

Limbaje Formale, Automate și Compilatoare

Curs 2

2013-14

Curs 2

- 1 Proprietăți de închidere pentru \mathcal{L}_3
- 2 Lema Bar-Hillel
- 3 Automate finite deterministe
- 4 Automate finite nedeterministe
- 5 Automate finite cu ϵ -tranziții

Fie L, L_1, L_2 limbaje regulate: există gramaticile G, G_1, G_2 de tip 3 astfel ca $L = L(G), L_1 = L(G_1)$ și $L_2 = L(G_2)$.

Atunci, următoarele limbaje sunt de asemenea regulate:

1 $L_1 \cup L_2$

2 $L_1 \cdot L_2$

3 L^*

4 L^R

5 $L_1 \cap L_2$

6 $L_1 \setminus L_2$

Închiderea la intersecție

Gramatica $G = (N_1 \times N_2, T_1 \cap T_2, (S_1, S_2), P)$, unde P constă din:

- $(S_1, S_2) \rightarrow \epsilon$, dacă $S_1 \rightarrow \epsilon \in P_1$ și $S_2 \rightarrow \epsilon \in P_2$
- $(A_1, B_1) \rightarrow a(A_2, B_2)$, dacă $A_1 \rightarrow aA_2 \in P_1$ și $B_1 \rightarrow aB_2 \in P_2$
- $(A_1, A_2) \rightarrow a$, dacă $A_1 \rightarrow a \in P_1$ și $A_2 \rightarrow a \in P_2$

este de tip 3 și generează limbajul $L_1 \cap L_2$

Închiderea la operația de oglindire

Fie $G = (N, T, S, P)$ care generează L ($L = L(G)$)

Gramatica $G = (N, T, S', P')$ unde P' constă din

- reguli $S' \rightarrow aA$, pentru orice regulă $A \rightarrow a$ din P
- reguli $B \rightarrow aA$ pentru orice regulă $A \rightarrow aB$ din P
- regula $S \rightarrow \epsilon$
- regula $S' \rightarrow a$, pentru orice regulă $S \rightarrow a$ din P ($a \in T \cup \{\epsilon\}$)

este de tip 3 și generează L^R

Curs 2

- 1 Proprietăți de închidere pentru \mathcal{L}_3
- 2 Lema Bar-Hillel**
- 3 Automate finite deterministe
- 4 Automate finite nedeterministe
- 5 Automate finite cu ϵ -tranziții

Lema Bar-Hillel (lema de pompare)

Lema 2.1

Fie L un limbaj de tip 3. Există un număr m astfel încât oricare ar fi cuvântul $w \in L$ cu $|w| \geq m$, acesta are o descompunere de forma $w = xyz$, unde $0 < |y| \leq m$, și $xy^iz \in L$ oricare ar fi $i \geq 0$.

Fie $G = (N, T, S, P)$ astfel ca $L(G) = L$. Dacă $|N|$ este numărul simbolurilor din N , $m = |N| + 1$, se arată că are loc proprietatea enunțată:

Fie $w = a_1 a_2 \dots a_n$, $n \geq m \Rightarrow n \geq |N| + 1$

$$S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_k \underline{A_k} \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_s \underline{A_s} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_s a_{s+1} \dots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_s a_{s+1} \dots a_{n-1} a_n$$

$$A_k = A_s$$

Demonstrație

$$w = a_1 a_2 \dots a_n, n \geq m$$

$$S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_k A_k \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_s A_k \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots a_s a_{s+1} \dots a_{n-1} a_n$$

Atunci:

- $S \Rightarrow^* a_1 a_2 \dots a_k A_k$
- $A_k \Rightarrow^* a_{k+1} \dots a_s A_k$ și
- $A_k \Rightarrow^* a_{s+1} \dots a_{n-1} a_n$

Fie $x = a_1 a_2 \dots a_k$, $y = a_{k+1} \dots a_s$ și $z = a_{s+1} \dots a_{n-1} a_n$

- $S \Rightarrow^* x A_k$, $A_k \Rightarrow^* y A_k$ și $A_k \Rightarrow^* z$

Demonstrație

Fie $x = a_1 a_2 \dots a_k$, $y = a_{k+1} \dots a_s$ și $z = a_{s+1} \dots a_{n-1} a_n$

- $S \Rightarrow^* xA_k$
- $A_k \Rightarrow^* yA_k$ și
- $A_k \Rightarrow^* z$
- Pentru $i = 0$, $xz \in L(G)$: $S \Rightarrow^* xA_k \Rightarrow^* xz$
- Pentru $i > 0$, $xy^i z \in L(G)$:

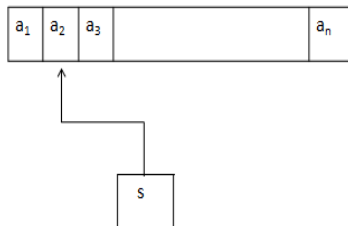
$$S \Rightarrow^* xA_k \Rightarrow^* xyA_k \Rightarrow^* xyyA_k \Rightarrow^* \dots \Rightarrow^* xyy \dots yA_k \Rightarrow^* xyy \dots yz = xy^i z$$

Curs 2

- 1 Proprietăți de închidere pentru \mathcal{L}_3
- 2 Lema Bar-Hillel
- 3 Automate finite deterministe**
- 4 Automate finite nedeterministe
- 5 Automate finite cu ϵ -tranziții

Automate finite

- Mecanism de recunoaștere (acceptare) pentru limbaje
- Limbaje de tip 3
- Mulțime finită de stări



Automate finite

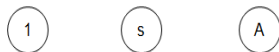
Definiție 1

Un automat finit determinist este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, unde:

- *Q și Σ sunt mulțimi finite, nevide, numite mulțimea stărilor respectiv alfabetul de intrare*
- *$q_0 \in Q$ este starea inițială*
- *$F \subseteq Q$ este mulțimea stărilor finale*
- *δ este o funcție, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$, numită funcția de tranziție*

Reprezentare prin diagrame(grafuri) de tranziție

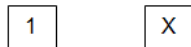
Stări:



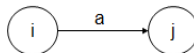
Stare inițială:



Stări finale:

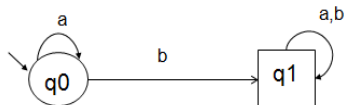


Funcția de tranziție:



Reprezentare prin matricea de tranziție

$$A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$



Intrare	a	b
Stare δ		
q0	q0	q1
q1	q1	q1

Limbajul acceptat

- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$
 - 1 $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q, \forall q \in Q;$
 - 2 $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$
- **Observații:**
 - $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$
 - $\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v), \forall q \in Q, \forall u, v \in \Sigma^*$

Limbajul acceptat

Definiție 2

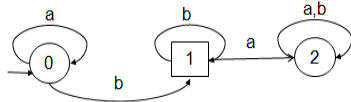
Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul $A = (Q, \delta, \Sigma, q_0, F)$ este mulțimea :

$$L(A) = \{w | w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

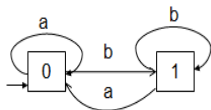
- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w , automatul (pornind din starea inițială q_0) ajunge într-o stare finală.
- $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$. Din acest motiv, $\hat{\delta}$ va fi notată de asemenea cu δ .
- Două automate A și A' sunt **echivalente**, dacă $L(A) = L(A')$

Exemple

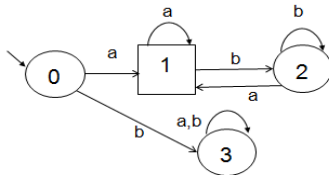
$$L(A) = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 1\}$$



$$L(A) = ?$$



$$L(A) = ?$$



Exemple

Automate deterministe pentru:

- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ conține un număr par de } 0\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ se termina cu } 11\}$

Curs 2

- 1 Proprietăți de închidere pentru \mathcal{L}_3
- 2 Lema Bar-Hillel
- 3 Automate finite deterministe
- 4 Automate finite nedeterministe**
- 5 Automate finite cu ϵ -tranziții

Automate finite nedeterministe

Definiție 3

Un *automat finit nedeterminist* este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, unde:

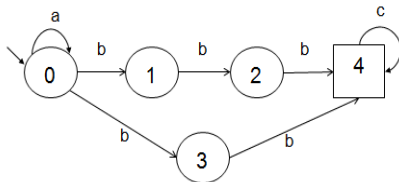
- Q, Σ, q_0 și F sunt definite ca în cazul automatelor finite deterministe
- δ este o funcție, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$, numită funcția de tranziție

- **Observație:**

A este *automat determinist*, dacă

$$|\delta(q, a)| = 1, \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$$

Exemple



Intrare Stare	a	b	c
0	{0}	{1,3}	Φ
1	Φ	{2}	Φ
2	Φ	{4}	Φ
3	Φ	{4}	Φ
4	Φ	Φ	{4}

Extensia lui δ la cuvinte

- Fie S mulțime de stări. Notăm $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$.
- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$
 - 1 $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}, \forall q \in Q;$
 - 2 $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$

Extensia lui δ la cuvinte

- Fie S mulțime de stări. Notăm $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$.
- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$
 - 1 $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}, \forall q \in Q;$
 - 2 $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$
- **Observații:**
 - $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$
 - $\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v), \forall q \in Q, \forall u, v \in \Sigma^*.$

Limbajul acceptat

Definiție 4

Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul finit nedeterminist

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ este mulțimea :

$$L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w , automatul (pornind din starea inițială q_0) poate să ajungă într-o stare finală.

Determinism = Nedeterminism

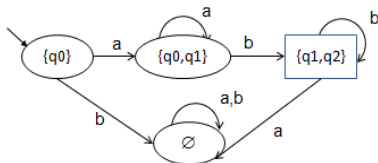
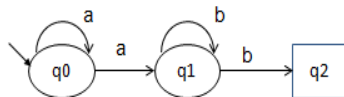
Teorema 1

Pentru orice automat nedeterminist A , există unul determinist A' echivalent.

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) (= \delta(S, a)), \forall S \in 2^Q$
- Pentru aplicații se construiesc doar stările accesibile din starea inițială

Exemplu



Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) = \delta(S, a)$

Au loc:

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) = \delta(S, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w) = \delta(S, w), \forall w \in \Sigma^*$

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) = \delta(S, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w) = \delta(S, w), \forall w \in \Sigma^*$
- $\delta'(Q_0, w) = \delta'(\{q_0\}, w) = \delta(q_0, w)$

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a) = \delta(S, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w) = \delta(S, w), \forall w \in \Sigma^*$
- $\delta'(Q_0, w) = \delta'(\{q_0\}, w) = \delta(q_0, w)$
- $w \in L(A') \Leftrightarrow$
 $\delta'(Q_0, w) \in F' \Leftrightarrow \delta'(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$
 $\Leftrightarrow w \in L(A)$

Curs 2

- 1 Proprietăți de închidere pentru \mathcal{L}_3
- 2 Lema Bar-Hillel
- 3 Automate finite deterministe
- 4 Automate finite nedeterministe
- 5 Automate finite cu ϵ -tranziții**

Automate finite cu ϵ -tranziții

Definiție 5

Un *automat finit cu ϵ -tranziții* este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, unde:

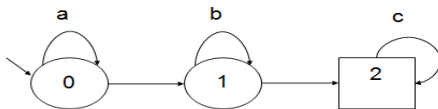
- Q, Σ, q_0 și F sunt definite ca în cazul automatelor finite deterministe
- δ este o funcție, $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$, numită funcția de tranziție

Observație:

- A este *automat nedeterminist*, dacă $\delta(q, \epsilon) = \emptyset, \forall q \in Q$
- A este *automat determinist*, dacă, în plus:

$$|\delta(q, a)| = 1, \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$$

Exemplu



Intrare	a	b	c	ϵ
Stare				
0	{0}	\emptyset	\emptyset	{1}
1	\emptyset	{1}	\emptyset	{2}
2	\emptyset	\emptyset	{2}	\emptyset

Extensia lui δ la cuvinte

- $CI(q)$

$= \{q' \mid q' \in Q, \text{ in graful automatului } A \text{ exista un drum de la } q \text{ la } q' \text{ de lungime } k \geq 0$
 ale carui arce sunt etichetate cu $\epsilon\}$.

$$q \in CI(q)$$

Extensia lui δ la cuvinte

- $CI(q)$

$= \{q' \mid q' \in Q, \text{ in graful automatului } A \text{ exista un drum de la } q \text{ la } q' \text{ de lungime } k \geq 0 \text{ ale carui arce sunt etichetate cu } \epsilon\}.$

$$q \in CI(q)$$

- Dacă $S \subseteq Q$, atunci notăm:

$$CI(S) = \bigcup_{q \in S} CI(q)$$

Extensia lui δ la cuvinte

- $CI(q)$

$= \{q' | q' \in Q, \text{ in graful automatului } A \text{ exista un drum de la } q \text{ la } q' \text{ de lungime } k \geq 0 \text{ ale carui arce sunt etichetate cu } \epsilon\}.$

$$q \in CI(q)$$

- Dacă $S \subseteq Q$, atunci notăm:

$$CI(S) = \bigcup_{q \in S} CI(q)$$

- Extensia lui δ la cuvinte: $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

Extensia lui δ la cuvinte

- $Cl(q)$

$= \{q' | q' \in Q, \text{ in graful automatului } A \text{ exista un drum de la } q \text{ la } q' \text{ de lungime } k \geq 0 \text{ ale carui arce sunt etichetate cu } \epsilon\}.$

$$q \in Cl(q)$$

- Dacă $S \subseteq Q$, atunci notăm:

$$Cl(S) = \bigcup_{q \in S} Cl(q)$$

- Extensia lui δ la cuvinte: $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = Cl(q), \forall q \in Q;$

Extensia lui δ la cuvinte

- $CI(q)$

$= \{q' \mid q' \in Q, \text{ in graficul automatului } A \text{ exista un drum de la } q \text{ la } q' \text{ de lungime } k \geq 0 \text{ ale carui arce sunt etichetate cu } \epsilon\}.$

$$q \in CI(q)$$

- Dacă $S \subseteq Q$, atunci notăm:

$$CI(S) = \bigcup_{q \in S} CI(q)$$

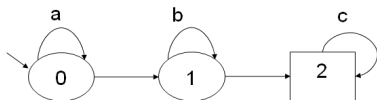
- Extensia lui δ la cuvinte: $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = CI(q), \forall q \in Q;$

- $\hat{\delta}(q, ua) = CI(\delta(\hat{\delta}(q, u), a)), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$

Extensia lui δ la cuvinte

- $\hat{\delta}(q, a) = Cl(\delta(Cl(q), a)), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$



- În cazul automatelor cu ϵ - tranziții vom păstra notația $\hat{\delta}$ pentru extensie pentru că, în general, $\hat{\delta}(q, \epsilon) \neq \delta(q, \epsilon)$ și $\hat{\delta}(q, a) \neq \delta(q, a), a \in \Sigma$.
- $\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v), \forall q \in Q, \forall u, v \in \Sigma^*$

Limbajul acceptat

Definiție 6

Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul cu ϵ -tranziii

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ este mulțimea :

$$L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w , automatul (pornind din starea inițială q_0) poate să ajungă într-o stare finală.