Setul 7
de probleme şi exerciţii de matematică
(relative la funcţii reale şi aplicaţii liniare)

S7.1 Să se determine mulţimile de definiţie ale următoarelor funcţii:

a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin(\ln x) + 2\sqrt{1 - \ln^2 x}$;

b) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \ln((1 - y)x)$;

c) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}\right)$;

d) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^{zy}$;

e) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$.

S7.2 Să se exprime funcţia polinomială $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$, $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, prin intermediul polinoamelor simetrice fundamentale corespunzătoare.

S7.3 Să se decidă care dintre aplicaţiile date în continuare sunt liniare şi care nu:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 4x_3 + 1)$;

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = \left(-x, 4x, 7x^2\right)$;

iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2)$;

iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2) = (-4x_1 + 3x_2, x_1 + x_2, 5x_1 - 6x_2)$.

S7.4 Să se demonstreze Propoziţia 7.4 din cursul 7.

S7.5 Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfism a cărui matrice în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ este următoarea:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Să se calculeze $T(1, -2, 3)$.

ii) Să se determine matricea lui T în baza $\{(2, 3, -1), (0, -2, 1), (-1, -1, 1)\}$.

iii) Să se afle $Im(T)$ şi $rang(T)$.

iv) Să se afle $Ker(T)$ şi $def(T)$.

S7.6 Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2).$$

a) Să se arate că T este o aplicaţie liniară şi să se scrie matricea corespunzătoare în perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$.

b) Să se afle matricea operatorului T în raport cu bazele $\hat{B} = \{(1, -1), (2, 3)\}$ şi $\hat{B}' = \{(1, 2, 3), (-2, 1, 3), (1, -1, 1)\}$.

S7.7 Care dintre endomorfismele date mai jos este diagonalizabil? În caz afirmativ, să se determine forma diagonală în cauză. Care este ortogonal şi care este o izometrie?

i) $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, x_1 - 2x_2 + x_3, x_2 - x_3)$, $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

ii) $T(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_2, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3, 2x_2 - 2x_3)$, $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

iii) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + x_3)$, $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

S7.8 Fie endomorfismele

$$T_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4)\,,$$

$$\forall\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

şi

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2 + 4x_3)\,,\ \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători;

b) Să se afle subspaţiile proprii şi dimensiunile lor;

c) Să se analizeze posibilitatea diagonalizării lui T_1 şi T_2. În caz afirmativ, să se afle baza în care se manifestă forma diagonală, matricea schimbării de bază în cauză, precum şi forma diagonală ca atare.

S7.9 Fie V şi W spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ de scalari $\mathbb{K}$. Dacă V este finit dimensional, T este o aplicaţie liniară de la V la W, X este o submulţime finită a lui $Ker(T)$, iar Y este o submulţime finită a lui V, să se arate că oricare două din următoarele trei condiţii o implică pe cealaltă:

a) X este bază pentru $Ker(T)$;

b) $T(Y)$ este bază pentru $Im(T)$;

c) $X \cup Y$ este bază pentru V.

S7.10 Fie $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfismul care, în raport cu baza alcătuită din $b_1 = (1, -1)$ şi $b_2 = (0, 1)$, are matricea

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

De asemenea, fie $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfism care, faţă de vectorii $v_1 = (2, 1)$ şi $v_2 = (-1, 1)$, are matricea

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine matricea endomorfismului $T_2 - T_1$ în raport cu sistemul de vectori $\{v_1, v_2\}$, precum şi matricea lui $T_2 \circ T_1$ faţă de baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$.

S7.11 Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional peste un corp comutativ de scalari $\mathbb{K}$ şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Să se arate că $rang(T \circ T) + def(T|_{Im(T)}) = rang(T)$.

S7.12 Fie aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 5x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3)\,,\ \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se determine valorile proprii ale lui T şi subspaţiile proprii corespunzătoare.

b) Să se precizeze dacă matricea lui T poate fi adusă la forma diagonală şi, în caz afirmativ, să se găsească o bază faţă de care matricea lui T are forma diagonală.

Bibliografie orientativă

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme (cap.IV)*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

2. M. Craioveanu, I. D. Albu- *Geometrie afină şi euclidiană. Exerciţii (cap. II, V, VI)*, Ed. Facla, Timişoara, 1982.

3. Veronica Teodora Borcea, Cătălina Ileana Davideanu, Corina Forăscu - *Algebră liniară*, Ed. "Gh. Asachi", Iaşi, 2000.

4. O. Dogaru, Cristina Stamin - *Algebră liniară. Calcul vectorial (exerciţii şi probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2008.