Calcul Numeric

Cursul 8

2017

Anca Ignat

Memorarea matricilor rare

- se memorează doar valorile nenule şi suficiente informaţii despre indici astfel ca să se poată reconstitui complet matricea

Pp. că matricea ***A*** are ***NN*** elemente nenule.

Memorare comprimată pe linii

Se folosesc 3 vectori:

valori – vector de numere reale de dimensiune ***NN***
ind_col – vector de indici de dimensiune ***NN***
inceput_linii – vector de întregi de dimensiune ***n+1***

În vectorii

valori se memorează elementele nenule ale matricii ***A*** în ordinea liniilor

ind_col se memorează indicii de coloană ai elementelor din ***valori***.

inceput_linii se stochează indicele/poziţia în vectorul *valori/ind_col* al/a primului element de pe linia ***i*** memorat în vectorii *valori/ind_col*.

- ***inceput_linii(n+1) = NN+1***

- ***inceput_linii(i+1) – inceput_linii(i) =***
numărul de elemente nenule de pe linia ***i, i=1,n***

$$
A = \begin{pmatrix}
102.5 & 0.0 & 2.5 & 0.0 & 0.0 \\
3.5 & 104.88 & 1.05 & 0.0 & 0.33 \\
0.0 & 0.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 1.3 & 0.0 & 101.3 & 0.0 \\
0.73 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & 102.23
\end{pmatrix}
$$

$$n=5, \quad NN=12$$

valori = (102.5, 2.5, 0.33, 1.05, 104.88, 3.5, 100.0,
101.3, 1.3, 1.5, 0.73, 102.23)

ind_col = (1, 3, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 2, 4, 1, 5)

inceput_linii = (1, 3, 7, 8, 10, 13)

Dacă se ştie că matricea are maxim ***n_max*** elemente nenule pe fiecare linie se pot folosi 2 matrici pentru memorarea rară:

valori – matrice de numere reale de dimensiune ***n x n_max***
ind_col – matrice de indici de dimensiune ***n x n_max***

În matricea ***valori*** se memorează pe linia ***i*** elementele nenule de pe linia ***i*** a matricii ***A*** iar în matricea ***ind_col*** se memorează indicii de coloană ai elementelor corespunzătoare din matricea ***valori***.

$$A = \begin{pmatrix} 102.5 & 0.0 & 2.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 104.88 & 1.05 & 0.0 & 0.33 \\ 0.0 & 0.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.3 & 0.0 & 101.3 & 0.0 \\ 0.73 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & 102.23 \end{pmatrix}$$

$$valori = \begin{pmatrix} 102.5 & 2.5 & 0 \\ 104.88 & 1.05 & 0.33 \\ 100.0 & 0 & 0 \\ 101.3 & 1.3 & 0 \\ 102.23 & 1.5 & 0.73 \end{pmatrix} \quad ind\_col = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalele matricii A:

$$
\begin{aligned}
&d_0 : \left(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right) \\
&d_1 : \left(a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{n-1n}\right) \\
&d_{-1} : \left(a_{21}, a_{32}, \ldots, a_{nn-1}\right) \\
&d_2 : \left(a_{13}, a_{24}, \ldots, a_{n-2n}\right) \\
&d_{-2} : \left(a_{31}, a_{42}, \ldots, a_{nn-2}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pentru matricile care au elementele nenule plasate pe câteva din diagonalele matricii $\boldsymbol{A}$ (***n_d*** diagonale cu elemente nenule) se pot folosi pentru memorare o matrice şi un vector:

diag – matrice cu numere reale de dimensiune ***n x n_d***

diag_no – vector de întregi de dimensiune ***n_d***

În matricea ***diag*** se memorează pe coloane diagonalele cu elemente nenule iar în ***diag_no*** este specificat numărul diagonalei care e memorat în coloana ***j*** a matricii ***diag***.

$$\boldsymbol{diag(i,j) = a_{i\; i+diag\_no(j)}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{20.5} & \mathbf{2.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{40.5} & \mathbf{3.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{1.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{100.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{2.3} & \mathbf{0.0} & \mathbf{101.5} & \mathbf{4.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{3.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{102.5} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{diag} = \begin{pmatrix} * & 20.5 & 2.0 \\ * & 40.5 & 3.0 \\ 1.0 & 100.0 & 0.0 \\ 2.3 & 101.5 & 4.0 \\ 3.0 & 102.5 & * \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{diag\_no} = (-2,0,1)$$

Alte tipuri de memorări:

http://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSFHY8_5.3.0/com.ibm.cluster.essl.v5r3.essl100.doc/am5gr_smstor.htm?lang=en
(sparse matrix storage)

Metoda Jacobi pentru rezolvarea sistemelor liniare

Fie sistemul:

$$\boldsymbol{Ax = b}\ , \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times n}}\ , \quad \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

cu

$$\mathbf{det}\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0} \quad , \quad \boldsymbol{a_{ii}} \neq \mathbf{0}\ , \boldsymbol{i} = \mathbf{1, 2, \ldots,} \boldsymbol{n}$$

Alegem:

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{diag}[\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{det}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}} \neq \mathbf{0}$$

$$B^{-1} = \mathrm{diag}[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Matricea C este:

$$C = B - A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{dacă } i \neq j \\ 0 & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

Matricea iteraţiei se poate calcula şi are forma:

$$M := B^{-1}C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad m_{ij} = \begin{cases} -(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}) & \text{dacă } i \neq j \\ 0 & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

Construim vectorul $\boldsymbol{g}$:

$$g := Mx^{(k)} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad Mx^{(k)} = (g_i)_{i=1}^n$$

Componentele vectorului $\boldsymbol{g}$ sunt:

$$g_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j^{(k)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} = -(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} \quad , i = 1, \ldots, n$$

Vectorul $\boldsymbol{d}$ este:

$$d = B^{-1}b = (d_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n\,, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}\,, i = 1,\ldots,n$$

Şirul $\{x^{(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se construieşte folosind formula:

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d \quad \leftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = g_i + d_i\,, i = 1,\ldots,n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}\,, \quad i = 1,\ldots,n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1,\ldots,n \qquad (9)$$

Formula (9) descrie ***metoda lui Jacobi*** de aproximare a soluţiei unui sistem liniar.

Condiţii suficiente de convergenţă

Propoziţia 1

$$\| M \| < 1 \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \to x^* , k \to \infty.$$

Demonstraţie. Fie x^* soluţia sistemului $Ax=b$. Din relaţia $A=B-C$ rezultă $Bx^* = Cx^* + b$ sau $x^* = Mx^* + d$.
Procesul iterativ $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d$ conduce la relaţia:

$$\left\| x^* - x^{(k+1)} \right\| = \left\| M\left(x^* - x^{(k)} \right) \right\| \leq \| M \| \left\| x^* - x^{(k)} \right\| \leq \cdots \leq \| M \|^{k+1} \left\| x^* - x^{(0)} \right\|$$

În continuare vom aplica această propoziţie pentru diverse norme.

- Din $\| M \|_F = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ deducem:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right)^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \to x^*, k \to \infty$$

- Din $\| M \|_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} | m_{ij} |; j = 1, \ldots, n\} < 1$ deducem:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{| a_{ij} |}{| a_{ii} |} \right) < 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \to x^*, k \to \infty$$

- ***(Criteriul dominanţei diagonalei pe linii)***

Din $\| M \|_{\infty} = \max\{\sum_{j=1}^{n} | m_{ij} |; i = 1,\ldots,n\} < 1$ deducem:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{| a_{ij} |}{| a_{ii} |}\right) < 1 \quad \forall i = 1,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \to x^{*}, k \to \infty$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} | < | a_{ii} | \quad \forall i = 1,\ldots,n \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{*} \qquad (12)$$

- ***(Criteriul dominanţei diagonalei pe coloane)***

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} | a_{ij} | < | a_{jj} | \quad \forall j = 1,\ldots,n \Rightarrow \left\| M \right\|_{1} < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{*} \ (13)$$

Metoda Gauss-Seidel pentru rezolvarea sistemelor liniare

Considerăm din nou sistemul liniar:

$$Ax = b\,, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad b \in \mathbb{R}^{n}$$

cu

$$\det A \neq 0 \quad , \quad a_{ii} \neq 0\,,\, i = 1,2,\ldots,n$$

Putem deduce metoda Gauss-Seidel din metoda lui Jacobi astfel:

$$x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad x_j^{(k)} \quad - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big) / a_{ii}\,, i = 1,\ldots,n \; - \; \textbf{Jacobi}$$

$$\updownarrow$$

$$x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad x_j^{(k+1)} \quad - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big) / a_{ii}\,, i = 1,\ldots,n - \textbf{Gauss-Seidel}$$

Când calculăm $x_i^{(k+1)}$ cunoaştem deja $x_1^{(k+1)},\cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ şi putem folosi aceste valori în prima sumă.

Deducerea metodei Gauss-Seidel din schema generală se face luând:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \textbf{dacă } j \le i \\ 0 & \textbf{dacă } j > i \end{cases}$$

Matricea $\boldsymbol{B}$ este nesingulară ($a_{ii} \neq 0, \forall i$):

$$\det B = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$$

Matricea $\boldsymbol{C}$ este:

$$C = B - A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{dacă } i < j \\ 0 & \text{dacă } i \geq j \end{cases}$$

În cazul metodei Gauss-Seidel, vectorul $x^{(k+1)}$ se obţine din $x^{(k)}$ rezolvând sistemul inferior triunghiular (7) din schema generală:

$$Bx = Cx^{(k)} + b = f \tag{14}$$

Soluţia sistemului (14) este dată de formula:

$$x_i = (f_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j) / b_{ii} = (f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j) / a_{ii}\ , \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (15)$$

Vectorul f este:

$$f_i = (Cx^{(k)})_i + b_i\ , \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (16)$$

$$(Cx^{(k)})_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\ , \forall i = 1, \dots, n \qquad (17)$$

Folosind formula de rezolvare a sistemelor inferior triunghiulare (15), relaţiile (16) şi (17) avem:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)})}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Condiţii suficiente de convergenţă pentru metoda Gauss-Seidel

Propoziţia 1

Dacă matricea A este astfel încât:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)^2 < 1$$

atunci are loc convergenţa şirului construit cu metoda Gauss-Seidel la soluţia sistemului $Ax=b$, i.e., $x^{(k)} \to x^*$, $k \to \infty$ $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Propoziţia 2 ***(Criteriul dominanţei diagonalei pe linii)***

Dacă matricea A este astfel încât:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

atunci:

$$x^{(k)} \to x^{*},\ k \to \infty \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^{n}$$

Propoziţia 3 ***(Criteriul dominanţei diagonalei pe coloane)***

Dacă matricea $\boldsymbol{A}$ este astfel încât:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

atunci metoda Gauss-Seidel converge:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{*}, \quad \forall x^{(0)}.$$

Metode iterative pentru matrici simetrice şi pozitiv definite

Considerăm cazul sistemelor liniare cu matricea sistemului simetrică şi pozitiv definită:

$$A = A^T - \textbf{matrice simetrică} - a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = A^T \quad \Rightarrow \quad A = L + D + L^T$$

$$D = \mathrm{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Definiţii

Matricea simetrică $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numeşte ***pozitiv semidefinită*** ($A \geq 0$):

$$\left(Ax, x\right)_{\mathbb{R}^n} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Matricea simetrică A se numeşte ***pozitiv definită*** ($A > 0$) dacă:

$$\left(Ax, x\right)_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

Propoziţie

Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este pozitiv definită atunci matricea A este nesingulară.

Demonstraţie: Presupunem prin reducere la absurd că matricea A este pozitiv definită şi singulară. Atunci, sistemul de ecuaţii liniare

$\boldsymbol{Ax=0}$ are pe lângă soluţia banală $\boldsymbol{x=0}$ şi o soluţie $\boldsymbol{x^0 \neq 0}$. Avem:

$$x^0 \neq 0 \;\Rightarrow\; 0 < \left(Ax^0, x^0\right) = \left(0, x^0\right) = 0 \quad \textbf{contradicţie!}$$

$$A > 0 \;\Rightarrow\; a_{ii} = \left(Ae_i, e_i\right) > 0 \;\; \forall i = 1,\ldots,n$$

Lemă

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice simetrică şi $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice nesingulară astfel încât matricea $\boldsymbol{P = B + B^T - A}$ este pozitiv definită. Fie matricea $\boldsymbol{M = I_n - B^{-1}A}$. Atunci raza spectrală a matricii $\boldsymbol{M}$ este strict subunitară dacă şi numai dacă matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită:

$$\rho(M) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad A > 0$$

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice simetrică, nesingulară, cu diagonala pozitivă, $a_{ii} > 0$, $\forall\ i = 1,\ldots,n$ şi $b \in \mathbb{R}^n$ vectorul termenilor liberi. Atunci metoda lui Gauss-Seidel generează şiruri convergente la soluţia $x^* = A^{-1}b, \forall x^{(0)}$ dacă şi numai dacă A este pozitiv defnită.

Demonstraţie: Din teorema de convergenţă avem:

$$x^{(k)} \to x^*, \quad k \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \rho(M) < 1$$

Dacă matricea A se scrie sub forma:

$$A = L + D + L^T$$

matricile B şi C sunt date de:

$$B = L + D \quad , \quad C = B - A = -L^T$$

Matricea iteraţiei $\boldsymbol{M}$ este:

$$M = B^{-1}C = B^{-1}(B - A) = I_n - B^{-1}A$$

Încercăm să aplicăm **Lema** de mai sus. Pentru aceasta verificăm dacă matricea $\boldsymbol{P}$ este pozitiv definită:

$$P = B + B^T - A = L + D + (L + D)^T - L - D - L^T = D$$

$$(Px, x)_{\mathbb{R}^n} = (Dx, x)_{\mathbb{R}^n} = ((a_{pp}x_p)_p, (x_i)_i)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

$$a_{ii} > 0 \quad \forall i \Rightarrow (Px, x)_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Rightarrow P > 0$$

Putem aplica **Lema** de unde deducem convergenţa şirului construit cu metoda Gauss-Seidel doar în cazul în care matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită:

$$x^{(k)} \to x^*, \quad k \to \infty \iff \rho(M) < 1 \iff A \text{ pozitiv definită}$$

Metodele relaxării

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ o matrice reală pătratică de dimensiune *n*, simetrică, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ şi pozitiv definită, $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{0}$ şi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ un vector real. Considerăm sistemul de ecuaţii liniare:

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

Deoarece matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită sistemul de mai sus are soluţie unică, $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Vom considera funcţia $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}_+$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^n} \ , \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

Din faptul că matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită avem:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{0},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \quad \text{şi } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) > 0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \ , \forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}^*$$

Prin urmare $\boldsymbol{x}^*$ este şi unica soluţie a problemei de minimizare:

$$\mathbf{min}\left\{ f(y)\,;\, y\in\mathbb{R}^n \right\} = \mathbf{0} = f(x^*)$$

Vom căuta soluţia sistemului $\boldsymbol{Ax=b}$, $\boldsymbol{x^* = A^{-1}b}$ ca fiind soluţia problemei de minimizare de mai sus folosind o metodă de tip relaxare de forma:

$$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n - \mathbf{dat}, \quad y^{(k+1)} = y^{(k)} + c_k e_l \,,\;\; l = l_k \;\;,\;\; k = 0,1,\ldots$$

$$y_j^{(k+1)} = y_j^{(k)} \,,\;\; \forall\, j \neq l \;\;, \quad y_l^{(k+1)} = y_l^{(k)} + c_k$$

Constanta $\boldsymbol{c_k}$ se determină astfel încât $f(y^{(k+1)}) < f(y^{(k)})$ în speranţa că şirul $\boldsymbol{y^{(k)}}$ astfel construit converge la $\boldsymbol{x}^*$.

Notăm cu :

$$r^{(k)} = b - Ay^{(k)}$$ vectorul **reziduu**.

Avem:

$$r^{(k)} = b - Ay^{(k)} = Ax^* - Ay^{(k)} = A(x^* - y^{(k)})$$

$$f(y^{(k+1)}) = f(y^{(k)}) - 2\,c_k\,r_l^{(k)} + c_k^2 a_{ll}$$

Pentru ca $f(y^{(k+1)}) < f(y^{(k)})$ este necesar şi suficient să alegem c_k astfel ca:

$$c_k^2 a_{ll} - 2\,c_k\,r_l^{(k)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_{ll} > 0)\; c_k \in \left(0, 2\frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}}\right) \textbf{sau} \left(2\frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}}, 0\right)$$

$$c_k = \omega_k \frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}} \quad , \quad \textbf{cu}\; \omega_k \in (0,2)$$

Metoda de relaxare obţinută este următoarea:

$$\boldsymbol{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^{n} - \textbf{dat}, \;\; \boldsymbol{y}^{(k+1)} = \boldsymbol{y}^{(k)} + \omega_k \frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}} e_l \,, \quad \boldsymbol{k} = \mathbf{0,1,\ldots}\,, \quad \omega_k \in (\mathbf{0,2})$$

Pentru a aproxima x^* se deduce o clasă de metode numite ***metodele relaxării successive***. Aceste metode se obţin aplicând metodele de relaxare de mai sus. Vom considera:

$$\omega_k = \omega, \forall k$$

Vom construi un şir $\{x^{(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ astfel:

$$x^{(0)} = y^{(0)} \text{ un vector din } \mathbb{R}^n \text{ dat}$$

$$l = 1 \quad y^{(1)} = y^{(0)} + \omega \frac{r_1^{(0)}}{a_{11}} e_1$$

$$l = 2 \quad y^{(2)} = y^{(1)} + \omega \frac{r_2^{(1)}}{a_{22}} e_2$$

$$\vdots$$

$$l = n \quad y^{(n)} = y^{(n-1)} + \omega \frac{r_n^{(n-1)}}{a_{nn}} e_n$$

$$x^{(1)} = y^{(n)}$$

Trecerea de la iteraţia $\boldsymbol{k}$ la iteraţia următoare se face astfel:

$$x^{(k)} = y^{(kn)}$$

$$l = 1 \quad y^{(kn+1)} = y^{(kn)} + \omega \frac{r_1^{(kn)}}{a_{11}} e_1$$

$$l = 2 \quad y^{(kn+2)} = y^{(kn+1)} + \omega \frac{r_2^{(kn+1)}}{a_{22}} e_2$$

$$\vdots$$

$$l = n \quad y^{(kn+n)} = y^{(kn+n-1)} + \omega \frac{r_n^{(kn+n-1)}}{a_{nn}} e_n$$

$$x^{(k+1)} = y^{((k+1)n)}, \; k = 0,1,2,\ldots$$

Acum putem scrie dependenţa vectorului $x^{(k+1)}$ de $x^{(k)}$:

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in (0,2)$ **date,**

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$k = 0,1,2,\ldots$$

Metodele de mai sus poartă numele de ***metodele relaxării successive***. Pentru $\omega = 1$ obţinem metoda Gauss-Seidel.

- $0<\omega<1$ metodele se numesc de ***sub-relaxare*** şi pot fi folosite în cazul când metoda Gauss-Seidel diverge.
- $1<\omega<2$ metodele se numesc de ***supra-relaxare*** şi pot fi folosite pentru accelerarea convergenţei în cazul când metoda Gauss-Seidel converge.

Rearanjând formulele de mai sus avem:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{\omega}x_i^{(k+1)} = \left(B\,x^{(k+1)}\right)_i = \frac{(1-\omega)}{\omega}a_{ii}x_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i =$$

$$= \left(C\,x^{(k)}\right)_i + \left(b\right)_i$$

Matricea A fiind simetrică, poate fi scrisă sub forma:

$$A = L + D + L^T \quad \text{cu} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \mathrm{diag}\left[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \right]$$

Cu aceste notaţii, matricile ***B*** şi ***C*** de mai sus pot fi scrise astfel:

$$B = L + \frac{1}{\omega} D \qquad , \qquad C = \frac{1-\omega}{\omega} D - L^T$$

Vom verifică dacă metodele relaxării succesive se înscriu în clasa generală de metode iterative, adică vom verifica dacă ***A=B-C*** :

$$B-C=L+\frac{1}{\omega}D-\frac{1-\omega}{\omega}D+L^T=L+D+L^T=A$$

Convergenţa şirului $x^{(k)}$ la soluţia $x^*=A^{-1}b$?

Teoremă

Fie o matrice $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, simetrică, $A=A^T$ cu **det**$A \neq 0$, $a_{ii}>0$, $\forall i=1,\dots,n$, $b\in\mathbb{R}^n$ un vector real şi $\omega\in(0,2)$. Atunci şirul $x^{(k)}$ construit cu o metoda de relaxare successivă converge la soluţia x^* a sistemului liniar $Ax=b$ oricare ar fi iteraţia iniţială $x^{(0)}$ dacă şi numai dacă matricea A este pozitiv definită.

$$x^{(k)}\to x^*,\ k\to\infty,\ \forall\, x^{(0)} \quad\Leftrightarrow\quad (Ax,x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ x\neq 0$$

Demonstraţie: Vom verifica dacă raza spectrală a matricii iteraţiei este subunitară folosind **Lema.** Avem:

$$\boldsymbol{M = B^{-1}C = B^{-1}\left(B - A\right) = I_n - B^{-1}A}$$

$$\boldsymbol{B = L + \frac{1}{\omega}D \quad , \; \det B = \frac{1}{\omega^n}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0 \quad (a_{ii} > 0\, , \; \forall i)}$$

Matricea ***A*** este simetrică iar matricea ***B*** este nesingulară. Pentru a fi îndeplinite ipotezele Lemei trebuie să verificăm că matricea ***P*** este pozitiv definită:

$$\boldsymbol{P = B + B^T - A = L + \frac{1}{\omega}D + L^T + \frac{1}{\omega}D - L - D - L^T = \frac{2-\omega}{\omega}D}$$

$$\left(Px,x\right)=\frac{(2-\omega)}{\omega}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2>0\,,\;\; x\neq 0\;\;(a_{ii}>0,\forall i)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2-\omega)}{\omega}>0\quad\Leftrightarrow\omega\in\left(0,2\right)$$

Toate ipotezele lemei sunt îndeplinite, prin urmare avem convergenţa dorită.