Setul de probleme 1

soluţiile se primesc

miercuri 6 noiembrie între orele 14 şi 16, la cabinetul C-402

30 octombrie 2013

Problema 1. Demonstraţi că pentru orice graf orientat cu măcar două vârfuri, $G = (V, E)$, se poate construi în timp polinomial (în raport cu numărul de vârfuri), o bipartiţie (S, T) a mulţimii de vârfuri V ($S \cup T = V$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$) astfel încât

$$\left|\{st \in E | s \in S, t \in T\}\right| \geq \frac{|E|}{4}.$$

(2+2 = 4 puncte)

Problema 2. Un arbore orientat, $\vec{T}$, este un digraf obţinut prin orientarea arbitrară a muchiilor unui arbore T. Dacă $\vec{T}$ este un arbore orientat, o *in-frunză* a lui $\vec{T}$ este un vârf $v \in V(\vec{T})$ cu gradul interior 0 şi gradul exterior 1 ($d^-_{\vec{T}} = 0 \ \wedge \ d^+_{\vec{T}} = 1$) şi o *out-frunză* a lui $\vec{T}$ este un vârf $v \in V(\vec{T})$ cu gradul interior 1 şi gradul exterior 0 ($d^-_{\vec{T}} = 1 \ \wedge \ d^+_{\vec{T}} = 0$).

Considerăm următorul algoritm:

```
T ← un arbore oarecare;
T⃗ ← o orientare arbitrara lui T;
while T⃗ are mai mult de un vârf do
    elimina din T⃗ ori toate in-frunzele ori toate out-frunzele.
```

Demonstraţi că $f(\vec{T})$, numărul iteraţiilor *while* din algoritmul de mai sus, satisface următoarele inegalităţi:

$$\lceil diam(T)/2 \rceil \leq f(\vec{T}) \leq diam(T).$$

(2+2 = 4 puncte)

Bonus 3 puncte: Următoarea problemă este din **P** sau este **NP**-completă?

Desfrunzire: Date un arbore orientat $\vec{T}$ şi $k \in \mathbf{N}$, este $f(\vec{T}) \leq k$?

Problema 3. Pentru un graf $G = (V, E)$ se consideră *gradul mediu*: $ad(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$ şi *gradul mediu maxim*:

$$mad(G) = \max\{ad(H) : H \text{ subgraf indus al lui } G\}.$$

Fie $k \geq 3$ un număr întreg. Demonstraţi că dacă un graf G are numărul cromatic mai mare decât k şi gradul mediu maxim este cel mult k, atunci G are un subgraf indus k-regulat

$(\chi(G) > k \ \wedge \ mad(G) \leq k \ \Rightarrow \ \exists A \subseteq V(G)$ a. î. $[A]_G$ este k-regulat).

(**2 puncte**)

Problema 4. Fie $G = (V, E)$ digraf, $V = \{1, \ldots, n\}$, $s \in V$ şi $a : E \rightarrow$ **R**, astfel încît $\forall C$ circuit în G avem $a(C) > 0$. Se consideră tablourile de întregi $u[1..n]$ şi $inainte[1..n]$ iniţializate astfel: $u[i] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = s \\ \infty & \text{dacă } i \neq s \end{cases}$ şi $inainte[i] = 0$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Fie **try** următoarea procedură:

try$(e = ij \in E)$

if $u[i] + c(e) < u[j]$ **then** $\{\ u[j] \leftarrow u[i] + c(e);\ inainte[j] \leftarrow i\ \}$

a) Demonstraţi că după orice secvenţă (finită) de apeluri ale procedurii **try**, dacă $u[j] < \infty$, atunci există un drum P în G de la s la j de cost $a(P) = u[j]$.

b) Fie $P = (v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k-1}v_k, v_k)$, un drum de cost minim de la $v_0 = s$ la $v_k = j$ în G. Fie secvenţa (finită) de apeluri ale procedurii **try** – **try**(e_1), **try**(e_2), …, **try**(e_n) – astfel încât arcele drumului P apar în secvenţă în ordinea lor de parcurgere (există indicii $1 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leq n$ astfel încât $e_{t_1} = v_0v_1, \ldots, e_{t_k} = v_{k-1}v_k$).
Demonstraţi că după o astfel de secvenţă de apeluri avem $u[j] = a(P)$ şi $\{j, inainte[j], inainte[inainte[j]], \ldots, s\}$ sunt vârfurile unui drum de cost minim de la s la j.

(**2+2= 4 puncte**)

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.
2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.
3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.
4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.
5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.