# Calcul Numeric

## Cursul 1

## 2017

*Anca Ignat*

**ancai@info.uaic.ro , ancai_fii@yahoo.ro,**

**Andreea Arusoaie - andreea.arusoaie@info.uaic.ro**

**Doru Călcâi – calculnumeric2017@gmail.com**

**Laura Năstasă - laura.nastasa@info.uaic.ro**

**http://profs.info.uaic.ro/~ancai/CN/**

**Consultaţii:**

- **prin e-mail la adresa de mai sus sau**
- **la cabinet (C-307) - marți 17-20 sau 16-19**

# Regulament - 2017

## Laborator

- 8 teme
- cei care prezintă temele până la termenul limită precizat la fiecare temă, punctajul maxim ce poate fi obţinut este punctajul afişat pentru fiecare temă
- cei care prezintă temele după termenul limită precizat punctarea se va face din 50% din punctajul temei prezentate

**Examen**

- teză scrisă de 1 oră, cu 3 sau 4 exerciţii din materia predată, *″cu cursurile pe masa″* - exclusă documentaţia pe suport electronic
- teza scrisă este notată între 1 şi 10
- prezenţa la examen este obligatorie chiar dacă s-a obţinut punctaj de promovare doar din punctajul de la laborator

## Calculul punctajului / notei final(e)

**Punctaj final = punctaj laborator + 42*nota examen**

**Promovează** disciplina acei studenţi care au:

- **nota la examen ≥ 3**

**şi**

- **punctaj final ≥ 400 pt**

**Nota finală** se calculează din punctajul final aplicând **”curba lui Gauss”**.

# Desfăşurarea semestrului

**Săptămânânile 1-7 şi 9-15** – şcoală conform orarului

**Săptămâna 15** sau **16** - examen

# Bibliografie


1. Elemente de informatică şi calcul numeric, vol. 1 - C.Ignat, C.Ilioi, T.Jucan - Ed. Univ. 'Al. I. Cuza' Iaşi, 1987
2. Matrix Computations - G.H. Golub, C.F. van Loan - John Hopkins Univ. Press, 2012
3. Numerical Analysis – R.L. Burden, J.D. Faires – Brooks/Cole, Thomson Learning (10-th edition, 2015)
4. Calcul numeric în C - T. A. Beu - Ed. Albastră, Cluj, 2004
5. Numerical analysis with algorithms and programming, Santanu Saha Ray, CRC Press, 2016.
6. Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing**,** W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Cambridge University Press, NY, USA, 2007 (http://numerical.recipes/)
7. Numerical Optimization – J. Nocedal, S.J. Wright, Springer-Verlag, New York, 1999

# Capitolele cursului

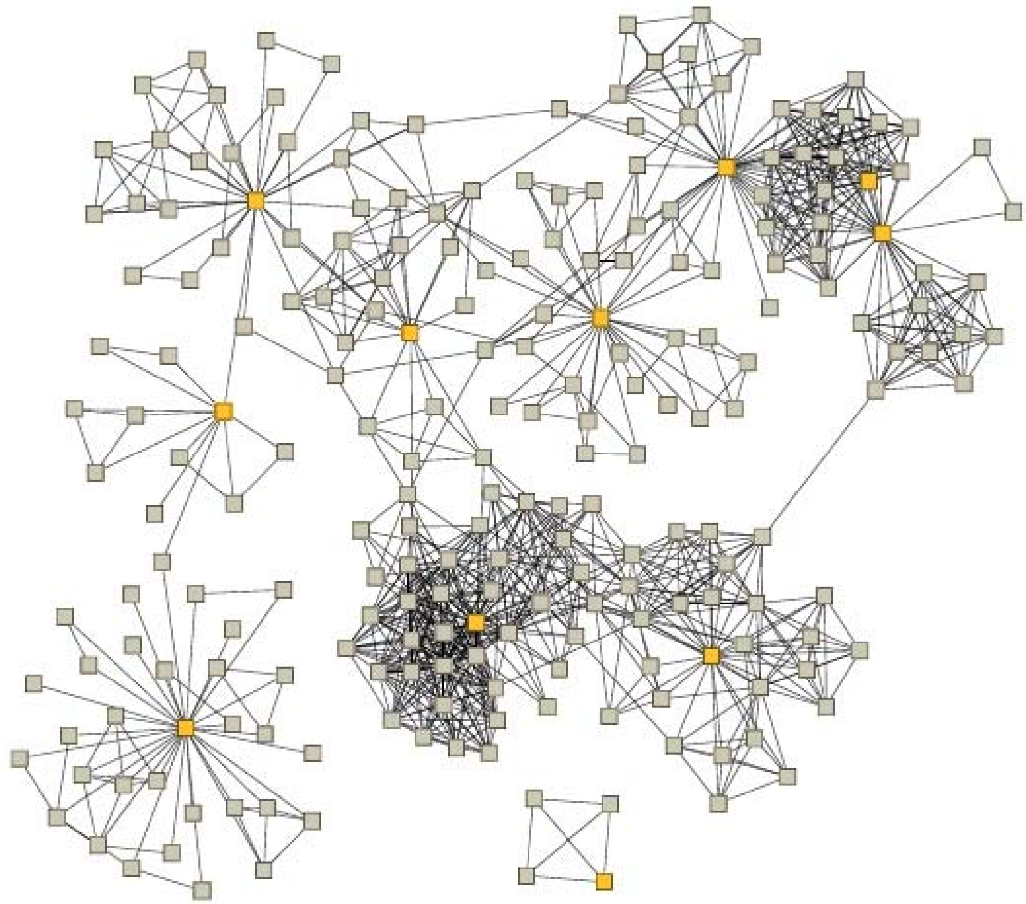
1. Rezolvarea sistemelor liniare ($\boldsymbol{Ax=b}$)

2. Optimizare numerică ($\mathbf{min}\ \{\ \boldsymbol{F(x)\ ;\ x} \in \boldsymbol{R^n}\ \}$ )

3. Valori şi vectori proprii ($\boldsymbol{Au = \lambda u}$)

4. Ecuaţii neliniare ($\boldsymbol{f(x)=0}$)

5. Interpolare numerică



# Exemple

## Centralitate în reţelele sociale

- noţiune introdusă de A. Bavelas în 1948 studiind comunicarea între oameni

***(V, E)*** – graful care modelează reţeaua, ***A*** – matricea de adiacenţă asociată, $\boldsymbol{A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N}}$, ***N***=|***?***|

- care sunt cele mai ‘importante’ noduri din reţea?

1. Centralitate de grad (*'degree centrality'*) – se bazează pe noţiunea de grad/grade asociate nodurilor în grafuri

   Se numeşte **drum geodesic** între două vârfuri orice drum de lungime minimă (număr minim de muchii) dintre cele 2 vârfuri.

2. Centralitate de apropiere ('*closeness centrality*')

   Centralitatea de apropiere a unui nod este suma lungimilor drumurilor geodesice de la nodul respectiv la toate celelalte noduri.

3. Centralitate de interrelaţie (‘*betweennes centrality*’)

$$\boldsymbol{b(v)} = \sum_{\substack{s \neq v \neq t, \\ s,t \in V}} \frac{\boldsymbol{n_{st}(v)}}{\boldsymbol{n_{st}}}$$

unde $\boldsymbol{n_{st}}$ este numărul total de drumuri geodesice între nodurile ***s*** şi ***t***, iar $\boldsymbol{n_{st}(v)}$ este numărul de drumuri geodesice care trec prin nodul ***v***.

- măsoară controlul pe care îl deţine nodul ***v*** în circulaţia informaţiilor în reţea

4. Centralitate de vector propriu (‘*eigenvector centrality*’)

- se ţine cont de faptul că nu toate muchiile (conexiunile) sunt la fel de importante (ca în cazul centralităţii de grad)

- conexiunile către persoane influente vor ‘împrumuta’ importanţă mai mare decât conexiunie către persoanele mai puţin influente

***x(i)*** = centralitatea de vector propriu a nodului $\boldsymbol{v_i}$

$$x(i) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in \Gamma(v_i)} x(j) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x(j) \text{ , } \lambda > 0 \text{ o constanta}$$

$$x = (x(1), x(2), \ldots, x(N))^T$$

$$x = \frac{1}{\lambda} Ax \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

***$\lambda_A$>0*** - valoarea proprie Perron (cea mai mare valoare proprie) , ***x*** – vectorul propriu asociat

**Compresia imaginilor digitale şi descompunerea după valori singulare**

o imagine digitală ↔ matrice de pixeli $\boldsymbol{A}$ cu $\boldsymbol{m}$ linii şi $\boldsymbol{n}$ coloane

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \ , \ \boldsymbol{a}_{ij} \in \mathbb{R} \text{ sau } \mathbb{R}^3$$

$$(\boldsymbol{a}_{ij} \in \{0,1,\dots,255\} \text{ sau } \boldsymbol{a}_{ij} \in \{0,1,\dots,255\}^3 \text{ sau } \boldsymbol{a}_{ij} \in [0,1]^{(3)} )$$

Memorarea lui $A$: ***m·n*·mem*(int/double)(·3)*** bytes

Descompunerea dupa valori singulare (**SVD**) a unei matrici

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{V}^T \ , \ \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\boldsymbol{U} = \left[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m\right], \ \boldsymbol{V} = \left[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\right] - \text{ matrici ortogonale}$$

$$\left(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \boldsymbol{\delta}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1} \text{ daca } \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \\ \mathbf{0} \text{ daca } \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j} \end{cases}, \quad \left(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\right)_{\mathbb{R}^n} = \boldsymbol{\delta}_{ij} \quad \forall \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \sigma_r & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0 \;, r \leq \min\{m,n\}$ - valorile singulare ale matr. $\boldsymbol{A}$

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

$$A \approx A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

memorarea lui $A_k$ necesită ***k(m+n+1)*·mem(double)**

***m=1920, n=1080*** $, r_c = \dfrac{mn}{k(m+n+1)},$

***k=50 $r_c$= 13.8194; k=100 $r_c$=6.9097; k=150 $r_c$=4.6065***

***k=200 $r_c$=3.4548; k=250 $r_c$=2.7639; k=300 $r_c$= 2.3032***

## Vectori şi matrici

Fie $\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$. Se definesc vectorii $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ şi operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari astfel:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Fie vectorul $z \in \mathbb{C}^n$:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ cu } \quad z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}.$$

Pentru $z \in \mathbb{C}$ utilizăm notaţiile:

$$z = a + ib\text{ , } Re\, z = a, \quad Im\, z = b \text{ ,}$$

$\overline{z} = a - ib$ – conjugatul numărului $z$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - modulul numărului complex $z$

Notăm cu $\mathbb{R}^{m\times n}$ / $\mathbb{C}^{m\times n}$ spaţiul matricilor cu elemente reale / complexe cu $\boldsymbol{m}$ linii şi $\boldsymbol{n}$ coloane

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a_{ij}} \in \mathbb{R} \ / \ \mathbb{C}, \ \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, m} \ , \ \ \boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, n}$$

**Definiţie**

$X$ se numeşte *spaţiu vectorial (spaţiu liniar)*

$$+ : X \times X \to X \text{ şi } \cdot : K \times X \to X, \qquad (K = \mathbb{R})$$

astfel încât *( X , + )* este un grup comutativ :

$a + b = b + a$ , $\forall a,b \in X$ – comutativitate,

$(a + b) + c = a + (b + c)$ , $\forall a,b,c \in X$ – asociativitate ,

$\exists\, 0 \in X$ **a. î.** $a + 0 = 0 + a = a$ , $\forall a \in X$ - element neutru ,

$\forall a \in X$, $\exists -a \in X$ a.î. $a + (-a) = (-a) + a = 0$ – element opus.

iar pentru operaţia de înmulţire cu scalari au loc relaţiile:

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b, \forall \lambda \in K, \ \forall a,b \in X,$$

$$(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a, \ \forall \lambda,\mu \in K, \ \forall a \in X,$$

$$\lambda(\mu a) = (\lambda \mu)a, \ \forall \lambda,\mu \in K, \ \forall a \in X,$$

$\exists 1 \in K$ astfel încât $1 \cdot a = a, \ \forall a \in X$.

**Definiţie**

Fie $\boldsymbol{X}$ un spaţiu liniar. Spunem că vectorii $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_p} \in \boldsymbol{X}$ sunt *liniar independenţi* dacă:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .. + \alpha_p x_p = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\alpha_p = \mathbf{0}\,, \alpha_i \in K$$

*Spaţiu*l vectorial $\boldsymbol{X}$ este *finit dimensional* dacă există $\boldsymbol{p}$ vectori liniar independenţi în $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_p} \in \boldsymbol{X}$, şi orice mulţime de $\boldsymbol{q}$ elemente din $\boldsymbol{X}$ cu $\boldsymbol{q > p}$ este liniar dependentă. În acest caz dimensiunea spaţiului $\boldsymbol{X}$ este $\boldsymbol{p}$ (dim $\boldsymbol{X = p}$).

Fie spaţiul vectorial $\boldsymbol{X}$ finit dimensional cu dim $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{p}$. Orice sistem de $\boldsymbol{p}$ vectori liniar independenţi din $\boldsymbol{X}$ se numeşte *bază* a spaţiului $\boldsymbol{X}$.

Fie $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_p} \in \boldsymbol{X}$ o bază pentru spaţiul $\boldsymbol{X}$ . Atunci pentru $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, $\exists$ unice constantele $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_p} \in K$ astfel încât

$$\boldsymbol{x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .. + \alpha_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, x_i} \,.$$

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ este un spaţiu vectorial finit dimensional, dim $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}$ cu baza canonică:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \ \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{- poziţia } \boldsymbol{k}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

# Calcul matricial

Fie matricea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n}$$

Se defineşte ***matricea transpusă***:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^T = \left(a_{ji}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Pentru matricea:

$$A \in \mathbb{C}^{m\times n}, A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}$$

se defineşte ***matricea adjunctă*** $A^H$:

$$A^H = \overline{A^T} = \left(\overline{a_{ji}}\right)_{\substack{j=1\ldots n\\ i=1\ldots m}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^H = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Pentru $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matricea adjunctă coincide cu transpusa, $A^H = A^T$.

Fie vectorul $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, acesta este considerat vector coloană,

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \mathbf{1}}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^T = \left( \boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n \right)$$

Dacă facem înmulţirea matricială $\boldsymbol{Ae_j}$ obţinem coloana $\boldsymbol{j}$ a matricii $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{Ae_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{\text{poziţia } j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Ae_j}$ este coloana $\boldsymbol{j}$ a matricii $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{j=1,\ldots,n}$ ;

$\boldsymbol{e_i^T A}$ este linia $\boldsymbol{i}$ a matricii $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i=1,\ldots,m}$.