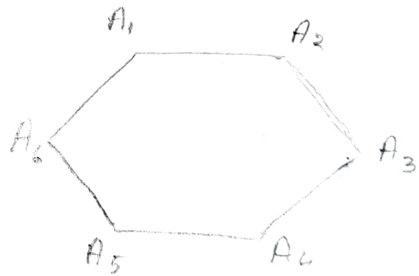
SAI

14.11.2023

Seminar 4

① Fie $n \geq 3$ și $f \in D_n$

Dacă notăm cu $\phi(f)$ funcția



$\phi : \{1,2,3,\dots n\} \to \{1,2,3,\dots n\}$ dată prin

$\phi(f)(k) =$ indicele lui $f(A_k)$

$\phi(f)$ e injecție (că f e injecție) : o mulțime finită $\to$ ea însăși $\Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(f)$ e bijecție

Ca urmare, $\phi : D_n \to S_n$

Dar pt $f, g \in D_n$ și $k \in \{1,2,\dots n\}$

$\phi(fg)(k) =$ indicele lui $(fg)(A_k)$ = indicele lui $f(g(A_k)) = f(A_{\phi(g)(k)})$

$= A_{\phi(f)(\phi(g)(k))} = A_{(\phi(f)\circ\phi(g))(k)} = (\phi(f)\circ\phi(g))(k)$

Deci $\phi(f) \circ \phi(g) = \phi(fg)$

Ca urmare ϕ e morfism de grupuri

Dacă pt $f, g \in D_n$ avem $\phi(f) = \phi(g)$, atunci $\phi(f)(\cancel{A}1) = \phi(g)(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\phi(f)(A_1) = \phi(f)(A_1)} \quad f(A_1) = g(A_1)$

$\phi(f)(2) = \phi(g)(2) \Rightarrow f(A_2) = g(A_2)$ $\Big| \Rightarrow f = g \Rightarrow \phi$ e injectivă

$\phi(f)(3) = \phi(g)(3) \Rightarrow f(A_3) = g(A_3)$

Obs: Morfismele inj ne permit să identificăm structura-domeniu cu o structură-codomeniu. Se fol. uneori în context term. „scufundăm structura domeniu în struct-codomeniu".

Deci, în cazul nostru, D_n „se scufundă în" S_n

Deci, D_3 se scufundă în S_3

dar $|D_3| = 6$, $|S_3| = 6$, $6 \in \mathbb{N}$ $\Big| \Rightarrow$ $\Big| \Rightarrow$ obținem că D_3 e izomorf cu S_3.

Când nu avem alte planuri care să ne ceară să le gândim ca fiind diferite, le vom identifica.

$S_3 = D_3 = \{1, \rho, \rho^2, \cancel{\sigma\rho}, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$ cu $\rho^3 = 1$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma\rho = \rho^2\sigma$

	1	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
1	1	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	1	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	1	ρ	$\rho^2\sigma$	σ	$\rho\sigma$
σ	σ	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	1	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^2\sigma$	ρ	1	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^2	ρ	1

$(\rho\sigma)\rho = \rho(\sigma\rho) = \rho\rho^2\sigma = \rho^3\sigma = \sigma$

$(\rho\sigma)(\rho\sigma) = \rho(\sigma\rho)\sigma = \rho\rho^2\sigma\sigma =$
$= \rho^3\sigma^2 = 1\sigma^2 = 1$

$\langle 1 \rangle = \{1\}$

$\langle \rho \rangle = \{1, \rho, \rho^2\}$

$\langle \rho^2 \rangle = \{1, \rho, \rho^2\}$

$\langle \sigma \rangle = \{1, \sigma\}$

$\cancel{\langle \sigma\rho \rangle = \{1, \sigma\rho,}$

$\langle \rho\sigma \rangle = \{1, \rho\sigma\}$ $\cancel{\rho^2\sigma\}}$ $\cancel{= \langle \rho^2\sigma \rangle}$

$\langle \rho^2\sigma \rangle = \{1, \rho^2\sigma\}$

Aşadar, laticea subgr. lui S_3 este:

$$S_3$$

$\{1,\sigma\}$ $\quad$ $\{1,\rho\sigma\}$ $\quad$ $\{1,\rho,\rho^2\}$ $\quad$ $\{1,\rho^2\sigma\}$

$$\{1\}$$

Curs: Dacă $H \leq G$ definim $x \equiv_s y \pmod H \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ şi $x \equiv_d y \pmod H \Rightarrow xy^{-1} \in H$

$\equiv_s$ şi $\equiv_d$ sunt rel. de echiv; $G/H_s = \dfrac{G}{\equiv_s \pmod H}$;

$G/H_d = \dfrac{G}{\equiv_d \pmod H}$

Considerăm $H_\sigma = \langle\sigma\rangle = \{1,\sigma\}$

$(G/H_\sigma)_s = \{\{1,\sigma\},\{\rho,\rho\sigma\},\{\rho^2,\rho^2\sigma\}\}$ $\quad(\rho\cdot\rho^{-1}=1 \Rightarrow \rho^{-1}\cdot ?=\sigma \Rightarrow ?=\rho\sigma)$ $\quad(1\cdot 1^{-1}=1 \Rightarrow 1^{-1}\cdot ?=\sigma \Rightarrow ?=\sigma)$

$(G/H_\sigma)_d = \{\{1,\sigma\},\{\rho,\rho^2\sigma\},\{\rho^2,\rho\sigma\}\}$ (invers ca ex de mai sus)

Am calculat $(G/H_\sigma)_s$ şi $(G/H_\sigma)_d$ folosind doar funcţiile. Pe de altă parte, dacă $H \leq G$, iar $x \in G$, atunci $\dfrac{x}{\equiv_s \pmod H} = xH$, şi $\dfrac{x}{\equiv_d \pmod H} = Hx$

$H = \langle\rho\rangle = \{1,\rho,\rho^2\}$ Atunci:

$(G/H_\rho)_s = \{1\cdot\{1,\rho,\rho^2\}, \sigma\cdot\{1,\rho,\rho^2\}\} = \{\{1,\rho,\rho^2\},\{\sigma,\rho^2\sigma,\rho\sigma\}\}$

$(G/H_\rho)_d = \{\{1,\rho,\rho^2\}\cdot 1, \{1,\rho,\rho^2\}\cdot\sigma\} = \{\{1,\rho,\rho^2\},\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}\}$

Curs: Pt orice grup G şi orice $H \leq G$, $|(G/H)_s| = |(G/H)_d| = |G:H|$

Acest nr. (card) s.n. INDICELE LUI H ÎN G

Teorema lui Lagrange $|G| = |H|\cdot|G:H|$

	$\{1,\rho,\rho^2\}$	$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$
$\{1,\rho,\rho^2\}$	$\{1,\rho,\rho^2\}$	$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$
$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$	$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$	$\{1,\rho,\rho^2\}$

Dacă am lua $(G/H_\sigma)_s$: $\{\rho, \rho\sigma\} \cdot \{\rho^2, \rho^2\sigma\} = \{1, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$

Dacă $\forall x \in G$, $xH = Hx$, atunci pe $(G/H)_s$ avem $(xH)\cdot(yH) = x(Hy)H =$
$= x(yH)H = (xy)(HH) = (xy)H$ (ultima = prin dublă incluziune)

Curs: Fie G un grup și $H \leq G$. Spunem că H e SUBGRUP NORMAL al lui G dacă e îndeplinită una din urm. cond. echiv:

- $(G/H)_s = (G/H)_d$
- $\forall x \in G$, $xH = Hx$
- $\forall x \in G$, $xHx^{-1} = H$
- $\forall x \in G$, $xHx^{-1} \subset H$

NOTĂM: $H \trianglelefteq G$

Cu def. de mai sus, analizând cele vb. mai devreme constatăm că: $\{1, \rho, \rho^2\} \trianglelefteq S_3$ și $\{1, \sigma\} \ntrianglelefteq S_3$

Cum recunoaștem subgr. normale?

1) cu def
2) dacă G e comut., $\forall$ subgr al său e normal
3) $\{e\} \trianglelefteq G$ și $G \trianglelefteq G$
4) Orice subgr. de indice 2 e normal

Deci $\{1, \rho\sigma\} \ntrianglelefteq S_3$ și $\{1, \rho^2\sigma\} \ntrianglelefteq S_3$

Propr. subgr. normale: dacă $H \trianglelefteq G$ pe $(G/H)_s$, operația $(xH)\cdot(yH) = (xy)H$, atunci $((G/H)_s, \cdot)$ e grup

El se notează $\frac{G}{H}$ și sn. GRUPU FACTOR al lui G în rap. cu H

Deci: $G/H = \{xH \mid x \in G\}$

G