

1.1 Probleme rezolvate

Evenimente aleatoare și formula lui Bayes

1. (Proprietăți derivate din definiția funcției de probabilitate)

CMU, 2009 spring, Tom Mitchell, HW2, pr. 1.1

Fie două evenimente A și B .

a. Folosind doar proprietățile din definiția funcției de probabilitate, arătați că $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

b. Demonstrați *inegalitatea lui Bonferroni*: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

c. Spunem că evenimentele A și B sunt disjuncte dacă $P(A \cap B) = 0$.

În ipoteza în care $P(A) = 1/3$ și $P(B) = 5/6$, este posibil ca A și B să fie evenimente disjuncte? Justificați răspunsul.

Răspuns:

a. $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

Cum evenimentele $(A \cap B)$ și $(A \cap \bar{B})$ sunt disjuncte, conform proprietății de „aditivitate numărabilă” din definiția funcției de probabilitate putem scrie $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, deci $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

b. Întrucât $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, este imediat că $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$. Deci $P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B) = [P(A \cup B) - P(A \cap \bar{B})] + [P(A \cup B) - P(\bar{A} \cap B)] - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Cum $P(A \cup B) \leq 1$ (fiind o probabilitate) putem scrie că: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$, deci $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

c. Pentru a studia posibilitatea ca evenimentele A și B să fie disjuncte vom aplica inegalitatea lui Bonferroni:

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow P(A \cap B) \geq \frac{1}{6} > 0$$

Deci $P(A \cap B)$ nu poate fi 0 și, în consecință, evenimentele A și B nu sunt disjuncte.

2. (Aplicarea proprietăților din definiția funcției de probabilitate)

CMU, 2009 spring, Tom Mitchell, HW2, pr. 1.2.3

Robert și Alina dau cu banul alternativ. Cel dintâi dintre ei care va obține stema (în engleză: head) câștigă jocul. Alina este prima care va da cu banul.

a. Dacă $P(\text{stemă}) = 1/2$, care este probabilitatea ca Alina să câștige jocul?

Indicație: Încercați să enumerați toate situațiile în care Alina poate câștiga.

Indicație: Pentru orice $a \in (0, 1)$, avem $\sum_{i=0}^{\infty} a^i = 1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots = \frac{1}{1-a}$.

b. Dacă $P(\text{stemă}) = p \in (0, 1]$, care este probabilitatea ca Alina să câștige jocul?

c. Ținând cont de expresia obținută la punctul b, dacă ar fi ca tu să joci acest joc, cum ai decide să intri în joc: primul ori al doilea (presupunând, bineînțeles, că ai avea posibilitatea să alegi)?

Răspuns:

a. Alina aruncă moneda în pașii impari. Ea câștigă jocul dacă la pasul $2n + 1$ obține stema și până la pasul respectiv nimeni nu a obținut stema.

Notăm cu A evenimentul ca Alina să câștige jocul și cu A_i evenimentul ca Alina să câștige jocul la a i -a aruncare a banului. Întrucât evenimentele A_i sunt disjuncte ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$) și $A = A_1 \cup A_3 \cup \dots$, conform proprietății de aditivitate numărabilă din definiția funcției de probabilitate rezultă că

$$P(A) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) + \dots$$

Dacă $p = \frac{1}{2}$, probabilitățile corespunzătoare sunt:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(\text{stemă}) = \frac{1}{2} \\ P(A_3) &= (1 - P(\text{stemă})) \cdot (1 - P(\text{stemă})) \cdot P(\text{stemă}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ P(A_5) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot P(\text{stemă}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &\dots \\ P(A_{2i+1}) &= (1 - P(\text{stemă}))^{2i} \cdot P(\text{stemă}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Așadar, pentru orice $p \in (0, 1)$ probabilitatea ca Alina să câștige jocul este $2/3$ (deci de două ori mai mare decât probabilitatea ca Robert să câștige jocul), pur și simplu datorită faptului că ea este prima care dă cu banul. (Avantajul primului jucător!)

b. Dacă $P(\text{stemă}) = p \in (0, 1]$, se urmează același raționament ca mai sus, cu modificarea valorilor $P(A_i)$ astfel:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(\text{stemă}) = p \\ P(A_3) &= (1 - P(\text{stemă})) \cdot (1 - P(\text{stemă})) \cdot P(\text{stemă}) = (1 - p)^2 \cdot p \\ P(A_5) &= (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot P(\text{stemă}) = (1 - p)^4 \cdot p \\ &\dots \\ P(A_{2i+1}) &= (1 - P(\text{stemă}))^{2i} \cdot P(\text{stemă}) = (1 - p)^{2i} \cdot p \end{aligned}$$

Prin urmare, probabilitatea ca Alina să câștige devine:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^{2i} \cdot p = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^{2i} \stackrel{p \neq 0}{=} p \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)^2} = \frac{p}{2p - p^2} = \frac{1}{2 - p}$$

c. Jucătorul care aruncă primul banul are probabilitatea de a câștiga $1/(2-p)$ (calculată mai sus). Cum $p \geq 0$, rezultă că $\frac{1}{2-p} \geq \frac{1}{2}$. Așadar, în cazul în care există posibilitatea de a alege, este de preferat să arunci primul.

3. (Calcul de probabilități condiționale)

CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 1.4

O cutie conține trei carduri. Un card este roșu pe ambele părți, un alt card este verde pe ambele părți iar cel care a rămas este roșu pe o parte și verde pe partea cealaltă. Selectăm în mod aleatoriu un card din această cutie; presupunem că nu-i vedem decât culoarea de pe fața superioară. Dacă această față este verde, care este probabilitatea ca și cealaltă față să fie verde?

Răspuns:

Pentru a rezolva această problemă este foarte util să stabilim mai întâi care sunt elementele ce compun spațiul de extrageri (engl., sample space), Ω . (A se vedea noțiunea introdusă la curs.) Contrar intuiției primare, Ω nu va fi constituit din cele trei carduri, ci din fețele lor, fiindcă ceea ce observăm după o extragere este doar o față a unui card, nu ambele fețe ale cardului extras.

Din punct de vedere formal, vom folosi următoarea *notație* pentru carduri:

$$C_1 = (R1, R2), C_2 = (R3, V4), C_3 = (V5, V6),$$

unde $R1, R2, R3, V4, V5$ și $V6$ desemnează cele 6 fețe ale cardurilor. Așadar, $\Omega = \{R1, R2, R3, V4, V5, V6\}$.

Observație: Am fi putut nota fețele cardurilor folosind pur și simplu numerele $1, \dots, 6$, însă am preferat să însoțim fiecare dintre aceste numere cu litera R sau V care desemnează culoarea feței respective.

După ce am făcut această pregătire, probabilitatea cerută în enunțul problemei se calculează simplu, folosind regula clasică: $p = m/n$, unde m este numărul de cazuri favorabile, iar n este numărul de cazuri posibile.

Cazurile posibile sunt $V4, V5, V6$, iar cazurile favorabile sunt $V5$ și $V6$ deoarece doar pentru ele fața cealaltă a cardului este verde (este vorba de $V6$ și respectiv $V5$). Așadar, probabilitatea cerută este $\frac{2}{3}$.

4. (Calcularea de probabilități elementare și probabilități condiționale)

CMU, 2009 spring, Tom Mitchell, HW2, pr. 1.4

În acest exercițiu vom arăta că probabilitatea unui eveniment se poate schimba dacă știm probabilitatea unui alt eveniment, legat de cel dintâi.

Se aruncă simultan două zaruri. Notăm cu S variabila aleatoare care desemnează suma numerelor rezultate din aruncarea celor două zaruri.

a. Calculați $P(S = 11)$.

b. Dacă știm că S este număr prim, cât devine probabilitatea de mai sus?

Răspuns:

a. Probabilitatea unui eveniment precum cel din enunț este dată de raportul dintre numărul de cazuri favorabile și numărul cazurilor posibile.

La aruncarea simultană a două zaruri, fiecare zar poate cădea pe una din cele 6 fețe, independent de celălalt zar. Prin urmare, există $6 \cdot 6 = 36$ posibilități (cazuri posibile). Pentru a se obține $S = 11$ cele două zaruri trebuie să aibă fie valorile $(5, 6)$, fie $(6, 5)$, deci există 2 posibilități (cazuri favorabile). Prin urmare,

$$P(S = 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

b. Probabilitatea căutată este:

$$P(S = 11 \mid S = \text{prim}) = \frac{P(S = 11 \cap S = \text{prim})}{P(S = \text{prim})} = \frac{P(S = 11)}{P(S = \text{prim})}$$

Trebuie calculată probabilitatea ca S să fie număr prim. Pentru aceasta este necesar numărul de cazuri favorabile, adică numărul cazurilor pentru care $S \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Există următoarele 15 posibilități:

- $S = 2$: $(1, 1)$
- $S = 3$: $(1, 2), (2, 1)$
- $S = 5$: $(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$
- $S = 7$: $(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)$
- $S = 11$: $(5, 6), (6, 5)$

Deci $P(S = \text{prim}) = 15/36$. Prin urmare,

$$P(S = 11 \mid S = \text{prim}) = \frac{2/36}{15/36} = \frac{2}{15}$$

Întrucât $2/15 > 1/18$, putem spune că probabilitatea evenimentului $S = 11$ a crescut după ce am aflat un fapt suplimentar, și anume că suma rezultată la aruncarea celor două zaruri este un număr prim ($S = \text{prim}$).

5. (Evenimente aleatoare independente)

Două evenimente A și B sunt independente statistic dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

a. *CMU, 2009 spring, Tom Mitchell, HW2, pr. 1.2.1*

Arătați că dacă A și B sunt evenimente independente, atunci:

- A și \bar{B} sunt independente;
- \bar{A} și \bar{B} sunt independente.

b. *CMU, 2009 spring, Ziv Bar-Joseph, HW1, pr. 1.1*

Dacă evenimentul A este independent în raport cu el însuși, ce puteți spune despre $P(A)$?

Răspuns:

a. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B})$, deci A și \bar{B} sunt independente. (S-a folosit independența evenimentelor A și B .)

Pentru independența evenimentelor \bar{A} și \bar{B} se procedează analog:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - P(A) \cdot P(\bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot (1 - P(A)) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$, deci \bar{A} și \bar{B} sunt independente. (S-a folosit independența evenimentelor A și \bar{B} demonstrată mai sus.)

b. Condiția de independență a evenimentului A față de el însuși se scrie astfel:

$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \Rightarrow P(A) = [P(A)]^2 \Rightarrow P(A)[P(A) - 1] = 0$$

Ținând cont și de restricția $P(A) \in [0, 1]$, rezultă că $P(A) = 0$ sau $P(A) = 1$. (Atenție: nu rezultă neapărat că $A = \emptyset$ respectiv $A = \Omega$!)

6.

(Formula lui Bayes)

CMU, fall 2001, midterm exam, pr. 5

Se consideră două variabile aleatoare A și B despre care știm următoarele informații:

- a. $P(A | B) = 2/3$
- b. $P(A | B) = 2/3$ și $P(A | \bar{B}) = 1/3$
- c. $P(A | B) = 2/3$, $P(A | \bar{B}) = 1/3$ și $P(B) = 1/3$
- d. $P(A | B) = 2/3$, $P(A | \bar{B}) = 1/3$, $P(B) = 1/3$ și $P(A) = 4/9$.

În care din cele patru cazuri informațiile date sunt suficiente pentru a calcula $P(B | A)$? Există vreun caz în care apar informații superflue (i.e., informații care pot fi deduse din celelalte informații furnizate în cazul respectiv)?

Răspuns:

Conform teoremei lui Bayes, vom avea:

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A | B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A | B) \cdot P(B)}{P(A | B) \cdot P(B) + P(A | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})} \\ &= \frac{P(A | B) \cdot P(B)}{P(A | B) \cdot P(B) + P(A | \bar{B}) \cdot (1 - P(B))} \end{aligned}$$

Devine astfel evident că în cazurile c și d informațiile deținute sunt suficiente, pe când în celelalte două cazuri nu. În cazul d, informația $P(A) = 4/9$ este superfluă.

7.

(Formula lui Bayes)

◦ *CMU, 2008 spring, T. Mitchell, W. Cohen, midterm, pr. 1.5*

Presupunem că, răspunzând la o întrebare cu răspuns de genul adevărat/fals, un student fie cunoaște răspunsul, fie ghicește răspunsul. Probabilitatea de a cunoaște răspunsul este p , iar probabilitatea de a ghici răspunsul este $1 - p$.

Presupunem că probabilitatea de a răspunde corect la întrebare este

1 în cazul în care studentul cunoaște răspunsul
și 0.5 dacă studentul ghicește răspunsul.

Exprimați în funcție de p care este probabilitatea ca studentul examinat să cunoască răspunsul la întrebare, în ipoteza că el a răspuns corect (notație: $P(knew | correct)$).

Răspuns:

Evenimentele de interes în problema dată sunt:

$correct$ = studentul a răspuns corect la întrebare,

$knew$ = studentul cunoaște răspunsul corect

și complementarul acestuia din urmă:

$guess \stackrel{not.}{=} \neg knew$ = studentul ghicește răspunsul.

Aplicând formula lui Bayes obținem:

$$\begin{aligned} P(knew | correct) &= \frac{P(correct | knew) \cdot P(knew)}{P(correct | knew) \cdot P(knew) + P(correct | guess) \cdot P(guess)} \\ &= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + 0.5 \cdot (1 - p)} = \frac{p}{0.5p + 0.5} = \frac{p}{0.5(p + 1)} = \frac{2p}{p + 1} \end{aligned}$$

8.

(Probabilități elementare:
Adevărat sau Fals?)

□ • • CMU, 2016 fall, N. Balcan, M. Gormley, HW1, pr. 6.1.1-4

În cele de mai jos vom nota cu Ω spațiul de eșantionare, iar cu \bar{A} complementul evenimentului A .

Marcați cu *adevărat* sau *fals* fiecare dintre afirmațiile următoare:

a. Pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ astfel încât $P(A) > 0$ și $P(B) > 0$, are loc egalitatea $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

b. Pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ astfel încât $P(B) > 0$, are loc egalitatea $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A|B)$.

c. Pentru orice $A, B, C \subseteq \Omega$ astfel încât $P(B \cup C) > 0$, urmează că $\frac{P(A \cup B \cup C)}{P(B \cup C)} \geq P(A|B \cup C)P(B \cup C)$

d. Pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ astfel încât $P(A) > 0$ și $P(\bar{A}) > 0$, urmează că $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$.

Indicație:

Pentru fiecare afirmație adevărată, faceți demonstrația proprietății respective. Pentru fiecare afirmație falsă, dați fie un contra-exemplu fie o justificare riguroasă.

Răspuns:

a. Adevărat. Demonstrația este imediată.

b. Fals.

Știm că pentru orice $A, B \subseteq \Omega$, are loc egalitatea $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

B). Așadar, egalitatea din enunț ar fi adevărată dacă pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ am avea $P(A \cap B) = P(A|B)$. Însă,

$$P(A \cap B) = P(A|B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) = 1 \text{ sau } P(A \cap B) = 0.$$

Deci egalitatea nu este adevărată pentru orice A și B .

c. Adevărat.

Observăm că dacă se notează $D = B \cup C$, atunci inegalitatea din enunț devine mai ușor de manipulat: $\frac{P(A \cup D)}{P(D)} \geq P(A|D) \cdot P(D)$. Este imediat că ea este

echivalentă cu $\frac{P(A \cup D)}{P(D)} \geq P(A \cap D)$, ceea ce implică $P(A \cup D) \geq P(A \cap D) \cdot P(D)$.

Ultima inegalitate este adevărată fiindcă pe de o parte $P(A \cup D) \geq P(A \cap D)$ și pe de altă parte $P(D) \in [0, 1]$.

d. Fals.

Știm că pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ cu $P(A) > 0$, are loc egalitatea $P(B|A) + P(\bar{B}|A) = 1$. Așadar, egalitatea din enunț ar fi adevărată dacă pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ astfel încât $P(A) > 0$ și $P(\bar{A}) > 0$ am avea $P(B|\bar{A}) = P(\bar{B}|A)$.

Vom construi următorul contra-exemplu: considerăm că la aruncarea unui zar perfect, evenimentul A este apariția unei fețe pare, iar evenimentul B este apariția feței 1. Urmează că

$$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3} \text{ și } P(\bar{B}|A) = 1.$$

Deci egalitatea nu este adevărată pentru orice evenimente A (cu $P(A) > 0$ și $P(\bar{A}) > 0$) și B .

1.2 Probleme propuse

Evenimente aleatoare și formula lui Bayes

39. (Calcul de probabilități elementare)

◦ *CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 1.3*

Doi soldați A și B trag la țintă. Probabilitatea ca soldatul A să greșească ținta este de $1/5$. Probabilitatea ca soldatul B să greșească ținta este de $1/2$. Probabilitatea ca ambii soldați să greșească simultan ținta este de $1/10$.

- Care este probabilitatea ca cel puțin unul din soldați să greșească ținta?
- Care este probabilitatea ca exact unul din cei doi soldați să greșească ținta?

40. (Probabilități condiționale, evenimente aleatoare independente: câteva proprietăți simple)

Fie A și B două evenimente aleatoare.

a. *CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.1*

Arătați că $P(A | A, B) = 1$.

b. ◦ *CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 1.1*

Arătați că dacă $P(A) = 0$ atunci A și B sunt independente.

c. ◦ *CMU, 2008 spring, Eric Xing, HW1, pr. 1.2*

Arătați că dacă $P(B) = 1$ atunci $P(A | B) = P(A)$.

Observație: În general, dacă $P(B) \neq 0$, din $P(A | B) = P(A)$ rezultă imediat $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ceea ce, conform definiției, înseamnă că A și B sunt independente. Din acest motiv, se poate spune că $P(A | B) = P(A)$ este o formă mai „slabă“ (deși, mai aproape de intuiție!) pentru condiția de independență a două evenimente aleatoare.

41. (Legătura dintre forma „slabă“ și forma „tare“ a definiției pentru evenimente aleatoare independente condițional)

CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.2

Folosind doar definiția probabilității condiționale arătați că dacă $P(A | B, C) = P(A | C)$ sau $P(B | A, C) = P(B | C)$ atunci $P(A, B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C)$.

42. (Proprietăți ale funcției de probabilitate)

◦ *CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, midterm, pr. 1.d*

Presupunem că evenimentele B_1, B_2, \dots, B_k formează o *partiție* a spațiului de evenimente Ω . (Aceasta revine la: $\bigcup_{i=1}^k B_i = \Omega$ și $B_i \cap B_j = \emptyset$ pentru orice

$i \neq j$.) Considerăm o funcție de probabilitate P definită pe 2^Ω și un eveniment A pentru care $P(A) > 0$.

Arătați că dacă $P(B_1 | A) < P(B_1)$, atunci $P(B_i | A) > P(B_i)$ pentru cel puțin o valoare a lui i din mulțimea $\{2, 3, \dots, k\}$.

Indicație: Următoarele proprietăți vă pot fi de folos:

- a. $\sum_{i=1}^k P(B_i) = 1$
- b. $\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = P(A)$
- c. $P(B_i | A) \cdot P(A) = P(B_i \cap A)$
- d. $\sum_{i=1}^k P(B_i | A) = 1$
- e. $P(B_i \cap A) + P(B_i \cap \bar{A}) = P(B_i)$.

43.

(Formula lui Bayes)

◦ *CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 4*

Într-o grupă de copii de la o creșă, 30% dintre ei au ochi căprui, 50% au ochi albaștri, iar restul de 20% au ochi de alte culori. Într-o zi, educatoarea organizează cu acești copii un joc. Pentru prima rundă a jocului, ea selecționează 65% dintre copiii cu ochi căprui, 82% dintre copiii cu ochi albaștri și 50% dintre copiii cu ochi de alte culori.

Care este probabilitatea ca un copil ales în mod aleatoriu din această grupă să aibă ochi albaștri, dacă știm că el n-a fost selecționat pentru prima rundă a jocului?

44.

(Formula lui Bayes)

CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.3

Avem două urne. Prima urnă conține 11 bile albe și 4 bile roșii. Cea de-a doua urnă conține 8 bile albe și 5 bile roșii. Se alege în mod aleatoriu cu probabilitate uniformă una din cele două urne. Apoi se extrage o bilă din urna aleasă. Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

45.

(Probabilități elementare:
Adevărat sau Fals?)

* prelucrare de Liviu Ciortuz după

CMU, 2014 fall, William Cohen, HW1, pr. 4.a

CMU, 2014 fall, William Cohen, midterm, pr. 1

Marcați cu *adevărat* sau *fals* fiecare dintre afirmațiile următoare:

- a. $P(A \cup B \cup C) \geq P(A) + P(B) + P(C)$.
- b. $P(A|B, C) = \frac{P(B|A, C) P(A|C)}{P(B|C)}$.

c. $P(A|C) = \sum_{i=1}^n P(A, B_i|C)$, unde $B_i \cap B_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$ și $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ (evenimentul sigur).²³

d. $P(A|C) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i, C) P(B_i|C)$, evenimentele B_i satisfac aceleași proprietăți ca la punctul precedent.

Justificați în mod riguros fiecare răspuns.

Pentru afirmațiile *false*, puteți da un contra-exemplu.

Pentru afirmațiile *adevărate*, exprimați în câteva cuvinte, dacă este posibil, *tipul* proprietății respective.

²³În locul condiției $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ se poate considera fie proprietatea $P(\bigcup_{i=1}^n B_i) = 1$ fie $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$, deși ambele sunt mai laxe (i.e., mai puțin restrictive) decât condiția din enunț.