Setul 11

de probleme şi exerciţii de matematică

(cu privire la extreme libere şi condiţionate, funcţii definite implicit, inversarea locală a funcţiilor şi dependenţa ori independenţa funcţională)

S11.1 Să se găsească extremele următoarelor funcţii:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$;

b) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x\,(\ln x)^2$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\cos x + x^2$;

d) $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} - 3$;

e) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{2-xy}{x^2+y^2+1}$;

f) $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

S11.2 Să se stabilească dacă este sau nu posibilă explicitarea lui y şi z, ca funcţii dependente de x, pe baza relaţiilor:

$$\begin{cases} x + 2y - z & = & 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz & = & 2 \end{cases},$$

în vecinătatea punctului $(1,1,0)$.

S11.3

a) Relaţiile $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$ şi $z = u^3 + v^3$ definesc pe z ca funcţie de x şi y. Să se arate că există $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, după care să se calculeze aceste derivate.

b) Să se determine du şi dv, unde funcţiile u şi v (dependente de x şi y) sunt definite implicit de sistemul: $e^u + u\sin v = x$, $e^u - u\cos v = y$.

S11.4 Să se arate că teorema de inversare locală se poate aplica asupra sitemului de ecuaţii neliniare

$$\begin{cases} x^2 - yz & = & u \\ y^2 - zx & = & v \\ z^2 - xy & = & w \end{cases},$$

unde $(x,y,z) \in A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x,\ 0 < y,\ \ z > x + y\right\}$.

Care este funcţia f^{-1} în acest caz?

S11.5

a) Să se stabilească relaţia de dependenţă funcţională existentă între funcţiile:

$$f_1(x,y) = \mathrm{arctg} x - \mathrm{arctg} y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$f_2(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{1+xy}{x-y}, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

b) Ce relaţie există între funcţiile

$$f_1(x,y,z) = x+y+z,$$
$$f_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx,$$
$$f_3(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ?$$

c) Să se determine mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^3$ pe care funcţiile $f_1(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1-x_2+x_3}-3$, $f_2(x_1,x_2,x_3) = \ln\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)$ şi $f_3(x_1,x_2,x_3) = 1-\cos(x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3)$ sunt, două câte două, funcţional dependente.

S11.6 Să se determine cum trebuie tăiată o bară metalică, cu profil cornier, pentru a putea confecţiona apoi cadrul unui acvariu paralelipipedic de capacitate volumică maximă.

S11.7 Să se afle punctele de extrem local, condiţionat, în fiecare din cazurile de mai jos:

a) $f(x,y) = x^2+y^2$, cu legătura $3x+2y-6=0$;

b) $f(x,y,z) = x-2y+2z$, cu legătura $x^2+y^2+z^2-9=0$;

c) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, cu legăturile $x+y+z=12$, $x>0$, $y>0$, $z>0$;

d) $f(x,y,z) = xyz$, cu legăturile $x+y+z=5$ şi $xy+yz+zx=8$.

S11.8 Să se determine extremele globale ale funcţiilor indicate mai jos, pe mulţimea K dată.

a) $f(x,y) = 5x^2+3xy+y^2$, $(x,y) \in K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\right\}$;

b) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $(x,y) \in K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

S11.9 Să se găsească extremele următoarelor două funcţii:

a) $f_1(x,y) = x^2e^{-x^4-y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

b) $f_2(x,y,z) = xy^2z^3(1-x-2y-3z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

S11.10 Să se arate că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} xyu - yv^2 + 2v^3 &= 0 \\ 4u^2 + 2v^2 - x^3y &= 0 \end{cases}$$

se poate rezolva în raport cu u şi v, dând u şi v ca funcţii de x şi y într-o vecinătate a punctului $(1,2,0,1)$.

Să se determine $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

S11.11 Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin $f(x,y) = \left(e^x \cos y, e^{-x}\sin y\right)$, poate fi inversată local în jurul oricărui punct din $\mathbb{R}^2$. Ce se poate spune despre inversabilitatea globală a acestei funcţii?

S11.12 Să se arate că funcţiile sunt (sau nu sunt) dependente funcţional pe $\mathbb{R}^3$:

$$f_1(x,y,z) = (x+y+z)^3-1,$$
$$f_2(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2+y^2+z^2},$$
$$f_3(x,y,z) = (xy+yz+zx)^2+2, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

S11.13 Să se determine extremele cu legături ale funcţiilor următoare:

a) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, pentru $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

b) $f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \log_2 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \right)$, cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ şi $p_i \in (0,1)$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$ (entropia Rényi).

Bibliografie indicată

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme. (Cap. 6 şi 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

2. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică. Exerciţii şi probleme,* Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

3. C. Drăguşin - *Calcul diferenţial (Culegere de exerciţii şi probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2008.