual degenerat.**

Capitolul **V**

Geometrie euclidiană în spațiu

1. Geometrie experimentală și geometrie abstractă

Așa cum s-a arătat în clasa a IX-a, geometria a apărut ca știință experimentală cu mai mult de 4 000 de ani în urmă. După acumularea unui mare număr de proprietăți geometrice legate de distanțe, segmente, rapoarte de segmente, arii sau volume și de unghiuri, oamenii de știință ai antichității, începînd cu matematicienii și filozofii greci, au pus problema construirii unei discipline abstracte, care să aibă la bază un sistem de noțiuni legate de anumite obiecte din spațiul fizic și de proprietăți ale acestor obiecte, stabilite pe baza unui mare număr de experiențe, și care să se dezvolte apoi pe baza unor reguli de gîndire incontestabile. În acest fel, a apărut simultan geometria euclidiană, aritmetica și logica, întemeietorii acestor științe fiind Thales, Pitagora, Eudoxus, Teetet, Platon, Aristotel, Euclid, Arhimede și Apollonius.

În mod paradoxal, după elaborarea acestor științe, pe care le-au îmbogățit cu rezultate și metode de demonstrații care uimesc și astăzi pe cei care studiază Știința antichității, ei au abandonat izvorul experimental care i-a inspirat, aderînd la punctul de vedere al lui Aristotel, care susținea că Universul în care trăim este alcătuit dintr-un sistem finit de sfere concentrice de cristal, pe care sînt așezați aștrii de pe bolta cerească.

Concepția lui Aristotel a dominat gîndirea științifică multe sute de ani, pînă cînd un savant italian, Galileo Galilei, și un învățat englez, Isaac Newton, au pus bazele unei noi teorii a Universului. Potrivit acestei teorii, există un spațiu absolut cu trei dimensiuni, care conține toate corpurile din Univers și în care aceste corpuri se deplasează conform unor legi generale. Una din aceste legi afirmă că, dacă un corp material este izolat de toate celelalte corpuri, sau dacă este suficient de depărtat de acestea pentru ca el să nu sufere nici o influență, atunci acel corp se va deplasa, în spațiul absolut, în linie dreaptă, cu o viteză constantă.

Galilei și Newton au admis că liniile drepte și distanțele în spațiul absolut au proprietățile cuprinse în Geometria lui Euclid și au formulat legile fizice descoperite de ei, folosind noțiunile și proprietățile acestei geometrii. Lucrarea

fundamentală a lui Newton, intitulată „Philosophiae naturalis principia mathematica", apărută în anul 1686 (tradusă în limba română în anul 1956 de V. Marian, sub titlul „Principiile matematice ale filozofiei naturale", Ed. Academiei R.P.R.), poate fi considerată ca o continuare a cărților lui Euclid, datorită asemănării în ce privește modul de înlănțuire a definițiilor, postulatelor și propozițiilor și modul de prezentare a demonstrațiilor.

Spațiul absolut al lui Newton a stat la baza întregii fizici clasice, pînă la începutul secolului nostru; dar după descoperirea particulelor care intră în componența atomilor (electroni, protoni, neutroni) și a unor noi galaxii în Univers, care au pus în evidență proprietăți neașteptate și imposibil de formulat cu ajutorul noțiunilor clasice, s-a pus problema reexaminării ipotezelor care stăteau la baza Științei clasice, și în particular a Geometriei.

Această reexaminare a avut rezultate importante pe două direcții: Pe de o parte, s-au cristalizat ipotezele care stau la baza geometriei euclidiene. Rolul principal în această direcție a fost îndeplinit de David Hilbert, prin lucrarea sa „Grundlagen der Geometrie" (Bazele geometriei), apărută în 12 ediții, începînd din anul 1899. În această lucrare, Hilbert arată că întreaga geometrie euclidiană poate fi construită plecînd de la trei noțiuni fundamentale, ce nu se definesc (puncte, drepte și plane) și de la trei relații fundamentale (de incidență, de ordine și de congruență) și admițînd un sistem de 20 de axiome, care leagă între ele noțiunile și relațiile fundamentale. În paralel s-a dezvoltat Teoria mulțimilor și Logica matematică, care au permis construcția pe baze riguroase a unor noi geometrii, care au cuprins geometriile neeuclidiene ale lui Bolyai și Lobacevski și pe cea a lui Riemann, apoi geometriile proiective, geometria spațiilor Riemann și multe altele.

Toate aceste descoperiri și elaborări au intrat rapid în gîndirea și limbajul fizicienilor acestui secol, dornici a găsi geometria cea mai apropiată de structura spațiului fizic. Drept urmare, au apărut numeroase lucrări, din cele mai îndrăznețe, care au avut ca rezultat o îmbinare a geometriei cu fizica, asemănătoare celeia din vremea lui Galilei și Newton, dar îmbrățișînd o gamă de noțiuni, fenomene și modele mult lărgită. Din aceste realizări și ipoteze, știința viitorului va păstra desigur o mare parte, dar va da uitării o altă parte.

Cum trebuie instruit omul modern, viitor om de știință sau tehnician, pentru a se putea înscrie pe linia realizărilor durabile? Pentru aceasta, este necesară o cultură vastă, încadrată într-o gîndire logică.

În ce privește studiul geometriei, cunoașterea temeinică a geometriei euclidiene, care rămîne model de comparație pentru orice altă geometrie și cadru natural pentru multe ramuri ale Științei și Tehnicii moderne, este o necesitate. Cunoașterea geometriei euclidiene înseamnă cunoașterea ipotezelor care stau la baza acestei discipline, apoi cunoașterea celor mai importante teoreme ce pot fi demonstrate pe baza ipotezelor admise, precum și a limitelor în care aceste teoreme pot fi verificate experimental, sau în care aceste teoreme pot fi admise în activitatea practică.

Manualul de față caută să răspundă la primele aspecte. În ce privește limitele validității experimentale, elevii vor primi informațiile corespunzătoare urmărind celelalte manuale consacrate științelor naturii.

Lucrări practice

1. Fixați pe o foaie de hîrtie două puncte A, B. Trasați segmentul $|AB|$. Măsurați cu ajutorul unei rigle gradate lungimea segmentului $|AB|$. Prelungiți segmentul $|AB|$ dincolo de B cu un segment de 1 cm și dincolo de A cu un segment de 5 cm.

2. Desenați două drepte și indicați punctul lor de intersecție.

3. Uniți două puncte alese la întîmplare pe o foaie de hîrtie printr-o linie oarecare și așezați o ață astfel încît să se suprapună pe acea linie. Măsurați lungimea ației și apoi lungimea segmentului definit de cele două puncte. Care dintre cele două lungimi este mai mare?

4. Desenați zece segmente $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$, $|EF|$, $|FG|$, $|GH|$, $|HI|$, $|IJ|$, $|JK|$ astfel încît extremitățile lor să fie puncte coliniare și ordinea lor pe dreapta care le conține să coincidă cu ordinea alfabetică a literelor care le desemnează. Măsurați lungimile fiecăruia din cele zece segmente, calculați suma acestor zece lungimi și comparați cu lungimea segmentului $|AK|$. Explicați rezultatul.

5. Desenați segmente de 2,3 cm; 7,1 cm; 9,2 cm. Construiți segmente care să reprezinte suma celor trei segmente construite.

6. Construiți un segment a de 8,8 cm și un segment b de 6,9 cm. Construiți apoi un segment congurent cu segmentul $a - b$.

7. Construiți la întîmplare un segment a și construiți apoi segmente congruente cu $3a$, $4{,}5\ a$, $a/5$, $a/7$, $a/10$.

8. Care este raportul segmentelor a, b, știind că a are 4,8 cm, iar b 1,2 cm?

9. Construiți cercuri de raze de 1 cm, de 3,5 cm, de 10 cm și de 15 cm. Indicați pentru fiecare din cercurile construite cîte un punct interior și cîte un punct exterior.

10. Fixați pe o hîrtie un punct A și arătați care este locul geometric al punctelor care au distanța la A egală cu 1 (cm).

11. Desenați pe două foi de hîrtie două cercuri avînd razele de 1 cm. Încercați apoi să suprapuneți cele două cercuri unul peste celălalt.

12. Trasați două corzi paralele $|AB|$, $|A'B'|$ într-un cerc C. Rotind apoi cercul C în jurul centrului său, arătați că putem suprapune arcul $\widehat{B'B}$ peste arcul $\widehat{AA'}$.

13. Construiți într-un cerc avînd raza de 1 cm o coardă de 1,5 cm.

14. Indicați la întîmplare un arc $\widehat{AB}$ pe un cerc K și construiți apoi un arc de lungime dublă, în același cerc.

15. Construiți un cerc la întîmplare. Fixînd apoi un punct A pe acest cerc, construiți un triunghi echilateral, un pătrat și un pentagon regulat, astfel ca aceste poligoane să aibă toate vîrfurile pe cercul construit la început și astfel ca A să fie vîrf comun.

16. Construiți un triunghi echilateral avînd laturile de lungime 3 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi.

17. Construiți un triunghi cu laturile de 1,5 cm, 2 cm și 2,5 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi.

18. Construiți un triunghi cu laturile de 9 cm, 10 cm și 11 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi. Trasați apoi medianele și bisectoarele aceluiași triunghi.