Setul 13

de probleme şi exerciţii de matematică

(relative la integrale ale funcţiilor reale scalar-scalare)

S13.1 Să se calculeze:

$$a)\int \frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2}\,dx;\quad b)\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx;$$

$$c)\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt[5]{\sin x-\cos x}}\,dx;\quad d)\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\,dx;$$

$$e)\int \frac{\sqrt[5]{3-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx;\quad f)\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x-x^2}};$$

$$g)\int_{-2}^{2}\min\left\{x\left(x^2-1\right),x+1\right\}dx;\quad h)\int_{e^2}^{e^3}\frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}.$$

S13.2 Să se stabilească natura următoarelor integrale improprii:

$$a)\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx;\quad b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi\sin x)^{\alpha}\cdot(\cos x)^{\beta}\,dx,\ \text{cu } \alpha,\beta\in\mathbb{R};$$

$$c)\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}};\quad d)\int_1^{\infty}\frac{e^{1/x}}{(x+1)^2}\,dx;$$

$$e)\int_0^{\infty}\frac{x^p\sqrt{1+\sqrt{x}}\ln x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}\,dx,\ p\in\mathbb{R};\quad f)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+e^{-2x}+\sqrt{5}}\,dx.$$

S13.3 Să se arate că dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, astfel încât

$$\int_0^1 f^2(x)dx\le 3\left(\int_0^1 F(x)dx\right)^2,$$

unde F este o primitivă a lui f, pentru care $F(1)=0$, atunci f este liniară.

S13.4 Determinaţi $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\sin x}}{(1+x)^{1/x}-e}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases},$$

admite primitive.

S13.5 Să se calculeze următoarele integrale folosind derivatele lor:

$$a)\ F(y)=\int_0^{\pi}\ln\frac{1+y\cos x}{\cos x}\,dx,\ |y|<1;\quad b)\ F(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(y\sin x)}{\sin x}dx,\ y\in\mathbb{R};$$

$$c)\ F(y_1,y_2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(y_1^2\sin^2 x+y_2^2\cos^2 x\right)dx,\ (y_1,y_2)\in A\subseteq\mathbb{R}^2.$$

S13.6 Să se arate că:

$$a)\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin(\gamma x)\,dx=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\gamma},\ \text{cu } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\gamma\neq 0;$$

$$b)\ \Gamma(p) = \int_0^1 (\ln\frac{1}{t})^{p-1} dt, \forall p > 0;$$

$$c)\ \int_0^\infty e^{-t^p} dt = \Gamma(1+\frac{1}{p}), \forall p > 0.$$

S13.7 Dată fiind funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+x^3+3x^2+x+1}, x \in \mathbb{R},$$

să se găsească primitivele funcţiei $f|_{\mathbb{R}_+^*}$, prin substutiţia $t = x + \frac{1}{x}$. Să se determine apoi o primitivă a lui f, pe $\mathbb{R}$.

S13.8 Să se arate că:

$$\int_0^a e^{x^2} dx \cdot \int_0^a e^{-x^2}\, dx \geq a^2, \forall a \in \mathbb{R}_+.$$

S13.9 Să se calculeze:

$$\int_0^{1/2} x \ln\frac{1+x}{1-x}\, dx + \int_0^1 \frac{x\text{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx - \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx.$$

S13.10 Să se studieze convergenţa integralelor improprii

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^\alpha\sqrt{|3x^2-2x-1|}} \text{ şi } \int_{-\infty}^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^4}\, dx,\ \text{cu } \alpha \in \mathbb{R}.$$

S13.11 Date fiind funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$, să se arate că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, să se calculeze $\lim_{x\to\infty} f(x)$ şi să se deducă valoarea integralei $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$.

Bibliografie orientativă

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme (Cap.10, 11, 12 şi 13)*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

2. S. Găină, E. Câmpu, Gh. Bucur - *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.

3. M. Postolache (coord.), Ariana Pitea, Dragoş Cioroboiu - *Calcul integral.Exerciţii şi probleme,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.