SUBIECTELE TEMEI 2 LA "MATEMATICĂ"
(seria 2012 - 2013 / I1A & I1B & I1X)

1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + +6x_2x_3 - 12x_2 + 12x_3 + 4,\ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

i) Să se găsească formula prin care forma biliniară din care derivă partea principală, pătratică, de expresie omogenă, a funcţiei f se poate reda numai prin intermediul lui f.

ii) Să se arate că există şi să se determine $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3$astfel încât, pentru orice $x \in Ker(f)$, avem $2x_0 - x \in Ker(f)$.

iii) Să se afle valorile parametrului real m pentru care toate punctele dreptei de ecuaţie $x_1 - x_1^0 = x_2 - x_2^0 - m = x_3 - x_3^0$ aparţin mulţimii $Ker(f)$, deducând apoi, pe baza unui asemenea fapt, că, din punct de vedere geometric, $Ker(f)$ reprezintă o suprafaţă cilindrică cu denumirea de precizat, generată de dreapta în cauză, prin deplasarea ei paralel cu direcţia ce o defineşte şi cu sprijin pe o curbă a cărei ecuaţie se cere a fi identificată.

2. Se ştiu, peste $\mathbb{R}$, spaţiile normate $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$, în raport cu care şi funcţia afină $\varphi : X \longrightarrow Y$. Să se demonstreze că φ este uniform continuă dacă şi numai dacă satisface condiţia lui Lipschitz.

3. Se consideră o mulţime nevidă, conexă, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi o funcţie continuă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Să se dovedească faptul că, dacă u şi v, din A, sunt astfel încât $f(u) < 0$ şi $f(v) > 0$, atunci există $w \in A$ pentru care $f(w) = 0$.

Folosind un asemenea rezultat (de tip Darboux), să se arate că, pe suprafaţa oricărui bulgăre sferic de zăpadă, există întotdeauna, diametral opuse, două puncte în care temperatura este aceeaşi, în ipoteza că aceasta, ca funcţie de punct, variază continuu.

4. Fie $f \in C^1(\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*; \mathbb{R}^*)$ astfel încât $x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f^2(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*$.

a) Să se arate că, dacă $g(t, s) = \frac{1}{f(s, \frac{s}{ts+1})} - \frac{1}{s}$, atunci $\frac{\partial g}{\partial s}(t, s) = 0$, $\forall (t, s) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*$.

b) Ţinând seama de *a)* şi de faptul că, pe lângă relaţia din enunţ, f satisface egalitatea $f(-1, y) = \frac{y^3}{3y^2+3y+1}$, $\forall y \in \mathbb{R}_-^*$, să se arate că $df(-1, -1) = pr_1$.

5. Să se arate că, oricare ar fi $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \cap V$, unde V este o vecinătate a punctului $(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}, \frac{3}{e})$, valoarea produsului scalar canonic dintre $(x, \frac{y}{2}, \frac{z}{3})$ şi $(\ln x, \ln \frac{y}{2}, \ln \frac{z}{3})$ nu este mai mică decât -2.

F. Iacob, C. Forăscu / 15.12.2012

Precizări:

1) Rezolvările tuturor celor cinci probleme din cadrul acestei teme, redactate manual şi personal, se vor preda cadrului didactic titular de seminar, până joi, 17 ianuarie 2013, cel mai târziu.

2) Soluţionările flagrant de asemănătoare din cadrul a două sau mai multe exemplare de teme aflate sub semnături diferite nu vor fi punctate deloc, aplicându-li-se această sancţiune.