5. **(BONUS! Variabile aleatoare: proprietăţi de bază pentru medii, varianţă, covarianţă; exemplificări ale unor astfel de proprietăţi)**

a.

Fie $X : \Omega \to R$ **o variabilă aleatoare, cu funcţia de probabilitate** P. **Dacă** X **este variabilă aleatoare discretă,** ***media*** **sa se defineşte ca fiind numărul real** $E[X] = \sum_{x_i \in Val(X)} x_i \cdot P(X = x_i)$. **Dacă** X **este variabilă aleatoare continuă, media sa este** $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(X = x)dx$.

Notăm $\bar{X} = E[X]$. ***Varianţa*** **lui** X **se defineşte ca fiind** $Var(X) = E[(X - \bar{X})^2]$. **Arătaţi că:**

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Indicaţie: **Nu este necesar să faceţi demonstraţia separat pentru cele două cazuri, discret şi respectiv continuu.**

b.

Covarianţa **a două variabile aleatoare** X **şi** Y **care au acelaşi domeniu de definiţie** (Ω) **se defineşte astfel:** $Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$, **unde** $E[X]$ **este media lui** X.

Demonstraţi egalitatea:

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y].$$

c.

Fie X **o variabilă aleatoare având media** $E[X] = 1$ **şi varianţa** $Var(X) = 1$. **Calculaţi:**

i. $E[3X]$;

ii. $Var(3X)$;

iii. $Var(X + 3)$;

a) $Var(x) = E[(x-\bar{x})^2] = E[x^2 - 2x\cdot\bar{x} + \bar{x}^2] =$

$= E[x^2] - E[2x\cdot\bar{x}] + E[\bar{x}^2] =$

$= E[x^2] - 2\bar{x}E[x] + E[E[x]^2] =$

$= E[x^2] - 2E[x]\cdot E[\cancel{x}] + E^2[x]$

$= E[x^2] - (E[x])^2$ (Adevărat)

b) $Cov(x,y) = E[(x-E[x])(y-E[y])] =$

$= E[xy - xE[y] - y\cdot E[x] + E[x]\cdot E[y]] =$

$= E[xy] - E[x\cdot E[y]] - E[y\cdot E[x]] +$

$+ E[E[x]\cdot E[y]] =$

$= E[xy] - \cancel{E[y]\cdot E[x]} - E[x]\cdot E[y] + \cancel{E[x]\cdot E[y]}$

$= \boxed{E[xy] - E[x]\cdot E[y]}$ ADEVĂRAT

c) $E[x] = 1$
$Var(x) = 1$

i) $E[3x] = 3E[x] = 3$

$Var(3x) = 3^2 Var(x) = 9$

$Var(x+3) = \cancel{E} \; E[(x+3)^2] - (E[x+3])^2 =$

$= E[x^2 + 9 + 6x] - E^2[x+3] =$

$= E[x^2] + 9 + 6E[x] - E[x+3]\cdot E[x+3] =$

$= E[x^2] + 9 + 6 - (E[x]+3)(E[x]+3) =$

$= E[x^2] + 15 - 16 = E[x^2] - 1 \Rightarrow$

$Var(x) = E[x^2] - (E[x])^2 \Rightarrow$

$E[x^2] = Var(x) + (E[x])^2$

$E[x^2] = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \boxed{Var(x+3) = 2 - 1 = 1}$