ALGORITMICA GRAFURILOR
Săptămâna 13

C. Croitoru

croitoru@info.uaic.ro

FII

January 5, 2014

LA MULȚI ANI!

OUTLINE

1. **Abordări ale unor probleme NP-dificile pe grafuri**
   (ag 13-14 allinone.pdf pag. 325 $\longrightarrow$ 353)

2. **Grafuri planare** **(ag 13-14 allinone.pdf pag.** 354 $\longrightarrow$ **)**

3. **Problemele pentru seminariile 13 și 14**

Abordări ale problemelor NP-dificile

Colorarea vârfurilor unui graf

Algoritmul greedy de colorare Fie $G = (V, E)$, cu $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ și π o permutare a lui V. Se construiește colorarea c ce utilizează $\chi(G, \pi)$ culori, $c : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, \chi(G, \pi)\}$.

- $c(\pi_1) \leftarrow 1; \chi(G, \pi) \leftarrow 1; S_1 \leftarrow \{\pi_1\};$
- **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
- $\{ \quad j \leftarrow 0;$
-     **repeat**
-         $j \leftarrow j + 1;$
-         fie v primul vârf (cf. ordonării π), din S_j a. î. $\pi_i v \in E(G)$;
-         **if** v există **then** $\mathit{first}(\pi_i, j) \leftarrow v$
-         **else** $\{ \ \mathit{first}(\pi_i, j) \leftarrow 0;\ c(\pi_i) \leftarrow j;\ S_j \leftarrow S_j \cup \{\pi_i\} \ \}$
-     **until** $\mathit{first}(\pi_i, j) = 0$ **or** $j = \chi(G, \pi);$
-     **if** $\mathit{first}(\pi_i, j) \neq 0$ **then**
-     $\{ \quad c(\pi_i) \leftarrow j + 1;$
-         $S_{j+1} \leftarrow \{\pi_i\};$
-         $\chi(G, \pi) \leftarrow j + 1;$
-     $\}$
- $\}$

Colorarea vârfurilor unui graf

Algoritmul Dsatur { *Degree of Saturation*}
Acest algoritm (Brélaz, 1979) este o metodă secvențială dinamică de colorare.

Ideea este de colora vârfurile pe rând, alegând de fiecare dată vârful cu un număr maxim de constrângeri privitoare la culorile disponibile acestuia.Această abordare este într-un fel opusă primeia (cea geedy) deoarece se aleg vârfuri care formează "clici" mari în raport cu vârfurile deja alese (spre deosebire de mulțimi stabile mari în cazul greedy).

Dacă G este un graf și c o colorare parțială a vârfurilor lui G, definim *gradul de saturație* al unui vârf v, notat $d_{sat}(v)$, ca fiind numărul de culori diferite din vecinătatea acestuia.

- ordonează vârfurile în ordinea descrescătoare a gradelor lor;
- atribuie unui vârf de grad maxim culoarea 1;
- **while** există vârfuri necolorate **do**
- { alege un vf. necol. cu gr. de satur. maxim; dacă acesta
- nu-i unic, alege un vf. de grad maxim în subgr.necolorat;
- colorează vârful ales cu cea mai mică culoare posibilă;
- }

Algoritmul DSatur garantează găsirea numărului cromatic pentru grafurile bipartite.

Problema comisului voiajor

O euristică populară pentru problemele în care funcția de distanță satisface inegalitatea triunghiulară, este dată de *Christofides*. Spre deosebire de cazul general când nu se poate spera la o euristică polinomială A cu R_A finită, dacă $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, în acest caz se poate demonstra următoarea

Teoremă. (Christofides,1973) Fie CV cu d satisfăcînd $\forall v, w, u \in V(K_n)$ distincte $d(vw) \leq d(vu) + d(uw)$. Există un algoritm aproximativ A pentru CV care satisface $R_A = \frac{3}{2}$ și are timp de lucru polinomial.

1. Se determină T^0 mulțimea muchiilor unui arbore parțial de cost minim în K^n (costul muchiei e fiind $d(e)$).Algoritmul lui Prim.
2. Se determină M^0 un cuplaj perfect în subgraful indus de vîrfurile de grad impar ale arborelui T^0 și de cost minim. Alg. lui Edmonds.
3. Se consideră multigraful obținut din $< T^0 \cup M^0 >_{K_n}$, prin duplicarea muchiilor din $T^0 \cap M^0$. Există un parcurs Eulerian închis, cu vîrfurile $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_1})$. Eliminînd aparițiile multiple a unui vîrf, cu excepția primului și ultimului, se obține un circuit hamiltonian H_A în K_n cu muchiile $H_A = (v_{j_1}v_{j_2}, v_{j_2}v_{j_3}, \ldots, v_{j_n}v_{j_1})$ ($O(n^2)$ operații).

Metode care imită natura

Metaeuristica *simulated annealing*.

Inspirată din termodinamică, inventată independent de *Kirkpatrick, Gelatt și Vechi* în 1983 și de *Černy* în 1985.

Probabilitatea de creștere a energiei scade odată cu temperatura:

$$Pr(E + dE) = Pr(E) \cdot e^{-\frac{dE}{kT}}$$

Călirea simulată este o metodă computațională care imită modul natural de determinare a unei configurații care minimizează energia unui sistem.

Atunci cnd se dorește minimizarea unei funcții $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, vom interpreta domeniul de definiție al funcției, D, ca fiind mulțimea configurațiilor posibile ale sistemului, iar funcția f ca fiind energia acestuia. O variabilă fictivă T, asociată procesului de căutare, va juca rolul temperaturii iar constanta lui Bolzmann va fi considerată 1.

Algoritm de călire simulată

1. **Plan de călire:** - temperatura inițială T_{start}; configurația inițială $x_{start} \in D$;
   - temperatura finală T_{min}; o funcție de reducere lentă a temperaturii $decrease\ (T)$;
   - nr. maxim de încercări de îmbunătățire a soluției la fiecare prag de temperatură $attempts$
   - nr. maxim de schimbări ale soluției la fiecare prag de temperatură $changes$.
2. $T \leftarrow T_{start}$; $x_{old} \leftarrow x_{start}$
   while $T > T_{min}$ **do**
   { $na \leftarrow 0$; $nc \leftarrow 0$
   while $na < attempts$ *and* $nc < changes$ **do**
   { generează o soluție nouă x_{new}; $na++$;
   $\Delta E \leftarrow f(x_{old}) - f(x_{new})$;
   If $\Delta E < 0$ **then** { $x_{old} \leftarrow x_{new}$; $nc++$}
   else
   { generează $q \in (0, 1)$ un nr. aleator
   if $q < e^{-\frac{\Delta E}{T}}$ **then** { $x_{old} \leftarrow x_{new}$; $nc++$} } }
   $decrease(T)$ }
3. **return** x_{old}

Pentru problema comisului voiajor, se pornește cu un tur ales aleator, iar soluțiile vecine se obțin cu **2-move**. Se poate lua $T_{start} = O(\sqrt{n})$, $attempts = 100n$, $changes = 10n$, $decrease(T) = 0.95T$ și $T_{min} = O(1)$.

Proprietăți de bază.

Definiție. Fie $G = (V, E)$ un graf și S o suprafață în $\mathbf{R}^3$. Spunem că G este **reprezentabil pe S** dacă există $G' = (V', E')$ un graf astfel încît:
a) $G \cong G'$.
b) V' e o mulțime de puncte distincte din S.
c) Orice muchie $e' \in E'$ este o curbă simplă conținută în S care unește cele două extremități.
d) Orice punct al lui S este sau vîrf al lui G', sau prin el trece cel mult o muchie a lui G'.

G' se numește **reprezentare a lui** G în S.

Dacă S este un plan atunci G se numește **planar** iar G' o **reprezentare planară** a lui G.

Dacă S este un plan și G' este un graf care satisface b) c) și d) de mai sus atunci G' se numește **graf plan.**

Grafuri planare

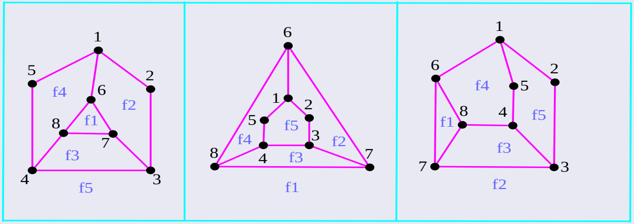
Proprietăți de bază.

Lemă. *Un graf este planar dacă și numai dacă este reprezentabil pe o sferă.*

proiecția stereografică !

Definiție. Fie G un graf plan. Dacă îndepărtăm punctele lui G (vîrfurile și muchiile sale) din plan se obține o reuniune de regiuni conexe (orice două puncte se pot uni printr-o curbă simplă conținută în regiune) ale planului, care se numesc **fețele** lui G.

Orice graf plan are un număr finit de fețe, dintre care una singură este nemărginită și se numește **față exterioară** a lui G.



Proprietăți de bază.

Lemă. *Orice reprezentare planară a unui graf poate fi transformată într-o reprezentare diferită astfel încît o față specificată a sa să devină fața exterioară.*

Teoremă. (Formula lui Euler) *Fie $G = (V, E)$ un graf plan conex cu* **n** *vîrfuri,* **m** *muchii și* **f** *fețe. Atunci*

$$\mathbf{f} = \mathbf{m} - \mathbf{n} + \mathbf{2}$$

Din punct de vedere algoritmic, teorema are drept consecință imediată faptul că orice graf planar este "rar", numărul muchiilor este de ordinul numărului de vîrfuri. Va rezulta că orice traversare în ordinul $O(|V| + |E|)$ a lui G este de fapt în $O(|V|)$ operații.

Corolar 1. Fie G un graf planar, conex, cu $n(\geq 3)$ vîrfuri și $m > 2$ muchii. Atunci

$$m \leq 3n - 6.$$

Graful K_5 nu este planar !

Proprietăți de bază.

Corolar 2. *Dacă G este un graf bipartit, conex și planar cu $m > 2$ muchii și n vîrfuri, atunci $m \leq 2n - 4$.*

Graful K_{33} nu este planar.

Corolar 3. *Dacă G este un graf planar conex, atunci G are un vîrf de grad cel mult 5.*

Fie $G = (V, E)$ un graf și $v \in V(G)$ astfel încît $d_G(v) = 2$ și $vw_1, vw_2 \in E$, $w_1 \neq w_2$. Fie $h(G) = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{vw_1, vw_2\} \cup \{w_1 w_2\})$.
Se observă că G este planar dacă și numai dacă $h(G)$ este planar.
Vom nota cu $h^*(G)$ graful obținut din G aplicîndu-i repetat transformarea h, pînă cînd graful curent nu mai are vîrfuri de grad 2.
Rezultă că G este planar, dacă și numai dacă $h^*(G)$ este planar.
Definiție. Două grafuri G_1 și G_2 se numesc *homeomorfe* dacă și numai dacă $h^*(G_1) \cong h^*(G_2)$.

Teoremă. (Kuratowski 1930) *Un graf este planar dacă și numai dacă nu are subgrafuri homeomorfe cu K_5 sau K_{33}.*

Problemele pentru seminariile 13 și 14

1. **http://profs.info.uaic.ro/ croitoru/ag/Examen/**