Cursul 3

Şiruri de elemente dintr-un inel (corp) ordonat. Construcţia corpului $\mathbb{R}$. Şiruri de numere reale.

În ideea construirii lui $\mathbb{R}$ prin metoda lui Cantor, prezentăm aici, mai întâi, noţiunea de şir dintr-un inel sau corp ordonat oarecare, în mod special dintr-un domeniu de integritate sau un corp comutativ cu ordonare. După construcţia corpului $\mathbb{R}$, expunem, prin particularizare, câteva adevăruri de bază cu privire la şiruri numerice reale.

Şiruri de elemente dintr-un inel (corp) ordonat

Relaţiile de ordine de pe inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ şi corpul $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ se înscriu într-un context mai general, relativ la ordinea (în abstract) pe un inel, domeniu de integritate sau corp.

Definiţia 3.1 *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Prin* ***ordonare*** *pe A înţelegem o submulţime nevidă P a lui A, astfel încât $0 \notin P$ şi sunt satisfăcute condiţiile:*

O_1) $\forall\, x \in A$, avem $x \in P$ sau $x = 0$ (elementul neutru în raport cu "+") sau $(-x) \in P$ (opusul lui x);

O_2) $\forall\, x, y \in P$, avem $x + y \in P$ şi $x \cdot y \in P$.

P se numeşte (în acest context) ***mulţimea elementelor pozitive*** ale lui A (sau ***corpul pozitiv*** al lui A). Despre A se spune că este ***inel ordonat de*** P. Un element $x \in P \subseteq A$ se numeşte ***pozitiv***, iar un element $x \in A \setminus (P \cup \{0\})$ se numeşte ***negativ***.

Observaţii:

1) $\mathbb{N}^*$ este o ordonare pe $\mathbb{Z}$.

2) Când A este un inel unitar şi nenul (având elementul neutru faţă de "·", notat cu 1, diferit de 0), iar P este o ordonare pe A, deducem că, întrucât $1 \cdot 1 = 1 = (-1) \cdot (-1)$, avem $1 \in P$. În plus, ţinând seama de O_2), vedem că $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-ori}} \in P$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

3) Dacă $x, y \in A$ sunt negative (în sensul Definiţiei 3.1), atunci $x \cdot y = (-x) \cdot (-y) \in P$, pentru că $(-x) \in P$ şi $(-y) \in P$, iar P satisface O_2).

   De asemenea, dacă $x \in A$ este negativ, iar $y \in A$ este pozitiv (adică $y \in P$), atunci $x \cdot y$ este negativ, deoarece $x \cdot y = (-(-x)) \cdot y = -((-x) \cdot y) \notin P$.

4) Când $(A, +, \cdot)$ este corp, inversul oricărui element dintr-o ordonare P pe A este tot în P, deoarece, $\forall\, x \in P$, avem $x \cdot x^{-1} = 1 \in P$.

Definiţia 3.2 *Fie $(A, +, \cdot)$ şi $(A', +', \cdot')$ două inele ordonate de $P \subseteq A$ şi respectiv $P' \subseteq A'$. O funcţie $f : A \to A'$ se numeşte* ***izotonică*** *dacă "păstrează ordinea" (de la A la A'), adică dacă, pentru orice $x \in P$, avem $f(x) \in P'$.*

Definiţia 3.3 *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel ordonat de o submulţime a sa, nevidă, P. Se spune că un element $x \in A$* ***este mai mic decât un altul****, $y \in A$,* ***în sensul lui*** *P, şi se scrie $x <_P y$ (sau, când nu există posibilitatea vreunei confuzii, pur şi simplu $x < y$) dacă şi numai dacă $y + (-x) \in P$. În acelaşi timp, se spune că y este* ***mai mare (în sensul lui*** *P***) decât*** *x.*

În virtutea acestei definiţii, un element x al lui A este P-pozitiv (adică $x \in P$) dacă $0 <_P x$. De asemenea, x din A este P-negativ, dacă $(-x)$ este P-pozitiv. Pentru x şi y din A, prin $x \leq_P y$ vom înţelege una din situaţiile $x <_P y$ sau $x = y$.

Propoziţia 3.1 *Fie $(A, +, \cdot, <_P)$ un inel ordonat. Atunci:*

i) $\forall\, x, y, z \in A$, *cu* $x <_P y$ *şi* $y <_P z \Longrightarrow x <_P z$;

ii) $\forall\, x, y, z \in A$, *cu* $x <_P y$ *şi* $0 <_P z \Longrightarrow x \cdot z <_P y \cdot z$;

iii) $\forall\, x, y \in A$, *cu* $x <_P y \Longrightarrow x + z <_P y + z$, $\forall\, z \in A$.

Dacă $(A, +, \cdot, <_P)$ este un corp ordonat, atunci, în plus, avem:

iv) $0 <_P x$, $0 <_P y$ *şi* $x <_P y \Longrightarrow y^{-1} <_P x^{-1}$.

Propoziţia 3.2 *Dacă $(A, +, \cdot, <_P)$ este un domeniu de integritate (adică un inel comutativ, unitar şi fără divizori ai lui zero), ordonat de $P \subseteq A$, K este corpul său total de fracţii, iar P_K este mulţimea $\{a \cdot b^{-1} \mid\ 0 <_P a, 0 <_P b\}$, atunci P_K este o ordonare pe K.*

Demonstraţie: Observăm că, pentru orice $0 \neq x = a \cdot b^{-1}$ (convenţional, $\frac{a}{b}$) din K, putem presupune că $0 <_P b$ (adică $b \in P$), întrucât $\frac{a}{b} = \frac{(-a)}{(-b)}$. Când $0 <_P a$, atunci, cum $0 <_P b$, avem $x = \frac{a}{b} \in P_K$. Dacă $0 <_P (-a)$, atunci $(-x) \in P_K$.

Este evident că $0 \notin P_K$ şi că, neputând avea simultan x şi $(-x)$ (ca elemente ale lui K) în P_K (căci, dacă ar fi aşa, atunci $x = \frac{a}{b}$, iar $-x = \frac{c}{d}$, cu $0 <_P a, b, c, d$ şi deci am avea $-\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, adică $-a \cdot d = c \cdot b \in P$, ceea ce ar fi absurd), se poate spune că P_K satisface O_1) din Definiţia 3.1.

De asemenea, P_K satisface şi O_2) din aceeaşi definiţie. Într-adevăr, pentru orice $x = \frac{a}{b}$ şi $y = \frac{c}{d}$ (cu a, b, c, d P-pozitive), avem $a \cdot c$ şi $b \cdot d$ P-pozitive, adică $x \cdot y = \frac{ac}{bd} \in P_K$. Totodată, $x + y = \frac{ad+bc}{bd} \in P_K$, căci $0 <_P ad + bc$ şi $0 <_P bd$.

În concluzie, P_K este o ordonare pe K. ◀

Definiţia 3.4 *Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat şi $x \in A$. Se numeşte **valoarea absolută** a lui x (sau **modulul** lui x) şi se notează cu $|x|$, acel element din A dat prin*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 < x \text{ (adică } x \in P) \text{ sau } x = 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \text{ (adică } x \notin P). \end{cases}.$$

Propoziţia 3.3 *Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat. Atunci $|x|$ este unicul element, y, din A, astfel încât $0 \leq y$ şi $y \cdot y = x \cdot x$. Totodată, $y = |x| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$. În plus, avem:*

j) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$, $\forall\, u, v \in A$ *şi*

jj) $|u + v| \leqslant |u| + |v|$, $\forall\, u, v \in A$.

Simplă fiind, demonstraţia acestei propoziţii, la fel ca aceea a Propoziţiei 3.1, este lăsată pe seama tratării ei, ca un exerciţiu de soluţionat, de către destinatarii acestor note de curs.

Teorema 3.1 *Fie $(K, +, \cdot, <)$ un corp ordonat şi corpul $(Q, +, \cdot)$ al numerelor raţionale, ordonat în raport cu submulţimea sa $\mathbb{Q}_+^* = \left\{\frac{a}{b} \mid\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$. Există atunci un monomorfism de corpuri, unic şi izotonic, de la $\mathbb{Q}$ la K.*

Demonstraţie: Fie 1_K elementul neutru faţă de înmulţirea din K şi $f : \mathbb{Q} \to K$, funcţia definită prin
$$f(x) = f(a) \cdot (b \cdot 1_K)^{-1},\ \forall\, x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\ (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*),$$
unde prin $b \cdot 1_K$ înţelegem $\underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{\text{de } b \text{ ori}}$, iar $f(a)$ înseamnă $a \cdot 1_K$, dacă $a \in \mathbb{N}^*$, $f(a) = 0$, dacă $a = 0$ şi $f(a) = (-a) \cdot 1_K$, dacă $a \in (-\mathbb{N}^*)$. Se verifică lesne că f este un morfism injectiv de corpuri, de la $\mathbb{Q}$ la K, bine determinat prin modul în care este definit. În plus, $\forall\, x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ (cu $a, c \in \mathbb{Z}$ şi $b, d \in \mathbb{N}^*$), aşa încât $x \leq y$ (adică $ad \leq bc$), avem $(bc - ad) \cdot 1_K \geq 0$, ceea ce înseamnă că $a \cdot (b \cdot 1_K)^{-1} \leq c \cdot (d \cdot 1_K)^{-1}$, adică $f(x) \leq f(y)$, când a şi $c \in \mathbb{N}$. La fel şi în celelalte cazuri. Deci f este izotonică, potrivit Definiţiei 3.2. ◀

Definiţia 3.5 *i) Un inel $(A, +\cdot, <)$, ordonat şi cu unitate (în raport cu "$\cdot$"), se numeşte **inel arhimedian** dacă, pentru orice pereche de elemente pozitive x, y din A, există un număr natural n astfel încât $y < n \cdot x$ (unde $n \cdot x$ înseamnă $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n-\text{ ori}}$).*

*ii) Un **corp** ordonat se numeşte **arhimedian** dacă, privit ca inel, este un inel arhimedian.*

Observaţie. În situaţia ii) din cadrul Definiţiei 3.5, întrucât $y < nx$ echivalează cu $y \cdot x^{-1} < n \cdot 1_K$, unde 1_K este unitatea corpului K în cauză, putem spune că acel corp ordonat K se numeşte arhimedian dacă, pentru orice $u \in K$, există $n \in \mathbb{N}$, aşa încât $u < n \cdot 1_K$.

Definiţia 3.6 *Fie B o mulţime nevidă. Se numeşte **şir de elemente din** B o funcţie h definită pe $\mathbb{N}$ şi cu valori în B.*

Se notează cu x_n valoarea funcţiei h în punctul $n \in \mathbb{N}$ şi se numeşte termen general al şirului $h : \mathbb{N} \to B$. De regulă, în loc de $h : \mathbb{N} \to B$, şirul se notează prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = h(n)$ este termenul general al respectivului şir. Mulţimea termenilor şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ se notează, uzual, cu $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiţia 3.7 *Fie $(A, +, \cdot, <)$ un inel ordonat. Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ se numeşte **majorat** (respectiv **minorat**) dacă $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime majorată (respectiv minorată). Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ se numeşte **mărginit** dacă este simultan majorat şi minorat, adică dacă există a şi b din A, astfel încât $a \leq x_n \leq b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dacă nu este mărginit , şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ se numeşte **nemărginit**.*

Definiţia 3.8 *Un şir $h : \mathbb{N} \to A$ de elemente ale unui inel ordonat $(A, +, \cdot, <)$ se numeşte **monoton** dacă h sau $-h$ este o funcţie izotonică. Şirul $(h(n))_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **crescător** dacă h este izotonică şi respectiv **descrescător** când $-h$ este o funcţie izotonică.*

Definiţia 3.9 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ un şir cu elemente dintr-o mulţime nevidă B şi $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ un şir crescător strict (în sensul ordonării induse de $\mathbb{N}^*$ pe $\mathbb{N}$). Şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B$ se numeşte atunci **subşir** al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definiţia 3.10 *Fie $(K, +, \cdot, <)$ un corp ordonat (în sensul Definiţiei 3.1). Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ se numeşte convergent (în K) dacă există un element $x \in K$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε, aşa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_\varepsilon$, să avem:*
$$|x_n - x| < \varepsilon.$$
*În acest context, spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, numindu-l pe x **limita şirului** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Propoziţia 3.4 *Limita unui şir convergent de elemente dintr-un corp ordonat este unică.*

Demonstraţie: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ un şir presupus a fi convergent la două elemente, x şi y, din corpul ordonat K. Atunci, în conformitate cu Definiţia 3.10, $\forall\, \varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ şi $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $|x_n - y| < \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n'_\varepsilon$. În consecinţă, $\forall\, \varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există $n''_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$ încât avem:

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

De aici, rezultă că $|x - y| = 0_K$, adică $x = y$. Altfel, dacă $|x - y| > 0$, pentru $\varepsilon = |x - y| \cdot \lambda$, cu $0 < \lambda < (2 \cdot 1_k)^{-1}$ am avea

$$|x - y| < (2\lambda)|x - y|,$$

de unde $1_K < 2\lambda < 2(2 \cdot 1_K)^{-1} = 1_K$ (absurd). ◀

Definiţia 3.11 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente dintr-un corp ordonat K se numeşte* ***şir Cauchy*** *(sau* ***fundamental****) dacă pentru orice $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_\varepsilon.$$

Propoziţia 3.5 *Orice şir convergent dintr-un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$ este şir Cauchy.*

Demonstraţie: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ un şir convergent, cu limita $x \in K$. Atunci, $\forall\, \varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, cu n şi $m \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ceea ce ne dă dreptul să afirmăm că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy.

Observaţie. Reciproca afirmaţiei din Propoziţia 3.5 nu are loc decât în anumite cazuri, nu pentru orice corp ordonat K. Astfel, în situaţia în care K este corpul numerelor raţionale $\mathbb{Q}$, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$, definit recurent prin relaţia

$$x_{n+1} = \frac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

şi cu $x_0 = 1$, este şir Cauchy, fiind unul cu limită (deoarece este crescător şi mărginit), dar nu are limită în $\mathbb{Q}$. Deci nu este convergent în $(\mathbb{Q})$.

Valabilitatea reciprocei Propoziţiei 3.5 este legată de noţiunea de completitudine a corpului K, în sensul următoarei definiţii. ◀

Definiţia 3.12 *Un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$, în care orice şir Cauchy de elemente din K este convergent la un element din K, se numeşte* ***complet****.*

În virtutea observaţiei de mai sus, putem afirma că $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ nu este un corp ordonat complet. Vom vedea că $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ este un corp ordonat complet. Acest rezultat se bazează pe faptul că este adevărat următorul cuplu de afirmaţii din enunţul propoziţiei ce urmează.

Propoziţia 3.6 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir Cauchy dintr-un corp ordonat $(K, +, \cdot, <)$. Atunci:*

i) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir mărginit;*

ii) *în situaţia în care $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent la un element x din K, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la x.*

Demonstraţie: i) Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy din K, pentru $\varepsilon = 1_K$, va exista un număr natural n_1 aşa încât, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n_1$, avem $|x_n - x_m| < 1_K$. Luând $m = n_1$, deducem de aici că $|x_n - x_{n_1}| < 1_K$, $\forall\, n \geq n_1, n \in \mathbb{N}$. Mai mult, rezultă că $|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1_K + |x_{n_1}|$, $\forall\, n \geq n_1$. Astfel, pentru $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1_K + |x_{n_1}|\}$, găsim:

$$|x_n| \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

ii) Deoarece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy, rezultă că, pentru orice $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,\ \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_\varepsilon$$

În acelaşi timp, pentru că subşirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent la un element x din K, reiese că, pentru orice $\varepsilon \in K$,$\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq k_\varepsilon$$

Aşadar, luând în continuare $n'_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, avem

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

pentru orice $n \geq n'_\varepsilon$, când $k \geq n'_\varepsilon$ (ceea ce implică $n_k \geq n'_\varepsilon$). ◀

Observaţie. În cazul în care K este $\mathbb{R}$ (corpul ordonat al numerelor reale), Propoziţia 3.6, în asociere cu teorema lui Cesàro, potrivit căreia orice şir mărginit de numere reale are cel puţin un subşir convergent, ne conduce la concluzia de completitudine a lui $\mathbb{R}$ (în sensul Definiţiei 3.12). Ţinând seama şi de Propoziţia 3.5, putem afirma că, ***în*** $\mathbb{R}$***, un şir*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy***.

Construcţia corpului numerelor reale cu ajutorul şirurilor Cauchy de numere raţionale

Fie $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ corpul ordonat al numerelor raţionale şi $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ mulţimea tuturor şirurilor Cauchy cu elemente din $\mathbb{Q}$. Pe lângă faptul că, în acest caz particular (în care corpul K este $\mathbb{Q}$), rezultatele prezentate până aici sunt aplicabile, despre $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ vedem că este o mulţime care poate fi structurată algebric ca un inel unitar comutativ.

Propoziţia 3.7 *Mulţimea* $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$*, înzestrată cu operaţiile de adunare şi de înmulţire a două şiruri, este un inel unitar, comutativ.*

Demonstraţie: Pentru oricare două elemente din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, $\alpha = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\beta = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vedem, pentru început, că $\alpha + \beta = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\alpha \cdot \beta = (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt tot din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Aceasta întrucât, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}^*_+$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ şi $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n'_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, iar, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n''_\varepsilon$, avem $|y_m - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Deci, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\} = n_\varepsilon$, avem

$$|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

şi

$$|x_m y_m - x_n y_n| \leq |y_m(x_m - x_n) + x_n(y_m - y_n)| \leq |y_m||x_m - x_n| + |x_n|\,|y_m - y_n| \leq M_1\frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2\frac{\varepsilon}{2M_2} = \varepsilon,$$

dacă ţinem seama aici de Propoziţia 3.6 i). În consecinţă, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, avem $\alpha + \beta \in \mathcal{C}(Q)$ şi $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{C}(Q)$. Evident, operaţiile de adunare şi înmulţire în $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ sunt asociative şi comutative, pe baza asociativităţii şi comutativităţii operaţiilor de adunare şi înmulţire în $\mathbb{Q}$. În plus, este uşor de văzut că şirurile constante $\overline{0} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ şi $\overline{1} = (1)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ sunt şiruri Cauchy şi constituie elementul 0 şi respectiv 1 din $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. În fine, se vede că operaţia de înmulţire este distributivă faţă de adunarea pe $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Astfel, rezultă că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ este un inel comutativ şi unitar. ◀

Se ia acum în consideraţie mulţimea $\mathcal{N}(\mathbb{Q}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$, în legătură cu care se poate constata că $(\mathcal{N}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ este un inel în sine, subinel al lui $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$.

În plus, se poate deduce că, $\forall\, \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, există $a \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $n_a \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_a$, să avem $|a_n| \geq a$. Dacă, prin reducere la absurd, nu ar fi aşa, atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, ar exista o infinitate de numere naturale $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ astfel încât $|a_{n_i}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$. Cum $\alpha \in \mathcal{C}(Q)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, cu $n, m \geq n_\varepsilon$. Atunci, pentru $m = n_i \geq n_\varepsilon$, am avea:

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_\varepsilon.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, adică $\alpha \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, în contradicţie cu faptul că $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$.

Fie acum, în $\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, relaţia binară "$\sim$", definită prin: $\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$. Se poate vedea, fără prea mare dificultate, că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Astfel, se poate vorbi despre mulţimea cât $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$. Înzestrând această mulţime cu operaţiile de adunare şi de înmulţire a claselor de echivalenţă corespunzătoare, constatăm că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim, +, \cdot)$ este un corp comutativ şi unitar. Într-adevăr, mai întâi, vedem că, în raport cu operaţiile "$+$" şi "$\cdot$", definite prin $]\alpha[\ +]\beta[=]\alpha+\beta[$ şi respectiv $]\alpha[\ \cdot]\beta[=]\alpha\cdot\beta[$, $\forall]\alpha[,]\beta[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$, $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim, +, \cdot)$ este un inel unitar, comutativ. În plus, $\forall\ ]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$, $\exists\ ]\beta[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$ aşa încât $]\alpha[\ \cdot]\beta[=]\overline{1}[$. Aceasta întrucât, după cum am constatat deja, $\forall\, \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, există $a \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $n_a \in \mathbb{N}$ aşa încât $|a_n| \geq a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_a$. Se ia atunci în consideraţie $\beta = \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq n_a}$ şi se vede că $\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, întrucât $\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_m}\right| = \dfrac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|} \leq \dfrac{1}{a^2} \cdot a^2\varepsilon = \varepsilon$, $\forall\, n, m \geq n_a$. Totodată, avem $a_n \cdot \dfrac{1}{a_n} = 1$, $\forall\, n \geq n_a$, ceea ce înseamnă că $\alpha \cdot \beta - 1 \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, adică $]\alpha[\ \cdot]\beta[= 1$ în $\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$. Drept urmare, putem conchide că $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Apelând acum la funcţia $i_\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$, definită prin $i_\mathbb{Q}(a) =](a, a, \ldots, a, \ldots)[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$, $\forall\, a \in \mathbb{Q}$, vedem lesne că $i_\mathbb{Q}$ este un morfism injectiv de corpuri. În virtutea sa, îl putem privi pe $\mathbb{Q}$ ca pe un subcorp al corpului $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$. Cum mulţimea $\tilde{P} = \{]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim \mid \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{Q}), \exists\, a \in \mathbb{Q}_+^*,$ şi $n_a \in \mathbb{N}$, încât $a_n \geq a, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_a\}$ constituie o ordonare pentru $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$ (în sensul Definiţiei 3.1), se poate vorbi de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim$ ca despre o mulţime ordonată în raport cu relaţia de ordine $'' <''$, definită prin : $]\alpha[<]\beta[\Leftrightarrow]\beta[-]\alpha[\in \tilde{P}$.

Desemnând pe $(\mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim, +, \cdot, <)$ ca fiind, prin definiţie, corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, vedem că, prin teorema lui Malţev, $\mathbb{R}$ este unic până la un izomorfism de corpuri comutative şi ordonate. Totodată, acest $\mathbb{R}$ satisface, cu siguranţă, axiomele AR1 - AR14 din Definiţia 2.18. În ceea ce priveşte axioma AR15, se poate vedea că, prin construcţia de faţă, $\mathbb{R}$ se arată a fi un corp arhimedian. Într-adevăr, pentru orice $r =]\alpha[\in \mathcal{C}(\mathbb{Q})/_\sim \equiv \mathbb{R}$, există $m \in \mathbb{N}$ aşa încât $]\alpha[\leq]\overline{m}[=](m, m, \ldots, m, \ldots)[$. Aceasta întrucât, potrivit Propoziţiei 3.6, i), şirul $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ este mărginit şi, aşadar, există $M \in \mathbb{Q}_+^*$ aşa încât $|a_n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Se poate lua atunci $m = [M] + 1$, unde $[M]$este partea întreagă a lui M. Amintindu-ne acum că $\mathbb{R}$ este un corp complet (în sensul Definiţiei 3.12), se poate conta (în virtutea Propoziţiei 3.6, ii) şi a deja menţionatei teoreme a lui Cesàro) pe faptul că $\mathbb{R}$ este un corp arhimedian complet. Finalmente, prin aplicarea teoremei care stipulează că, ***într-un corp arhimedian complet, orice mulţime nevidă şi majorată a respectivului corp are margine superioară care aparţine corpului în cauză***, putem spune că $\mathbb{R}$, realizat prin procedeul expus mai sus, satisface şi axioma AR15 din cadrul Definiţiei 2.18. Prin urmare, un astfel de $\mathbb{R}$ îşi merită denumirea conferită de respectiva definiţie.

În ceea ce priveşte demonstraţia teoremei al cărei enunţ este scos în evidenţă imediat mai sus, aceasta decurge după cum arătăm în continuare.

Fie K un corp arhimedian complet şi $S \subseteq K$ o submulţime nevidă şi majorată a sa. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$(arbitrar fixat), fie $T_n = \{y \in K \mid n \cdot x \leq y, \forall x \in S\}$. Mulţimea T_n este nevidă, întrucât, dacă $b \in K$ este un majorant al lui S, atunci orice element $y \in K$, pentru care $n \cdot b \leq y$, aparţine lui T_n. De asemenea T_n are majoranţi de forma $n \cdot x$, cu $x \in S$. Luăm atunci $y_n \in T_n$ pentru care există $x_n \in S$, aşa încât $y_n - 1_K < n \cdot x_n \leq y_n$. Altfel spus: $\dfrac{y_n}{n} - \dfrac{1}{n} < x_n \leq \dfrac{y_n}{n}$. Notând cu z_n elementul $\dfrac{y_n}{n}$din K, constatăm că şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir Cauchy în K. În acest sens, vedem că $|z_n - z_m| < \dfrac{1}{m}$, întrucât, dacă $z_n \leq z_m$, atunci $z_m - \dfrac{1}{m} \leq z_n \leq z_m$. Dacă nu ar fi aşa, am avea $z_n \leq z_m - \dfrac{1}{m}$şi deci $z_m - \dfrac{1}{m} \in K$ ar fi majorant al lui S, ceea ce ar fi absurd, deoarece x_n $(\in S)$ este mai mare decât $z_m - \dfrac{1}{m}$. Când $z_m < z_n$, am deduce că $z_n - z_m = |z_n - z_m| < \dfrac{1}{m}$, întrucât, altfel, am avea $z_n - z_m \geq \dfrac{1}{m}$, adică $z_n - \dfrac{1}{m}$ ar fi majorant al lui S şi deci, pentru $x_n = \dfrac{y_n}{n} = z_n > z_n - \dfrac{1}{n}$, ar rezulta că $z_n - \dfrac{1}{m} \leq z_n - \dfrac{1}{n}$, adică $m \leq n$, indiferent de cum sunt m şi n din $\mathbb{N}$, ceea ce ar fi absurd. Ca atare, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy din K. Cum, prin ipoteză, K este complet (în sensul Definiţiei 3.12), se poate spune că $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir convergent. Fie $w = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \in K$.

Să arătăm acum că w este un majorant al lui S. Presupunând, prin absurd, că nu-i aşa, ar exista $x \in S$ astfel încât $w < x$. Atunci, deoarece $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la w, pentru $\varepsilon = \dfrac{x-w}{2}$, există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât, penru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_\varepsilon$, să avem $|z_n - w| \leq \dfrac{x-w}{2}$. În consecinţă, rezultă că, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$x - z_n = x - w + w - z_n \geq x - w - |z_n - w| \geq x - w - \frac{x-w}{2} = \frac{x-w}{2} > 0.$$

Deci $x > z_n$, adică $x > \dfrac{y_n}{n}$ sau, altfel, $n \cdot x > y_n$, în contradicţie cu faptul că $y_n \in T_n$. Deci w este într-adevăr un majorant al lui S. Mai mult chiar, w este $\sup S$, căci altfel, ar exista u, majorant al lui S, încât $u < w$. Atunci, reinterpretând faptul că şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la w, am avea, pentru $\varepsilon = \dfrac{w-u}{4}$, existenţa unui $n_0 \in \mathbb{N}$, aşa încât $|z_n - w| \leq \dfrac{w-u}{4}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. În consecinţă, am avea:

$$z_n - u = z_n - w + w - u \geq w - u - |z_n - w| \geq \frac{3(w-u)}{4} > 0,$$

ceea ce ar implica $z_n > u$, în contradicţie cu faptul că u este majorant al lui S.

În concluzie, mulţimea S are marginea superioară w din K.

Şiruri de numere reale

Am văzut deja că, în $\mathbb{R}$, un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy. În plus, toate celelalte rezultate stabilite pentru şiruri dintr-un corp comutativ ordonat sunt valabile şi pentru şiruri din $\mathbb{R}$. Pe lângă ele, mai sunt şi alte rezultate, specifice şirurilor de numere reale, dintre care, în acest paragraf, prezentăm câteva.

Teorema 3.2 *(de convergenţă a şirurilor reale monotone)*

i) *Orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ care este crescător şi majorat are limită în $\mathbb{R}$, aceasta fiind marginea superioară a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

ii) *Orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ care este descrescător şi minorat are limită în $\mathbb{R}$, aceasta fiind marginea inferioară a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Demonstraţie: i) Se poate vedea că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, crescător şi majorat fiind, este un şir Cauchy. În caz contrar, ar exista $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, aşa ıncât, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, k$ şi $m \in \mathbb{N}$, cu $k, m \geq n$, astfel ca $|x_k - x_m| \geq \varepsilon$. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este crescător, ar reieşi atunci că, pentru $m = n$ şi $k \geq n$, am avea $x_k - x_n \geq \varepsilon$. Astfel, pentru $n = 1$, ar exista $n_1 > 1$, aşa încât $x_{n_1} \geq x_1 + \varepsilon$. La fel, pentru $n = n_1$, ar exista $n_2 > n_1$, aşa încât $x_{n_2} \geq x_{n_1} + \varepsilon \geq x_1 + 2\varepsilon$. Prin recurenţă, s-ar putea construi, în acest fel, un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} \geq x_1 + k\varepsilon$, ceea ce ar contrazice faptul că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir mărginit. Ca atare, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, este într-adevăr un şir Cauchy. Deci, în virtutea rezultatului menţionat la începutul acestui paragraf, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este convergent. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Cum $x_n \leqslant x_m$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$, prin fixarea arbitrară a lui n şi trecerea la limită după m, obţinem că $x_n \leqslant x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Astfel x este un majorant al mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dacă x n-ar fi marginea superioară a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, atunci ar exista un alt majorant al acesteia, să-l numim y, care să fie mai mic decât x. Aşadar, am avea

$$x_n \leqslant y < x, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

De aici, ar reieşi că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant y < x$, ceea ce ar fi absurd. Prin urmare, x este chiar marginea superioară a mulţimii termenilor şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, adică a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Este suficient să considerăm şirul $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi să ne folosim de i). Atunci şirul $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fiind crescător şi majorat, va fi convergent la marginea superioară a mulţimii $\{-x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va fi convergent la $-\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (-x_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$. ◀

Firesc, urmează:

Teorema 3.3 *i) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

ii) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir descrescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Aşadar, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este, în oricare dintre cele două situaţii, divergent în $\mathbb{R}$.

Demonstraţie: i) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ un şir crescător şi nemărginit. Atunci muţimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este doar minorată (de x_1), nu şi majorată. Prin urmare, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. De aici, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, cu $n \geqslant n_\varepsilon$, am avea $x_n \geqslant x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

ii) Se demonstrează aplicând i) asupra şirului $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◀

În concluzie, orice şir monoton din $\mathbb{R}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Puncte limită. Limite extreme ale unui şir de numere reale

Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, se poate vorbi despre mulţimea notată cu $L(x_n)$ şi denumită ***mulţimea punctelor limită*** corespunzătoare şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. În conformitate cu Teorema 3.3, $L(x_n) \neq \varnothing$, $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Definiţia 3.13 *Se numeşte* ***punct limită al unui şir*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*, un element din* $\overline{\mathbb{R}}$ *care este limita unui subşir* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiţia 3.14 *a) Se numeşte* ***limită inferioară a şirului*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *(şi se notează cu* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *sau cu* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$*) marginea inferioară a mulţimii* $L(x_n)$.

b) Se numeşte ***limită superioară a şirului*** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *(şi se notează cu* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *sau cu* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$*) marginea superioară a mulţimii* $L(x_n)$.

Observaţii

1) Evident, pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, avem:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

2) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir convergent la un element $x \in \mathbb{R}$, atunci $L(x_n) = \{x\}$ şi, în acest caz, avem:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = x.$$

Se poate arăta că, şi reciproc, dacă, pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, are loc relaţia $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$, aceasta fiind valoarea comună a ***limitelor sale extreme*** $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

De asemenea, se mai poate arăta că, pentru orice şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, există un subşir monoton descrescător al acestuia, care să conveargă la $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi, totodată, un subşir monoton crescător care să conveargă la $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bibliografie orientativă

1. D. Buşneag, D. Piciu - *Lecţii de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
2. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.
3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică.Calcul diferenţial*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.
4. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Edit. "Fair Partners", Bucureşti, 2011.