Setul de probleme 2

soluţiile se primesc

miercuri 4 decembrie între orele 14 şi 16, la cabinetul C-402

27 noiembrie 2013

Problema 1. Un graf $G = (V, E)$ de ordin par se numeşte *critic* dacă nu are cuplaj perfect, dar pentru orice muchie $e \in E(\overline{G})$, graful $G + e$ are cuplaj perfect. De exemplu, grafurile $K_1 \dot\cup K_3$ şi $K_{1,3}$ sunt grafuri critice cu patru vârfuri ($\dot\cup$ notează reuniunea disjunctă a două grafuri).
a) Demonstraţi că singurele grafuri critice de ordin 4 sunt $K_1 \dot\cup K_3$ şi $K_{1,3}$.
b) Determinaţi toate grafurile critice de ordin 10.

Indicaţie. *Se poate folosi teorema lui Tutte.* (**2+2 = 4 puncte**)

Problema 2. În graful conex $G = (V, E)$ se cunoaşte $c(e) \in \mathbf{R}$, costul fiecărei muchii $e \in E$, şi un arbore parţial $T_0 = (V, E_{T_0})$ al său. Se consideră următoarele proceduri:

try$^+(e \in E)$
if $e \notin E_{T_0}$ **then**
{fie C circuitul unic din $T_0 + e$
if $\exists f$ muchie a circuitului C cu $c(e) < c(f)$ **then**
$T_0 \leftarrow (T_0 - f) + e$ }

try$^-(e \in E)$
if $e \in E_{T_0}$
{fie V_1 şi V_2 mulţimile de vârfuri ale componentelor conexe ale lui $T_0 - e$
if $\exists f$ muchie de la V_1 la V_2 cu $c(f) < c(e)$ **then**
$T_0 \leftarrow (T_0 - e) + f$ }.

Presupunem că toate costurile muchiilor sunt distincte şi că T^* este un arbore parţial de cost minim.
a) Demonstraţi că dacă se aplică try^+ pentru o secvenţă de muchii distincte, aranjate crescător după cost şi în care apar toate muchiile lui T^*, atunci arborele iniţial T_0 este transformat în T^*.
b) Demonstraţi că dacă se aplică try^- pentru o secvenţă de muchii distincte, în care apar toate muchiile arborelui iniţial T_0, atunci arborele iniţial T_0 este transformat în T^*. (**2+2 = 4 puncte**)

Problema 3. Fie $\mathcal{C}$ o clasă de grafuri care conţine toate grafurile complete ($\cup_{n\geq 1} K_n \subseteq \mathcal{C}$). Dacă $G = (V, E)$ este un graf cu proprietatea că $G \notin \mathcal{C}$, numim $\mathcal{C}$-*extensie minimală* a lui G orice graf $H = (V, E')$ cu $E \subset E'$ şi $H \in \mathcal{C}$, dar $\forall F = (V, E'')$ graf cu $E \subseteq E'' \subset E'$) este astfel încât $F \notin \mathcal{C}$.

Presupunem că dispunem de un algoritm cu timp de lucru polinomial **Sandw** care, primind la intrare două grafuri $G_1 = (V, E_1)$ şi $G_2 = (V, E_2)$ cu $E_1 \subseteq E_2$, returnează răspunsul **da** şi un graf $G_3 = (V, E_3)$ cu $E_1 \subseteq E_3 \subseteq E_2$ şi $G_3 \in \mathcal{C}$, dacă un astfel de graf G_3 există. Altfel, returnează răspunsul **nu**.

Demonstraţi că se poate folosi acest algoritm pentru a determina în timp polinomial pentru un graf $G = (V, E) \notin \mathcal{C}$ dat o $\mathcal{C}$-extensie minimală a sa.

(**3 puncte**)

Problema 4. Fie $G = (V, E)$ un graf $K_{1,3}$-free. Demonstraţi că există $S \subseteq V$ o mulţime stabilă maximală în raport cu incluziunea cu proprietatea că, pentru orice mulţime de vârfuri $T \subseteq V$ cu proprietatea că $\forall v \in V - T$: $N_G(v) \cap T \neq \emptyset$, avem $|T| \geq |S|$. (**3 puncte**)

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.

2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.

3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.

4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.

5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.