## 1.1 Probleme rezolvate

### Evenimente aleatoare şi formula lui Bayes

**1. (Proprietăţi derivate din definiţia funcţiei de probabilitate)**
***CMU, 2009 spring, Tom Mitchell, HW2, pr. 1.1***

**Fie două evenimente $A$ şi $B$.**

**a. Folosind doar proprietăţile din definiţia funcţiei de probabilitate, arătaţi că $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.**

**b. Demonstraţi *inegalitatea lui Bonferroni*: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.**

**c. Spunem că evenimentele $A$ şi $B$ sunt disjuncte dacă $P(A \cap B) = 0$.**

**În ipoteza în care $P(A) = 1/3$ şi $P(B) = 5/6$, este posibil ca $A$ şi $B$ să fie evenimente disjuncte? Justificaţi răspunsul.**

**<u>Răspuns:</u>**

**a.** $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

**Cum evenimentele $(A \cap B)$ şi $(A \cap \bar{B})$ sunt disjuncte, conform proprietăţii de „aditivitate numărabilă“ din definiţia funcţiei de probabilitate putem scrie $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, deci $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.**

**b. Întrucât $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, este imediat că $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$. Deci $P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B) = [P(A \cup B) - P(A \cap \bar{B})] + [P(A \cup B) - P(\bar{A} \cap B)] - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Cum $P(A \cup B) \leq 1$ (fiind o probabilitate) putem scrie că: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$, deci $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.**

**c. Pentru a studia posibilitatea ca evenimentele $A$ şi $B$ să fie disjuncte vom aplica inegalitatea lui Bonferroni:**

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow P(A \cap B) \geq \frac{1}{6} > 0$$

**Deci $P(A \cap B)$ nu poate fi $0$ şi, în consecinţă, evenimentele $A$ şi $B$ nu sunt disjuncte.**

**2. (Aplicarea proprietăţilor din definiţia funcţiei de probabilitate)**
***CMU, 2009 spring, Tom Mitchell, HW2, pr. 1.2.3***

**Robert şi Alina dau cu banul alternativ. Cel dintâi dintre ei care va obţine stema (în engleză: head) câştigă jocul. Alina este prima care va da cu banul.**

**a. Dacă $P(\textit{stemă}) = 1/2$, care este probabilitatea ca Alina să câştige jocul?**

***Indicaţie*: Încercaţi să enumeraţi toate situaţiile în care Alina poate câştiga.**

***Indicaţie*: Pentru orice $a \in (0, 1)$, avem $\sum_{i=0}^{i=\infty} a^i = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots = \dfrac{1}{1-a}$.**

**b. Dacă $P(\textit{stemă}) = p \in (0, 1]$, care este probabilitatea ca Alina să câştige jocul?**

**c. Ţinând cont de expresia obţinută la punctul $b$, dacă ar fi ca tu să joci acest joc, cum ai decide să intri în joc: primul ori al doilea (presupunând, bineînţeles, că ai avea posibilitatea să alegi)?**

**Răspuns:**

**a. Alina aruncă moneda în paşii impari. Ea câştigă jocul dacă la pasul $2n+1$ obţine stema şi până la pasul respectiv nimeni nu a obţinut stema.**

**Notăm cu $A$ evenimentul ca Alina să câştige jocul şi cu $A_i$ evenimentul ca Alina să câştige jocul la a $i-$a aruncare a banului. Întrucât evenimentele $A_i$ sunt disjuncte ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$) şi $A = A_1 \cup A_3 \cup \ldots$, conform proprietăţii de aditivitate numărabilă din definiţia funcţiei de probabilitate rezultă că**

$$P(A) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) + \ldots$$

**Dacă $p = \frac{1}{2}$, probabilităţile corespunzătoare sunt:**

$$\begin{aligned}
&P(A_1) = P(\textit{stemă}) = \frac{1}{2}\\
&P(A_3) = (1 - P(\textit{stemă})) \cdot (1 - P(\textit{stemă})) \cdot P(\textit{stemă}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\\
&P(A_5) = (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot P(\textit{stemă}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5\\
&\ldots\\
&P(A_{2i+1}) = (1 - P(\textit{stemă}))^{2i} \cdot P(\textit{stemă}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1}
\end{aligned}$$

**Prin urmare,**

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

**Aşadar, pentru $p = 1/2$ probabilitatea ca Alina să câştige jocul este $2/3$ (deci de două ori mai mare decât probabilitatea ca Robert să câştige jocul), pur şi simplu datorită faptului că ea este prima care dă cu banul. (Avantajul primului jucător!)**

**b. Dacă $P(\textit{stemă}) = p \in (0, 1]$, se urmează acelaşi raţionament ca mai sus, cu modificarea valorilor $P(A_i)$ astfel:**

$$\begin{aligned}
&P(A_1) = P(\textit{stemă}) = p\\
&P(A_3) = (1 - P(\textit{stemă})) \cdot (1 - P(\textit{stemă})) \cdot P(\textit{stemă}) = (1-p)^2 \cdot p\\
&P(A_5) = (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot P(\textit{stemă}) = (1-p)^4 \cdot p\\
&\ldots\\
&P(A_{2i+1}) = (1 - P(\textit{stemă}))^{2i} \cdot P(\textit{stemă}) = (1-p)^{2i} \cdot p
\end{aligned}$$

**Prin urmare, probabilitatea ca Alina să câştige devine:**

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{2i} \cdot p = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{2i} \stackrel{p \neq 0}{=} p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2p - p^2} = \frac{1}{2 - p}$$

**c.** **Jucătorul care aruncă primul banul are probabilitatea de a câştiga** $1/(2-p)$ **(calculată mai sus). Cum** $p \geq 0$**, rezultă că** $\frac{1}{2-p} \geq \frac{1}{2}$**. Aşadar, în cazul în care există posibilitatea de a alege, este de preferat să arunci primul.**

**3.** **(Calcul de probabilităţi condiţionale)**

***CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 1.4***

**O cutie conţine trei carduri. Un card este roşu pe ambele părţi, un alt card este verde pe ambele părţi iar cel care a rămas este roşu pe o parte şi verde pe partea cealaltă. Selectăm în mod aleatoriu un card din această cutie; presupunem că nu-i vedem decât culoarea de pe faţa superioară. Dacă această faţă este verde, care este probabilitatea ca şi cealaltă faţă să fie verde?**

**Răspuns:**

**Pentru a rezolva această problemă este foarte util să stabilim mai întâi care sunt elementele ce compun spaţiul de extrageri (engl., sample space),** $\Omega$**. (A se vedea noţiunea introdusă la curs.) Contrar intuiţiei primare,** $\Omega$ **nu va fi constitut din cele trei carduri, ci din feţele lor, fiindcă ceea ce observăm după o extragere este doar o faţă a unui card, nu ambele feţe ale cardului extras.**

**Din punct de vedere formal, vom folosi următoarea *notaţie* pentru carduri:**

$$C_1 = (R1, R2),\ C_2 = (R3, V4),\ C_3 = (V5, V6),$$

**unde** $R1, R2, R3, V4, V5$ **şi** $V6$ **desemnează cele 6 feţe ale cardurilor. Aşadar,** $\Omega = \{R1, R2, R3, V4, V5, V6\}$**.**

***Observaţie*: Am fi putut nota feţele cardurilor folosind pur şi simplu numerele** $1, \ldots, 6$**, însă am preferat să însoţim fiecare dintre aceste numere cu litera** $R$ **sau** $V$ **care desemnează culoarea feţei respective.**

**După ce am făcut această pregătire, probabilitatea cerută în enunţul problemei se calculează simplu, folosind regula clasică:** $p = m/n$**, unde** $m$ **este numărul de cazuri favorabile, iar** $n$ **este numărul de cazuri posibile.**

**Cazurile posibile sunt** $V4, V5, V6$**, iar cazurile favorabile sunt** $V5$ **şi** $V6$ **deoarece doar pentru ele faţa cealaltă a cardului este verde (este vorba de** $V6$ **şi respectiv** $V5$**). Aşadar, probabilitatea cerută este** $\frac{2}{3}$**.**

**4.** **(Calcularea de probabilităţi elementare şi probabilităţi condiţionale)**

***CMU, 2009 spring, Tom Mitchell, HW2, pr. 1.4***

**În acest exerciţiu vom arăta că — într-un anumit sens — probabilitatea unui eveniment se poate schimba dacă ştim probabilitatea unui alt eveniment, legat de cel dintâi.**

**Se aruncă simultan două zaruri. Notăm cu** $S$ **variabila aleatoare care desemnează suma numerelor rezultate din aruncarea celor două zaruri.**

**a. Calculaţi $P(S = 11)$.**

**b. Dacă ştim că $S$ este număr prim, cât devine probabilitatea de mai sus?**

**Răspuns:**

**a. Probabilitatea unui eveniment precum cel din enunţ este dată de raportul dintre numărul de cazuri favorabile şi numărul cazurilor posibile.**

**La aruncarea simultană a două zaruri, fiecare zar poate cădea pe una din cele 6 feţe, independent de celălalt zar. Prin urmare, există $6 \cdot 6 = 36$ posibilităţi (cazuri posibile). Pentru a se obţine $S = 11$ cele două zaruri trebuie să aibă fie valorile $(5, 6)$, fie $(6, 5)$, deci există $2$ posibilităţi (cazuri favorabile). Prin urmare,**

$$P(S = 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

**b. Probabilitatea căutată este:**

$$P(S = 11 \mid S = prim) = \frac{P(S = 11 \cap S = prim)}{P(S = prim)} = \frac{P(S = 11)}{P(S = prim)}$$

**Trebuie calculată probabilitatea ca $S$ să fie număr prim. Pentru aceasta este necesar numărul de cazuri favorabile, adică numărul cazurilor pentru care $S \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Există următoarele 15 posibilităţi:**

– $S = 2 : (1, 1)$

– $S = 3 : (1, 2), (2, 1)$

– $S = 5 : (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$

– $S = 7 : (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)$

– $S = 11 : (5, 6), (6, 5)$

**Deci $P(S = prim) = 15/36$. Prin urmare,**

$$P(S = 11 \mid S = prim) = \frac{2/36}{15/36} = \frac{2}{15}$$

**Întrucât $2/15 > 1/18$, putem spune că probabilitatea evenimentului $S = 11$ a crescut după ce am aflat un fapt suplimentar, şi anume că suma rezultată la aruncarea celor două zaruri este un număr prim ($S = prim$).**

**5. (Evenimente aleatoare independente)**

**Două evenimente $A$ şi $B$ sunt independente statistic dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.**

**a.** ***CMU, 2009 spring, Tom Mitchell, HW2, pr. 1.2.1***

**Arătaţi că dacă $A$ şi $B$ sunt evenimente independente, atunci:**

**– $A$ şi $\bar{B}$ sunt independente;**

**– $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sunt independente.**

**b.** ***CMU, 2009 spring, Ziv Bar-Joseph, HW1, pr. 1.1***

**Dacă evenimentul $A$ este independent în raport cu el însuşi, ce puteţi spune despre $P(A)$?**

**Răspuns:**

**a.** $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B})$, **deci $A$ şi $\bar{B}$ sunt independente. (S-a folosit independenţa evenimentelor $A$ şi $B$.)**

**Pentru independenţa evenimentelor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ se procedează analog:**
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - P(A) \cdot P(\bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot (1 - P(A)) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$, **deci $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sunt independente. (S-a folosit independenţa evenimentelor $A$ şi $\bar{B}$ demonstrată mai sus.)**

**b. Condiţia de independenţă a evenimentului $A$ faţă de el însuşi se scrie astfel:**

$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \Rightarrow P(A) = [P(A)]^2 \Rightarrow P(A)[P(A) - 1] = 0$$

**Ţinând cont şi de restricţia $P(A) \in [0, 1]$, rezultă că $P(A) = 0$ sau $P(A) = 1$. (Atenţie: nu rezultă neapărat că $A = \emptyset$ respectiv $A = \Omega$!)**

**6.** **(Formula lui Bayes)**

***CMU, fall 2001, midterm exam, pr. 5***

**Se consideră două variabile aleatoare $A$ şi $B$ despre care ştim următoarele informaţii:**

**a.** $P(A \mid B) = 2/3$
**b.** $P(A \mid B) = 2/3$ **şi** $P(A \mid \bar{B}) = 1/3$
**c.** $P(A \mid B) = 2/3$, $P(A \mid \bar{B}) = 1/3$ **şi** $P(B) = 1/3$
**d.** $P(A \mid B) = 2/3$, $P(A \mid \bar{B}) = 1/3$, $P(B) = 1/3$ **şi** $P(A) = 4/9$.

**În care din cele patru cazuri informaţiile date sunt suficiente pentru a calcula $P(B \mid A)$? Există vreun caz în care apar informaţii superflue (i.e, informaţii care pot fi deduse din celelalte informaţii furnizate în cazul respectiv)?**

**Răspuns:**

**Conform teoremei lui Bayes, vom avea:**

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B})} \\ &= \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \bar{B}) \cdot (1 - P(B))} \end{aligned}$$

**Devine astfel evident că în cazurile c şi d informaţiile deţinute sunt suficiente, pe când în celelalte două cazuri nu. În cazul d, informaţia $P(A) = 4/9$ este superfluă.**

**7.** **(Formula lui Bayes)**

◦ ***CMU, 2008 spring, T. Mitchell, W. Cohen, midterm, pr. 1.5***

**Presupunem că, răspunzând la o întrebare cu răspuns de genul adevărat/fals, un student fie cunoaşte răspunsul, fie ghiceşte răspunsul. Probabilitatea de a cunoaşte răspunsul este $p$, iar probabilitatea de a ghici răspunsul este $1 - p$.**

**Presupunem că probabilitatea de a răspunde corect la întrebare este**

**1 în cazul în care studentul cunoaşte răspunsul**

**şi 0.5 dacă studentul ghiceşte răspunsul.**

**Exprimaţi în funcţie de $p$ care este probabilitatea ca studentul examinat să cunoască răspunsul la întrebare, în ipoteza că el a răspuns corect (notaţie: $P(knew \mid correct)$).**

<u>**Răspuns:**</u>

Evenimentele de interes în problema dată sunt:
*correct* $=$ studentul a răspuns corect la întrebare,
*knew* $=$ studentul cunoştea răspunsul corect
şi complementarul acestuia din urmă:
*guess* $\stackrel{not.}{=} \neg$ *knew* $=$ studentul ghiceşte răspunsul.

Aplicând formula lui Bayes obţinem:

$$\begin{aligned}
P(knew \mid correct) &= \frac{P(correct \mid knew) \cdot P(knew)}{P(correct \mid knew) \cdot P(knew) + P(correct \mid guess) \cdot P(guess)} \\
&= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + 0.5 \cdot (1-p)} = \frac{p}{0.5p + 0.5} = \frac{p}{0.5(p+1)} = \frac{2p}{p+1}
\end{aligned}$$

**8.** **(Probabilităţi elementare: Adevărat sau Fals?)**

□ • · ***CMU, 2016 fall, N. Balcan, M. Gormley, HW1, pr. 6.1.1-4***

**În cele de mai jos vom nota cu $\Omega$ spaţiul de eşantionare, iar cu $\bar{A}$ complementul evenimentului $A$.**
**Marcaţi cu *adevărat* sau *fals* fiecare dintre afirmaţiile următoare:**

**a. Pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ astfel încât $P(A) > 0$ şi $P(B) > 0$, are loc egalitatea $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.**

**b. Pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ astfel încât $P(B) > 0$, are loc egalitatea $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A|B)$.**

**c. Pentru orice $A, B, C \subseteq \Omega$ astfel încât $P(B \cup C) > 0$, urmează că $\dfrac{P(A \cup B \cup C)}{P(B \cup C)} \geq P(A|B \cup C)P(B \cup C)$**

**d. Pentru orice $A, B \subseteq \Omega$ astfel încât $P(A) > 0$ şi $P(\bar{A}) > 0$, urmează că $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$.**

***Indicaţie*:**
**Pentru fiecare afirmaţie adevărată, faceţi demonstraţia proprietăţii respective.**

**Pentru fiecare afirmaţie falsă, daţi fie un contra-exemplu fie o justificare riguroasă.**

**Răspuns:**

**a. Adevărat. Demonstraţia este imediată.**

**b. Fals.**
**Ştim că pentru orice** $A, B \subseteq \Omega$**, are loc egalitatea** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$**. Aşadar, egalitatea din enunţ ar fi adevărată dacă pentru orice** $A, B \subseteq \Omega$ **am avea** $P(A \cap B) = P(A|B)$**. Însă,**

$$P(A \cap B) = P(A|B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) = 1 \text{ sau } P(A \cap B) = 0.$$

**Deci egalitatea nu este adevărată pentru orice** $A$ **şi** $B$**.**

**c. Adevărat.**
**Observăm că dacă se notează** $D = B \cup C$**, atunci inegalitatea din enunţ devine mai uşor de manipulat:** $\dfrac{P(A \cup D)}{P(D)} \geq P(A|D) \cdot P(D)$**. Este imediat că ea este echivalentă cu** $\dfrac{P(A \cup D)}{P(D)} \geq P(A \cap D)$**, ceea ce implică** $P(A \cup D) \geq P(A \cap D) \cdot P(D)$**. Ultima inegalitate este adevărată fiindcă pe de o parte** $P(A \cup D) \geq P(A \cap D)$ **şi pe de altă parte** $P(D) \in [0,\ 1]$**.**

**d. Fals.**
**Ştim că pentru orice** $A, B \subseteq \Omega$ **cu** $P(A) > 0$**, are loc egalitatea** $P(B|A) + P(\bar{B}|A) = 1$ **(o puteţi demonstra imediat). Aşadar, egalitatea din enunţ ar fi adevărată dacă pentru orice** $A, B \subseteq \Omega$ **astfel încât** $P(A) > 0$ **şi** $P(\bar{A}) > 0$ **am avea** $P(B|\bar{A}) = P(\bar{B}|A)$**.**

**Vom construi următorul contra-exemplu: considerăm că la aruncarea unui zar perfect, evenimentul** $A$ **este apariţia unei feţe pare, iar evenimentul** $B$ **este apariţia feţei** $1$**. Urmează că**

$$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3} \text{ şi } P(\bar{B}|A) = 1.$$

**Deci egalitatea nu este adevărată pentru orice evenimente** $A$ **(cu** $P(A) > 0$ **şi** $P(\bar{A}) > 0$**) şi** $B$**.**

## 1.2 Probleme propuse

### Evenimente aleatoare şi formula lui Bayes

**39.** **(Calcul de probabilităţi elementare)**

◦ ***CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 1.3***

**Doi soldaţi $A$ şi $B$ trag la ţintă. Probabilitatea ca soldatul $A$ să greşească ţinta este de $1/5$. Probabilitatea ca soldatul $B$ să greşească ţinta este de $1/2$. Probabilitatea ca ambii soldaţi să greşească simultan ţinta este de $1/10$.**

**a. Care este probabilitatea ca cel puţin unul din soldaţi să greşească ţinta?**

**b. Care este probabilitatea ca exact unul din cei doi soldaţi să greşească ţinta?**

**40.** **(Probabilităţi condiţionale, evenimente aleatoare independente: câteva proprietăţi simple)**

**Fie $A$ şi $B$ două evenimente aleatoare.**

**a.** ***CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.1***

**Arătaţi că $P(A \mid A, B) = 1$.**

**b.** ◦ ***CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 1.1***

**Arătaţi că dacă $P(A) = 0$ atunci $A$ şi $B$ sunt independente.**

**c.** ◦ ***CMU, 2008 spring, Eric Xing, HW1, pr. 1.2***

**Arătaţi că dacă $P(B) = 1$ atunci $P(A \mid B) = P(A)$.**

***Observaţie*: În general, dacă $P(B) \neq 0$, din $P(A \mid B) = P(A)$ rezultă imediat $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ceea ce, conform definiţiei, înseamnă că $A$ şi $B$ sunt independente. Din acest motiv, se poate spune că $P(A \mid B) = P(A)$ este o formă mai „slabă“ (deşi, mai aproape de intuiţie!) pentru condiţia de independenţă a două evenimente aleatoare.**

**41.** **(Legătura dintre forma „slabă“ şi forma „tare“ a definiţiei pentru evenimente aleatoare independente condiţional)**

***CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.2***

**Folosind doar definiţia probabilităţii condiţionale arătaţi că dacă $P(A \mid B, C) = P(A \mid C)$ sau $P(B \mid A, C) = P(B \mid C)$ atunci $P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$.**

**42.** **(Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate)**

◦ ***CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, midterm, pr. 1.d***

**Presupunem că evenimentele $B_1, B_2, \ldots, B_k$ formează o *partiţie* a spaţiului de evenimente $\Omega$. (Aceasta revine la: $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$ şi $B_i \cap B_j = \emptyset$ pentru orice**

**$i \neq j$.) Considerăm o funcţie de probabilitate $P$ definită pe $2^\Omega$ şi un eveniment $A$ pentru care $P(A) > 0$.**

**Arătaţi că dacă $P(B_1 \mid A) < P(B_1)$, atunci $P(B_i \mid A) > P(B_i)$ pentru cel puţin o valoare a lui $i$ din mulţimea $\{2, 3, \ldots, k\}$.**

***Indicaţie*: Următoarele proprietăţi vă pot fi de folos:**

*a.* $\sum_{i=1}^{k} P(B_i) = 1$

*b.* $\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = P(A)$

*c.* $P(B_i \mid A) \cdot P(A) = P(B_i \cap A)$

*d.* $\sum_{i=1}^{k} P(B_i \mid A) = 1$

*e.* $P(B_i \cap A) + P(B_i \cap \bar{A}) = P(B_i)$.

**43.** **(Formula lui Bayes)**

◦ ***CMU, 2004 fall, T. Mitchell, Z. Bar-Joseph, HW1, pr. 4***

**Într-o grupă de copii de la o creşă, 30% dintre ei au ochi căprui, 50% au ochi albaştri, iar restul de 20% au ochi de alte culori. Într-o zi, educatoarea organizează cu aceşti copii un joc. Pentru prima rundă a jocului, ea selecţionează 65% dintre copiii cu ochi căprui, 82% dintre copiii cu ochi albaştri şi 50% dintre copiii cu ochi de alte culori.**

**Care este probabilitatea ca un copil ales în mod aleatoriu din această grupă să aibă ochi albaştri, dacă ştim că el n-a fost selecţionat pentru prima rundă a jocului?**

**44.** **(Formula lui Bayes)**

***CMU, 2005 fall, T. Mitchell, A. Moore, HW1, pr. 3.3***

**Avem două urne. Prima urnă conţine 11 bile albe şi 4 bile roşii. Cea de-a doua urnă conţine 8 bile albe şi 5 bile roşii. Se alege în mod aleatoriu cu probabilitate uniformă una din cele două urne. Apoi se extrage o bilă din urna aleasă. Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?**

**45.** **(Probabilităţi elementare: Adevărat sau Fals?)**

∗ ***prelucrare de Liviu Ciortuz după***
***CMU, 2014 fall, William Cohen, HW1, pr. 4.a***
***CMU, 2014 fall, William Cohen, midterm, pr. 1***

**Marcaţi cu *adevărat* sau *fals* fiecare dintre afirmaţiile următoare:**

**a.** $P(A \cup B \cup C) \geq P(A) + P(B) + P(C)$.

**b.** $P(A|B, C) = \dfrac{P(B|A, C)\, P(A|C)}{P(B|C)}$.

**c.** $P(A|C) = \sum_{i=1}^n P(A, B_i|C)$, **unde** $B_i \cap B_j = \emptyset$ **pentru orice** $i \neq j$ **şi** $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ **(evenimentul sigur).**[23]

**d.** $P(A|C) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i, C)\, P(B_i|C)$, **evenimentele** $B_i$ **satisfac aceleaşi proprietăţi ca la punctul precedent.**

**Justificaţi în mod riguros fiecare răspuns.**
**Pentru afirmaţiile** ***false***, **puteţi da un contra-exemplu.**
**Pentru afirmaţiile** ***adevărate***, **exprimaţi în câteva cuvinte, dacă este posibil,** ***tipul*** **proprietăţii respective.**

[23] În locul condiţiei $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ se poate considera fie proprietatea $P(\bigcup_{i=1}^n B_i) = 1$ fie $A \subseteq \bigcup_i B_{i=1}^n$, deşi ambele sunt mai laxe (i.e., mai puţin restrictive) decât condiţia din enunţ.