

ALGORITMICA GRAFURILOR

Săptămâna 12

C. Croitoru

croitoru@info.uaic.ro

FII

December 15, 2013

- 1 Reduceri polinomiale pentru probleme de decizie pe grafuri (ag 13-14 [allinone.pdf](#) pag. 281 → 320)
- 2 Problemele pentru seminarul 12
- 3 **Prezentarea temei pentru acasă**

Stabila maximă.

SM

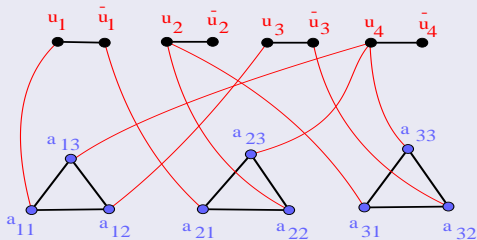
Instanță : $G = (V, E)$ graf și $k \in \mathbf{N}$.

Intrebare: Există S mulțime stabilă în G a. î. $|S| \geq k$?

Teoremă. (Karp 1972) $3SAT \propto SM$.

Exemplu: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$;

$C = (u_1 \vee u_3 \vee u_4) \wedge (\bar{u}_1 \vee u_2 \vee u_4) \wedge (u_2 \vee \bar{u}_3 \vee u_4)$; $k = 4 + 3 = 7$.



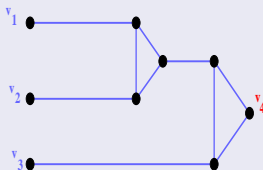
Colorarea vârfurilor.

COL

Instanță: $G = (V, E)$ graf și $p \in \mathbf{N}^*$.

Intrebare: Există o p -colorare a vârfurilor lui G ?

Lemă. Fie H graful:



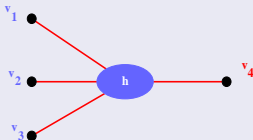
a) Dacă c este o 3-colorare a lui H astfel încât

$c(v_1) = c(v_2) = c(v_3) = a \in \{1, 2, 3\}$ atunci $c(v_4) = a$.

b) Fie $c : \{v_1, v_2, v_3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ a.î. $c(\{v_1, v_2, v_3\}) \neq \{a\}$.

Atunci c poate fi extinsă la o 3-colorare a lui H cu $c(v_4) \neq a$.

Vom desemna (pentru simplitate) graful H astfel:



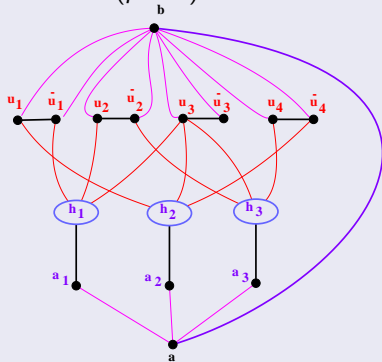
Colorarea vârfurilor.

Teoremă. $3SAT \propto COL$.

Exemplu: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,

$$C = (\bar{u}_1 \vee u_2 \vee u_3) \wedge (u_1 \vee u_3 \vee \bar{u}_4) \wedge (\bar{u}_2 \vee u_3 \vee u_4)$$

Graful G va fi ($p = 3$):



Probleme hamiltoniene.

Definiție: Fie $G = (V(G), E(G))$ un (di)graf. Un circuit C al lui G se numește **circuit hamiltonian** dacă $V(C) = V(G)$. Un drum deschis D al lui G se numește **drum hamiltonian** dacă $V(D) = V(G)$. Un (di)graf care are un circuit hamiltonian se numește **(di)graf hamiltonian**. Un (di)graf care are un drum hamiltonian se numește **(di)graf trasabil**.

Teoremă. (Nash-Williams 1969) Problemele următoare sînt polinomial echivalente:

CH : *Dat G graf. Este G hamiltonian ?*

TR : *Dat G graf. Este G trasabil ?*

DCH: *Dat G digraf. Este G hamiltonian ?*

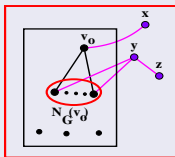
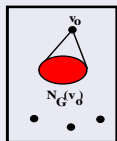
DTR: *Dat G digraf. Este G trasabil ?*

BCH: *Dat G graf bipartit. Este G hamiltonian ?*

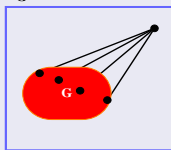
Reduceri polinomiale

Probleme hamiltoniene.

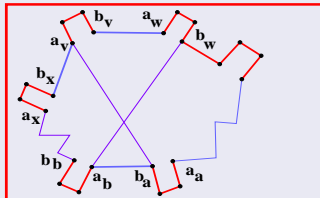
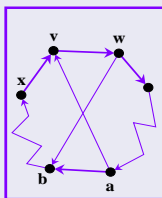
$CH \propto TR$



$TR \propto CH$



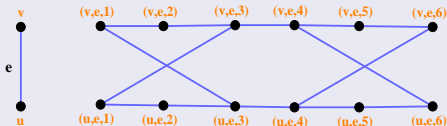
$DCH \propto CH$



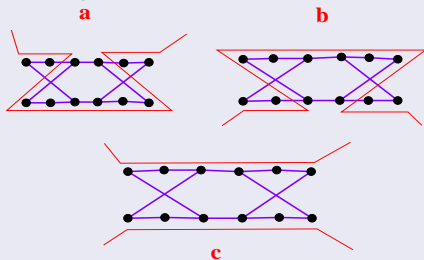
Probleme hamiltoniene.

Teoremă. (Karp 1972) $SM \propto CH$.

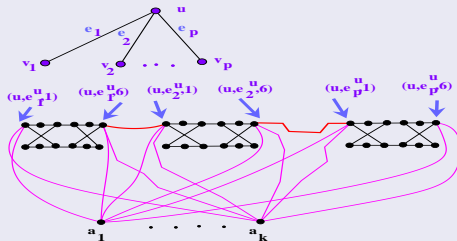
Pentru orice muchie a grafului G (intrare în SM) asociem graful



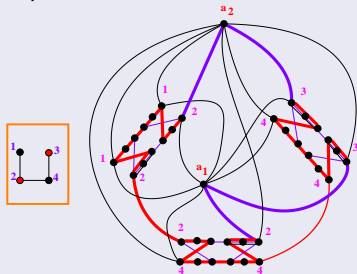
Singurele posibilități de traversare de către un circuit hamiltonian al lui H a vîrfurilor din G'_e sînt (a) (b) și (c) indicate în figura următoare:



Probleme hamiltoniene.



Exemplu:



Problema comisului voiajor

Algoritmi de aproximare.

CV Dat $n \in \mathbf{Z}_+$ ($n \geq 3$) și $d : E(K_n) \rightarrow \mathbf{R}_+$, să se determine H_0 circuit hamiltonian în graful complet K_n cu $d(H_0)$ minim printre toate circuitele hamiltoniene ale lui K_n .

Algoritmi A , care pentru datele unei probleme CV vor oferi în timp polinomial (în raport cu n) un circuit hamiltonian H_A , care va aproxima soluția optimă H_0 .

Măsuri ale eficienței unei astfel de "euristici" A pot fi considerate numerele:

$$R_A(n) = \sup_{\substack{d: E(K_n) \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ d(H_0) \neq 0}} \frac{d(H_A)}{d(H_0)}$$

$$R_A = \sup_{n \geq 3} R_A(n).$$

Teoremă. Dacă există un algoritm aproximativ A cu timp de lucru polinomial pentru CV, astfel încât $R_A < \infty$, atunci CH se poate rezolva în timp polinomial.

$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \Rightarrow$ nu există algoritm aproximativ A polinomial cu $R_A < \infty$.



Problemele pentru seminarul 12

