5.

(BONUS! Variabile aleatoare: proprietăţi de bază pentru medii, varianţă, covarianţă; exemplificări ale unor astfel de proprietăţi)

a.

Fie $X : \Omega \to R$ o variabilă aleatoare, cu funcţia de probabilitate P. Dacă X este variabilă aleatoare discretă, *media* sa se defineşte ca fiind numărul real $E[X] = \sum_{x_i \in Val(X)} x_i \cdot P(X = x_i)$. Dacă X este variabilă aleatoare continuă, media sa este $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(X = x)dx$.

Notăm $\bar{X} = E[X]$. *Varianţa* lui X se defineşte ca fiind $Var(X) = E[(X - \bar{X})^2]$. Arătaţi că:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

***Indicaţie:* Nu este necesar să faceţi demonstraţia separat pentru cele două cazuri, discret şi respectiv continuu.**

b.

***Covarianţa* a două variabile aleatoare X şi Y care au acelaşi domeniu de definiţie (Ω) se defineşte astfel: $Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$, unde $E[X]$ este media lui X.**

Demonstraţi egalitatea:

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y].$$

c.

Fie X o variabilă aleatoare având media $E[X] = 1$ şi varianţa $Var(X) = 1$. Calculaţi:

i. $E[3X]$;

ii. $Var(3X)$;

iii. $Var(X+3)$;

a) ştim că: $E[X+Y] = E[X]+E[Y]$, pt. X, Y - var. aleatoare (1)

$E[aX+b] = aE[X]+b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, X - var. aleatoare (2)

$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - \underbrace{2E[X]}_{\in R} \cdot X + \underbrace{E^2[X]}_{\in R}] =$

$\overset{(2)}{=} E[X^2] - 2E[X] \cdot E[X] + E^2[X] = E[X^2] - 2E^2[X] + E^2[X] =$

$= \underline{E[X^2] - E^2[X]}$.

b) $Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY - X\underbrace{E[Y]}_{\in R} - Y\underbrace{E[X]}_{\in R} + \underbrace{E[X]E[Y]}_{\in R}] \overset{(2)}{=}$

$= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y] = E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y] =$

$= E[XY] - E[X]E[Y]$.

c) $E[3X] = 3E[X] = 3 \cdot 1 = \underline{3}$.

$Var(3X) = 3^2 \cdot Var(X) = 9 \cdot 1 = \underline{9}$ (căci $Var(aX) = \boxed{a^2 Var(X)}$).

$Var(X+3) = E[(X+3)^2] - E^2[X+3] = E[X^2 + 6X + 9] - E^2[X+3] =$

$= E[X^2] + 6E[X] + 9 - (E[X]+3)^2 =$

$= E[X^2] + 6\cancel{E[X]} + \cancel{9} - E^2[X] - 6\cancel{E[X]} - \cancel{9} =$

$= E[X^2] - E^2[X] = Var[X] = \underline{1}$.

Demonstrăm egalităţile folosite:

Pt. X, Y - discrete:

$E[X+Y] = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot P(\omega) =$

$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\omega) \overset{def}{=} E[X] + E[Y]$.

Pt. X, Y - continue:

$E[X+Y] = \int_\omega (X(\omega) + Y(\omega)) P(\omega) d\omega = \int_\omega X(\omega) \cdot P(\omega) d\omega +$

$+ \int_\omega Y(\omega) \cdot P(\omega) d\omega \overset{def}{=} \underline{E[X] + E[Y]}$.

deci, $\underline{E[X+Y] = E[X] + E[Y]}$, pt. X, Y - var. aleatoare

Am mai folosit că $Var(aX) = a^2 Var(X)$.

$Var(aX) = E[(aX - E[aX])^2] = E[a^2X^2 - 2aX \cdot aE[X] + a^2E^2[X]]$

$\overset{(2)}{=} a^2 E[X^2] - 2a^2 E^2[X] + a^2 E^2[X] =$

$= a^2 E[X^2] - a^2 E^2[X] = a^2 (E[X^2] - E^2[X]) =$

$\overset{a)}{=} \underline{a^2 \cdot Var(X)}$.

Foarte bine!