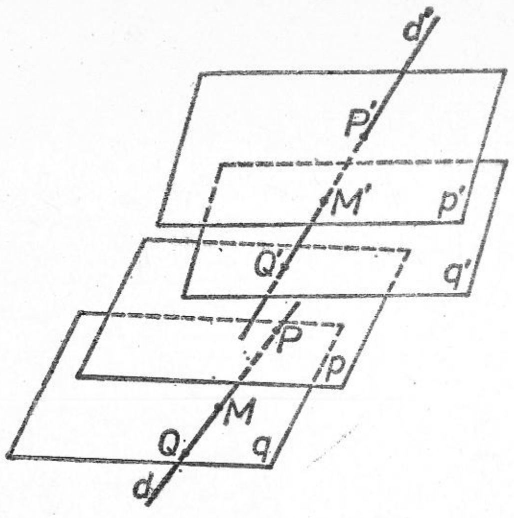

Fig. VIII.26

ceea ce implică $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, deci $B \in [AC]$, contrar ipotezei.

Punctele A', B', C' fiind necoliniare, ele aparțin unui plan unic p'. Vom arăta că $T(p) = p'$. Să arătăm la început că $T(p) \subset p'$.

Fie $M \in p$. Ducem prin M o dreaptă oarecare situată în planul p, astfel ca această dreaptă să intersecteze două din dreptele AB, BC, CA (cel puțin), în două puncte distincte, să spunem P și Q. Să presupunem că $P \in AB$ și $Q \in AC$. Avem $M \in PQ$. Imaginile acestor puncte vor avea proprietățile

$$P' \in A'B', \ Q' \in A'C', \ M' \in P'Q'.$$

Dar $A'B' \subset p'$, $A'C' \subset p'$. Rezultă $P' \in p'$ și $Q' \in p'$. Punctele P', Q' sînt distincte, deoarece izometriile sînt aplicații injective. Din $M' \in P'Q'$ rezultă $M' \in p'$; am arătat că $T(p) \subset p'$.

Pentru a arăta că $p' \subset T(p)$ procedăm la fel cum am arătat că o izometrie într-un plan transformă o dreaptă pe o dreaptă.

Exerciții

1. Să se arate că $p' \subset T(p)$.

2. Să se arate că orice izometrie transformă două plane paralele în două plane paralele.

Teoremă. **Orice izometrie T a spațiului este o aplicație surjectivă.**

Demonstrație. Trebuie arătat că orice punct M' este imaginea unui punct M prin izometria T. Fie p, q două plane paralele. Imaginile acestor plane prin T vor fi două plane p', q', de asemenea paralele. Prin M' să ducem o dreaptă d' neparalelă cu p', deci nici cu q'. Fie punctele (fig. VIII.27)

$$P' \in p' \cap d', \ Q' \in q' \cap d'.$$

Din relațiile $T(p) = p'$, $T(q) = q'$ rezultă că există puncte $P \in p$ și $Q \in q$ astfel ca $T(P) = P'$ și $Q' = T(Q)$. Pe dreaptă $d = PQ$ considerăm acel punct M, pentru care avem:

$$d(M, P) = d(M', P'), \ d(M, Q) = d(M', Q').$$

Atunci vom avea $M' = T(M)$.

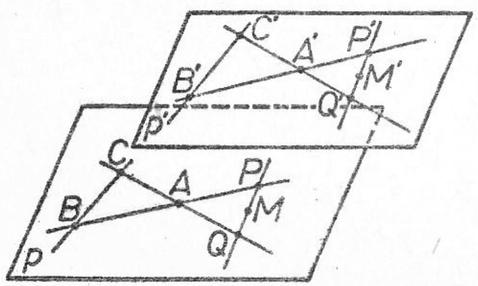

Fig. VIII.27

Exerciții

1. Să se arate că orice izometrie în spațiu transformă două plane paralele în două plane paralele.

2. Să se arate că orice izometrie transformă două drepte concurente în două drepte concurente.

3. Să se arate că orice izometrie transformă două drepte paralele în două drepte paralele.

4. Să se arate că orice izometrie transformă o dreaptă d, care este paralelă cu un plan p, într-o dreaptă d', paralelă cu planul transformat p', prin aceeași izometrie.

5. Să se arate că imaginile printr-o izometrie a două drepte necoplanare sînt două drepte necoplanare.

6. Să se arate că imaginea printr-o izometrie a unui corp convex este un corp convex.

7. Să se arate că volumul unui corp convex și volumul corpului convex transformat printr-o izometrie sînt egale.

8. Să se arate că imaginea printr-o izometrie a unei suprafețe poliedrale regulate este o suprafață poliedrală regulată.

12. Proprietățile rotațiilor axiale

Fie T o rotație în spațiu față de dreapta d. Atunci T este o izometrie, ce admite fiecare punct al dreptei d ca punct invariant. Deci

$$M \in d \Rightarrow T(M) = M.$$

Fie p un plan perpendicular pe dreapta d și fie $O \in d \cap p$. Atunci O este un punct invariant și $T(p)$ va fi un plan p' ce trece prin O.

Dar orice izometrie păstrează relațiile de perpendicularitate. De exemplu, dacă M este un punct al dreptei d, diferit de O și dacă $A \in p$, atunci triunghiul MOA este dreptunghic în O, deci avem (fig. VIII.28)

$$d(M, O)^2 + d(O, A)^2 = d(M, A)^2.$$

Notînd $A' = T(A)$, din $M' = T(M) = M$ și $O' = T(O)$ rezultă

$$d(M, O)^2 + d(O, A')^2 = d(M, A')^2,$$

deci avem $OA' \perp OM$ sau $OA' \perp d$.

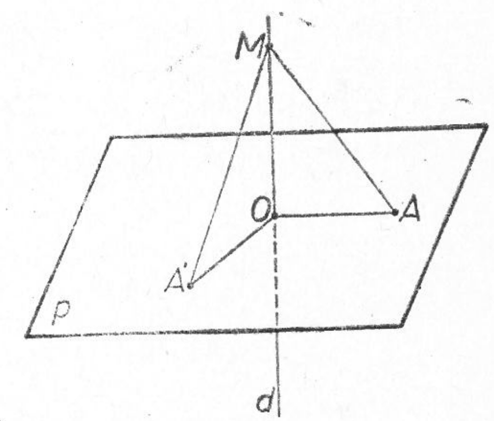

Fig. VIII.28

Aceasta înseamnă că dreapta d este perpendiculară în O pe planul p', care conține toate punctele $A' \in T(p)$. Rezultă $p' = p$. Deci:

Dacă T este o rotație de axă d, atunci orice plan perpendicular pe axa de rotație este invariant prin T.

Exercițiu. Să se arate că rotația T induce în fiecare plan p, perpendicular pe axa de rotație, o rotație în acel plan, centrul acestei rotații fiind punctul de intersecție a axei cu planul.

Capitolul

IX

Suprafețe de rotație și corpuri de rotație

1. Definiții

Fie M o mulțime de puncte în spațiu și fie d o dreaptă. Se spune că mulțimea M admite dreapta d ca *axă de rotație* dacă, oricare ar fi punctul $P \in M$ și oricare ar fi rotația T de axă d, avem $T(P) \in M$. Aceasta înseamnă că mulțimea M este invariantă față de toate rotațiile de axă d.

Dacă M este o suprafață și dacă această suprafață admite o axă de rotație, se spune că M este o *suprafață de rotație*.

Dacă M este un solid și dacă acest solid admite o axă de rotație, atunci se spune că M este un *corp de rotație*.

Exemple. 1. Fie d o dreaptă și fie C un cerc situat într-un plan p, perpendicular pe dreapta d. Să presupunem că centrul cercului C se găsește pe dreapta d. În acest caz, cercul C admite dreapta d ca axă de rotație (fig. IX.1).

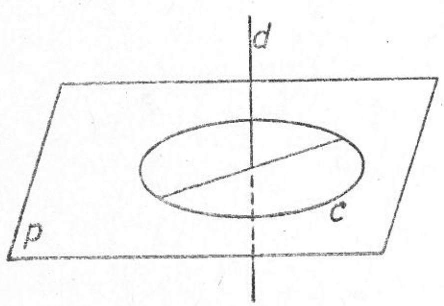

Fig. IX.1

2. Orice mulțime de puncte situate pe dreapta d admite această dreaptă ca axă de rotație.

3. Orice reuniune de cercuri, situate în plane perpendiculare pe o dreaptă d și avînd centrele pe această dreaptă, este o mulțime ce admite d ca axă de rotație (fig. IX.2).

4. Fie $[AB]$ un segment avînd suportul AB paralel cu dreapta d. Fie S reuniunea tuturor cercurilor care se găsesc în plane perpendiculare pe dreapta d, care au centrele pe d și care trec prin cîte un punct al segmentului $[AB]$ (fig. IX.3). S este o suprafață de rotație. Suprafețele de acest fel se numesc *cilindri de rotație*. Dreapta d se numește *axa cilindrului S*. Rotațiile de axă d transformă segmentul $[AB]$ în segmente congruente și paralele cu $[AB]$.

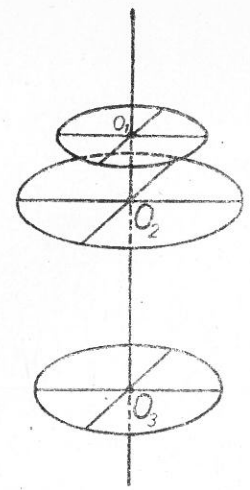

Fig. IX.2

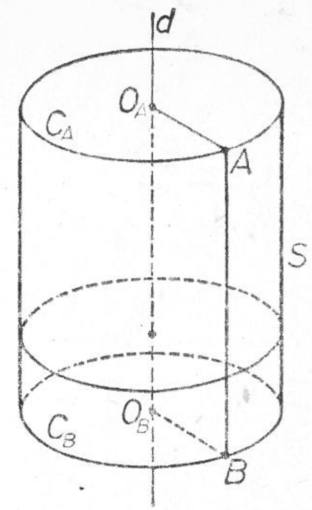

Fig. IX.3

Rotațiile de axă d transformă punctul A în diferitele puncte ale unui cerc C_A, situate în planul dus prin A, perpendicular pe d și ele transformă punctul B în diferitele puncte ale unui cerc C_B, situat în planul dus prin B perpendicular pe dreapta d. Cercurile C_A, C_B au razele egale și se găsesc în plane paralele. Aceste cercuri se numesc *baze* ale cilindrului S.

Segmentul $[AB]$ și toate segmentele care se obțin din acesta aplicînd toate rotațiile de axă d se numesc *generatoare* ale cilindrului S.

Generatoarele unui cilindru de rotație sînt segmente închise perpendiculare pe planele celor două baze. Intersecția unui cilindru de rotație cu un plan perpendicular pe axa de rotație este un cerc congruent cu C_A.

5. Fie $[AB]$ un segment închis avînd extremitatea A situată pe dreapta d și avînd $B \notin d$. Avem $d \cap AB = \{A\}$.

Să convenim să notăm prin C_M cercul care este situat într-un plan perpendicular pe dreapta d, care are centrul pe această dreaptă și care trece prin punctul M (fig. IX.4).

Fie S reuniunea tuturor cercurilor C_M cu $M \in [AB]$, a cercului C_B și a punctului A. S este o suprafață de rotație. O astfel de suprafață de rotație se numește *con de rotație*.

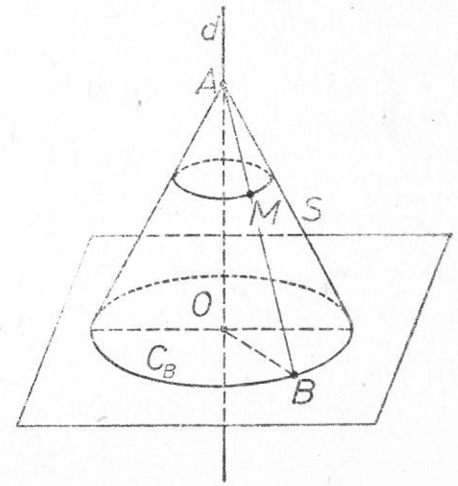

Fig. IX.4

Punctul A se numește *vîrful* conului, iar cercul C_B se numește *baza* conului.

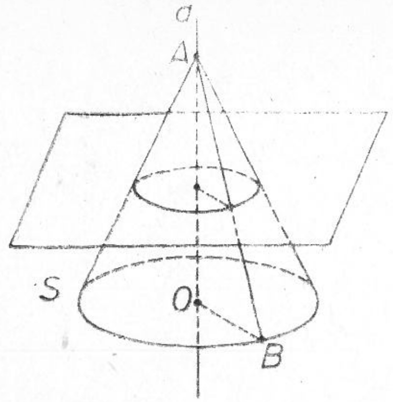

Fig. IX.5

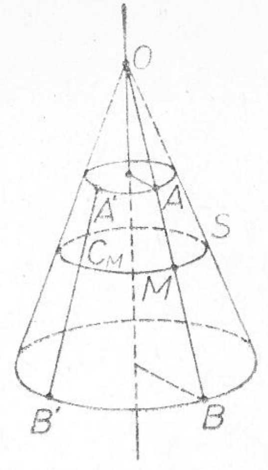

Fig. IX.6

Segmentele ce se obțin din $[AB]$ aplicînd diferitele rotații de axă d se numesc *generatoarele* conului S.

Exercițiu

Să se arate că intersecția conului S cu un plan perpendicular pe dreapta d este un cerc avînd centrul pe d (fig. IX. 5.)

6. Fie $[AB]$ un segment închis, disjunct de dreapta d, dar avînd suportul AB secant cu d, într-un punct O, ($O \in d \cap AB$, $O \notin [AB]$).

Suprafața S egală cu reuniunea tuturor cercurilor C_M, care trec prin punctele $M \in [AB]$, se numește *trunchi de con* (de rotație) (fig. IX.6).

Trunchiul de con S este generat de segmentul $[AB]$, cînd acest segment se rotește în jurul axei d. Se spune că segmentele $[A'B']$, care se obțin din $[AB]$ aplicînd toate rotațiile de axă d, constituie *generatoarele* trunchiului de con S.

Trunchiul de con S este inclus în conul de axă d și avînd ca generatoare segmentul $[OB]$, dacă presupunem că $A \in |OB|$.

Exercițiu

Să se arate că prin rotația unui segment $[AB]$ în jurul unei drepte, $d \neq AB$, care trece printr-un punct $M \in |AB|$, se obține o suprafață, care se descompune în reuniunea a două conuri de rotație (fig. IX. 7).

7. *Sfera.* Fie C un cerc avînd centrul O situat pe o dreaptă d coplanară cu cercul C (fig. IX.8). Cercul C intersectează dreapta d în două puncte A și B, astfel încît $|AB|$ este un diametru al cercului C.

Să considerăm reuniunea tuturor cercurilor C_M, cu M parcurgînd unul din arcele deschise limitate pe cercul C de punctele A și B. Să adăugăm acestei reuniuni punctele A și B. Obținem atunci o suprafață de rotație. *Această suprafață este o sferă.*

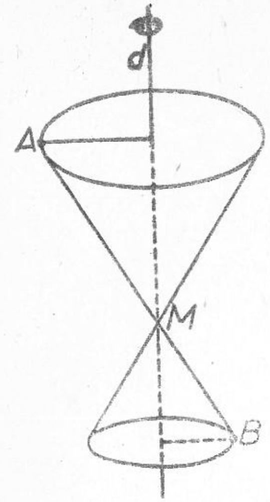

Fig. IX.7

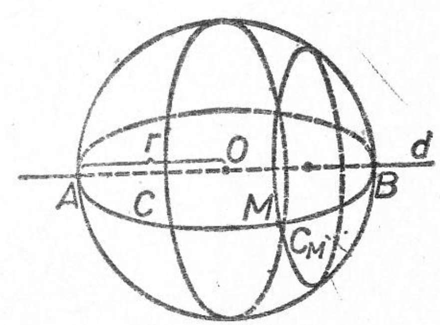

Fig. IX.8

Definiție. **Fie O un punct în spațiu și fie r un număr real pozitiv. Se numește sferă de centru O și de rază r, mulțimea tuturor punctelor P din spațiu, pentru care $d(O, P) = r$.**

Notînd prin $S(O, r)$ sfera de centru O și rază r, avem

$$S(O, r) = \{P;\ d(O, P) = r\}.$$

Să arătăm că suprafața S construită mai sus, cu ajutorul cercului C, este o sferă, anume este sfera de centru O și de rază r, egală cu raza cercului C.

Trebuie să demonstrăm că avem relațiile de incluziune

$$S \subset S(O, r),\ S(O, r) \subset S. \tag{1}$$

Dacă $P \in S$, punctul P se obține dintr-un punct $M \in C$ printr-o rotație T de axă d. Din $M \in C$ rezultă $d(O, M) = r$. Din $P = T(M)$ și din faptul că T este o rotație de axă $d \ni O$, rezultă $d(O, P) = d(O, M) = r$. Deci $P \in S(O, r)$ și $S \subset S(O, r)$ (fig. IX.9).

Pentru a demonstra a doua relație (1) (fig. IX.10), fie Q un punct oarecare al sferei $S(O, r)$. Avem atunci $d(O, Q) = r$. Să presupunem că $Q \neq A$ și $Q \neq B$.

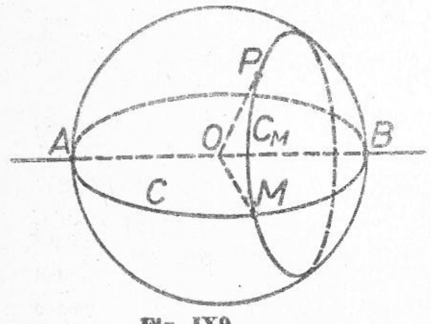

Fig. IX9

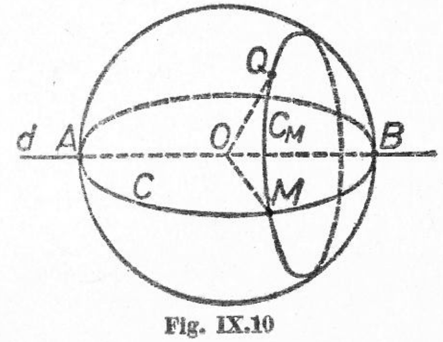

Fig. IX.10

Să considerăm cercul C_Q. Acest cerc intersectează planul p, în care se găsește cercul C, într-un punct M. Avem $d(O, M) = d(O, Q) = r$ și $M \in p$, deci $M \in C$. Atunci avem $C_M = C_Q$ și $Q \in C_M$. Deci relația $Q \in S(O, r)$, $Q \neq A$, $Q \neq$ B implică $Q \in S$.

Dacă $Q = A$ sau $Q = B$, avem $Q \in S$ prin felul în care am definit suprafața S. Deci am demonstrat că, într-adevăr, suprafața S este o sferă.

Putem formula rezultatul stabilit în modul următor:

Locul geometric dat de rotația unui cerc de centru O și rază R, în jurul unui diametru al acelui cerc, este o sferă, avînd centrul O și raza R.

2. Proprietăți ale sferelor

Am definit sfera $S(O, r)$ de centru O și rază r ca fiind locul geometric al punctelor P din spațiu, pentru care $d(O, P) = r$.

Mulțimea punctelor M, situată la distanță de centrul O mai mică decît raza r, se numește *interiorul sferei*:

$$\text{Int } S(O, r) = \{M;\ d(O, M) < r\}.$$

Mulțimea

$$D(O, r) = S(O, r) \cup \text{Int } S(O, r) = \{P;\ d(O, P) \leqslant r\}$$

se numește *corp sferic* de centru O și rază r (fig. IX.11).

Mulțimea punctelor situate la distanțe de centrul O mai mari decît raza r, se numește *exteriorul sferei* S (O, r).

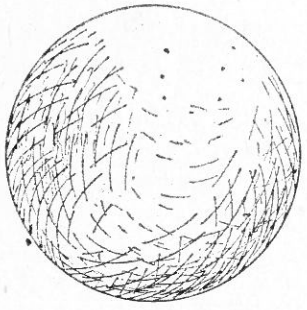

Fig. IX.11

Exerciții

1. Să se arate că interiorul sferei $S(O, r)$ și discul $D(O,r)$ sînt mulțimi convexe.
2. Să se arate că intersecția unei sfere cu o dreaptă care trece prin centrul acelei sfere este formată din două puncte simetrice față de centru.
3. Să se arate că intersecția unei sfere de centru O cu un plan care trece prin O este un cerc de centru O și rază egală cu raza sferei.
4. Să se arate că exteriorul unei sfere nu este o mulțime convexă.
5. Să se arate că sferele nu sînt mulțimi convexe.
6. Să se arate că intersecția a două sfere de raze diferite, dar avînd același centru, este mulțimea vidă.
7. Să se arate că o sferă nu poate conține toate punctele unei drepte și nici toate punctele unui plan.

Intersecția unei sfere cu o dreaptă

Fie sfera $S = S(O, r)$ și fie d o dreaptă. Să notăm prin Q proiecția punctului O pe dreapta d și prin h distanța $d(O, Q)$. Deci h este distanța de la punctul O la dreapta d.

Dacă $h > r$, avem Q exterior sferei S. Fie M un punct oarecare pe dreapta d. Atunci triunghiul MQO este dreptunghic în Q și avem (fig. IX.12)

$$d(O, M) > d(O, Q) > r,$$

deci M este exterior sferei S. Deci:

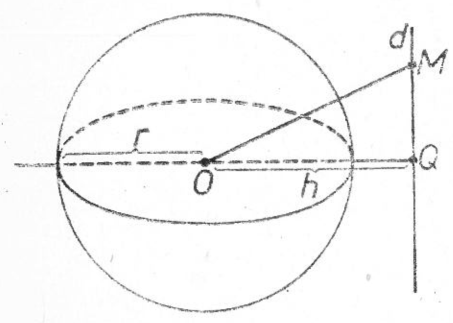

Fig. IX.12

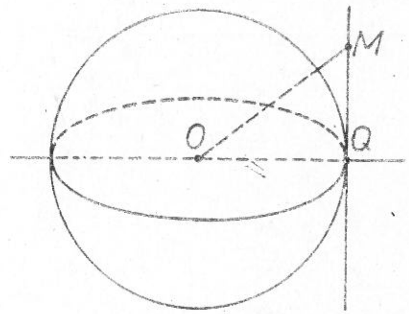

Fig. IX. 13

Dacă distanța de la centrul unei sfere S la o dreaptă d este mai mare decît raza sferei S, atunci toate punctele dreptei d sînt exterioare sferei S.

Să presupunem acuma că punctul Q aparține sferei S, deci că (fig. IX.13)

$$d(O, Q) = r.$$

În acest caz, pentru orice punct M al dreptei d, diferit de Q, avem $d(O, M) > d(O, Q) = r$, deci:

Dacă distanța de la centrul unei sfere S la o dreaptă d este egală cu raza sferei S, atunci toate punctele dreptei d, diferite de punctul Q, sînt exterioare sferei S. Punctul Q, deci proiecția centrului sferei S pe dreapta d, este singurul punct comun sferei S și dreptei d.

În cazul considerat, $d(O, Q) = r$, dreapta d este perpendiculară pe dreapta OQ, și $d \cap S = \{Q\}$. Se spune că dreapta d este tangentă sferei S în punctul Q.

Deci, *dacă o dreaptă d este tangentă unei sfere S, de centru O, într-un punct Q, atunci dreapta d este perpendiculară pe dreapta OQ și d intersectează sfera S numai în punctul Q.*

Să considerăm acuma cazul în care dreapta d este astfel, încît proiecția Q a centrului O pe dreapta d este un punct interior sferei S, adică $d(O, Q) < r$ (fig. IX.14). Fie $h = d(O, Q)$ și fie $a = \sqrt{r^2 - h^2}$. Pe dreapta d există exact

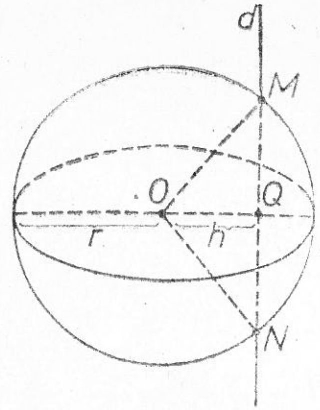

Fig. IX.14

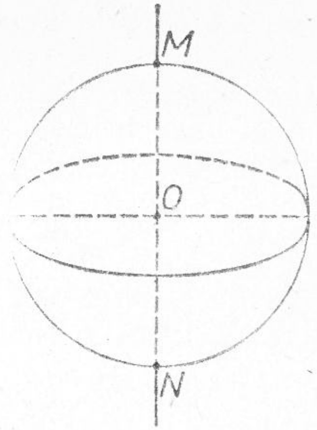

Fig. IX.15

două puncte, să spunem M și N, astfel ca $d(Q, M) = d(Q, N) = a$; pentru aceste două puncte, avem $Q \in |MN|$ și

$$d(O, M) = d(O, N) = \sqrt{h^2 + a^2} = r,$$

deci $M \in S$ și $N \in S$. Deci am arătat că:

Dacă distanța h de la centrul unei sfere S la o dreaptă d este mai mică decît raza sferei, atunci dreapta d și sfera S au exact două puncte comune. Aceste puncte sînt egal depărtate de proiecția centrului sferei pe dreapta d.

În particular, dacă $h = 0$, deci dacă dreapta d trece prin centrul sferei S, atunci $Q = O$ și punctele M, N sînt simetrice față de centrul sferei (fig. IX.15).

Segmentul $|MN|$ este atunci un diametru al sferei S.

În concluzie:

Intersecția unei sfere cu o dreaptă este formată din cel mult două puncte.

Intersecția unei sfere cu un plan

Fie sfera $S = S(O, r)$ și planul p. Notăm prin Q proiecția punctului O pe planul p. Fie $h = d(O, Q)$. Distingem iarăși trei cazuri:

1. $h > r$. Pentru orice punct $M \in p$ vom avea $d(O, M) > d(O, Q)$, deci $d(O, M) > r$. Deci (fig. IX.16):

Dacă distanța de la centrul unei sfere la un plan este mai mare decît raza sferei, atunci toate punctele acetui plan sînt exterioare sferei.

2. $h = r$. În acest caz, $Q \in S$, dar orice punct M din planul p, diferit de Q, este exterior sferei S, deoarece pentru $M \in p$, $M \neq Q$ avem

$$d(O, M) > d(O, Q) = r.$$

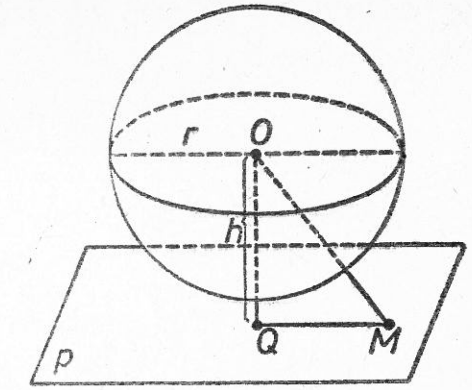

Fig. IX.16

Deci în cazul $h = r$, sfera S și planul p au un singur punct comun, anume proiecția Q a centrului O pe planul p. Planul p este perpendicular pe dreapta OQ. Se spune că p este *planul tangent* în punctul Q la sfera S (fig. IX.17).

3. $h < r$. Fie $a = \sqrt{r^2 - h^2}$. Să notăm prin $C = C(Q, a)$ cercul de centru Q și de rază a din planul p. Pentru $M \in C$, avem $d(O, M) = \sqrt{a^2 + h^2} = r$, deci $M \in S$. Rezultă că toate punctele cercului C aparțin sferei S (fig. IX.18).

Fie acuma N un punct comun planului p și sferei S. Avem atunci

$$d(O, N) = r,\ OQ \perp QN,\ d(Q, N)^2 = d(O, N)^2 - d(O, Q)^2 = a^2,$$

deci $N \in C$. Am arătat că:

Dacă distanța de la centrul unei sfere S la un plan p este mai mică decît raza sferei, atunci intersecția sferei S cu planul p este un cerc C. Centrul cercului C este proiecția Q a centrului sferei S pe planul p, iar raza lui C este numărul $a = \sqrt{r^2 - h^2}$, $h = d(O, Q)$.

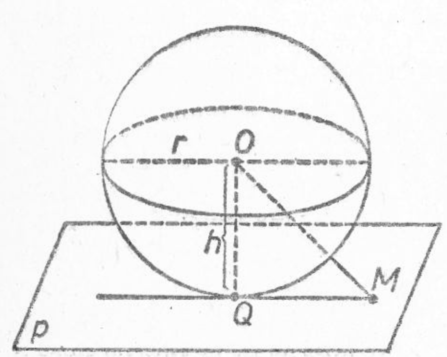

Fig. IX.17

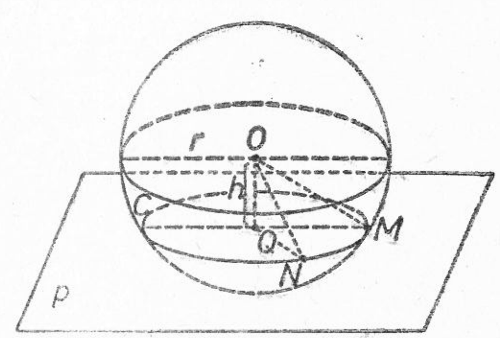

Fig. IX.18

3. Intersecția unei sfere cu un semispațiu

Fie $S = S(O, r)$ o sferă și fie p un plan la distanță $h < r$ de centrul O. Să notăm prin E unul din semispațiile închise limitate de planul p. Intersecția $S \cap E$ se numește *calotă sferică*. Dacă $O \notin E$, diferența $r - h$ dintre raza sferei și distanța h se numește *înălțimea calotei* $S \cap E$, iar cercul $p \cap S$ se numește *baza calotei* $E \cap S$ (fig. IX.19). Dacă $O \in E$, înălțimea calotei $S \cap E$ este $r + h$. Dacă $O \in p$, calota $S \cap E$ este o *semisferă*.

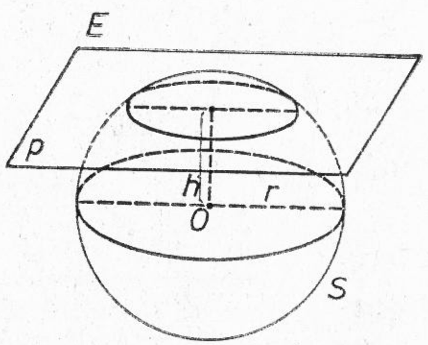

Fig. IX.19

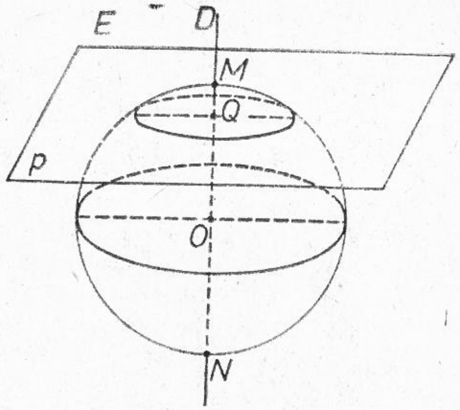

Fig. IX.20

Fie D dreapta dusă prin O perpendicular pe planul p. Dreapta D intersectează sfera S în două puncte M, N, situate de o parte și de alta a planului p. Dacă presupunem că $M \in E$, atunci $M \in S \cap E$, deci M aparține calotei considerate. Fie $\{Q\} = p \cap D$. Avem $d(Q, M) = r \pm h$ = înălțimea calotei $E \cap S$ (fig. IX.20).

Exercițiu

Să se arate că orice calotă sferică este o suprafață de rotație.

Fie acuma p și q două plane paralele și fie P respectiv Q proiecțiile punctului O pe planele p, q. Fie $h = d(O, P)$ și $k = d(O, Q)$. Vom presupune că punctele P, Q sînt interioare sferei S, deci că avem $h < r$ și $k < r$ (fig. IX.21).

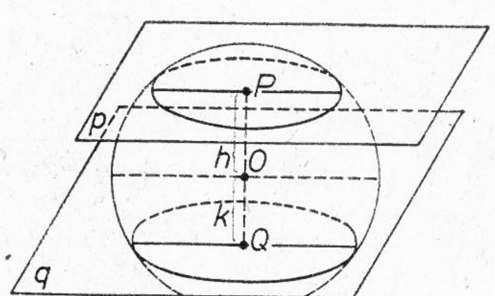

Fig. IX.21

Planele p și q limitează o *zonă*, care poate fi definită ca intersecția semispațiilor închise limitate de planele p și q, care conțin aceste plane.

Vom nota prin $[pq]$ zona limitată de planele p, q.

În ipotezele $h < r$, $k < r$, zona $[pq]$ are intersecție nevidă cu sfera S.

Definiție. Se numește zonă sferică orice intersecție nevidă a unei zone cu o sferă.

Exercițiu

Să se arate că zonele sferice sînt suprafețe de rotație.

Definiție. Se numește înălțime a zonei sferice $S \cap [pq]$ distanța dintre planele p, q.

Înălțimea zonei sferice $S \cap [pq]$ este egală cu $h + k$ dacă $O \in [pq]$ și este egală cu $|h - k|$, dacă $O \notin [pq]$.

4. Sfera circumscrisă unui tetraedru

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Fie A', B', C', D' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCD respectiv ACD, ABD și ABC.

Să notăm prin a, b, c, d perpendicularele ridicate în punctele A', B', C', D' pe planele (BCD) respectiv (ACD), (ABD), (ABC) (fig. IX 22).

Fiecare punct al dreptei a este egal depărtat de punctele B, C, D. Planul mediator al segmentului $|AB|$ intersectează dreapta a într-un punct O. Într-adevăr, dreapta AB este secantă cu planul (BCD), în timp ce dreapta a este perpendiculară pe acest plan. Rezultă că a nu este paralelă cu planul mediator al segmentului $|AB|$. Fie atunci O punctul de intersecție al dreptei a cu planul mediator al lui $|AB|$. Atunci O este egal depărtat de punctele A, B, C, D. Rezultă că punctul O aparține fiecăreia din dreptele a, b, c, d. Fie $r = d(O, A) = d(O, B) = d(O, C) = d(O, D)$ și fie sfera $S = S(O, r)$. Sfera S va trece prin fiecare din punctele A, B, C, D. Spunem că S este *sfera circumscrisă* tetraedrului $[ABCD]$ (fig. IX. 23).

Deci:

Orice tetraedru poate fi înscris într-o sferă. Centrul acestei sfere este punctul de intersecție al planelor mediatoare ale muchiilor tetraedrului și, în același timp, punctul de intersecție al perpendicularelor ridicate pe fețele tetraedrului în centrele cercurilor circumscrise acestor fețe.

Exemplu. Am arătat că putem obține un tetraedru regulat considerînd patru din cele opt vîrfuri ale unui cub, astfel ca muchiile tetraedrului să fie diagonale ale celor șase fețe ale cubului. Sfera circumscrisă cubului va fi circumscrisă și tetraedrului, iar raza sferei, R, va fi egală cu jumătate din lungimea diagonalelor cubului, deci diagonalele cubului au lungimea $2R$. Diagonalele fețelor cubului vor avea lungimea $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$. Deci, dacă notăm prin L lungimea muchiilor unui tetraedru regulat, și prin R raza sferei circumscrise acelui tetraedru, avem

$$L = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}.$$

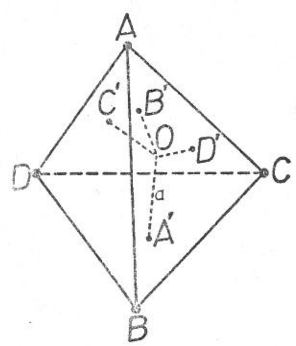

Fig. 22

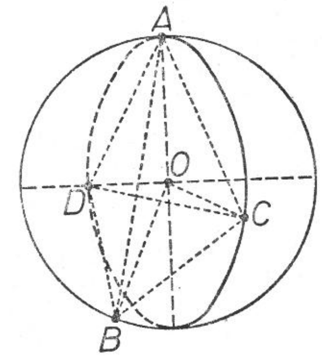

Fig. IX.23

Exerciţiu

Să se determine raza r a sferei înscrise unui tetraedru în funcţie de lungimea L a muchiilor sale.

R : $r = \frac{\sqrt{6}}{12} l.$

5. Ariile suprafeţelor de rotaţie. Volumele corpurilor de rotaţie

Calculul ariei unei suprafeţe de rotaţie, de exemplu calculul ariei unui cilindru de rotaţie a unui con de rotaţie sau a unei sfere, constituie probleme de analiză matematică, ce vor fi studiate în mod riguros în clasa a XII-a. Totuşi aceste probleme au fost rezolvate înaintea apariţiei calculului integral, care stă la baza teoriei moderne a ariilor şi volumelor. Din punct de vedere istoric, problema determinării ariei unei suprafeţe sau a volumului unui corp au fost punctul de plecare a unor metode de sumare infinită, care au dat naştere calculului integral.

Ideea care a generat aceste metode este de a considera o suprafaţă sau un corp ca figuri limită ale unor figuri poliedrale, ale căror arii şi volume pot fi determinate.

De exemplu, un cilindru circular drept (cilindru de rotaţie), de axă d şi avînd segmentul $[AB]$ ca generatoare, poate fi considerat ca figură limită a unei prisme, avînd segmentul $[AB]$ ca înălţime şi avînd ca bază un poligon regulat înscris în cercul C_A, baza cilindrului (fig. IX. 24).

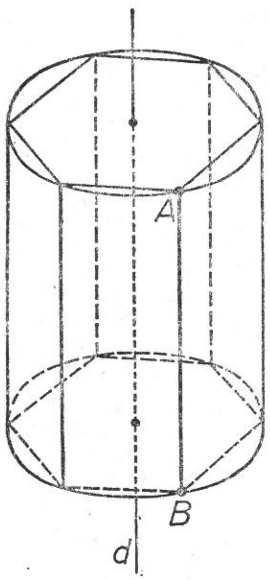

Fig. IX.24

Aria laterală a unei astfel de prisme este egală cu suma ariilor dreptunghiurilor avînd laturile congruente cu segmentul $|AB|$ şi cu o latură a poligonului bază. Suma acestor arii este egală cu produsul dintre perimetrul poligonului de bază şi lungimea segmentului $|AB|$.

Putem presupune că aria cilindrului de rotaţie este egală cu produsul dintre lungimea cercului bază şi lungimea G a generatoarei; deci

(1) $\boxed{\textbf{aria laterală a cilindr. de rotaţie} = 2\pi RG}$

unde R este distanţa de la o generatoare la axa cilindrului, deci este raza cercului bază.

Volumul unei prisme drepte este egal cu produsul dintre aria bazei şi înălţime

deci putem admite că volumul cilindrului de rotaţie este egal cu produsul dintre aria bazei şi lungimea generatoarei:

(2) $\boxed{\textbf{volumul cilindr. de rotaţie} = \pi R^2 G}$.

Aceste ipoteze vor fi verificate riguros prin consideraţii de analiză matematică. Ele pot fi verificate experimental.

Un con circular drept poate fi considerat ca figură limită a unei piramide, regulate drepte, avînd ca bază o suprafaţă poligonală cu frontiera limitată de un poligon regulat înscris în cercul de bază a conului, înălţimea piramidei fiind aceeaşi cu înălţimea conului (fig. IX. 25).

Aria laterală a unei piramide regulate drepte este egală cu suma ariilor triunghiurilor, ce au ca vîrf vîrful piramidei. Toate aceste triunghiuri au bazele congruente două cîte două şi înălţimile din vîrful comun de asemenea congruente două cîte două. Suma ariilor acestor triunghiuri este egală cu semiprodusul dintre perimetrul bazei piramidei şi înălţimea I a triunghiurilor ce formează suprafaţa laterală a piramidei.

Admitem că aria laterală a conului de rotaţie este dată de semiprodusul dintre lungimea bazei şi lungimea generatoarei:

(3) $\boxed{\textbf{aria con. de rotaţie} = \frac{1}{2} 2\pi RG = \pi RG.}$

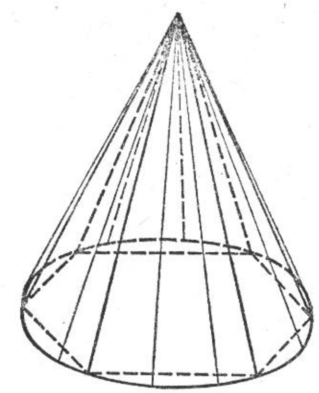
Fig. IX.25

Şi această ipoteză va fi confirmată prin calculul integral. Elevii vor face verificări experimentale.

Volumul unui con de rotaţie poate fi definit ca fiind egal cu volumul unei piramide avînd aceeaşi înălţime şi avînd ca bază o suprafaţă poliedrală de arie egală cu aria bazei conului. Deci:

(4) $\boxed{\textbf{volumul con de rotaţie} = \frac{1}{3} \pi R^2 h.}$

Între înălţimea h şi lungimea G a generatoarelor unui con există relaţia

(5) $$R^2 + h^2 = G^2,$$

deoarece R, h şi G sînt egale cu lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, G fiind lungimea ipotenuzei.

Aria laterală a unui trunchi de con este egală cu diferenţa ariilor laterale a două conuri avînd aceeaşi axă de rotaţie şi acelaşi vîrf (fig. IX. 26). Notînd prin G lungimea generatoarei trunchiului de con şi prin R', R'', G', G'' razele cercurilor de bază şi lungimile generatoarelor celor două conuri, avem formulele

$$\frac{R'}{R''}=\frac{G'}{G''},\quad G'-G''=G,$$

din care rezultă

$$G'=\frac{R'G}{R'-R''},\quad G''=\frac{R''G}{R'-R''}.$$

Aria laterală a trunchiului de con va fi dată de formula

(6) $$\boxed{\text{aria l. tr. de con de rotaţie} = \pi R'G' - \pi R''G'' = \pi G(R'+R'').}$$

Volumul trunchiului de con este dat de formula

(7) $$\boxed{\text{volum tr. de con de rotaţie} = \frac{1}{3}\,\pi(R'^2h' - R''^2h''),}$$

unde h', h'' sînt înălţimile celor două conuri, care dau prin diferenţă trunchiul de con. Avem

$$\frac{h'}{h''}=\frac{R'}{R''},\quad h'-h''=h,$$

unde h este înălţimea trunchiului de con. Deci

$$h'=\frac{R'h}{R'-R''},\quad h''=\frac{R''h}{R'-R''},$$

astfel încît formula (7) devine

(8) $$\boxed{\text{vol. tr. con rot.} = \frac{1}{3}\,\pi h(R'^2+R'R''+R''^2).}$$

Pentru a obţine o indicaţie asupra formulei ce defineşte aria unei sfere de rază r, să punem formula (6) sub o formă echivalentă, dar mai adecvată scopului urmărit. Să presupunem că trunchiul de con are axa d şi fie $[AB]$ o generatoare a trunchiului de con (fig. IX. 27). Dreapta AB intersectează dreapta d

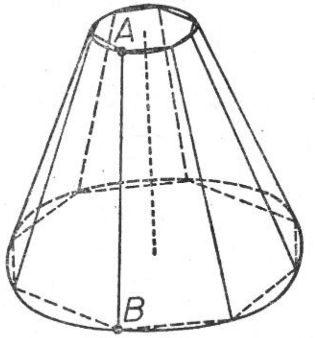

Fig. IX.26

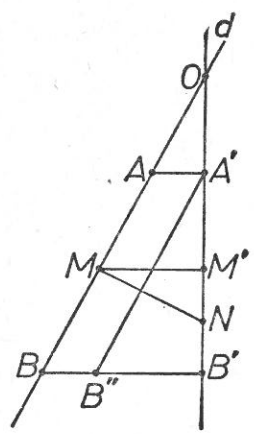

Fig. IX.27

într-un punct O. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$ şi fie N punctul în care planul dus prin M perpendicular pe dreapta AB intersectează dreapta d. Fie B' proiecţia punctului B pe dreapta d. Presupunem că $A\in|OB|$. Fie A' proiecţia lui A pe d, şi fie M' proiecţia lui M pe dreapta d. Fie B'' punctul în care paralela dusă prin A' la OA intersectează dreapta BB'. Din triunghiurile asemenea $MM'N$, $A'B'B''$ rezultă

$$\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|A'B''|}{|A'B'|}=\frac{|MN|}{|MM'|}.$$

Avem deci, dacă notăm $r=d(M,N)$, $h=d(A',B')$, $R''=d(A,A')$, $R'=d(B,B')$, $G=d(A,B)$, $R'+R''=2d(M,M')$,

(9) $$G(R'+R'')=2\,Gd(M,M')=2rh.$$

Deci *aria laterală a trunchiului de con de rotaţie* este dată de formula

(10) $$\boxed{\text{aria lat. tr. con. rot} = 2\pi rh}$$

unde

(11) $$r=d(M,N),\ h=d(A',B')$$

Sfera este o suprafaţă de rotaţie, care se obţine rotind un cerc în jurul unuia din diametrii săi. Putem împărţi sfera într-o reuniune de zone sferice, ducînd plane perpendiculare pe diametrul $|QQ'|$ (fig. IX. 28). Fiecare din aceste zone poate fi aproximată printr-un trunchi de con; pentru toate trunchiurile de con astfel obţinute, distanţa $r=d(M,N)$ din formula (10) este egală cu raza sferei considerate. Aplicînd formula (10) fiecăruia din aceste trunchiuri de con şi adunînd numerele astfel obţinute, obţinem, după ce am dat r factor comun,

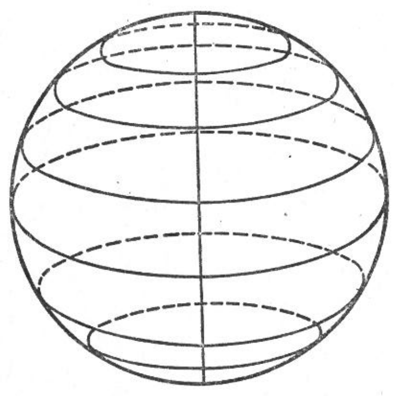
Fig. IX.28

$$\text{suma ariilor lat. ale tr. de con} = 2\pi r\cdot 2r = 4\pi r^2.$$

Putem admite că aria sferei de rază r este dată de această sumă, deci

(12) $$\boxed{\text{aria sferei de rază } r = 4\pi r^2}$$

Dacă vrem să calculăm aria unei zone sferice de înălţime h, obţinem prin consideraţii analoage,

(13) $$\boxed{\text{aria zonei sferice de rază } r \text{ şi înălţ. } h = 2\pi rh.}$$

În particular, formula (13) dă aria unei calote sferice:

(14) $$\boxed{\textbf{aria calotei sferice de rază } r \textbf{ și înălț. } h = 2\pi r h.}$$

Volumul corpului sferic de rază r. Un disc de centru O și de rază r poate fi asimilat cu o reuniune de piramide avînd vîrful comun O, aceeași înălțime r și avînd ca sumă a ariilor bazelor aria sferei de rază r, care limitează discul considerat. Deci este natural să admitem formula

(15) $$\boxed{\textbf{volumul corpului sferic de rază } r = \frac{4\pi}{3} r^3.}$$

Fie S o sferă de centru O și de rază r și fie $Z \subset S$ o zonă sferică limitată de planele p și q. Reuniunea segmentelor $[OM]$, cînd punctul M descrie zona sferică Z, se numește *sector sferic de bază Z*.

Fie h, înălțimea zonei Z. Atunci sectorul sferic de bază Z este echivalent, ca volum, cu o piramidă avînd aria bazei egală cu $2\pi r h$ și înălțimea r. Deci:

Volumul unui sector sferic de bază Z este egal cu

$$V = \frac{2\pi r^2 h}{3}.$$

Exercițiu

Fie Z o zonă sferică, definită pe sfera S de rază r de planele paralele p, q, situate la distanța h, astfel ca cele două plane să intersecteze sfera S. Să se determine volumul corpului limitat de planele p, q și de sfera S.

Capitolul X Probleme recapitulative

A. Geometrie

1. Fie D', D'' intersecțiile bisectoarelor interioară și exterioară, ce pleacă din vîrful A al triunghiului ABC, cu dreapta BC. Fie B', B'' punctele definite prin relațiile $B' \in |AC$. $B'' \in AC$, $|AB'| \equiv |AB''| \equiv |AB|$, $A \in |B'B''|$. Să se arate că $BB' \parallel AD''$ și $BB'' \parallel AD'$,

2. Să se arate că, în orice triunghi bisectoarele a două unghiuri exterioare sînt concurente cu o bisectoare interioară.

3. Fie M mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ABC, $AB \perp AC$. Să se arate că $|MA| \equiv |MB| \equiv |MC|$.

4. Să se arate că două unghiuri, care au laturile paralele, sînt fie congruente, fie unul este congruent cu un suplement al celuilalt.

5. Să se arate că două triunghiuri cu laturile paralele cîte două sînt asemenea.

6. Fie $ABCD$ un paralelogram și fie punctele $P \in |AB|$, $R \in |BC|$, $Q \in |CD|$, $S \in |DA|$ alese astfel ca $|AP| \equiv |CQ|$ și $|BR| \equiv |DS|$. Să se arate că $PRQS$ este un paralelogram.

7. Fie ABC, AMN două triunghiuri echilaterale într-un plan p. Să se arate că avem $|BN| \equiv |CM|$ sau $|BM| \equiv |CN|$. Să se deducă că segmentele $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$ sînt congruente cu laturile unui triunghi, eventual degenerat, deci avînd vîrfurile coliniare. (D. Pompeiu).

8. Fie A, B, C trei puncte necoliniare și fie punctele A', B', C' astfel ca $\overrightarrow{BA'} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = k \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $k \neq 0$. Să se arate că pentru orice punct M din planul punctelor A, B, C avem

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

și să se deducă că triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au același centru de greutate (Pappus).

9. Fie M, N, P mijloacele segmentelor $|BC|$ respectiv $|CA|$, $|AB|$. Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

10. Fie a, b, c, d patru numere pozitive astfel ca

$$a < b + c + d, b < c + d + a, c < a + b + d, d < a + b + c.$$

Să se arate că există un patrulater inscriptibil $ABCD$ astfel ca $\|\overrightarrow{AB}\| = a$, $\|\overrightarrow{BC}\| = b$, $\|CD\| = c$, $\|DA\| = d$. (Ch. Sturm).

Indicație. Se va arăta că există un unghi u astfel ca

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos u = c^2 + d^2 + 2cd \cos u$$

și se vor considera triunghiurile CDA, CBA avînd

$$\|\overrightarrow{CD}\| = c,\ \|\overrightarrow{DA}\| = d,\ \widehat{CDA} + u = 2 \text{ dr},\ \|\overrightarrow{AB}\| = a,\ \|\overrightarrow{BC}\| = b,\ \widehat{ABC} \equiv u,$$

și avînd vîrfurile B, D în semiplane opuse față de AC. Patrulaterul $ABCD$ va îndeplini condițiile cerute.

11. Fie $\vec{v}$ un versor. Să se determine normele vectorilor $-3\vec{v}$, $-\dfrac{2}{5}\vec{v}$, $6\vec{v}$.

12. Știind că vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sînt perpendiculari și că $\|\vec{u}\| = 0{,}5$ iar $\|\vec{v}\| = 2$, să se calculeze $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

13. Arătați că dacă vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ au $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ și dacă $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ are măsura de 120°, atunci $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\|$.

14. Arătați că, oricare ar fi vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ și numerele reale p, q, avem $(p + q)\vec{u} - (p - 2q)(\vec{u} - \vec{v}) - 3q\vec{u} - p\vec{v} = -2q\vec{v}$.

15. În triunghiul dreptunghic ABC cu lungimile catetelor $\|AB\| = 3$ și $\|AC\| = 3$, se iau punctele D, E, F, G pe ipotenuza $|BC|$ astfel ca $\overrightarrow{BD} \sim \overrightarrow{DE} \sim \overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{FG} \sim \overrightarrow{GC}$. Să se calculeze norma vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}$.

16. Dacă trei vectori au aceeași origine, normele egale și dacă suma lor este vectorul nul, atunci extremitățile celor trei vectori formează un triunghi echilateral.

17. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC și fie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Să se determine numerele reale a, b pentru care

$$-2\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'} - 3\overrightarrow{BC} \sim a\vec{u} + b\vec{v}.$$

18. Fie O un punct în planul dreptunghiului $ABCD$. Să se arate că $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$.

19. Păstrînd notațiile din exercițiul precedent, să se arate că nu este posibil ca numerele $\|\overrightarrow{OA}\|$, $\|\overrightarrow{OB}\|$, $\|\overrightarrow{OC}\|$, $\|\overrightarrow{OD}\|$ să formeze o progresie aritmetică cu rația diferită de zero, oricare ar fi ordinea în care am lua aceste numere.

(S. Kleitsch)

20. Se consideră punctele $O\ (0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$. Să se determine coordonatele vîrfurilor pătratelor construite pe segmentele $|OA|$, $|OB|$, $|BA|$.

21. Să se determine coordonatele vîrfurilor hexagonului regulat, avînd centrul în originea O și vîrful $A(\ a,\ 0)$.

22. Să se determine coordonatele vîrfurilor pătratului $ABCD$, avînd $A \in Ox$, $B \in Oy$, $\widehat{OAB} = 60°$ și cu vîrfurile C, D în primul cadran.

23. Se dau pe o axă punctele $A(1)$, $B(x)$, $C(3)$, $D(-1)$. Să se calculeze distanțele $d(A, B)$, $d(B, C)$, $d(A, D)$ și să se determine x astfel ca să avem

$$|AB| + |BC| \equiv |AD|.$$

24. Fiind date patru puncte distincte pe o dreaptă, notăm

$$(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Să se arate că

$$(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (D, C, B, A) = (A, B, D, C)^{-1} = 1 - (A, C, B, D).$$

25. Un punct M împarte un segment $|AB|$ în raportul k. Care este raportul în care M împarte segmentul $|BA|$ și care este raportul în care punctul A împarte segmentul $|BM|$?

26. Fie A un punct pe axa Ox și fie d, d' două drepte paralele cu Oy. O dreaptă variabilă dusă prin A taie dreptele d, d' în punctele B, B'. Să se arate că paralela dusă prin B' la OB trece printr-un punct fix, situat pe axa Ox.

27. Fie într-un plan punctul A și dreptele paralele d, $d'(A \notin d,\ A \notin d')$. Să se arate că există punctele $B \in d$, $C \in d'$, astfel ca triunghiul ABC să fie asemenea cu un triunghi dat. Să se studieze în special cazul în care triunghiul dat este echilateral.

28. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(3, 4)$, $C(0, 2)$. Să se determine coordonatele punctelor D, E, F care împart segmentele $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ respectiv în rapoartele $+1/2$, $-4/3$, $-3/2$. Să se arate apoi că punctele D, E, F sînt coliniare. Dacă D' împarte segmentul $|AB|$ în raportul $-1/2$, să se arate să dreptele AD', BE, CF sînt concurente.

29. Fie într-un plan p punctele A, B și dreapta d. Să de determine un punct $P \in d$ astfel ca suma lungimilor segmetenlor $|AP|$, $|PB|$ să fie mai mică decît suma corespunzătoare oricărei alte alegeri a punctului $P \in d$. Se va face discuția după pozițiile posibile ale punctelor A, B față de dreapta d.

30. Fie date în planul p punctele O, D, F, A astfel ca $O \notin DF$. O dreaptă d dusă prin A intersectează dreptele OD, OF în punctele M respectiv N. Să se determine poziția dreptei d astfel ca raportul $\dfrac{|DM|}{|FN|}$ să fie egal cu un număr dat k. (Apollonius)

31. Păstrînd notațiile din problema precedentă, să se determine poziția dreptei d astfel ca produsul $\|\overrightarrow{DM}\| \cdot \|\overrightarrow{FN}\|$ să fie egal cu un număr dat y.

(Apollonius)

32. Fie A, B, C, D patru puncte pe o dreaptă d. Să se determine pe d un punct M astfel ca $\|\overrightarrow{AM}\|\ \|\overrightarrow{BM}\| = k\ \|\overrightarrow{CM}\|\ \|\overrightarrow{DM}\|$, unde numărul k este dat.

(Apollonius)

33. Fie date punctele A, B, C și unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$. Să se determine un punct M în planul triunghiului ABC, astfel ca $\widehat{AMB} \equiv \widehat{hk}$ și $\widehat{BMC} \equiv \widehat{mn}$.

(Snellius)

34. Fiind dat triunghiul ABC, să se determine un punct $O \in \text{Int } ABC$ astfel ca $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COA}$.

35. Fie P un poligon regulat înscris în cercul C și fie P' poligonul regulat cu număr dublu de laturi, înscris în același cerc. Fie apoi Q, Q' poligoanele regulate, care au același număr de laturi cu P respectiv P' și care sînt circumscrise cercului considerat. Fie a, A ariile poligoanelor P, Q și a', A' ariile poligoanelor P', Q'. Să se arate că

$$a'^2 = aA,\ A'(a + a') = 2aA.$$

(Grégory)

36. Fie $\widehat{hk}$ un unghi și fie $A \in \text{Int } \widehat{hk}$. Să se determine o dreaptă d, care să treacă prin A și care să taie laturile h, k în două puncte C, B, astfel ca triunghiul format de aceste puncte și de vîrful O al unghiului $\widehat{hk}$ să fie de arie dată p^2.

(Sluse)

37. Fie $ABCD$ un patrulater în planul p. Notăm $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = AD \cap BC$. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor BCE, CDF, ADE, ABF au un punct comun (punctul lui Miquel).

38. Fie M punctul lui Miquel al patrulaterului inscriptibil $ABCD$. Să se arate că punctele E, F, M sînt coliniare.

39. Fie C, C' două cercuri secante în punctele A, B și fie D, E, F, G punctele de intersecție ale celor două cercuri cu o secantă arbitrară. Să se arate că $\widehat{DAE} \equiv \widehat{FBG}$.

40. Fie M, N, P, Q proiecțiile unui punct de pe cercul C pe laturile unui dreptunghi înscris în același cerc. Să se arate că M este ortocentrul triunghiului NPQ.

41. Considerăm două cercuri secante în punctele P, Q. Prin P și Q ducem două drepte d, d', care intersectează primul cerc în punctele A, A' și al doilea cerc în punctele B, B'. Să se arate că $AA' \parallel BB'$.

42. Simetricele ortocentrului unui triunghi față de mijloacele laturilor se găsesc pe cercul circumscris triunghiului și sînt diametral opuse vîrfurilor.

43. În orice triunghi, ortocentrul, centrul cercului circumscris și centrul de greutate se găsesc pe o aceeași dreaptă (dreapta lui Euler).

44. Fie, C, C', C'' trei cercuri de raze egale trecînd printr-un punct M. Aceste cercuri se intersectează cîte două în alte trei puncte P, Q, R. Cercul circumscris triunghiului PQR este congruent cu cercurile C, C', C''.

(G. Țițeica)

45. Fie C, C' două cercuri tangente în punctul M, cu centrele O respectiv $O' \cdot O$ dreaptă d trecînd prin M taie cele două cercuri în punctele P, P'. Să se arate că dreptele OP, $O'P'$ sînt paralele.

46. Axa radicală a două cercuri exterioare care admit o tangentă comună MM' împarte segmentul limitat de punctele de tangență M, M' în două segmente congruente.

47. Într-un patrulater inscriptibil, bisectoarele a două unghiuri opuse intersectează cercul circumscris patrulaterului în două puncte diametral opuse.

48. Bisectoarele unghiurilor unui patrulater oarecare formează un patrulater inscriptibil.

49. În orice triunghi ABC, mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor limitate de ortocentru și vîrfuri se găsesc pe un același cerc (cercul lui Euler).

50. Centrul cercului lui Euler al unui triunghi ABC este mijlocul segmentului limitat de ortocentru și de centrul cercului circumscris. Raza cercului lui Euler este jumătate din raza cercului circumscris.

51. Dacă patrulaterul $ABCD$ are laturile AB, BC, CD, DA tangente unui cerc, atunci $|AB| + |CD| \equiv |BC| + |DA|$.

(Pitot)

52. Să se determine locul geometric al mijloacelor corzilor $|AB|$ ale unui cerc C, cînd punctul A este fixat, iar B este mobil pe cerc.

53. Fie A' piciorul bisectoarei AA' a triunghiului ABC; Presupunînd că punctele A, B sînt fixe și că punctul C descrie un cerc de centru A, să se arate că punctul A' descrie de asemenea un cerc.

54. Fie A, B, D trei puncte distincte astfel ca $B \in |AD|$. Prin B, D se duce un cerc variabil, iar prin A se duc tangentele la acest cerc. Să se determine locul geometric al punctelor de tangență ale acestor tangente.

55. Se spune că o figură F admite o dreaptă d ca axă de simetrie, dacă F conține, odată cu un punct M, și simetricul lui M față de d. Să se indice axele de simetrie ale unui triunghi isoscel, ale unui triunghi echilateral, ale unui trapez isoscel, ale unui romb, ale unui cerc și ale unui poligon regulat cu un număr oarecare de vîrfuri.

56. Fie d, d' două drepte într-un plan p și fie A, B două puncte în acel plan. Să se determine două puncte $P \in d$, $P' \in d'$, astfel ca suma lungimilor segmentelor $|AP|$, $|PP'|$, $|P'B'|$ să fie minimă, deci mai mică decît suma corespunzătoare oricărei alte alegeri a punctelor $P \in d$, $P' \in d'$.

57. Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu. Să se determine două puncte $A \in h$, $B \in k$ astfel ca segmentul $|AB|$ să fie congruent cu un segment dat $|PQ|$ și astfel ca dreapta AB să fie paralelă cu o dreaptă dată d.

58. Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Să se arate că

$$2(2 \text{ dr} - \widehat{BIC}) \equiv 2 \text{ dr} - \widehat{BAC}.$$

59. Fie I un punct interior triunghiului ABC, situat pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, astfel încît să fie verificată relația din exercițiul precedent. Să se arate că I este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

60. Fie u, v, w trei unghiuri, avînd fiecare măsura mai mică decît 60° și avînd suma măsurilor egală cu 120°. Fie ABC un triunghi echilateral și fie A', B', C' puncte exterioare triunghiului ABC, astfel ca

$$\widehat{A'BC} \equiv \widehat{A'CB} \equiv u, \quad \widehat{B'CA} \equiv \widehat{B'AC} \equiv v, \quad \widehat{C'AB} \equiv \widehat{C'BA} \equiv w.$$

Notăm $A'' \in B'C \cap BC'$, $B'' \in C'A \cap CA'$, $C'' \in A'B \cap AB'$. Să se arate că:

a) $|A'A$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BA'C}$.

b) A este centrul cercului înscris triunghiului $A'B''C''$. Care sînt centrele cercurilor înscrise triunghiurilor $A''B'C''$ și $A''B''C'$?

c) Semidreptele $|A''B$, $|A''C$ împart unghiul $\widehat{B''A''C''}$ în trei unghiuri congruente, deci sînt *trisectoare* în triunghiul $A''B''C''$.

d) $\widehat{B''A''C''} \equiv 2 \text{ dr} - 3u$, $\widehat{C''B''A''} \equiv 2 \text{ dr} - 3v$, $\widehat{A''C''B''} \equiv 2 \text{ dr} - 3w$.

61. Să se arate că trisectoarele unghiurilor unui triunghi oarecare se intersectează în trei puncte, care sînt vîrfurile unui triunghi echilateral. (Teorema lui Morley).

62. Să se demonstreze o teoremă analoagă teoremei lui Morley, considerînd trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi oarecare.

63. Fie $[OABC]$ un tetraedru. Să se arate că

$$\text{aria}\,[ABC] < \text{aria}\,[OAB] + \text{aria}\,[OBC] + \text{aria}\,[OCA].$$

(*Indicație.* Se consideră proiecția O' a punctului O pe planul (ABC) și se arată că este adevărată o egalitate de forma

$$\text{aria}\,[ABC] = \pm\, \text{aria}\,[O'AB] \pm \text{aria}[O'BC] \pm \text{aria}\,[O'CA]$$

și apoi că

$$\text{aria}[O'AB] < \text{aria}[OAB], \text{aria}[O'BC] < \text{aria}[OBC], \text{aria}[O'CA] < \text{aria}[OCA].$$

64. Să se arate că, în orice suprafață poliedrală, aria unei fețe este mai mică decît suma ariilor celorlalte fețe.

65. Fie M un punct pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC. Să se arate că cea mai mică dintre distanțele de la punctul M la dreptele AB, AC este mai mică decît distanța de la punctul A la dreapta BC.

66. Fie E o mulțime finită de puncte necoliniare. Să se arate că există cel puțin o dreaptă care conține exact două puncte ale mulțimii E. (Teorema lui Sylvester.)

67. Fie M un punct interior feței $[ABC]$ a unui tetraedru $[OABC]$. Să se arate că cea mai mică din distanțele de la punctul M la planele (OAB), (OBC), (OCA) este mai mică decît distanța de la O la planul (ABC).

68. Fie E o mulțime finită de puncte necoplanare în spațiu. Să se arate că există cel puțin un plan, care să conțină exact trei puncte necoliniare ale mulțimii E.

69. Fie date două plane paralele p, p' și două drepte paralele d, d'. Să se arate că unghiul format de dreapta d cu planul p este congruent cu unghiul format de dreapta d' cu planul p'

70. Fie $[ABC]$, $[A'B'C']$ bazele unei prisme triunghiulare drepte, avînd muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ perpendiculare pe baze. Să se exprime lungimea diagonalei $|AB'|$ în funcție de lungimile muchiilor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$, $|AA'|$.

71. Presupunînd că $[ABCD]$, $[A'B'C'D']$ sînt două fețe opuse ale unui cub, avînd muchiile paralele $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$, să se arate că punctele A, C, B', D' sînt vîrfurile unui tetraedru regulat.

72. Să presupunem că două drepte, d, d' au ca proiecții ortogonale pe un plan p dreptele paralele e, e'. Se poate deduce că dreptele d, d' sînt paralele?

73. Să se arate că dacă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au laturile paralele două cîte două, $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, atunci cele două triunghiuri sînt asemenea. Să se arate că proiecțiile ortogonale ale celor două triunghiuri pe un plan p, care nu este perpendicular pe planul (ABC), sînt două triunghiuri asemenea.

74. Se consideră trei puncte necoliniare în spațiu. Să se arate cum trebuie ales un plan de proiecție p, astfel ca proiecțiile ortogonale ale celor trei puncte să fie trei puncte coliniare.

75. Să se determine cosinusul unghiului pe care îl face o diagonală a unui cub cu o diagonală a unei fețe, cele două diagonale avînd o extremitate comună.

76. Să se calculeze raza sferei circumscrise unui tetraedru regulat, în funcție de lungimea muchiilor acestui tetraedru.

77. Să se arate că orice piramidă regulată (avînd ca bază un poligon regulat și avînd muchiile ce pleacă din vîrf congruente două cîte două) poate fi înscrisă într-o sferă. Să se calculeze raza acestei sfere în funcție de lungimile muchiilor piramidei.

78. Să se arate că pe cele trei muchii paralele ale unei prisme triunghiulare drepte se pot alege trei puncte care să fie vîrfurile unui triunghi echilateral.

79. Să se arate că două plane paralele intersectează fețele laterale ale unei suprafețe prismatice după două poligoane congruente.

80. Să se arate că două plane paralele intersectează fețele laterale ale unei suprafețe piramidale după două poligoane asemenea.

81. Să se arate că diagonalele unui paralelipiped au mijlocul comun.

82. Să se arate că diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sînt congruente două cîte două.

83. Să se arate că pătratul lungimii unei diagonale a unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor muchiilor care au un vîrf comun.

84. Să se calculeze suma ariilor fețelor unui paralelipiped dreptunghic, cunoscînd lungimea unei diagonale d și suma lungimilor muchiilor ce pleacă dintr-un același vîrf, $s = a + b + c$.

R. $s^2 - d^2$,

85. Să se exprime suma ariilor fețelor unui cub și volumul acelui cub în funcție de lungimea d a diagonalelor acelui cub.

86. Un paralelipiped drept P are ca bază o suprafață limitată de un paralelogram. Unul din unghiurile acestui paralelogram are $60°$, iar muchiile paralelipipedului au aceeași lungime a. Să se calculeze lungimile diagonalelor acestui paralelipiped.

87. Se consideră un paralelipiped cu fețele opuse $[ABCD]$, $[A'B'C'D']$, astfel muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ să fie perpendiculare pe planul $(ABCD)$. Știind că $d(A, B') = a$, măs $\widehat{DAB} = \alpha$, aria $[ABC'D'] = Q$ și că măsura unghiului făcut de planul (ABC') cu planul (ABC) este $90° - \alpha$, să se determine lungimile muchiilor $|AD|$, $|AA'|$

88. Un paralelipiped P are ca bază un romb $ABCD$ cu unghiul $\widehat{BAD}$ de $60°$ și muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ formează cu planul bazei unghiuri avînd de asemenea $60°$. Planul $(AA'C)$ este perpendicular pe planul bazei. Să se arate că raportul ariilor suprafețelor $[AA'C'C]$, $[BB'D'D)$ este $\frac{3}{2}$.

89. Baza unui paralelipiped drept P este un romb avînd lungimile diagonalelor egale cu 6 și 8 (etalonul fiind 1 cm). Știind că fețele laterale au lungimile diagonalelor egale cu 13, să se determine aria totală a lui P.

90. Fie $[ABC]$, $[A'B'C']$ fețele opuse ale unei prisme triunghiulare drepte și fie M mijlocul muchiei $|CC'|$. Știind că lungimile laturilor bazei $[ABC]$ au aceeași lungime a și că planele (ABC), (ABC') formează un unghi de $45°$, să se calculeze înălțimea și aria totală a prismei.

91. Muchiile unui paralelipiped au aceeași lungime a și două muchii, ce au o extremitate comună, formează un unghi de $60°$. Să se determine aria fețelor, înălțimea și volumul paralelipipedului.

92. Un rezervor în formă de paralelipiped dreptunghic are volumul de 10 m^3, iar două din muchiile sale au lungimile de 2,5 m și 1,75 m. Să se determine lungimea celorlalte muchii.

93. Un terasament de cale ferată are lungimea de 1 km și are ca secțiune transversală un trapez isoscel. Laturile paralele ale acestui trapez au lungimile de 8 m, 14 m, iar înălțimea trapezului este de 3,2 m. Să se determine cantitatea în m^3, de pămînt necesar.

94. Un tub de fontă are secțiunea pătratică; lățimea exterioară fiind de 25 cm și grosimea pereților de 3 cm, să se determine greutatea unui metru liniar de tub (greutatea specifică a fontei se consideră de 7,3 gf/cm^3).

95. O piramidă patrulateră regulată are fețele laterale echilaterale. Să se arate că muchiile opuse în această piramidă sînt perpendiculare și să se exprime lungimea muchiilor în funcție de înălțimea h.

96. O piramidă triunghiulară cu vîrfurile V, A, B, C are $|AB| \equiv |AC|$ și $|VA| \equiv |VB| \equiv |VB| \equiv |VC| \equiv 13$ cm, $|BC| \equiv 6$ cm, aria $[ABC] = 27$ cm^2. Să se calculeze înălțimea piramidei.

97. Se consideră o piramidă patrulateră regulată și un cub, astfel încît patru din vîrfurile cubului se află în planul bazei piramidei, iar celelalte patru vîrfuri se găsesc pe muchiile laterale ale piramidei. Să se calculeze lungimea muchiilor cubului, știind că laturile bazei piramidei au lungimea a și că înălțimea piramidei este h.

98. Dacă c este un număr complex, notăm prin Tc transformarea care asociază unui punct de afix $z \in \mathbf{C}$ punctul de afix cz. Să se arate că dacă $c = ab$ atunci $Tc = Ta \circ Tb$.

99. Dacă $|a| = 1$, Ta este o rotație, iar dacă $b \in R$, Tb este o omotetie.

100. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi ascuţit, nenul şi fie S, S' simetriile faţă de dreptele OA respectiv OB. Să se arate că produsele $S \circ S'$, $S' \circ S$ sînt rotaţii distincte, de centru O şi de unghi $2 \cdot \widehat{AOB}$. Sensurile celor două rotaţii sînt opuse.

101. Fie R o rotaţie a planului p cu centrul în punctul $O \in p$ şi fie d o dreaptă astfel ca $O \in d \subset p$. Notăm prin S simetria faţă de dreapta d. Să se arate că izometriile $S' = R \circ S$, $S'' = S \circ R$ sînt simetrii faţă de două drepte d', d'', care conţin punctul O. Să se mai arate că

$$R = S' \circ S = S \circ S''.$$

102. Fie R, R' două rotaţii ale planuluip, faţă de acelaşi centru $O \in p$. Să se arate că $R \circ R' = R' \circ R$ şi că $R \circ R'$ este o rotaţie de centru O.

103. Fie R, R' două rotaţii de centre diferite O, O', într-un plan p. Fie $d = OO'$ şi fie S simetria faţă de dreapta d. Notăm $S' = R \circ S$, $S'' = S \circ R'$. Să se arate că $R \circ R' = S' \circ S''$.

104. Să se arate că produsul a două rotaţii într-un plan este fie o rotaţie, fie o translaţie. Cum trebuie să fie unghiurile a două rotaţii, pentru ca produsul celor două rotaţii să fie o translaţie?

105. Fie R o rotaţie de centru O a unui plan p şi fie C un cerc de centru O, în acelaşi plan. Să se arate că $R(C) = C$.

106. Fie T o translaţie de vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ şi fie d o dreaptă paralelă cu $\vec{v}$. Notăm prin S simetria faţă de dreapta d. Să se arate că transformările $T' = S \circ T$; $T'' = T \circ S$ sînt simetrii faţă de două drepte paralele cu dreapta d şi că $T = S \circ T' = T'' \circ S$.

107. Fie R, T o rotaţie, respectiv o translaţie în planul p. Să se arate că dacă rotaţia R este proprie, atunci produsele $R \circ T$, $T \circ R$ sînt rotaţii de acelaşi unghi cu R.

108. Fie în planul p punctul A şi dreptele paralele d, d'. Să se construiască două puncte $B \in d$, $C \in d'$ astfel ca ABC să fie un triunghi echilateral.

109. Fie ABC un triunghi echilateral. Să se arate că există două rotaţii proprii, care lasă invariant acest triunghi. Produsul acestor două rotaţii este transformarea identică, iar pătratul fiecăreia din cele două rotaţii este cea de a doua rotaţie.

110. Care este numărul de rotaţii care lasă invariant un pătrat?

111. Fie G mulţimea izometriilor care lasă invariantă o figură F într-un plan p. Să se arate că dacă $T \in G$ şi $T' \in G$, atunci $T \circ T' \in G$ şi $T^{-1} \in$

112. Să se descrie mulţimea G din exerciţiul 111, presupunînd că F este un poligon regulat cu n laturi. Se va începe prin examinarea cazurilor $n = 3, 4, 5$ şi 6.

113. Să se arate că dacă F este o mulţime finită de puncte în planul p, atunci nu există nici o translaţie, diferită de transformarea identică, care să lase invariantă figura F.

114. Fie T o translaţie de vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ în planul p. Să se indice o mulţime de puncte M în planul p, astfel ca $T(M) = M$.

115. Să se arate că singurele izomerii ale unui plan p, care lasă invariant un punct $O \in p$, sînt rotaţiile de centru O şi simetriile faţă de dreptele ce trec prin O.

116. Fie H, H' două omotetii de centre, O, O' în planul p. Să se arate că produsul $H \circ H'$ este o omotetie sau o translaţie, după cum produsul rapoartelor celor două omotetii este diferit de 1 sau egal cu 1.

117. Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ doi vectori paraleli şi de acelaşi sens într-un plan p. Să se arate că dacă normele celor doi vectori sînt diferite, atunci există o omotetie H, astfel ca $H(A) = A'$, $H(B) = B'$.

118. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri cu laturile paralele cîte două. Dacă cele două triunghiuri nu sînt congruente, atunci există o omotetie H, astfel ca $H(A) = A'$, $H(B) = B'$, $H(C) = C'$.

119. Fie ABC un triunghi. Să se construiască punctele $P \in BC$, $Q \in BC$, $M \in |AB|$ $N \in |AC|$ astfel ca $MNPQ$ să fie un pătrat.

120. Fie $ABCD$ un paralelogram deformabil cu laturile de lungimi fixe şi cu vîrful A fix. Considerăm punctele $E \in BC$, $F \in |AE|$ astfel ca distanţele $d(B, E)$, $d(D, F)$ să fie constante şi $F \in |DC|$. Se spune atunci că $ABCDEF$ este un *pantograf* aparat utilizat în tehnică. Să se arate că, dacă se consideră două poziţii $ABCDEF$, $AB'C'D'E'F'$ ale pantografului, avem

$$\frac{|EE'|}{|FF'|} = \text{constant}.$$

Deci pantograful permite să se mărească sau să se micşoreze o figură dată într-un raport dat.

121. Fie O, A, B, A', B' cinci puncte într-un plan p astfel ca $A' \in OA$, $B' \in OB$ şi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'} \in k^2$. Să se arate că

$$\|A'B'\| \; \|OA\| \; \|OB\| = k^2 \; \|AB\|.$$

122. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Să se arate că

$$\|AC\| \; \|BD\| \overset{!}{=} \|AB\| \; \|CD\| + \|AD\| \; \|BC\|.$$

(Ptolomeu)

123. Fie $ABCDE$ un pentagon convex. Construiţi figurile simetrice acestui pentagon faţă de dreptele BC, AC şi apoi faţă de o dreaptă, care nu intersectează pentagonul.

124. Fie d, d', d'' trei drepte într-un plan. Să se construiască punctele $P \in d'$, $Q \in d''$ astfel ca d să fie mediatoarea segmentului $|PQ|$.

125. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC şi fie T, T', T'' translaţiile definite de vectorii $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$. Să se arate că produsul $T \circ T' \circ T''$ este transformarea identică.

126. Produsul a două simetrii faţă de două puncte într-un plan este o translaţie.

127. Fiind date două segmente congruente $|AB|$, $|CD|$, să se arate că există o deplasare T şi o antideplasare T' astfel ca

$$T(A) = T'(A) = C, \; T(B) = T'(B) = D.$$

128. Să se arate că intersecţia a două sfere este fie mulţimea vidă, fie un cerc, fie o mulţime formată dintr-un singur punct.

129. Fie S o sferă şi fie P un punct fix. Prin P se duce o secantă variabilă, care intersectează sfera S în două puncte A, B. Să se arate că produsul scalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ este constant. Să se discute semnul acestui produs în funcţie de poziţia punctului P faţă de sfera S.

130. Fie A, B două puncte distincte. Să se arate că locul geometric al punctelor M din spaţiu, pentru care dreptele MA şi MB sînt perpendiculare, este o sferă.

131. Fie A, B două puncte distincte. Să se determine locul geometric al punctelor M din spaţiu, pentru care unghiul $\widehat{AMB}$ este congruent cu un unghi dat u.

132. Să se arate că dacă trei sfere S, S', S'' au un cerc C comun, atunci centrele celor trei sfere sînt coliniare. Să se indice dreapta care conţine cele trei centre.

133. Să se arate că dacă trei sfere au centrele coliniare și dacă au un punct comun, exterior dreptei care conține centrele, atunci cele trei sfere au un cerc comun.

134. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care trec prin două puncte date.

135. Fie P un punct exterior unei sfere S. Să se determine locul geometric al punctelor M de pe sfera S, pentru care dreapta MP este tangentă sferei S. Să se arate că reuniunea segmentelor $|MP|$ este un con de rotație.

136. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor S, care sînt tangente dreptelor care conțin generatoarele unui con de rotație.

137. Fie S, S' două sfere avînd centrele O și O' și razele r, respectiv r'. Se presupune că $d(O, O') > r + r'$, $r' \neq r$. Să se arate că există două puncte V și V', astfel ca orice tangentă dusă prin unul din aceste puncte la S să fie tangentă și la S'. Să se arate că cele două puncte aparțin dreptei OO'.

138. Fie S și S' două sfere de raze egale. Să se determine mulțimea tangentelor comune celor două sfere.

139. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care sînt tangente unui plan dat într-un punct dat.

140. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor de rază dată, care sînt tangente unui plan dat sau unei drepte date.

141. Fie d, d' două drepte neperpendiculare și fie A, B două puncte pe dreapta d. Să se arate că există o singură sferă care are centrul pe d' și care trece prin punctele A, B.

142. Fie A, B, C trei puncte necoliniare și fie p un plan astfel încît p nu este perpendicular pe planul (ABC). Să se arate că există o singură sferă cu centrul în planul p și trecînd prin punctele A, B, C.

143. Fie S o sferă de centru O și fie V un con de rotație avînd vîrful O. Să se arate că intersecția $S \cap V$ este un cerc.

144. Să se arate că intersecția unei sfere cu un cilindru de rotație avînd ca axă de rotație un diametru al sferei este o reuniune de două cercuri.

145. Să se arate că intersecția unui cilindru de rotație cu un plan care conține o generatoare este formată din acea generatoare și dintr-o a doua generatoare, care poate fi eventual confundată cu prima (în ultimul caz, se spune că planul este tangent cilindrului).

146. Să se arate că intersecția unui con de rotație cu un plan ce conține o generatoare a conului este formată din acea generatoare și dintr-o a doua generatoare, care poate fi eventual confundată cu prima (în ultimul caz, se spune că planul este tangent conului).

B. Trigonometrie

1. Să se calculeze valorile funcțiilor sinus și cosinus pentru $t = \frac{\pi}{6}$, și $t = \frac{\pi}{3}$.

2. Să se calculeze $\sin \frac{13\pi}{6}$, $\sin \frac{25\pi}{6}$, $\sin \frac{-23\pi}{6}$, $\cos \frac{7\pi}{3}$, $\cos \frac{13\pi}{6}$ și $\cos \frac{-17\pi}{3}$.

3. Să se afle perioadele funcțiilor $f(x) = \sin 8x$, $g(x) = \sin 4x$ și $\sin \frac{x}{3}$.

4. Să se reprezinte grafic funcțiile următoare, presupunînd că domeniul de definiție este, în fiecare caz, cea mai mare mulțime de numere reale, pe care funcția este definită:

a. $f(x) = 3 \sin x$; **b.** $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$; **c.** $f(x) = -2 \sin 2x$; **d.** $f(x) = \sin x - |\sin x|$;

e. $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; **f.** $f(x) = 2 \sin x - |\sin x|$; **g.** $f(x) = 2 \cos x$; **h.** $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$;

i. $f(x) = \cos 3x$; **j.** $f(x) = 2 \cos 3x$; **k.** $f(x) = \cos x - |\cos x|$; **l.** $f(x) = 2 \cos x - |\cos x|$;

m. $f(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$; **n.** $f(x) = \sin x + \cos x$.

5. (V. Matrosenko). Să se reprezinte grafic următoarele funcții, definite pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ prin fornulele

$$f(x) = \max (\sin x; \cos x);\ g(x) = \max (\sin x; \cos x; 0);\ h(x) = \min (\sin x; \cos x)$$

6. Să se stabilească semnele următoarelor diferențe:

$$\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{8};\ \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{11\pi}{7};\ \sin \frac{19\pi}{6} - \sin \frac{31\pi}{6};$$

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{8};\ \cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{11\pi}{7};\ \cos \frac{19\pi}{6} - \cos \frac{31\pi}{6}.$$

7. Să se determine intervalele de monotonie ale funcțiilor

a. $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sin x$;

b. $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x - \cos x$.

8. Să se calculeze $\sin x$ știind că:

a. $\cos x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; **b.** $\cos x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; **c.** $\cos x = -\frac{4}{5}$, $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

9. Să se calculeze $\cos x$ știind că:

a. $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; **b.** $\sin x = -\frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; **c.** $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; **d.** $\sin x = -\frac{3}{5}$, $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

10. Să se calculeze $\cos (u + v)$ știind că $\sin v = \frac{4}{5}$, $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și că $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos u = -\frac{5}{13}$.

11. Se dau într-un plan, raportat la un reper cartezian ortonormat, punctele $M(4, 3)$, $N(2, 4)$, $P(1, 7)$. Fie $u = \widehat{MON}$, $v = \widehat{NOP}$. Să se calculeze $\sin (u + v)$ și $\cos (u + v)$.

12. Să se arate că relațiile $\cos u = \frac{1}{7}$, $\cos v = \frac{13}{14}$, $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $v < u$ şi $u - v = \frac{\pi}{3}$.

13. Să se arate că relațiile $\cos u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $u \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos v = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $v \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ implică $\cos(u - v) = -\frac{1}{2}$, $\sin(u + v) = -\frac{1}{2}$.

14. Fiind date punctele $M(4, a)$, $N(-2, 5)$, să se determine numărul a astfel încît să avem $ON \perp OM$.

15. Se dau punctele $M(3, 2)$, $N(1, 4)$. Să se determine $\cos \widehat{MON}$.

16. Ştiind că $\sin u = \frac{3}{5}$, $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos v = \frac{5}{13}$, $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se determine $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{tg} v$, $\operatorname{tg}(u + v)$ şi $\operatorname{tg}(u - v)$.

17. Să se arate că relațiile $\operatorname{tg} u = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} v = \frac{1}{3}$; $u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ implică $v < u < \frac{\pi}{4}$; să se calculeze $u + v$ şi $\operatorname{tg}(u + v)$.

18. Să se arate că relațiile $4 \operatorname{tg} a = 5 \operatorname{tg} b$, $a, b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, implică

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} b}{4 + 5 \operatorname{tg}^2 b}.$$

19. Să se arate că în orice triunghi ABC avem $\cos B + \cos C = \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot (\sin B + \sin C)$.

20. Să se arate că în orice triunghi ABC avem
$(\cos A + \cos B \cos C) \sin A = (\cos B + \cos C \cos A) \sin C = (\cos C + \cos A \cos B) \sin C = \sin A \sin B \sin C$.

21. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, atunci:

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{\sin 2B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} = \frac{\sin 2C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A - \sin B + \sin C} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}.$$

22. Să se determine numerele următoare:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}, \quad \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

23. Să se calculeze sumele:

$$\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}; \quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}; \quad \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}).$$

24. Să se stabilească semnele expresiilor:
a. $\arcsin 0{,}9 - \arcsin 0{,}5$; **b.** $\arcsin(-0{,}9) - \arcsin(-0{,}5)$; **c.** $\arccos(0{,}9) - \arccos(+0{,}5)$; **d.** $\arccos(-0{,}9) - \arccos(-0{,}5)$; **e.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; **f.** $\operatorname{arctg}(-\sqrt{2}) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; **g.** $\operatorname{arcctg}\sqrt{2} - \operatorname{arcc\,tg}\sqrt{3}$; **h.** $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{2}) - \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

25. Calculați valorile funcțiilor sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă, definite pe mulțimea unghiurilor, cunoscînd următoarele valori aproximative:

a. $\sin 30° = 0{,}5$; **b.** $\sin 45° = 0{,}707$; **c.** $\sin 20° = 0{,}342$; **d.** $\sin 65° = 0{,}906$; **e.** $\sin 60° = 0{,}866$; $\operatorname{tg} 57° = 1{,}54$; $\sin 1° = 0{,}01745$; $\operatorname{tg} 2° = 0{,}035$.

26. Comparați valorile găsite în exercițiul precedent cu valorile date de tabele.

27. Determinați lungimile laturilor a, b, c = lungimea ipotenuzei şi măsurile în grade ale unghiurilor unui triunghi dreptunghic, cunoscînd:

1) $a = 17{,}2$ cm, $b = 11{,}17$ cm; **2)** $a = 55{,}6$ cm, $\hat{A} = 39{,}1°$; **3)** $a = 27{,}5$ cm, $c = 41{,}59$ cm; **4)** $a = 121{,}3$ cm, $\hat{B} = 27{,}5°$; **5)** $c = 191$ cm, $\hat{A} = 58{,}5°$; **6)** $ab = 112\ \text{cm}^2$, $\hat{B} = 69{,}3°$.

28. Să se determine lungimile laturilor şi unghiurile unui triunghi isoscel ABC $(\hat{B} = \hat{C})$, cunoscînd:

1) $a = 17$ m, $b = c = 11$ m; **2)** $b = 113$ m, $\hat{A} = 39°$, $b = 91$ cm, $\hat{B} = 29°$.

29. Diagonalele unui dreptunghi au lungimea $d = 15{,}3$ cm şi unghiul diagonalelor este de $52{,}4°$. Să se determine lungimile laturilor.

30. Să se determine lungimile laturilor şi măsurile în grade ale unghiurilor unui triunghi, ABC, cunoscînd:

1) $a = 26{,}5$ m, $b = 27{,}4$ m, $\hat{A} = 67{,}3°$;

2) $a = 5{,}38$ m, $b = 2{,}46$ m, $\hat{C} = 74{,}8°$;

3) $a = 0{,}896$ cm, $b = 0{,}436$ cm, $c = 0{,}684$ cm.

31. Pentru a se determina distanța între două puncte A, B, despărțite de un rîu, s-au putut calcula distanțele $d(A, C)$, $d(B, C)$ la un al treilea punct C şi unghiul $\widehat{ACB}$: $d(A, C) = 311$ m, $d(B, C) = 217{,}5$ m, măs $\widehat{ACB} = 43{,}53°$. Care este distanța $d(A, B)$?

32. Rezultanta R a două forțe are mărimea 7,48 kgf şi face cu cele două forțe unghiuri de 43° şi 65°. Ce mărimi au cele două forțe?

33. Să se rezolve ecuațiile:
1) $\sin 2x = \sin 5x$; **2)** $\cos 4x = \cos 3x$; **3)** $\cos 8x = \cos^2 2x$; **4)** $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$; **5)** $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$; **6)** $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin 2x = 0$.

34. Să se discute şi să se rezolve ecuațiile:
1) $(2m - 1) \cos 2x - 3 \cos x + m - 2 = 0$;

2) $m \cos 2x + 2(m^2 + 3) \sin x - 7m = 0$,
m fiind un parametru real.

Indicații și răspunsuri

A. Geometrie

1. Se folosește faptul că, într-un triunghi isoscel, una din bisectoare este și înălțime. **5.** Se folosește exercițiul precedent. **6.** Se arată că triunghiurile BPR, DQS sînt congruente. **8.** Avem $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. **11.** **R**: 3, 2/5, 6. **12.** **R**: $\sqrt{4{,}25}$. **15.** **R**: $9\sqrt{2}$. **17.** **R**: $a = 3/2$, $b = -7/2$. **18.** Notînd prin M centrul dreptunghiului și folosind formula medianei (Cap. VI, §10), avem

$$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = 2\,\overrightarrow{MO}^2 + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{2} = 2\,\overrightarrow{MO}^2 + \frac{\overrightarrow{BD}^2}{2} = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2.$$

19. Presupunînd că $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$, $\|OD\| = d$ sînt astfel încît $b = a + r$, $c = a + 3r$, $d = a + 2r$, din exercițiul precedent obținem $r = 0 \cdot 20$. **R**: $(0, a)$, (a, a); $(0, -a)$, $(a, -a)$; $(b, 0)$, (b, b); $(-b, 0)$, $(-b, b)$; $(a + b, a)$, $(b, a + b)$; $(a - b, -a)$, $(-b, -a + b)$. **21.** $(a, 0)$, $(a/2, a\sqrt{3}/2)$, $(-a/2, a\sqrt{3}/2)$, $(-a, 0)$, $(-a/2, -a\sqrt{3}/2)$, $(a/2, -a\sqrt{3}/2)$. **22.** $(a, 0)$, $(a + a\sqrt{3}, a)$, $(a\sqrt{3}, a + a\sqrt{3})$, $(0, a\sqrt{3})$. **23.** $|x - 1|$, $|x - 3|$, 2; $1 < x < 3$. **25.** Dacă $\overrightarrow{MA}/\overrightarrow{MB} = k$, atunci $\overrightarrow{MB}/\overrightarrow{MA} = 1/k$ și $\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AM} = 1 - 1/k$. **26.** Dacă paralela prin B' la OB taie axa Ox în punctul M, avem $\overrightarrow{AM}/\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB'}/\overrightarrow{AB} =$ constant, deci M nu depinde de poziția secantei ABB'. **27.** Fie M, N proiecțiile punctului A pe dreptele d respectiv d' și fie $A'B'C'$ triunghiul dat. Considerăm punctele P, Q astfel ca $\widehat{PAM} \equiv \widehat{QAM} \equiv \widehat{A'}$, $|AP| \equiv |AQ| \equiv \dfrac{|A'C'|}{|A'B'|}|AM|$. Perpendicularele în P și Q pe dreptele AP respectiv AQ intersectează dreapta d' în două puncte C, C'', care corespund la două soluții ABC, $AB''C''$. **28.** $D(-1, -4)$, $E(9/7, 20/7)$, $F(3/5, 4/5)$. **29.** Dacă A, B sînt în semiplane opuse față de d, luăm $P \in |AB| \cap d$. Dacă A, B sînt de aceeași parte a dreptei d, considerăm simetricul lui A față de d, A', și punem $P \in |A'B| \cap d$. **30.** Notînd $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{ON} = y\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OA} = u\overrightarrow{OD} + v\overrightarrow{OF}$ și $a = \|OD\|$, $b = \|OF\|$, obținem ecuațiile $x - 1 = \pm k \dfrac{b}{a}(y - 1)$, $vx + uy = xy$, din care deducem x și y. **31.** Folosind notațiile de la ex. 30 obținem ecuațiile $ab(x - 1)(y - 1) = \pm k$, $vx + uy = xy$. **32.** În coordonate, condiția dată se scrie $(x - a)(x - b) = \pm k(x - c)(x - d)$, din care se deduce x. **33.** Se intersectează arcele capabile de unghiurile date și care subîntind segmentele $(AB|$, $|BC|$. **34.** Se intersectează arcele capabile de unghiuri de 120°, care subîntind laturile triunghiului ABC. **35.** Dacă notăm prin x, x' lungimile laturilor poligoanelor P, P' și prin n, numărul laturilor lui P, avem $x'^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - x^2}$, $a = nx\sqrt{4R^2 - x^2}/4$, $A = nR^2x/\sqrt{4R^2 - x^2}$, $a' = nRx/2$, $A' = 2nR^3x/(4R^2 - x'^2)$. Eliminînd variabilele n, x, obținem relațiile indicate. **36.** Aria triunghiului OBC este $\frac{1}{2}\|OB\|\,\|OC\| \sin \overrightarrow{hk}$. Alegînd punctele $I \in h$, $J \in k$ astfel ca $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$, obținem, dacă punem $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{OJ}$, următoarele ecuații: $x + y = xy$, $xy\,\|OI\|\,\|OJ\| \sin \widehat{hk} = 2p^2$. **37.** Dacă notăm prin M punctul de intersecție

al cercurilor circumscrise triunghiurilor BCE, CDF, se arată că patrulaterele $ADME$, $ABMF$ sînt inscriptibile. **38.** Dacă patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, folosind notațiile din ex. **37**, avem $\widehat{DME} + \widehat{DMF} \equiv \widehat{DME} + \widehat{DCF} = \widehat{DME} + \widehat{EAD} = 2$ dr, deci E, M, F sînt coliniare. **39.** Avem $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} - \widehat{EAB} \equiv \widehat{DFB} - \widehat{EGB} \equiv \widehat{FBG}$. **40.** Se formează două dreptunghiuri, care au două diagonale perpendiculare. Rezultă $MP \perp NQ$ și $NP \perp MQ$. **41.** Avem $\widehat{A'AP} \equiv \widehat{PQB'}$, $\widehat{A'QP} \equiv \widehat{PBB'}$. **42.** Fie A'' simetricul ortocentrului H față de mijlocul A' al laturii $|BC|$. Avem $\widehat{ACA''} \equiv \hat{C} + \widehat{A'CA''} \equiv \hat{C} + \widehat{A'BH} =$ dr, deci $|AA''|$ este un diametru în cercul circumscris triunghiului ABC. **43.** În triunghiul HAA'', HO și AA' sînt mediane, deci G aparține segmentului $|HO|$ și împarte acest segment în raportul 2. **44.** Folosind centrele cercurilor, C, C', C'', se găsește că $\widehat{QPR} + \widehat{QMR} = 2$ dr și rezultă că C este simetricul cercului circumscris triunghiului PQR față de QR. Se poate observa că M este ortocentrul triunghiului PQR. **45.** Avem $\widehat{OPM} \equiv \widehat{OMP} \equiv \widehat{O'MP'} \equiv \widehat{O'P'M}$, deci $OP \parallel O'P'$. **46.** Se consideră puterile punctului de intersecție al axei radicale cu tangenta comună. **47.** Mijloacele a două arce ale unui cerc, care au capetele comune, sînt extremitățile unui diametru. **48.** Se folosește faptul că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este egală cu 360°. **49.** Urmărind unghiurile drepte formate de înălțimi și laturi, se pun în evidență anumite patrulatere inscriptibile. **50.** Fie A', A'' piciorul înălțimii din A, respectiv mijlocul laturii $|BC|$. Punctele A', A'' fiind pe cercul lui Euler, centrul acestui cerc se va găsi pe mediatoarea segmentului $|A'A''|$, care taie segmentul $|OH|$ în două segmente congruente. Mediatoarea segmentului $|B'B''|$ va trece și ea prin mijlocul segmentului $|OH|$. **51.** Se descompun laturile patrulaterului $ABCD$ cu ajutorul punctelor de tangență. **52.** Cercul de diametru $|AO|$, unde O este centrul cercului C; punctul A aparține locului, dacă se admite coarda nulă $|AA|$. **53.** Folosind teorema bisectoarei, se găsește că A' descrie un cerc omotetic cu cercul descris de C. **54.** Folosind puterile punctului A față de cercurile ce trec prin B și D, se găsește că locul geometric este un cerc de centru A. **55.** Bisectoarea unghiului format de două laturi congruente, în cazul triunghiului isoscel sau echilateral; mediatoarea laturilor paralele, la trapezul isoscel; diagonalele rombului, diagonalele pătratului și mediatoarele laturilor, dacă rombul este un pătrat; dreptele ce trec prin centrul cercului; mediatoarele laturilor și dreptele care trec prin centru și cîte un vîrf, în cazul unui poligon regulat. Orice poligon regulat cu n laturi are n axe de simetrie. **56.** Fie A' simetricul lui A față de d și fie B' simetricul lui B față de d'. Unul din segmentele $|AB|$, $|AB'|$, $|A'B|$, $|A'B'|$ este intersectat de fiecare din dreptele d, d'. Punctele de intersecție ale acestui segment cu d și d' sînt punctele căutate. **57.** Fie M, M' două puncte astfel ca $M \in h$, M' să fie de aceeași parte cu latura k față de suportul laturii h, $MM' \parallel d$ și $|MM'| \equiv |PQ|$. Paralela dusă prin M' la h intersectează k într-un punct B. Definim A prin condiția $\overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{M'M}$. **61.** (*Indicație.* Se utilizează exercițiile precedente, construindu-se unghiurile u, v, w în mod convenabil, astfel încît să fie legate de unghiurile triunghiului dat prin relațiile de la punctul d al exercițiului anterior.) **62.** (*Indicație.* Fiind dat triunghiul PQR, se construiesc triunghiuri isoscele, pe laturile unui triunghi echilateral, avînd unghiurile de la baze u', v', w' astfel ca $\hat{P} \equiv 3u' - 2$ dr, $\hat{Q} \equiv 3v' - 2$ dr, $\hat{R} \equiv 3w' - 2$ dr). **65.** (*Indicație.* Se observă că aria triunghiului ABC este egală cu suma ariilor triunghiurilor AMB, AMC și se folosește inegalitatea $|AB| + |AC| \geqslant |BC|$. **66.** (*Indicație.* Se consideră trei puncte necoliniare A, B, C din mulțimea E, astfel ca distanța de la punctul A la dreapta BC să fie cea mai mică din distanțele de acest fel ce se pot forma cu trei puncte necoliniare ale mulțimii E; se arată că dreapta BC nu conține alte puncte ale mulțimii E, diferite de punctele B, C.) **67.** (*Indicație.* Se observă că volumul tetraedrului $[OABC]$ este egal cu suma volumelor tetraedrelor $[OMAB]$, $[OMBC]$, $[OMCA]$ și se ține seama de faptul că suma ariilor a trei fețe ale unui tetraedru este mai mare decît aria celei de a patra fețe). **68.** (*Indicație.* Se procedează în mod analog celui urmat în cazul demonstrației teoremei lui Sylvester.) **104.** Produsul a două rotații într-un plan este o translație, dacă unghiurile de rotație sînt congruente și dacă sensurile de rotație sînt opuse. **107.** Se descompune R și T cu ajutorul unei simetrii față de o dreaptă ce trece prin centrul rotației R. **108.** Se rotește dreapta d în jurul lui A cu un unghi de 60° și se consideră punctul de intersecție al dreptei obținute în urma rotației, cu dreapta d'. **109.** Este vorba de rotațiile de 120° și 240° în jurul centrului triunghiului echilateral. **110.** R: patru. **112.** În cazul unui poligon regulat cu n laturi, mulțimea G conține n rotații și n simetrii față de cele n axe de simetrie ale poligonului. **113.** Dacă T este o translație de vector nenul și dacă A este un punct oarecare în planul translației, punctele $T(A)$, $T(T(A))$, $T(T(T(A)))$, ... sînt distincte două cîte două, deci formează o mulțime infinită. Dacă T lasă invariantă o figură F și dacă $A \in F$, atunci F trebuie să conțină acea mulțime infinită, deci F nu poate fi finită. **114.** Mulțimea infinită construită anterior este un exemplu de mulțime invariantă față de translația T. Punctele acestei mulțimi aparțin unei drepte paralele cu $\vec{v}$. Această dreaptă este de asemenea invariantă față de T. **115.** Dacă S este o izometrie care lasă invariant punctul O și un al doilea punct $A \neq 0$, atunci S este fie transformarea identică, fie simetria față de dreapta OA. Dacă o izometrie T admite O ca singur punct invariant, atunci T este o rotație proprie de centru O. **116.** Fie A, B două puncte distincte și fie $A' = H'(A)$, $B' = H'(B)$, $A'' = H(A')$, $B'' = H(B')$. Avem $AB \parallel \overrightarrow{A'B'} \parallel A''B''$ și, notînd prin h, h' rapoartele celor două omotetii, $\|\overrightarrow{A'B'}\| = h'\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{A''B''}\| = h\|\overrightarrow{A'B'}\|$, deci $\|\overrightarrow{A''B''}\| = hh'\|\overrightarrow{AB}\|$. Dacă $hh' = 1$, vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A''B''}$ vor fi echipolenți, deci $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BB'}$. În acest caz, $H \circ H'$ este o translație de vector $\overrightarrow{AA'}$. Dacă $hh' \neq 1$, $H \circ H'$ va fi o omotetie de centru O, unde $\{O\} = AA' \cap BB'$, raportul omotetiei $H \circ H'$ fiind egal cu hh'. **118.** Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt omotetice față de omotetia ce are centrul în punctul de intersecție al dreptelor AA', BB', CC' și raportul egal cu $|AB|/|A'B'| = |BC|/|B'C'| = |CA|/|C'A'|$. **119.** Se consideră înălțimea $|AA'|$ și se aplică teorema lui Thales. Se găsește că $|AM|/|BM| = |AA'|/|BC|$. **121.** Se observă că triunghiurile OAB, $OB'A'$ sînt asemenea și se aplică teorema triunghiurilor asemenea. **124.** Se intersectează d'' cu simetrica dreptei d' față de d, obținîndu-se punctul Q; P va fi simetricul lui Q față de d. **125.** Se folosește relația $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. **126.** Produsul simetriilor față de punctele O, O' este translația de vector $2\overrightarrow{OO'}$, dacă se aplică întîi simetria față de O. **127.** Se compune translația de vector $\overrightarrow{AC}$ cu o rotație convenabil aleasă de centru C și apoi cu simetria față de dreapta CD.

B. Trigonometrie

8. $a.\ \frac{3}{5}$; $b.\ -\frac{3}{5}$; $c.\ \frac{-3}{5}$. **9.** $a.\ \frac{4}{5}$; $b.\ \frac{4}{5}$; $c.\ -\frac{4}{5}$; $d.\ -\frac{4}{5}$,

16. $\frac{3}{4}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{-63}{16}$; $\frac{-33}{56}$. **17.** $\frac{\pi}{4}$. **24.** $a.\ +$; $b.\ -$; $c.\ -$; $d.\ +$; $e.\ -$; $f.\ +$; $g.\ +$; $h.$

30. 1) $\hat{B} = 72,6°$, $\hat{C} = 40,1°$, $c = 18,5$ m, sau: $\hat{B'} = 107,4°$, $\hat{C'} = 5,3°$, $c = 2,65$ m.

2) $c = 5,30$ m, $\hat{A} = 78,6°$, $\hat{B} = 26,6°$.

3) $\hat{A} = 104,1°$, $\hat{B} = 28,2°$, $\hat{C} = 47,7°$. **33.** 3) $x \in \left(\frac{\pi}{2}Z\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}Z + \frac{1}{4}\arccos\frac{-3}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}Z - \frac{1}{4}\arccos\frac{-3}{4}\right)$.

33. 4) $x \in \pi + 2\pi Z$; 5) $x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi Z$; 6) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}Z$. **34.** 1.

Cuprins

Nr. colilor de tipar : 17,5
Tiraj : 311 115 ex.
Bun de tipar : 14.08.1979

Com. nr. 90 305/25 425
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.