ALGORITMICA GRAFURILOR
Săptămâna 5

C. Croitoru

croitoru@info.uaic.ro

FII

October 27, 2013

OUTLINE

1. **Probleme de drum minim**
   (ag 13-14 allinone.pdf pag. 117 $\longrightarrow$ 124)

2. **Probleme de conexiune**
   (ag 13-14 allinone.pdf pag. 125 $\longrightarrow$ 149)

3. **Problemele pentru seminarul 5**

4. **Prezentarea temei pentru acasă**

Rezolvarea problemei P3

P3 Date G digraf; $a : E(G) \to \mathbf{R}$.
Să se determine $D_{ij}^* \in \mathcal{D}_{ij}$ $\forall i, j \in V(G)$, a.î.
$a(D_{ij}^*) = \min\{a(D_{ij}) \mid D_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}\}$.

Probleme de drum minim

Rezolvarea problemei P3

P3 Date G digraf; $a : E(G) \to \mathbf{R}$.
Să se determine $D^*_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$ $\forall i, j \in V(G)$, a.î.
$a(D^*_{ij}) = \min\{a(D_{ij}) \mid D_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}\}$.

$O(n^4)$

Iterarea algoritmului lui Bellman-Ford pentru $s = \overline{1, n}$

Probleme de drum minim

Rezolvarea problemei P3

P3 Date G digraf; $a : E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
Să se determine $D^*_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}\ \forall i, j \in V(G)$, a.î.
$a(D^*_{ij}) = \min\{a(D_{ij}) \mid D_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}\}$.

$O(n^4)$

Iterarea algoritmului lui Bellman-Ford pentru $s = \overline{1, n}$

$O(n^3)$

Iterarea algoritmului lui Dijkstra, după preprocesare!

Rezolvarea problemei P3

P3 Date G digraf; $a : E(G) \to \mathbf{R}$.
Să se determine $D^*_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$ $\forall i, j \in V(G)$, a.î.
$a(D^*_{ij}) = \min\{a(D_{ij}) \mid D_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}\}$.

$O(n^4)$

Iterarea algoritmului lui Bellman-Ford pentru $s = \overline{1, n}$

$O(n^3)$

Iterarea algoritmului lui Dijkstra, după preprocesare!

$O(n^3 \log n)$

Înmulțiri matriciale!

Rezolvarea problemei P3

P3 Date G digraf; $a : E(G) \to \mathbf{R}$.
Să se determine $D^*_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$ $\forall i, j \in V(G)$, a.î.
$a(D^*_{ij}) = \min\{a(D_{ij}) \mid D_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}\}$.

$O(n^4)$

Iterarea algoritmului lui Bellman-Ford pentru $s = \overline{1, n}$

$O(n^3)$

Iterarea algoritmului lui Dijkstra, după preprocesare!

$O(n^3 \log n)$

Înmulțiri matriciale!

$O(n^3)$

Algoritmul lui **Floyd-Warshal**

Rezolvarea problemei P3

Algoritmul lui **Floyd-Warshal**

1: **for** $i := 1$ **to** n **do**
  for $j := 1$ **to** n **do**
  { *înainte*$(i, j) \leftarrow i$;
    if $i = j$ **then** { $a_{ii} \leftarrow 0$;*înainte*$(i, i) \leftarrow 0$ }
  }

2: **for** $m := 1$ **to** n **do**
  for $i := 1$ **to** n **do**
  for $j := 1$ **to** n **do**
    if $a_{ij} > a_{im} + a_{mj}$ **then**
    { $a_{ij} \leftarrow a_{im} + a_{mj}$;
      înainte$(i, j) \leftarrow$*înainte*(m, j)
      if $(i = j \wedge a_{ij} < 0)$ **then**
        return ”circuit negativ“
    }

Teorema lui **Menger**

Fie $G = (V, E)$ (di)graf și $X, Y \subseteq V$. Atunci numărul maxim de XY-drumuri disjuncte este egal cu cardinalul minim al unei mulțimi XY-separatoare.

Fie $G = (V, E)$ un (di)graf și $s, t \in V$, astfel încît $s \neq t$, $st \notin E$. Există k drumuri intern disjuncte de la s la t în G dacă și numai dacă îndepărtînd mai puțin de k vîrfuri diferite de s și t, în (di)graful rămas există un drum de la s la t.

Consecință Un graf G este p-conex dacă $G = K_p$ sau $\forall st \in E(\overline{G})$ există p drumuri intern disjuncte de la s la t în G.

Determinarea numărului $k(G)$ de conexiune a grafului G (cea mai mare valoare a lui p pentru care G este p-conex) se reduce la determinarea lui

$$\min_{st \in E(\overline{G})} p(\{s\}, \{t\}; G)$$

(care se poate obține în timp polinomial.)

Teorema lui König

Dacă $G = (S, R; E)$ este un graf bipartit, atunci cardinalul maxim al unui cuplaj este egal cu cardinalul minim al unei mulțimi de vîrfuri incidente cu toate muchiile grafului.

Consecință: Dacă G e graf bipartit, atunci :

$$\nu(G) = |G| - \alpha(G).$$

Teorema lui Hall

Dacă $\mathcal{A} = (A_i; i \in I)$ este o familie de submulțimi ale lui S, o funcție $r_{\mathcal{A}} : I \to S$ cu proprietatea că $r_{\mathcal{A}}(i) \in A_i$, $\forall i \in I$ se numește *funcție de reprezentare pentru familia* $\mathcal{A}$. În acest caz, $(r_{\mathcal{A}}(i); i \in I)$ formează un sistem de reprezentanți ai familiei A.

Dacă funcția de reprezentare $r_{\mathcal{A}}$ este injectivă atunci $r_{\mathcal{A}}(I) \subseteq S$ se numește *sistem de reprezentanți distincți* ai familiei $\mathcal{A}$, sau transversală.

Teorema lui Hall *Familia* $\mathcal{A} = (A_i; i \in I)$ *de submulțimi ale lui* S *admite o transversală dacă și numai dacă*

(H) $$|\mathcal{A}(J)| \geq |J| \quad \forall J \subseteq I.$$

Structura grafurilor p-conexe

Teorema lui Dirac
Dacă $G = (V, E)$ este un graf p-conex $p \geq 2$, atunci prin orice p vîrfuri ale sale trece un circuit.

Teorema lui *Erdös și Chvatal*
Fie G un graf p-conex. Dacă $\alpha(G) \leq p$ atunci G este hamiltonian.

Problemele pentru seminarul 5

Se vor discuta (cel puțin) patru probleme dintre următoarele:

1. **Problema 4, Setul 3”**
2. **Problema 2, Setul 4**
3. **Problema 3, Setul 5**
4. **Problema 1, Setul 4’**
5. **Problema 4, Setul 4’**
6. **Problema 1, Setul 6**
7. **Problema 3, Setul 20**