CURS 7

CALCUL DIFERENȚIAL ÎN $\mathbb{R}^m$

- $F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $m \geq 1$
- F diferențiabilă în $a \in D$ dacă $\exists\, T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ liniară

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$ unde $\|x-a\|$ = norma (?)

• $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară s.n. diferențiala lui F în a

T $F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă în $a \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow$ diferențiala lui F în a este unică

$\boxed{dF(a) = T}$

PROPRIETĂȚI ALE DIFERENȚIALEI

T $F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă în $a \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ continuă în a

T $F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $F(f_1, f_2, \dots f_m)$, $f_i : D \to \mathbb{R}$; $i = \overline{1,m}$

Atunci F diferențiabilă în $a \in D \Leftrightarrow f_i$ diferențiabilă în a $\forall i = \overline{1,m}$ și $dF(a) = (df_1(a), df_2(a), \dots, df_m(a))$

T $F: \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pt care $\exists\ c \in \mathbb{R}^m$ a.î. $F(x) = c\ \forall x \in D$

Atunci F diferențiabilă pe D și $dF(x) = 0\ \forall x \in D$

T $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară $\Rightarrow T$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^n$ și $dT = T$

T $F, G : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferențiabile în $a \in D$; $\lambda \in \mathbb{R}$ (ct)

- Atunci $F + G : D \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă în a

  $d(F+G)(a) = dF(a) + dG(a)$

- $\lambda F : D \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă în $a \Rightarrow d(\lambda F)(a) = \lambda dF(a)$

- $F \cdot G : D \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă în a

  $d(F \cdot G)(a) = dF(a) \cdot G(a) + F(a) \cdot dG(a)$

DERIVATA DIRECȚIONALĂ / DERIVATA GÂTEAUX

- $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Delta$, $v = (v_1, v_2, \dots v_m) \in \mathbb{R}^m$ vector
$\{\alpha \in \mathbb{R}^m \mid \alpha = a + t v, t \in \mathbb{R}\}$ s.n. dreapta care trece prin a și de direcție v

- Derivata direcțională în a în direcția $v \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{df}{dv}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

- Derivabilă în a în direcția v dacă $\frac{df}{dv}(a) \in \mathbb{R}$
- f are derivată parțială în raport cu variabila x_k în punctul $a \in \Delta$ dacă $\exists\ \frac{df}{dx_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}$

- Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ derivabilă parțial —"—

- f derivabilă parțial în rap cu $\forall$ var. $\Rightarrow$ f deriv parț. pe Δ
- $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe $\Delta \Rightarrow f$ derivabilă în orice direcție $v \in \mathbb{R}^m$ $\frac{df}{dV}(a) = df(a)(v)$; $C^1(\Delta)$

(T) Legătura dintre cele 2 concepte

$f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferențiabilă în $a \in \Delta \Rightarrow f$ deriv. în orice direcție $v \in \mathbb{R}^m$ și $\frac{df}{dv}(a) = df(a)(v)$

unde $df(a)(v)$ = difer. lui f în a și difer. lui f(a) în v

- Corolar: $f: \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, f e $C^1(\Delta) \Rightarrow f$ diferențiabilă

(T) Formulă de calcul

$f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferențiabilă în $a \in D$

Pt. orice $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$;

$$df(a)(v) = \frac{df}{dv}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

(T) Criteriul de diferențiabilitate

$f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$ deriv. parțial într-o vecinătate

V_a lui a și derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sunt continue în a

Atunci f diferențiabilă în a

MATRICEA IACOBIANĂ

- $F : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $n, m \geq 1$; $F = (f_1, f_2, \dots f_m)$; $a \in D$
- $$J_F(a) = \mathcal{J}_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$
- $\det(J_F(a))$ = Iacobianul lui F în a

(T) Regula lanțului

$F : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \Delta = \mathring{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^m$; $n, m, p \geq 1$; dif. în a

$G : \Delta \to \mathbb{R}^p$ diferențiabilă în $F(a)$

Atunci $d(G \circ F)(a) = (d\,G(F(a))) \circ dF(a)$

• $J_{G\circ F}(a) = J_G(F(a)) \cdot J_F(a)$

T Teorema de medie pt funcții cu val $\in \mathbb{R}$

$f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}^m$; $[a,b] \subset D$, f difer. pe D

$\exists\ \alpha \in \{x = a + \lambda(b-a) \mid \lambda \in (0,1)\}$; $f(b) - f(a) = df(\alpha)(b-a)$

T Teorema de medie pt funcții cu val. vectoriale

$F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ difer. pe D, $C \subset D$

$\exists\ M > 0$ a.î. $\|dF(x)\| < M\ \forall\, x \in C \Rightarrow \|F(b) - F(a)\| \le M \|b - a\|$

Teorema (de medie pt funcții cu valori vectoriale)

$F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă pe D, $C \subset D$ convexă

$\exists M > 0$ a.î. $\|dF(x)\| \leq M \ \forall x \in C$ "mulțimea convexă C"

Atunci $\|F(b) - F(a)\| \leq M\|b - a\| \ \forall a, b \in C$

Funcții implicite

$f: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferențiabilă

$(x_0, y_0) \in E$ a.î. $f(x_0, y_0) = 0$

$f(x,y) = 0 \Longrightarrow \underset{\text{Pot să rezolv ec.?}}{?} \Longrightarrow y = \varphi(x)$

? $\exists \varphi$

? unică

? diferențiabilă

Ex.: $x^2 + y^2 = 1$

punctul $(1,0)$ $\quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$

→ nu e unică ($\pm$)

→ nu e derivabilă

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$

punct $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to y = \sqrt{1-x^2}$

→ unică

→ derivabilă

$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$

Teorema funcțiilor implicite (/ de inversare locală)

$F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$F(x,y) = 0$; $(x_0, y_0) \in D$

Presupunem că 1) F este de clasă C^1 pe D

2) $F(x_0, y_0) = 0$

3) $\det\left(J_F^y(x_0, y_0)\right) \neq 0$

$F = (F_1, \dots, F_m)$

$$J_F^y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,y) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x,y) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x,y) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(x,y) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x,y) \end{pmatrix}$$

Atunci $\exists I \in \mathcal{V}_{x_0}$ $\exists Y \in \mathcal{V}_{y_0}$ $\exists! \varphi : I \to Y$ a.î.:

i) φ este diferențiabilă pe I

ii) $F(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in I$

iii) $F(x,y) = 0 \Rightarrow y = \varphi(x)$; $(x,y) \in I \times Y$

Calculul derivatelor parțiale ale funcției implicite în unele cazuri particulare:

1) $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x_0, y_0) = 0$; f ~~[illegible]~~ diferențiabilă $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$\xRightarrow{T} \exists z : I \to Y$ soluție a problemei de funcții implicite

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \Big/ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

2) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f((x,y), z) = 0$

f diferențiabilă ; $f(x_0, y_0, z_0) = 0$

$\det J_f^z(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \xRightarrow{T} \exists z$ sol. a. problemei de funcții implicite

$$f(x, y, z(x,y)) = 0 \Big| \frac{\partial}{\partial x} \quad \Big| \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x,y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial z}(x,y) = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x,y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z(x,y)) \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x,y))$$

Ex.: Să se arate că Sist. de ec. $\left| \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right.$

$$\begin{cases} x^2u^2 + xzv + y^2 = 0 \\ yzu + xyv^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

determină unic pe u și v ca funcții de x,y,z într-o vecinătate a lui $(0,1,3,3,-3)$. Să se găsească $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}(\dots)$

$f_1(x,y,z,u,v) = x^2u^2 + xzv + y^2$

$f_2(x,y,z,u,v) = yzu + xyv^2 - 3x$

$F = (f_1, f_2)$ $\quad C^1 \quad F(0,1,3,3,-3) = 0$

$\frac{\partial f_1}{\partial u}(x,y,z,u,v) = 2x^2u \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v}(x,y,z,u,v) = xz$

$\frac{\partial f_2}{\partial u}(x,y,z,u,v) = yz \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v}(x,y,z,u,v) = 2xyv$

$$J_F'(0,1,3,3,-3) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$

$\det(\;) = -18$

$\xrightarrow[\text{fct. implicite}]{T.}$ O.K.

Sistem

$$\begin{cases} 2x^2\frac{\partial u}{\partial x}u + xz\frac{\partial v}{\partial x} + 2xu^2 + zv = 0 \\ yz\frac{\partial u}{\partial x} + 2xyv \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + yv^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Cramer $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\frac{4xyu^2v - 2yzuv - 3z + yzv^2}{y(4x^2uv - z^2)}$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x^2yuv^2 + 6x^2u + 2xyzu^2 + yvz^2}{xy(4x^2uv - z^2)}$$

Derivate parțiale de ordin superior

$f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabilă parțial pe D

$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ derivatele parțiale în raport cu variabilele x_i $\quad i = \overline{1,n}$

Def. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e derivabilă parțial în raport cu variabila x_k, spunem că f are derivată parțială de ord. al doilea

Not. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ → derivata parțială mixtă ; $k \neq i$

Dacă $k = i$ **Notație:** $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a)$

Def. a) f s.n. de clasă C^q $(q \geq 2)$ dacă f e derivabilă parțial de ordinul q și derivatele parțiale de ordinul q sunt continue.

Notație $f \in C^q(D)$

b) f s.n. de clasă C^∞ dacă f este de clasă C^q pe D $\forall q \geq 2$

Notație $f \in C^\infty(D)$

Ex.: $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2)\cos(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 \cos(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_2 \cos(x_1^2 + 2x_1x_2) - 2(x_1 + x_2)\sin(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2\cos(x_1^2 + 2x_1x_2) - 4(x_1 + x_2)^2 \sin(x_1^2 + 2x_1x_2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \ldots$