Limbaje Formale, Automate şi Compilatoare

Curs 2

2017-18

Curs 2

Fie L, L_1, L_2 limbaje regulate: există gramaticile G, G_1, G_2 de tip 3 astfel ca $L = L(G), L_1 = L(G_1)$ şi $L_2 = L(G_2)$.

Atunci, următoarele limbaje sunt de asemenea regulate:

1. $L_1 \cup L_2$
2. $L_1 \cdot L_2$
3. L^*
4. L^R
5. $L_1 \cap L_2$
6. $L_1 \setminus L_2$

Închiderea la reununiune

Fie L, L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ si $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3 cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Presupunem $N_1 \cap N2 = \emptyset$ si gramaticile in forma normala.

Închiderea la reuniune: se arata ca $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$:

Gramatica $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\})$ este de tip 3 si genereaza limbajul $L_1 \cup L_2$

Închiderea la operaţia de produs

Fie L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ si $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3 cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Presupunem $N_1 \cap N2 = \emptyset$ si gramaticile in forma normala.

Gramatica $G = (N_1 \cup N_2, T_1 \cup T_2, S_1, P)$ unde P consta din:

- regulile de forma $A \rightarrow aB$ din P_1
- reguli $A \rightarrow aS_2$ pentru orice regula de forma $A \rightarrow a$ din P_1
- toate regulile din P_2

este de tip 3 si genereaza limbajul L_1L_2.

Închiderea la operaţia de iteraţie

Fie L limbaj de tip 3 (regulat).

Fie $G = (N, T, S, P)$ de tip 3, în formă normală, care genereaza L ($L = L(G)$).

Presupunem ca simbolul de start S nu apare in partea dreaptă a vreunei reguli.

Gramatica $G' = (N, T, S, P')$ unde P' consta din

- reguli $A \rightarrow aB$ din P
- reguli $A \rightarrow aS$, pentru orice regula $A \rightarrow a$ din P
- regula $S \rightarrow \epsilon$

este de tip 3 si generează L^*

Închiderea la intersecţie

Fie L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ si $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3, în formă normală, cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Gramatica $G = (N_1 \times N_2, T_1 \cap T_2, (S_1, S_2), P)$, unde P constă din:

- $(S_1, S_2) \rightarrow \epsilon$, dacă $S_1 \rightarrow \epsilon \in P_1$ şi $S_2 \rightarrow \epsilon \in P_2$
- $(A_1, B_1) \rightarrow a(A_2, B_2)$, dacă $A_1 \rightarrow aA_2 \in P_1$ şi $B_1 \rightarrow aB_2 \in P_2$
- $(A_1, A_2) \rightarrow a$, dacă $A_1 \rightarrow a \in P_1$ şi $A_2 \rightarrow a \in P_2$

este de tip 3 şi generează limbajul $L_1 \cap L_2$

Închiderea la operaţia de oglindire

Fie L limbaj de tip 3 (regulat).

Fie $G = (N, T, S, P)$ de tip 3, în formă normală, care generează L ($L = L(G)$)

Presupunem ca simbolul de start S nu apare in partea dreaptă a vreunei reguli.

Gramatica $G' = (N, T, S', P')$ unde P' constă din

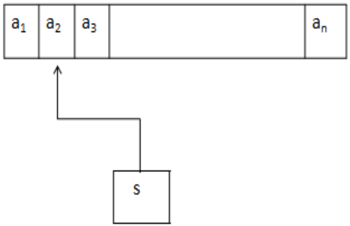
- reguli $S' \rightarrow aA$, pentru orice regulă $A \rightarrow a$ din P
- reguli $B \rightarrow aA$ pentru orice regulă $A \rightarrow aB$ din P
- regula $S \rightarrow \epsilon$
- regula $S' \rightarrow a$, pentru orice regulă $S \rightarrow a$ din P ($a \in T \cup \{\epsilon\}$)

este de tip 3 şi generează L^R

Curs 2

Automate finite

- Mecanism de recunoaştere (acceptare) pentru limbaje
- Limbaje de tip 3
- Mulţime finită de stări



Automate finite

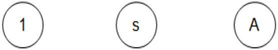
Definiţie 1

Un automat finit determinist este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$*, unde:*

- *Q şi Σ sunt mulţimi finite, nevide, numite mulţimea stărilor respectiv alfabetul de intrare*
- *$q_0 \in Q$ este starea iniţială*
- *$F \subseteq Q$ este mulţimea stărilor finale*
- *δ este o funcţie ,* $\delta : Q \times \Sigma \to Q$*, numită funcţia de tranziţie*

Reprezentare prin diagrame(grafuri) de tranziţie

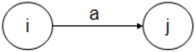
Stări:



Stare iniţială:

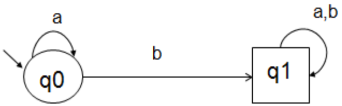
Stări finale:

Funcţia de tranziţie:



Reprezentare prin matricea de tranziţie

$$A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$



Intrare / Stare δ	a	b
q0	q0	q1
q1	q1	q1

Limbajul acceptat

- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$
  1. $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q, \forall q \in Q$;
  2. $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a)), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma$.

- **Observaţii:**
  - $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$
  - $\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v), \forall q \in Q, \forall u, v \in \Sigma^*$

Limbajul acceptat

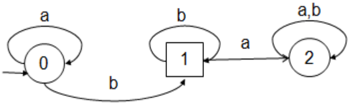
Definiţie 2

Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul $A = (Q, \delta, \Sigma, q_0, F)$ este mulţimea :

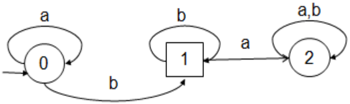
$$L(A) = \{w | w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w, automatul (pornind din starea iniţială q_0) ajunge într-o stare finală.
- $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$. Din acest motiv, $\hat{\delta}$ va fi notată de asemenea cu δ.
- Două automate A şi A' sunt echivalente, dacă $L(A) = L(A')$

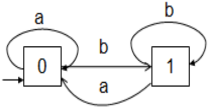
Exemple



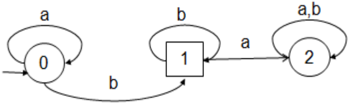
Exemple



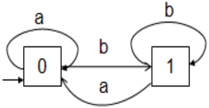
$$L(A) = \{a^n b^m | n \geq 0, m \geq 1\}$$



Exemple



$$L(A) = \{a^n b^m | n \geq 0, m \geq 1\}$$



$$L(A) = \{a, b\}^*$$

Exemple

Automate deterministe pentru:

- $L = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{ conţine un număr par de } 0\}$
- $L = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{ se termina cu } 11\}$

Curs 2

Automate finite nedeterministe

Definiţie 3

Un automat finit nedeterminist este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$*, unde:*

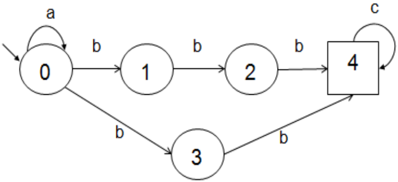
- Q, Σ, q_0 *şi* F *sunt definite ca în cazul automatelor finite deterministe*
- δ *este o funcţie ,* $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$*, numită funcţia de tranziţie*

- **Observaţie:**

  A este automat determinist, dacă

$$|\delta(q, a)| = 1, \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$$

Exemple



Intrare / Stare	a	b	c
0	{0}	{1,3}	Φ
1	Φ	{2}	Φ
2	Φ	{4}	Φ
3	Φ	{4}	Φ
4	Φ	Φ	{4}

Extensia lui δ la cuvinte

- Fie S mulţime de stări. Notăm $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$.
- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$
  1. $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}, \forall q \in Q$;
  2. $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a)$, $\forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma$.

Extensia lui δ la cuvinte

- Fie S mulţime de stări. Notăm $\delta(S,a) = \bigcup_{q\in S}\delta(q,a)$.
- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$
  1. $\hat{\delta}(q,\epsilon) = \{q\}, \forall q \in Q;$
  2. $\hat{\delta}(q,ua) = \delta(\hat{\delta}(q,u),a), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma$.

- **Observaţii:**
  - $\hat{\delta}(q,a) = \delta(q,a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$
  - $\hat{\delta}(q,uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q,u),v), \forall q \in Q, \forall u,v \in \Sigma^*$.

Limbajul acceptat

Definiţie 4

Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul finit nedeterminist $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *este mulţimea :*

$$L(A) = \{w | w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w, automatul (pornind din starea iniţială q_0) poate să ajungă într-o stare finală.

Determinism = Nedeterminism

Teorema 1

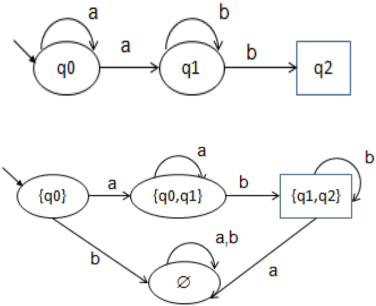
Pentru orice automat nedeterminist A, există unul determinist A′ echivalent.

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$ $(= \delta(S, a)), \forall S \in 2^Q$

- Pentru aplicaţii se construiesc doar stările accesibile din starea iniţială

Exemplu



Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) = \delta(S, a)$

Au loc:

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) = \delta(S, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w) = \delta(S, w), \forall w \in \Sigma^*$

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) = \delta(S, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w) = \delta(S, w), \forall w \in \Sigma^*$
- $\delta'(Q_0, w) = \delta'(\{q_0\}, w) = \delta(q0, w)$

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) = \delta(S, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w) = \delta(S, w), \forall w \in \Sigma^*$
- $\delta'(Q_0, w) = \delta'(\{q_0\}, w) = \delta(q0, w)$
- $w \in L(A') \Leftrightarrow$
  $\delta'(Q_0, w) \in F' \Leftrightarrow \delta'(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$
  $\Leftrightarrow w \in L(A)$

Curs 2

Automate finite cu ϵ-tranziţii

Definiţie 5

Un automat finit cu ϵ-tranziţii este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, unde:

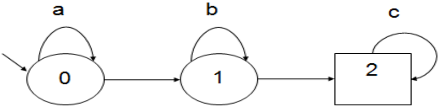
- *Q, Σ, q_0 şi F sunt definite ca în cazul automatelor finite deterministe*
- *δ este o funcţie , $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$, numită funcţia de tranziţie*

Observaţie:

- A este automat nedeterminist, dacă $\delta(q, \epsilon) = \emptyset, \forall q \in Q$
- A este automat determinist, dacă, în plus:

$$|\delta(q, a)| = 1, \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$$

Exemplu



Intrare / Stare	a	b	c	ε
0	{0}	Φ	Φ	{1}
1	Φ	{1}	Φ	{2}
2	Φ	Φ	{2}	Φ