Criterii de stabilire a naturii unei serii de numere reale

I. Criteriul general de convergenţă (Cauchy) pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ cu termeni oarecari ($a_n \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$)

Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă* $\forall \epsilon > 0, \exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât* $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, *cu* $n \geq n_\epsilon$ *şi* $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$, *avem:*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

II. Criteriul necesar de convergenţă pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ cu termeni oarecari ($a_n \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$)

Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (*Practic, dacă* $a_n \not\to 0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ *este divergentă*).

III. Criteriul de comparaţie de specia I-a, cu inegalităţi, pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ cu termeni nenegativi ($a_n, b_n \in \mathbb{R}_+, \forall\ n \in \mathbb{N}$)

Dacă $0 \leq a_n \leq b_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$, *atunci:*

1) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *convergentă* $\Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *convergentă;*

2) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *divergentă* $\Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *divergentă.*

IV. Criteriul de comparaţie de specia a-II-a, cu inegalităţi, pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ cu termeni pozitivi ($a_n, b_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ n \in \mathbb{N}$)

Dacă $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}, \forall\ n \in \mathbb{N}$, *atunci:*

1) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *convergentă* $\Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *convergentă;*

2) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *divergentă* $\Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *divergentă.*

Consecinţă: *Dacă* $a_n > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}$ *şi există* $0 < q < 1$ (*respectiv* $q \geq 1$) *astfel încât* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ (*respectiv* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$), *atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă* (*respectiv divergentă*).

V. Criteriul de comparaţie, cu limită, pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ cu termeni pozitivi ($a_n, b_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ n \in \mathbb{N}$)

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$, *atunci:*

1) *când* $0 < l < \infty$, *seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *au aceeaşi natură;*

2) *când* $l = 0$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *convergentă* $\Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *convergentă;*

3) *când* $l=\infty$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *divergentă* $\Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *divergentă.*

VI. Criteriul general de condensare (Cauchy) pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **cu termeni nenegativi** ($a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ n\in\mathbb{N}$)

Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ *este descrescător şi există* $(k_n)_{n\geq 0}\subset\mathbb{N}$, *şir crescător şi divergent, astfel încât şirul* $\left(\dfrac{k_{n+1}-k_n}{k_n-k_{n-1}}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit, atunci seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (k_{n+1}-k_n)a_{k_n}$ *au aceeaşi natură.*

VII. Criteriul particular de condensare (Cauchy) pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **cu termeni nenegativi** ($a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ n\in\mathbb{N}$)

Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ *este descrescător, atunci seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ *au aceeaşi natură.*

VIII. Criteriul raportului (d'Alembert) pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **cu termeni pozitivi** ($a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ n\in\mathbb{N}$)

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$, *atunci:*

1) *când* $\lambda<1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

2) *când* $\lambda>1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă;*

3) *când* $\lambda=1$, *seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *nu i se poate stabili natura pe o astfel de cale.*

IX. Criteriul rădăcinii (Cauchy) pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **cu termeni nenegativi** ($a_n \in \mathbb{R}_+, \forall\ n\in\mathbb{N}$)

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$, atunci:

1) *când* $\lambda<1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

2) *când* $\lambda>1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă;*

3) *când* $\lambda=1$, *seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *nu i se poate stabili natura pe o astfel de cale.*

X. Criteriul Raabe-Duhamel pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **cu termeni pozitivi** ($a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ n\in\mathbb{N}$)

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\mu$, *atunci:*

1) *când* $\mu>1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

2) *când* $\mu<1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă;*

3) *când* $\mu=1$, *seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *nu i se poate stabili natura pe o astfel de cale.*

XI. Criteriul lui Gauss pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **cu termeni pozitivi** ($a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ n\in\mathbb{N}$)

Dacă $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{x_n}{n^{\alpha+1}}, \forall\ n\in\mathbb{N}$, *unde* $\alpha>0, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *şi* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este un şir mărginit, atunci:*

1) *când* $\lambda > 1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

2) *când* $\lambda < 1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă;*

3) *când* $\lambda = 1$ *şi* $\mu > 1$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

4) *când* $\lambda = 1$ *şi* $\mu \leq 1$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă.*

XII. Criteriul logaritmului pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **cu termeni pozitivi** ($a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{N}$)

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lambda$, *atunci:*

1) *când* $\lambda < 1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă;*

2) *când* $\lambda > 1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

3) *când* $\lambda = 1$, *seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *nu i se poate stabili natura pe o astfel de cale.*

XIII. Criteriul lui Kummer pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ **cu termeni pozitivi** ($a_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{N}$)

Dacă există un şir $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ *astfel încât:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\alpha_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} \right) > 0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\alpha_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} \right) < 0$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\alpha_n}$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este divergentă;*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\alpha_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} \right) = 0$, *seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *nu i se poate stabili natura pe o astfel de cale.*

Cazuri particulare:

a) $\alpha_n = 1, \forall\, n \in \mathbb{N} \implies$ criteriul raportului (d'Alembert);

b) $\alpha_n = n, \forall\, n \in \mathbb{N} \implies$ criteriul Raabe-Duhamel;

c) $\alpha_n = n \ln n, \forall\, n \in \mathbb{N} \implies$ criteriul lui Bertrand;

d) $\alpha_n = n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n) \cdot \ln(\ln(\ln n)) \ldots \underbrace{\ln(\ln(\ln \ldots (\ln\ n) \ldots))}_{p \text{ ori } (p \in \mathbb{N}^*)}, \forall\, n \in \mathbb{N} \implies$ criteriul logaritmului generalizat.

XIV. Criteriul lui Dirichlet pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ **cu** $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Dacă $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir mărginit şi* $b_n \searrow 0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ *este convergentă.*

XV. Criteriul lui Abel pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ **cu** $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *este convergentă, iar* $(b_n)_{n\geq 0}$ *este un şir monoton şi mărginit, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ *este convergentă.*

XVI. Criteriul lui Leibniz pentru serii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n b_n$ **cu** $b_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Dacă $b_n \searrow 0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n b_n$ *este convergentă.*