Setul 9

de probleme şi exerciţii de matematică

(relative la limite de funcţii şi continuitatea funcţiilor)

S9.1 Prin folosirea exclusivă a unor limite fundamentale adecvate, să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\nearrow 1} \dfrac{\sin(p \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $p \in \mathbb{R}^*$;

b) $\lim\limits_{x\searrow 0} \left(\dfrac{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+kx)}{\sum\limits_{k=1}^{n} n^{kx-1}} \right)^{\frac{1}{x}}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} \right)$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$;

d) $\lim\limits_{x\nearrow \frac{\pi}{4}} \left((\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}, \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\pi - 4x}}, \dfrac{2^{\operatorname{ctg} x} - 2}{x - \dfrac{\pi}{4}}, \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right), \dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x} \right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^2}, \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^m}{e^{nx} - e^{mx}} \right)$, $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, m \neq n$.

S9.2 Să se studieze existenţa şi, atunci când este cazul, să se facă determinarea limitelor iterate $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ şi $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$, a limitelor parţiale $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ şi $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$, cât şi a limitei globale $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pentru funcţiile $f : A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$ date mai jos:

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|}; \quad \text{b) } f(x,y) = \frac{\sqrt{1 + x^2 y^2} - 1}{x^2 + y^2};$$

$$\text{c) } f(x,y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}; \quad \text{d) } f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{e) } f(x,y) = y^2 \ln(x^2 + y^2); \quad \text{f) } f(x,y) = \frac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^6 + y^6}.$$

S9.3 Să se arate că funcţiile următoare nu au limită globală în origine, deşi au în acest punct limite parţiale, limite iterate şi chiar limite în orice direcţie admisă:

a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = y\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{x-y}, \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)$;

c) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y^2 = 2x\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$;

d) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2y^2}{(x-y)^2 + x^2y^2}, (1+|xy|)^{\frac{2}{x^2+y^2}} \right)$.

S9.4 Să se determine următoarele limite:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}, \frac{\sin(x^3+y^3)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \right)$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{1}{xyz} \operatorname{tg} \frac{xyz}{1+xyz}, (1+xyz)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \right)$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{1-\cos(1-\cos(x^2+y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \frac{x^2y^2z^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2} \right)$.

S9.5 Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

a) $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, unde

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & , x \in [-1, 0) \\ p & , x = 0 \\ e^{\frac{1-\sqrt{1+x}}{x^2 e^x}} & , x > 0 \end{cases} \quad \text{şi}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin \dfrac{1}{x} & , x \in [-1, 0) \\ p & , x = 0 \\ \cos \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & , x > 0 \end{cases} \quad , \text{ cu } p \in \mathbb{R}.$$

b) $f : A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x^2 + y^2 < \dfrac{\pi}{2} \right\} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}\ (x^2+y^2)} & , (x,y) \in A\{(0,0)\} \\ \alpha & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$, unde

$$f_1(x,y,z) = \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)^p \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & , (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases} \quad ,$$

$$f_2(x,y,z) = \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)^p e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \quad , \text{ cu } p \in \mathbb{R}.$$

S9.6 Să se determine mulţimea punctelor de discontinuitate pentru fiecare dintre funcţiile reale următoare:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{y} e^{-|x|y^{-2}} & , y \neq 0 \\ 1 & , y = 0; \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & , x+y \neq 0 \\ 0 & , x+y = 0; \end{cases}$

c) $f(x,y,z)=\begin{cases}(x^2+y^2+z^2)^{1/3}\ln(x^2+y^2+z^2) & ,(x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 1/3 & ,(x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$

S9.7 Să se arate că funcţiile reale de mai jos sunt parţial continue în origine sau chiar continue pe orice direcţie, în câteva din cazuri, dar nu şi global continue în respectivul punct:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0);\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y}{x^6+y^3} & ,y\neq -x^2\\ 0 & ,y=-x^2;\end{cases}$

c) $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy+yz+xz)}{\sqrt{(x^4+y^2+z^4)}} & ,(x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ,(x,y,z)=(0,0,0);\end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases}\min\left\{\left|\dfrac{x}{y}\right|,\left|\dfrac{y}{x}\right|\right\} & ,(x,y)\in\mathbb{R}^2\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\}\\ 0 & ,\ \text{în rest.}\end{cases}$

S9.8 Să se stabilească care dintre următoarele funcţii este uniform continuă pe mulţimea de definiţie indicată:

a) $f:(0,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}\sin\dfrac{2}{x};$

b) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}^2,\ f(x)=\left(\dfrac{x}{x^2+2},\dfrac{\arcsin(x+1)}{x+1}\right);$

c) $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\sin\dfrac{\pi}{1-x^2-y^2};$

d) $f:[0,\pi]\times[0,\dfrac{\pi}{3}]\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\big(\sin x+\cos y, e^{-x}\mathrm{tg}\ y-1\big).$

S9.9

a) Să se arate că funcţia $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, definită prin $f(x)=(\cos x,\sin x)$ este continuă şi că, în virtutea acestui fapt, mulţimea $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ este conexă.

b) Care dintre următoarele mulţimi este conexă şi care nu?

$$A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2-y^2=1\};\quad A_2=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q};$$

$$A_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 4 \text{ şi } y\neq x+1\};\quad A_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\leq x^2+y^2\leq 2\}.$$

S9.10

a) Fie $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ o aplicaţie bijectivă. Să se arate că f este homeomorfism între spaţiile euclidiene $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^q$ dacă şi numai dacă, pentru orice mulţime nevidă $A\subseteq\mathbb{R}^p$, are loc relaţia: $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$.

b) Să se arate că $(\mathbb{R},d_e)$ şi $(\mathbb{R},d_d)$, unde d_e desemnează metrica euclidiană, iar d_d metrica discretă, nu sunt homeomorfe.

S9.11 Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^x-27}{x-3}, \dfrac{x\sin 3-3\sin x}{x\sin x-3\sin 3}, \dfrac{3^x-x^3}{x-3}\right);$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arcsin\dfrac{x+2}{\sqrt{x^4-x^2+1}}, \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}, \left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x\right);$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), (x-y)\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2x^2+3y^2}, (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right);$

d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\dfrac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{2x-3y}{z}, (x+y+z)\ln(1+|xyz|)\right).$

S9.12 Să se analizeze continuitatea funcţiilor:

a) $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$, unde

$$f_1(x)=\begin{cases}\mathrm{tg}:x, & x\in\mathbb{Q}\cap\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \mathrm{ctg}:x, & x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases} \quad \text{şi } f_2(x)=\begin{cases}x^2+1-\frac{\pi}{16}, & x\in\mathbb{Q}\cap\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{\pi}{4x}, & x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases};$$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$, unde

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x^2-y+2}}{y^2-4}, & \text{când } 2\neq y\leq x^2+2\\ 2^{-3}, & \text{în rest}\end{cases} \quad \text{şi}$$

$$f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^4-y^2)^2}{x^6}, & \text{când } y^2\leq x^4\neq 0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases};$$

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\alpha e^{x+y+z}, & \text{dacă } x+y+z<0\\ \beta & \text{dacă } x+y+z\geq 0\end{cases} \quad \text{unde } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

S9.13 Se pot prelungi, prin continuitate, la $\mathbb{R}^2$, funcţiile date în continuare?

a) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\dfrac{\ln(1+x^2|y|)}{x^2+y^2}, \left(1+\sin(x^4+y^4)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right);$

b) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=\left(\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{|x|+|y|}, (|x|+|y|)^{x^2+y^2}, \dfrac{xy}{\sqrt{2x^2+3y^2}}\right).$

S9.14 Sunt funcţiile de mai jos uniform continue pe $\mathbb{R}^2$ şi respectiv $\mathbb{R}^n$?

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{dacă } (x,y)=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\\ \frac{4}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1)\setminus\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}\\ 1, & \text{dacă } (x,y)\notin B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1)\end{cases};$$

b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(||x||-1)(2-||x||)}}, & \text{dacă } ||x|| \in (1,2) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

S9.15

a) Să se arate că mulţimea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1+t^2), t \in [-1,1]\right\}$ este compactă şi conexă.

b) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \left((|x|+|y|+|z|)\ln\left(1+\dfrac{1}{|x|+|y|+|z|}\right), \sqrt{2-(|x|+|y|+|z|)}\right), & (x,y,z) \in B \\ (0,\sqrt{2}), & (x,y,z) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \\ (\ln 2, 1), & (x,y,z) \in C \end{cases},$$

unde $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \ \leq 1\right\} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, iar $C = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \ \leq 1\right\}$.
De asemenea, fie $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2+y^2, x+y+z \leq 2\right\}$.
Să se arate că:

i) mulţimea A este compactă şi conexă;

ii) $f|_A$ este uniform continuă;

iii) $f(A)$ este compactă şi conexă.

Bibliografie orientativă

1. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

2. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

3. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică. Exerciţii şi probleme*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.