Calcul Numeric

Cursul 12

2017

Anca Ignat

Interpolare numerică

Presupunem că despre o funcţie f cunoaştem doar valorile într-un număr finit de puncte. Pornind de la aceste date, dorim să aproximăm funcţia f într-un alt punct.

x	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
f	y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

În tabelul de mai sus $f(x_i) = y_i$, $i=0,1,\ldots,n$ şi $x_i \neq x_j$, $i \neq j$.

Dat un punct $x \neq x_i$, $i=0,1,\ldots,n$ dorim să aproximăm $f(x)$ cunoscând cele $(n+1)$ perechi (x_i, y_i), $i=0,\ldots,n$. Punctele x_i se numesc ***noduri de interpolare***.

Polinomul de interpolare Lagrange

Notăm cu Π_n mulțimea polinoamelor de grad cel mult n. Dimensiunea acestui spațiu este $n+1$, baza uzuală fiind dată de polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Vom considera o altă bază în acest spațiu. Se consideră polinoamele p_i:

$$p_i \in \Pi_n \text{ astfel ca } p_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } j \neq i \\ 1 & \text{pentru } j = i \end{cases}, \; j = 0, \ldots, n, \; i = 0, \ldots, n$$

Din relația $p_i(x_j)=0$, $\forall j \neq i$ şi faptul că p_i este de grad n rezultă că $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ sunt cele n rădăcini ale polinomului p_i.

Avem:

$$p_i(x) = c_i(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n),$$
$$c_i \in \mathbb{R},\ i = 0,\ldots,n$$

Constanta c_i se determină din relaţia $p_i(x_i) = 1$:

$$p_i(x_i) = 1 = c_i(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) \Rightarrow$$
$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

Polinoamele p_i au forma:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$$
$$i = 0,\ldots,n$$

Propoziţie

Polinoamele $p_0, p_1, \ldots, p_n$ formează o bază în Π_n.

Demonstraţie: Vom arăta că cele $n+1$ polinoame sunt liniar independente:

$$q(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \cdots + a_n p_n(x) = 0, \forall x$$

$$\Rightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

Vom face pe rând $x = x_0, x = x_1, \ldots, x = x_n$ în polinomul q:

$$x = x_0 \quad q(x_0) = a_0 p_0(x_0) + a_1 p_1(x_0) + \cdots + a_n p_n(x_0) =$$

$$= a_0 1 + a_1 0 + \cdots + a_n 0 = a_0 = 0 \quad \Rightarrow a_0 = 0$$

$$x = x_1 \quad q(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$x = x_k \quad q(x_k) = a_0 p_0(x_k) + \cdots + a_k p_k(x_k) + \cdots + a_n p_n(x_k) =$$

$$= a_0 0 + \cdots + a_k 1 + \cdots + a_n 0 = a_k = 0 \Rightarrow a_k = 0$$

$$\vdots$$

$$x = x_n \quad q(x_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0$$

Toate constantele a_i sunt nule deci polinoamele $\{p_i; i = 0,\ldots,n\}$ formează o bază în Π_n.

Pentru a aproxima funcţia f pornind de la tabelul de mai sus, vom construi un polinom $l_n \in \Pi_n$ a.î. să satisfacă ***condiţiile de interpolare***:

$$l_n \in \Pi_n \quad , \quad l_n(x_i) = y_i \quad , \quad \forall i = 0,\ldots,n \qquad (1)$$

Odată construit acest polinom, vom aproxima $f(x)$ prin $l_n(x)$, $f(x) \approx l_n(x)$

Vom scrie polinomul l_n în raport cu noua bază $\{p_i; i = 0,\dots,n\}$, deci există constantele reale $a_0, a_1,\dots,a_n$ astfel ca:

$$l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(x)$$

Constantele a_k se determină astfel:

$$y_k = l_n(x_k) = a_0 p_0(x_k) + \cdots + a_k p_k(x_k) + \cdots + a_n p_n(x_k) =$$

$$= a_0 0 + \cdots + a_k 1 + \cdots + a_n 0 = a_k \;\Rightarrow\; a_k = y_k$$

Prin urmare un polinom de grad n care îndeplinesc condiţiile de interpolare (1) este:

$$l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Polinomul din formula (2) se numeşte ***polinomul de interpolare Lagrange***.

Propoziţie

Polinomul l_n dat de formula (2) este unicul polinom de grad n care îndeplineşte condiţiile de interpolare (1).

Demonstraţie: Presupunem că mai există un polinom $q \in \Pi_n$ care îndeplineşte condiţiile (1):

$$q \in \Pi_n \quad , \; q(x_i) = y_i \quad , \quad \forall i = 0,\ldots,n$$

Fie polinomul $p(x)=l_n(x)-q(x) \in \Pi_n$.

$$p(x_k) = l_n(x_k) - q(x_k) = y_k - y_k = 0 \ , \forall k = 0,\dots,n$$

Polinomul p are ca rădăcini toate nodurile de interpolare.
Polinomul p este polinom de grad cel mult n şi are $(n+1)$ rădăcini distincte ($x_i \neq x_j, \forall\ i \neq j$). Acest polinom nu poate fi decât polinomul identic nul:

$$p(x) = l_n(x) - q(x) \equiv 0 \quad \forall x\,, \quad l_n(x) = q(x) \quad \forall x$$

Polinomul l_n este unicul care satisface (2).

Fie w_{n+1} polinomul de grand $(n+1)$ care are ca rădăcini nodurile de interpolare:

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \in \Pi_{n+1}$$

Fie $a = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $b = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Teorema restului

Fie $f \in C^{n+1}[a,b]$ şi $\bar{x} \in [a,b]$, $\bar{x} \neq x_i$, $\forall i = 0,\ldots,n$. Atunci există un punct $y \in [a,b]$, $y = y(x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x})$ (punctul y depinde de nodurile de interpolare x_i şi de punctul $\bar{x}$) astfel că eroarea la interpolarea numerică este dată de:

$$f(\bar{x}) - l_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} w_{n+1}(\bar{x}) \qquad (3)$$

Demonstraţie: Considerăm funcţia $\boldsymbol{F}$:

$$F(x) := f(x) - l_n(x) - cw_{n+1}(x)$$

Constanta reală $\boldsymbol{c}$ este aleasă astfel ca $F(\bar{x}) = 0$ adică:

$$c = \frac{f(\bar{x}) - l_n(\bar{x})}{w_{n+1}(\bar{x})},\ (\ x \neq x_i \ \ \forall i\ ) \Rightarrow \ w_{n+1}(\bar{x}) \neq 0\ ) \qquad (4)$$

Funcţia $\boldsymbol{f}$ fiind de clasă C^{n+1} pe intervalul $[a,b]$ rezultă că şi funcţia $\boldsymbol{F}$ este din $C^{n+1}[a,b]$. Avem:

$$F(x_i) = f(x_i) - l_n(x_i) - cw_{n+1}(x_i) = y_i - y_i - c\,0 = 0\ \ ,\forall i = 0,\ldots,n$$

Funcţia $\boldsymbol{F}$ are $(n+2)$ zerouri, $x_0, x_1,\ldots, x_n, \bar{x}$. Aplicând succesiv Teorema lui Rolle rezultă că F' are $(n+1)$ zerouri, F'' are $\boldsymbol{n}$ zerouri,…, $F^{(n+1)}$ are $\mathit{1}$ zero în intervalul $[a,b]$. Vom nota această rădăcină a lui $F^{(n+1)}$ cu y. Punctul y depinde de zerourile iniţiale $x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}$ şi:

$$y = y(x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}) \in [a,b] \quad \text{a.î.} \quad F^{(n+1)}(y) = 0. \qquad (5)$$

Derivata de ordinul *(n+1)* a funcţiei F se calculează astfel:

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - l_n^{(n+1)}(x) - c\, w_{n+1}^{(n+1)}(x) =$$
$$= f^{(n+1)}(x) - 0 - c(n+1)! = f^{(n+1)}(x) - c(n+1)! \qquad (6)$$

(derivata de ordin *(n+1)* a polinomului de grad n l_n este 0).

Din relaţiile (4), (5) şi (6) rezultă că:

$$c = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} = \frac{f(\bar{x}) - l_n(\bar{x})}{w_{n+1}(\bar{x})} \Rightarrow f(\bar{x}) - l_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} w_{n+1}(\bar{x})$$

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Fie $l_k(x, x_0, x_1,\dots, x_k, f)$ polinomul de interpolare Lagrange pentru funcţia f pe sistemul de noduri distincte $\{x_0, x_1,\dots, x_k\}$.

Propoziţie

Fie $l_{k-1}(x, x_0, x_1,\dots, x_{k-1}, f)$, $l_{k-1}(x, x_1, x_2,\dots, x_k, f) \in \Pi_{k-1}$ polinoamele de interpolare Lagrange pentru funcţia f pe sistemele de noduri $\{x_0, x_1,\dots, x_{k-1}\}$ şi respectiv $\{x_1, x_2,\dots, x_k\}$.

Atunci:

$$l_k(x, x_0, x_1, \dots, x_k, f) =$$

$$= \frac{(x - x_0) l_{k-1}(x, x_1, x_2, \dots, x_k, f) - (x - x_k) l_{k-1}(x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, f)}{x_k - x_0} \tag{1}$$

Demonstraţie: Exerciţiu.

Considerăm următoarele probleme de interpolare pentru f:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})\} \rightarrow l_{k-1}(x, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, f)$$
$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)\} \rightarrow l_k(x, x_0, x_1, \ldots, x_k, f)$$

Ne interesează să găsim o formulă de trecere rapidă de la polinomul de interpolare pe ***k*** noduri la cel care are un nod în plus. Deoarece polinomul de grad cel mult ***k***:

$$q(x) = l_k(x, x_0, x_1, \ldots, x_k, f) - l_{k-1}(x, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, f) \in \Pi_k$$

are ca rădăcini punctele $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ ($q(x_i) = y_i - y_i = 0,\ i=0,\ldots,k-1$) avem relaţia:

$$l_k(x, x_0, x_1, \ldots, x_k, f) = l_{k-1}(x, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, f) + A\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j) \quad (2)$$

în care ***A*** este dat de relaţia:

$$A = \frac{l_k(x_k, x_0, x_1, \ldots, x_k, f) - l_{k-1}(x_k, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, f)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)} \quad (3)$$

$$A = \frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k-1}\left(\frac{x_k - x_j}{x_i - x_j}\right)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)} =$$

$$= \frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y_i}{(x_k - x_i)\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k-1}(x_i - x_j)}$$

$$A = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)} \tag{4}$$

Considerăm următoarele problemele de interpolare pentru f:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)\} \rightarrow l_{k-1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_k, f)$$

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)\} \rightarrow l_k(x, x_0, x_1, \ldots, x_k, f)$$

vom avea, analog ca mai sus

$$l_k(x, x_0, x_1, \ldots, x_k, f) = l_{k-1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_k, f) + B \prod_{j=1}^{k} (x - x_j) \tag{5}$$

Dacă înmulţim relaţia (2) cu ***(x-x$_k$)*** iar relaţia (5) cu ***(x-x$_0$)*** şi scădem aceste relaţii obţinem:

$$(x_0 - x_k)l_k(x, x_0, x_1, \ldots, x_k, f) = (x - x_k)l_{k-1}(x, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, f) -$$

$$-(x - x_0)l_{k-1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_k, f) + (A - B)\prod_{j=0}^{k}(x - x_j)$$

Ţinând seama de relaţia (1) rezultă că:

$$(A - B)\prod_{j=0}^{k}(x - x_j) = 0 \text{ adică } A = B$$

Vom nota în cele ce urmează:

$$A = \left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]_f$$

numită ***diferenţă divizată de ordin k a funcţiei f pe nodurile*** $\left\{x_0, x_1, \ldots, x_k\right\}$.

Vom înlocui în formula (2) ***l_{k-1}(x, x$_0$,…, x$_{k-1}$, f)*** cu:

$$l_{k-1}(x, x_0,\ldots,x_{k-1}, f) = l_{k-2}(x, x_1,\ldots,x_{k-1}, f) +$$

$$+\left[x_0, x_1,\ldots,x_{k-1}\right]_f \prod_{j=1}^{k-1}(x-x_j)$$

iar în formula (5) $l_{k-1}(x, x_1,\ldots, x_k, f)$ cu:

$$l_{k-1}(x, x_1,\ldots,x_k, f) = l_{k-2}(x, x_1,\ldots,x_{k-1}, f) + \left[x_1, x_2,\ldots,x_k\right]_f \prod_{l=1}^{k-1}(x-x_l)$$

şi apoi scădem membru cu memebru cele două relaţii. Obţinem:

$$\left[x_0,\ldots,x_{k-1}\right]_f \prod_{j=1}^{k-1}(x-x_j) + \left[x_0,\ldots,x_k\right]_f \prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j) -$$

$$-\left[x_1,\ldots,x_k\right]_f \prod_{l=1}^{k-1}(x-x_l) - \left[x_0,\ldots,x_k\right]_f \prod_{l=1}^{k}(x-x_l) = 0$$

Putem scrie:

$$\prod_{j=1}^{k-1}(x-x_j)\ \left\{\left[x_0,\ldots,x_{k-1}\right]_f-\left[x_1,\ldots,x_k\right]_f\right\}+$$

$$+\left[x_0,\ldots,x_k\right]_f\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)\left[x-x_0-x+x_n\right]=0$$

relaţie din care obţinem:

$$\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]_f=\frac{\left[x_1,x_2,\ldots,x_k\right]_f-\left[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}\right]_f}{x_k-x_0} \qquad (6)$$

Relaţia (6) justifică denumirea de diferenţă divizată.

Se introduce şi noţiunea de diferenţă divizată de ordinul 0:

$$\left[x_k\right]_f=y_k=f(x_k)\ , \qquad (7)$$

Diferenţele divizate se pot obţine folosind definiţia directă (4) sau folosind definiţia recursivă (7), (6). Cele 2 definiţii sunt echivalente:

Propoziţie

$$\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]_f = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\left(w_{n+1}(x_k)\right)'} \qquad (8)$$

pentru orice sistem de noduri $\left\{x_0, x_1, \ldots, x_k\right\}$ şi orice $\boldsymbol{k}$.

Demonstraţie: Se face prin inducţie. Pentru $\boldsymbol{k=1}$ avem:

$$\left[x_0, x_1\right]_f = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} = \frac{\left[x_1\right]_f - \left[x_0\right]_f}{x_1 - x_0}$$

Presupunem că relaţia (8) este valabilă pentru orice $\boldsymbol{k}$ şi pentru orice sistem de noduri $\left\{x_0, x_1, \ldots, x_k\right\}$. Pentru $\boldsymbol{k+1}$ folosim relaţia de recurenţă şi apoi aplicăm ipoteza inductivă:

$$\left[x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}\right]_f = \frac{\left[x_1, x_1, \ldots, x_{k+1}\right]_f - \left[x_0, x_2, \ldots, x_k\right]_f}{x_{k+1} - x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_{k+1} - x_0}\left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} - \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_{k+1} - x_0}\left\{ -\frac{y_0}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{k} (x_0 - x_j)} + \frac{y_{k+1}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k+1}}^{k+1} (x_{k+1} - x_j)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)} \left(\frac{1}{x_i - x_{k+1}} - \frac{1}{x_i - x_0} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{y_0}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{k+1}(x_0 - x_j)} + \frac{y_{k+1}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k+1}}^{k+1}(x_{k+1} - x_j)} + \sum_{i=1}^{k}\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k+1}(x_i - x_j)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1}\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k+1}(x_i - x_j)}$$

Inducţia este completă.

Din definiţie se observă că diferenţa divizată $\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]_f$ nu depinde de ordinea nodurilor $\left\{x_0, x_1, \ldots, x_k\right\}$.

Vom nota în continuare cu ***$l_k(x)$*** polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile $\left\{x_0, x_1, \ldots, x_k\right\}$ pentru funcţia f. Avem:

$$
\begin{aligned}
l_n(x) &= l_0(x) + [l_1(x) - l_0(x)] + \cdots + [l_k(x) - l_{k-1}(x)] + \cdots + [l_n(x) - l_{n-1}(x)] = \\
&= y_0 + \left[x_0, x_1\right]_f (x - x_0) + \cdots + \left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]_f (x - x_0)\cdots(x - x_{k-1}) + \cdots \\
&\quad + \left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right]_f (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Am obţinut ***forma Newton*** a polinomului de interpolare Lagrange:

$$
\begin{aligned}
l_n(x) = y_0 &+ \left[x_0, x_1\right]_f (x - x_0) + \left[x_0, x_1, x_2\right]_f (x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\
&+ \left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right]_f (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Schema lui Aitken de calcul a diferențelor divizate

Ne propunem să calculăm diferenţele divizate

$$\left[x_0,x_1\right]_f,\left[x_0,x_1,x_2\right]_f,\ldots,\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]_f$$

necesare construirii polinomului de interpolare Lagrange în forma Newton. Procedeul folosește definiţia recursivă a diferențelor divizate şi se desfășoară în ***n*** paşi. La pasul ***1*** se calculează numai diferenţe divizate de ordinul ***1***:

$$\left[x_0,x_1\right]_f,\left[x_1,x_2\right]_f,\ldots,\left[x_{n-1},x_n\right]_f.$$

În general, la pasul ***k*** se calc. diferenţe divizate de ordin ***k***:

$$\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]_f,\left[x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}\right]_f,\ldots,\left[x_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_n\right]_f.$$

La pasul ***n*** se calculează o singură diferenţă divizată de ordin ***n*** şi anume $\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]_f$.

$$
\begin{array}{llllll}
 & & \textbf{Pas 1} & \cdots\ \ \textbf{Pas } \boldsymbol{k} & & \cdots\ \ \textbf{Pas } \boldsymbol{n} \\
x_0 & y_0 & & & & \\
x_1 & y_1 & [x_0, x_1]_f & & & \\
x_2 & y_2 & [x_1, x_2]_f & & & \\
\vdots & & & & & \\
x_k & y_k & [x_{k-1}, x_k]_f & [x_0, x_1, \ldots, x_k]_f & & \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \\
x_{n-1} & y_{n-1} & [x_{n-2}, x_{n-1}]_f & [x_{n-k-1}, \ldots, x_{n-1}]_f & & \\
x_n & y_n & [x_{n-1}, x_n]_f & [x_{n-k}, \ldots, x_{n-1}]_f & \cdots & [x_0, x_1 \ldots, x_n]_f
\end{array}
$$

Notăm **dd[i,k]=**$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]_f$ diferenţa divizată de ordin $\boldsymbol{k}$, pe nodurile consecutive $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\}$ $\boldsymbol{i=0,\ldots,n-k}$, $\boldsymbol{k=1,\ldots,n}$, cu $\boldsymbol{dd[i,0]=y_i}$, $\boldsymbol{i=0,\ldots,n}$. Schema lui Aitken se implementează astfel:

$$
\begin{aligned}
&dd[i,0] = y_i,\ i = 0,\dots,n;\\
&\textbf{for } k = 1,\dots,n\\
&\qquad \textbf{for } i = 0,\dots,n-k\\
&\qquad\qquad dd[i,k] = \frac{dd[i+1,k-1] - dd[i,k-1]}{x_{i+k} - x_i}
\end{aligned}
$$

Putem face aceleași calcule folosind un singur vector, de exemplu rescriind vectorul y astfel:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{for } k = 1,\dots,n\\
&\qquad \textbf{for } i = n,\dots,k\\
&\qquad\qquad y_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-k}}
\end{aligned}
$$

La finalul acestei secvenţe de program, vectorul ***y*** va conţine elementele:

$$y_0,\ \left[x_0,x_1\right]_f,\ \left[x_0,x_1,x_2\right]_f,\ldots,\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]_f$$

$$(y_k=\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]_f,\ k=0,\ldots,n).$$

Interpolare Newton pe noduri echidistante

Pp. că nodurile de interpolare sunt echidistante:

$$x_i = x_0 + i\,h \quad , \quad i = 0,1,\ldots,n$$

În relaţia de mai sus fie se dă h distanţa între 2 noduri succesive, fie se precizează primul şi ultimul nod, x_0 şi x_n şi h se calculează:

$$h=\frac{(x_n-x_0)}{n}.$$

$$\left[x_i, x_{i+1}\right]_f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Se introduce noţiunea de **diferenţă finită de ordinul 1:**

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Pornind de la această definiţie se pot introduce şi diferenţe finite de ordin superior:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) =$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

şi în general se pot introduce recursiv **diferenţele finite de ordin** k:

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x).$$

Prin inducţie după k**,** se poate deduce formula de calcul a diferenţelor finite de ordin k folosind doar valorile funcţiei f:

$$\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x + i h).$$

Observaţie: Dacă funcţia f este polinom de grad m atunci $\Delta f(x)$ este polinom de grad ***m-1***, $\Delta^2 f(x)$ este polinom de grad ***m-2***, ş.a.m.d. Prin urmare:

$$\Delta^k f(x) \equiv 0 \text{ , pentru } k \geq m \text{ , } f - \text{polinom de grad } m \text{ .}$$

Legătura între diferenţele divizate şi cele finite:

$$[x_i, x_{i+1}]_f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]_f = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]_f - [x_i, x_{i+1}]_f}{(x_{i+2} - x_i)} = \frac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2}$$

Prin inducţie se poate arăta următoarea legătură între diferenţele divizate de ordin k şi cele finite:

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]_f = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!h^k}.$$

Polinoame de interpolare pe noduri echidistante

$$\begin{aligned} l_n(x) = {} & y_0 + \left[x_0, x_1\right]_f (x - x_0) + \left[x_0, x_1, x_2\right]_f (x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ & + \left[x_0, x_1, ..., x_k\right]_f (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) + \cdots + \\ & + \left[x_0, x_1, ..., x_n\right]_f (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Consideră că punctul de interpolare este de forma:

$$\bar{x} = x_0 + t\,h$$

şi înlocuim diferenţele divizate cu diferenţe finite în forma Newton a polinomului de interpolare:

$$(\overline{x}-x_0)\cdots(\overline{x}-x_{k-1})=(x_0+t\,h-x_0)\cdots(x_0+t\,h-x_0-(k-1)h)=$$
$$=h^k t(t-1)\cdots(t-k+1)$$
$$l_n(\overline{x})=l_n(x_0+th)=y_0+\Delta f(x_0)t+\Delta^2 f(x_0)\frac{t(t-1)}{2}+\cdots+$$
$$+\Delta^k f(x_0)\frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}+\cdots+$$
$$+\Delta^n f(x_0)\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}$$

Această relaţie poartă numele de **formula lui Newton progresivă pe noduri echidistante.**

Considerăm polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile în ordine inversă $\{x_n, x_{n-1}, ..., x_0\}$:

$$l_n(x)= y_n +\left[x_n,x_{n-1}\right]_f (x-x_n)+\left[x_n,x_{n-1},x_{n-2}\right]_f (x-x_n)(x-x_{n-1})+$$
$$+\cdots+\left[x_n,x_{n-1},...,x_0\right]_f (x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_0)$$

Dacă punctul de interpolare este de forma:

$$\overline{x} = x_n + th$$

analog ca mai sus obţine **formula lui Newton regresivă pe noduri echidistante:**

$$l_n(\overline{x}) = l_n(x_n + th) = y_n + \Delta f(x_{n-1})t + \Delta^2 f(x_{n-2})\frac{t(t+1)}{2} + \cdots +$$
$$+ \Delta^k f(x_{n-k})\frac{t(t+1)\cdots(t+k-1)}{k!} + \cdots +$$
$$+ \Delta^n f(x_0)\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}$$

Funcţii spline

Fie nodurile:

$$x_i \in [a,b],\ i = 0,1,\ldots,n,$$

cu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se consideră funcţia continuă polinomială pe porţiuni:

$$S(x) = P_i(x) \ \ \textbf{pentru} \ \ x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \forall\, i = 0,\ldots,n-1$$

$$S(x) = \begin{cases} P_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ P_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ P_2(x), & x \in [x_2, x_3], \\ \quad \vdots & \\ P_{n-2}(x), & x \in [x_{n-2}, x_{n-1}], \\ P_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

$P_i(x)$, $i=0,\ldots,n$ sunt polinoame. O asemenea funcţie poartă numele de ***funcţie spline***.

Funcţii spline liniare continue

Definiţie

Funcţia ***S(x)*** definită mai sus se numeşte ***funcţie spline liniară continuă*** dacă polinoamele $\boldsymbol{P_i(x), i=0,\ldots,n-1}$ sunt polinoame de gradul ***1*** şi ***$S(x)\in C[a,b]$***, adică:

$$\lim_{\substack{x\to x_i\\ x<x_i}} S(x) = \lim_{\substack{x\to x_i\\ x>x_i}} S(x),\ i=1,\ldots,n-1.$$

Fie funcţia $\boldsymbol{f:[a,b]\to\mathbb{R}}$ pentru care se cunosc valorile**:**

$$y_i = f(x_i),\ i=0,\ldots,n.$$

Funcţia spline liniară de interpolare S pentru funcţia f îndeplineşte condiţiile de interpolare:

$$S(x_i) = y_i \text{ , } i = 0, \ldots, n.$$

Ţinând seamă că polinoamele $P_i(x)$ sunt polinoame de gradul 1 şi $S(x)$ este continuă vom avea condiţiile:

$$\begin{cases} P_i(x_i) = y_i \text{ ,} \\ P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, n-1, \\ P_i(x) - \text{polinom de gradul } 1. \end{cases}$$

Din aceste condiţii rezultă:

$$P_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i \text{ , } i = 0, \ldots, n-1$$

$$S(x_k) = P_{k-1}\left(x_k\right) = P_k\left(x_k\right) = y_k \text{ , } k = 1, \ldots, n-1,$$

$$S\left(x_0\right) = P_0(x_0) = y_0 \text{ , } S\left(x_n\right) = P_{n-1}\left(x_n\right) = y_n \text{ .}$$

Funcţii spline cubice de clasă C^2

Se consideră sistemul de noduri distincte din intervalul ***[a,b]***:

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

Funcţia ***S(x)*** asociată divizării ***Δ*** care îndeplineşte condiţiile :

$$S(x) \in C^2[a,b],$$

$$\textbf{polinoamele } P_i(x) \textbf{ au gradul } 3,\ i = 0,\ldots,n-1,$$

se numeşte ***funcţie spline cubică***.

Dată fiind o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu valorile:

$$y_i = f\left(x_i\right),\ i = 0,\ldots,n,$$

se consideră funcţia spline cubică ***S(x)*** de interpolare ce satisface

$$S(x_i) = y_i\ ,\ i = 0,\ldots,n.$$

Pentru determinarea funcţiei spline cubice de interpolare observăm că polinoamele:

$$P_i(x)=\alpha_i x^3+\beta_i x^2+\gamma_i x+\delta_i \ , x\in[x_i,x_{i+1}], i=0,\ldots,n-1,$$

implică determinarea a ***4n*** necunoscute $\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i\ ; i=0,\ldots,n-1\}$ pentru care se impun:

$$\begin{cases} n+1 \textbf{ condiţii din relaţiile de interpolare } S(x_i)=y_i\ , i=0,\ldots,n, \\ 3(n-1) \textbf{ condiţii de continuitate pentru } S(x), S'(x) \textbf{ şi } S''(x) \\ \qquad\qquad \textbf{în nodurile } x_i\ , i=1,\ldots,n-1\,, \end{cases}$$

în total ***4n-2*** condiţii.

Se pot avea în vedere pentru adăugarea a două condiţii suplimentarea următoarele abordări :

- fixarea pantelor în extremităţile intervalului ***[a,b].*** Se presupune că funcţia ***f*** este derivabilă şi se cunosc valorile ***f′(a), f′(b)***. Se impun condiţiile:

$$S'(x_0)=P_0'(x_0)=f'(a)\,, S'(x_n)=P_{n-1}'(x_n)=f'(b);$$

- periodicitatea primelor două derivate:

$$f'(a) = f'(b) \quad (S'(x_0) = P_0'(x_0) = P_{n-1}'(x_n) = S'(x_n)),$$

$$f''(a) = f''(b) \quad (S''(x_0) = P_0''(x_0) = P_{n-1}''(x_n) = S''(x_n));$$

- anularea derivatei secunde în capetele intervalului:

$$f''(a) = f''(b) = 0$$

$$(S''\left(x_0\right) = P_0''\left(x_0\right) = 0,\ S''\left(x_n\right) = P_{n-1}''\left(x_n\right) = 0).$$

Funcţiile spline care îndeplinesc aceste condiţii se numesc ***funcţii spline cubice normale***.

- derivata de ordinul al treilea a funcţiei S este continuă în punctele x_1 şi x_{n-1} . Aceasta înseamnă că polinoamele P_0, P_1 respectiv P_{n-2}, P_{n-1} coincid. Acest tip de funcţie spline se numeşte „*not – a – knot*” şi este utilizat în MATLAB.

Vom calcula în cele ce urmează funcţia spline cubică în cazul în care cunoaştem suplimentar valorile celei de-a doua derivate a funcţiei f în capetele intervalului de interpolare:

$$a_0 = f''(a),\ a_n = f''(b).$$

Recapitulând, vom avea următoarele condiţii:

$$\begin{cases} P_i(x_i) = y_i,\ i = 0,\dots,n-1,\ P_{n-1}(x_n) = y_n \ \text{– interpolare}, \\ P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i),\ i = 1,\dots,n-1, \text{– continuitatea funcţiei } S, \\ P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i),\ i = 1,\dots,n-1, \text{– continuitatea primei derivatei,} \\ P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i),\ i = 1,\dots,n-1, \text{– continuitatea derivatei secunde,} \\ P''_0(x_0) = a_0 = f''(a),\ P''_{n-1}(x_n) = a_n = f''(b). \end{cases}$$

Vom nota:

$$S''(x_i) = a_i,\ i = 0,\dots n.$$

Ţinând seama de faptul că funcţia ***$S''\in C[a,b]$*** este o funcţie liniară pe fiecare din intervalele ***$[x_i, x_{i+1}]$*** rezultă că:

$$S''(x) = \frac{x - x_i}{h_i} a_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x}{h_i} a_i \,,\, x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \forall i = 0, \ldots, n-1$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad , \; i = 0, \ldots, n-1$$

iar din

$$S'(x) = \int S''(x)dx \,, \qquad S(x) = \int S'(x)dx$$

rezultă:

$$S(x) = \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} a_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} a_i + b_i x + c_i \,,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots n-1,$$

$$P_i(x) = \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} a_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} a_i + b_i x + c_i \,,$$

$$b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots n-1,$$

Vom calcula funcţia spline pentru cazul:

$$S''(a) = a_0 = P_0''(x_0),$$
$$S''(b) = a_n = P_{n-1}''(x_n).$$

(***a₀*** şi ***aₙ*** sunt două constante cunoscute)

Impunând condiţiile de interpolare şi de continuitate vom obţine:

$$P_i(x_i) = \frac{h_i^2}{6} a_i + b_i x_i + c_i = y_i \ ,$$

$$P_i(x_{i+1}) = \frac{h_i^2}{6} a_{i+1} + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1} \ , \ i = 0, \ldots n-1.$$

Din aceste relaţii calculăm b_i şi c_i în funcţie de a_i , a_{i+1}, y_i , y_{i+1}:

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(a_{i+1} - a_i\right),$$

$$i = 0, \ldots n-1$$

$$c_i = \frac{x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(x_{i+1} a_i - x_i a_{i+1}\right).$$

Din condiţia de continuitate a primei derivate a funcţiei spline cubice $P'_{i-1}(x_i) = P'_i\left(x_i\right)$, $i = 1, \ldots, n-1$, ţinând seama de:

$$P'_{i-1}(x) = \frac{\left(x - x_{i-1}\right)^2}{2h_{i-1}} a_i - \frac{\left(x_i - x\right)^2}{2h_{i-1}} a_{i-1} + b_{i-1},$$

$$P'_i(x) = \frac{\left(x - x_i\right)^2}{2h_i} a_{i+1} - \frac{\left(x_{i+1} - x\right)^2}{2h_i} a_i + b_i,$$

rezultă, utilizând formulele pentru b_{i-1} şi b_i deduse mai sus:

$$P'_{i-1}(x_i) = \frac{h_{i-1}}{2} a_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}\left(a_i - a_{i-1}\right) =$$

$$P'_i(x_i) = -\frac{h_i}{2} a_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(a_{i+1} - a_i\right)$$

sau

$$(h_{i-1} + h_i)\, a_i + h_i\, a_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right),\; i = 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Pentru ***i=1*** şi ***i=n*** din (1) avem:

$$2(h_0 + h_1)a_1 + h_1 a_2 = 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right) - h_0 a_0$$

$$h_{n-2} a_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-11})a_{n-1} = 6\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right) - h_{n-1} a_n$$

Sistemul liniar format din ecuaţiile (1) cu necunoscutele $\{a_1\ , a_2 , \cdots , a_{n-1}\}$ are forma:

$$Ha = f \text{ , cu } H \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \text{ , } f \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$2(h_0 + h_1)a_1 + h_1 a_2 = 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right) - h_0 f''(a)$$

$$(h_{i-1} + h_i)a_i + h_i a_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \qquad , \ i = 1,\ldots,n-1$$

$$h_{n-2}a_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-11})a_{n-1} = 6\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right) - h_{n-1} f''(b)$$

$$
\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}
2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1})
\end{bmatrix}
$$

$$
f = \begin{bmatrix} 6\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_0}\right) - h_0 f''(a) \\ 6\left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \; i = 1,\ldots,n-1 \\ 6\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right) - h_{n-1} f''(b) \end{bmatrix}
$$

Matricea ***H*** are diagonala dominantă atât pe linii cât şi pe coloane, este simetrică şi pozitiv definită prin urmare putem utiliza metoda Gauss-Seidel sau o metodă de relaxare pentru rezolvarea sistemului ***Ha=f***.

Interpolare în sensul celor mai mici pătrate

x	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
f	y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

$$f(x_i) = y_i \ \ , i=0,...,n$$

$$f(x) \ \approx S_f(x; a_0, a_1, ..., a_m)$$

$$S_f(x; a_0, a_1, ..., a_m) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \propto + a_1 x + a_0$$

Coeficienţii $a_0, a_1, ..., a_m$ se găsesc rezolvând problema de minimizare în sensul celor mai mici pătrate:

$$\min\{ \sum_{r=0}^{n} \left(S_f(x_r; a_0, a_1, ..., a_m) - y_r \right)^2 ; a_0, a_1, ..., a_m \in \mathbb{R} \} \quad \textbf{(LSP)}$$

$$g:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}_+ \ ,$$

$$g(a_0,a_1,...,a_m)=\sum_{r=0}^{n}\Big(S_f(x_r;a_0,a_1,...,a_m)-y_r\Big)^2$$

$$g(a_0,a_1,...,a_m)=\sum_{r=0}^{n}\Big(a_m x_r^m+\cdots+a_k x_r^k+\cdots+a_1 x_r+a_0-y_r\Big)^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial a_k}(a_0,a_1,...,a_m)=2\sum_{r=0}^{n}\Big(a_m x_r^m+\cdots+a_k x_r^k+\cdots+a_1 x_r+a_0-y_r\Big)x_r^k$$

Soluţia problemei de minimizare a problemei **(LSP)** este obţinută rezolvând sistemul de ecuaţii liniare, de dimensiune ***(m+1)***:

$$\frac{\partial g}{\partial a_k}(a_0,a_1,...,a_m)=0 \ , \quad k=0,1,...,m$$

$$\sum_{r=0}^{n}\Big(a_m x_r^m+\cdots+a_k x_r^k+\cdots+a_1 x_r+a_0\Big)x_r^k=\sum_{r=0}^{n}y_r x_r^k \ , k=0,...,m$$

$$a_0 \sum_{r=0}^{n} x_r^k + a_1 \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+1} + \cdots + a_{m-1} \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+m-1} + a_m \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+m} = \sum_{r=0}^{n} y_r x_r^k \ ,$$

$$k = 0, \dots, m$$

Constantele ***{ a₀, a₁, ..., aₘ }*** sunt soluţia sistemului liniar:

$$Ba = z \ ,$$

$$B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \ , \ B = (b_{kj})_{k,j=0}^{m} \ , \ z \in \mathbb{R}^{(m+1)} \ \ z = (z_k)_{k=0}^{m}$$

$$b_{kj} = \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+j} \quad , \quad z_k = \sum_{r=0}^{n} y_r x_r^k \ , \qquad k, j = 0, \dots, m$$

Interpolare trigonometrică (serii Fourier finite)

Fie ***f*** o funcţie periodică de perioadă ***2π***:

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Putem scrie funcţia ***f*** folosind seria Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

Pentru a obţine această serie pentru f, s-a folosit ortogonalitatea sistemului de funcţii $\{1, \cos kx, \sin kx, k = 1, 2, ...\}$ în raport cu integrarea pe intervalul ***[0, 2π]***:

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \pi & k = m \neq 0 \\ 2\pi & k = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \pi & k = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos mx \, dx = 0$$

Ortogonalitate pe o mulţime discretă de puncte

Mulţimea de funcţii:

$$1 \ , \ \cos x \ , \ \cos 2x \ , \ \ldots , \cos (n-1)x \ , \cos nx$$

$$\sin x \ , \ \sin 2x \ , \ \ldots , \sin (n-1)x$$

sunt ortogonale în raport cu mulţimea discretă de puncte:

$$0\,,\ \frac{\pi}{n}\,,\ \frac{2\pi}{n}\,,\ldots,\ \frac{(2n-1)\pi}{n}.$$

Dacă se face schimbarea de variabilă $x \to \frac{\pi}{n}x$ şi obţinem:

$$1\ ,\ \cos\frac{\pi}{n}x\ ,\ \cos\frac{2\pi}{n}x\ ,\ \ldots,\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n}x\ ,\ \cos\frac{\pi}{n}nx$$

$$\sin\frac{\pi}{n}x\ ,\ \sin\frac{2\pi}{n}x\ ,\ \ldots,\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n}x$$

Relaţiile de ortogonalitate sunt următoarele:

$$\sum_{i=0}^{2n-1}\sin\frac{\pi}{n}kx\sin\frac{\pi}{n}mx=\begin{cases}0 & k\neq m\\ n & k=m\neq 0\end{cases} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \sin\frac{\pi}{n}kx\cos\frac{\pi}{n}mx = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \cos\frac{\pi}{n}kx\cos\frac{\pi}{n}mx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ n & k = m \neq 0, n, \ldots \\ 2n & k = m = 0, n, \ldots \end{cases} \qquad (3)$$

Considerăm o funcţie de forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos\frac{\pi}{n}kx + b_k \sin\frac{\pi}{n}kx) + \frac{a_n}{2}\cos\pi x \quad (4)$$

Folosim relaţiile de ortogonalitate (1), (2) şi (3) pentru a afla valoarea coeficienţilor a_k şi b_k. Înmulţim relaţia (4) considerată în $x = i$ pe rând cu **cos*(π/n)i***, cu **sin*(π/n)i*** şi sumăm după ***i***:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\cos\frac{\pi}{n}mi = n\,a_m \quad 1 \le m \le n-1$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\sin\frac{\pi}{n}mi = n\,b_m \quad 1 \le m \le n-1$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(i) = 2n\left(\frac{a_0}{2}\right) = n\;a_0$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\cos\pi i = 2n\left(\frac{a_n}{2}\right) = na_n$$

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\cos\frac{\pi}{n}mi \quad , \quad 1 \le m \le n-1$$

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(i) \qquad , \qquad a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\cos\pi i$$

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\sin\frac{\pi}{n}mi \qquad , \quad 1 \le m \le n-1$$

Evaluarea erorii

$$f(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{n}k\,i\cos\frac{\pi}{n}k\,j + \sin\frac{\pi}{n}k\,i\sin\frac{\pi}{n}k\,j\right) + \frac{1}{2}\cos\pi\,i\cos\pi\,j\right]$$

$$f(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1}f(i)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}k(i-j)+\frac{1}{2}\cos\pi i\cos\pi j\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}k(i-j)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}k(i-j)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}k(i-j)$$

$$\cos\frac{\pi}{n}k(i-j)=\cos\frac{\pi}{n}(2n-k)(i-j)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}k(i-j)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}(2n-k)(i-j)=\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{2n-1}\cos\frac{\pi}{n}k(i-j)$$

$$f(j)=\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{2n-1}f(i)\sum_{k=0}^{2n-1}\cos\frac{\pi}{n}k(i-j)$$

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \cos\frac{\pi}{n}k(i-j) = \begin{cases} 2n & \text{pentru } i = j \\ 0 & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$$

$$f(j) = \frac{1}{2n} f(j)(2n) = f(j)$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x)^2 = \sum_{i=0}^{2n-1}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos\frac{\pi}{n}kx + b_k \sin\frac{\pi}{n}kx) + \frac{a_n}{2}\cos\pi x\right)^2$$

Folosind relaţiile de orotogonalitate şi definiţia coeficienţilor obţinem:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x)^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot 2n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k^2 \cdot n + b_k^2 \cdot n) + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 \cdot 2n$$

$$= n\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k^2 + b_k^2) + \frac{a_n^2}{2}\right]$$

Presupunem că nu facem suma până la ***(n-1)*** în ***f(x)*** ci doar până la ***m*** pentru un ***m<n-1***:

$$f_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \left(a_k \cos\frac{\pi}{n}kx + b_k \sin\frac{\pi}{n}kx\right)$$

Eroarea care se face cu o astfel de aproximare este:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \left(f(i) - f_m(i)\right)^2 = \sum_{i=0}^{2n-1} \left[\sum_{k=m+1}^{n-1} \left(a_k \cos\frac{\pi}{n}ki + b_k \sin\frac{\pi}{n}ki \right) + \frac{a_n}{2}\cos\pi i \right]^2$$

$$= n\left[\sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{a_n^2}{2} \right]$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \left(f(i) - f_m(i)\right)^2 = \sum_{i=0}^{2n-1} f(i)^2 - n\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

Calculul coeficienţilor a_k, b_k

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\cos\frac{\pi}{n}mi \quad , \quad 0 \le m \le n$$

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\sin\frac{\pi}{n}mi \quad , \quad 1 \le m \le n-1$$

Aceşti coeficienţi pot fi calculaţi doar din $\cos\frac{\pi}{n}m$, $\sin\frac{\pi}{n}m$ astfel:

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = f(2n-1)$$

$$U_l = \left(2\cos\frac{\pi}{n}m\right)U_{l-1} - U_{l-2} + f(2n-l)\ ,\ l = 2,3,...,2n-1$$

$$na_m = \sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\cos\frac{\pi}{n}mi = \left(\cos\frac{\pi}{n}m\right)U_{2n-1} - U_{2n-2} + f(0)$$

$$nb_m = \sum_{i=0}^{2n-1} f(i)\sin\frac{\pi}{n}mi = \left(\sin\frac{\pi}{n}m\right)U_{2n-1}$$