Calcul Numeric

Cursul 6

2017

Anca Ignat

Descompuneri *QR*

Definiţie

Se numeşte ***matrice ortogonală***, o matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ care satisface relaţia:

$$Q^T Q = QQ^T = I_n \quad (Q^{-1} = Q^T).$$

Matricile ortogonale au următoarele proprietăţi:

- Dacă Q este matrice ortogonală atunci şi matricea transpusă Q^T este ortogonală.

$$Q^T Q = Q^T (Q^T)^T = QQ^T = (Q^T)^T Q^T = I_n$$

- Dacă Q_1 şi Q_2 sunt matrici ortogonale atunci Q_1Q_2 este tot matrice ortogonală.

$$(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = Q_2^T I\, Q_2 = I_n$$
$$(Q_1Q_2)(Q_1Q_2)^T = Q_1Q_2Q_2^TQ_1^T = Q_1^T I\, Q_1 = I_n$$

- Dacă $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matrice ortogonală şi $x \in \mathbb{R}^n$ atunci $\| Qx \|_2 = \| x \|_2$.

$$\| Qx \|_2^2 = \left(Qx, Qx\right) = \left(x, Q^T Qx\right) = \left(x, x\right) = \| x \|_2^2, \quad \| \cdot \|_2 \ge 0 \Rightarrow$$
$$\| Qx \|_2 = \| x \|_2$$

Fie $\boldsymbol{A}$ o matrice reală pătratică de dimensiune $\boldsymbol{n}$. Pp. că avem:

$$\boldsymbol{A = QR}$$

unde $\boldsymbol{Q}$ este o matrice ortogonală iar $\boldsymbol{R}$ este o matrice superior triunghiulară.

$$\boldsymbol{Ax = b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{QRx = b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q^T QRx = Q^T b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Rx = Q^T b}$$

Algoritmul lui Householder

Matrice de reflexie - $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de forma:

$$P = I_n - 2vv^T\ , \quad v \in \mathbb{R}^n\ , \quad \| v \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} | v_j |^2} = 1$$

$$vv^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & \ldots & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & v_2^2 & \ldots & v_2 v_n \\ \vdots & & & \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \ldots & v_n^2 \end{pmatrix}.$$

Matricile de reflexie sunt :

simetrice - $\boldsymbol{P = P^T}$ şi

ortogonale - $\boldsymbol{PP^T = P^T P = P^2 = I_n}$.

$$\boldsymbol{P^T = (I_n - 2vv^T)^T = I_n - 2(vv^T)^T = I_n - 2(v^T)^T v^T = I_n - 2vv^T = P}$$

$$\boldsymbol{P^2 = (I_n - 2vv^T)(I_n - 2vv^T) = I_n - 2vv^T - 2vv^T + 4(vv^T)(vv^T) =}$$

$$\boldsymbol{= I_n - 4vv^T + 4v(v^T v)v^T = I_n - 4vv^T + 4v\|v\|_2^2 v^T =}$$

$$\boldsymbol{= I_n - 4vv^T + 4vv^T = I_n \quad (\|v\|_2 = 1)}$$

$$n = 2, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \quad 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}^2, \ y = Px$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vectorul $\boldsymbol{y=Px}$ este reflectatul vectorului $\boldsymbol{x}$ în raport cu axa $\boldsymbol{Ox_2}$. Algoritmul care foloseşte matricile de reflexie pentru a obţine o descompunere ***QR*** pentru o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a fost descris de Alston S. Householder în articolul "*Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix*" apărut în Journal of the Assoc. of Computing Machinery 5 (1958), 339-342.

Transformarea matricii ***A*** într-una superior triunghiulară se face în ***(n-1)*** paşi, la fiecare pas folosindu-se o matrice de reflexie.

Pas 1: $\boldsymbol{A^{(1)} = P_1 A}$ (matricea $\boldsymbol{P_1}$ se alege astfel încât col. ***1*** să fie transformată în formă superior triunghiulară)

Pas 2: $\boldsymbol{A^{(2)} = P_2 A^{(1)} = P_2 (P_1 A)}$ ($\boldsymbol{P_2}$ transformă col. ***2*** în formă sup. triunghiulară, fără să schimbe col. ***1***)

Pas *r*: $\boldsymbol{A^{(r)} = P_r A^{(r-1)} = P_r (P_{r-1} \ldots P_1 A)}$ (se transformă col ***r*** în formă sup. triunghiular fără să schimbe primele ***(r-1)*** coloane)

Descompunerea $\boldsymbol{QR}$ construită cu algoritmul Householder este următoarea:

$$P_{n-1} \cdots P_r \cdots P_2 P_1 A = \tilde{Q} A = R$$

unde

$$\tilde{Q} = P_{n-1} \cdots P_r \cdots P_2 P_1$$

$\tilde{Q}$ este matrice ortogonală ca produs de matrici ortogonale.

$$\tilde{Q} A = R \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{Q}^T Q A = \tilde{Q}^T R \quad \Leftrightarrow \quad A = \tilde{Q}^T R = QR$$

$$Q = \tilde{Q}^T = (P_{n-1} \cdots P_r \cdots P_2 P_1)^T = P_1 P_2 \cdots P_r \cdots P_{n-1}$$

Pasul *r*

La intrarea în pasul ***r*** matricea ***A*** are forma:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\
0 & 0 & \cdots & a_{r+1r} & \cdots & a_{r+1n} \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Pasul $\boldsymbol{r}$ constă în:

$$\boldsymbol{A := P_r A}$$

$$\boldsymbol{P_r = I_n - 2v^r (v^r)^T \;, \quad v^r \in R^n \;, \quad \| v^r \|_2 = 1}$$

unde vectorul $\boldsymbol{v^r}$ se alege astfel ca matricea $\boldsymbol{A}$ să aibă şi coloana $\boldsymbol{r}$ în formă superior triunghiulară:

$$
A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{r+1n} \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Calculul matricii P_r

Pentru simplitate vom nota $\boldsymbol{P_r=P}$, $\boldsymbol{v^r=v}$.

$$Ae_r = \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{r-1r} \\ a_{rr} \\ a_{r+1r} \\ \vdots \\ a_{ir} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} \quad \to (PA)e_r = \bar{A}e_r = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1r} = a_{1r} \\ \bar{a}_{2r} = a_{2r} \\ \vdots \\ \bar{a}_{r-1r} = a_{r-1r} \\ \bar{a}_{rr} = k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicând proprietatea matricilor ortogonale :

$$Q \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^{n},\ \| Qx \|_2 = \| x \|_2$$

pentru matricea $Q=P$ şi vectorul $x=Ae_r$ avem:

$$\| PAe_r \|_2^2 = a_{1r}^2 + a_{2r}^2 + \cdots + a_{r-1r}^2 + k^2 =$$

$$\| Ae_r \|^2 = a_{1r}^2 + a_{2r}^2 + \cdots + a_{r-1r}^2 + a_{rr}^2 + a_{r+1r}^2 + \cdots + a_{ir}^2 + \cdots + a_{nr}^2$$

Din relaţia de mai sus rezultă:

$$k^2 = \sigma = a_{rr}^2 + a_{r+1r}^2 + \cdots + a_{ir}^2 + \cdots + a_{nr}^2 = \sum_{i=r}^{n} a_{ir}^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\sigma}$$

Determinarea vectorului $\boldsymbol{v}$ ce defineşte matricea $\boldsymbol{P}$:

$$(PA)e_r = (I_n - 2vv^T)(Ae_r) = Ae_r - 2(vv^T)(Ae_r) =$$

$$= Ae_r - 2v(v^T(Ae_r)) = Ae_r - (2\alpha)\,v = Ae_r - u$$

unde cu α şi $\boldsymbol{u}$ am notat:

$$\alpha := v^T(Ae_r) = \big((Ae_r), v\big)_{\mathbb{R}^n} = \left(\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{ir} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}^n} =$$

$$= a_{1r}v_1 + a_{2r}v_2 + \cdots + a_{ir}v_i + \cdots + a_{nr}v_n$$

$$u := (2\alpha)\, v = Ae_r - (PA)e_r = \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{r-1r} \\ a_{rr} \\ a_{r+1r} \\ \vdots \\ a_{ir} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{r-1r} \\ k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{rr} - k \\ a_{r+1r} \\ \vdots \\ a_{ir} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}$$

Cu aceste notaţii matricea $\boldsymbol{P}$ devine:

$$P = I_n - 2\left(\frac{1}{2\alpha}\right)u\left(\frac{1}{2\alpha}\right)u^T = I_n - \left(\frac{1}{2\alpha^2}\right)uu^T = I_n - \frac{1}{\beta}uu^T$$

$$\beta := 2\alpha^2$$

Pentru a cunoaşte matricea $\boldsymbol{P}$ trebuie să mai determinăm constanta β. Din condiţia:

$$\| v \|_2^2 = 1 \Rightarrow \left\| \frac{1}{2\alpha} u \right\|_2^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4\alpha^2} \| u \|_2^2 = 1 \Rightarrow 2\beta = \| u \|_2^2$$

$$\| u \|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{rr} - k \\ a_{r+1\,r} \\ \vdots \\ a_{ir} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (a_{rr} - k)^2 + a_{r+1\,r}^2 + \cdots + a_{ir}^2 + \cdots + a_{nr}^2 =$$

$$= a_{rr}^2 + a_{r+1\,r}^2 + \cdots + a_{ir}^2 + \cdots + a_{nr}^2 - 2ka_{rr} + k^2 =$$

$$= \sigma - 2ka_{rr} + \sigma = 2(\sigma - ka_{rr})$$

de unde obţinem:

$$\boldsymbol{\beta = \sigma - k a_{rr}}$$

Vom alege semnul constantei ***k*** astfel încât ***β*** să fie cât mai mare posibil deoarce constanta ***β*** apare în operaţia de împărţire. Avem:

$$\boldsymbol{\beta \;\; "mare" \;\; \rightarrow \;\; \beta = \sigma - k a_{rr} \;\geq \sigma \quad (\sigma \geq 0) \quad \rightarrow}$$

$$\textbf{semn}\; \boldsymbol{k} = -\textbf{semn}\; \boldsymbol{a_{rr}}$$

Ce înseamnă ***β =0*** ?

$$\boldsymbol{\beta = \frac{1}{2} \| u \|_2^2 = 0 \rightarrow \| u \|_2^2 = 0 \;\; \rightarrow u \; = 0 \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\rightarrow \;\; a_{rr} = k, a_{r+1r} = 0, \ldots, a_{ir} = 0, \ldots, a_{nr} = 0}$$

Cum $a_{rr}=k$ şi **semn** k **= -semn** a_{rr} obţinem:

$$a_{ir} = 0, \quad \forall i = r, \ldots, n$$

adică avem coloana r deja în formă superior triunghiulară, se poate trece la pasul următor. În acest caz matricea A este singulară.

Ne interesează cum se efectuează operaţia $A=P_rA$ fără a face înmulţire matricială. Vom pune în evidenţă schimbările în raport cu coloanele.

$$(PA)e_j = \text{ noua col. } j \text{ a matr. } A = (I_n - \frac{1}{\beta} uu^T)(Ae_j) =$$

$$= Ae_j - \frac{1}{\beta}(uu^T)(Ae_j) = Ae_j - \frac{1}{\beta} u(u^T(Ae_j)) =$$

$$= Ae_j - \frac{\gamma_j}{\beta} u$$

$$\gamma_j := u^T(Ae_j) = \left(\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{r+1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{rr} - k \\ a_{r+1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{R}^n} =$$

$$= a_{rj}(a_{rr} - k) + \cdots + a_{ij}a_{ir} + \cdots + a_{nj}a_{nr} = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij} = \sum_{i=r}^{n} u_i a_{ij}$$

$$(u_i = 0, i = 1, \ldots, r-1, u_r = a_{rr} - k, u_i = a_{ir}, i = r+1, \ldots, n)$$

Noua coloană ***j*** se obţine din vechea coloană ***j*** din care scădem vectorul ***u*** înmulţit cu constanta γ_j. Ne interesează ca primelor ***(r-1)*** coloane să nu li se schimbe forma superior triunghiulară deja obţinută.

Pentru ***j=1,…,(r-1)*** avem:

$$\gamma_j := u^T(Ae_j) = \left(\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{jj} \\ a_{j+1j} = 0 \\ \vdots \\ a_{rj} = 0 \\ \vdots \\ a_{nj} = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{rr} - k \\ a_{r+1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{R}^n} =$$

$$= a_{1j}0 + \cdots + a_{jj}0 + \cdots + 0(a_{rr} - k) + \cdots + 0a_{ir} + \cdots + 0a_{nr} = 0$$

Din faptul că $\gamma_j = 0,\ j = 1,...,r-1$ rezultă că primele ***(r-1)*** coloane ale matricii ***A*** nu se schimbă când facem operaţia ***A=P***$\boldsymbol{A = P_r A}$, rămân în formă superior triunghiulară.

Algoritmul de trecere de la matricea ***A*** la matricea $\boldsymbol{P_r A}$ este următorul:

$$(P_r A)e_j = \begin{cases} Ae_j & \textbf{pentru } j = 1,\ldots,r-1 \\ (a_{1r}, a_{2r}, \ldots, a_{r-1r}, k, 0, \ldots, 0)^T & \textbf{pentru } j = r \\ Ae_j - \dfrac{\gamma_j}{\beta} u & \textbf{pentru } j = r+1,\ldots,n \end{cases}$$

$$\gamma_j = (Ae_j, u)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=r}^{n} u_i a_{ij}$$

$$u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, r-1, \quad u_r = a_{rr} - k, \quad u_i = a_{ir}, \quad i = r+1, \ldots, n$$

Operaţia de transformare a vectorului termenilor liberi

b:=P_rb:

$$\boldsymbol{P_r b = (I_n - \frac{1}{\beta}(uu^T))b = b - \frac{1}{\beta}(uu^T)b = b - \frac{1}{\beta}u\,(u^T b) = b - \frac{\gamma}{\beta}u}$$

$$\boldsymbol{\gamma = u^T b = (b, u)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=r}^{n} u_i b_i}$$

Algoritmul lui Householder

$$\widetilde{Q} = I_n;$$

for $r = 1, \cdots, n-1$

$$\begin{cases} \textbf{calculează matricea } P_r \text{ (constanta } \beta \text{ şi vectorul } u\text{)} \\ A = P_r * A; \\ b = P_r * b; \\ \widetilde{Q} = P_r * \widetilde{Q}; \end{cases}$$

La sfârşitul acestui algoritm, în matricea A vom avea matricea superior triunghiulară R, în vectorul b vom avea $Q^T b^{\text{init}}$, b^{init} este vectorul iniţial iniţial al termenilor liberi, iar matricea $\widetilde{Q}$ va conţine matricea Q^T din factorizarea QR a matricii A.

Algoritmul Householder detaliat

$\widetilde{Q} = I_n;$

for $r = 1,\ldots,n-1$

// **construcţia matricii** P_r – **constanta** β **şi vectorul** u

- $\sigma = \sum_{i=r}^{n} a_{ir}^2;$
- **if** $(\sigma \le \varepsilon)$ **break** ; // $r = r+1 \leftrightarrow P_r = I_n$ (A **singulară**)
- $k = \sqrt{\sigma};$
- **if** $(a_{rr} > 0)\ k = -k;$
- $\beta = \sigma - k\,a_{rr};$
- $u_r = a_{rr} - k;\ \ u_i = a_{ir}\ ,\ i = r+1,\ldots,n;$

$// A = P_r * A$

$//$ **transformarea coloanelor** $j = r+1, \dots, n$

- **for** $j = r+1, \dots, n$

  $* \gamma = (\gamma_j / \beta) = (Ae_j, u) / \beta = (\sum_{i=r}^{n} u_i a_{ij}) / \beta;$

  $*$ **for** $i = r, \dots, n$

  $a_{ij} = a_{ij} - \gamma * u_i;$

$//$ **transformarea coloanei** r **a matricii** A

- $a_{rr} = k;\ a_{ir} = 0,\quad i = r+1, \dots, n;$

$// b = P_r * b$

- $\gamma = (\gamma / \beta) = (b, u) / \beta = (\sum_{i=r}^{n} u_i b_i) / \beta;$
- **for** $i = r, \dots, n \quad b_i = b_i - \gamma * u_i;$

$// \widetilde{Q} = P_r * \widetilde{Q}$

$\bullet$ **for** $j = 1, \dots, n$

$$* \gamma = (\widetilde{Q} e_j, u) / \beta = \left(\sum_{i=r}^{n} u_i \tilde{q}_{ij}\right) / \beta;$$

$*$ **for** $i = r, \dots, n$

$$\tilde{q}_{ij} = \tilde{q}_{ij} - \gamma * u_i;$$

Numărul de operaţii efectuate:

A (adunări, scăderi):

$$(n-1)+2n(n-1)+\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}=\frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{3}=$$

$$=\frac{2}{3}n^3+O(n^2)$$

M (înmulţiri, împărţiri):

$$4(n-1)+3n(n-1)+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{2}{3}n^3+O(n^2)$$

R (radicali): ***(n-1)***

Algoritmul lui Givens

Fie $\boldsymbol{A}$ o matrice reală pătratică de dimensiune $\boldsymbol{n}$. Pp. că avem:

$$\boldsymbol{A = QR}$$

unde $\boldsymbol{Q}$ este o matrice ortogonală iar $\boldsymbol{R}$ este o matrice superior triunghiulară.

$$\boldsymbol{Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QRx = b \Leftrightarrow Q^T QRx = Q^T b \quad \Leftrightarrow Rx = Q^T b}$$

În cazul algoritmului Givens, pentru a aduce sistemul $\boldsymbol{Ax=b}$ la forma $\boldsymbol{Rx = Q^T b}$ se folosesc matricile de rotaţie. O matrice de rotaţie $\boldsymbol{R_{pq}(\theta) = (r_{ij})_{i,j=1,n}}$ are următoarea formă :

$$
R_{pq}(\theta)=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} & & & p & & q & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & 1 & & & \\
0 & 0 & \cdots & (-s) & \cdots & c & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$r_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1} & \textbf{pentru } i = j, \quad i \neq p, i \neq q \\ c & \textbf{pentru } i = j, \quad i = p, i = q \\ s & \textbf{pentru } i = p, j = q \\ -s & \textbf{pentru } i = q, j = p \\ \mathbf{0} & \text{în rest} \end{cases}$$

unde $p, q \in \{1,...,n\}$ iar c şi s sunt două numere reale care satisfac relaţia $c^2+s^2=1$. Constantele c şi s pot fi alese astfel încât $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$. Se arată uşor, folosind relaţia $c^2+s^2=1$, că matricea $R_{pq}(\theta)$ este ortogonală:

$$R_{pq}(\theta)\, R_{pq}^T(\theta) = R_{pq}^T(\theta) R_{pq}(\theta) = I_n$$

Calculul matricii:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}_{pq}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{A},$$

B se obţine din ***A*** modificând doar liniile ***p*** şi ***q***.
Fie

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{A}, \text{ - linia } \boldsymbol{i} \text{ a matricii } \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{B} \quad \text{ - linia } \boldsymbol{i} \text{ a matricii } \boldsymbol{B}.$$

Liniile matricii ***B***:

$$\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{A}_i \;,\quad \boldsymbol{i} = \mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{n}\,,\quad \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_p + \boldsymbol{s}\boldsymbol{A}_q$$

$$\boldsymbol{B}_q = -\boldsymbol{s}\boldsymbol{A}_p + \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_q$$

$$\boldsymbol{b_{pj} = c\, a_{pj} + s\, a_{qj}\ \ ,\ \ j = 1,\ldots,n}$$

$$\boldsymbol{b_{qj} = -\, s\, a_{pj} + c\, a_{qj}\ \ ,\ j = 1,\ldots,n}$$

$$\boldsymbol{b_{ij} = a_{ij}}\quad \textbf{în rest}$$

Calculul matricii :

$$\boldsymbol{D = A\, R_{pq}^{T}(\theta)},$$

D se obţine din ***A*** modificând doar coloanele ***p*** şi ***q***.

Notăm $\boldsymbol{Ae_j}$, $\boldsymbol{De_j}$ – coloana j a matricii A şi respectiv D.

Coloanele matricii $\boldsymbol{D}$:

$$D_j = A_j \ , \quad j = 1,\ldots,n \ , \quad j \neq p \ , \ j \neq q$$
$$De_p = cAe_p + sAe_q$$
$$De_q = -sAe_p + cAe_q$$
$$d_{ip} = c\, a_{ip} + s\, a_{iq} \ , \ i = 1,\ldots,n$$
$$d_{iq} = -\, s\, a_{ip} + c\, a_{iq} \ , i = 1,\ldots,n$$
$$d_{ij} = a_{ij} \quad \textbf{în rest}$$

Algoritmul lui Givens se desfăşoară în ***(n-1)*** paşi - la pasul ***r*** se transformă coloana ***r*** a matricii ***A*** în formă superior triunghiulară fără a modifica primele ***(r-1)*** coloane.

Pasul 1

Intrare: matricea $\boldsymbol{A}$, vectorul $\boldsymbol{b}$

Ieşire: matricea $\boldsymbol{A}^{(1)}$ (cu prima col. în formă superior triunghiulară), $\boldsymbol{b}^{(1)}$

Se efectuează urmatoarele operaţii de înmulţire cu matrici de rotaţie:

$$\boldsymbol{R_{1n}(\theta_{1n}) \cdots R_{13}(\theta_{13}) R_{12}(\theta_{12})\, A = A^{(1)}}$$

$$\boldsymbol{R_{1n}(\theta_{1n}) \cdots R_{13}(\theta_{13}) R_{12}(\theta_{12})\, b = b^{(1)}}$$

Unghiurile $\boldsymbol{\theta_{1i}}$ (constantele $\boldsymbol{c_{1i}}$ şi $\boldsymbol{s_{1i}}$) se aleg astfel ca elementul de pe pozitia ***(i,1)*** din matricea rezultat să devină $\boldsymbol{0}$.

Pasul r

Intrare: matricea $\boldsymbol{A^{(r-1)}}$ (are primele $\boldsymbol{(r-1)}$ coloane în formă superior triunghiulară), $\boldsymbol{b^{(r-1)}}$

Ieşire: matricea $\boldsymbol{A^{(r)}}$ (cu primele $\boldsymbol{r}$ coloane în formă superior triunghiulară), $\boldsymbol{b^{(r)}}$

La acest pas matricea $\boldsymbol{A^{(r-1)}}$ şi vectorul $\boldsymbol{b^{(r-1)}}$ se transformă astfel:

$$\boldsymbol{R_{r\,n}(\theta_{r\,n})\cdots R_{r\,i}(\theta_{r\,i})\cdots R_{r\,r+1}(\theta_{r\,r+1})\,A^{(r-1)} = A^{(r)}}$$

$$\boldsymbol{R_{r\,n}(\theta_{r\,n})\cdots R_{r\,i}(\theta_{r\,i})\cdots R_{r\,r+1}(\theta_{r\,r+1})\,b^{(r-1)} = b^{(r)}}$$

unde elementele $\boldsymbol{c = c_{r\,i}}$ şi $\boldsymbol{s = s_{r\,i}}$ din matricile de rotaţie se aleg astfel ca după înmulţirea cu $\boldsymbol{R_{r\,i}(\theta_{r\,i})\,, i = r+1,\ldots,n}$ elementul $\boldsymbol{(i,r)}$ să devină $\boldsymbol{0}$.

Considerăm operaţia $B = R_{ri}(\theta_{ri})A$, unde θ_{ri} se alege astfel ca $b_{ir} = 0$:

$$b_{rj} = c\,a_{rj} + s\,a_{ij}\ ,$$

$$b_{ij} = -s\,a_{rj} + c\,a_{ij}\ ,\ j = 1,\ldots,n$$

$$(b_{kl} = a_{kl}\quad \text{în rest})$$

$$(j = r)\quad b_{ir} = -s\,a_{rr} + c\,a_{ir}$$

Cea mai simplă alegere pentru c şi s astfel ca să obţinem $b_{ir}=0$ este:

$$c = f\,a_{rr}\ ,\quad s = f\,a_{ir}\ ,$$

$$f\ \text{ ales astfel ca } c^2 + s^2 = 1 \quad \Rightarrow\ f = \frac{1}{\sqrt{a_{rr}^2 + a_{ir}^2}}$$

$$c = \frac{a_{r\,r}}{\sqrt{a_{r\,r}^2 + a_{i\,r}^2}} \quad , \quad s = \frac{a_{i\,r}}{\sqrt{a_{r\,r}^2 + a_{i\,r}^2}}$$

$$\sqrt{a_{rr}^2 + a_{ir}^2} = 0 \;\Rightarrow a_{rr} = a_{ir} = 0 \;\Rightarrow\; c = 1\;,\; s = 0$$

$$(R_{ir}(\theta) \;=\; I_n)$$

Deci elementul de pe poziţia ***(i,r)*** este deja nul. Nu avem ce schimba în matricea ***A*.**
Operaţia $B = R_{r\,i}(\theta_{r\,i})A$, nu afectează forma superior triunghiulară a primelor ***(r-1)*** coloane. În matricea ***B*** aceste coloane vor continua să fie în formă superior triunghiulară.

$$b_{rj} = c\,a_{rj} + s\,a_{ij} = 0\,,\quad b_{ij} = -\,s\,a_{rj} + c\,a_{ij} = 0\ ,\ j = 1,\ldots,r-1$$

$$\text{deoarece}\quad a_{rj} = a_{ij} = 0$$

Înmulţirea $B = R_{r\,i}(\theta_{r\,i})A$ nu schimbă decât liniile r şi i ale matricii B. În concluzie, operaţia $B = R_{r\,i}(\theta_{r\,i})A$ nu schimbă elementele nule deja obţinute, ci doar face ca elementul de pe poziţia *(i,r)* să devină *0*.

Algoritmul lui Givens poate fi descris astfel:

$$R_{n-1n}(\theta_{n-1n})\cdots R_{rn}(\theta_{rn})\cdots R_{r\,r+1}(\theta_{r\,r+1})\cdots R_{1n}(\theta_{1n})\cdots R_{12}(\theta_{12})\ A = R$$

$$R_{n-1n}(\theta_{n-1n})\cdots R_{rn}(\theta_{rn})\cdots R_{r\,r+1}(\theta_{r\,r+1})\cdots R_{1n}(\theta_{1n})\cdots R_{12}(\theta_{12})b = \bar{b} = Q^T b$$

Notăm cu $\widetilde{Q}$ următoarea matrice:

$$\widetilde{Q} = R_{n-1n}(\theta_{n-1n})\cdots R_{rn}(\theta_{rn})\cdots R_{r\,r+1}(\theta_{r\,r+1})\cdots R_{1n}(\theta_{1n})\cdots R_{12}(\theta_{12})$$

Matricea $\widetilde{Q}$ este matrice ortogonală ca produs de matrici ortogonale. Descompunerea $\boldsymbol{QR}$ a matricii $\boldsymbol{A}$ este următoarea:

$$\widetilde{Q}\,A = R \quad (\widetilde{Q}^{-1} = \widetilde{Q}^{T}) \Rightarrow A = \widetilde{Q}^{T} R = QR$$

$$\begin{aligned}Q = \widetilde{Q}^{T} &= \left(R_{n-1n}(\theta_{n-1n})\cdots R_{rn}(\theta_{rn})\cdots R_{r\,r+1}(\theta_{r\,r+1})\cdots R_{1n}(\theta_{1n})\cdots R_{12}(\theta_{12})\right)^{T}\\ &= R_{12}^{T}(\theta_{12})\cdots R_{1n}^{T}(\theta_{1n})\cdots R_{r\,r+1}^{T}(\theta_{r\,r+1})\cdots R_{rn}^{T}(\theta_{rn})\cdots R_{n-1n}^{T}(\theta_{n-1n})\end{aligned}$$

Pe scurt, ***algoritmul lui Givens*** este următorul:

$$\widetilde{Q} = I_n;$$

$$\textbf{for } r = 1,\cdots,n-1$$

$$\quad \textbf{for } i = r+1,\cdots,n$$

$$\left\{\begin{array}{l} A = R_{ri}(\theta_{ri}) * A; \\ b = R_{ri}(\theta_{ri}) * b; \\ \widetilde{Q} = R_{ri}(\theta_{ri}) * \widetilde{Q}; \end{array}\right.$$

$\widetilde{Q} = I_n;$

for $r = 1,\ldots,n-1$

for $i = r+1,\ldots,n$

// **construcţia matricii** $R_{ri}(\theta_{ri})$ – **constantele** c **şi** s

• $f = \sqrt{a_{rr}^2 + a_{ir}^2};$

• **if** $(f \le \varepsilon)\{ c = 1; s = 0;\}$ // $R_{ri}(\theta_{ri}) = I$

else $\{ c = a_{rr} / f ; s = a_{ir} / f ;\}$

// $A = R_{ri}(\theta_{ri}) * A$

• **for** $j = r+1,\ldots,n$

$$\begin{cases} a_{rj} = c * a_{rj} + s * a_{ij}; \\ a_{ij} = -s * a_{rj}^{vechi} + c * a_{ij}; \end{cases}$$

$\bullet\ a_{ir} = 0;\ a_{rr} = f;$

$//\ b = R_{ri}(\theta_{ri}) * b$

$\bullet\ b_r = c * b_r + s * b_i;$

$\bullet\ b_i = -s * b_r^{vechi} + c * b_i;$

$//\ \widetilde{Q} = R_{ri}(\theta_{ri}) * \widetilde{Q}$

$\bullet$ **for** $j = 1, \dots, n$

$$\begin{cases} \tilde{q}_{rj} = c * \tilde{q}_{rj} + s * \tilde{q}_{ij}; \\ \tilde{q}_{ij} = -s * \tilde{q}_{rj}^{vechi} + c * \tilde{q}_{ij}; \end{cases}$$

La sfârşitul acestui algoritm, în matricea $\boldsymbol{A}$ vom avea matricea superior triunghiulară $\boldsymbol{R}$, în vectorul $\boldsymbol{b}$ vom avea $\widetilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{init}}$($\boldsymbol{b}^{\mathbf{init}}$ - vectorul termenilor liberi iniţial), iar matricea $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ va conţine matricea $\boldsymbol{Q}^T$ din factorizerea $\boldsymbol{QR}$ a matricii $\boldsymbol{A}$.

Numărând operaţiile efectuate (exceptând calculul matricii $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$) obţinem:

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ radicali}$$

$$\frac{n(n-1)(4n+7)}{6} = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2) - \text{adunări/scăderi}$$

$$\frac{2n(n-1)(2n+5)}{3} = \frac{4}{3}n^3 + O(n^2) \text{ înmulţiri/împărţiri}$$