Tema nr. 6

Fie $p \in \mathbf{N}^*$ şi $n \in \mathbf{N}^*$ dimensiunile matricii A, $p \geq n$, ϵ - precizia calculelor, matricea $A \in \mathbf{R}^{p \times n}$, vectorul $b \in \mathbf{R}^p$.

- Pentru $p = n > 500$ să se genereze aleator o matrice pătratică, rară şi simetrică ($A = A^T$), folosind schema de memorare cu liste descrisă în *Tema 3*. De asemenea, să se genereze structurile rare citind matricea din fişierul postat pe pagina cursului.
- Pentru $p = n$ şi A matrice simetrică ($A = A^T$) şi rară să se implementeze metoda puterii pentru aproximarea celei mai mari valori proprii a matricii A şi a unui vector propriu asociat. După citirea matricii din fişier, să se verifice dacă matricea este simetrică. Să se afişeze valorile proprii de modul maxim aproximate pentru matricea generată aleator şi pentru cea din fişier.
- Cazul $p > n$ (matrici clasice, nerare): utilizând descompunerea după valori singulare (**S**ingular **V**alue **D**ecomposition) din biblioteca folosită la *Tema 2*, să se calculeze şi să se afişeze:
  - valorile singulare ale matricii A,
  - rangul matricii A,
  - numărul de condiţionare al matricii A,
  - norma $||A - USV^T||_\infty$,
  - matricea $A_s = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_s u_s v_s^T$ şi norma $\|A - A_s\|_\infty$ unde $s \leq \text{rang}(A)$, este un număr natural citit de la tastatură.

Vectori şi valori proprii - definiţii

Fie $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ o matrice reală de dimensiune n. Se numeşte *valoare proprie* asociată matricii A, numărul complex $\lambda \in \mathbf{C}$, pentru care există un vector nenul $u \neq 0$ numit şi *vector propriu* asociat valorii proprii λ pentru care:

$$Au = \lambda\, u$$

Valorile proprii ale matricii A pot fi definite şi ca rădăcini ale polinomului caracteristic asociat matricii A, $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) \ = \ \det(\lambda I - A) = 0$$

Polinomul caracteristic este un polinom de grad n, deci orice matrice de dimensiune n are n valori proprii (reale şi/sau complex conjugate).

Despre matricile simetrice se poate arăta că au toate valorile proprii reale.

Metoda puterii

Fie $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ o matrice simetrică. Se poate arăta că, pentru un vector $x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0$, şirul de vectori:

$$\frac{x}{||x||_2},\ \frac{Ax}{||Ax||_2},\ \frac{A^2x}{||A^2x||_2},\ \frac{A^3x}{||A^3x||_2},\ \ldots \tag{1}$$

converge la vectorul propriu asociat valorii proprii de modul maxim.

Se defineşte *coeficientul Rayleigh* pentru un vector $x \in \mathbf{R}^n$ ca fiind numărul real:

$$r(x) = \frac{x^TAx}{x^Tx} = \frac{(Ax,x)_{\mathbf{R}^n}}{||x||_2^2}$$

În relaţiile de mai sus am notat cu $||\cdot||_2$, $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{R}^n}$ norma euclidiană a unui vector şi respectiv produsul scalar a doi vectori.

Coeficientul Rayleigh are proprietatea că dacă x este vector propriu al matricii A asociat valorii proprii λ atunci $r(x) = \lambda$. Dacă, atunci când se calculează şirul (1), se calculează şi coeficienţii Rayleigh pentru vectorii din şir, obţinem o metodă de aproximare a valorii proprii de modul maxim.

Ţinând cont de observaţiile de mai sus putem descrie metoda puterii astfel:

Metoda puterii - schema algoritmului

se alege vectorul $v^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ aleator, dar cu $||v^{(0)}||_2 = 1$;

$w = Av^{(0)}$;

$\lambda_0 = (w, v^{(0)})_{\mathbf{R}^n}$;

$k = 0$;

do

$$v^{(k+1)} = \frac{1}{||w||_2} w \,;$$

$w = Av^{(k+1)}$;

$\lambda_{k+1} = (w, v^{(k+1)})_{\mathbf{R}^n}$;

k++ ;

while $(||w - \lambda_k v^{(k)}||_2 > n\epsilon$ şi $k \le k_{max})$;

(la intoducerea datelor, se pot lua $\epsilon \le 10^{-9}$ şi $k_{max} = 1000000$)

Dacă se iese din bucla *while* pe varianta $k > k_{max}$ algoritmul nu a reuşit să calculeze valoarea proprie de modul maxim şi un vector propriu asociat. În acest caz se poate încerca mărirea valorii lui ϵ şi reluarea calculelor.

Dacă s-a ieşit pe cealaltă variantă, $(||Av^{(k)} - \lambda_k v^{(k)}||_2 \le n\epsilon)$, în λ_{k+1} avem o aproximare a unei valori proprii de modul maxim a matricii A, iar în $v^{(k+1)}$ o aproximare a unui vector propriu asociat acestei autovalori.

În algoritmul de mai sus nu este nevoie să alocăm şiruri pentru λ_k şi $v^{(k)}$ ci avem nevoie doar de un singur element pentru fiecare şir: $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru a memora valoarea lui λ_k şi $v \in \mathbf{R}^n$ pentru $v^{(k)}$.

Alegerea vectorului iniţial $v^{(0)}$ cu $||v^{(0)}||_2 = 1$ se poate face pornind de la un vector nenul generat aleator, $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$, şi punând:

$$v^{(0)} = \frac{1}{||x||_2} x$$

Metoda puterii - schema algoritmului

se alege vectorul $v \in \mathbf{R}^n$ aleator, de normă euclidiană 1, $||v||_2 = 1$;

$(v = \dfrac{1}{||x||_2} x \ , \ x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0)$

$w = Av$;

$\lambda = (w, v)_{\mathbf{R}^n}$;

$k = 0$;

do

$\quad v = \dfrac{1}{||w||_2} w$;

$\quad w = Av$;

$\quad \lambda = (w, v)_{\mathbf{R}^n}$;

$\quad k{+}{+}$;

while $(||w - \lambda v||_2 > n\epsilon$ şi $k \leq k_{max})$;

Descompunerea după valori singulare

(**S**ingular **V**alue **D**ecomposition)

Fie $A \in \mathbf{R}^{p\times n}$. Se numeşte decompunere după valori singulare a matricii:

$$A = USV^T \quad , \quad U \in \mathbf{R}^{p\times p} \ , \ S \in \mathbf{R}^{p\times n} \ , \ V \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

cu $U = [u_1 \ u_2 \ ... \ u_p]$ (vectorii u_i sunt coloanele matricii U) şi $V = [v_1 \ v_2 \ ... \ v_n]$ matrici ortogonale iar S matrice de forma:

$$\text{pentru } p \le n \qquad S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p\times n}$$

$$\text{pentru } p > n \qquad S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p\times n}$$

unde numerele nenegative $\sigma_i \ge 0, \forall i$ sunt valorile singulare ale matricii A.

Rangul matricii A este numărul de valori singulare strict pozitive:

$$\text{rang } (A) = \text{ numărul de valori singulare } \sigma_i > 0.$$

Numărul de condiţionare al matricii A este raportul dintre cea mai mare valoare singulară şi cea mai mică valoare singulară strict pozitivă.

$$k_2(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad ,$$

$$\sigma_{\max} = \max\{\sigma_i; \sigma_i \text{ valoare singulară}\} \ ,$$

$$\sigma_{\min} = \min\{\sigma_i; \sigma_i > 0 \text{ valoare singulară}\}$$

Pentru calculul matricilor $A_s = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i u_i v_i^T$ se folosesc primele s coloane ale matricilor U şi V. O matrice $u_i v_i^T$ are forma:

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; uv^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & & & \\ x_py_1 & x_py_2 & \cdots & x_py_n \end{pmatrix}.$$

Matricile de forma $W = uv^T \in \mathbf{R}^{p\times n}$ au aceeaşi dimensiune ca matricea A, $W = (w_{ij} = x_i y_j; i = 1, ..., p, j = 1, ..., n)$.