Setul de probleme 3

soluţiile se primesc

miercuri 8 ianuarie între orele 14 şi 16, la cabinetul C-402

18 decembrie 2013

Problema 1. a) *Adevărat sau Fals?*

> Dacă într-o reţea $R = (G, s, t, c)$ capacităţile arcelor sunt distincte, atunci (în R) fluxul maxim de la s la t este unic.

Argumentaţi răspunsul!

b) Descrieţi un algoritm cu timp de lucru polinomial care să decidă dacă într-o reţea dată fluxul maxim de la intrare la ieşire este unic (argumentaţi corectitudnea şi complexitatea timp). (**2+2 = 4 puncte**)

Problema 2. Demonstraţi că următoare problemă este **NP**-completă.

INT

Date: $n, m \in \mathbf{N}$ $(n, m \geq 1)$, $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{Z}^{m\times 1}$

Întrebare: Există $x \in \mathbf{Z}^{n\times 1}$ astfel încât $Ax \leq b$?

(Precizare asupra notaţiilor: Dacă p şi q sunt numere naturale nenule, $\mathbf{Z}^{p\times q}$ notează mulţimea matricilor cu p linii şi q coloane cu elemente numere întregi; în particular $\mathbf{Z}^{p\times 1}$ sunt vectori coloană cu p elemente întregi; dacă x şi y sunt doi vectori cu elemente întregi, atunci $x \leq y$ dacă relaţia $\leq$ are loc pentru fiecare două componente x_i şi y_i.) *Indicaţie: se poate încerca* **SM** $\propto$ **INT**.

(**2+2 = 4 puncte**)

Problema 3. Un *hipergraf k-uniform* este o pereche $H = (V, E)$, unde V este o mulţime finită şi nevidă, k este un număr întreg, $k \geq 2$, iar E este o submulţime a mulţimii părţilor cu k elemente ale lui V ($E \subseteq \binom{V}{k}$; $e \in E$ este o submulţime de k elemente din V). Se observă că un hipergraf 2-uniform este un graf. Spunem că un hipergraf k-uniform este **simplu** dacă există

$c : V \to \{1, \ldots, k\}$ astfel încât pentru orice $v, w \in V$, $v \neq w$, dacă există $e \in E$ astfel încât $v, w \in e$ atunci $c(v) \neq c(w)$. Considerăm următoarea problemă de decizie:

k-**Simplu**

Date: H un hipergraf k-uniform.

Întrebare: Este H simplu ?

a) Demonstraţi că problema 3-Simplu este **NP**-completă.
b) Arătaţi că problema 2-simplu este din **P**.

(**2+2=4 puncte**)

Problema 4. Fie S şi T două mulţimi finite, nevide şi disjuncte. Pentru fiecare $x \in S \cup T$ este dat un număr întreg pozitiv $a(x)$. Se cere să se decidă dacă există un graf bipartit $G = (S \cup T, E)$ astfel ca pentru orice $v \in S \cup T$ să avem $d_G(v) = a(v)$. În caz afirmativ, se vor returna muchiile grafului (S şi T sunt cele două clase ale bipartiţiei lui G).

Arătaţi că problema se poate rezolva în timp polinomial ca o problemă de flux maxim pentru o reţea convenabil definită.

(**2 puncte**)

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.
2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.
3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.
4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.
5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.