Setul 5
de probleme şi exerciţii de matematică
(relative la aspecte algebrice ale lui $\mathbb{R}^n$)

S5.1 Dacă numărul $a \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ nu-i un pătrat perfect, să se arate că mulţimea $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \{x + y\sqrt{a} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, înzestrată cu operaţiile internă $\oplus$ şi externă $\odot$, definite respectiv prin

$$(x_1 + y_1\sqrt{a}) \oplus (x_2 + y_2\sqrt{a}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{a}), \forall\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$$

şi

$$\alpha \odot (x + y\sqrt{a}) = \alpha x + \alpha y\sqrt{a}, \forall\ \alpha \in \mathbb{Q}, x, y \in \mathbb{Q},$$

este un $\mathbb{Q}$-spaţiu liniar.

S5.2 Fie $M = \{A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a = b + c\}$.

i) Să se arate că M este un subspaţiu liniar al spaţiului $(\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

ii) Să se afle o bază a lui M şi $dim(M)$.

iii) Să se arate că $B = \{A_1, A_2, A_3\}$, unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

constituie o bază a lui M. Să se afle coordonatele vectorului $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în această bază.

S5.3 Să se analizeze liniara dependenţă / independenţă a următoarelor mulţimi şi să se stabilească, în caz de dependenţă liniară a lor, relaţia de dependenţă în cauză.

a) $\{(1, 1, 1), (1, -2, 3), (-1, 11, -9)\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

b) $\{f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{-x}, f_3(x) = x^2e^x\} \subset (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$;

c) $\{(1, -1, 3), (-1, 1, 4), (1, 1, 1)\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

d) $\{f_1(x) = 1, f_2(x) = \cos 2x, f_3(x) = \cos^2 x\} \subset (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

S5.4

1°. Să se arate că $B = \{(3, 1, 5), (3, 6, 2), (-1, 0, 1)\}$ formează o bază pentru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, la fel orientată ca şi baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

2°. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât mulţimea $B' = \{(m, 2, -3), (1, 1, -1), (m, 1, 3)\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ să fie o bază a lui $\mathbb{R}^3$, contrar orientată bazei canonice $\{e_1, e_2, e_3\}$.

3°. Pentru valorile lui m determinate la 2°, să se afle matricea S a schimbării de bază de la B la B'.

4°. Să se determine coordonatele vectorului $x = (1, 2, -1)$ în baza B.

S5.5 Să se arate că aplicaţia $< \cdot , \cdot >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$< x, y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3, \forall\ x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

defineşte un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

S5.6 Fie spaţiul liniar real $\mathbb{R}^3$, dotat cu produsul scalar euclidian. Să se analizeze ortogonaliatea sistemului de vectori $U = \{(1, -1, 1), (0, 1, 1), (-2, -1, 1)\}$. Să se calculeze apoi $\sphericalangle(u, v)$, $\sphericalangle(u, w)$ şi $\sphericalangle(v, w)$, unde $u = (-1, 1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$ şi $w = (1, 2, 3)$.

S5.7 Se consideră spaţiul euclidian $\mathbb{R}^4$, dotat cu produsul scalar canonic. Folosind procedeul de ortonormare a lui Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormată B', plecând de la baza

$$B = \{(1, 2, -1, 0), (1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, -1, 0, 1)\}.$$

S5.8 În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^4$, înzestrat cu produsul scalar canonic, se consideră sistemul de vectori $C = \{(1, 4, 3, 2), (1, 1, -1, 1), (-3, 0, 7, 6)\}$.

a) Să se determine $S = Spot(C)$ şi $S^\perp$.

b) Să se afle proiecţiile ortogonale ale vectorului $w = (14, -3, -6, -7)$ pe S şi pe $S^\perp$. Să se verifice că avem

$$||w - pr_S(u)|| \leq ||w - u||, \forall\ u \in C,$$

unde $pr_S(u)$ este notaţia pentru proiecţia ortogonală a vectorului u pe S, care, prin definiţie, înseamnă acel vector $v \in S$, pentru care $u - v = x \in S^\perp$.

S5.9

a) Folosind inegalitatea lui Minkowski, să se arate că aplicaţia $|| \cdot ||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall\ x = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n$, unde $p \in [1, +\infty)$ este indicat, constituie o normă pe $\mathbb{R}^n$.

b) Să se arate că $||x||_\infty \overset{def}{=} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \lim_{p \to \infty} ||x||_p$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

c) Să se demonstreze că:

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2 \leq n||x||_\infty, \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

d) Să se arate că inegalitatea lui Hölder se poate reda sub forma

$$| < x, y >_c \leq ||x||_p \cdot ||y||_q, \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n, p, q \in [1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

unde $< x, y >_c$ înseamnă produsul scalar canonic al elementelor x şi y din $\mathbb{R}^n$.

În particular, când $p = q = 2$, inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz se poate rescrie în forma:

$$| < x, y >_c | \leq ||x||_2 \cdot ||y||_2, \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

S5.10 Fie $< \cdot , \cdot >$ un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$ şi $|| \cdot ||$ norma indusă de acesta. Să se arate că au loc relaţiile, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$:

i) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (Euler) şi

ii) $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4 < x, y >$ (Hilbert).

S5.11 Fie W un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$ şi $f : W \to \mathbb{R}$, o funcţie astfel încât $f \not\equiv 0$, $\{x \in W \mid f(x) = 0\} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ şi $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in W$. Se defineşte aplicaţia $< \cdot , \cdot >: W \times W \to \mathbb{R}$, prin:

$$< x, y >= f(x) \cdot f(y), \forall\ x, y \in W.$$

a) Să se arate că W este un spaţiu prehilbertian.

b) Să se dovedească că oricare două elemente ale lui W, diferite de $0_{\mathbb{R}^n}$, sunt liniar dependente (altfel spus, $dim(W) = 1$).

S5.12 Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, se definesc operaţiile $\oplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, prin $x \oplus y = xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, prin $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ este un spaţiu liniar. Se poate structura $\mathbb{R}_+^*$ ca o algebră?

S5.13 Care dintre mulţimile de mai jos este un subspaţiu liniar?

a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 + x_n = 0\} \subset (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

b) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid det(A) = 0\} \subset (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

S5.14 Să se studieze, după valorile parametrului real m, dependenţa liniară a următoarelor sisteme de vectori. În caz de dependenţă liniară, să se găsească relaţia de dependenţă respectivă.

i) $\{(3, 1, 4), (-1, 1, 2), (1, 3, m)\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

ii) $\{(6, 1, 8, 3), (2, 3, 0, 2), (4, -1, -8, -2), (1, 1, 1, m)\} \subset (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

iii) $\{f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = e^x, f_3(x) = \text{sh}x\} \subset (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

S5.15 În spaţiul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$, se consideră:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

şi

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

b) Să se scrie matricea S a schimbării de la B_1 la B_2;

c) Să se afle coordonatele matricii $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ în cele două baze B_1 şi B_2.

S5.16 Să se arate că aplicaţia $< \cdot\,, \cdot >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $< x, y >= x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

S5.17 Fie $U = \{(0, 1, 1, 0), (0, 2, -2, 1), (2, 1, -1, -4), (9, -1, 1, 4)\}$ o submulţime a spaţiului liniar $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se arate că U este un sistem ortogonal de vectori în raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^4$ şi să se calculeze unghiul dintre ultimii doi vectori din U.

S5.18 Folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^4$, plecând de la

$$B = \{(0, 1, 1, 0), (0, 4, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}.$$

S5.19 Fie $\mathbb{R}^4$ dotat cu produsul scalar canonic şi $U = \{(-3, 0, 1, 2), (1, -1, 0, 1)\}$. Să se calculeze $Sp(U)$ şi $U^{\perp}$, precum şi proiecţiile ortogonale ale vectorului $(2, 1, 2, 1)$ pe U şi $U^{\perp}$.

S5.20 Fie $||\cdot||$ o normă pe $\mathbb{R}^n$. Să se arate că:

a) $\|-x\| = \|x\|, \forall\ x \in \mathbb{R}^n$;

b) $\left\|\sum\limits_{k=1}^{m} u_k\right\| \leq \sum\limits_{k=1}^{m} \|u_k\|, \forall\ u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$;

c) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bibliografie selectivă

1. V. T. Borcea, C. I. Davideanu, C. Forăscu - *Probleme de algebră liniară*, Ed. "Gheorghe Asachi", Iaşi, 2000.

2. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

3. E. Cioară - *Algebră liniară.Geometrie analitică (culegere de probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2009.