Calcul Numeric

Cursul 9

2017

Anca Ignat

Valori şi vectori proprii
(eigenvalues, eigenvectors)

Definiţie

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Numărul complex $\lambda \in \mathbb{C}$ se numeşte ***valoare proprie*** a matricii A dacă există un vector $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$ astfel ca:

$$Au = \lambda u$$

Vectorul u se numeşte ***vector propriu*** asociat valorii proprii λ.

Pentru existenţa vectorului $u \neq 0$ este necesar şi suficient ca matricea $(\lambda I_n - A)$ să fie singulară , adică $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Polinomul de grad n:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

se numeşte ***polinom caracteristic*** al matricii A.

Propoziţia 1

Fie rădăcinile polinomului caracteristic $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distincte, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pentru $1 \leq i < j \leq n$ şi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vectorii proprii corespunzători. Atunci $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sunt liniar independenţi. (demonstraţia se face prin inducţie)

Propoziţia 2

Fie valorile proprii λ_i ale matricii $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ distincte. Atunci există o matrice nesingulară T astfel ca:

$$T^{-1}AT = \mathbf{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Demonstraţie. Fie $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vectorii proprii ai matricii A. Considerăm matricea T ale cărei coloane sunt vectorii proprii u_i, $\mathrm{T} = [u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n]$. Deoarece vectorii proprii sunt liniar independenţi conform propoziţiei 1 rezultă că matricea T este nesingulară. Vom avea:

$$AT = \left[Au_1 \ Au_2 \ldots Au_n\right] = \left[\lambda_1 u_1 \ \lambda_2 u_2 \ldots \lambda_n u_n\right] = T.\mathbf{diag}\left[\lambda_1 \ \lambda_2 \ldots \lambda_n\right]$$

Înmulţind cu T^{-1} obţinem concluzia propoziţiei 2.

Definiţie

Matrici*le *A* şi *B* sunt *asemenea (notaţie ***A~B***) dacă şi numai dacă există o matrice nesingulară ***T*** (**det** ***T*** **≠ 0**) astfel ca:

$$A = T\,B\,T^{-1}$$

Propoziţia 3

$$A \sim B \;\;\Rightarrow\;\; p_A(\lambda) = p_B(\lambda).$$

Demonstraţie.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det\left(\lambda I_n - TBT^{-1}\right) = \det\left(\lambda TT^{-1} - TBT^{-1}\right)$$

$$= \det\left(T\left(\lambda I_n - B\right)T^{-1}\right) = \det(T)\det\left(\lambda I_n - B\right)\det\left(T^{-1}\right) = p_B(\lambda)$$

Propoziţia 3 ne spune că matricile asemenea au acelaşi polinom caracteristic şi aceleaşi valori proprii.

Teorema lui Gershgorin

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **şi** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ o valoare proprie oarecare a matricii $\boldsymbol{A}$. Atunci:

$$\exists i_0 \in \{1,2,\ldots,n\} \textbf{ astfel încât } \left|\lambda - a_{i_0 i_0}\right| \le r_{i_0}\ ,\ r_{i_0} = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i_0}}^{n} \left|a_{i_0 j}\right|.$$

(Valoarea proprie $\boldsymbol{\lambda}$ se află în cercul din planul complex de centru $a_{i_0 i_0}$ **şi rază** r_{i_0}.)

Demonstraţie. Fie $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricii $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ un vector propriu asociat valorii proprii $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{Au = \lambda u}$. Avem:

$$\lambda u_i = a_{ii} u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} u_j \iff (\lambda - a_{ii}) u_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} u_j, \; i = 1, \dots, n.$$

Fie $\boldsymbol{i_0}$ astfel ca $\left| u_{i_0} \right| = \left\| u \right\|_\infty = \max \left\{ \left| u_k \right| ; k = 1, \dots, n \right\} > 0 \; (u \neq 0)$.

Vom avea:

$$\left| \lambda - a_{i_0 i_0} \right| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} \frac{u_j}{u_{i_0}} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i_0}}^{n} \left| a_{i_0 j} \right| \frac{\left| u_j \right|}{\left| u_{i_0} \right|} \leq r_{i_0} \text{, ţinând seama că } \frac{\left| u_j \right|}{\left| u_{i_0} \right|} \leq 1.$$

Observaţie. Presupunem că matricea $\boldsymbol{A}$ are $\boldsymbol{n}$ vectori proprii liniar independenţi $\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2, \ldots, \boldsymbol{u}^n$ asociaţi valorilor proprii $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, ..., $\boldsymbol{\lambda_n}$ Fie $\boldsymbol{U} = \left[\boldsymbol{u}^1\ \boldsymbol{u}^2 \ldots \boldsymbol{u}^n\right]$. Datorită independenţei vectorilor $\boldsymbol{u}^k$ rezultă că matricea $\boldsymbol{U}$ este nesingulară şi avem:

$$\Lambda = \mathrm{diag}\left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right] \qquad \boldsymbol{U^{-1} A U = \Lambda}.$$

Considerăm matricea perturbată:

$$\boldsymbol{A(\varepsilon) = A + \varepsilon B}.$$

$$\boldsymbol{U^{-1} A(\varepsilon) U = \Lambda + \varepsilon U^{-1} B U = \Lambda + \varepsilon C}.$$

$$\boldsymbol{A(\varepsilon) \sim U^{-1} A(\varepsilon)\, U} \Rightarrow \text{ au aceleaşi valori proprii } \boldsymbol{\lambda_i(\varepsilon)}$$

$$\left|\lambda(\varepsilon) - \lambda_i - \varepsilon c_{ii}\right| \le \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left|c_{ij}\right| \ \Rightarrow \ \left|\lambda(\varepsilon) - \lambda_i\right| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Metoda puterii pentru matrici simetrice

Propoziţie

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$. Atunci toate valorile proprii ale matricii $\boldsymbol{A}$ sunt numere reale.

Demonstraţie. Fie $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ **şi** $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{\lambda u}$. Considerăm produsul scalar:

$$(\boldsymbol{Au},\boldsymbol{u})_{\mathbb{C}^n} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbb{C}^n} = \boldsymbol{\lambda}\|\boldsymbol{u}\|_2^2 .$$

$$(\boldsymbol{Au},\boldsymbol{u})_{\mathbb{C}^n} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u})_{\mathbb{C}^n} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{Au})_{\mathbb{C}^n} = \overline{(\boldsymbol{Au},\boldsymbol{u})}_{\mathbb{C}^n} \Rightarrow (\boldsymbol{Au},\boldsymbol{u})_{\mathbb{C}^n} \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{(\boldsymbol{Au},\boldsymbol{u})_{\mathbb{C}^n}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2} \in \mathbb{R}.$$

Propoziţie

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^T$. Atunci există o bază ortonormată de vectori proprii ai matricii A, $\{u^1, u^2,\ldots, u^n\}$:

$$\left(u^i, u^j\right)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

Echivalent, putem scrie ca există vectori proprii $\{u^1, u^2,\ldots, u^n\}$ asociaţi valorilor proprii reale $\{\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n\}$ atfel ca:

$$AU = U\Lambda \quad \Leftrightarrow \quad U^T AU = \Lambda$$

cu $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ şi $U = [u^1\, u^2\, \cdots\, u^n]$ matrice ortogonală.

Definiţie

Se numeşte *coeficient Rayleigh* al vectorului $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ pentru matricea $\boldsymbol{A}$ următoarea mărime scalară:

$$\boldsymbol{r(u) = \frac{u^T A u}{u^T u} = \frac{(Au, u)_{\mathbb{R}^n}}{(u, u)_{\mathbb{R}^n}} = \frac{(Au, u)_{\mathbb{R}^n}}{\| u \|_2^2}}$$

Se verifică uşor că dacă $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ este vector propriu al matricii $\boldsymbol{A}$ asociat valorii proprii $\boldsymbol{\lambda}$ atunci $\boldsymbol{r(u)= \lambda}$.

Fie $\boldsymbol{A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^T}$. Matricea are valori proprii reale $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}$. Presupunem în plus că:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots |\lambda_n| \geq \boldsymbol{0}$$

Metoda puterii este un algoritm care aproximează valoarea proprie de modul maxim λ_1 şi un vector propriu asociat.

Se porneşte de la un vector nenul de normă euclidiană 1, $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\| u^{(0)} \|_2 = 1$ şi se construieşte următorul şir de vectori de normă euclidiană *1*:

$$u^{(0)},\ u^{(1)} = \frac{1}{\| Au^{(0)} \|_2} Au^{(0)},\ \ u^{(2)} = \frac{1}{\| Au^{(1)} \|_2} Au^{(1)}, \dots,$$

$$u^{(k)} = \frac{1}{\| Au^{(k-1)} \|_2} Au^{(k-1)}, \dots$$

În anumite condiţii acest şir converge la un vector propriu asociat valorii proprii λ_1, iar coeficienţii Rayleigh corespunzători converg către λ_1.

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^T$ o matrice simetrică pentru care valorile proprii îndeplinesc condiţia:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots |\lambda_n| \geq 0.$$

Dacă $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\|u^{(0)}\|_2 = 1$, $(u^{(0)}, u^1)_{\mathbb{R}^n} \neq 0$ (u^1 vector propriu asociat lui λ_1) atunci:

$$u^{(k)} = \frac{1}{\|A^k u^{(0)}\|_2} A^k u^{(0)} \to u^1 \text{ (vector propriu asociat lui } \lambda_1)$$

$$r(u^{(k)}) \to \lambda_1$$

Demonstraţie. Fie $\{u^1, u^2,..., u^n\}$ vectori proprii asociaţi valorilor proprii $\{\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n\}$ care formează o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$. Avem:

$$u^{(0)} = a_1 u^1 + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n \ , \ a_i \in \mathbb{R}$$

Deoarece $(u^{(0)}, u^1)_{\mathbb{R}^n} \neq 0$ rezultă că $a_1 \neq 0$. Din construcţia şirului $u^{(k)}$ deducem că există o constantă c_k astfel ca:

$$u^{(k)} = c_k A^k u^{(0)} =$$

$$= c_k A^k (a_1 u^1 + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n) =$$

$$= c_k (a_1 \lambda_1^k u^1 + a_2 \lambda_2^k u^2 + \cdots + a_n \lambda_n^k u^n) =$$

$$= c_k \lambda_1^k \left[a_1 u^1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u^2 + \cdots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k u^n \right]$$

Din această ultimă relaţie, din faptul că λ_1 este valoare proprie dominantă şi $a_1 \neq 0$ deducem că pentru k suficient de mare vectorul $u^{(k)}$ se aliniază după vectorul propriu u^1:

$$u^{(k)} \approx c_k \lambda_1^k a_1 u^1$$

Metoda puterii

$$u^{(0)} \in \mathbb{R}^n \;,\; \| u^{(0)} \|_2 = 1;$$

$$k = 0;$$

$$do$$

- $k++;$
- $w = Au^{(k-1)};$
- $u^{(k)} = \dfrac{1}{\| w \|_2} w \;;$
- $\lambda_k = r(u^{(k)}) = \left(Au^{(k)}, u^{(k)} \right)_{\mathbb{R}^n} \;;$

$$while(\| Au^{(k)} - \lambda_k u^{(k)} \| > \varepsilon \text{ şi } k \le k_{\max});$$

Metoda iterației inverse

Considerăm o matrice simetrică $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^T$ şi $\mu \in \mathbb{R}$ un număr real care nu este valoare proprie a matricii A. Vom folosi metoda puterii pentru a aproxima valoarea proprie a matricii A care este cea mai apropiată de μ şi un vector propriu asociat.

$\mu \neq$ valoare proprie $\rightarrow$ $\det(A - \mu I_n) \neq 0$ $\rightarrow$ $\exists\, (A - \mu I_n)^{-1}$

Fie $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ valorile proprii reale ale matricii A.

Valorile proprii ale matricii $(A-\mu I_n)^{-1}$ sunt:

$$\left\{ \frac{1}{(\lambda_1 - \mu)}, \frac{1}{(\lambda_2 - \mu)}, \ldots, \frac{1}{(\lambda_n - \mu)} \right\}$$

Matricile $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{(A-\mu I_n)^{-1}}$ au aceiaşi vectori proprii. Să presupunem că $\boldsymbol{\lambda_I}$ este valoarea proprie cea mai apropiată de $\boldsymbol{\mu}$ (şi singura). Atunci:

$$\frac{\mathbf{1}}{|\lambda_I - \mu|} > \frac{\mathbf{1}}{|\lambda_j - \mu|} \quad \forall\, j \neq I$$

Această relaţie sugerează ideea aplicării metodei puterii matricii $\boldsymbol{(A - \mu I_n)^{-1}}$ pentru a aproxima valoarea proprie $\boldsymbol{(\lambda_I - \mu)^{-1}}$ şi a unui vector propriu asociat. Algoritmul duce la aproximarea valorii proprii cea mai apropiată de $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda_I}$ şi a unui vector propriu asociat acestei autovalori, $\boldsymbol{u^I}$.

Metoda iterației inverse

$u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\| u^{(0)} \|_2 = 1;$

$k = 0;$

do

- $k++;$
- Se rezolvă sistemul $(A - \mu I_n)w = u^{(k-1)}$;
- $u^{(k)} = \dfrac{1}{\| w \|_2} w$;
- $\lambda_k = r(u^{(k)}) = \left(Au^{(k)}, u^{(k)} \right)_{\mathbb{R}^n}$;

while $(\| Au^{(k)} - \lambda_k u^{(k)} \| > \varepsilon$ și $k \le k_{\max});$