ALGORITMICA GRAFURILOR
Săptămâna 7

C. Croitoru

croitoru@info.uaic.ro

FII

November 10, 2013

OUTLINE

1. **Cuplaje** (ag 13-14 allinone.pdf pag. 183 $\longrightarrow$ 211)
2. **Problemelele pentru seminarul 7**

Problema cuplajului maxim

Fie $G = (V, E)$ un (multi)graf. Dacă $A \subseteq E$ și $v \in V$, vom nota $d_A(v)$ gradul vîrfului v în graful parțial $< A >_G$.

Se numește **cuplaj** (sau **mulțime independentă de muchii)** al grafului G, orice mulțime M de muchii cu proprietatea că $d_M(v) \leq 1$, $\forall v \in V$.

$$\text{Notație: } \mathcal{M}_G = \{M \mid M \subseteq E, M \text{ cuplaj în } G\}.$$

$M \in \mathcal{M}_G$, $v \in V$:
Dacă $d_M(v) = 1$, atunci v se numește **saturat** de cuplajul M.
S(M): mulțimea vîrfurilor saturate de cuplajul M în graful G.

Dacă $d_M(v) = 0$, atunci v se numește **expus** față de cuplajul M.
E(M): mulțimea vîrfurilor expuse față de cuplajul M.

Problema "cuplajului maxim":

P1 *Dat $G = (V, E)$ un graf, să se determine $M^* \in \mathcal{M}_G$ astfel încît* $|M^*| = \max\{|M| \mid M \in \mathcal{M}_G\}$.

Vom nota $\nu(G) = \max\{|M| \mid M \in \mathcal{M}_G\}$.

Problema cuplajului maxim

Definiție. Se numește **acoperire** (a vîrfurilor cu muchii) în graful G orice mulțime $F \subseteq E$ de muchii cu proprietatea că $d_F(v) \geq 1\ \forall v \in V$.

$\mathcal{F}_G = \{F \mid F \subseteq E,\ F \text{ acoperire în } G\}$ notează familia acoperirilor grafului G.

$\mathcal{F}_G \neq \emptyset \Leftrightarrow G$ nu are vîrfuri izolate (atunci, măcar E este o acoperire).

Problema acoperirii minime este:
P2 *Dat $G = (V, E)$ un graf, să se determine $F^* \in \mathcal{F}_G$ astfel încît $|F^*| = \min\{|F| \mid F \in \mathcal{F}_G\}$.*

Teorema 1. (Norman-Rabin 1959) *Fie $G = (V, E)$ un graf fără vîrfuri izolate, de ordin n. Dacă M^* este un cuplaj de cardinal maxim în G, iar F^* o acoperire de cardinal minim în G, atunci*

$$|M^*| + |F^*| = n.$$

Dem. P1 echivalentă polinomial cu P2

Grafuri bipartite

Teoremă. (Hall, 1935) *Fie* $G = (R, S; E)$ *un graf bipartit. Există un cuplaj care saturează vârfurile lui* R *dacă și numai dacă*

$$|N_G(A)| \geq |A| \quad \forall A \subseteq R.$$

Teoremă. (Konig,1930) *Fie* $G = (R, S; E)$ *un graf bipartit. Cardinalul maxim al unui cuplaj este egal cu numărul minim de vârfuri prin îndepărtarea cărora se obține graful nul:*

$$\nu(G) = n - \alpha(G)$$

Cuplaje perfecte

Un cuplaj M în graful G astfel încât $S(M) = V(G)$ se numește **cuplaj perfect** sau **1-factor**.

Pentru un graf oarecare H notăm cu $q(H)$ numărul componentelor conexe de ordin impar ale lui H.

Teoremă. (Tutte, 1947) *Un graf $G = (V, E)$ are un cuplaj perfect dacă și numai dacă*

$$(T) \qquad q(G - S) \leq |S| \quad \forall S \subseteq V.$$

Berge (1958) a generalizat această teoremă stabilind că

$$\nu(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| - max_{S\subseteq V(G)}[q(G - S) - |S|]\ ).$$

Problema cuplajului maxim

Fie $G = (V, E)$ un graf și $M \in \mathcal{M}_G$ un cuplaj al său.
Definiție: Se numește **drum alternat al lui G relativ la cuplajul M** orice drum P : $v_0, v_0v_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k-1}v_k, v_k$ a. î. $\forall i = \overline{1, k-1}$ $\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\} \cap M \neq \emptyset$.

Vom desemna prin P mulțimea muchiilor drumului P.

Definiție: Se numește **drum de creștere al lui G relativ la cuplajul M** un drum alternat cu extremitățile vîrfuri distincte, expuse relativ la cuplajul M.

Teoremă.(Berge 1959) *Un cuplaj M este de cardinal maxim în graful G dacă și numai dacă nu există în G drumuri de creștere relativ la M.*

Strategie de construire a unui cuplaj de cardinal maxim:

a) fie M un cuplaj oarecare a lui G (eventual $M = \emptyset$);
b) **while** $\exists P$ drum de creștere relativ la M **do**
    $M \leftarrow M \Delta P$

Problema cuplajului maxim

Hopcroft, Karp (1973)

0. $M \leftarrow \emptyset$;
1. **repeat**
    Determină $\mathcal{P}$ o familie maximală ($\subseteq$)
        de drumuri minime de creștere;
    for $P \in \mathcal{P}$ **do** $M \leftarrow M \Delta P$
  until $\mathcal{P} = \emptyset$.

Complexitatea $O(\sqrt{n}A)$ unde A este timpul găsirii familiei $\mathcal{P}$.

Hopcroft și Karp au arătat cum se poate implementa pasul 1 pentru un graf bipartit, astfel încît $A = O(m + n)$: $\Rightarrow$ algoritm $O(mn^{1/2})$ pentru aflarea unui cuplaj de cardinal maxim într-un graf bipartit.

Pentru un graf oarecare, structurile de date necesare obținerii aceleeași complexități sînt mult mai elaborate și au fost descrise de **Micali și Vazirani 1980**.

Problemele pentru seminarul 7

Se vor discuta (cel puțin) patru probleme dintre cele date la tema 1, la seminarul 6 (nediscutate săptămâna trecută) și

1. Problema 1, Setul 21
2. Problema 2, Setul 21