VARIABILE ALEATOARE

- Când rezultatele experimentului aleator sunt exprimate prin numere, se pot ataşa probabilități nu doar evenimentelor, ci şi unor unor valori obținute prin **funcții de evenimente**.
  - Exemplu. Probabilitatea ca suma a două zaruri să fie 7; nu interesează probabilitatea să apară, de exemplu, (3,4).
- Astfel de *funcții reale* definite pe (structuri de interes din) spațiul de selecție sunt **variabile aleatoare**.
- Cum fiecare valoare a unei variabile aleatoare este dată de rezultatul unui experiment, se pot asigna **probabilități valorilor posibile** ale unei variabile aleatoare: $\mathbf{f(x) = P\{X = x\}}$, unde X este variabila aleatoare.

UN EXEMPLU

- Fie X suma obținută în urma aruncării a două zaruri.   X este o variabilă aleatoare.
- $f(1) = P\{X=1\} = 0$;
- $f(2) = P\{X=2\} = P\{(1,1)\} = 1/36$;
- $f(3) = P\{X=3\} = P\{(1,2),(2,1)\} = 2/36;\ldots$
- $f(7)=P\{X=7\}=6/36$; $f(8)=5/36;\ldots;f(12)=1/36$
- Una şi numai una dintre aceste situații va apărea la fiecare repetare a experimentului:

$$1 = P(\cup_{i=2..12}\{X=i\}) = \sum_{i=2..12}P\{X=i\}$$

DEFINIȚII

1. O **variabilă aleatoare** (v.a.) este o variabilă (funcție) a cărei valoare este de fiecare dată un număr determinat de evenimentul rezultat în urma unui experiment aleator.
2. **Repartiția unei variabile aleatoare**. Fie X o v.a. care poate lua **valorile** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu probabilitățile $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. **Repartiția** v.a. X este mulțimea ale cărei elemente sunt perechile ordonate $(x_i, f(x_i))$, $i=1..n$.

EXEMPLE

Fie trei bile identificate prin a, b, c, care se repartizează aleator în trei urne.

Se cere:

- probabilitatea ca două urne să fie ocupate;
- probabilitatea ca trei urne să fie ocupate;
  - Fie X v.a. care numără urnele ocupate.
    - 3^3 moduri de a ocupa urnele.
  - $X:\{e_1, e_2, \ldots, e_{27}\} \rightarrow \{1,2,3\}$
  - Repartiția:((1, 3/27), (2, 18/27), (3, 6/27))
- probabilitatea ca prima urnă să conțină trei bile.
  - Fie Y v.a. ce numără bilele din prima urnă.
  - Repartiția sa: ((0, 8/27), (1, 12/27), (2, 6/27), (3, 1/27))

Dacă o variabilă aleatoare X ia valorile distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$, atunci X produce o **partiție** a spațiului de selecție, $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$, unde A_i se produce dacă şi numai dacă $X=x_i$

Evenimentul $X=x_i$.

Cu variabile aleatoare se pot efectua diverse operații.

În cele ce urmează, fie X şi Y v.a. cu repartițiile: $(x_i, f(x_i))$, $i=1..n$, $(y_k, f(y_k))$, $k=1..m$.

REPARTIȚIA COMUNĂ A DOUĂ VARIABILE ALEATOARE

- Se ataşează probabilități cuplurilor din produsul cartezian al mulțimilor de valori: $P(x_i, y_k) = P\{(X=x_i)$ **şi** $(Y=y_k)\} =$
  $= P\{(X=x_i) \cap (Y=y_k)\}$
- Pentru exemplul anterior, avem:
- $P\{X=2$ şi $Y=1\} = 6/27$;
- $P\{X=3$ şi $Y=2\} = 0$.

OPERAȚII ARITMETICE (1)

1. Produsul dintre v.a. **X** şi constanta **c**:

   v.a. **cX** are **repartiția** $\mathbf{(cx_i, f(x_i))}$, i=1..n.

2. Suma a două v.a. **X** şi **Y**:

   v.a. **X+Y** are **repartiția** $\mathbf{(x_i+y_k, P(x_i, y_k))}$, i=1..n, k=1..m. $P(x_i, y_k)$ este repartiția comună a v.a. **X** şi **Y**.

3. Produsul a două v.a. **X** şi **Y**:

   v.a. **X·Y** are **repartiția** $\mathbf{(x_i \cdot y_k, P(x_i, y_k))}$, i=1..n, k=1..m.

OPERAȚII ARITMETICE (2)

4. Ridicarea la putere a unei v.a. **X**:

   v.a. $\mathbf{X^q}$ are **repartiția** $\mathbf{((x_i)^q, f(x_i))}$, i=1..n.

5. Raportul a două v.a. **X** şi **Y**, dacă **Y** nu ia valori egale cu 0:

   v.a. $\mathbf{Z = \frac{X}{Y}}$ are **repartiția** $\mathbf{(x_i{:}y_k, P(x_i, y_k))}$, i=1..n, k=1..m.

VARIABILE ALEATOARE INDEPENDENTE

- Variabilele aleatoare **X** şi **Y** (ce iau fiecare un număr finit de valori) sunt **independente** dacă are loc:

$$\mathbf{P(x_i, y_k) = P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_k\}},$$
$$i=1..n,\ k=1..m.$$

- Altfel scris:

$P\{(X=x_i) \cap (Y=y_k)\} = P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_k\}$

(evenimentele “elementare” determinate de **X** şi **Y** sunt independente).

V. A. DISCRETE / CONTINUE

- Variabilele aleatoare care iau valori într-o mulțime finită sau numărabilă se numesc **v.a. discrete**.
  - Exemplu: suma valorilor a trei zaruri.
- Variabilele aleatoare care iau un continuum de valori se numesc **v.a. continue**.
  - Exemplu: timpul necesar parcurgerii a 100 m.

FUNCȚIA DE REPARTIȚIE (DISTRIBUȚIE)

- **Definiție**. Funcția de repartiție (distribuție) F a unei v.a. **X** se defineşte pentru orice număr real b, prin:

$$F(b) = P\{X \leq b\}$$

- **Proprietăți**.

1) F(b) este funcție nedescrescătoare în b
   - evenimentul $X \leq a$ implică evenimentul $X \leq b$ dacă $a<b$, deci are probabilitate mai mică de a se produce.

2) $\lim_{b\to\infty} F(b) = F(\infty) = 1$;

3) $\lim_{b\to-\infty} F(b) = F(-\infty) = 0$.
   - întrucât X ia doar valori finite.

FUNCȚIA DE DISTRIBUȚIE ȘI CALCULE CU PROBABILITĂȚI

- La orice întrebare privind probabilități referitoare la **X** se poate răspunde folosind funcția de distribuție. Exemple:
- $\mathbf{P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)}$
  - Demonstrație. E_1: $\{X \leq b\}$; E_2: $\{X \leq a\}$.

    $E_1 - E_2 = \{a < X \leq b\}$. $E_1 = E_2 \cup (E_1 - E_2)$ incompatibile, deci: $F(b) = F(a) + P\{a < X \leq b\}$
- $\mathbf{P\{X<b\} = \lim_{h \to 0+} P\{X \leq b-h\} = \lim_{h \to 0+} F(b-h)}$
- $\mathbf{P\{X=b\} = F(b) - \lim_{h \to 0+} F(b-h)}$ (discrete; continue)

FUNCȚIA (MASĂ) DE PROBABILITATE

- Pentru o variabilă aleatoare discretă **X** se defineşte funcția de (masă de) probabilitate într-un punct **a** prin: $\mathbf{f(a) = P\{X=a\}}$
- f(**a**) > 0 pentru o mulțime cel mult numărabilă de valori ale lui **a**, adică: $f(x_i) > 0$, $i=1,2,\ldots$; $f(x) = 0$ pentru orice alte valori ale lui x.
- Cum **X** ia de fiecare dată numai una dintre valorile x_i, are loc: $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$
- Pentru v.a. discrete: $F(a) = \sum_{\text{toti } x_i \le a} f(x_i)$

CLASIFICARE A V.A. DISCRETE DUPĂ FUNCȚIA DE PROBABILITATE

- V.a. Bernoulli
- V.a. binomială
- V.a. geometrică
- V.a. Poisson
- …

VARIABILA ALEATOARE BERNOULLI

- $S = \{0, 1\}$ (succes / eşec).
- Funcţia de masă de probabilitate:

  dat $0 \le p \le 1$ (probabilitatea de succes),

  $$\begin{cases} f(0) = P\{X = 0\} = 1-p \\ f(1) = P\{X = 1\} = p. \end{cases}$$

- Orice v.a. cu o astfel de funcţie de probabilitate este o v.a. Bernoulli.

VARIABILA ALEATOARE BINOMIALĂ (1)

- Presupunem realizarea a **n** experimente **independente**, fiecare având probabilitatea **p** de succes şi **1-p** de eşec.
  - succesiv aceeaşi monedă; nu şi succesiv cărți din pachet.
- Dacă **X** este numărul de succese în **n** repetări ale experimentului, atunci **X** se numeşte v.a. binomială cu parametrii (**n**, **p**).
- Funcția de probabilitate este dată de:

$$f(i) = C_{\mathbf{n}}^{i} \cdot \mathbf{p}^{i} \cdot (1-\mathbf{p})^{\mathbf{n}-i}, i = \overline{0, \mathbf{n}}$$

VARIABILA ALEATOARE BINOMIALĂ (2)

- Intuitiv: orice secvență de experimente conținând *i* succese şi *n*-*i* eşecuri, are probabilitatea $\mathbf{p}^{i}(1-\mathbf{p})^{\mathbf{n}-i,}$ experimentele fiind independente. Se multiplică prin numărul de secvențe diferite cu *i* succese şi **n**-*i* eşecuri.
- Se observă că sumând de la 0 la n valorile f(i) se obține 1.

VARIABILA ALEATOARE BINOMIALĂ - EXEMPLE

1. Se aruncă independent patru monede corecte. Care este probabilitatea de a obține de două ori stema şi de două ori banul?

- Pentru v.a. X, fie “stema” = “succes”.
- X este v.a. binomială de parametri(4; 0.5).
- $f(2) = P\{X=2\} = C_4^2 \cdot (0.5)^2 \cdot (0.5)^2 = 3/8$.

VARIABILA ALEATOARE BINOMIALĂ - EXEMPLE

2. O maşină produce rebuturi, independente unele de altele, cu probabilitatea **p** = 0.1 . Care este probabilitatea ca din 3 piese cel mult una să fie defectă?

- X numără piesele defecte din 3 selectate.
- $X = B(3; 0.1)$.
- $F(1) = f(0) + f(1) = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \ldots = 0.972$

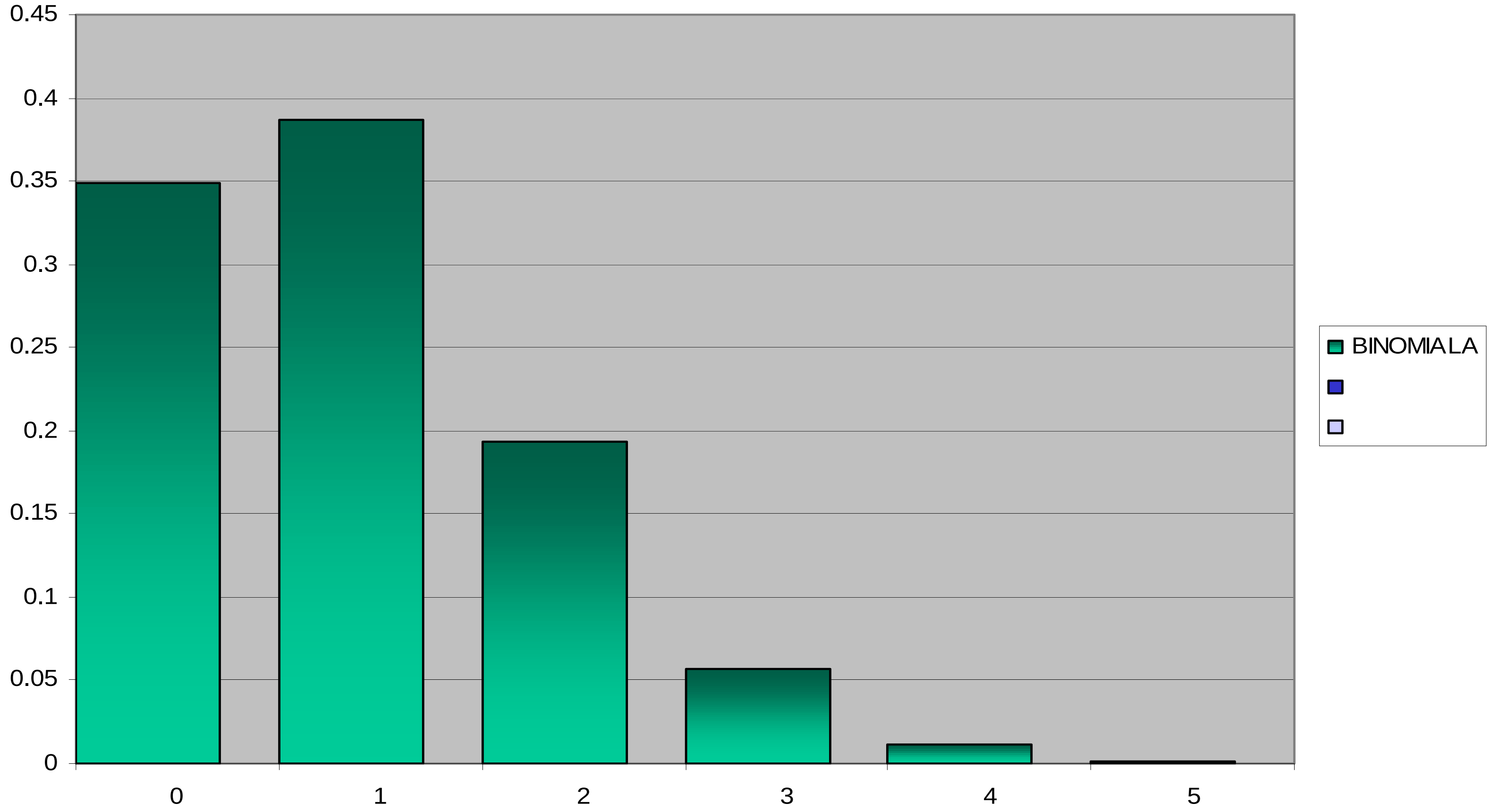
VARIABILA ALEATOARE BINOMIALĂ - EXEMPLE

3. La o fabrică de becuri rebuturile reprezintă 10% dintre produse. La serviciul de control al calității un inspector verifică 10 becuri. Care este probabilitatea să nu găsească mai mult de 1 bec defect?
   - Nu este chiar o variabilă binomială, căci experimentele (extragerile) nu sunt independente. Dacă sunt destul de multe becuri, se poate aproxima binomial (probabilitatea alegerii unui bec defect se modifică foarte puțin). Aproximând:

$$F(1) = P\{X \le 1\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} = 0.3487 + 0.3874$$

$X = B(10; 0.1)$:

PROBABILITĂȚI PENTRU NUMĂRUL DE SUCCESE



VARIABILA ALEATOARE BINOMIALĂ - EXEMPLE

4. Un handbalist transformă 75% din loviturile de la 7m. În finala campionatului, handbalistul trage 12 lovituri de la 7m, ratând 5 dintre ele. A fost el stresat sau performanța era de aşteptat?

- Dacă loviturile se transformă independent, atunci nr. de lovituri transformate este dat de X = **B(12; 0,75)**.
- $p>0,5$ → se neagă “succesul”: **B(12; 0,25)**.
- $P\{X\geq 5\} = P\{X=5\}+\ldots+P\{X=12\} = 0,1032+0,0401+$ $+0,0115+0,0024+0,0040+(\approx 0) = 0,1576$
- Cam într-un meci din 10 va rata **exact** 5 din 12.
- Iar într-un meci din 6 va rata **cel puțin** 5 din 12.

IMPORTANȚA V.A. BINOMIALE

- *Distribuția de sondaj* (a unei statistici) – distribuția valorilor luate de *statistică* pentru un număr mare de *eşantioane* din aceeaşi populație
- *Statistica* văzută ca o variabilă aleatoare
- Distribuțiile *numărătorilor* şi ale *proporțiilor* dintr-o populație, sunt **binomiale**.
- Dacă **p** este proporția "succeselor" în populație (parametru!), atunci variabila X care numără "succesele" în eşantioane aleatoare simple de dimensiune **n** (statistici!) este X = B**(n,p)**.

VARIABILE ALEATOARE GEOMETRICE

X - nr. de repetări de experimente independente, fiecare cu probabilitatea "succesului" *p*, până la primul "succes“.

Funcția sa de (masă de) probabilitate este:

$$f(n) = P\{X = n\} = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$

$$\text{Tema}: \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 1$$

- Dacă probabilitatea producerii unei piese defecte este 10%, probabilitatea ca a doua piesă produsă să fie prima defectă e:

$$f(2) = P\{X=2\} = (1 - 0,1) \cdot 0,1 = 0,09.$$

VARIABILE ALEATOARE POISSON

- X este v.a. Poisson dacă există λ real astfel ca funcția de probabilitate a lui X să fie:

$$f(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, i = 0,1,...$$

Temă: suma dupa *i* este 1 (formula lui Taylor).

- O variabilă binomială B(n,p) este aproximată de o variabilă Poisson cu λ=n*p, pentru valori mari ale lui n şi mici ale lui p.

V.A. POISSON - EXEMPLU

- O companie aeriană face 52 de rezervări pentru cele 50 de locuri ale unui zbor, deoarece se ştie că 5% dintre cei ce fac rezervări nu le folosesc. Care este probabilitatea ca toți cei ce se prezintă la zbor să aibă locuri?
- X – numărul celor ce nu vin.   X=B(52; 0.05).
- $f(2) = P\{X=2\} = ((52\cdot 51)/2)\cdot(5/100)^2 \cdot(95/100)^{50} \approx$
  $\approx e^{-\lambda} \cdot(\lambda^i / i!) = e^{-2,6} \cdot((2,6)^2/2) \approx 0,08 \cdot 3,38 = 0,27$

Variabile aleatoare Poisson

$$P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \text{ for } x = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

In this equation, e is the famous number from calculus,

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = 2.71828\ldots.$$

You might recall from the study of infinite series in calculus, that

$$\sum_{x=0}^{\infty} b^x/x! = e^b,$$

Variabile aleatoare Poisson

$$\sum_{x=0}^{\infty} b^x / x! = e^b,$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = e^{-\theta} \sum_{x=0}^{\infty} \theta^x / x! = 1$$

VARIABILE ALEATOARE CONTINUE

Mulțime nenumărabilă de valori ale variabilei.

Definiție. X este o v.a. continuă dacă există o funcție reală <u>nenegativă</u> f(x), definită pentru orice x $\in$ **R**, astfel ca pentru orice B$\subseteq$**R**:

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)dx$$

f este <u>funcția de densitate de probabilitate</u> a lui X.

$$1 = P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

PROPRIETĂȚI DE CALCUL

$$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$P\{X = a\} = 0$$

Relația dintre funcția cumulativă de distribuție şi *densitatea de probabilitate*:

$$F(a) = P\{X \in (-\infty, a]\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)dx$$

$$F'(a) = f(a)$$

$$f(a) \approx \frac{1}{\varepsilon} \cdot P\{a - \frac{\varepsilon}{2} \le X \le a + \frac{\varepsilon}{2}\}$$

VARIABILA ALEATOARE UNIFORMĂ

V.a. <u>uniform distribuită</u> pe (0,1):

f (x) = *if* $(0<x<1)$ *then* **1** *else* **0** *endif*.

$f(x) \geq 0$; $P\{-\infty<X<\infty\}=1$

$\forall a,b \in (0,1)$: $P\{a \leq X \leq b\}=b-a$

V.a. <u>uniform distribuită</u> pe (α,β):

f (x) = *if* $(\alpha<x<\beta)$ *then* $\mathbf{1/(\beta-\alpha)}$ *else* **0** *endif*.

Temă: $F(a) = ?$

ALTE V.A. CONTINUE

Variabila aleatoare Gamma de parametri

λ>0, α>0 are densitatea de probabilitate:

f (x) = *if* (x<0) *then* **0** *else* $\dfrac{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot (\lambda \cdot x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}$,

unde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \cdot dx$

Variabila aleatoare exponențială de parametru λ>0 are densitatea de probabilitate:

f (x) = *if* (x<0) *then* **0** *else* $\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ *endif.*

VARIABILE ALEATOARE NORMALE

V.a. **X** este <u>normal distribuită</u> cu parametrii μ si σ^2 dacă densitatea ei de probabilitate este

$$f(x) = \frac{1}{(\sigma \cdot \sqrt{2}) \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

<u>Proprietăți:</u>

1. X = **N**(μ, σ^2) $\Rightarrow$ **Y** = aX+b = **N**(aμ+b, $a^2\sigma^2$)
2. X = **N**(μ, σ^2) $\Rightarrow$ **Y** = (X - μ) / σ = **N**(**0**, **1**)

“la câte deviații standard σ de media μ se găseşte fiecare observație”

MEDIA UNEI VARIABILE ALEATOARE

- Discrete: $$M[X] = \sum_{x: f(x) > 0} x \cdot f(x)$$
- X – aruncare zar: M[X]=(1+2+…+6)/6=7/2
- Bernoulli: M[X] = 0·(1-p)+1·p = p
- Temă:

- Binomială - B(n,p): M[X] = n · p

(distribuția de sondaj a mediei eşantioanelor are media M[X]; estimator al proporției "succeselor": M[X] / n = p)

- Geometrică: M[X] = 1/p

- Poisson: M[X] = λ

MEDIA UNEI V.A. CONTINUE

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

- V.a. uniformă: M[X] = $\frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot dx =$

= (α+β)/2

- Temă:
  - Exponențială: M[X] = 1 / λ
  - Normală: M[X] = μ

MEDIA UNEI FUNCȚII DE O V.A. (1)

- $M[g(X)] = M[Y]$, unde $Y = g(X)$.
- <u>Exemplu:</u> Dacă X este uniform distribuită pe (0,1), să se calculeze $M[X^3]$.
- <u>Soluție.</u> $Y=X^3$.

$F_Y(a) = P\{Y \le a\} = P\{X^3 \le a\} = P\{X \le a^{1/3}\} =$

$$= \int_{-\infty}^{a^{1/3}} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{a^{1/3}} dx = a^{\frac{1}{3}}$$

$f_Y(a) = F'_Y(a) = (1/3) \cdot a^{-2/3}$. $\quad M[X^3]=M[Y]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a f_Y(a) da = \int_{0}^{1} a \frac{1}{3} a^{-2/3} da = 1/4$$

MEDIA UNEI FUNCȚII DE O V.A. (2)

- Discrete: $$M[g(X)] = \sum_{x: f(x)>0} g(x) \cdot f(x)$$
- Continue: $$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$
- <u>Exemplu:</u> $$M[X^3] = \int_0^1 x^3 \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{4}$$
- Corolar: M[a·X+b] = a · M[X] + b
- $M[X^n]$ este <u>momentul de ordin n</u> al lui X.

DISPERSIA UNEI V.A. X

$$D^2(X) = M[Y], \text{ unde } Y = (X-M[X])^2$$

- Exemple:

1. X – rezultatul aruncării unui zar

$M[X] = 7/2$; $M[X^2] = (1^2+\ldots+6^2) / 6 = 91/6$

$D^2(X) = 91 / 6 – 49 / 4 = 35 / 12$

2. Temă. Pentru $X = N(\mu,\sigma)$ să se arate că:

$D^2(X) = M[(X- \mu)^2] = \sigma^2$.

DISPERSIILE UNOR V.A. (temă)

- $X = B(n,p)$: $D^2(X) = np(1-p)$
- X v.a. Poisson: $D^2(X) = \lambda$
- X v.a. geometrică: $D^2(X) = (1-p) / p^2$

- X v.a. uniformă: $D^2(X) = (\beta-\alpha)^2 / 12$
- X v.a. exponențială: $D^2(X) = 1 / \lambda^2$
- X v.a. $\Gamma(n,\lambda)$: $D^2(X) = n / \lambda^2$

DISTRIBUȚIA UNUI VECTOR ALEATOR

- Fie X, Y două variabile aleatoare
- Funcția de *distribuție vectorială* a lui X şi Y

$$F(a,b) = P\{X \leq a, Y \leq b\}, \ a,b \in \mathbf{R}$$

- Distribuțiile variabilelor aleatoare inițiale se regăsesc ca *distribuții marginale* ("proiecții"):

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = P\{X \leq a, Y \leq \infty\} = F(a, \infty)$$

$$F_Y(b) = P\{Y \leq b\} = P\{X \leq \infty, Y \leq b\} = F(\infty, b)$$

MASA ŞI DENSITATEA DE PROBABILITATE VECTORIALE

•<u>V.a. vectoriale discrete</u>: funcția de (masă de) probabilitate vectorială a lui (X, Y) este:

$$f(x,y) = P\{X=x,\ Y=y\}$$

Marginale: $f_X(x) = P\{X=x,\ Y\in \mathbf{R}\} = \sum_{y: f(x,y)>0} f(x,y)$

•<u>V.a. vectorială continuă</u>: (X,Y) este v.a.v.c. dacă există $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ astfel încât, $\forall A,B\subseteq \mathbf{R}$, $P\{X\in A,\ Y\in B\} = \int_B\int_A f(x,y)\,dxdy$

Marginale: $P\{X \in A\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_A f(x,y)\,dxdy = \int_A f_X(x)\,dx$,

unde:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

FUNCȚII DE V.A. VECTORIALE

•Propoziție (generalizabilă pt. nr. finit de v.a.).

discrete: M[g(X,Y)] = $\sum_{y}\sum_{x} g(x,y)\cdot f(x,y)$

continue: M[g(X,Y)] = $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\cdot f(x,y)dxdy$

•Exemplu: X – suma a trei zaruri aruncate independent. $X = X_1 + X_2 + X_3$. Media:

$M[X]=M[X_1+X_2+X_3]=M[X_1]+M[X_2]+M[X_3]=21/2$

•Temă. Din n persoane, în medie câte își recuperează propria pălărie? (Indicație: X_i=*if* **i** “da” *then* 1 *else* 0 *endif*; $P\{X_i=1\} = 1/n$; $M[X_i] = 1/n$; $M[X] = 1$).

V. A. INDEPENDENTE

Definiție. V.a. X, Y sunt independente dacă, $\forall$ a,b$\in$ **R**:

$$P\{X \leq a, Y \leq b\} = P\{X \leq a\} \cdot P\{Y \leq b\}$$

(evenimentele $\{X \leq a\}$ şi $\{Y \leq b\}$ sunt independente)

- În termenii funcției de distribuție vectorială F:

$$\forall\ a,b \in \mathbf{R}: F(a,b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$$

- În termenii funcției de probabilitate f, pentru (X,Y) discretă sau continuă: $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.
- Propoziție. Dacă X, Y sunt independente, atunci,

$$\forall \text{ funcții } g, h: M[g(X)\cdot h(Y)] = M[g(X)]\cdot M[h(Y)]$$

Caz particular: $M[X\cdot Y] = M[X]\cdot M[Y]$.

COVARIANȚĂ

•<u>Definiție</u>. Fie X şi Y două v.a. *Covarianța* lor este: $\mathrm{cov}(X,Y) = M[(X-M[X])\cdot[Y-M[Y])]$.

•<u>Propoziție</u>: $\mathrm{cov}(X,Y) = M[X\cdot Y]-M[X]\cdot M[Y]$

•<u>Obs.</u>: X,Y independente $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$; nu şi reciproc!

•<u>Intuitiv</u>: $\mathrm{cov}(X,Y)>0$ dacă Y creşte odată cu X,

iar $\mathrm{cov}(X,Y)<0$ dacă Y descreşte când X creşte.

•<u>Temă</u>. X = *if* (A se realizează) *then* 1 *else 0;*

Y = *if* (B se realizează) *then* 1 *else 0.*

$\mathrm{cov}(X,Y) = 1 \cdot P\{X=1,Y=1\}-1 \cdot P\{X=1\}\cdot 1 \cdot P\{Y=1\}$

$\mathrm{cov}(X,Y)>0$ când…, iar $\mathrm{cov}(X,Y)<0$ când….

DISPERSIE ŞI COVARIANȚĂ

- $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2cov(X,Y)$
- Independente: $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$
- $D^2(X_1+\ldots+X_n) = D^2(X_1) +\ldots+ D^2(X_n) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(X_i,X_j)$
- <u>Temă.</u> În exemplul anterior, care este dispersia numărului de persoane care îşi recuperează propria pălărie? (Răspuns: 1).

COEFICIENT DE CORELAȚIE

- <u>Coeficientul de corelație</u> al v.a. X şi Y este:

$$r(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2(X)\cdot D^2(Y)}}$$

- X, Y independente $\Rightarrow$ r(X,Y) = 0 (nu şi reciproc!)
- Pentru orice v.a. X şi Y : $r^2(X,Y) \le 1$.
- Dacă Y = aX+b (a≠0,b - constante) atunci

  r(X,Y) = *if* (a>0) *then* +1 *else* –1 *endif*.