SUBIECTELE TEMEI 1 LA "MATEMATICĂ"
(seria 2012 - 2013 / I1A & I1B & I1X)

1. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ şi o relaţie binară $\mathcal{R}$ pe $\mathbb{R}$, prin intermediul cărora se defineşte relaţia binară $\mathcal{S}$, pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, după cum urmează:

$$(x, y)\ \mathcal{S}\ (u, v) \Longleftrightarrow (ax^2 + by^2)\ \mathcal{R}\ (au^2 + bv^2), \forall x, y, u, v \in \mathbb{R}.$$

i) Arătaţi că, în situaţia în care $\mathcal{R}$ reprezintă egalitatea pe $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Stabiliţi atunci clasa de echivalenţă cu reprezentantul $(0, 0)$ şi precizaţi, argumentat, ce este, din punct de vedere geometric, mulţimea cât $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/\mathcal{S}$.

ii) Ce semnifică perechea $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{S})$ atunci când $\mathcal{R}$ este relaţia uzuală "$\leq$", de ordine totală, pe $\mathbb{R}$?

2. Fie X şi Y două mulţimi nevide, iar f o funcţie de la X la Y, în raport cu care sunt definite următoarele alte două funcţii:

$$\begin{aligned} g &: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y),\ g(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\},\ \forall A \in \mathcal{P}(X), \\ h &: \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X),\ h(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B,\ y = f(x)\},\ \forall B \in \mathcal{P}(Y). \end{aligned}$$

Să se arate că f este bijectivă dacă şi numai dacă oricare dintre funcţiile g şi h este bijectivă.

3. Să se demonstreze că, pentru o latice $(L, \vee, \wedge)$, sunt echivalente următoarele afirmaţii:

j) L este modulară.

jj) $\forall\ x, y, z \in L$, din faptul că $x \leq y$, rezultă $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$.

jjj) $\forall\ x, y, z \in L$, dacă $x \leq y$, $x \wedge z = y \wedge z$ şi $x \vee z = y \vee z$, atunci $x = y$.

4. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$, astfel încât $x_n^2 \geq x_{n-1}x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că şirul cu termenul general $\sqrt[n]{x_n}$ este fundamental.

b) Oricare ar fi $r \in \mathbb{R}_+$, daţi un exemplu de şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$, pentru care $x_n^2 \geq x_{n-1}x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = r$.

5. Să se analizeze seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{4n^2})$ şi să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\ln(1 + \frac{1}{2k-1}) - \ln(1 + \frac{1}{2k})] = \ln\frac{\pi}{2}.$$

Precizare: Rezolvările tuturor celor cinci probleme din cadrul acestei teme, redactate manual şi personal, se vor preda cadrului didactic titular de seminar, până joi, 1 noiembrie 2012, cel mai târziu.

F. Iacob, C. Forăscu / 20.10.2012