Limbaje Formale, Automate şi Compilatoare

Curs 5

2013-14

Curs 5

1. Gramatici şi limbaje independente de context - arbori sintactici
2. Forma redusă pentru gramatici independente de context
3. Eliminarea regulilor de ştergere şi a redenumirilor
4. Forma normală Chomsky
5. Problema recunoaşterii: algoritmul Cocke Younger Kasami
6. Eliminarea recursivităţii stângi în gramatici de tip 2

Curs 5

Arbori sintactici

Definiţie 1

Un arbore sintactic (arbore de derivare, arbore de parsare) în gramatica G este un arbore ordonat, etichetat, cu următoarele proprietăţi:

- *rădăcina arborelui este etichetată cu S ;*
- *fiecare frunză este etichetată cu un simbol din T sau cu ϵ ;*
- *fiecare nod interior este etichetat cu un neterminal;*
- *dacă A etichetează un nod interior care are n succesori etichetaţi de la stânga la dreapta respectiv cu X_1, X_2,..., X_n, atunci $A \to X_1X_2 \ldots X_n$ este o regulă.*
  Dacă A are un succesor etichetat cu ϵ, atunci acesta este singurul său succesor.

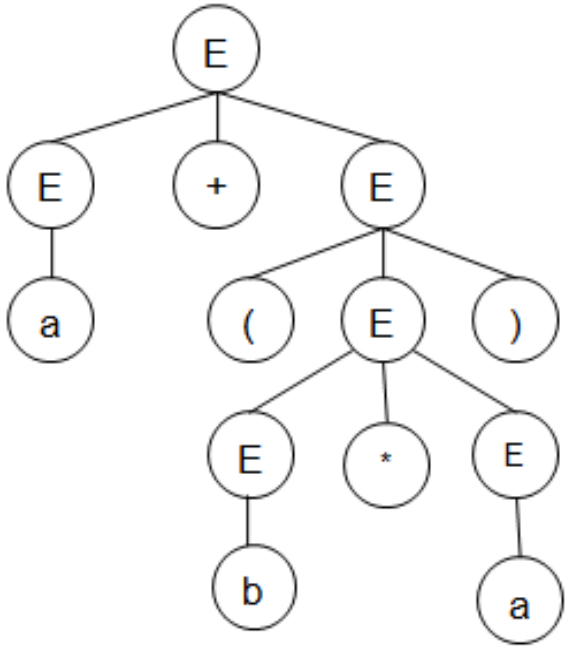
Arbori sintactici-exemplu

$G = (\{E\}, \{a, b, +, *), (\}, E, P)$ unde:
$P : E \to E + E | E * E | (E) | a | b$

$a + (b * a)$

- Derivare extrem stângă:
  $E \Rightarrow E + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + (E) \Rightarrow$
  $a + (E * E) \Rightarrow a + (b * E) \Rightarrow a + (b * a)$
- Derivare extrem dreaptă:
  $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + (E) \Rightarrow E + (E * E) \Rightarrow$
  $E + (E * a) \Rightarrow E + (b * a) \Rightarrow a + (b * a)$

- Arbore de derivare pentru $a + (b * a)$:



Ambiguitate

Definiţie 2

O gramatică G este ambiguă dacă există un cuvânt w în L(G) care are 2 arbori de derivare distincţi.

- Echivalent: *w* are 2 derivări extrem stângi(drepte) distincte.

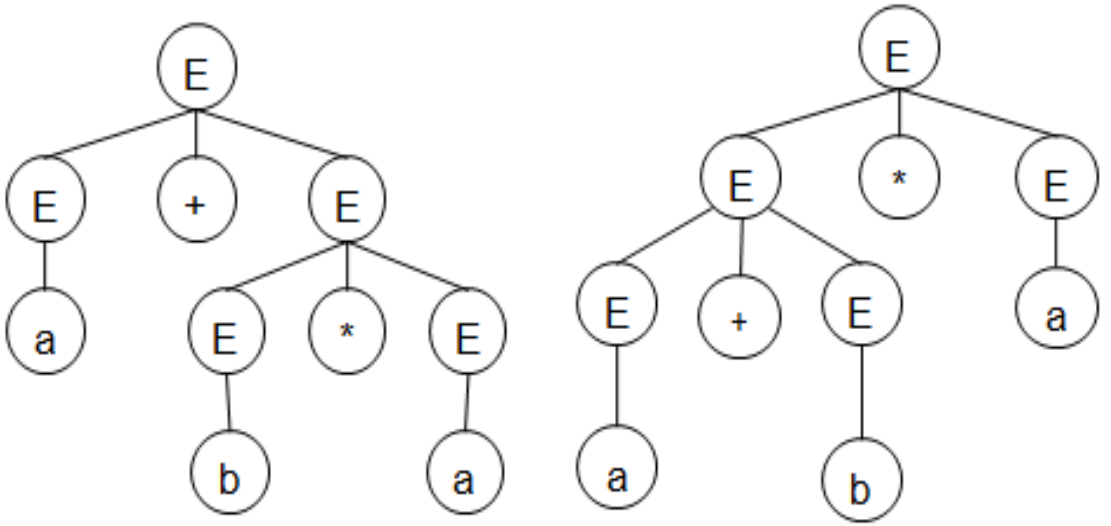
Ambiguitate

Definiţie 2

O gramatică G este ambiguă dacă există un cuvânt w în L(G) care are 2 arbori de derivare distincţi.

- Echivalent: *w* are 2 derivări extrem stângi(drepte) distincte.

Gramatica precedentă este ambiguă: cuvântul $a + b * a$ are 2 arbori de derivare:



Ambiguitate

Definiţie 2

O gramatică G este ambiguă dacă există un cuvânt w în L(G) care are 2 arbori de derivare distincţi.

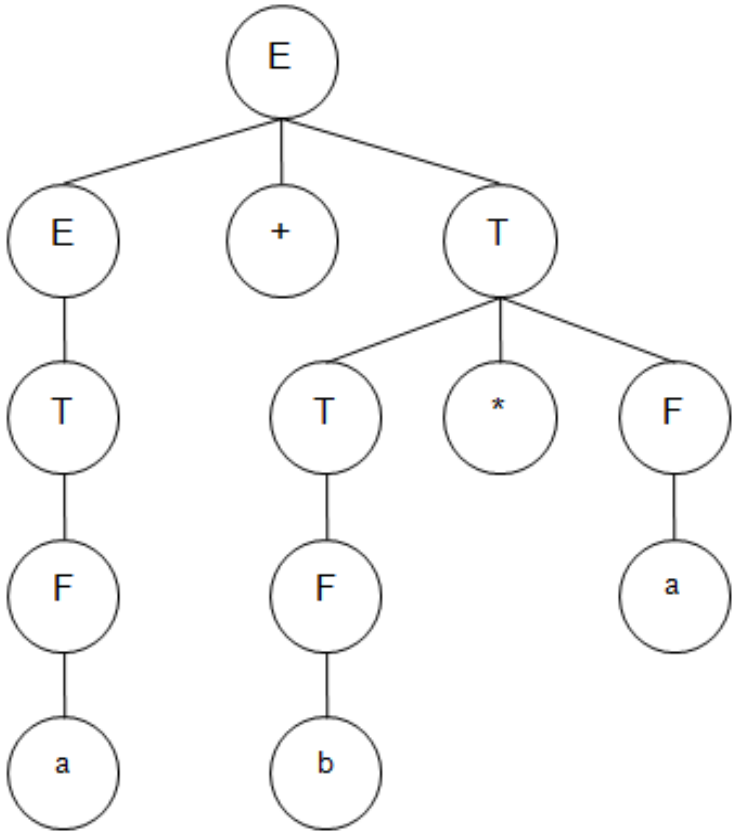
- Echivalent: *w* are 2 derivări extrem stângi(drepte) distincte.
- Problema ambiguităţii gramaticilor de tip 2 este nedecidabilă: nu există un algoritm care pentru o gramatică oarecare *G* să testeze dacă *G* este sau nu ambiguă

Exemplu: o gramatică echivalentă neambiguă

$G = (\{E, T, F\}, \{a, b, +, *), (\}, E, P)$ unde P:

- $E \to E + T$
- $E \to T$
- $T \to T * F$
- $T \to F$
- $F \to (E)$
- $F \to a|b$

- Arbore de derivare pentru $a + b * a$:



Problema recunoaşterii în gramatici independente de context

- Problema recunoaşterii în gramatici independente de context: Dată o gramatică $G = (N, T, S, P)$ şi un cuvânt $w \in T^*$, să se decidă dacă $w \in L(G)$
- Problema parsării (analizei sintactice) este problema recunoaşterii la care se adaugă: dacă $w \in L(G)$, se cere arborele sintactic (o reprezentare a sa) pentru w.

Curs 5

Simboluri inutile

- Un simbol X din $N \cup T$ este accesibil dacă există o derivare de forma $S \Rightarrow^+ \alpha X \beta$
- Un simbol A din N este productiv dacă există o derivare de forma $A \Rightarrow^+ w, w \in T^*$
- Un simbol este inutil dacă este inaccesibil sau neproductiv

Gramatici în formă redusă

Definiţie 3

O gramatică este în formă redusă, dacă nu conţine simboluri inutile.

- Orice limbaj independent de context poate fi generat de o gramatică în formă redusă.

Eliminarea simbolurilor inutile

- Pentru orice gramatică independentă de context G există o gramatică G' de acelaşi tip în formă redusă echivalentă cu G.
- Pentru eliminarea simbolurilor inutile:
  - Se determină şi apoi se elimină simbolurile neproductive şi toate regulile ce conţin măcar unul dintre acestea.
  - Se determină apoi se elimină simbolurile inaccesibile şi toate regulile aferente.

Eliminarea simbolurilor neproductive - algoritm

- Intrare: $G = (N, T, S, P)$
- Ieşire: $G' = (N', T, S, P')$, $L(G') = L(G)$, N' conţine doar simboluri productive

$N_0 = \emptyset$; $i = 0$;
do {
$i = i + 1$;
$N_i = N_{i-1} \cup \{A | A \to \alpha \in P, \alpha \in (N_{i-1} \cup T)^*\}$;
} while $N_i \neq N_{i-1}$;
$N' = N_i$;
$P' = \{A \to \alpha \in P | A \in N', \alpha \in (N' \cup T)^*\}$;

- Un simbol A este productiv ddacă $A \in N'$
- Consecinţă: $L(G) \neq \emptyset$ ddacă $S \in N'$

Exemplu

$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, unde P este:

- $S \to a|aA|bC$
- $A \to aAB$
- $B \to bac$
- $C \to aSb$

Gramatica G' cu toate simbolurile productive:

$G' = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P')$, unde P' este:

- $S \to a|bC$
- $B \to bac$
- $C \to aSb$

Eliminarea simbolurilor inaccesibile

- Intrare: $G = (N, T, S, P)$
- Ieşire: $G' = (N', T', S, P')$, $L(G') = L(G)$, N', T' conţin doar simboluri accesibile

$V_0 = \{S\}$; $i = 0$;
do {
$i = i + 1$;
$V_i = V_{i-1} \cup \{X | X \in N \cup T, \ \exists A \to \alpha X \beta \in P, A \in (V_{i-1} \cap N)\}$;
} while $V_i \neq V_{i-1}$;
$N' = V_i \cap N$;
$T' = V_i \cap T$;
$P' = \{A \to \alpha \in P | A \in N', \alpha \in (N' \cup T')^*\}$;

- X accesibil ddacă $X \in V_i$

Exemplu

$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, unde P este:

- $S \to a|aA|bC$
- $A \to aAB$
- $B \to bac$
- $C \to aSb$
- Eliminarea simbolurilor neproductive duce la:

$$G' = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, S, \{S \to a|bC, B \to bac, C \to aSb\})$$

- Eliminarea simbolurilor inaccesibile duce la:

$$G' = (\{S, C\}, \{a, b\}, S, \{S \to a|bC, C \to aSb\})$$

- Ce se întâmplă dacă se aplică algoritmii în ordinea inversă?

Curs 5

Eliminarea regulilor de ştergere

- Intrare: $G = (N, T, S, P)$
- Ieşire: $G' = (N, T, S, P')$, $L(G') = L(G)$, P' nu conţine reguli de ştergere (reguli de forma $A \to \epsilon$)

$N_0 = \{A | A \in N, \ \ A \to \epsilon \in P\}; \ i = 0;$
do {
$\quad i = i + 1;$
$\quad N_i = N_{i-1} \cup \{X | X \in N, \ \ \exists X \to \alpha \in P, \alpha \in N_{i-1}^*\};$
} while $N_i \neq N_{i-1}$;
$N_\epsilon = N_i;$

Eliminarea regulilor de ştergere

- Intrare: $G = (N, T, S, P)$
- Ieşire: $G' = (N, T, S, P')$, $L(G') = L(G)$, P' nu conţine reguli de ştergere (reguli de forma $A \to \epsilon$)

$N_0 = \{A | A \in N, \ \ A \to \epsilon \in P\}; \ i = 0;$
do {
$\quad i = i + 1;$
$\quad N_i = N_{i-1} \cup \{X | X \in N, \ \ \exists X \to \alpha \in P, \alpha \in N_{i-1}^*\};$
} while $N_i \neq N_{i-1}$;
$N_\epsilon = N_i;$

Are loc:

- $N_0 \subseteq N_1 \ldots \subseteq N_i \subseteq N_{i+1} \subseteq \ldots N_\epsilon \subseteq N$
- $A \in N_\epsilon \iff A \Rightarrow^+ \epsilon$

Eliminarea regulilor de ştergere

P' se obţine din P astfel:

- în fiecare regulă $A \to \alpha \in P$ se pun în evidenţă simbolurile din N_ϵ ce apar în α:

$$\alpha = \alpha_1 X_1 \alpha_2 X_2 \ldots \alpha_n X_n \alpha_{n+1},\ X_i \in N_\epsilon$$

- se înlocuieşte fiecare regulă de acest fel cu mulţimea de reguli de forma

$$A \to \alpha_1 Y_1 \alpha_2 Y_2 \ldots \alpha_n Y_n \alpha_{n+1} \text{ unde } Y_i = X_i \text{ sau } Y_i = \epsilon$$

  în toate modurile posibile (2^n)
- se elimină toate regulile de ştergere
- pentru a obţine cuvântul nul (dacă S este în N_ϵ) se adaugă S' simbol de start nou şi regulile $S' \to S$, $S' \to \epsilon$

Exemplu

$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, unde P:

- $S \to aAbC|BC$
- $A \to aA|aB$
- $B \to bB|C$
- $C \to cC|\epsilon$

$G' = (\{S', S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S', P')$ unde P':

- $S' \to S|\epsilon$
- $S \to aAbC|aAb|B|C$
- $A \to aA|aB|a$
- $B \to bB|b|C$
- $C \to cC|c$

Eliminarea redenumirilor ($A \to B,\ A, B \in N$)

- Intrare: $G = (N, T, S, P)$
- Ieşire: $G' = (N, T, S, P')$, $L(G') = L(G)$, P' nu conţine redenumiri

```
for(A ∈ N){
    N_0 = {A}; i = 0;
    do{
        i = i + 1;
        N_i = N_{i-1} ∪ {C|C ∈ N, ∃B → C ∈ P, B ∈ N_{i-1}};
    } while N_i ≠ N_{i-1};
    N_A = N_i; //N_A = {X ∈ N|A ⇒^+ X}
}
P' = {X → α ∈ P|α ∉ N}
for(X → α_1|α_2|...|α_n ∈ P')
    for(A ∈ N && X ∈ N_A, X ≠ A)
        P' = P' ∪ {A → α_1|α_2|...|α_n}
```

Exemplu

$G = (\{x, y, z\}, \{a, b, c\}, x, P)$, unde P:

- $x \to y|ax|a$
- $y \to z|by|b$
- $z \to cz|c$

$N_x = \{x, y, z\}$, $N_y = \{y, z\}$, $N_z = \{z\}$

Gramatica echivalentă fără redenumiri $G' = (\{x, y, z\}, \{a, b, c\}, x, P')$ unde P':

- $x \to ax|a|by|b|cz|c$
- $y \to by|b|cz|c$
- $z \to cz|c$

Curs 5

Forma normală Chomsky

Definiţie 4

O gramatică este în formă normală Chomsky dacă regulile sale au forma:

$A \to BC$, $A \to a$ *(şi eventual* $S \to \epsilon$*)* $(A, B, C \in N$ *şi* $a \in T)$*.*

Teorema 1

Orice limbaj independent de context poate fi generat de o gramatică în formă normală Chomsky.

Demonstraţie

- Se elimină regulile de ştergere şi redenumirile

Demonstraţie

- Se elimină regulile de ştergere şi redenumirile
- Se elemină regulile care nu sunt în formă normală Chomsky: Dacă $A \to x_1 x_2 \ldots x_n$, $n > 1$ este o astfel de regulă atunci o înlocuim cu $A \to Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ unde:
  - $Y_i = x_i$, dacă $x_i \in N$ (neterminalii rămân la fel)
  - $Y_i = x_a$ dacă $x_i = a \in T$ (x_a este neterminal nou) şi se adaugă regula $x_a \to a$

Demonstraţie

- Se elimină regulile de ştergere şi redenumirile
- Se elemină regulile care nu sunt în formă normală Chomsky: Dacă $A \to x_1 x_2 \ldots x_n$, $n > 1$ este o astfel de regulă atunci o înlocuim cu $A \to Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ unde:
  - $Y_i = x_i$, dacă $x_i \in N$ (neterminalii rămân la fel)
  - $Y_i = x_a$ dacă $x_i = a \in T$ (x_a este neterminal nou) şi se adaugă regula $x_a \to a$
- O regulă de forma $A \to Y_1 Y_2 \ldots Y_n$, dacă $n > 2$, o înlocuim cu:
  - $A \to Y_1 Z_1$
  - $Z_1 \to Y_2 Z_2$
  - .....
  - $Z_{n-3} \to Y_{n-2} Z_{n-2}$
  - $Z_{n-2} \to Y_{n-1} Y_n$,
    unde $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-2}$ sunt neterminali noi.

Exemplu

$G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, S, P)$, unde P:

- $S \to aSb|cAc$
- $A \to cA|c$

Gramatica echivalentă în formă normală Chomsky

$G = (\{S, A, x_a, x_b, Z_1, Z_2\}, \{a, b, c\}, S, P')$, unde P':

- $S \to x_a Z_1 | x_c Z_2$
- $Z_1 \to S x_b$
- $Z_2 \to A x_c$
- $A \to x_c A | c$
- $x_a \to a$
- $x_b \to b$
- $x_c \to c$

Curs 5

Algoritmul Cocke Younger Kasami (CYK)

- Problema recunoaşterii în gramatici în formă normală Chomsky se poate rezolva cu algoritmul CYK în timp $O(n^3)$.
- Dacă $w = a_1 a_2 \dots a_n$ atunci se constuiesc mulţimile

$$V_{ij} = \{A | A \Rightarrow^+ a_i a_{i+1} \dots a_{i+j-1}\}$$

inductiv pentru $j = 1, \dots, n$

$$w \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{1n}$$

Algoritmul Cocke Younger Kasami

- Pentru $j = 1$:
  - $V_{i1} = \{A | A \Rightarrow^+ a_i\} = \{A | \exists A \to a_i \in P\}$
- Pentru $j > 1$, V_{ij}:
  - Dacă $A \Rightarrow^+ a_i a_{i+1} \ldots a_{i+j-1}$:

    $A \Rightarrow BC \Rightarrow^+ a_i a_{i+1} \ldots a_{i+j-1}$ şi

    $B \Rightarrow^+ a_i a_{i+1} \ldots a_{i+k-1}$ $(B \in V_{ik})$

    $C \Rightarrow^+ a_{i+k} a_{i+k+1} \ldots a_{i+j-1}$ $(C \in V_{i+k\ j-k})$

    unde $1 \leq i \leq n+1-j$, $1 \leq k \leq j-1$
  - $V_{ij} = \bigcup_{k=1}^{j-1} \{A | A \to BC \in P, B \in V_{ik}, C \in V_{i+k\ j-k}\}$

Algoritmul Cocke Younger Kasami

- Notaţie:

$$\{A | A \to BC \in P, B \in V_{ik}, C \in V_{i+k\ j-k}\} = V_{ik} \circ V_{i+k\ j-k}$$

- Atunci:

  pentru $2 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n+1-j$:

$$V_{ij} = \bigcup_{k=1}^{j-1} (V_{ik} \circ V_{i+k\ j-k})$$

Algoritmul Cocke Younger Kasami

- Intrare: $G = (N, T, S, P)$ în formă normală Chomsky, $w = a_1 a_2 \ldots a_n$
- Ieşire: $w \in L(G)$?

```
for(i=1; i<=n; i++)
    V_{i1} = {A | ∃A → a_i ∈ P};
for(j=2; j<=n; j++)
    for (i=1; i<=n+1-j; i++){
        V_{ij} = ∅;
        for(k=1; k<=j-1; k++)
            V_{ij} = V_{ij} ∪ (V_{ik} ∘ V_{i+k  j-k});
    }
if(S ∈ V_{1n}) w ∈ L(G) else w ∉ L(G)
```

Exemplu

$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, S, P)$, unde P:

- $S \to XY$
- $X \to XY|a$
- $Y \to YZ|a|b$
- $Z \to c$

$w = abc$

Exemplu

$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, S, P)$, unde P:

- $S \to XY$
- $X \to XY|a$
- $Y \to YZ|a|b$
- $Z \to c$

$w = abc$

$V_{11} = \{X, Y\}$	$V_{12} = \{S, X\}$	$V_{13} = \{S, X\}$
$V_{21} = \{Y\}$	$V_{22} = \{Y\}$	
$V_{31} = \{Z\}$		

$S \in V_{13} \Leftrightarrow abc \in L(G)$

Curs 5

Recursivitate stângă

- Un neterminal A este recursiv dacă există măcar o derivare $A \Rightarrow^{+} \alpha A \beta$.
- Dacă $\alpha = \epsilon$ atunci A se numeşte stâng recursiv,
  dacă $\beta = \epsilon$ atunci A se numeşte drept recursiv.
- Dacă gramatica G conţine cel puţin un neterminal stâng recursiv, G este stâng recursivă
- Un neterminal A este stâng recursiv imediat dacă există o regulă $A \to A\alpha \in P$.

Eliminarea recursivitatii stângi imediate

- Fie $G = (N, T, S, P)$ în formă redusă
- Fie $A \in N$, A stâng recursiv imediat.
- Fie $A \to A\alpha_1 | A\alpha_2 \ldots | A\alpha_k | \beta_1 | \ldots \beta_n$ toate regulile care încep cu A ($\beta_1, \ldots, \beta_n$ nu încep cu A). Fie P_A mulţimea acestor reguli.
- Gramatica G' în care A nu este stâng recursiv imediat:
  - $G' = (N \cup \{A'\}, T, S, P')$
    $P' = P \setminus P_A \cup \{A' \to \alpha_1 A' | \ldots \alpha_k A' | \epsilon, A \to \beta_1 A' | \ldots \beta_n A'\}$

Exemplu

$G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, S, P)$ unde P este:

- $S \to Ac|c$
- $A \to Aa|Ab|a|b|Sc$

$G' = (S, A, A', a, b, c, S, P')$ unde P este:

- $S \to Ac|c$
- $A \to aA'|bA'|ScA'$
- $A' \to aA'|bA'|\epsilon$

Observaţie: A, S stâng recursive

Eliminarea recursivităţii stângi

- Intrare: $G = (N, T, S, P)$ în formă redusă
- Ieşire: $G' = (N', T, S', P')$, $L(G') = L(G)$, fără recursie stângă

1. Se ordonează N; fie $N' = N = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$
2. for(i = 1; i <=n; i++){
3. while($\exists\ A_i \to A_j\alpha \in P : j <= i-1$) {
4. $P = P - \{A_i \to A_j\alpha\}$;
5. for($A_j \to \beta \in P$) $P = P \cup \{A_i \to \beta\alpha\}$;
6. }
7. Se elimină recursia stângă imediată pentru A_i
8. }
10. N' este obţinută din N prin adăugarea tuturor neterminalilor nou introduşi iar P' este noua mulţime de reguli