ALGORITMICA GRAFURILOR
Săptămâna 11

C. Croitoru

croitoru@info.uaic.ro

FII

December 8, 2013

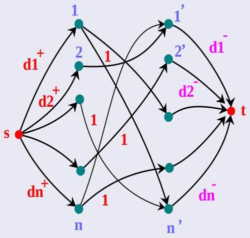
OUTLINE

1. **Fluxuri** (ag 12-13 allinone.pdf pag. 260 $\longrightarrow$ 280)
2. **Problemele pentru seminarul 11**

Recunoașterea secvențelor digrafice.

Date $(d_i^+)_{i=1,n}$ și $(d_i^-)_{i=1,n}$, există un digraf G cu n vîrfuri astfel încît $G = (\{1,\ldots,n\}, E)$ și $d_G^+(i) = d_i^+$ și $d_G^-(i) = d_i^-$ $\forall i = 1, n$?

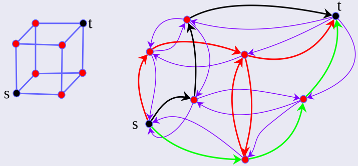
Dacă $0 \leq d_i^+ \leq n-1$ și $0 \leq d_i^- \leq n-1$ $\forall i = 1, n$ și $\sum_{i=1,n} d_i^+ = \sum_{i=1,n} d_i^- = m$ (unde, $m = |E|$, iar $d_i^+, d_i^- \in \mathbf{Z}$), construim rețeaua bipartită:



Răspunsul este da dacă și numai dacă în această rețea, există un flux întreg de valoare maximă m.

Determinarea numărului de muchie-conexiune al unui graf.

Fie $G = (V, E)$ un graf. Pentru $s, t \in V, s \neq t$, definim:
-$p_e(s, t)$ = nr. maxim de drumuri cu muchii disjuncte ce unesc s și t.
-$c_e(s, t)$ = cardinalul minim al unei mulțimi de muchii, prin îndepărtarea căreia din graf, între s și t nu mai există drumuri.
Construim din G digraful G_1, înlocuind fiecare muchie cu o pereche de arce simetrice. Considerăm $c : E(G_1) \to \mathbf{Z}_+$, $c(e) = 1, \forall e \in E(G_1)$.
Fie x^0 un flux întreg de valoare maximă în $R = (G_1, s, t, c)$.



Fluxul pe arcele groase este 1, pe cele subtiri 0.

Rezultă că $v(x^0) = p_e(s, t)$. Dacă (S, T) e secțiune de capacitate minimă, avem $c(S, T) = v(x^0) = c_e(s, t)$.

Corolar G conex:

$$\lambda(G) = \min_{\substack{s,t \in V(G) \\ s \neq t}} c_e(s, t). \qquad (*)$$

Determinarea numărului de muchie-conexiune al unui graf.

Pentru a afla $\lambda(G)$ ar trebui să rezolvăm cele $\frac{n(n-1)}{2}$ probleme de flux din $(*)$.

Dacă fixăm un vîrf s_0 și rezolvăm $n-1$ probleme de flux cu $t \in V - s_0$ se va obține în mod necesar o pereche s_0, t_0 pentru care $c(s_0, t_0) = \lambda(G)$.

Rezultă: în $O(n \cdot (nm + n^2c)) = O(n^2m)$ **se pot determina** $\lambda(G)$ **și o mulțime separatoare de muchii de cardinal minim în** G**.**

Determinarea numărului de conexiune al unui graf.

$G = (V, E)$ este un graf și $s, t \in V, \quad s \neq t, \quad st \notin E$
-$\mathbf{p}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ = numărul maxim de $st-$drumuri cu mulțimile de vîrfuri disjuncte (cu excepția extremităților),
-$\mathbf{c}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ = cardinalul minim al unei mulțimi de vîrfuri $st-$ separatoare,
Teorema lui Menger $\Rightarrow$

$$p(s, t) = c(s, t) \qquad (*)$$

Numărul de conexiune $k(G)$ al grafului G este

$$k(G) = \begin{cases} n-1 & \text{dacă } G = K_n \\ \min\limits_{\substack{s,t \in V \\ st \notin E}} c(s, t) & \text{dacă } G \neq K_n \end{cases} \qquad (**)$$

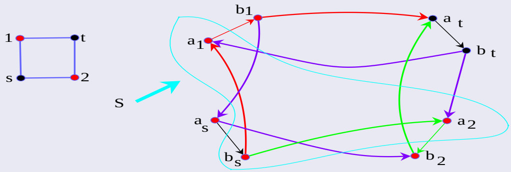
Fie $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ digraful construit din G astfel:
-$\forall v \in V$ considerăm $a_v, b_v \in V(G_1)$ și $a_v b_v \in E(G_1)$;
- $\forall vw \in E$ considerăm $b_v a_w, b_w a_v \in E(G_1)$.

Definim $c : E(G_1) \rightarrow \mathbf{Z}_+$ prin

$$c(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } e = a_v b_v \\ \infty & \text{altfel.} \end{cases}$$

Determinarea numărului de conexiune al unui graf.

Considerăm rețeaua $R = (G_1, b_s, a_t, c)$. Exemplu:



Arcele groase au capacitate infinit, cele subtiri 1.

x^0 flux întreg de la b_s la a_t în R de valoare maximă $\Rightarrow$ $\mathbf{v(x^0) = p(s,t)}$.

(S, T) o secțiune în R a.î. $v(x^0) = c(S, T)$. $\Rightarrow$ $c(s, t) = |A_0| = c(S, T) = v(x_0) = p(s, t)$, unde A_0 este o mulțime de vîrfuri $st-$ separatoare de cardinal minim.

Pentru a determina $k(G)$ determinăm minimul din (**) prin rezolvarea a $|E(\overline{G})|$ probleme de flux. Se poate construi un algoritm de complexitate $\mathbf{O(m(nm + n^2 \log n))}$.

Flux de cost minim.

Fie $R = (G, s, t, c)$ o rețea și x un flux de la s la t în R.
Considerăm $a : E \to \mathbf{R}$ o funcție de cost care asociază fiecărui arc $ij \in E$ $a(ij) = a_{ij}$ costul (transportului unei unități de flux) pe arcul ij. **Costul fluxului** x se definește ca fiind

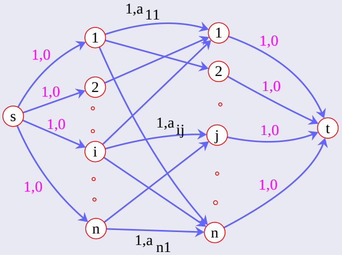
$$a(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}.$$

Problema fluxului de cost minim
Dată R o rețea, $v \in \mathbf{R}^+$ și $a : E \to \mathbf{R}$ funcție de cost, să se determine x^0 flux în R astfel încît

$$a(x^0) = \min\{a(x) \mid x \text{ flux în } R, v(x) = v\}.$$

Problema simplă a atribuirii Se dispune de n lucrători și n lucrări. Costul atribuirii lucrătorului i la lucrarea j este $a_{ij} (i, j \in \{1, \ldots, n\})$. **Să se atribuie fiecare dintre cele n lucrări la cîte un lucrător, astfel încît costul total al atribuirii să fie minim.**

Problema atribuirii.



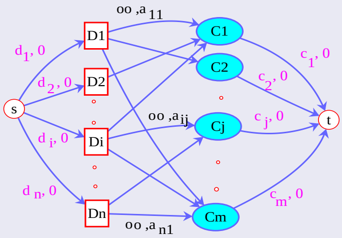
Un flux întreg de valoare n și de cost minim, oferă soluția problemei atribuirii.

Problema simplă a transporturilor (Hitchcock-Koopmans): O marfă disponibilă în depozitele $D_1, \ldots, D_n$ în cantitățile $d_1, \ldots, d_n$ este solicitată în centrele de consum $C_1, C_2, \ldots, C_m$ în cantitățile $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Se cunoaște costul a_{ij} al transportului unei unități de marfă de la depozitul D_i la centrul de consum $C_j (\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \forall j \in \{1, \ldots, m\})$. Se cere **să se stabilească un plan de transport care să satisfacă toate cererile și să aibă costul total minim**

Flux de cost minim

Problema transporturilor

Dacă $\sum_{i=1,n} d_i \geq \sum_{j=1,m} c_j$, un flux de cost minim și de valoare $v = \sum_{i=1,m} c_i$ în rețeaua următoare, rezolvă problema.



Definiție. Fie x un flux în $R = (G, s, t, c)$ și $a : E \to \mathbf{R}$ o funcție de cost. P C-drum în R relativ la fluxul x, $\Rightarrow$ **costul drumului** P este

$$a(P) = \sum_{\substack{ij \in P \\ ij \text{ direct}}} a_{ij} - \sum_{\substack{ij \in P \\ ij \text{ invers}}} a_{ji}.$$

Dacă C este un C-drum închis, $a(C)$ se calculează după aceeași formulă, după stabilirea unui sens de parcurgere a lui C.

Flux de cost minim

Soluția problemei fluxului de cost minim.

Dacă P este drum de creștere relativ la fluxul x, atunci $x^1 = x \bigotimes r(P)$ este un flux de valoare $v(x^1) = v(x) + r(P)$ și de cost $a(x) + r(P) \cdot a(P)$.

Dacă C este un C-drum închis relativ la x, atunci $x^1 = x \bigotimes r(C)$ este un flux de valoare $v(x^1) = v(x)$ și de cost $a(x^1) = a(x) + r(C) \cdot a(C)$.

Dacă $a(C) < 0$ atunci x^1 este un flux de aceeași valoare ca și x, dar de cost strict mai mic.

Teoremă. *Un flux de valoare v este de cost minim dacă și numai dacă nu admite C-drumuri închise de cost negativ.*

Teoremă. *Dacă x este un flux de valoare v și de cost minim iar P_0 este un drum de creștere, astfel încît*

$$a(P_0) = \min\{a(P) \mid P \text{drum de creştere relativ la } x\},$$

atunci $x^1 = x \bigotimes r(P_0)$ este un flux de valoare $v(x^1) = v + r(P_0)$ și de cost minim.

Flux de cost minim

Algoritm generic de rezolvare a problemei fluxului de cost minim.

Algoritm generic de rezolvare a problemei fluxului de cost minim

0: Se consideră $x = (x_{ij})$ un flux cu valoarea $v' \leq v$;
{x poate fi fluxul nul sau un flux y determinat cu ajutorul algoritmului de flux maxim și apoi considerînd $x = (\frac{v}{v(y)} y)$}

1: **while** ($\exists$ circuite de pondere < 0 relativ la $\overline{a}_{ij}$) **do**
{ determină un astfel de circuit;
modifică fluxul pe acest circuit }

2: **while** $v(x) < v$ **do**
{ aplică un algoritm de drum minim în raport cu ponderile $\overline{a}_{ij}$ pentru depistarea unui C-drum P de cost minim;
$x \leftarrow x \bigotimes \min(r(P), v - v(x))$ }

Complexitatea pentru pasul 2 este $O(n^3 v)$, dacă se pleacă de la fluxul nul. Se poate dovedi că pasul 1 se poate implementa astfel ca numărul iterațiilor să fie $O(nm^2 logn)$.

Problemele pentru seminarul 11

Se vor discuta (cel puțin) patru probleme dintre următoarele:

1. **Problema 1 Setul 11”**
2. **Problema 1 Setul 12**
3. **Problema 4, Setul 15**
4. **Problema 3 Setul 11’**
5. **Problema 2, Setul 16**