Setul 8
de probleme şi exerciţii de matematică
(relative la forme liniare, afine şi pătratice)

S8.1 Să se determine o formă liniară nenulă $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(0,1,1) = f(-1,1,1) = 0$. Să se arate apoi că mulţimea tuturor formelor liniare pe $\mathbb{R}^3$, cu valori reale, aşa încât au valori nule în punctele $(0,1,1)$ şi $(-1,1,1)$, formează un subspaţiu vectorial unidimensional.

S8.2 Să se găsească baza duală bazei $B = \{(1,0,2),(2,-1,-1),(0,1,3)\}$ a lui $\mathbb{R}^3$. Să se afle coordonatele formei $f = -v_1^* + 3v_2^* - 4v_3^*$ în baza B^*.

S8.3 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$g(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \frac{28}{5}x_3y_3 - x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 + 4x_2y_3 - 2x_3y_1 + 4x_3y_2,$$

$$\forall x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se arate că aplicaţia g este o formă biliniară şi simetrică pe $\mathbb{R}^3$.

b) Să se găsească matricea şi discriminantul formei g în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Să se afle $rang(g)$.

c) Să se determine $Ker(g)$.

d) Să se găsească matricea şi discriminantul formei g în raport cu baza $\{(1,1,1), (2,-1,2), (1,3,-3)\}$ a lui $\mathbb{R}^3$.

e) Să se scrie forma pătratică h, corespunzătoare lui g şi să se stabilească forma normală a lui h. Să se afle indicele pozitiv şi cel negativ de inerţie pentru h, cât şi signatura lui h. Să se deducă forma biliniară ce corespunde formei normale a lui h.

f) Să se determine o bază din $\mathbb{R}^3$ în care se realizează forma normală a lui h. Să se stabilească ce este, din punct de vedere geometric, nucleul lui h.

Să se reia aceleaşi cerinţe şi pentru aplicaţiile următoare:

$$g_1(x,y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2,$$

$$g_2(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2,$$

$$g_3(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

$$\forall x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

S8.4 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma biliniară a cărei matrice în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Să se precizeze o scriere sub forma matriceală a lui g şi să se calculeze $g((-1,0,1),(1,-1,0))$.

b) Să se determine forma biliniară simetrică (respectiv antisimetrică) asociată lui g.

c) Să se evidenţieze g' şi g'' (aplicaţiile liniare asociate lui g) şi să se afle $Ker(g')$ şi $Ker(g'')$.

d) Să se stabilească forma normală a formei pătratice corespunzătoare lui g_s (forma simetrică asociată lui g) şi să se precizeze o bază a lui $\mathbb{R}^3$ în care se realizează această formă normală.

Să se reia acest exerciţiu şi pentru forma biliniară a cărei matrice în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

S8.5 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma biliniară definită prin:

$$g(x, y) = 3x_1y_1 + 13x_2y_2 + 14x_3y_3 - 3x_1y_2 + 2x_1y_3 - 3x_2y_1 - 12x_2y_3 + 2x_3y_1 - 12x_3y_2,$$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se arate că g determină pe $\mathbb{R}^3$ o structură de spaţiu euclidian (real), în raport cu care vectorii $(1, 0, 0)$ şi $(1, 1, 0)$ sunt perpendiculari.

b) Să se ortonormalizeze sistemul de vectori $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ în raport cu structura euclidiană determinată de g pe $\mathbb{R}^3$.

S8.6 Pe spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$, se consideră formele pătratice h_1 şi $h_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin:

$$h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$$
$$h_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \sqrt{2}x_1x_2 + \sqrt{2}x_1x_3,\ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se verifice că h_1 şi h_2 sunt euclidian echivalente.

b) Să se aducă cele două forme pătratice la forma canonică, prin schimbări ortogonale de bază.

S8.7 În spaţiul afin $\mathbb{R}^4$, raportat la reperul cartezian canonic, se consideră punctele $A(1, -1, 0, 1)$, $B(0, 1, -1, 0)$, $C(1, 0, -1, 0)$ şi $D(1, 2, 0, 1)$. Se cer următoarele:

a) Ecuaţia dreptei ce trece prin A şi este paralelă cu dreapta prin B şi C.

b) Ecuaţia hiperplanului determinat de A, B, C, D.

c) Ecuaţia hiperplanului ce trece prin punctul $(-1, 1, 2, -1)$ şi este paralel cu hiperplanul de la b).

S8.8 În spaţiul afin real $\mathbb{R}^3$, raportat la reperul cartezian uzual $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, se consideră punctul $P(2, -1, 2)$.

a) Să se stabilească ecuaţiile simetriei pe $\mathbb{R}^3$, faţă de P, în raport cu reperul considerat.

b) Să se găsească ecuaţiile omotetiei de centru P şi raport $5/2$, faţă de reperul din enunţ.

c) Să se afle coordonatele, în raport cu reperul menţionat, ale transformatelor punctului $A = \dfrac{3}{4}B + \dfrac{1}{4}C$ prin cele două transformări de la a) şi b), unde $B(2, -4, 5)$ şi $C(6, -8, 1)$.

S8.9 Să se stabilească ce este, din punct de vedere geometric, nucleul fiecăreia dintre următoarele aplicaţii pătratice reale:

a) $h_1(x) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 - 26x_1 + 18x_2 - 39$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) $h_2(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) $h_3(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 14x_1 - 2x_2 + 3$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) $h_4(x) = x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+12x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3+14x_1+16x_2-12x_3-33$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

e) $h_5(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

f) $h_6(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

g) $h_7(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 4$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

h) $h_8(x) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 - 1$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

S8.10 Se consideră un spaţiu vectorial V bidimensional şi o bază a sa $\{u_1, u_2\}$. În dualul său V^*, se consideră baza $\{v_1^*, v_2^*\}$, duală celei din V. Să se calculeze $f(x + y)$ şi $f(x - y)$, unde f este forma liniară $f = 2v_1^* + 3v_2^*$, iar $x = u_1 + 4u_2$ şi $y = -2u_1 + u_2$. Să se scrie expresia lui f în baza duală bazei $\{v_1, v_2\}$, unde $v_1 = u_1 + 2u_2$ şi $v_2 = u_1 - u_2$.

S8.11 Fie $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma biliniară definită prin

$$g(x, y) = 5x_1y_1+x_2y_2+4x_3y_3-x_4y_4+x_1y_2-x_1y_3-2x_1y_4+x_2y_1+2x_2y_3-x_2y_4-x_3y_1+2x_3y_2+x_3y_4-2x_4y_1-x_4y_2+x_4y_3,$$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

a) Să se determine g', g'' şi $Ker(g)$.

b) Să se găsească matricea şi discriminantul formei pătratice h, asociată lui g. Să se afle $rang(h)$.

c) Să se stabilească forma normală a lui h şi o bază din $\mathbb{R}^4$ în care se realizează această formă normală.

d) Să se precizeze indicele pozitiv, indicele negativ de inerţie şi signatura lui h.

S8.12 Să se afle ce reprezintă din punct de vedere geometric nucleul fiecăreia dintre aplicaţiile ale căror expresii sunt date mai jos:

a) $h(x) = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 2$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

b) $h(x) = x_1 - x_3$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

c) $h(x) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 - 9$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) $h(x) = 2x_1^2+5x_2^2+11x_3^2-20x_1x_2+4x_1x_3+16x_2x_3-24x_1-6x_2-6x_3-180$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

e) $h(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - 1$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

f) $h(x) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Bibliografie selectivă

1. M. Craioveanu, I. D. Albu - *Geometrie afină şi euclidiană*, Ed. Facla, Timişoara, 1982.

2. Veronica Teodora Borcea, Cătălina Ileana Davideanu, Corina Forăscu - *Algebră liniară*, Ed. "Gh. Asachi", Iaşi, 2000.

3. Ecaterina Cioară - *Algebră liniară.Geometrie analitică (culegere de probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2009.