Teoria probabilităţilor discrete

Olariu E. Florentin

Februarie, 2014

Table of contents

Introducere

- În acest capitol vom studia felul în care un eveniment aleator care deja s-a realizat influențează sau nu șansele de realizare ale unor alte evenimente.
- Acestea sunt sunt printre cele mai importante concepte ale teoriei probabilităților.
- Noțiunile de condiționare și independență permit calcularea probabilităților unor evenimente aleatoare prin intermediul altor evenimente.

Introducere

Exemplu:

- Să presupunem că se aruncă două zaruri şi că putem observa valoarea primului dintre zaruri: 5. Având la îndemână această informaţie, care este probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie cel mult 7?
- Raţionamentul este următorul: ştiind ca primul dintre zaruri este 5, rezultatele posibile a experimentului sunt $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,5)$ şi $(5,6)$.
- În continuare, cunoscând că valoarea primului zar este 5, fiecare dintre aceste evenimente elementare are aceeaşi probabilitate: $1/6$; probabilitatea căutată este $2/6$. $\clubsuit$

Probabilitate condiţionată

Definiţia 1

Fie A şi B două evenimente aleatoare, probabilitatea condiţionată de a se realiza A ştiind că s-a realizat B este

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemplu. Două cifre sunt alese la întâmplare dintre cele nouă cifre de la 1 la 9. Dacă suma este pară, care este probabilitatea ca unul dintre cele două numere să fie par? Dar probabilitatea ca unul dintre numere să fie cel mult 5?

Probabilitate condiţionată

Soluţie (continuare): Numerele pare sunt $\{2, 4, 6, 8\}$; dacă suma este pară şi unul dintre numere este par, atunci amândouă sunt pare. Există $\binom{4}{2} = 6$ moduri de a alege două numere pare diferite şi $\binom{5}{2} = 10$ moduri de a alege două numere impare diferite (numerele impare sunt $\{1, 3, 5, 7, 9\}$). Probabilitatea este

$$\frac{6}{6+10} = 0.375. \clubsuit$$

Exemplu. Într-o urnă sunt patru bile albe (două numerotate cu 1, două cu 2), cinci galbene (trei numerotate cu 1, două cu 2) şi şase negre (două numerotate cu 1, patru cu 2). O bilă este extrasă la întâmplare din urnă.

Probabilitate condiţionată

(a) Dacă bila extrasă nu este neagră, care este probabilitatea ca ea să fie albă?

(b) Dacă bila extrasă are numărul 2, care este probabilitatea ca ea să nu fie albă?

Soluţie:

(a) Dacă bila extrasă nu este neagră, rămân nouă bile posibile, iar dintre acestea patru sunt albe. Probabilitatea este $4/9$.

(b) Dacă bila extrasă are numărul 2, spaţiul posibilităţilor (putem presupune ca urna are acest conţinut) se restrânge la două bile albe, două bile galbene şi patru bile negre. Probabilitatea de a extrage o bilă galbenă sau neagră este $6/8 = 0.5$. ♣

Evenimente independente

- În multe cazuri probabilitatea $P(A|B)$ este diferită de $P(A)$ care este probabilitatea necondiţionată a evenimentului A. Asta înseamnă că realizarea evenimentului B influenţează într-adevăr şansele de producere a evenimentului A.
- Atunci când $P(A) = P(A|B)$ putem spune că evenimentul A este independent de B (vom vedea că relaţia aceasta este simetrică). Altfel spus, A este independent de B dacă realizarea evenimentului B nu schimbă probabilitatea realizării evenimentului A.

Definiţia 2

Două evenimente A şi B se numesc **independente** *dacă*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1}$$

Evenimente independente

- Dacă B este un eveniment posibil (adică $P(B) > 0$) şi $P(A|B) = P(A)$, atunci A şi B sunt independente conform definiţiei (care include şi posibilitatea ca unul dintre cele două evenimente să fie imposibile).
- În fapt, evenimentul imposibil, $\varnothing$, este independent de orice alt eveniment.
- Independenţa se poate verifica folosind ecuaţia (1), dar există şi situaţii în care aceasta rezultă direct din enunţul problemei pe baza independenţei "fizice" a celor două evenimente aleatoare.
- Aşa cum arată următorul exerciţiu.

Evenimente independente - exemple

Exemplu. Se aruncă două zaruri; fie $A =$" primul zar are un număr par" şi $B =$"al doilea zar este cel puţin trei". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

Soluţie: Intuitiv, cele două evenimente sunt independente deoarece rezultatul obţinut pe un zar nu are vreo legătură cu cel de-al doilea (aruncarea primului zar poate fi făcută înaintea celui de-al doilea!). Chiar fără a calcula probabilităţile implicate în ecuaţia (1) putem spune că A şi B sunt independente. $\clubsuit$

- În anumite situaţii însă această independenţă fizică nu există şi intuiţia nu funcţionează - nu putem afirma independenţa înainte de a a calcula probabilităţile implicate.
- Următoarele exemple subliniază acest lucru.

Evenimente independente - exemple

Exemplu. Considerăm un pachet de (52 de) cărţi de joc din care se extrage la întâmplare o carte. Fie $A =$"cartea extrasă este un zece" şi $B =$" carte extrasă este caro". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

Soluţie: $P(A) = \dfrac{4}{52}$, $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$, iar $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$ şi $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{52}{52 \cdot 52} = \dfrac{1}{52}$. $\clubsuit$

Exemplu. într-o urnă sunt puse următoarele cărţi: un valet de treflă, o damă de caro, un trei de pică şi un opt de inimă. O carte este extrasă la întâmplare din această urnă; fie $A =$"carte extrasă are culoare roşie" şi $B =$"cartea extrasă este o figură". Să se analizeze independenţa evenimentelor A şi B.

Soluţie: În acest caz independenţa nu se poate afirma direct; $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2}$ şi $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$, de aici rezultă independenţa. $\clubsuit$

Evenimente independente - exemple

Exemplu. Un om care se recomandă N. H. vrea să facă un pariu şi descrie astfel condiţiile acestui pariu: alege câteva cărţi dintr-un pachet şi formează următoarele trei pachete mai mici:

1. - pachetul P_1 conţine: 4 de opt şi 2 de doi;
2. - pachetul P_2: 1 nouă, 3 de şapte, 3 de şase şi 3 de cinci;
3. - pachetul P_3: 2 de zece şi 3 de trei;

N. H. oferă partenerului său de pariu posibilitatea de a alege primul unul dintre pachete şi apoi alege el însuşi celălalt pachet. Fiecare alege o carte din propriul pachet, iar cel care are cartea mai mare câştigă. N. H. este gata să pună ca pariu 10$ (aşteaptând ca oponentul său să pună aceeaşi sumă) deşi el face a doua alegere a unuia dintre pachetele rămase. Este acest pariu în avantajul celui care face prima alegere?

Evenimente independente - exemple

Soluţie: Să presupunem mai întâi că primul pachet ales este P_1 - în cazul acesta N. H. alege P_3; oponentul lui N. H. câştigă numai dacă extrage un opt, iar N. H. un trei. Probabilităţile celor două evenimente sunt $4/6$ şi $3/5$; cu probabilitate $2/3 \cdot 3/5 = 2/5$ oponentul câştigă. Astfel, în acest caz N. H. este avantajat.
Să presupunem acum că primul pachet ales este P_2 - în cazul acesta N. H. alege P_1; N. H. pierde dacă extrage un doi sau dacă extrage un opt iar oponentul său un nouă.
Similar, se poate arăta că, dacă oponentul său alege pachetul P_3, atunci N.H. poate alege unul dintre pachetele rămase şi are o probabilitate mai mare ca $1/2$ de a câştiga (exerciţiu). ♣

Evenimente independente

Proprietatea 1

Dacă evenimentele A şi B sunt independente, atunci la fel sunt şi perechile de evenimente $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ şi $\overline{A}, \overline{B})$.

dem.: *Ştim că $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; luăm în considerare doar prima pereche (pentru celelalte se procedează similar): $P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) - P(A \cap B) = P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B})$* ■

Definiţia 3

Evenimentele aleatoare $(A_i)_{i \in I}$ se numesc **independente în ansamblu** *dacă*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}),$$

pentru orice mulţime de indici distincţi $i_1, i_2, \ldots, i_k$ din I.

Formula probabilităţii totale

Propoziţia 1

Fie $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *evenimente aleatoare care realizează o partiţie a evenimentului sigur* $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ *şi* $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j)$. *Dacă* B *este un eveniment oarecare, atunci*

$$P(B) = \sum_{i=0}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

dem.: $P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right]$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Formula probabilităţii totale

Exemplu. Urna U_1 conţine trei bile albe şi cinci bile negre, iar urna U_2 patru bile albe şi şase bile negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Care este probabilitatea ca bila să fie albă?

Soluţie: Notăm $A_i =$"extragerea se face din urna U_i" ($i = \overline{1,2}$) şi $B =$"bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ şi putem presupune că $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Atunci

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2), \text{ dar}$$

$$P(B|A_1) = \frac{3}{8},\ P(B|A_2) = \frac{4}{10}, \text{ deci}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{31}{80}. \clubsuit$$

Formula lui Bayes

Propoziţia 2

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente aleatoare care realizează o partiţie a evenimentului sigur şi B un eveniment oarecare, atunci

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

($P(B|A_k)$ se numesc **probabilităţi a priori**, *iar $P(A_k|B)$ sunt numite* **probabilităţi a posteriori**. *)*

dem.: $P(A_k|B) = \dfrac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$.

Formula lui Bayes

Exemplu. se doau două urne identice una conţinând trei bile albe şi patru bile negre, iar cealaltă patru bile albe şi cinci negre. Se extrage o bilă. Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

Soluţie: Notăm $A_i =$"extragerea se face din urna U_i" $(i = \overline{1,2})$ şi $B =$"bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ şi $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Probabilităţile a priori sunt

$$P(B|A_1) = \frac{3}{7},\ P(B|A_2) = \frac{4}{9}.$$

Probabilitatea a posteriori cerută este

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2)} = \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{27}{55}.\clubsuit$$

Formula de înmulţire

Propoziţia 3

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente aleatoare oarecari, atunci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

dem.: Membrul drept al relaţiei de mai sus este egal cu

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

(după simplificările evidente). ■

Formula de înmulţire

Exemplu. într-o urnă sunt cinci bile albe şi cinci bile negre. Se scot trei bile, una câte una fără întoarcere.

(a) Care este probabilitatea obţinerii a trei bile albe?

(b) Dar a două bile albe şi una neagră?

Soluţie:

(a) Pentru prima întrebare fie $A_i =$" a i-a bilă extrasă este albă" $(i = \overline{1,3})$, atunci

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2|A_1) = \frac{4}{9}, P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8}$$

şi

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{24}.$$

Formula de înmulţire

(b) Pentru a două cerinţă probabilitatea cerută este

$$P\left(\left(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3\right)\cup\left(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\right)\cup\left(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\right)\right)=$$

$$P\left(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3\right)+P\left(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\right)+P\left(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\right)$$

şi fiecare dintre aceste trei probabiltăţi se calculează cu formula de înmulţire. ♣

Exerciţii pentru seminar

- **Probabilitate condiţionată şi evenimente independente:** I.1., I.2., I.3., I.4., I.6., I.8., I.11 (a, b), I.12.
- **Formula probabilităţii totale şi cea a lui Bayes:** II.1., II.2., II.3., II.6., II.7.
- **Rezervă:** I.9., I.10., I.14., II.8., II.9., II.10.

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.1. Se aruncă un zar şi se consideră evenimentele A: apariţia uneia din feţele 1,2 sau 3 şi B: apariţia uneia din feţele 2,3,4 sau 6. Evenimentele A şi B sunt independente?

I.2. Se aruncă două zaruri şi se notează cu a_1 valoarea primului zar şi cu a_2 valoarea celui de-al doilea. Să se arate că evenimentele "$a_1 \geqslant 4$" şi "$a_2 \leqslant 3$" sunt independente.

I.3. Un absolvent de liceu trimite cereri de admitere la Oxford şi la Cambridge. El ştie că Oxford îl va accepta cu probabilitate 0.4, iar Cambridge cu probabilitate 0.3. Ştie de asemenea că va fi acceptat de ambele universităţi cu probabilitate 0.2.

(a) Care este probabilitatea să fie aceptat de Cambridge dacă se ştie că a fost acceptat de Oxford?

(b) Evenimentele "este acceptat de Oxford" şi "este acceptat de Cambridge" sunt compatibile? Dar independente?

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.4. Se aruncă trei monede identice.

(a) Evenimentele "stema pe prima monedă" şi "valoarea pe ultimele două" sunt independente?

(b) Dar evenimentele "valoarea pe exact două monede" şi "valoarea pe toate monedele"?

I.5. Trei sportivi trag asupra unei ţinte; primul nimereşte ţinta cu probabilitatea $\frac{2}{3}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{3}{4}$, iar al treilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$. Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă

(a) de exact trei ori,

(b) de exact două ori,

(c) respectiv, măcar o dată?

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.6. Probabilitatea ca un student să promoveze examenul este $2/5$, ca studentul aflat la dreapta lui să promoveze este $3/5$, iar ca studentul aflat la stânga să promoveze este $1/5$. Presupunem că studenţii nu se influenţează reciproc în timpul examenului. Care este probabilitatea ca exact doi studenţi să promoveze? Dar ca studentul din mijloc să promoveze ştiind că cel din stânga a promovat?

I.7. Patru persoane urcă împreună într-un lift al unei cladiri cu patru etaje. Locurile unde persoanele coboară din lift nu depind unele de celelalte; de asemenea fiecare coboară la unul dintre etaje cu probabilitate egală. Care este probabilitatea ca

(a) toate cele patru persoane să coboare la acelaţi etaj?

(b) cele patru persoane să coboare toate la etaje diferite?

(c) două persoane să coboare la acelaşi etaj şi celelalte două la un alt etaj (diferit de cel anterior)?

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.8. O urnă conţine 3 bile albe (două numerotate cu 1 şi una numerotată cu 2) şi 5 bile negre (două numerotate cu 1 şi trei numerotate cu 2). Se extrage din urnă o bilă.

(a) Dacă bila este albă care este probabilitatea ca ea să fie numerotată cu 1?

(b) Dacă bila este numerotată cu 2 care este probabilitatea ca ea să fie albă?

I.9. O urnă conţine 16 bile numerotate de 1 la 16 colorate astfel: $\underbrace{1,2,4,5,16}_{albe},\underbrace{3,6,7,\ldots 13}_{negre},\underbrace{14,15}_{verzi}$. Se extrage o bilă din urnă. Se consideră evenimentele $A =$"bila extrasă este neagră" şi $B =$"bila extrasă are un număr mai mare sau egal cu 10".
Să se calculeze probabilităţile evenimentelor $A|B, A|\overline{B}, \overline{A}|B, \overline{A}|\overline{B}$.

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.10. Arătaţi că evenimentele A şi B sunt independente dacă

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(A \cap B)} + \frac{P(B)}{P(A \cap B)}.$$

I.11. Fie A şi B evenimente aleatoare posibile (i.e., cu probabilitate nenulă). Arătaţi că

(a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(B)P(A|B)$;

(b) $\dfrac{P(A|A \cup B)}{P(B|A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$;

(c) $\dfrac{P(\overline{B}|A)}{P(B)} + \dfrac{P(\overline{A})}{P(A)} = \dfrac{P(\overline{A}|B)}{P(A)} + \dfrac{P(\overline{B})}{P(B)}$.

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.12. Se dau trei evenimente aleatoare A_i, $i = \overline{1,3}$, astfel încât

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),\ P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P($$

$$P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A3) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3),\ P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P($$

Arătaţi că cele trei evenimente sunt independente în ansamblu.

I.13. Dacă evenimentele aleatoare A, B şi C sunt independente în ansamblu, atunci la fel sunt şi evenimentele A, B şi $\overline{C}$.

I.14. Fie A_1, A_2 şi A_3 ($P(A_3) > 0$) trei evenimente aleatoare independente în ansamblu. Demonstraţi că

(a) $P(A_1 \cap A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) P(A_2 | A_3)$ şi

(b) $P(A_1 \cup A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) + P(A_2 | A_3) - P(A_1 \cap A_2 | A_3)$.

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.15*. Se aruncă pe rând două monede falsificate. Se ştie că probabilitatea de a obţine stema la amândouă aruncările este $1/8$, iar probabilitatea de de a obţine stema la amândouă aruncările ştiind că la cel puţin una dintre cele două aruncări s-a obţinut stema este $3/14$. Să se determine probabilitatea de a obţine stema pentru prima monedă respectiv pentru cea de-a doua.

I.16*. Daţi exemplu de trei evenimente aleatoare A, B şi C astfel încât

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \text{ şi } P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \neq P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}).$$

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.1. Se dau patru urne identice la exterior, conţinând: U_1 - 4 bile albe şi 5 bile negre; U_2 - 3 bile albe şi 7 bile negre; U_3 - 2 bile albe şi 4 bile negre; U_4 - 3 bile albe şi 5 bile negre. Dintr-una dintre cele patru urne, la întâmplare, se extrage o bilă.

(a) Să se calculeze probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.

(b) Dacă bila extrasă este neagră să se calculeze probabilitatea ca ea să provină din urna U_2.

II.2. Probabilitatea ca o uşă să fie încuiată este $1/2$. Cheia de la această uşă se găseşte pe un panou unde sunt 12 chei. Alegem două chei de pe panou,

(a) Care este probabilitatea ca uşa să poată fi deschisă (fără a ne întoarce după o altă cheie)?

(b) Dacă am deschis uşa, care este probabilitatea ca ea să fi fost încuiată?

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.3. Într-o urnă sunt trei monede: una are stema pe ambele feţe, una are banul pe ambele feţe, iar ultima este obişnuită. Se extrage din urnă o monedă, care apoi se aruncă şi se reţine faţa obţinută.

(a) Care este probabilitatea de a obţine banul?

(b) Dacă s-a obţinut stema, care este probabilitatea ca moneda extrasă să fi fost cea normală.

II.4*. k urne conţin fiecare câte p bile roşii şi q bile albastre. O bilă este extrasă la întâmplare din prima urnă şi introdusă în cea de-a doua, apoi o bile este extrasă la întâmplare din urna a doua şi introdusă în cea de-a treia etc. La final o bilă se extrage din ultima urnă. Care este probabilitatea ca ultima bilă extrasă să fie albastră?