

# Teoria probabilităților discrete

Olariu E. Florentin

Martie, 2014

## Table of contents

### Formule probabilistice

Formula de înmulțire

### Scheme probabilistice

Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarse)

Schema lui Poisson

Schema binomială

Schema geometrică

### Variabile aleatoare discrete

Introducere

Repartiția unei variabile aleatoare discrete

### Exerciții

Formula de înmulțire

Scheme probabilistice

Repartiții ale variabilelor aleatoare discrete

### Bibliography

## Formula de înmulțire

### Propoziția 1

*Fie  $A_1, A_2, \dots, A_n$  evenimente aleatoare oarecari, atunci*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

**dem.:** Membrul drept al relației de mai sus este egal cu

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \dots \\ \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

(după simplificările evidente). ■

## Formula de înmulțire

*Exemplu.* Într-o urnă sunt patru bile albe și șase bile negre. Se scot trei bile, una câte una fără întoarcere.

- (a) Care este probabilitatea obținerii a trei bile negre?
- (b) Care este probabilitatea ca prima și a treia bilă să fie albe iar cea de-a doua neagră?
- (c) Dar probabilitatea obținerii a două bile negre și una albă?

*Soluție:*

- (a) Pentru prima întrebare fie  $A_i =$  "a  $i$ -a bilă extrasă este neagră".

$$P(A_1) = \frac{6}{10}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{5}{9}, \quad P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{8} \text{ și}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}.$$

## Formula de înmulțire

(b) Pentru a două cerință probabilitatea cerută este

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2|\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_3|\bar{A}_1 \cap A_2),$$

iar

$$P(\bar{A}_1) = \frac{4}{10}, P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{6}{9}, P(\bar{A}_3|\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{3}{8}.$$

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{10}.$$

## Formula de înmulțire

(c) Pentru a treia cerință probabilitatea cerută este

$$\begin{aligned} P\left(\left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right)\right) = \\ P\left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \end{aligned}$$

și fiecare dintre aceste trei probabilități se calculează cu formula de înmulțire. De exemplu

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(\bar{A}_2 \mid A_1\right) \cdot P\left(A_3 \mid A_1 \cap \bar{A}_2\right) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{6} \cdot \clubsuit$$

## Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarse)

- Această schema probabilistică folosește următorul context: într-o urnă sunt  $n_1$  bile albe și  $n_2$  bile negre,  $n = n_1 + n_2$ . Din urnă se extrag, fără î ntoarcere  $k$  bile (cele  $k$  bile sunt extrase simultan din urnă).

### Propoziția 2

*Fie  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $k_1 \leq n_1$ ,  $k_2 \leq n_2$  și  $k = k_1 + k_2$ . Probabilitatea ca dintre cele  $k$  bile, exact  $k_1$  să fie albe și  $k_2$  să fie negre este*

$$\frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

## Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarse)

- Mai general: într-o urnă sunt  $n_1$  bile de culoare  $c_1$ ,  $n_2$  bile de culoare  $c_2$ , ...,  $n_p$  bile de culoare  $c_p$  (unde  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ ). Din urnă se extrag, fără înotarcere  $k$  bile (extrase simultan).

### Propoziția 3

*Fie  $k_1, k_2, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $k_i \leq n_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  și  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_p$ . Probabilitatea ca dintre cele  $k$  bile, exact  $k_1$  să fie de culoare  $c_1$ ,  $k_2$  să fie de culoare  $c_2$ , ...,  $k_p$  să fie de culoare  $c_p$  este*

$$\frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{n_p}{k_p}}{\binom{n}{k}}$$



## Schema lui Poisson

- Cadrul acestei scheme este următorul: considerăm un experiment aleator și  $n$  evenimente aleatoare independente (asociate acestui experiment):  $A_1, A_2, \dots, A_n$  cu probabilități cunoscute:

$$P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_n) = p_n.$$

### Propoziția 4

*Fie  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ ; probabilitatea ca dintre cele  $n$  experimente să se realizeze exact  $k$  este egală cu coeficientul lui  $x^k$  din dezvoltarea polinomului*

$$(p_1x + q_1) \cdot (p_2x + q_2) \cdot \dots \cdot (p_nx + q_n),$$

*unde  $q_i = P(\overline{A_i})$ ,  $i = \overline{1, n}$ .*

## Schema binomială

- Considerăm un experiment aleator și un eveniment aleator  $A$  cu probabilitate cunoscută  $P(A) = p$ . Experimentul se efectuează de  $n$  ori în mod independent.

### Propoziția 5

*Probabilitatea ca evenimentul  $A$  să se realizeze de exact  $k$  ori ( $0 \leq k \leq n$ ) în cele  $n$  efectuări ale experimentului este  $p^k(1-p)^{n-k} \binom{n}{k}$ .*

## Schema binomială

*Exemplu.* Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea ca de exact 6 ori produsul celor două fețe să fie 12?

*Soluție:* Fie  $A = \text{"produsul fețelor este 12"}$  (la o aruncare),  $A = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$ , de unde obținem  $P(A) = 4/36 = 1/9$ . Probabilitatea ca  $A$  să se realizeze de exact 6 ori este

$$\frac{1}{9^6} \cdot \frac{8^4}{9^4} \cdot \binom{10}{6} \cdot \clubsuit$$

## Schema geometrică

- Această schemă probabilistică are următorul context: efectuăm un experiment aleator până când se realizează un eveniment aleator  $A$  (legat de acest experiment), cu probabilitate cunoscută  $P(A) = p$ .

### Propoziția 6

*Probabilitatea ca evenimentul  $A$  să se realizeze exact la  $n$ -a efectuare a experimentului ( $n \geq 1$ ) este  $p(1 - p)^{n-1}$ .*

## Schema geometrică

*Exemplu.* O urnă conține trei bile roșii, două negre și patru bile albastre. Se scoate o bilă din urnă și apoi se pune la loc. Se repetă experiența până se obține o bilă roșie sau una albastră. Care este probabilitatea ca abia la a patra extragere să se realizeze acest eveniment?

*Soluție:* Fie  $A$  = "bila extrasă este roșie sau albastră",  $P(A) = 7/9$ . Probabilitatea ca evenimentul  $A$  să se producă abia la a patra extragere:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{2^3}{9^3} \cdot \clubsuit$$

## Introducere

- ▶ Adesea după efectuarea unei experiențe aleatoare suntem interesați să determinăm valoarea unei funcții ce are ca argument rezultatul experimentului: suma/produsul zarurilor, de câte ori apare stema la aruncarea unei monede etc.
- ▶ Acesta deoarece rezultatul unui experiment este de multe ori unul cantitativ (i.e., se poate măsura într-un anume fel), este un număr întreg sau real.
- ▶ Rezultatul numeric al unui experiment aleator se numește *variabilă aleatoare* - deoarece este un rezultat care variază aleator: de la o efectuare la alta a experimentului nostru rezultatul poate fi altul conform șanselor corespunzătoare.
- ▶ Informal o variabilă aleatoare este o funcție care asociază fiecărui eveniment aleator elementar un număr - care este rezultatul unei observații sau măsurători a evenimentului.

## Repartiția unei variabile aleatoare discrete

### Definiția 1

*Dat un experiment aleator  $\mathcal{E}$  și  $\Omega$  mulțimea evenimentelor aleatoare elementare, o **variabilă aleatoare reală** este o funcție  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . O **variabilă aleatoare** se numește **discretă**, dacă imaginea ei are cardinal cel mult numărabil. Altfel este numită **variabila aleatoare continuă**.*

- Dacă spațiul evenimentelor elementare aleatoare este discret (i.e.,  $|\Omega| \leq \aleph_0$ ), atunci o variabilă aleatoare asociată experimentului corespunzător nu poate fi decât discretă.

## Repartiția unei variabile aleatoare discrete

- ▶ Dacă  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , atunci mulțimea perechilor  $(x_i, p_i)$  formează distribuția sau repartiția variabilei aleatoare discrete  $X$  și uzual se notează sub forma unui tabel:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

- ▶ Se utilizează frecvent notațiile  $P\{X = x_i\} = P(X = x_i) = p_i$ .  
În mod evident suma (care poate fi și o serie) a probabilităților din a doua linie a tabelului de repartiție este 1:

$$\sum_i p_i = 1, 0 < p_i \leq 1, \forall i$$



## Repartiția unei variabile aleatoare discrete

### Definiția 2

Fie  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  o variabilă aleatoare discretă

- (i) Se numește **funcție de masă de probabilitate** a variabilei aleatoare discrete  $X$  funcția  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , definită prin  $f(x_i) = p_i = P\{X = x_i\}$ .
- (ii) Numim **funcție de repartiție (sau de distribuție)** a variabilei aleatoare  $X$  (care poate fi și continuă), funcția  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , dată prin

$$F(a) = P\{X \leq a\}$$

## Repartiția unei variabile aleatoare discrete

- ▶ Funcția de masă de probabilitate sau funcția de repartiție definesc complet o variabilă aleatoare discretă: tot ceea ce interesează relativ la o astfel de variabilă sunt informațiile legate de probabilitățile evenimentelor elementare, care pot fi furnizate de oricare dintre aceste două funcții.
- ▶ O variabilă aleatoare  $X$  este numită și **distribuție**, înțelegând prin aceasta clasa tuturor variabilelor aleatoare care au aceeași funcție de repartiție ca și  $X$ .

### Propoziția 7

Fie  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  funcția de repartiție a variabile aleatoare  $X$ .

- (i)  $F_X$  este o funcție crescătoare:  $F_X(a) \leq F_X(b)$ , pentru orice  $a < b$ .
- (ii)  $\lim_{a \rightarrow +\infty} F_X(a) = 1$  și  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0$ .

## Repartiția unei variabile aleatoare discrete

- După cum am notat deja, probabilitățile legate de variabila  $X$  pot fi determinate utilizând funcția sa de repartiție.

### Propoziția 8

*Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare, atunci*

$$P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a).$$

- Variabilele aleatoare discrete sunt date în general prin funcția de masă de probabilitate, în timp ce variabilele aleatoare continue sunt date prin funcția de repartiție (sau, după cum vom vedea ulterior, prin funcția de densitate de probabilitate).

## Repartiția unei variabile aleatoare discrete - exemple

*Exemplu.* Să presupunem că o variabilă aleatoare discretă  $X$ , are patru valori  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , cu  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  și probabilitățile

$$P\{X = x_1\} = 0.2, P\{X = x_2\} = 0.3,$$

$$P\{X = x_3\} = 0.1, P\{X = x_4\} = 0.4,$$

atunci funcția de repartiție  $X$  este definită prin

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < x_1 \\ 0.2, & a \in [x_1, x_2) \\ 0.5, & a \in [x_2, x_3) \\ 0.6, & a \in [x_3, x_4) \\ 1, & a \geq x_4 \end{cases} \spadesuit$$

## Repartiția unei variabile aleatoare discrete - exemple

*Exemplu.* Într-o urnă sunt patru bile albe, trei roșii și trei albastre. Se extrag din această urnă două bile simultan (sau fără întoarcere). Pentru fiecare bilă albă extrasă se câștigă 1\$ și se pierde 1\$ pentru o bilă albastră. Fie  $X$  câștigul total; determinăm repartiția lui  $X$ .

*Soluție:* Valorile posibile ale variabilei  $X$  sunt  $\{\pm 1, 0, \pm 2\}$ ; calculăm valorile funcție de masă de probabilitate (schema bilei neîntoarse)

$$f_X(-2) = P\{X = -2\} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15},$$

$$f_X(-1) = P\{X = -1\} = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{9}{45} = \frac{3}{15},$$

## Repartiția unei variabile aleatoare discrete - exemple

$$f_X(0) = P\{X = 0\} = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3},$$

$$f_X(1) = P\{X = 1\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15},$$

$$f_X(2) = P\{X = 2\} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

## Repartiția unei variabile aleatoare discrete - exemple

repartiția variabilei este

$$X : \left( \begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ \frac{1}{15} & \frac{3}{15} & \frac{5}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \end{array} \right) \cdot \clubsuit$$

## Exerciții pentru seminar

- ▶ **Formula de înmulțire:** I.1., I.3., I.4. (a)
- ▶ **Scheme probabilitice:** II.1., II.3., III.1., III.4., III.5, IV.1, IV.2., IV.4.
- ▶ **Variabile aleatoare discrete:** V.2., V.4. (a)
- ▶ **Rezervă:** I.2., I.4.(b), II.2., III.2, IV.5., V.1



## Exerciții - Formula de înmulțire

**I.1.** Într-o urnă sunt 6 bile albe, 4 albastre și 2 roșii. Se extrag succesiv și fără întoarcere trei bile. Care este probabilitatea ca:

- (a) prima bilă să fie albă, a doua albastră și ultima albă?
- (b) prima bilă să fie albastră iar ultimile două să fie roșii?

**I.2.** O urnă conține trei bile albe și două bile negre și patru bile roșii. Se extrag succesiv și fără întoarcere trei bile.

- (a) Care este probabilitatea ca toate bilele să fie roșii?
- (b) Dar probabilitatea ca două bile să fie negre și una albă?

## Exerciții - Formula de înmulțire

**I.3.** Se dau trei urne. Prima conține 3 bile albe și 1 neagră, cea de-a doua conține 4 bile albe și 5 negre iar a treia conține 1 bilă albă și 4 negre. Din prima urnă se extrage o bilă și se introduce în cea de-a doua, după care se extrage o bilă din cea de-a doua urnă și se introduce în cea de-a treia; în sfârșit se extrage o bilă din ultima urnă. Care este probabilitatea ca:

- (a) cele trei bile extrase să fie albe?
- (b) primele două bile să fie negre și ultima albă?
- (c) măcar o bilă să fie albă?

**I.4.** O urnă conține cinci bile albe și șapte bile negre. De fiecare dată când o bilă este extrasă din urnă, îi este notată culoarea și este înlocuită cu două bile de cealaltă culoare. Determinați probabilitatea

- (a) ca primele două bile extrase să fie de culori diferite.
- (b) ca prima bilă extrasă să fie albă, iar următoarele două negre.

## Exerciții - Formula de înmulțire

**1.5.** Două bile sunt colorate cu verde sau albastru și sunt apoi introduse într-o urnă. Oricare dintre cele două bile este colorată în verde cu probabilitate  $1/3$ .

- (a) Dacă se știe că s-a folosit culoarea albastră (i. e., cel puțin o bilă este albastră), care este probabilitatea ca amândouă bilele să fie albastre?
- (b) Urna se răstoarnă și o bilă albastră cade din urnă. Care este probabilitatea ca bila rămasă în urnă să fie verde?

**1.6\*.** Urna  $U_1$  conține trei bile roșii, urna  $U_2$  conține două bile negre, iar urna  $U_3$  conține o bilă neagră și o bilă roșie. Se alege la întâmplare și uniform o urnă. Se extrage o bilă din urna aleasă și este înlocuită cu o bilă de cealaltă culoare; apoi se mai extrage o bilă din urnă. Dacă prima bilă extrasă este roșie, care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie tot roșie?

## Exerciții - schema hipergeometrică

**II.1.** Dintr-un pachet de cărți de joc se extrag la întâmplare patru cărți.

- (a) Care este probabilitatea ca exact două dintre ele să fie de culoare roșie?
- (b) Care este probabilitatea ca una dintre ele să fie de culoare neagră?

**II.2.** Într-o urnă sunt patru bile negre și cinci bile albe; din urnă se extrag simultan patru bile. Care este probabilitatea ca

- (a) două bile să fie albe și două negre?
- (b) toate bilele să fie negre?
- (c) o bilă să fie albă și trei negre?

## Exerciții - schema hipergeometrică

**II.3.** Într-o urnă sunt trei bile roșii, patru bile albastre și cinci bile verzi; din urnă se extrag simultan patru bile. Care este probabilitatea ca

- (a) două bile să fie roșii, una albastră și una verde?
- (b) o bilă să fie roșie, una albastră și două verzi?
- (c) trei bile să fie albastre și una verde?

## Exerciții - schema binomială

**III.1.** Se aruncă o sută de monede.

- (a) Care este probabilitatea ca pe cincizeci dintre ele să apară stema?
- (b) Dar ca pe cel puțin cincizeci dintre ele să apară banul?

**III.2.** Se știe ca hard-discurile produse de compania HDD au o probabilitate de 0.05 de a avea defecțiuni. Compania vine hard-discurile în pachete de câte 10 și garantează că un astfel de pachet conține cel mult un disc cu defecțiuni, altfel pachetul poate fi înlocuit. Care este probabilitatea ca un pachet să fie înlocuit?

## Exerciții - schema binomială

**III.3.** Un sportiv nimereste o țintă cu probabilitatea 0.5; el trage de 10 ori asupra țintei. Care este probabilitatea ca

- a) ținta să fie atinsă de exact 5 ori?
- a) ținta să fie atinsă de cel puțin 2 ori?

**III.4.** Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea ca

- a) de exact cinci ori suma celor două fețe să fie mai mare sau egală cu 6, dar cel de-al doilea zar să fie diferit de 4?
- b) de cel mult opt ori suma celor două fețe să fie un număr prim?

**III.5.** Față de un adversar la fel de tare, ce este mai probabil să se câștige: două partide din patru sau trei partide din șase?

## Exerciții - schema binomială

**III.6\*.** Un zar este aruncat până apare fața șase a patra oară. Care este probabilitatea ca douăsprezece aruncări să fie suficiente?

**III.7\*.** Doi prieteni,  $\zeta$  (zeta) și  $\xi$  (xi), trebuie să plătească o cină, la care au luat parte împreună, cu un singur card de credit. Pentru a prelungi suspansul nu vor să decidă pe baza aruncării unei singure monede.  $\zeta$  propune să arunce fiecare o monedă de zece de ori și să plătească cel care obține de mai multe ori stema.  $\xi$  observă că în acest fel pot ajunge la egalitate și propune o variantă: în caz de egalitate  $\zeta$  să câștige, dar cu următoarea condiție  $\xi$  să arunce moneda de zece ori și  $\xi$  de unsprezece ori. Este corectă această propunere?

**III.8\*\*.** În contextul schemei binomiale: un experiment se repetă independent de  $n$  ori, se dă un eveniment  $A$  cu probabilitate  $p$  legat de acest experiment; care număr de realizări ale lui  $A$  este cel mai probabil?



## Exerciții - schema geometrică

**IV.1.** Dintr-un pachet de cărți de joc se scoate câte o carte (care apoi se pune la loc în pachet) până când se obține un as. Care este probabilitatea ca abia la a cincea extragere să se obțină un as?

**IV.2.** Se aruncă două zaruri de mai multe ori. Care este probabilitatea ca

- (a) abia la a treia aruncare suma lor este cel puțin opt?
- (b) produsul lor să fie cel puțin treizeci în primele două aruncări?

**IV.3\*.** Doi jucători aruncă succesiv două zaruri. Câștigă cel care obține primul suma mai mică sau egală cu 9. Care este probabilitatea de a câștiga jocul a primului jucător?

## Exerciții - schema geometrică

**IV.4.** Se aruncă două monede de mai multe ori. Care este probabilitatea

- (a) ca abia la patra aruncare să apară stema pe ambele monede?
- (b) ca abia la a patra aruncare să apară stema pe exact o monedă?

**IV.5.** Se extrage câte o carte dintr-un pachet de cărți de joc și apoi se pune la loc. Se repetă această experiență. Care este probabilitatea

- (a) ca abia la treia extragere să obținem o figură de treflă?
- (b) ca în nici una din primele patru extrageri să nu obținem vreun carou?

## Exerciții - repartiții ale variabilelor aleatoare discrete

**V.1.** O monedă falsificată are probabilitatea de a apare stema la o aruncare  $2/3$ . Moneda se aruncă de patru ori. Fie  $X$  variabila aleatoare care notează numărul maxim de apariții consecutive ale stemei. Să se determine repartiția variabilei  $X$ .

**V.2.** Sunt alese două bile la întâmplare dintr-o urnă care conține opt bile albe, patru bile negre și două bile galbene. Să presupunem că o bilă neagră valorează 2\$, iar una albă 1\$. Se notează cu  $X$  câștigul obținut; să se determine repartiția variabilei  $X$ .

**V.3.** Fie  $X$  diferența dintre numărul de apariții ale stemei și ale banului la aruncarea de trei ori a unei monede. Determinați repartiția și funcția de repartiție ale variabilei aleatoare  $X$ .

**V.4.** Un zar se aruncă de două ori. Fie  $X_1$  și  $X_2$  rezultatele obținute.

(a) Să se determine repartiția variabilei  $X = \min \{X_1, X_2\}$ .

(b) Să se determine repartiția lui  $Y = \max \{X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2\}$ .

## Anexa 1

**dem.:** (pentru Propoziția 2) Evident numărul total de posibilități este  $\binom{n_1 + n_2}{k_1 + k_2} = \binom{n}{k}$ . Numărul de cazuri favorabile: există  $\binom{n_1}{k_1}$  posibilități de a obține exact  $k_1$  bile albe și pentru fiecare dintre aceste posibilități există  $\binom{n - n_1}{k - k_1} = \binom{n_2}{k_2}$  posibilități ca restul de  $k - k_1 = k_2$  bile să fie negre. ■

## Anexa 1

**dem.:** (Pentru Propoziția 4) Fie  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$  evenimentele care se realizează dintre cele  $n$  ( $1 \leq i_j \leq n$ ). Se mai realizează evenimente de forma  $\bar{A}_i$ , cu  $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ . Aceste evenimente sunt independente; probabilitatea ca ele să se realizeze simultan este

$$\left( \prod_{j=1}^k p_{i_j} \right) \cdot \left( \prod_{i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} q_i \right), \text{ adunăm aceste probabilități:}$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left( \prod_{j=1}^k p_{i_j} \right) \cdot \left( \prod_{i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} q_i \right),$$

dar această sumă se mai poate obține adunând toate produsele de forma: pentru  $k$  dintre factorii polinomului alegem coeficientul lui  $x$ , iar pentru ceilalți  $(n - k)$  alegem termenul liber al binomului. Rezultatul este chiar coeficientul lui  $x^k$  din dezvoltarea polinomului.

## Anexa 1

**dem.:** (pentru Propoziția 5) Fie  $\mathcal{E}$  experimentul aleator din enunț. Putem modela un nou experiment aleator  $\mathcal{E}'$  care ca consta din  $n$  efectuări independente ale experimentului  $\mathcal{E}$ . Relativ la acest nou experiment definim următoarele evenimente aleatoare:  $A_i$  - acel eveniment care se realizează când la a  $i$ -a efectuare (din cadrul lui  $\mathcal{E}'$ ) a experimentului  $\mathcal{E}$  se produce evenimentul  $A$ .

Ajungem astfel la o schemă Poisson, în care evenimentele independente  $A_1, A_2, \dots, A_n$  au fiecare aceeași probabilitate  $p$ . Probabilitatea cerută este coeficientul lui  $x^k$  din dezvoltarea binomului  $[px + (1 - p)]^n$ .








## Anexa 1

**dem.:** (pentru Propoziția 6) Notăm cu  $A_i$  evenimentul care se realizează dacă și numai dacă evenimentul  $A$  se realizează la a  $i$ -a repetare a experimentului. Evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  sunt independente și au aceeași probabilitate  $p$ . Probabilitatea ca evenimentul  $A$  să se realizeze exact la  $n$ -a efectuare a experimentului este

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n) &= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_{n-1}) \cdot P(A_n) = \\ &= p(1 - p)^{n-1}. \end{aligned}$$



## Bibliography

-  Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scientific, 2002.
-  Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
-  Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
-  Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.
-  Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.