CURS 5

FORMĂ NORMALĂ CONJUNCTIVĂ / DISJUNCTIVĂ

- **Literal** = variabilă (literal pozitiv) sau negația unei variabile (literal negativ)
- **FND** = formă normală disjunctivă e. o formulă φ care e. o disjuncție de conjuncții literale

- $\varphi = \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{ij} \right)$, unde L_{ij} = literal (FND)

- **FNC** = formă normală conjunctivă e. o formulă φ care e. o conjuncție de disjuncții de literali

- $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{ij} \right)$, unde L_{ij} = literal (FNC)

- $F_\varphi : \{0,1\}^m \longrightarrow \{0,1\}$

  $F_\varphi(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m) = e^+_{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m}(\varphi)$ pt. orice $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m) \in \{0,1\}^m$

- φ formulă $\Rightarrow \models \varphi \iff F_\varphi$ e funcția constantă 1

  $\Rightarrow \varphi$ nesatisfiabilă $\iff F_\varphi$ e funcția constantă 0

- φ, ψ formule a.î. $Var(\varphi) = Var(\psi) \Rightarrow \varphi \models \psi \iff F_\varphi \leq F_\psi$

  $\Rightarrow \varphi \sim \psi \iff F_\varphi = F_\psi$

- $\exists \varphi, \psi$ formule diferite ~~$\exists$~~ a.î. $F_\varphi = F_\psi$

- **Funcția booleană**: $F : \{0,1\}^m \longrightarrow \{0,1\}$, $m \geq 1$ = nr. var. lui F

- φ formulă, F_φ funcție booleană cu m var $\Rightarrow m = |Var(\varphi)|$

T $H: \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ funcție booleană

$\exists \varphi$ formulă în FND a.î. $H = \mathcal{F}_\varphi$ (sau FNC analog)

$\forall \varphi$ formulă e echiv. cu φ^{FND} în FND și cu φ^{FNC} în FNC

CLAUZE ȘI REZOLUȚIE

- Clauză = mulțime finită de literale

  $C = \{L_1, L_2, \dots L_m\}$, L = literali

- dacă $m = 0 \Rightarrow C := \emptyset$ clauză vidă
- C clauză și $e: V \to \{0,1\} \Rightarrow e \models C$ dacă $\exists L \in C$ a.î. $e \models L$
- C clauză $\Rightarrow$ satisfiabilă dacă are un model

  $\Rightarrow$ validă dacă $\forall$ eval. $e: V \to \{0,1\}$ e model a lui C
- $Var(C) := \{x \in V \mid x \in C$ sau $\neg x \in C\}$; $x \in C \Leftrightarrow x$ apare în C
- $S = \{C_1, C_2, \dots C_m\}$ mulțime finită de clauze, FNC

  $m = 0 \Rightarrow S = \emptyset$
- $e: V \to \{0,1\}$, $e \models S$ dacă $e \models C_i$ $\forall i \in \{1, 2, \dots m\}$
- S { satisfiabilă dacă are un model
  - validă dacă orice $e: V \to \{0,1\}$ e model al lui S ($\neq \emptyset$)
  - nesatisfiabilă dacă conține clauza vidă $\square$
- $Var(S) = \bigcup_{C \in S} Var(C)$
- $Var(S) = \emptyset \Leftrightarrow S = \emptyset$ sau $S = \{\square\}$
- $e: V \to \{0,1\}$; $e \models \varphi \Leftrightarrow e \models S_\varphi$

- $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{ij} \right)$; L_{ij} literal

  C_i clauza obț. considerând toți $L_{ij} \in \{1, \dots k_i\}$ $\Big| \Rightarrow$

  S_φ - mulțimea tuturor clauzelor C_i distincte $\Big|$

  $\Rightarrow$ S_φ = forma clauzală a lui φ

- $C = \{L_1, L_2, \dots L_m\}$, $m \geq 1 \longmapsto \varphi_C = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m$

  $\square \longmapsto \varphi_\square = V_0 \wedge \neg V_0$

- $S = \{C_1, C_2, \dots C_m\} \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_S = \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_C$

- $e: V \to \{0,1\}$, $e \models S \iff e \models \varphi_S$

- R = rezolvent ; C_1, C_2 = clauze dacă $\exists L$ a.î. $L \in C_1$, $L^c \in C_2$

  și $R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$.

- Regula rezoluției: $Rez = \dfrac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}$

- $Res(C_1, C_2)$ = mulțimea rezolvenților clauzelor C_1 și C_2.

- O S-derivare prin rezoluție = secvență de clauze $C_1, C_2, \dots C_m$

  a.î. pt fiecare $i \in \{1, 2, \dots m\}$ una din cele 2 cond. e satisf.

  - C_i din S
  - $\exists j, k < i$ a.î. C_i rezolvent al C_j și C_k

- $Res(S) = \bigcup_{C_1, C_2 \in S} Res(C_1, C_2)$

- $e: V \to \{0,1\}$, $e \models S \Rightarrow e \models Res(S)$

(T) Teorema de corectitudine a rezoluției

Dacă $\square$ se derivează prin rezoluție din $S \Rightarrow S$ nesatisfiabilă

ALGORITMUL DAVIS-PUTNAM

- **Intrare:** $l := 1$, $S_1 := S$, S = mult. finită nevidă
- **$P_{i.1}$:** $x_i \in S_i$

  $T_i^1 := \{C \in S_i \mid x_i \in C\}$, $T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg x_i \in C\}$
- **$P_{i.2}$:** if ($T_i^1 \neq \emptyset$ și $T_i^0 \neq \emptyset$) then

  $U_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in T_i^1, C_0 \in T_i^0\}$

  else $U_i = \emptyset$
- **$P_{i.3}$:** $S'_{i+1} := (S_i \setminus (T_i^0 \cup T_i^1)) \cup U_i$

  $S_{i+1} := S'_{i+1} \setminus \{C \in S'_{i+1} \mid C \text{ tautologie}\}$
- **$P_{i.4}$:** if $S_{i+1} = \emptyset$ then

  S satisfiabilă

  else if $\square \in S_{i+1}$ then

  S nesatisfiabilă

  else

  {$i := i+1$; go to $P_{i.1}$}