

Teoria probabilităților discrete

Olariu E. Florentin

Februarie, 2014

Desfășurarea cursului și examinarea

- ▶ Primele șapte săptămâni: teoria probabilităților, ultimele șapte săptămâni: statistică.
- ▶ Examen parțial în săptămâna a 8-a din primele șapte cursuri;
- ▶ Examen final în săptămâna a 15-a din ultimele șase cursuri;
- ▶ Două teste intermediare: T_1 și T_2 :
 - ▶ T_1 constă din câte un test care se dă la fiecare sfârșit de seminar - din aceste șase note se face o medie;
 - ▶ T_2 constă dintr-un test care se da la sfârșitul semestrului în săptămâna a 15-a sau a 14-a.

Desfășurarea cursului și examinarea

- ▶ În total: șase seminarii și șapte laboratoare;
- ▶ Note de la seminar și laborator:

$$SL = 40\% * T_1 + 40\% * T_2 + 20\% * activitate.$$

- ▶ Nota de la teza scrisă

$$TS = 50\% * TS_1 + 50\% * TS_1.$$

- ▶ Formula de calcul a notei (corectate ulterior cu repartizarea conform curbei lui Gauss)

$$50\% * SL + 50\% * TS.$$

Table of contents

Experiment aleator și eveniment aleator.

Experiment aleator

Eveniment aleator

Evenimente aleatoare - proprietăți și notații

Funcția de probabilitate

Funcția de probabilitate

Probabilitatea evenimentelor aleatoare elementare

Exerciții

Evenimente aleatoare

Funcția de probabilitate

Anexa 1

Bibliography

Experiment aleator

- ▶ Noțiunea de *experiență* sau (*experiment*) *aleator* corespunde, intuitiv, unui proces în urma căruia obținem un rezultat care nu poate fi cunoscut înaintea desfășurării procesului, dar a cărui mulțime de rezultate posibile este cunoscută.
- ▶ Cel care analizează rezultatele unui astfel de experiment este de obicei un observator neutru și mai rar un participant deși, uneori, ar putea participa la efectuarea experimentului aleator. Experimentele în majoritate sunt practice dar pot fi și abstracte.
- ▶ Rezultatele unui experiment aleator sunt datorate *șansei*, iar mecanismul prin care ele (rezultatele) se produc interesează mai puțin. Vom considera că, la un moment dat, avem în atenție un singur experiment, chiar dacă el se poate repeta.

Experiment aleator

Definiția 1

*Se numește **experiment aleator** un experiment al cărui rezultat nu este cunoscut dinainte, dar ale cărui rezultate posibile sunt cunoscute în totalitate și care poate fi repetat în condiții identice.*

Exemple:

1. Aruncând un zar, va apărea una dintre fețele $\{1, 2, \dots, 6\}$, dar nu știm cu siguranță care dintre fețele acestea va apărea. ♣
2. Aruncând două monede, cu siguranță apare stema (S) și/sau banul (B) pe amândouă, iar toate rezultatele posibile sunt combinațiile (S, S) , (S, B) , \dots , (B, B) . ♣
3. Dacă experimentul constă în măsurarea duratei de viață a unei baterii, atunci rezultatul va fi un număr real $x \geq 0$. ♣

Eveniment aleator elementar

În analiza unui experiment aleator, urmărim rezultatul acestuia; întotdeauna un singur rezultat se va produce, fără a ști care (din mulțimea cunoscută a rezultatelor posibile). Spunem în acest caz că se produce un *eveniment*.

Definiția 2

Un rezultat posibil al unui experiment aleator se numește eveniment aleator elementar, iar mulțimea acestora se numește spațiul evenimentelor elementare - notat cu Ω .

Eveniment aleator

- ▶ După efectuarea unui experiment, doar unul dintre elementele mulțimii Ω se “întâmplă” - și asta conform șansei pe care o are fiecare rezultat posibil al experimentului.
- ▶ Asupra rezultatelor experimentului se pot face raționamente, judecăți, iar interesul poate fi atras nu doar de rezultatul în sine cât de tipul rezultatului, de familia din care face el parte.
- ▶ Aceasta extinde noțiunea de eveniment aleator elementar.

Definiția 3

*Se numește **eveniment aleator** o anumită submulțime a spațiului evenimentelor elementare: $A \subseteq \Omega$.*

Eveniment aleator

Exemple:

1. Aruncând un zar, spațiul evenimentelor elementare este $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; ne-ar putea interesa apariția unei fețe cu număr par, acesta este evenimentul aleator $A = \{2, 4, 6\}$. ♣
2. La aruncarea a două monede, $\Omega = \{(S, S), (S, B), \dots, (B, B)\}$. Evenimentul aleator definit astfel: “valorile de pe cele două monede sunt diferite” este $A = \{(S, B), (B, S)\}$. Evenimentul aleator definit prin “pe cel puțin una dintre cele două monede apare stema” este, formal, $B = \{(S, S), (S, B), (B, S)\}$. ♣
3. În cazul experimentului cu măsurarea duratei de viață a unei baterii, evenimentul aleator: “viața bateriei este cel mult 1500 de ore, dar nu mai puțin de 500 de ore” este intervalul $A = [500, 1500] \subseteq \mathbb{R}_+$. ♣

Eveniment aleator

- ▶ Uzual un eveniment aleator este definit prin intermediul unui predicat: evenimentul va fi format din evenimentele elementare (rezultatele experimentului) care satisfac predicatul respectiv.
- ▶ Un eveniment aleator este privit, formal, ca o submulțime a mulțimii de evenimente elementare Ω .
- ▶ Dacă Ω este o mulțime discretă (adică cel mult numărabilă), atunci orice submulțime $A \subseteq \Omega$ este considerată eveniment aleator.
- ▶ Dacă Ω nu este discretă, atunci numai anumite submulțimi pot fi evenimente aleatoare.

Evenimente aleatoare - proprietăți și notații

Definiția 4

Spunem că un eveniment aleator $A \subseteq \Omega$ se realizează sau se produce dacă, în urma efectuării experimentului aleator, evenimentul aleator elementar (rezultatul) aparține lui A .

- ▶ Evenimentele aleatoare se notează, de obicei, cu litere mari de la începutul alfabetului: A , B , C etc. Deoarece, în majoritatea aplicațiilor Ω va fi o mulțime discretă, vom considera că orice submulțime a lui Ω este un eveniment aleator.
- ▶ Nu mai facem distincție între submulțimi din Ω și evenimente aleatoare; proprietățile și operațiile cu mulțimi se transferă asupra evenimentelor aleatoare.

Evenimente aleatoare - proprietăți și notații

- \emptyset este **evenimentul imposibil** (nu se realizează niciodată);
- Ω este **evenimentul sigur** (se realizează întotdeauna);
- dacă $A, B \subseteq \Omega$ sunt evenimente aleatoare, atunci
 - ▶ $A \cup B$ este de asemeni eveniment aleator care se realizează când se realizează măcar unul dintre evenimentele A și B ;
 - ▶ $A \cap B$ este de asemeni eveniment aleator care se realizează când se realizează și A și B ;
 - ▶ $A \setminus B$ este un eveniment aleator care se realizează când se realizează A dar nu și B ;
- dacă A este eveniment aleator, atunci $\bar{A} = \Omega \setminus A$ este de asemenea eveniment aleator și este numit **evenimentul contrar** lui A : \bar{A} se realizează ori de câte ori A nu se realizează;
- dacă $A \subseteq B$, atunci se spune ca evenimentul A îl **implică** pe B ;
- dacă $A \cap B = \emptyset$ se spune că A și B sunt **incompatibile**, dacă $A \cap B \neq \emptyset$, A și B sunt **compatibile**;

Evenimente aleatoare - proprietăți și notații

- ▶ În mod similar se pot defini *reuniunea* sau *intersecția* unui număr finit (sau infinit numărabil) de evenimente aleatoare.

Exemplu. Să considerăm ca experiment aruncarea a două zaruri:

$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$, sunt 36 de evenimente elementare.

Fie A evenimentul “suma zarurilor este 4” și $B =$ “zarurile sunt mai mari decât 4”:

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \text{ și } B = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

- $A \cup B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$;
- $A \cap B = \emptyset$ - A și B sunt evenimente incompatibile;
- $\bar{A} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), \dots (6, 6)\}$. ♣

Funcția de probabilitate

- ▶ Vom considera în această secțiune că Ω este cel mult numărabilă:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \text{ (finită sau infinit numărabilă).}$$

- ▶ Noțiunea de *probabilitate* pleacă de la ideea de a asocia câte un număr real fiecărui eveniment aleator cu scopul de a le măsura astfel șansele.
- ▶ Probabilitatea unui eveniment aleator A se notează cu $P(A)$. Următoarele axiome definesc *funcția de probabilitate*.

Axiomele funcției de probabilitate

Definiția 5

Dacă Ω este mulțimea evenimentelor aleatoare elementare ale unui experiment aleator, o funcție de probabilitate asociată acestuia este o funcție P definită pe familia evenimentelor aleatoare (eventual $\mathcal{P}(\Omega)$) care satisface

Axioma 1. $0 \leq P(A) \leq 1$, pentru orice eveniment aleator A .

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$ și $P(\emptyset) = 0$.

Axioma 3. Dacă evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ sunt evenimente aleatoare mutual incompatibile, atunci

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Axiomele funcției de probabilitate

- ▶ Axioma 1 ne spune că probabilitatea asociată unui eveniment aleator este un număr nenegativ și subunitar.
- ▶ Axioma 2 arată că orice rezultat al experimentului, cu probabilitate 1, se găsește în mulțimea Ω . În plus, mai spune că evenimentul imposibil nu se produce niciodată.
- ▶ Axioma 3 arată că, pentru orice șir de evenimente aleatoare mutual incompatibile, probabilitatea de a se produce măcar unul dintre aceste evenimente este suma probabilităților tuturor evenimentelor.
- ▶ În cazul în care șirul este infinit (înțelegând prin aceasta că $P(A_k) > 0$, pentru o infinitate de indici k), axioma 3 garantează și convergența seriei din membrul drept.

Proprietăți ale funcției de probabilitate

Proprietatea 1

Fie A_1, A_2, \dots, A_m evenimente aleatoare mutual incompatibile, atunci

$$P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \sum_{k=1}^m P(A_k).$$

dem.: Considerăm în axioma 3, $A_k = \emptyset, \forall k \geq m+1$. ■

Proprietatea 2

Dacă A și B sunt evenimente aleatoare, atunci

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B).$$

dem.: În proprietatea 1: $m = 2, A_1 = A \cap B$ și $A_2 = A \setminus B$. ■

Proprietăți ale funcției de probabilitate

Proprietatea 3

Dacă A și B sunt evenimente aleatoare, atunci

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B).$$

dem.: Folosind proprietățile 1 și 2

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B). \quad \blacksquare$$

Proprietatea 4

Dacă A este un eveniment aleator, atunci

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

dem.: Proprietatea 1 și axioma 2: $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$. ▀

Proprietăți ale funcției de probabilitate

Proprietatea 5

Fie A și B evenimente aleatoare, dacă A implică B ($A \subseteq B$), atunci

$$P(A) \leq P(B).$$

dem.: Conform proprietății 2 și axiomei 1

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A). \quad \blacksquare$$

- ▶ O altă proprietate numită *principiul includerii și al excluderii* este enunțată și demonstrată în Anexa 1.

Probabilitatea evenimentelor aleatoare elementare

- ▶ Vom nota cu $P(\omega)$ probabilitatea evenimentului aleator elementar $\{\omega\}$, $\forall \omega \in \Omega$. Din axioma 3, pentru orice eveniment A

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \quad (1)$$

- ▶ Dacă A conține un număr finit de elemente, atunci suma de mai sus este o sumă finită sau este o serie dacă A conține un număr infinit de elemente. Suma este nulă dacă A este mulțimea vidă.
- ▶ Obținem o definiție echivalentă a funcției de probabilitate dacă înlocuim axioma 3 cu

Axioma 3'. Pentru orice eveniment aleator A

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \text{ și } P(\emptyset) = 0.$$

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

În multe situații Ω constă din evenimente elementare egal probabile și în număr finit:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, P(\omega_i) = p, \forall 1 \leq i \leq n,$$

atunci

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = np, \text{ i. e., } P(\omega_i) = p = \frac{1}{n}, \forall i.$$

Să considerăm, în acest caz, un eveniment aleator A , cu $|A| = k$, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$, atunci

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\omega_{i_j}) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

Am demonstrat în acest fel

Propoziția 1

Dacă evenimentele aleatoare elementare sunt egal probabile (și în număr finit), atunci probabilitatea unui eveniment aleator A se determină ca raportul dintre numărul de elemente din A și numărul de elemente din Ω .

- ▶ În acest caz probabilitatea unui eveniment aleator este numărul de cazuri favorabile supra numărul total de cazuri posibile. Practic, calculul probabilităților devine o problemă de numărare.
- ▶ Situațiile în care se poate aplica rezultatul de mai sus trebuie să fie distinse cu grijă pentru că ***nu întotdeauna evenimentele elementare sunt egal probabile***. Drept reper putem folosi principiul subînțeles al simetriei: evenimente similare sau “identice” au probabilități egale.

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

Exemplu. Atunci când extragem o bilă dintr-o urnă se înțelege că orice bilă are aceeași probabilitate de a fi extrasă. Dacă în urnă avem bile de culori diferite: două bile albe și trei bile negre, nu mai putem presupune că fiecare culoare are aceleași șanse de a fi extrasă. ♣

Exemplu. Dacă se aruncă un zar obișnuit, probabilitatea să apară pe față unul dintre numerele $\{1, 2, \dots, 6\}$ este aceeași. Dacă însă pe trei dintre fețe este înscris numărul 1, iar pe celelalte fețe numerele 2, 3 și 4, atunci, la aruncarea zarului apariția numărului 1 nu mai este egală cu a celorlalte trei numere. ♣

Exerciții pentru seminar

- ▶ **Evenimente aleatoare:** I.1., I.3., I.4. (a, c), I.5. (a), I.6.,
- ▶ **Funcția de probabilitate:** II.1., II.3., II.4., II.6., II.8., II.9. (a, d), II.13.
- ▶ **Rezervă:** II.6., II.7., II.11.

Teoria probabilităților discrete

└ Funcția de probabilitate

└ Probabilitatea evenimentelor aleatoare elementare

Sfârșit

Exerciții - evenimente aleatoare

I.1. Trei jucători, 1, 2 și 3 aruncă pe rând, în această ordine, o monedă. Câștigă cel care obține primul stema. Mulțimea evenimentelor elementare poate fi descrisă astfel (0 pentru ban și 1 pentru stemă)

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \dots, 0000 \dots\}$$

- a) Determinați evenimentele aleatoare $A_i = \text{jucătorul } i \text{ câștigă jocul, } i = \overline{1, 3}$.
- b) Determinați evenimentele aleatoare $\overline{A_1 \cup A_3}$, $\overline{A_1 \cup A_2}$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ și $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.
- c) Arătați că $A_1 \cup A_3 \subseteq \overline{A_2}$. Este adevărat că $A_1 \cup A_3 = \overline{A_2}$?

I.2. O limuzină care face curse către un aeroport are o capacitate de 6 locuri și transportă pasageri de la cele trei hoteluri ale aeroportului.

Exerciții - evenimente aleatoare

- a) Descrieți evenimentele aleatoare elementare în cazul în care interesează câți pasageri ajung de la fiecare dintre cele trei hoteluri la aeroport.
- b) Descrieți evenimentele aleatoare elementare în cazul în care interesează doar numărul de pasageri care ajung la aeroport.

I.3. Se aruncă două zaruri (unul roșu și unul negru). Fie A evenimentul “suma zarurilor este un număr impar”, B = “cel puțin unul dintre zaruri are valoarea 1” și C = “suma zarurilor este 5”. Descrieți evenimentele $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$, $A \cap C$, $\bar{A} \cap B$ și $A \cap B \cap \bar{C}$.

I.4. Fie A și B două evenimente asociate unui experiment aleator. Arătați că

- a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
- b) $A \cup \bar{B} = \overline{\bar{A} \cap B}$, $A \cap B = B \cap (A \cup \bar{B})$;
- c) $A \cap B = B \cap (\overline{\bar{A} \cap B})$, $A \cap B = B \setminus (\bar{A} \cap B)$.

Exerciții - evenimente aleatoare

I.5. Fie A și B evenimente aleatoare. Simplificați următoarele expresii

- a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$;
- b) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$.

I.6. Fie A , B și C trei evenimente aleatoare asociate unui experiment. Determinați, în funcție de A , B și C , expresiile corespunzătoare următoarelor evenimente

- a) dintre cele trei evenimente se realizează doar A ;
- b) se realizează A și C dar nu și B .
- c) cel puțin două dintre cele trei evenimente se realizează;
- d) se realizează exact unul dintre cele trei evenimente;
- e) se realizează cel mult trei dintre ele.

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.1. Considerăm un experiment aleator a cărui mulțime de evenimente elementare este $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Care dintre următoarele funcții poate fi o funcție de probabilitate definită pe Ω ? De ce?

a) $P(\omega_1) = \frac{1}{3}, P(\omega_2) = \frac{1}{9}, P(\omega_3) = \frac{1}{3}, P(\omega_4) = \frac{1}{9}, P(\omega_5) = \frac{1}{9};$

b) $P(\omega_1) = \frac{1}{4}, P(\omega_2) = \frac{1}{8}, P(\omega_3) = -\frac{1}{4}, P(\omega_4) = \frac{1}{2}, P(\omega_5) = \frac{3}{8};$

c) $P(\omega_1) = \frac{1}{2}, P(\omega_2) = \frac{1}{8}, P(\omega_3) = \frac{1}{8}, P(\omega_4) = \frac{1}{8}, P(\omega_5) = \frac{3}{8}.$

II.2. Fie A și B două evenimente aleatoare așa încât $P(A \cap B) = 1/4$, $P(\bar{A}) = 1/3$ și $P(B) = 1/2$. Calculați $P(A \cup B)$, $P(A \setminus B)$, $P(B \setminus A)$ și $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

II.3. Fie A și B două evenimente aleatoare astfel încât $P(A \cup B) = 3/4$, $P(A \cap B) = 1/6$ și $P(\bar{B}) = 4/5$. Calculați probabilitatea evenimentelor A , \bar{A} , $(B \setminus A)$, $(A \setminus B)$ și $A \cup \bar{B}$.

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.4. Fie A și B două evenimente aleatoare incompatibile pentru care se cunosc $P(A) = 0.3$ și $P(B) = 0.5$. Care este probabilitatea ca

- a) să se realizeze A sau B ?
- b) să se realizeze B dar nu și A ?
- c) să se realizeze simultan cele două evenimente?

II.5. Pentru ca o rezoluție să ajungă în fața președintelui S.U.A. trebuie să treacă prin Senat și prin Camera Reprezentanților. Dintre toate rezoluțiile prezentate acestor două corpuri legislative 60% trec de Cameră, 70% trec de Senat și 80% trec de cel puțin unul dintre cele două corpuri. Să se calculeze probabilitatea ca o rezoluție să ajungă la președinte.

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.6. Un elev trebuie să aleagă două dintre următoarele cursuri: franceză, matematici și istorie. El alege istorie cu probabilitate $5/8$, franceză cu probabilitate $5/8$ și alege franceză și istorie cu probabilitate $1/4$. Care este probabilitatea pentru ca elevul să aleagă matematici? Dar probabilitatea ca el să aleagă istorie sau franceză?

II.7. Într-o cursă hipică se întrec trei cai: H_1 , H_2 și H_3 . H_1 are de două ori mai multe șanse ca H_2 să câștige, iar H_2 de două ori mai multe șanse ca H_3 să câștige.

- a) Care sunt probabilitățile de a câștiga ale celor trei cai?
- b) Care este probabilitatea ca primul sau al doilea cal să nu câștige?

II.8. Fie A și B două evenimente aleatoare. Arătați că

- a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$;
- b) $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$;
- c) $P(A \Delta B) = P(A) - 2P(A \cap B) + P(B)$.

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.9. Arătați că pentru trei evenimente aleatoare A , B , C au loc următoarele relații

- a) $P(A \cap B) + P[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1$;
- b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) = 1$;
- c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 1$;
- d) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A})P(\overline{B})$.

II.10. Fie A_1 , A_2 și A_3 trei evenimente asociate unui experiment aleator.

- a) În ce condiții are loc relația

$$P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)?$$

- b) Demonstrați că, dacă $A \cap B \cap C = \emptyset$, atunci

$$P[(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)] = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A).$$

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.11*. Doi studenți x și y urmează un curs la care, în urma examinării, se poate obține unul din următoarele calificative: A, B sau C. Probabilitatea ca x să obțină B este 0.3. Probabilitatea ca y să obțină B este 0.4. Probabilitatea ca nici unul să nu obțină A dar cel puțin unul să obțină B este 0.1. Care este probabilitatea ca cel puțin unul dintre studenți să obțină B dar nici unul să nu obțină C?

II.12*. Într-o urnă sunt zece bile numerotate de la 1 la 10; din urnă se extrag două bile. Care este probabilitatea ca suma celor două numere astfel obținute să fie impară dacă

- a) cele două bile sunt extrase simultan?
- b) cele două bile sunt extrase una după alta fără întoarcere?
- b) cele două bile sunt extrase una după alta cu întoarcere?

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.13*. Un zar este construit în așa fel încât probabilitatea de a apărea o față este proporțională cu numărul de pe acea față.

- a) Care este probabilitatea de a obține o față cu număr par la o aruncare?
- b) Dar probabilitatea de a obține un număr prim?

II.14*. Dacă $P(A) = 0.9$ și $P(B) = 0.8$, arătați că $P(A \cap B) \geq 0.7$.

- a) Arătați că $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
- b) Demonstrați prin inducție inegalitatea lui Bonferroni: pentru n evenimente aleatoare A_1, A_2, \dots, A_n avem

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - n + 1.$$

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.15*. Se consideră un experiment care are un număr infinit numărabil de evenimente aleatoare elementare:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}.$$

- a) Arătați că nu este posibil ca toate evenimentele elementare să aibă o aceeași probabilitate nenulă.
- b) Este posibil ca toate evenimentele elementare să aibă probabilitate nenulă?

II.16*. Se consideră un experiment aleator și Ω mulțimea evenimentelor elementare. Să se arate că funcția $d : \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, definită prin $d(A, B) = P(A \Delta B)$ este o metrică pe familia evenimentelor aleatoare $\mathcal{P}(\Omega)$.

Anexa 1

Proprietatea 6

(Principiul includerii și al excluderii) Dacă A_1, A_2, \dots, A_m sunt evenimente aleatoare, atunci

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) &= \sum_{k=1}^m P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq m} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \dots + \\
 &+ (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq m} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_p}) + \dots + \\
 &+ (-1)^{m+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m).
 \end{aligned}$$

dem.: Procedăm prin inducție după m : pentru $m = 2$ avem proprietatea 3.

Anexa 1

Presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru orice $(m-1)$ evenimente aleatoare.

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) - P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) \cap A_m\right] + P(A_m) = \\
 &= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) - P\left[\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m)\right] + P(A_m).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Pentru primele două sume aplicăm ipoteza inductivă și obținem






$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \dots + \\
 &+ (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_p}) + \dots +
 \end{aligned} \tag{3}$$

Anexa 1

$$\begin{aligned}
& + (-1)^m P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}), \\
P \left[\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m) \right] &= \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k \cap A_m) - \quad (4) \\
&= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_m) + \dots + \\
&+ (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_p} \cap A_m) + \dots + \\
&+ (-1)^{m+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1} \cap A_m).
\end{aligned}$$

Combinând (2), (3) și (4) obținem proprietatea dorită. ■

Bibliography

-  Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
-  Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
-  Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
-  Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.
-  Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.