SAI

07.11.2023

Seminar 6

(II) Fie $(G,\cdot)$ un grup pt $H \subset G$, $H \neq \emptyset$. Spunem că H e subgrup al lui G dacă: 1) $\forall x,y \in H$, $xy \in H$

2) $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$, unde $x^{-1} \in G$ al lui x

(1) Arătați că $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z} \right\}$ e grup în raport cu înmulț. matr.

Fie $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$; deci $m \in \mathbb{Z}$ și $a \in \mathbb{Q}$

Atunci $\det M = 2^m \neq 0$; deci $M \in GL_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{M} \subset GL_2(\mathbb{R})$ (grup matr. inv.)

Fie $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 2^p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$

Atunci $MN = \begin{pmatrix} 1 & b + 2^p a \\ 0 & 2^{m+p} \end{pmatrix}$; întrucât $a, b \in \mathbb{Q}$, $m, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow b + 2^p a \in \mathbb{Z}$ și $m+p \in \mathbb{Z}$

Ca urmare $MN \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}$ parte stabilă a lui $\mathcal{M}$

Fie $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ ($a \in \mathbb{Q}$ și $m \in \mathbb{Z}$)

Luăm $P = \begin{pmatrix} 1 & -a \cdot 2^{-m} \\ 0 & 2^{-m} \end{pmatrix}$

$a \in \mathbb{Q}$ și $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a 2^{-m} \in \mathbb{Q}$ și $-x \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \mathcal{M}$

În plus $MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = PM$

Ca urmare, P e simetrica (din $GL_2(\mathbb{R})$) a matricei M

În concluzie, $\mathcal{M}$ = subgrup al lui $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$

Ca urmare, $(\mathcal{M}, \cdot)$ grup

(2) Fie $H \leq (\mathbb{Z}, +)$. Atunci $0 \in H$

Dacă $H = \{0\}$, atunci $H = 0\mathbb{Z}$

Dacă $H \neq \{0\}$, atunci $\exists x \in H \setminus \{0\}$

Înlocuind eventual x cu $-x$ constatăm că $H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$

Notăm $m = \min H \cap \mathbb{N}^*$

Atunci
- $m \in \mathbb{N}$
- $2m = m + m \in H$
- $3m = 2m + m \in H$

Inductiv, $km \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

Fie $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Atunci $-km \in H$ de mai sus, deci $km \in H$ întrucât $H \leq \mathbb{Z}$

În concluzie, $m\mathbb{Z} \subset H$

Fie $h \in H$

Conform T.ÎR, $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ a.î. $h = mq + r$ și $0 \leq r < m$

Dacă $r = 0 \Rightarrow h = mq \in \mathbb{Z}$

$r \neq 0 \Rightarrow h \in H$ și $mq \in H \Rightarrow r = k - mq \in H$ dar $0 \leq r < m$ $\Big| \Rightarrow$ abs

Rămâne că $h \in m\mathbb{Z}$

Deci avem $\Rightarrow H \subseteq m\mathbb{Z} \Rightarrow H = m\mathbb{Z}$

Ca urmare: SUBGRUPURILE LUI $\mathbb{Z}$ SUNT ELEMENTELE MULȚIMII $\{m\mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{N}\}$ ȘI NUMAI ELE!!!

În aceeași ordine de idei, dat fiind $m \in \mathbb{N}$, SUBGRUPURILE LUI $\mathbb{Z}_m$ SUNT ELEMENTELE MULȚIMII $\{\hat{d} \cdot \mathbb{Z}_m \mid d \mid m\}$ ȘI NUMAI ELE!!!

Notăm planul cu $\mathcal{P}$ și $\mathrm{Izom}(\mathcal{P}) = \{f : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \mid \forall A, B \in \mathcal{P},\ f(A) f(B) = \{AB\}\}$

izometria (în plan?), orice fct. e bij în $\mathrm{Izom}(\mathcal{P}) \Rightarrow \mathrm{Izom}(\mathcal{P}) \subset \mathrm{Bij}(\mathcal{P})$,

unde $\mathrm{Bij}(\mathcal{P})$ = mulț. bij. $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$

1. Fie $f, g \in \mathrm{Izom}(\mathcal{P})$. Atunci, pt $A, B \in \mathcal{P}$:

$(f \circ g)(A) \cdot (f \circ g)(B) = f(g(A)) \cdot f(g(B)) = g(A)\, g(B) = AB$ $(f, g \in \mathrm{Izom}(\mathcal{P}))$

Deci $(f \circ g) \in \mathrm{Izom}(\mathcal{P})$

Fie $f \in \mathrm{Izom}(\mathcal{P})$. Atunci $AB = f(f^{-1}(A))\, f(f^{-1}(B)) = f^{-1}(A) \cdot f^{-1}(B)$

Deci $f^{-1} \in \mathrm{Izom}(\mathcal{P})$

Ca urmare, $Izom(\mathcal{P}) \leq (Bij(\mathcal{P}), \cdot)$.

Deci $(Izom(\mathcal{P}), \cdot)$ e grup.

Dacă considerăm o figură $\mathcal{F}$ în plan, notăm cu ~~$J_{\mathcal{F}}=$~~
$J_{\mathcal{F}} = \{ f \in Izom(\mathcal{P}) \mid f(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \}$

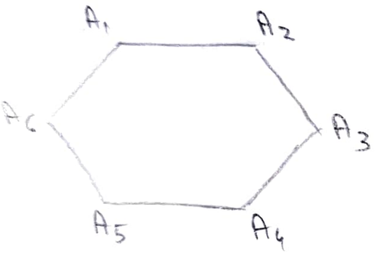
Evident, $J_{\mathcal{F}} \subset Izom(\mathcal{P})$

Dacă $f \in J_{\mathcal{F}}$, atunci $\mathcal{F} = f^{-1}(f(\mathcal{F})) = f^{-1}(\mathcal{F})$

(mai era ceva între u-am apucat)

Ca urmare, $J_{\mathcal{F}} \leq (Izom(\mathcal{P}), \circ)$

Deci $(J_{\mathcal{F}}, \circ)$ e grup



$\mathcal{H} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$

Dacă $f \in J_{\mathcal{F}}$

$f(A_1)$ e vârf, deci poate fi ales în 6 moduri.

Dacă-l fixăm, $f(A_2)$ e vf. vecin cu el, deci are 2 variante.

Ca urmare $|J_{\mathcal{F}}| \leq 12$.

Notăm cu φ rotirea de $\pi/3$ în jurul lui O (în sens trig.)

$\{1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \sigma, \varphi\sigma, \varphi^2\sigma, \varphi^3\sigma, \varphi^4\sigma, \varphi^5\sigma\} = J_{\mathcal{H}}$

sunt dif 2 câte 2

Dacă în locul unui hexagon considerăm un poligon regulat cu n laturi obț. grupuri: