Calcul Numeric

Cursul 2

2017

Anca Ignat

Fie vectorii ***x, y***, cu ajutorul lor definim produsele scalare în $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ şi $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$:

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \;,\; \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\,\overline{\boldsymbol{y}_i}=\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{y}_1} & \overline{\boldsymbol{y}_2} & \cdots & \overline{\boldsymbol{y}_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;,\; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$(x\,,\,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^T x = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proprietăţile matricii $\boldsymbol{A^H}$ | Proprietăţi ale matricii $\boldsymbol{A^T}$

1.	$(A + B)^H = A^H + B^H$	$(A + B)^T = A^T + B^T$
2.	$(A^H)^H = A$	$(A^T)^T = A$
3.	$(AB)^H = B^H A^H$	$(AB)^T = B^T A^T$
4.	$(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Propoziţie

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{m}}$ atunci:

$$\left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{C}^m} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^{H} \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{C}^n} .$$

Pentru cazul real avem:

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}} \Rightarrow \left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^{T} \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^n}$$

Demonstraţie

$$(Ax , y) = y^H (Ax) = y^H A x = y^H (A^H)^H x =$$

$$= (A^H y)^H x = (x , A^H y).$$

Tipuri de matrici

Definiţii

O matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numeşte ***simetrică*** dacă $A = A^T$.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***autoadjunctă*** dacă $A = A^H$.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***unitară*** dacă $A^H A = A\, A^H = I_n$.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***ortogonală*** dacă

$$A^T A = A\, A^T = I_n.$$

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A=(a_{ij})$ se numeşte matrice ***triunghiulară inferior*** (sau ***inferior triunghiulară***) dacă

$$a_{ij} = 0 \text{ pentru } j > i$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A=(a_{ij})$ se numeşte matrice ***triunghiulară superior*** (sau ***superior triunghiulară***) dacă

$$a_{ij} = 0 \text{ pentru } j < i$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notăm cu $\boldsymbol{I_n}$ matricea unitate:

$$\boldsymbol{I_n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{I_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonală $\boldsymbol{D}$**=diag**$[d_1, d_2, \ldots, d_n]$

$$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Norme

Definiţie

Fie X un spaţiu vectorial real. Se numeşte ***normă*** aplicaţia:

$$\|\,.\,\| : X \to \mathbb{R}_+$$

care îndeplineşte condiţiile:

$$\text{(1)}\ \ \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$\text{(2)}\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in X;$$

$$\text{(3)}\ \ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|, \forall\, x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vom numi ***norme vectoriale*** normele definite pe spaţiile $X = \mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Fie spaţiile vectoriale $\mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$. Pe aceste spaţii următoarele aplicaţii sunt norme vectoriale:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2};$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1..n\}.$$

Dacă $\|\cdot\|_{\boldsymbol{v}}$ este o normă vectorială şi $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ este o matrice nesingulară atunci aplicaţia

$$\|\cdot\|_{\boldsymbol{P}} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{v}}$$

este de asemenea o normă vectorială.

Definiţie

Se numeşte ***produs scalar*** în spaţiul vectorial X aplicaţia:

$$(\cdot,\cdot): X \times X \to K$$

care satisface condiţiile :

$$(a)\ (x, x) \geq 0, \forall\, x \in X, \quad (x, x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0;$$

$$(b)\ (x, y) = \overline{(y, x)}, \forall\, x, y \in X,$$

$$(c)\ (\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall\, x, y \in X, \forall \lambda \in K,$$

$$(d)\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z), \forall\, x, y, z \in X.$$

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$\left|(x\,,y)\right| \le \sqrt{(x\,,x)}\sqrt{(y,y)} \qquad \forall x,y \in X$$

Într-un spaţiu vectorial dotat cu produs scalar se poate induce o normă numită euclidiană:

$$\|x\|_2 = |\,x\,| := \sqrt{(x,x)}.$$

Reaminitm definiţia produselor scalare pe $\mathbb{C}^n$ şi pe $\mathbb{R}^n$ introduse anterior:

$$(x\,,\,y)_{\mathbb{C}^n}=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\overline{y_i}\quad,\quad(x\,,\,y)_{\mathbb{R}^n}=\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i$$

Obţinem norma euclidiană (valabilă în ambele spaţii $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{R}^n$):

$$\|x\|_2=|\,x\,|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\,.$$

Norme matriciale

Definiţie

Aplicaţia $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ se numeşte ***normă matricială*** dacă:

$$\textbf{(1)}\ \|A\| \geq 0\ \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

$$\textbf{(2)}\ \|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|\ , \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(3)}\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(4)}\ \|A * B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Exemple

Norma Frobenius definită de relaţia $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ este o normă matricială.

Aplicaţia $\|A\|_{\max} = \max\{|a_{ij}|; i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,n\}$ ***NU*** este o normă matricială.

Pentru $\boldsymbol{n = 2}$ fie:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, B = A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A * B = I_2 \text{ , } \|A\|_{\max} = \|B\|_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|A * B\|_{\max} = 1 > \|A\|_{\max} \bullet \|B\|_{\max} = \frac{1}{2}.$$

Norme matriciale naturale

- $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ o normă vectorială $\to$ $\|\cdot\|_i : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$

normă matricială naturală sau ***indusă***.

$$\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \frac{\|Ax\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}} ; x \in \mathbb{R}^n , x \neq 0\}$$

Definiţii echivalente :

$$\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \|Ax\|_{\mathrm{v}} ; x \in \mathbb{R}^n , \|x\|_{\mathrm{v}} \leq 1\}$$

$$= \max\{ \|Ax\|_{\mathrm{v}} ; x \in \mathbb{R}^n , \|x\|_{\mathrm{v}} = 1\}$$

$\|A\|_{\mathrm{i}}$ se numeşte ***normă matricială naturală*** sau ***normă indusă*** de norma vectorială $\|\cdot\|_v$

Avem următoarea relaţie:

$$\|Ax\|_{\mathrm{v}} \le \|A\|_{\mathrm{i}} \|x\|_{\mathrm{v}} \text{ , } \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Norma Frobenius $\|\cdot\|_F$ nu este o normă naturală.

$$\|I_n\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \frac{\|I_n x\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}} ; x \ne 0 \} = 1, \ \ \forall\ \ \|\cdot\|_i,$$

$$\|I_n\|_F = (1+1+\cdots+1)^{1/2} = \sqrt{n} \ne 1 \ \textbf{pentru} \ \ n \ge 2.$$

Pentru $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ norma matricială indusă este:

$$\|A\|_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,;\, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

Pentru $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\,;\, i = 1, \ldots, n\}$ norma matricială indusă este:

$$\|A\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,;\, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- $\|\cdot\|_{\mathrm{v}}$ şi $\|\cdot\|_{\mathrm{v,P}}$ - norme vectoriale → $\|\cdot\|_{\mathrm{i}}$ şi respectiv $\|\cdot\|_{\mathrm{i,P}}$

normele matriciale induse

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{v,P}} = \|\boldsymbol{Px}\|_{\mathrm{v}} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{i,P}} = \|\boldsymbol{PAP}^{-1}\|_{\mathrm{i}}$$

Valori şi vectori proprii

Definiţii

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se numeşte ***valoare proprie*** (***autovaloare***) a matricii $\boldsymbol{A}$ un număr complex $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ pentru care există un vector nenul $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ a.î.:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

Vectorul x se numeşte ***vector propriu*** (***autovector***) asociat val. proprii $\boldsymbol{\lambda}$.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{det}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$$

→ Matricea $\lambda I_n - A$ este singulară.

Polinomul:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\lambda - a_n$$

se numeşte ***polinom caracteristic*** asociat matricii A.

→ **grad** $p_A = n \rightarrow$ are n rădăcini care sunt valorile proprii ale matricii A.

Se numeşte ***rază spectrală*** a matricii A:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1,\ldots,n, \lambda_i - \text{valorile proprii ale matricii A}\}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$ norma indusă este

$$\|A\|_2 = |A| = \sqrt{\rho(A^T A)}$$ se numeşte ***norma spectrală***.

Propoziţia 1

Fie $\|\cdot\|$ o normă matricială naturală. Atunci:

$$\rho(A) \le \|A\|, \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **,** $\{A^k\}$ **un şir de matrici.**

$$A^k \to 0_{n\times n}, k \to \infty \iff \left\| A^k \right\| \to 0, k \to \infty.$$

Propoziţia 2

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Atunci:

$$A^k \to 0, k \to \infty \iff \rho(A) < 1.$$

Dacă există o normă matricială naturală pentru care **||*A*|| < *1***

atunci:

$$A^k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty.$$

$$(n = 1 \to a \in \mathbb{R}, a^k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty \iff |a| < 1.)$$

Propoziţia 3

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$. Seria $\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\infty} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$ converge dacă şi numai dacă raza spectrală a matricii ***A*** este subunitară:

$$\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{S} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{A}) < \mathbf{1}.$$

Dacă există o normă a matricii *A* astfel încât **||*A*|| < *1*** atunci seria converge. În cazul convergenţei avem :

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\infty} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{S} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}.$$

Propoziţia 4

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ pentru care există o normă matricială naturală astfel ca $\|\boldsymbol{A}\| < \mathbf{1}$. Atunci există matricile $(\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}} \pm \boldsymbol{A})^{-1}$ şi avem evaluările:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\|\boldsymbol{A}\|} \leq \left\|(\boldsymbol{I} \pm \boldsymbol{A})^{-1}\right\| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{A}\|}.$$

Surse de erori în calculule numerice

1. Erori în datele de intrare:
   - măsurători afectate de erori sistematice sau perturbaţii temporare,
   - erori de rotunjire: 1/3 , π , 1/7,…
2. Erori de rotunjire în timpul calculelor:
   - datorate capacităţii limitate de memorare a datelor, operaţiile nu sunt efectuate exact.

3. Erori de discretizare:

- limita unui şir , suma unei serii , funcţii neliniare aproximate de funcţii liniare, aproximarea derivatei unei funcţii

4. Simplificări în modelul matematic

- idealizări , ignorarea unor parametri.

5. Erori umane şi erori ale bibliotecilor folosite…

Eroare absolută , eroare relativă

a – valoarea exactă,

ã – valoarea aproximativă.

Eroare absolută : $a - \tilde{a}$ ***sau*** $|a - \tilde{a}|$ ***sau*** $\|a - \tilde{a}\|$

$$a = \tilde{a} \pm \Delta_a , \ |a - \tilde{a}| \le \Delta_a$$

Eroare relativă: $a \neq 0$ $\quad \dfrac{a - \tilde{a}}{a}$ **sau** $\dfrac{|a - \tilde{a}|}{|a|}$ **sau** $\dfrac{\|a - \tilde{a}\|}{\|a\|}$

$\dfrac{|a - \tilde{a}|}{|a|} \le \delta_a$ (δ_a se exprimă de regulă în %).

În aproximările 1kg ±5g, 50g±5g erorile absolute sunt egale dar pentru prima cantitate eroarea relativă este 0,5% iar pentru a doua eroarea relativă este 10%.

$$\boldsymbol{a_1 = \tilde{a}_1 \pm \Delta_{a_1}\ , a_2 = \tilde{a}_2 \pm \Delta_{a_2}\ ,}$$

$$\boldsymbol{a_1 \pm a_2 = (\tilde{a}_1 \pm \tilde{a}_2) \pm \left(\Delta_{a_1} \pm \Delta_{a_2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Delta_{a_1+a_2} \le \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}.}$$

a1 cu eroare relativă $\boldsymbol{\delta_{a_1}}$ şi ***a2*** cu eroare relativă $\boldsymbol{\delta_{a_2}}$:

$$\boldsymbol{a = a_1 * a_2} \text{ sau } \boldsymbol{\frac{a_1}{a_2}} \text{ rezultă } \quad \boldsymbol{\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}}.$$

Condiţionare ←→ stabilitate

Condiţionarea unei probleme caracterizează sensibilitatea soluţiei în raport cu perturbarea datelor de intrare, în ipoteza unor calcule exacte (independent de algoritmul folosit pentru rezolvarea problemei).

Fie $\boldsymbol{x}$ datele exacte de intrare, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ o aproximaţie cunoscută a acestora, $\boldsymbol{P(x)}$ soluţia exactă a problemei şi $\boldsymbol{P(\tilde{x})}$ soluţia problemei cu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ca date de intrare. Se presupune că s-au făcut calcule exacte la obţinerea soluţiilor $\boldsymbol{P(x)}$ şi $\boldsymbol{P(\tilde{x})}$.

O problemă se consideră a fi ***prost condiționată*** dacă ***P(x)*** şi $\boldsymbol{P(\tilde{x})}$ diferă mult chiar dacă eroarea relativă $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$ este mică.

Condiționarea numerică a unei probleme este exprimată prin amplificarea erorii relative:

$$k(x)=\frac{\dfrac{\|P(x)-P(\tilde{x})\|}{\|P(x)\|}}{\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}} \quad \textbf{pentru } x\neq 0 \ \textbf{ si } P(x)\neq 0$$

O valoare mică pentru ***k(x)*** caracterizează o problemă bine-condiționată.

Condiționarea este o proprietate locală (se evaluează pentru diverse date de intrare $\boldsymbol{x}$). O problemă este bine-condiționată dacă este bine-condiționată în orice punct.

Pentru rezolvarea unei probleme $\boldsymbol{P}$, calculatorul execută un algoritm $\tilde{\boldsymbol{P}}$. Deoarece se folosesc numere în virgulă mobilă, calculele sunt afectate de erori:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \neq \tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x})$$

Stabilitatea numerică exprimă mărimea erorilor numerice introduse de algoritm, în ipoteza unor date de intrare exacte, $\| \boldsymbol{P(x)} - \boldsymbol{\tilde{P}(x)} \|$ sau $\dfrac{\| \boldsymbol{P(x)} - \boldsymbol{\tilde{P}(x)} \|}{\| \boldsymbol{P(x)} \|}$.

O eroare relativă de ordinul erorii de rotunjire caracterizează un ***algoritm numeric stabil***.

Un **algoritm numeric stabil** aplicat unei **probleme bine condiționate** conduce la **rezultate cu precizie foarte bună**.

Un algoritm $\boldsymbol{\tilde{P}}$ destinat rezolvării problemei $\boldsymbol{P}$ este numeric stabil dacă este îndeplinită una din condițiile:

1. $\tilde{P}(x) \approx P(x)$ pentru orice intrare x;

2. există $\tilde{x}$ apropiat de x, astfel ca $\tilde{P}(x) \approx P(\tilde{x})$

x = datele exacte,

$P(x)$ = soluţia exactă folosind date exacte,

$\tilde{P}(x)$ = soluţia „*calculată*” folosind algoritmul $\tilde{P}$ cu date exacte de intrare

Rezolvarea sistemelor liniare

Istoric

- 1900 î.Hr., Babilon - apar primele probleme legate de ecuații liniare simultane
- 300 î.Hr. Babilon - tăbliță cu următoarea problemă:

  ”*Avem două câmpuri de arie totală 1800 ha. Producția la hectar pe primul câmp este de 2/3 bușel (=36,3l) iar pe al doilea este de 1/2 bușel. Dacă producția totală este de 1100 bușeli, să se determine aria fiecărui teren în parte.”*

- 200-100 î.Hr. China – *9 capitole despre arta matematică* – metodă de rezolvare foarte asemănătoare eliminării Gauss (*„Avem 3 tipuri de grâu. Știm că 3 baloturi din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip și 1 balot din al treilea tip cântăresc 39 măsuri. De asemenea, 2 baloturi din primul tip, 3 baloturi din al doilea tip şi 1 balot din al treilea tip cântăresc 34 măsuri și 1 balot din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip şi 3 baloturi din al treilea tip cântăresc 26 măsuri. Câte măsuri cântărește un balot din fiecare tip de grâu”)*

- 1545, Cardan – în *Ars Magna*, propune o regulă (*regula de modo)* pentru rezolvarea unui sistem de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute (seamănă cu regula lui Cramer)
- 1683, Seki Kowa, Japonia - ideea de „*determinant*”- „*Method of solving the dissimulated problems”*. Calculează ceea ce astăzi cunoaștem sub numele de determinant, determinanții matricelor ***2x2***, ***3x3***, ***4x4***, ***5x5*** în legătură cu rezolvarea unor ecuații dar nu a sistemelor de ecuații.

- 1683, Leibniz într-o scrisoare către l'Hôpital explică faptul că sistemul de ecuații:

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

are soluţie deoarece :

10*21*32+11*22*30+12*20*31=10*22*31+11*20*32+12*21*30

(condiția ca determinantul metricii coeficienților este 0).

Leibniz era convins că o notație matematică bună este cheia progresului și experimentează mai mult de 50 de moduri diferite de a scrie coeficienții unui sistem de ecuații. Leibniz folosește termenul de „*rezultant”* în loc de determinant și a demonstrat regula lui Cramer pentru „rezultanți”. Ştia că orice determinant poate fi dezvoltat în raport cu o coloană – operația se numește azi dezvoltarea Laplace.

- 1750, Cramer prezintă o formulă bazată pe determinanți pentru rezolvarea unui sistem de ecuații liniare – *regula lui Cramer – „Introduction in the analysis of algebraic curves”* (dă o regulă generală pentru sisteme *n x n:*

  *‚One finds the value of each unknown by forming **n** fractions of which the common denominator has as many terms as there are permutations of **n** things’*

- 1764 Bezout, 1771 Vandermonde, 1772 Laplace – reguli de calcul al determinanților

- 1773 Lagrange – prima utilizare implicită a matricelor în legătură cu formele biliniare ce apar la optimizarea unei funcții reale de 2 sau mai multe variabile (dorea să caracterizeze punctele de maxim şi minim a funcțiilor de mai multe variabile)

- 1800-1801, Gauss introduce noțiunea de „*determinant*" (determină proprietățile formei pătratice) – *Disquisitiones arithmeticae(1801)*; descrie operațiile de înmulțire matricială şi inversă a unei matrici în contextul tabloului coeficienților unei forme pătratice. Gauss dezvoltă *eliminarea Gaussiană* pe când studia orbita asteroidului Pallas de unde obține un sistem liniar cu 6 ecuații cu 6 necunoscute.

- 1812, Cauchy folosește termenul de „*determinant*” în sensul cunoscut azi.
- 1826, Cauchy găsește valorile proprii şi deduce rezultate legate de diagonalizarea unei matrici. Introduce noțiunea de matrici asemenea şi demonstrează ca acestea au aceeaşi ecuație caracteristică. Demonstrează că orice matrice reală simetrică este diagonalizabilă.

- 1850, Sylvester introduce pentru prima data termenul de ***matrice*** (din latină, „uter” – un loc unde ceva se formează sau este produs, „*an oblong arrangement of terms*”)
- 1855, Cayley – algebră matricială, prima definiţie abstarctă a unei matrici. Studiază transformările liniare şi compunerea lor ceea ce îl conduce la operaţiile cu matrici (adunare, înmulţire, înmulţirea cu un scalar, inversa)

- 1858, Cayley în *Memoriu asupra teoriei matricilor : „Sunt multe lucruri de spus despre această teorie a matricilor şi, după părerea mea, această teorie ar trebui să preceadă teoria determinanţilor”*
- Jordan (1870 – Treatise on substitutions and algebraic equations – forma canonică Jordan), Frobenius (1878 – On linear substituions and bilinear forms, rangul unei matrici), Peano

- 1890, Weierstrass – On determinant theory, definiţia axiomatică a determinantului
- 1925, Heisenberg reinventează algebra matricială pentru mecanica cuantică
- 1947, vonNeuman & Goldstine introduc numerele de condiţionare atunci când analizează erorile de rotunjire
- 1948, Turing introduce descompunerea LU a unei matrici
- 1958, Wilkinson dezvoltă factorizarea QR

….