Setul 4
de probleme şi exerciţii de matematică
(cu privire la serii de numere reale)

S4.1 Să se arate că reprezentarea Engel a oricărui număr real r constituie o serie convergentă, cu suma r.

S4.2 Neutilizând teorema 4.9 (din cursul 4), să se demonstreze criteriul lui d'Alembert pentru stabilirea naturii unei serii de numere reale pozitive.

S4.3 Să se dea o demonstraţie a criteriului logaritmului pentru stabilirea naturii unei serii de numere reale pozitive, criteriu al cărui enunţ este următorul :

"*Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *unde* $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} = \lambda$. *Atunci:*

i) *dacă* $\lambda > 1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

ii) *dacă* $\lambda < 1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă;*

iii) *dacă* $\lambda = 1$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$."

S4.4 Să se arate că reprezentarea p-adică (cu $p \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$) a oricărui număr real pozitiv şi subunitar este o serie convergentă.

S4.5 Să se analizeze seria cu termenul general

$$\arccos \frac{n(n+1) + \sqrt{(n+1)(n+2)(3n+1)(3n+4)}}{(2n+1)(2n+3)}, n \in \mathbb{N}^*$$

şi, în caz de convergenţă a sa, să i se afle suma.

S4.6 Să se arate că dacă seriile de numere reale $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^4$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt[3]{b_n^4}$ sunt convergente, atunci şi seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n b_n$ este convergentă.

S4.7 Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ o serie convergentă din $\mathbb{R}$, cu $u_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Ce se poate spune despre natura seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{u_n}{1+u_n}\right)^\alpha$, unde α este un număr real?

S4.8 Folosind diverse criterii de convergenţă, să se stabilească natura fiecăreia dintre seriile cu termenii generali de mai jos. Să se calculeze apoi, ori de câte ori este posibil, sumele în cauză:

$$\text{a) } \frac{2^n + 3^{n+1} - 6^{n-1}}{12^n}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{b) } \frac{4n-3}{n(n^2-4)}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3;$$

$$\text{c) } \frac{1}{n^2 + n(1+2\sqrt{2}) + 2 + \sqrt{2}}, n \in \mathbb{N}; \quad \text{d) } \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{e) } \frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{f) } (-1)^n \frac{\ln 2 + 3^n}{\ln 3 + 2^n}, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{g) } \frac{1}{\sqrt[n+1]{\ln(n+1)}}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{h) } \frac{\sin n \cdot \cos n^2}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{i) } \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^a \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}; \quad \text{j) } \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{k) } \arcsin \frac{1}{n\sqrt[3]{n}+5}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{l) } \frac{1}{e \cdot \sqrt{e} \cdot \sqrt[3]{e} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{e}}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{m) } \frac{\operatorname{arctg}(n\alpha)}{(\ln 3)^n}, n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}; \quad \text{n) } \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2;$$

$$\text{o) } \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{p) } \left(\frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^m} - \frac{n}{m+1}\right)^n, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{r) } (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n \cdot n!}, n \in \mathbb{N}; \quad \text{q) } 2^{-\sqrt{n^2+1}}, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{s) } \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2; \quad \text{t) } \frac{\ln n}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{u) } (-1)^n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{v) } (-1)^{n-1} \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{w) } (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{x) } \frac{a^n + \operatorname{sh} n}{3^n} \cdot b^n, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{y) } \operatorname{tg}^n\left(a + \frac{b}{n}\right), a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{z) } (-1)^{n-1} n^\alpha \left(\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)\right)^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$

S4.9 Să se arate că reprezentarea Sylvester a oricărui număr real r este dată de o serie convergentă, cu suma r.

S4.10 Să se analizeze natura seriilor cu termenii generali următori şi, dacă este posibil, să se afle sumele în cauză:

$$\text{a) } \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{b) } \ln \frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{c) } \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{d) } \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2;$$

$$\text{e) } \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)^n, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{f) } \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+n-1)}{n! n^\beta}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*;$$

g) $(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}, n\in\mathbb{N}$; h) $\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n^3+1}}, n\in\mathbb{N}^*$.

S4.11 Să se arate că dacă şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ este aşa încât seria $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} e^{x_k}$ este convergentă, atunci este convergentă şi seria $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} e^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}}$.

S4.12 Date fiind seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{n}{2^n}$, să se găsească produsul lor Cauchy.

Bibliografie selectivă

1. C, Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

2. S. Găină, E. Câmpu, Gh. Bucur - *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral (Vol. II)*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1966.

3. M. Roşculeţ, C. Bucur, M. Craiu - *Culegere de probleme de analiză matematică*, E. D. P., Bucureşti, 1968.

4. I. Radomir, A. Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.