CURS 7

SINTAXA ȘI SEMANTICĂ

(T) Teorema de corectitudine

$\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi \quad \forall \varphi \in Form$ (orice teoremă e tautologie)

- $e: V \to \{0,1\}$. Pentru orice φ = formulă
  - $e^+(\varphi) = 1 \Rightarrow Var(\varphi)^e \vdash \varphi$
  - $e^+(\varphi) = 0 \Rightarrow Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$

(T) Teorema de completitudine

φ = formulă, $\vdash \varphi \Leftrightarrow \vDash \varphi$

- Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$, pp. că $\varphi \sim \psi$ $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \psi$
- $e: V \to \{0,1\}$ este model al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ ($e \vDash \gamma$ pt $\forall \gamma \in \Gamma$) $\Rightarrow e \vDash \Gamma$
- Γ satisfiabilă dacă are un model, altfel e contradictorie
- $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$ mulț. tuturor modelelor lui Γ
- Γ mulț. formule, φ formulă

  φ = consecință semantică a lui $\Gamma \Rightarrow Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$

  Adică $\Gamma \vDash \varphi$, altfel $\Gamma \nvDash \varphi$
- $Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}$ mulț. consecințelor semantice
- Δ = mulț. formule e consec. sem. al lui $\Gamma \Rightarrow Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$
- $\Gamma \sim \Delta$ (logic echiv) $\Leftrightarrow Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$

- $\psi \vDash \varphi \Leftrightarrow \{\psi\} \vDash \varphi \Leftrightarrow \{\psi\} \vDash \{\varphi\}$
- $\psi \sim \varphi \Leftrightarrow \{\psi\} \sim \{\varphi\}$
- $Mod(\emptyset) = Fun(V, \{0,1\})$, orice evaluare $e: V \to \{0,1\}$ e model al mulțimii vide
- $Cn(\emptyset)$ = mulț. tuturor tautologiilor

  $\emptyset \vDash \varphi$, φ = tautologie
- Γ = mulț. formule, Γ nesatisf. $\Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \bot$
- Γ mulț. formule
  - → consistentă dacă $\exists\ \varphi$ = formulă a.î. $\Gamma \nvdash \varphi$
  - → inconsistentă $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ pt. orice φ.
- Γ, Δ = mulț. formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$

  Γ inconsistentă $\Rightarrow \Delta$ inconsistentă

  Δ consist. $\Rightarrow \Gamma$ consistentă
- $\emptyset$ consistentă
- mulț. teoremelor e consistentă
- Γ = mulț. formule, Γ inconsist. $\Leftrightarrow \forall \psi$, $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \exists\ \psi$, a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \bot$

T. Teorema de completitudine tare 1

Pt orice Γ = mulț. form., Γ consis $\Leftrightarrow \Gamma$ satisfiabilă

T. Teorema de completitudine tare 2

Pt orice Γ = mulț. formule și orice φ formulă

$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$

LOGICĂ DE ORDINUL ÎNTÂI

- $\mathcal{L}$ = limbaj de ord întâi e format din:
  - $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mult. numărabilă de var.
  - conectori $\neg$ și $\to$; paranteze; $=$; $\forall$
  - $\mathcal{R}$ = mult. de simboluri de relații
  - $\mathcal{F}$ = mult. de simboluri de funcții
  - $\mathcal{C}$ = mult. de simboluri de constante
  - ari: $\mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{N}^*$ funcție aritate
- $\mathcal{L}$ unic determinat de cvadruplul $\tau = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, ari)$
- τ = signatura lui $\mathcal{L}$ / tipul de similaritate
- $Sim_{\mathcal{L}}$ = mulțimea simbolurilor lui $\mathcal{L}$
- $Sim_{\mathcal{L}} = V \cup \{\neg, \to, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$
- elementele lui $\left[\begin{array}{l} \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \Rightarrow \text{simboluri non-logice} \\ V \cup \{\neg, \to, (,), =, \forall\} \Rightarrow \text{simboluri logice} \end{array}\right.$
- $\mathcal{F}_m$ = mulțimea simbolurilor de funcții de aritate $m \in \mathbb{N}^*$
- $\mathcal{R}_m$ = —— " —— de relații de aritate $m \in \mathbb{N}^*$
- $Expr_{\mathcal{L}}$ = mult. expr / tuturor șirurilor finite de simboluri lui $\mathcal{L}$
- $\theta = \theta_0 \theta_1 \cdots \theta_{k-1} \in Expr_{\mathcal{L}}$, σ expr.

σ apare în θ dacă $\exists\, 0 \le i \le j \le k-1$ a.î. $\sigma = \theta_i \ldots \theta_j$

$Var(\theta)$ = mulțimea var care apar în θ

- Citire unică

t termen $\Rightarrow$ exact una din urm. are loc.

- $t = x$, $x \in V$
- $t = c$, $c \in \mathcal{C}$
- $t = f t_1 \dots t_m$, $f \in \mathcal{F}_m$ $(m \geq 1)$ și $t_1 \dots t_m$ termeni

- Termenii lui $\mathcal{L}$ sunt def:

  $\boxed{T_0}$ Orice var e un termen.

  $\boxed{T_1}$ Orice simbol de ct. e termen.

  $\boxed{T_2}$ Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots t_m$ termeni $\Rightarrow f t_1 \dots t_m$ term.

  $\boxed{T_3}$ Expresiile obținute din T_0, T_1, T_2 sunt termeni

- $Term_{\mathcal{L}}$ = mulțimea termenilor lui $\mathcal{L}$
- t = termen închis $\Rightarrow Var(t) = \emptyset$
- Inducția pe termeni

Γ mult. termeni, conține var și simb. de ct
$m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1 \dots t_m \in \Gamma \Rightarrow f t_1 \dots t_m \in \Gamma$ $\Bigg| \Rightarrow \Gamma = Term_{\mathcal{L}}$

- Formulele atomice: $\left[\begin{array}{l} (s = t);\ s, t \text{ termeni} \\ (R t_1 \dots t_m),\ R \in \mathcal{R}_m \ (m \geq 1) \text{ și } t_1 \dots t_m \end{array} \right.$

- Formulele lui $\mathcal{L}$:

  $\boxed{F_0}$ Orice formulă atomică este formulă

  $\boxed{F_1}$ φ formulă $\Rightarrow \neg\varphi$ formulă și $(\forall x \varphi)$ formulă

  $\boxed{F_2}$ φ și ψ formule $\Rightarrow (\varphi \to \psi)$ formulă

  $\boxed{F_3}$ expresiile obț. din F_0, F_1, F_2 sunt formule

- $Form_{\mathcal{L}}$ = mult. formulelor lui $\mathcal{L}$

- **Inducția pe formule**

Γ mulțime formule conținând toate form. atomice

Γ închisă la $\neg$, $\to$ și $\forall x$ $\Rightarrow$ $\varphi, \psi \in \Gamma \Rightarrow (\neg\varphi), (\varphi \to \psi), (\forall x\, \varphi) \in \Gamma$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma = Form_{\mathcal{L}}$

- **Citire unică - formule**

φ formulă $\Rightarrow$ exact una din urm are loc:

- $\varphi = (s = t)$; s, t termeni
- $\varphi = (R t_1 \ldots t_m)$, $R \in \mathcal{R}_m$ $(m \geq 1)$ și $t_1, \ldots, t_m$ term.
- $\varphi = (\neg \psi)$, ψ formulă
- $\varphi = (\psi \to \chi)$; ψ, χ formule
- $\varphi = (\forall x\, \psi)$

- Simboluri de funcții / relații de aritate 1 (2) sunt unare (binare)
- $\mathcal{L}$-structură este cvadruplu $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$
  - A = mult. nevidă
  - $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$, f aritate $m \Rightarrow f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$
  - $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$, R aritate $m \Rightarrow R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$
  - $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \mid c \in \mathcal{C}\}$
  - A = universul structurii $\mathcal{A} \Rightarrow A = |\mathcal{A}|$
  - $f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}$ denotațiile / interpretările lui f, R, c în $\mathcal{A}$
- $\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$; $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- Egalitatea este simetrică: $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$
- Universul are 3+ elem: $\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$

- $\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde: $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}; \dot{\times}; \dot{S}; \dot{0})$
  - $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$, $\dot{<}$ simbol de relație binară.
  - $\mathcal{F} = \{\dot{+}; \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ simb. func. binare și $\dot{S}$ simb. fun. unare
  - $C = \{\dot{0}\}$
- Mulțimi parțial ordonate $(A, \dot{\leq})$; $\dot{\leq}$ în loc de R și $\mathcal{L}_{\leq}$
- Mulțimi strict ordonate $(A, <)$; $\dot{<}$ în loc de R și $\mathcal{L}_{<}$
- Grafuri $G = (V, E)$; $\dot{E}$ în loc de R și $\mathcal{L}_{Graf}$
- Structuri $(A, \in)$; $\dot{\in}$ în loc de R și $\mathcal{L}_{\in}$
- $\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$; $\mathcal{R} = \emptyset$ limbaj grupuri

  $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{-1}\}$; $\dot{*}$ simbol funcție binară; $\dot{-1}$ simb. f. unară

  $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$

  $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}; \dot{-1}; \dot{e})$
- $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}) = (\dot{+}; \dot{-}; \dot{0})$ grupuri abeliane

  $\mathcal{R} = \emptyset$

  $\mathcal{F} = \{\dot{+}; \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar și $\dot{-}$ simbol unar

  $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$