Setul 2
de probleme şi exerciţii de matematică
(cu privire la structuri algebrice, mulţimi de numere, ordinali, cardinali şi inegalităţi numerice)

S2.1 Să se dovedească unicitatea elementului neutru şi a inversului unui element (când există) în cadrul unui monoid $(M, \cdot)$ cu $U(M) \neq \varnothing$.

S2.2 Să se arate că dacă M, M' şi M'' sunt monoizi în raport cu operaţiile algebrice ϕ_1, ϕ_2 şi respectiv ϕ_3, iar $f \in Hom(M, M')$ şi $g \in Hom(M', M'')$, atunci $g \circ f \in Hom(M, M'')$.

S2.3 Să se arate că dacă M este o mulţime nevidă, atunci $(\mathcal{P}(M), \cup)$ este un monoid comutativ.

S2.4 Să se arate că, oricare ar fi monoidul $(M, \circ)$, dubletul $(U(M), \circ)$ este grup. Când $(U(M), \circ)$ este comutativ?

S2.5 Fie $(M, \circ)$ un monoid cu unitatea e. Să se arate că $e \in U(M)$ şi că dacă $x, y \in U(M)$, cu $x \circ y \in U(M)$, atunci $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ (unde x^{-1} şi y^{-1} sunt inversele elementelor x şi respectiv y).

S2.6 Fie $(M, \circ)$ un monoid comutativ cu simplificare şi '$\sim$' o relaţie binară definită pe $M \times M$ prin $(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow xy' = x'y$. Să se arate că '$\sim$' este o relaţie de echivalenţă pe $M \times M$.

S2.7 Fie $(G, \circ)$ şi $(G', *)$ două grupuri şi $f : G \to G'$ un morfism de grupuri. Să se arate că $f(e) = e'$ şi $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $\forall x \in G$, unde e şi e' sunt elementele neutre din G şi G' respectiv.

S2.8 *i)* Să se arate că următoarele operaţii algebrice definite pe $\mathbb{Z}$ sunt asociative:

$$a \circ b = a + b - ab, \quad a * b = a + b + ab, \ \forall\ a, b \in \mathbb{Z}$$

ii) Sunt $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ şi $(\mathbb{Z}, +, *)$ inele?

S2.9 Fie $(A, +, \cdot)$ un inel unitar şi comutativ, iar $\varnothing \neq S \subseteq A$ un sistem multiplicaitv fără divizori ai lui zero. Să se arate că funcţia $i_S : A \to A_S$, unde A_S este inelul fracţiilor lui A relativ la S, definită prin $i_S(a) = \dfrac{a}{1} = [(a, 1)]_{\sim}$, este un monomorfism de inele.

S2.10 Fie axiomele lui Peano, pentru $\mathbb{N}$, sub următoarea formă:

a1) Există un număr natural numit 0.

a2) Orice număr natural n are un unic succesor $s(n)$.

a3) Numărul 0 nu este succesorul nici unui număr natural.

a4) Dacă $s(m) = s(n)$, cu $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $m = n$.

a5) Dacă $M \subseteq \mathbb{N}$ este aşa încât $0 \in M$ şi, $\forall\ n \in M$, avem $s(n) \in M$, atunci $M = \mathbb{N}$.

Pentru oricare patru dintre aceste axiome, excluzând-o pe cea de-a cincea, găsiţi un model de mulţime (dacă este posibil) ce le satisface. Indicaţi succesiunea elementelor din model în maniera $0 \to 1 \to 2 \to \ldots$.

S2.11 Arătaţi că dacă M este o mulţime ce satisface cele cinci axiome ale lui Peano (v. **S2.10**) şi $n \in M$, atunci $s(n) \neq n$, $\forall\ n \in M$.

S2.12 Să se demonstreze că dacă m şi n sunt din $\mathbb{N}$ şi $m + n = 0$, atunci $m = n = 0$.

S2.13 Să se arate că $n < s(n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

S2.14 Folosind principiul inducţiei transfinite să se arate că, pentru orice ordinal α, este adevărată relaţia: $1 \cdot \alpha = \alpha$.

S2.15 Dacă ω reprezintă notaţia pentru cel mai mic ordinal infinit, să se constate că

$$2 \cdot \omega = \sup\{2n \mid n < \omega\} = \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2,$$

deducându-se astfel că înmulţirea ordinalilor nu este comutativă.

S2.16 Fie α şi β ordinali. Să se demonstreze că $\alpha+\beta$ este ordinal limită dacă şi numai dacă fie β este un ordinal limită diferit de 0, fie $\beta=0$ şi α este ordinal limită.

S2.17 Să se dovedească că pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, cu $a<b$, intervalele deschise $\left(-\dfrac{b-a}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right)$ şi (a,b) au aceeaşi cardinalitate. Se poate spune acelaşi lucru şi în legătură cu două intervale deschise, (a,b) şi (c,d), din $\mathbb{R}$?

S2.18 Fiecare dintre mulţimile specificate mai jos are cardinalul egal cu $\aleph_0$ sau $2^{\aleph_0}$ ori $2^{2^{\aleph_0}}$. Determinaţi, argumentat, ce se potriveşte şi unde:

a) $\{0,1,4,9,16,\ldots\}$;

b) $\mathbb{Z}[X]$ (mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi);

c) Mulţimea numerelor reale transcendente;

d) Mulţimea punctelor unui plan;

e) Mulţimea funcţiilor de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{N}$.

S2.19 Să se arate că mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale înzestrată cu operaţiile

$$n_1 \wedge n_2 = (n_1, n_2) \text{ şi } n_1 \vee n_2 = [n_1, n_2], \forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

unde (n_1, n_2) semnifică cel mai mare divizor comun al numerelor n_1 şi n_2, iar $[n_1, n_2]$ înseamnă cel mai mic multiplu comun al numerelor n_1 şi n_2, are o structură algebrică de latice. Ce atribute are această latice? (Este ea completă, distributivă sau/şi modulară?)

S2.20 Dacă A şi B sunt *"mpo"* (mulţimi parţial ordonate), fie $\mathcal{F}(A;B)$ mulţimea funcţiilor de la A la B, pe care se defineşte relaţia de parţială-ordine următoare

$$f \leq_{\mathcal{F}} g \Longleftrightarrow f(x) \leq_B g(x),\ \forall\ x \in A,$$

unde $\leqslant_B$ este notaţia pentru relaţia de ordine parţială pe B.

Să se demonstreze că, dacă B este o latice în raport cu operaţiile

$$y_1 \wedge y_2 = \min\{y_1, y_2\} = \begin{cases} y_1, & \text{când } y_1 \leqslant_B y_2 \\ y_2, & \text{când } y_2 \leqslant_B y_1 \end{cases} \quad \text{şi}$$

$$y_1 \vee y_2 = \max\{y_1, y_2\} = \begin{cases} y_2, & \text{când } y_1 \leq_B y_2 \\ y_1, & \text{când } y_2 \leq_B y_1 \end{cases},\ \forall\ y_1, y_2 \in B,$$

atunci şi $\mathcal{F}(A;B)$ este o latice faţă de două operaţii uşor deductibile în context.

S2.21 $(G,\circ)$ fiind un grup, să se vadă că mulţimea $\mathcal{S}(G)$, a tuturor subgrupurilor lui G, este o latice faţă de ordinea parţială "$\subseteq$".

S2.22 Arătaţi că mulţimea tuturor relaţiilor de echivalenţă pe o mulţime A, notată cu $\mathcal{E}q(A)$, este o latice completă în raport cu ordinea parţială "$\subseteq$".

S2.23 Să se arate că $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \mathcal{C}(X), \varnothing, X)$ este o algebră Boole.

S2.24 Fie $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ o algebră Boole. Să se demonstreze că, dacă x şi y sunt elemente ale algebrei B, astfel încât

$$x \wedge y = 0 \text{ şi } x \vee y = 1,$$

atunci $x = y'$.

S2.25 Să se demonstreze inegalitatea lui Holder:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q},$$

$$\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*,\ p, q \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

S2.26 Să se arate că, $\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ şi $p \geq 1$, are loc inegalitatea lui Minkowski:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

S2.27 Să se arate că, $\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$, cu $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, avem:

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{t_n} \leqslant t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n.$$

(inegalitatea generalizată a mediilor)

S2.28 Să se demonstreze că, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, are loc inegalitate lui Carleman

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \ldots a_k)^{1/k} \leqslant e \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

unde e e un coeficient optimal când $n \to \infty$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

S2.29 Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea (Titu Andreescu):

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

S2.30 Să se demonstreze că, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, avem:

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}\right)^{1/2} \leq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Bibliografie orientativă

1. D. Buşneag, D. Pîrv - *Lecţii de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
2. I. D. Ion, R. Nicolae - *Algebră*, E. D. P., Bucureşti, 1982.
3. F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.
4. B. Poonen - *Infinity: Cardinal Numbers*, 2002.
5. S. Burris, H. P. Sankappanavar - *A course in Universal Algebra*, 2000, (cap. I + cap. IV).
6. M. O. Drâmbe - *Inegalităţi. Idei şi metode.*, Ed. GIL, Zalău, 2003.