Alg Liniară

27.02.2024

Curs 1

Rezolvarea sistemelor liniare prin metoda eliminării (Gauss)

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \dots a_{1n}x_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} + \dots a_{2n}x_{2n} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots a_{mn}x_{mn} = b_m \end{cases}$$

$K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$a_{ij}, b_j \in K \quad \forall i,j$

În general $K = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$ matricea sistemului

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$ matricea coloană a term. liberi

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$ matricea coloană a necunoscutelor

X soluție a sistemului dacă $x_1, x_2, \dots x_n$ verifică toate ec. sistemului.

$AX = B$ forma matric. a sistemului

$\bar{A} = (A|B)$ mat. extinsă a sist.

- Sistemul incompatibil $\Leftrightarrow$ nu are soluții
- Sistemul compatibil
  - determinat $\Leftrightarrow$ are o soluție unică
  - nedeterminat $\Leftrightarrow$ are mai multe soluții

- Exemplu:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5=2 \\ x_3+2x_4=1 \\ x_4-x_5=0 \end{cases}$$

5 necunoscute, 3 ecuații
x_2, x_5 nec. secundare
x_1, x_3, x_4 nec. principale

$x_2=s$, $x_5=t \Rightarrow x_4=x_5=t$, $x_3=-2x_4+1=1-2t$

$x_1=2-x_2+x_3-x_4-2x_5=2-s+1-2t-t-2t=3-s-5t$

S = mulțimea soluțiilor

$$S=\left\{\begin{pmatrix}3-s-5t\\ s\\ 1-2t\\ t\\ t\end{pmatrix} \middle| \ t,s\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\0\\-2\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & -1 & 0\end{array}\right)$$ matrice în formă eșalon

- O matrice A este în forma eșalon dacă:
  - liniile nule se găsesc după toate liniile nenule
  - pe fiecare linie nenulă primul element nenul (de la stg) se numește pivot
  - pivotul pe linia K+1 se găsește la dr. pivotului de pe linia K pt orice linie care are pivot
  - * dacă toți pivoții = 1
  - * toate elem. de deasupra pivoților pe col. = 0 $\Big| \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ matrice în forma eșalon redusă

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu este în forma eșalon

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ este în forma eșalon

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eșalon redus

Transformări elementare asupra liniilor unei mat / ec. unui sistem

$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_m \end{pmatrix}$ $\quad L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})$ - linia i a mat A

1. permutarea a 2 linii: $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$

2. înmulțirea unei linii cu un nr. nenul

$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{L_i \leftarrow \alpha L_i} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$

3. adunarea la o linie a altei linii înmulțite cu un nr. nenul

$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \beta L_j} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \beta L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$ $\quad \beta \neq 0, \ i \neq j$

- Exemplu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_1 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Algoritm pt. aducerea unei mat. la forma eşalon

- $A = O_{m,n}$ mat. în f. eşalon
- $A \neq O_{m,n}$ începem cu col $j=1$ şi continuăm
- Căutăm un elem $\neq 0$ pe col j care se găseşte sub linia pivotului precedent şi acesta va deveni noul pivot.
- Aducem linia pe care se găseşte acesta sub linia pivotului precedent (facem o transf de tip ①) şi apoi facem zerouri pe coloană (cu transf ③)
- Ne oprim după ce ajungeam la col. sau linia ultimului pivot găsit avem 2 linii nule.
- Pt a aduce la f eşalon redus continuăm astfel:
  - facem pivoţii $= 1$
  - facem zerouri deasupra pivoţilor

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare cu metoda lui Gauss

$\bar{A} = (A|B)$ mat extinsă (sist $AX = B$)

- Aducem mat. $\bar{A}$ la forma eşalon $\bar{E}$ şi rescriem sist. echivalent care are pe $\bar{E}$ (mat. ext.) şi îl rezolvăm
- 2 sist. sunt echivalente dacă au aceleaşi soluţii

- Rezolvați sistemul (exemplu):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=5 \\ 2x_1+x_2+x_3 \quad = 5 \\ x_1 \quad -2x_4 = 10 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=5 \\ -x_2-x_3-4x_3=-5 \\ 0=10 \end{cases}$$! sist. incompatibil

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=5 \\ -x_2-x_3-4x_3=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3=s, \ x_4=t \\ x_2=5-s-4t \end{array}$$ și $x_1=2t$

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 2t \\ 5-s-4t \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \ s,t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

Algoritm de rezolvare

- $\bar{A}$ mat extinsă $\longrightarrow$ $\bar{E}$ forma eșalon
- Dacă obț. pivot pe ultima col. $\Rightarrow$ sist incompatibil
- Altfel, compatibil: → nec. col. fără pivot sunt necunoscute sec. (alese arbitrar)
  → nec. corp. col. cu pivoți sunt nec. princip.

• Obs:

1) Sist. compatibil det $\iff \exists$ pivot pe fiecare col. cu excepția ultim.

2) $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ $\rightsquigarrow$ $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & c_m \end{array}\right)$ forma eșalon redusă

sist. comp. det.

• $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ s.m. inversabilă dacă $\exists B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ a.î. $AB = BA = I_m$

• Dacă $\exists B$ este unică, s.m. inversa mat A și se not. cu A^{-1}

Algoritmul pt. aflarea inversei

• $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

• $(A \mid I_m)$ o aducem la forma eșalon redus $(B \mid C)$

• A inversabilă $\iff B = I_m \Rightarrow C = A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \mid I_m) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = -\frac{1}{2}L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$