Baze de date relaționale / Dependențe

Nicolae-Cosmin Vârlan

November 3, 2013

Elemente ale modelului relațional

- U mulțime de atribute: $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$;
- $dom(A_i)$ - domeniul valorilor atributului A_i;

Definim *uplu* peste U ca fiind funcția:

$$\varphi : U \to \bigcup_{1 \leq i \leq n} dom(A_i) \quad \text{a.i. } \varphi(A_i) \in dom(A_i), 1 \leq i \leq n$$

Fie valorile v_i astfel încât $v_i = \varphi(A_i)$.

Notăm cu $\{A_1 : v_1,\ A_2 : v_2,\ \ldots,\ A_n : v_n\}$ asocierea dintre atributele existente în U și valorile acestora. In cazul în care sunt considerate mulțimi ordonate (de forma $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$), notația va fi de forma: $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Elemente ale modelului relațional

Consideram mulțimea ordonată $(A_1, A_2, \ldots A_n)$. Pentru orice uplu φ, există vectorul $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ a.i. $\varphi(A_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$.

Pentru un vector $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ cu $v_i \in dom(A_i)$, $1 \leq i \leq n$ există un uplu φ a.i. $\varphi(A_i) = v_i$.

In practică este considerată o anumită ordonare a atributelor.

Elemente ale modelului relațional

O mulțime de uple peste U se numește *relație* și se notează cu r.

r poate varia în timp dar nu și în structură.

Exemplu:
$r = \{(v_{11}, v_{12}, \dots v_{1n}), (v_{21}, v_{22}, \dots v_{2n}), \dots, (v_{m1}, v_{m2}, \dots v_{mn})\}$.

Structura relației se va nota cu $R[U]$ unde R se numește *numele relației* iar U este mulțimea de *atribute* corespunzătoare.

Notații echivalente $R(U)$, $R(A_1, A_2, \dots, A_n)$, $R[A_1, A_2, \dots, A_n]$.

$R[U]$ se mai numește și *schemă de relație*.

Elemente ale modelului relațional

In practică, o relație r poate fi reprezentată printr-o matrice:

$$r: \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \\ \hline \end{array}$$

unde $(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ este un uplu din r, $1 \leq i \leq m$ și $v_{ij} \in dom(A_j)$, $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Vom nota cu t_i linia cu numarul i din matrice:
$t_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$

Elemente ale modelului relațional

O mulțime finită D de scheme de relație se numește *schemă de baze de date*. Formal, $D = \{R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h]\}$ unde $R_i[U_i]$ este o schemă de relație, $1 \leq i \leq h$.

O *bază de date peste D* este o corespondență ce asociază fiecărei scheme de relație din D o relație.

Exemplu:
$r_1, r_2, \ldots r_h$ este o bază de date peste $D = \{R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h]\}$.

Considerând D ca fiind ordonată $D = (R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h])$, putem nota baza de date sub forma $(r_1, r_2, \ldots r_h)$

Operații în cadrul modelului relațional - *proiecția*

Considerăm:

- $R[U]$ = schemă de relație;
- $X \subseteq U$;
- t = uplu peste $R[U]$ ($t \in r$).

Se numește *proiecția lui t relativă la X* și notată cu $t[X]$, restricția lui t la mulțimea de atribute X.

Exemplu:
Dacă $U = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ atunci $t = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
Considerăm $X = (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

atunci $t[X] = (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$;

Operații în cadrul modelului relațional - *proiecția*

Dacă r este o relație peste $R[U]$ și $X \subseteq U$, atunci *proiecția lui r relativă la X* este $r[X] = \{t[X] \mid t \in r\}$

Exemplu:
Dacă $U = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ atunci
$r = \{(v_{11}, v_{12}, \dots v_{1n}), (v_{21}, v_{22}, \dots v_{2n}), \dots, (v_{m1}, v_{m2}, \dots v_{mn})\}$.
Considerăm $X = (A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k})$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

atunci
$r[X] = \{(v_{1_{i_1}}, v_{1_{i_2}}, \dots v_{1_{i_k}}), (v_{2_{i_1}}, \dots v_{2_{i_k}}), \dots, (v_{m_{i_1}}, \dots v_{m_{i_k}})\}$

Operații în cadrul modelului relațional - *reuniunea*

Reuniunea a două relații r_1 și r_2 peste $R[U]$ este o relație notată cu $r_1 \cup r_2$ definită astfel:

$$r_1 \cup r_2 = \{t \mid t = uplu, \;\; t \in r_1 \; sau \; t \in r_2\}$$

Operații în cadrul modelului relațional - *diferența*

Diferența a două relații r_1 si r_2 peste $R[U]$ este o relație notată cu $r_1 - r_2$ definită astfel:

$$r_1 - r_2 = \{t \mid t = uplu, \;\; t \in r_1 \; si \; t \notin r_2\}$$

Operații în cadrul modelului relațional - *produs cartezian*

Produsul cartezian a două relații r_1 definită peste $R_1[U_1]$ și r_2 definită peste $R_2[U_2]$ cu $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ este o relație notată cu $r_1 \times r_2$ definită astfel:

$$r_1 \times r_2 = \{t \mid t = uplu\ peste\ U_1 \cup U_2,\ t[U_1] \in r_1\ si\ t[U_2] \in r_2\}$$

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (natural)

Considerăm:

- r_1 relație peste $R_1[U_1]$;
- r_2 relație peste $R_2[U_2]$;

Se numește *join* (sau *unire*) a relațiilor r_1 si r_2, relația $r_1 * r_2$ peste $U_1 \cup U_2$ definită prin:

$$r_1 * r_2 = \{t \mid t \text{ uplu peste } U_1 \cup U_2,\ t[U_i] \in r_i,\ i = 1, 2\}$$

Dacă R este un nume pentru relația peste $U_1 \cup U_2$ atunci $r_1 * r_2$ este definită peste $R[U_1 \cup U_2]$
Pentru simplitate vom nota $U_1 \cup U_2$ cu U_1U_2.

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (natural)

Exemplu:

Fie $R_1[A, B, C, D]$, si $R_2[C, D, E]$ si r_1, r_2 a.i.:

r_1 :

A	B	C	D
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1

r_2 :

C	D	E
1	1	0
1	1	1
0	0	0
1	0	0
1	0	1

Atunci: $r_1 * r_2$:

A	B	C	D	E
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1

Proprietăți *join* (natural)

- $r_1 * r_2[U_1] \subseteq r_1$
- $r_1 * r_2[U_2] \subseteq r_2$

Dacă $X = U_1 \cap U_2$ și:
$r'_1 = \{t_1 | t_1 \in r_1, \exists t_2 \in r_2$ a.i. $t_1[X] = t_2[X]\}$ și $r_1" = r_1 - r'_1$,
$r'_2 = \{t_2 | t_2 \in r_2, \exists t_1 \in r_1$ a.i. $t_1[X] = t_2[X]\}$ și $r_2" = r_2 - r'_2$,
atunci: $r_1 * r_2 = r'_1 * r'_2$, $r_1 * r_2[U_1] = r'_1$, $r_1 * r_2[U_2] = r'_2$.

Dacă $\overline{r_1} \subseteq r_1, \overline{r_2} \subseteq r_2$ și $\overline{r_1} * \overline{r_2} = r_1 * r_2$ atunci $r'_1 \subseteq \overline{r_1}$ si $r'_2 \subseteq \overline{r_2}$

Dacă $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ atunci $r_1 * r_2 = r_1 \times r_2$.

Extindere *join* (natural)

Fie r_i relație peste $R_i[U_i], i = \overline{1, h}$ atunci:

$r_1 * r_2 * \ldots * r_h = \{t | t$ uplu peste $U_1, \ldots U_h,$ a.i. $t[U_i] \in r_i, i = \overline{1, h}\}$

Notații echivalente:

- $r_1 * r_2 * \ldots * r_h$
- $\bowtie \langle r_i, i = 1, h \rangle$
- $* \langle r_i, i = 1, h \rangle$

Operația join este asociativă.

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (oarecare)

Fie r_i peste $R_i[U_i]$, $i = \overline{1,2}$ cu $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots A_{\alpha_k} \in U_1$ și $B_{\beta_1}, B_{\beta_2}, \ldots B_{\beta_k} \in U_2$ și θ_i operator de comparație între elementele lui $dom(A_{\alpha_i})$ și cele ale lui $dom(B_{\beta_i})$

θ_i este relație binara peste $dom(A_{\alpha i}) \times dom(B_{\beta i})$, $1 \leq i \leq k$. *Join-ul oarecare* a două relații r_1 și r_2, notat cu $r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2$, este definit prin:

$$r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2 = \{(t_1, t_2) | t_1 \in r_1, t_2 \in r_2, t_1[A_{\alpha_i}]\theta_i t_2[B_{\beta_i}], i = \overline{1,k}\}$$

unde $\theta = (A_{\alpha_1}\theta_1 B_{\beta_1}) \wedge (A_{\alpha_2}\theta_2 B_{\beta_2}) \wedge \ldots \wedge (A_{\alpha_k}\theta_k B_{\beta_k})$

Observație: un join oarecare cu condiția TRUE este un produs cartezian.

Dependențe funcționale

Fie $X, Y \subseteq U$. Vom nota o dependență funcțională cu $X \to Y$.

O relație r peste U satisface *dependența funcțională* $X \to Y$ dacă:

$$(\forall t_1, t_2)(t_1, t_2 \in r)[t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]]$$

$X = \emptyset$ avem $\emptyset \to Y$ dacă $(\forall t_1, t_2)(t_1, t_2 \in r)[t_1[Y] = t_2[Y]]$

$Y = \emptyset$ atunci orice $\forall r$ peste U avem că $X \to \emptyset$

Dacă r satisface $X \to Y$, atunci există o funcție $\varphi : r[X] \to r[Y]$ definită prin $\varphi(t) = t'[Y]$, unde $t' \in r$ și $t'[X] = t \in r[X]$.
Dacă r satisface $X \to Y$ spunem că X determină funcțional pe Y în r.

Proprietăți ale dependențelor funcționale

FD1. (Reflexivitate) Dacă $Y \subseteq X$, atunci r satisface $X \to Y$, $\forall r \in U$.

FD2. (Extensie) Dacă r satisface $X \to Y$ și $Z \subseteq W$, atunci r satisface $XW \to YZ$.

FD3. (Tranzitivitate) Dacă r satisface $X \to Y$ și $Y \to Z$, atunci r satisface $X \to Z$.

FD4. (Pseudotranzitivitate) Dacă r satisface $X \to Y$ și $YW \to Z$, atunci r satisface $XW \to Z$.

Proprietăți ale dependențelor funcționale

FD5. (Uniune) Dacă r satisface $X \to Y$ și $X \to Z$, atunci r satisface $X \to YZ$.

FD6. (Descompunere) Dacă r satisface $X \to YZ$, atunci r satisface $X \to Y$ și $X \to Z$.

FD7. (Proiectabilitate) Dacă r peste U satisface $X \to Y$ și $X \subset Z \subseteq U$, atunci $r[Z]$ satisface $X \to Y \cap Z$

FD8. (Proiectabilitate inversă) Dacă $X \to Y$ este satisfacută de o proiecție a lui r, atunci $X \to Y$ este satisfacută de r.

Dependențe funcționale - consecință și acoperire

Dacă Σ este o mulțime de dependențe funcționale peste U atunci spunem că $X \to Y$ *este consecință din* Σ dacă orice relație ce satisface toate consecințele din Σ satisface și $X \to Y$.
Notație: $\Sigma \models X \to Y$

Fie $\Sigma^* = \{X \to Y | \Sigma \models X \to Y\}$. Fie Σ_1 = mulțime de dependențe funcționale. Σ_1 constituie o *acoperire* pentru Σ^* dacă $\Sigma_1^* = \Sigma^*$.

Proprietăți ale dependențelor funcționale

Propoziție

Pentru orice mulțime Σ de dependențe funcționale există o acoperire Σ_1 pentru Σ^*, astfel încat toate dependențele din Σ_1 sunt de forma $X \to A$, A fiind un atribut din U.

Propoziție

$\Sigma \models X \to Y$ *dacă și numai dacă* $\Sigma \models X \to B_j$ *pentru* $j = \overline{1, h}$, *unde* $Y = B_1 \ldots B_h$.

Reguli de deducere

Fie $\mathcal{R}$ o mulțime de formule de deducere pentru dependențe funcționale și Σ o mulțime de dependențe funcționale. Spunem că $X \to Y$ este o *demonstrație* în Σ utilizând regulile $\mathcal{R}$ și vom nota $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to Y$, dacă există șirul $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, astfel încât:

- $\sigma_n = X \to Y$ și
- pentru $\forall i = \overline{1, n}$, $\sigma_i \in \Sigma$ sau există în $\mathcal{R}$ o regulă de forma $\frac{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \ldots \sigma_{j_k}}{\sigma_i}$, unde $j_1, j_2, \ldots, j_k < i$.

Reguli de deducere

Conform proprietăților FD1-FD5 putem defini regulile:

FD1f: $\frac{Y \subseteq X}{X \rightarrow Y}$

FD2f: $\frac{X \rightarrow Y,\ Z \subseteq W}{XW \rightarrow YZ}$

FD3f: $\frac{X \rightarrow Y,\ Y \rightarrow Z}{X \rightarrow Z}$

FD4f: $\frac{X \rightarrow Y,\ YW \rightarrow Z}{XW \rightarrow Z}$

FD5f: $\frac{X \rightarrow Y,\ X \rightarrow Z}{X \rightarrow YZ}$

FD6f: $\frac{X \rightarrow YZ}{X \rightarrow Y}, \frac{X \rightarrow YZ}{X \rightarrow Z}$

Propoziție

Regulile FD4f, FD5f, FD6f se exprimă cu ajutorul regulilor FD1f, FD2f, FD3f.

Notăm cu $\mathcal{R}_1 = \{$FD1f, FD2f, FD3f$\}$,
și cu $\mathcal{R}_2 = R_1 \cup \{$FD4f, FD5f, FD6f$\}$

Axiomele lui Armstrong

Armstrong a definit (în *Dependency structures of database relationships* Proc. IFIP 74, Amsterdam, 580-583) următoarele reguli de inferența (numite *Axiomele lui Armstrong*):

A1: $\dfrac{}{A_1 ... A_m \to A_i}, i = \overline{1, n}$

A2: $\dfrac{A_1, ... A_m \to B_1, ... B_r}{A_1 ... A_m \to B_j}, j = \overline{1, r}$

$\dfrac{A_1, ... A_m \to B_j,\ j = \overline{1, r}}{A_1 ... A_m \to B_1, ... B_r}$

A3: $\dfrac{A_1, ... A_m \to B_1, ... B_r, \quad B_1, ... B_r \to C_1, ... C_p}{A_1 ... A_m \to C_1, ... C_p}$

unde A_i, B_j, C_k sunt atribute. Notăm $\mathcal{R}_A = \{$A1, A2, A3$\}$.

Obs: regula A3 este de fapt FD3f (tranzitivitatea).

Propoziție

Regulile din $\mathcal{R}_1$ se exprimă prin cele din R_A și invers.

Notatie:

$$\Sigma^+_{\mathcal{R}} = \{X \to Y | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to Y\}$$

Propoziție

Fie $\mathcal{R}'_1$ si $\mathcal{R}'_2$ doua multimi de reguli astfel incat $\mathcal{R}'_1$ se exprima prin $\mathcal{R}'_2$ si invers. Atunci $\Sigma^+_{\mathcal{R}'_1} = \Sigma^+_{\mathcal{R}'_2}$ pentru orice multime Σ de dependente functionale.

Consecinta: $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1} = \Sigma^+_{\mathcal{R}_A}$

Fie $X \subseteq U$ si $\mathcal{R}$ o multime de reguli de inferenta. Notam cu

$$X_{\mathcal{R}}^{+} = \{A | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \rightarrow A\}$$

Lema

$\Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \rightarrow Y$ *daca si numai daca* $Y \subseteq X_{\mathcal{R}_1}^{+}$.

Lema

Fie Σ o multime de dependente functionale si $\sigma : X \to Y$ o dependenta functionala astfel incat $\Sigma \nvdash_{\mathcal{R}_1} X \to Y$. Atunci exista o relatie r_σ ce satisface toate dependentele functionale din Σ si r_σ nu satisface $X \to Y$.

Theorem

Fie Σ o multime de dependente functionale. Atunci exista o relatie r_0 ce satisface exact elementele lui $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$, adica:

- *r_0 satisface τ, $\forall \tau \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$ si*
- *r_0 nu satisface γ, $\forall \gamma \notin \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$*

Dependente multivaluate - definitie

Fie $X, Y \subseteq U$. O dependenta multivaluata este notata cu $X \twoheadrightarrow Y$.

Definition

Relatia *r peste U satisface dependenta multivaluata $X \twoheadrightarrow Y$* daca pentru oricare doua tuple $t_1, t_2 \in r$ si $t_1[x] = t_2[x]$, exista relatiile t_3 si t_4 din r, astfel incat:

- $t_3[X] = t_1[X], t_3[Y] = t_1[Y], t_3[Z] = t_2[Z]$;
- $t_4[X] = t_2[X], t_4[Y] = t_2[Y], t_4[Z] = t_1[Z]$

unde $Z = U - XY$.

Exemplu

r :

A	B	C	D			
a_1	b_1	c_1	d_1	t_1		t_1”
a_1	b_2	c_2	d_2	t_2		
a_1	b_1	c_1	d_2	t_3		t_2”
a_1	b_2	c_2	d_1	t_4		
a_2	b_3	c_1	d_1		t'_1, t'_4	
a_2	b_3	c_1	d_2		t'_2, t'_3	

r satisface $A \twoheadrightarrow BC$

Intrebare: cum alegem t_3”, t_4” ?

Deoarece atunci cand $t_1[A] = t_2[A]$ avem ca:
$t_3[A] = t_1[A], t_3[BC] = t_1[BC], t_3[D] = t_2[D]$ si
$t_4[A] = t_2[A], t_4[BC] = t_2[BC], t_4[D] = t_1[D]$

Definitie echivalenta

Definition

Relatia *r peste U satisface dependenta multivaluata $X \twoheadrightarrow Y$*, daca pentru orice $t_1, t_2 \in r$ cu $t_1[X] = t_2[X]$ avem ca $M_Y(t_1[XZ]) = M_Y(t_2[XZ])$

unde $M_Y(t[XZ]) = \{t'[Y] | t' \in r, t'[XZ] = t[XZ]\}$

r :

A	B	C	D		
a_1	b_1	c_1	d_1	$=$	t_1
a_1	b_2	c_2	d_2	$=$	t_2
a_1	b_1	c_1	d_2		
a_1	b_2	c_2	d_1		
a_2	b_3	c_1	d_1		
a_2	b_3	c_1	d_2		

$M_Y(t1[AD]) = M_Y(t2[AD]) = \{(b_1, c_1), (b_2, c_2)\}$

Observatii

- Daca r satisface dependenta functionala $X \to Y$, atunci pentru orice $t \in r$, avem $M_Y(t[XZ]) = \{t[Y]\}$.
- Daca r satisface dependenta functionala $X \to Y$, atunci r satisface si dependenta multivaluata $X \twoheadrightarrow Y$.
- Daca r satisface dependenta multivaluata $X \twoheadrightarrow Y$, atunci putem defini o functie $\psi : r[X] \to \mathcal{P}(r[Y])$, prin $\psi(t[X]) = M_Y(t[XZ]), \forall t \in r$. Cand r satisface $X \to Y$, atunci $\psi : r[X] \to r[Y]$.

Proprietati ale dependentelor multivaluate

MVD0 (Complementariere) Fie $X, Y, Z \subseteq U$, asfel incat $XYZ = U$ si $Y \cap Z \subseteq X$. Daca r satisface $X \twoheadrightarrow Y$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Z$.

MVD1 (Reflexivitate) Daca $Y \subseteq X$, atunci orice relatie r satisface $X \twoheadrightarrow Y$.

MVD2 (Extensie) Fie $Z \subseteq W$ si r satisface $X \twoheadrightarrow Y$. Atunci r satisface $XW \twoheadrightarrow YZ$

MVD3 (Tranzitivitate) daca r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ si $Y \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Z - Y$

Proprietati ale dependentelor multivaluate

MVD4 (Pseudotranzitivitate) Daca r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ si $YW \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface si $XW \twoheadrightarrow Z - YW$.

MVD5 (Uniune) Daca r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ si $X \twoheadrightarrow Z$ atunci r satisface $X \twoheadrightarrow YZ$.

MVD6 (Descompunere) Daca r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ si $X \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Y \cap Z$, $X \twoheadrightarrow Y - Z$, $X \twoheadrightarrow Z - Y$

Proprietati mixte ale dependentelor multivaluate

FD-MVD1. Daca r satisface $X \to Y$, atunci r satisface si $X \twoheadrightarrow Y$.

FD-MVD2. Daca r satisface $X \twoheadrightarrow Z$ si $Y \to Z'$, cu $Z' \subseteq Z$ si $Y \cap Z = \emptyset$, atunci r satisface $X \to Z'$.

FD-MVD3. Daca r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ si $XY \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \to Z - Y$.

Reguli de inferenta

MVD0f: $\frac{XYZ=U,\ \ Y\cap Z\subseteq X,\ \ X\twoheadrightarrow Y}{X\twoheadrightarrow Z}$

MVD1f: $\frac{Y\subseteq X}{X\twoheadrightarrow Y}$

MVD2f: $\frac{Z\subseteq W,\ \ X\twoheadrightarrow Y}{XW\twoheadrightarrow YZ}$

MVD3f: $\frac{X\twoheadrightarrow Y,\ \ Y\twoheadrightarrow Z}{X\twoheadrightarrow Z-Y}$

MVD4f: $\frac{X\twoheadrightarrow Y,YW\twoheadrightarrow Z}{XW\twoheadrightarrow Z-YW}$

Reguli de inferenta

MVD5f: $$\frac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ X \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow YZ}$$

MVD6f: $$\frac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ X \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Y \cap Z,\ \ X \twoheadrightarrow Y - Z,\ \ X \twoheadrightarrow Z - Y}$$

FD-MVD1f: $$\frac{X \to Y}{X \twoheadrightarrow Y}$$

FD-MVD2f: $$\frac{X \twoheadrightarrow Z,\ \ Y \to Z',\ \ Z' \subseteq Z,\ \ Y \cap Z = \emptyset}{X \to Z'}$$

FD-MVD3f: $$\frac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ XY \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Z - Y}$$

Propoziție

Fie $\mathcal{R}$ o multime de reguli valide si γ o regula $\frac{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_k}{\beta}$, astfel incat $\{\alpha_1,\ldots\alpha_k\} \vdash_{\mathcal{R}} \beta$, atunci si regula γ este valida.

Propoziție

Fie $\mathcal{R}_{FM} = \{FD1f - FD3f, \quad MVD0f - MVD3f, FD-MVD1f - FD-MVD3f\}$. Avem:

- *$FD-MVD3f$ se exprima cu celelalte regulid din $\mathcal{R}_{FM}$ si FD*
- *$MVD2f$ se exprima prin celelalte reguli din $\mathcal{R}_{FM}$.*

Propoziție

Regulile $MVD4f - MVD6f$ se exprima cu ajutorul regulilor $MVD0f - MVD3f$

Theorem

Fie Σ o multime de dependente functionale sau multivaluate si X o submultime de atribute. Atunci exista o partitie a lui $U - X$ notata prin $Y_1 \dots Y_k$, astfel incat pentru $Z \subseteq U - X$ avem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \twoheadrightarrow Z$ daca si numai daca Z este reuniunea unui numar de multimi din partitia $\{Y_1, \dots Y_k\}$

Definition

Pentru Σ o multime de dependente functionale sau multivaluate si X o submultime de atribute, numim *baza de dependenta pentru X cu privire la Σ* partitia $B(\Sigma, X) = \{\{A_1\} \dots \{A_h\}, Y_1 \dots Y_k\}$, unde $X = A_1, \dots A_h$, iar $Y_1, \dots Y_k$ este partitia construita in teorema precedenta.

Observatii

- Avem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \twoheadrightarrow Z$ daca si numai daca Z este o reuniune de elemente din partitia $B(\Sigma, X)$.
- Fie $X^*_\Sigma = \{A | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow A\}$. Atunci pentru orice $A \in X^*_\Sigma$ avem $\{A\} \in B(\Sigma, X)$.