Calcul Numeric

Cursul 11

2017

Anca Ignat

Problema în sensul celor mai mici pătrate

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \;,\; b \in \mathbb{R}^m \;,\; Ax = b \;,\; x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

Sistemul are soluţii clasice dacă:

$$\textbf{rang}\ A = \textbf{rang}\ [A \mid b]$$

- $m < n$ - o infinitate de soluţii
- $m \geq n$
  - dacă **rang** A **=** **rang** $[A \mid b]$ soluţii clasice
  - dacă **rang** $A \neq$ **rang** $[A \mid b]$ soluţii în sensul celor mai mici pătrate

Vectorul reziduu:

$$r(x) = b - Ax \in \mathbb{R}^m$$

Vectorul $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte ***soluţie în sensul celor mai mici pătrate*** pentru sistemul (1) dacă este soluţia următoarei probleme de optimizare:

$$\min\{\|r(x)\|_2^2 = \|b - Ax\|_2^2 ;\ x \in \mathbb{R}^n\} \qquad \textbf{\textit{(LSP)}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ m = 3,\ n = 2$$

$$\text{rang } A = 2 \neq \text{rang } [A \mid b] = 3$$

Sistemul:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

nu are soluţie clasică (nu există x_1, x_2 care să satisfacă toate cele 3 ecuaţii simultan). Vectorul reziduu are forma:

$$r(x) = b - Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ 3 - 2x_1 - x_2 \\ 1 + x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Soluţia în sensul celor mai mici pătrate a acestui sistem este definită ca soluţia problemei de optimizare:

$$\min\{(-x_1-2x_2)^2+(3-2x_1-x_2)^2+\left(1+x_1-x_2\right)^2;\ x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$$
$$\min\{10-10x_1-8x_2+6x_1x_2+6x_1^2+6x_2^2;\ x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$$

Această problemă de minimizare are soluţia:

$$x_1=\frac{2}{3},\qquad x_2=\frac{1}{3},\qquad \|r(x)\|_2^2=\frac{16}{3}$$

şi este soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului (2).

$$\mathbf{range}\left(\mathrm{A}\right)=\{\ \mathrm{y}\in\mathbb{R}^m;\ y=a_1A^1+a_2A^2+\cdots+a_nA^n,\ a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}\}$$

$$A=\left[A^1\ A^2\ \cdots A^n\right],\ A^i\in\mathbb{R}^m$$ **sunt coloanele matricii** A

Teoremă

Fie $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $(m\geq n)$, $b\in\mathbb{R}^m$. Un vector $x\in\mathbb{R}^n$ minimizează norma euclidiană a vectorului reziduu $||\boldsymbol{r(x)}||_2=||\boldsymbol{b-Ax}||_2$, rezolvând problema ***(LSP)***, dacă şi numai dacă:

$$r(x)\perp \mathbf{range}(A) \quad \Leftrightarrow \quad A^T r(x)=0$$

sau echivalent

$$A^T Ax = A^T b \tag{3}$$

Sistemul (3) poartă numele de sistemul de ***ecuaţii normale*** şi este un sistem pătratic de dimensiune $\boldsymbol{n}$, matricea sistemului $\boldsymbol{A^T A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este simetrică. Sistemul de ecuaţii normale (3) este nesingular dacă şi numai dacă $\mathbf{rang}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}$, în acest caz soluţia $\boldsymbol{x}$ a sistemului (3) este unică.

$$\mathbf{det}\ \boldsymbol{A^T A} \neq \mathbf{0} \iff \mathbf{rang}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A^T A} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{A^T b} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \; x_1 = \frac{2}{3}, \; x_2 = \frac{1}{3}$$

Pseudo-inversa matricii *A*

Presupunem că A are **rang** $\boldsymbol{A = n}$. Atunci pseudo-inversa poate fi definită ca:

$$A^+ = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \in \mathbb{R}^{n\times m} \qquad (A^+ = A^I \quad ?)$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii normale

1) Folosind factorizarea Cholesky (descompunere $\boldsymbol{LU}$) pentru matrici simetrice:

$$A^T A = LL^T, \quad L \in \mathbb{R}^{n\times n}$$ **matrice inferior triunghiulară**

- Se calculează matricea $\boldsymbol{A^T A}$ şi vectorul $\boldsymbol{A^T b}$;
- Se calculează factorizarea Cholesky a matricii $\boldsymbol{A^T A = LL^T}$;
- Se rezolvă sistemul inferior triunghiular $\boldsymbol{Ly = A^T b}$ pentru $\boldsymbol{y}$;
- Se rezolvă sistemul superior triunghiular $\boldsymbol{L^T x = y}$ pentru $\boldsymbol{x}$;

2) Se calculează descompunerea $\boldsymbol{QR}$ (cu algoritmul lui Householder adaptat) pentru matricea $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A = QR} \;,\; \boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m\times m}} \textbf{ matrice ortogonală} \;,\; \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m\times n}},$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{R}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times n}} \\ \mathbf{0}_{\boldsymbol{(m-n)\times n}} \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{\boldsymbol{R}} - \textbf{matrice superior triunghiulară}$$

- Se calculează factorizarea $\boldsymbol{QR}$ modificată a matricii $\boldsymbol{A}$;
- Se calculează vectorul $\boldsymbol{Q^T b}$ **;**
- Se rezolvă sistemul sup. triunghiular $\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{b}\right)_{\boldsymbol{i=1,n}}$;

3) Se foloseşte desc. după valori singulare a matricii $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{T}}, \quad \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}} \ , \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}} \ , \ \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$$

- Se calculează SVD pentru matricea $\boldsymbol{A=U\Sigma V^T}$;
- Se calculează vectorul $\boldsymbol{U^T b}$;
- Se rezolvă sistemul diagonal $\boldsymbol{\Sigma w = U^T b}$ pentru $\boldsymbol{w}$;
- Soluţia este $\boldsymbol{x=Vw}$;

1), 2) sau 3) ? → se recomandă **2)**

Rezolvarea ecuaţiilor neliniare

Fie $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ o **funcţie continuă** pe intervalul $[a,b]$ astfel ca $f(a)f(b) < 0$. În aceste condiţii, există $x^* \in (a,b)$ astfel ca $f(x^*)=0$. În cele ce urmează ne propunem să aproximăm soluţia x^* a ecuaţiei neliniare $f(x)=0$.

Metoda bisecţiei (a înjumătăţirii intervalului)

Pp. $f(a)f(b) < 0$!!! Pentru a aproxima soluţia x^* căutată, vom construi un şir de intervale $\{[a_k, b_k]; k \geq 0\}$ ce satsifac:

$$x^{*} \in [a_k, b_k]$$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$$

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}$$

Pentru primul interval vom considera: $a_0 = a$, $b_0 = b$, $k = 0$.

Considerăm punctul c de mijloc al intervalului $[a_k, b_k]$:

$$c = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Avem următoarele 3 variante:

1. $f(c)=0$ - soluţia căutată este $x^*=c$, algoritmul se opreşte;

2. $f(a_k)f(c) < 0 \rightarrow$ soluţia se găseşte în intervalul (a_k,c), continuăm procedeul cu intervalul $[a_{k+1} = a_k \;,\; b_{k+1} = c]$;

3. $f(b_k)f(c) < 0 \rightarrow$ soluţia se găseşte în intervalul $x^* \in (c,b_k)$ procedeul continuă cu intervalul $[a_{k+1} = c \;,\; b_{k+1} = b_k]$.

Dat $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ există un interval $\left[\boldsymbol{a_{\bar{k}}}, \boldsymbol{b_{\bar{k}}}\right]$ astfel ca $\boldsymbol{x^*} \in \left(\boldsymbol{a_{\bar{k}}}, \boldsymbol{b_{\bar{k}}}\right)$ şi $\boldsymbol{b_{\bar{k}} - a_{\bar{k}} < \varepsilon}$ $\left(\bar{k} > \log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)$. Pentru $\boldsymbol{\varepsilon}$ suficient de mic atât $\boldsymbol{a_{\bar{k}}}$ cât şi $\boldsymbol{b_{\bar{k}}}$ pot fi considerate aproximări ale soluţiei $\boldsymbol{x^*}$ ($\boldsymbol{a_{\bar{k}} \approx x^*}$ prin lipsă iar $\boldsymbol{b_{\bar{k}} \approx x^*}$prin adaos).

Metoda tangentei (Newton-Raphson)

Vom presupune că funcţia $f \in C^1[a,b]$ este derivabilă pe **[*a,b*]** cu derivata continuă în acest interval şi satisface relaţia $f(a)f(b) < 0$. Pentru a aproxima soluţia x^* a ecuaţiei $f(x)=0$ vom construi un şir $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ care să conveargă la x^*, $x_k \to x^*$, pentru $k \to \infty$. Primul element din şir, x_0, considerăm că este dat. Următorul element din şir se construieşte ca fiind punctul de intersecţie al tangentei la graficul funcţiei f în punctul $(x_0, f(x_0))$ cu axa absciselor. Procedeul se repetă cu x_1 pentru a-l obţine pe x_2, ş.a.m.d.

$$x_1 = \mathrm{O}x \cap \textbf{tangenta la graficul funcţiei } f \textbf{ în punctul} \left(x_0, f(x_0)\right)$$

$$x_2 = \mathrm{O}x \cap \textbf{tangenta la graficul funcţiei } f \textbf{ în punctul} \left(x_1, f(x_1)\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1} = \mathrm{O}x \cap \textbf{tangenta la graficul fcţ. } f \textbf{ în pt.} \left(x_k, f(x_k)\right), k = 0,1,2,\ldots$$

Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei ***f*** într-un punct ***(a, f(a))*** este următoarea (pentru o funcţie derivabilă):

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Pentru a calcula x_{k+1} din x_k vom considera ecuaţia tangentei:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

unde luăm $y = 0$. Avem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \;,\; k = 0,1,2,\ldots \quad , x_0 \text{ dat}$$

Formula de mai sus poate fi folosită doar dacă la fiecare pas $f'(x_k) \neq 0$. Dacă la un pas avem $f'(x_k) = 0$ putem calcula câteva iteraţii x_k $(k \geq \bar{k})$ folosind $f'(x_{\bar{k}-1})$.

Teoremă de convergenţă

Fie $f \in C^2\left[a,b\right]$, cu $f(a)f(b)<0$, $f'(x)\neq 0$ şi $f''(x)\neq 0$ $\forall x \in \left[a,b\right]$. Dacă alegem

$$x_0 = \begin{cases} a & \textbf{pentru } f(a)f''(a)>0 \\ b & \textbf{pentru } f(b)f''(b)>0 \end{cases}$$

atunci şirul $\left\{x_k;k\geq 0\right\}$ construit cu metoda tangentei este monoton, mărginit şi convergent la unica soluţie x^* a ecuaţiei ***f(x)=0***. Ordinul de convergenţă este mai mare decât ***2***.

Metoda falsei poziţii (a coardei)

Presupunem că funcţia f este continuă, $f \in C[a,b]$ şi satisface relaţia $f(a)f(b) < 0$. Vom construi un şir $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ care să converargă la soluţia căutată x^*, $x_k \to x^*$, pentru $k \to \infty$. Considerăm date primul element din şir, x_0 şi un alt punct $\tilde{x}$. Procedeul de construire a şirului este următorul:

$$x_1 = \mathrm{O}x \cap \textbf{dreapta ce uneşte punctele } \left(\tilde{x}, f(\tilde{x})\right), \left(x_0, f(x_0)\right)$$

$$x_2 = \mathrm{O}x \cap \textbf{dreapta ce uneşte punctele } \left(\tilde{x}, f(\tilde{x})\right), \left(x_1, f(x_1)\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1} = \mathrm{O}x \cap \textbf{dreapta ce uneşte pt. } \left(\tilde{x}, f(\tilde{x})\right), \left(x_k, f(x_k)\right), k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ecuaţia dreptei ce trece prin punctele ***(a, f(a))*** cu ***(b, f(b))*** este:

$$\frac{y-f(a)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-a}{a-b}.$$

Pentru a-l obţine pe x_{k+1} din x_k avem:

$$\frac{y-f(x_k)}{f(x_k)-f(\tilde{x})}=\frac{x-x_k}{x_k-\tilde{x}} \quad \text{cu} \quad y=0$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-\tilde{x})}{f(x_k)-f(\tilde{x})}=\frac{\tilde{x}f(x_k)-x_k f(\tilde{x})}{f(x_k)-f(\tilde{x})},$$

$$k=0,1,2,\ldots,\quad x_0 \text{ dat}$$

Teoremă de convergenţă

Fie $f \in C^2[a,b]$, cu $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ şi $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Dacă alegem

$$\begin{cases} \tilde{x} = a \text{ şi } x_0 = b & \text{pentru } f(a)f''(a) > 0 \\ \tilde{x} = b \text{ şi } x_0 = a & \text{pentru } f(b)f''(b) > 0 \end{cases}$$

atunci şirul $\{x_k; k \geq 0\}$ construit cu metoda falsei poziţii este monoton, mărginit deci convergent la unica soluţie x^* a ecuaţiei $f(x)=0$.

Metoda secantei

Presupunem că funcţia f este continuă, $f \in C[a,b]$ şi satisface relaţia $f(a)f(b) < 0$. Vom construi un şir $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ care să conveargă la soluţia căutată x^*, $x_k \to x^*$, pentru $k \to \infty$. Considerăm date primele două elemente din şir, x_0 şi x_1.

Procedeul de construire a şirului este următorul:

$$x_2 = \mathbf{O}x \cap \textbf{dreapta ce uneşte punctele } \left(x_0, f(x_0)\right), \left(x_1, f(x_1)\right),$$

$$x_3 = \mathbf{O}x \cap \textbf{dreapta ce uneşte punctele } \left(x_1, f(x_1)\right), \left(x_2, f(x_2)\right),$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1} = \mathbf{O}x \cap \textbf{dreapta ce uneşte pct. } \left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right), \left(x_k, f(x_k)\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Obţinem elementul x_{k+1} din x_k şi x_{k-1} astfel:

$$\frac{y - f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x - x_k}{x_k - x_{k-1}} \quad \textbf{cu} \quad y = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} =$$

$$= \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad ,$$

$$k = 1, 2, \ldots \;, x_0, x_1 \ \textbf{daţi}$$

Teoremă de convergenţă

Fie x^* o soluţie a ecuţiei $f(x)=0$. Pp. că $f \in C^2\left[x^* - r, x^* + r\right]$, $f'(x) \neq 0$ şi $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in \left[x^* - r, x^* + r\right]$. Atunci există $0 < r_0 \leq r$ pentru care, dacă $x_0, x_1 \in [x^* - r_0, x^* + r_0]$ atunci $x_k \in [x^* - r_0, x^* + r_0], \forall k \geq 2$ şi $x_k \to x^*$, pentru $k \to \infty$. Ordinul de convergenţă este $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$.

Metoda lui Laguerre

Fie polinomul:

$$\boldsymbol{p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\ ,\ a_0 \neq 0}$$

Metoda lui Laguerre propune construirea unui şir de numere care să conveargă la una din rădăcinile polinomului ***p***.
Considerăm derivata polinomului ***p***:

$$\boldsymbol{p'(x) = p(x)\left[\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}\right]}$$

Avem:

$$\ln|p(x)| = \ln|a_0| + \ln|x - x_1| + \ln|x - x_2| + \cdots + \ln|x - x_n|$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|p(x)| = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{p'(x)}{p(x)} = G(x)$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln|p(x)| = \frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(x - x_n)^2} =$$

$$= \frac{\left[p'(x)\right]^2 - p(x)p''(x)}{\left[p(x)\right]^2} = H(x)$$

Fie $\boldsymbol{x_1}$ rădăcina pe care vrem s-o aproximăm şi $\boldsymbol{y_k}$ valoarea aproximativă curentă. Notăm cu $\boldsymbol{a = y_k - x_1}$ şi facem presupunerea că $\boldsymbol{y_k}$ se află la acceeaşi distanţă de toate celelalte rădăcini, adică:

$$\boldsymbol{y_k - x_i = b \quad \forall i = 2,\ldots,n}.$$

Prin urmare avem:

$$\boldsymbol{G(y_k) = \frac{p'(y_k)}{p(y_k)} = \frac{1}{a} + \frac{n-1}{b}}$$

$$\boldsymbol{H(y_k) = \frac{\left[p'(y_k)\right]^2 - p(y_k)p''(y_k)}{\left[p(y_k)\right]^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{n-1}{b^2}}$$

Rezolvăm acest sistem în raport cu ***a*** şi obţinem:

$$a = \frac{n}{\max\left[G(y_k) \pm \sqrt{(n-1)\left(nH(y_k) - G^2(y_k)\right)}\right]}$$

Semnul la numitor este ales astfel ca expresia să aibă magnitudine maximă. Dacă ţinem cont de expresiile pentru ***G*** şi ***H*** obţinem pentru ***a*** următoarea formulă:

$$a = \frac{n\, p(y_k)}{\max\left[p'(y_k) \pm \sqrt{(n-1)^2\left[p'(y_k)\right]^2 - n(n-1)p(y_k)p''(y_k)}\right]}$$

Următorul element din şir va fi:

$$y_{k+1} = y_k - a = y_k - \frac{n}{\max\left[G(y_k) \pm \sqrt{(n-1)\left(nH(y_k) - G^2(y_k)\right)}\right]}$$

$$y_{k+1} = y_k - \frac{n\,p(y_k)}{\max\left[p'(y_k) \pm \sqrt{(n-1)^2\left[p'(y_k)\right]^2 - n(n-1)p(y_k)p''(y_k)}\right]}$$

Procedeul se opreşte când ***a*** devine suficient de mic. Metoda lui Laguerre se poate apl. şi ptr. aprox. răd. complexe şi de asemenea pentru polinoame cu coeficienţi complecşi. Pentru rădăcini simple metoda lui Laguerre are ordinul de convergenţă ***3***.

Sisteme de ecuaţii neliniare

Consideră sistemul neliniar:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad F(X) = 0, \; F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Fie matricea jacobiană asociată funcţiei F (presupunem că funcţiile f_i sunt diferenţiabile):

$$\nabla F(X)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Pentru a găsi soluţia X^* a sistemului de ecuaţii neliniare ***F(X)**= 0* se construieşte un şir de vectori $X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ astfel:

$$X^{(0)} - \text{dat}$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[\nabla F(X^{(k)})\right]^{-1} F(X^{(k)}) = X^{(k)} + \Delta^{(k)},$$

$$\Delta^{(k)} = -\left[\nabla F(X^{(k)})\right]^{-1} F(X^{(k)}) \in \mathbb{R}^n \quad , \quad k = 0,1,\ldots$$

Vectorul de corecţie $\Delta^{(k)}$ poate fi calculat şi ca soluţie a sistemului liniar:

$$\nabla F(X^{(k)})\Delta = -F(X^{(k)})$$

unde matricea sistemuui este matricea jacobiană calculată în punctul $X^{(k)}$ iar vectorul termenilor liberi este $\left(-F(X^{(k)})\right)$.

Metoda descrisă mai sus poartă numele de metoda Newton. Pentru *n=1* metoda Newton este chiar metoda tangentei descrisă anterior.