

Cursul 1

Mulțimi. Relații. Funcții.

Ordinali și cardinali

Incontestabil, fundamentarea unui sistem teoretic al oricăruia dintre domeniile științelor moderne aflate în sfera de influență a matematicii nu poate eluda noțiuni precum cele de mulțime, relație și funcție. Respectând un asemenea principiu, cursul de față face o referențială expunere a unor astfel de noțiuni, precum și a câtorva înrudite lor, tratând succint aspecte definitorii ale acestora. Cum, aproape în majoritate, chestiunile expuse aici sunt, într-o anumită măsură, familiare celor cărora li se adresează, prezentarea rezultatelor relative la ele nu este făcută și cu demonstrațiile de rigoare. Lista bibliografică din final încearcă atenuarea acestei voite omisiuni, venind în sprijinul tuturor acelorora dintre destinatarii prezentelor note de curs.

Mulțimi

În viziunea lui Georg Cantor, noțiunea de **mulțime** apare, definită în 1897, ca “un tot unitar, cu elemente distincte, în care ordinea de dispunere a elementelor nu are importanță”. O asemenea definiție este deficitară însă, deoarece, în virtutea ei, nu orice colecție de “obiecte” constituie o mulțime. Astfel, luând în atenție ansamblul *Ens* al tuturor mulțimilor și admitând că acesta este o mulțime, putem susține că și $M = \{X \in \text{Ens} \mid X \notin X\}$ ar fi o mulțime, situație în care ar fi valid paradoxul lui Bertrand Russell, datat din 1899, potrivit căruia nu am putea decide dacă $M \in M$ sau $M \notin M$. Evitarea unei asemenea antinomii se poate realiza fundamentând noțiunea de mulțime pe baza sistemului de axiome propuse de E. Zermelo și A. Fraenkel. Acestea, redate aici începând cu grupajul $ZF1 \sim ZF3$ și terminând, după definiția intercalată în context, cu $ZF4 \sim ZF7$, au proprietățile de noncontradicție, independență, completitudine și categoricitate într-o consistență teoriei mulțimilor.

ZF1. Axioma determinării: “Dacă A și B sunt mulțimi, iar orice element al lui A este în B și reciproc, atunci $A = B$.”

ZF2. Axioma mulțimilor elementare: “i) Există mulțimi vide, generic notate cu \emptyset ; ii) Dacă a este un obiect arbitrar, atunci există mulțimea $\{a\}$ care-l conține pe a ca unic element; iii) Dacă a și b sunt “obiecte” diferite, atunci există o mulțime $\{a, b\}$ care conține pe a și b ca elemente unice.”

ZF3. Axioma bazei: “Orice mulțime nevidă X conține măcar un element x așa încât x și X nu au nimic în comun. Dacă \mathfrak{P} este o proprietate (sau un ansamblu de proprietăți) pentru elementele x ale lui X , atunci există o mulțime Y care conține toate elementele din X cu proprietatea \mathfrak{P} și nu conține alte elemente.”

Definiția 1.1 *) O mulțime B se numește **inclusă** în mulțimea A , când orice element al lui B este în A și acest fapt se consemnează prin $B \subseteq A$.

) Prin **submulțime (**parte**) a unei mulțimi A se înțelege o mulțime inclusă în A .

***) Submulțimile lui A diferite de \emptyset și A se numesc **proprii**, pe când \emptyset și A sunt denumite **submulțimi improprii** ale lui A .

ZF4. Axioma submulțimilor: “Pentru orice mulțime A , există o mulțime $\mathcal{P}(A)$ care conține exact submulțimile lui A .”

ZF5. Axioma reuniunii: “Pentru orice mulțime A de mulțimi, există o mulțime B care conține numai elementele mulțimilor din A .”

ZF6. Axioma alegerii: “Pentru orice mulțime M de mulțimi nevide, mutual disjuncte, există o mulțime care conține exact câte un element din fiecare mulțime din M .”

ZF7. Axioma infinitului: “Există o mulțime C care satisface condițiile următoare:

- a) \emptyset este un element al lui C ;
- b) Dacă x este din C , atunci și $\{x\}$ este din C .”

Observații:

1) Exprimată prin $ZF1 \sim ZF7$, axiomaticele lui Zermelo și Fraenkel elimină paradoxul (antinomia) lui Russell, cu evidență.

2) Notată cu $\mathcal{P}(A)$, după cum se precizează în $ZF4$, mulțimea părților unei mulțimi A are, cu certitudine, pe \emptyset ca element, adică $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, întrucât $\emptyset \subseteq A$, oricare ar fi A .

3) În conformitate cu $ZF1$, dacă două **mulțimi** A și B sunt așa încât $A \subseteq B \subseteq A$, atunci spunem că A și B sunt **egale**, notând acest fapt prin: $A = B$.

Definiția 1.2 O mulțime A de mulțimi se numește **tranzitivă** dacă, $\forall X \in A$, X este din $\mathcal{P}(A)$.

În conformitate cu această definiție, mulțimea vidă este tranzitivă.

Relativ la “ \subseteq ”, sunt de menționat proprietățile din cadrul următorului enunț:

Propoziția 1.1 *j) $A \subseteq A$, pentru orice mulțime A ;*

jj) $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ implică $A = B$;

jjj) $A \subseteq B$ și $B \subseteq C$ implică $A \subseteq C$.

Definiția 1.3 *l) Complementara absolută a unei mulțimi A este, prin definiție, mulțimea $\{x \mid x \notin A\}$.*

*ll) Complementara relativă a mulțimii A în raport cu o (altă) mulțime $B \supseteq A$ este, prin definiție, mulțimea $B \setminus A$, notată cu C_A^B , unde $B \setminus A$ înseamnă **diferența mulțimilor** B și A , adică mulțimea $\{x \in B \text{ și } x \notin A\}$.*

Când, fixată fiind, mulțimea B se subînțelege, notația pentru complementara relativă a unei mulțimi A , în raport cu B , se simplifică, scriind C_A în loc de C_A^B .

Definiția 1.4 *a) Se numește reuniune a două mulțimi A și B mulțimea $\{x \in A \text{ sau } x \in B\}$, notată cu $A \cup B$.*

b) Intersecția a două mulțimi A și B , notată cu $A \cap B$, este mulțimea tuturor elementelor care aparțin simultan mulțimilor A și B , adică: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

c) Diferența simetrică a două mulțimi A și B , notată cu $A \Delta B$, este, prin definiție, mulțimea $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Propoziția 1.2 Operațiile de reuniune, intersecție, diferență, diferență simetrică și complementariere au proprietățile exprimate prin următoarele egalități, care au loc oricare ar fi mulțimile implicate A , B și, acolo unde este cazul, C :

1. $A \cup A = A \cap A = A$ (idempotența);

2. $A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset;$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (asociativitatea reuniunii);
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (asociativitatea intersecției);
5. $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea);
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivitatea intersecției față de reuniune);
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivitatea reuniunii față de intersecție);
8. $C_{C_A} = A;$
9. $C_{A \cup B} = C_A \cap C_B; C_{A \cap B} = C_A \cup C_B$ (legile lui De Morgan);
10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$
11. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C); (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$
12. $A \cup (A \cap B) = A; A \cap (A \cup B) = A$ (absorbția);
13. $A \Delta A = \emptyset; A \Delta B = B \Delta A; A \Delta \emptyset = A;$
14. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$

Operațiile de reuniune și intersecție se pot extinde la cazul unei mulțimi (familii) de mulțimi. Astfel, dacă I este o mulțime de indici, iar $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de mulțimi (indexată după I), atunci **reuniunea tuturor mulțimilor** A_i , notată cu $\bigcup_{i \in I} A_i$, este (prin definiție) mulțimea $\{x \mid \exists i \in I, \text{ încât } x \in A_i\}$, iar **intersecția** $\bigcap_{i \in I} A_i$ este mulțimea $\{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$. Când I este finită, de exemplu $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), atunci notațiile pentru reuniunea și respectiv intersecția mulțimilor A_i ($i = \overline{1, n}$), se adaptează în mod corespunzător ($\bigcup_{i=1}^n A_i$ și respectiv $\bigcap_{i=1}^n A_i$).

Definiția 1.5 *Produsul cartezian* a două mulțimi nevide A și B , notat cu $A \times B$, este, prin definiție, mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ și $b \in B$, adică mulțimea $\{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$.

Pentru un număr finit de mulțimi nevide A_1, A_2, \dots, A_n , avem:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

În cazul în care A_1, A_2, \dots, A_n coincid, având $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, produsul cartezian $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ se notează, mai simplu, cu A^n .

Propoziția 1.3 *Oricare ar fi mulțimile nevide A, B și C , au loc egalitățile:*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$

3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$

Relații

Definiția 1.6 i} O **relație** R de la mulțimea arbitrară $A \neq \emptyset$ la mulțimea oarecare $B \neq \emptyset$ este, prin definiție, o submulțime a produsului cartezian $A \times B$. Terminologic, spunem că R este o **relație binară** între elemente ale lui A și elemente ale lui B . Dacă $(x, y) \in R \subseteq A \times B$, citim că x **este în relația** R **cu** y (unde $x \in A$ și $y \in B$, cu $(x, y) \in R$) și, de cele mai multe ori, scriem xRy (în loc de $(x, y) \in R$). Mulțimea $\{x \in A \mid \exists y \in B \text{ astfel încât } (x, y) \in R\}$ se numește **domeniul relației** R și, notată cu $D(R)$, este, evident, submulțime (proprie sau improprie) a lui A . Mulțimea $\{y \in B \mid \exists x \in A \text{ astfel încât } (x, y) \in R\}$ poartă denumirea de **codomeniu al relației** R , fiind notată, ca submulțime a lui B , cu $Im(R)$.

- ii} În cazul în care $A = B$, o relație binară (pe A) este o parte a produsului cartezian A^2 și se numește **omogenă**.
- iii} **Inversa unei relații binare** $R \subseteq A \times B$, notată cu R^{-1} , este, prin definiție, relația $\{(y, x) \mid xRy\}$.
- iv} Dacă $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$ sunt două relații astfel încât $Im(R) \cap D(S) \neq \emptyset$, atunci se poate defini relația $S \circ R$, denumită **compusa relațiilor** S și R , ca fiind mulțimea $\{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ astfel încât } (x, y) \in R \text{ și } (y, z) \in S\}$.
- v} Pentru o mulțime nevidă A , relația binară $\{(x, x) \mid x \in A\}$ se numește **identitate** pe A și se notează cu 1_A .

Definiția 1.7 a) O relație R pe o mulțime nevidă A se numește **reflexivă**, dacă și numai dacă $1_A \subseteq R$.

- b) Relația binară omogenă R este numită **simetrică**, dacă și numai dacă $R^{-1} = R$.
- c) Relația R , pe A , se numește **antisimetrică**, dacă și numai dacă $R \cap R^{-1} = 1_A$.
- d) Relația R se numește **tranzitivă** dacă și numai dacă, pentru orice $(x, y) \in R$ și $(y, z) \in R$, avem $(x, z) \in R$.
- e) Relația R , pe A , se numește **totală**, dacă și numai dacă, $\forall x, y \in A$, avem $(x, y) \in R$ sau $(y, x) \in R$.

Definiția 1.8 j. O relație R (pe o mulțime nevidă A) care este simultan reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește **relație de echivalență** (pe A).

- jj. Dacă R este o relație de echivalență pe mulțimea nevidă A , iar a este un element oarecare al lui A , atunci mulțimea $\{b \in A \mid (a, b) \in R\}$ se numește **clasa de echivalență** a elementului a în raport cu R și se notează cu $[a]_R$ sau \hat{a}_R .
- jjj. Mulțimea claselor de echivalență determinate de relația de echivalență R pe A se numește **mulțime cât** și se notează cu A/R .

Definiția 1.9 1) O relație R (pe o mulțime nevidă A) care este simultan reflexivă, antisimetrică și tranzitivă se numește **relație de parțială ordine** (pe A).

2) O relație binară omogenă care este numai reflexivă și tranzitivă se numește **relație de preordine**.

3) Relația de ordine R , pe mulțimea nevidă A , se numește **totală** dacă și numai dacă, oricare două elemente, x și y , ale mulțimii de referință A sunt “comparabile”, adică sau xRy sau yRx .

4) Dacă A este o mulțime nevidă și R este o relație de preordine/parțială ordine/ordine totală pe A , atunci perechea (A, R) se numește, respectiv, **mulțime preordonată/parțial ordonată/total ordonată**.

Definiția 1.10 I] Date fiind o mulțime parțial ordonată (A, R) și $\emptyset \neq B \subseteq A$, se numește **majorant** pentru mulțimea B orice element $a \in A$, astfel încât bRa , $\forall b \in B$.

În situația existenței unui majorant pentru B , **mulțimea B** se numește **majorată**.

II] Analog, numim **minorant** pentru B un element $a \in A$ așa încât aRb , $\forall b \in B$. Dacă B are cel puțin un minorant, atunci spunem că B este o **mulțime minorată** (în raport cu R).

III] Când B , ca parte nevidă a mulțimii parțial ordonate (A, R) , este simultan minorată și majorată, zicem că B este o **mulțime mărginită** (în raport cu R și A).

IV] Dacă $a \in A \neq \emptyset$ este un minorant pentru A , în raport cu o parțială ordine R pe A , atunci a se numește **cel mai mic element** al lui A , relativ la R , și se notează cu $\min_R A$.

V] Când $\alpha \in A$ este un majorant pentru A , în raport cu o relație de parțială ordine R pe A , atunci α se numește **cel mai mare element al mulțimii A** și se va nota cu $\max_R A$.

Definiția 1.11 Dacă (A, R) este o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq B \subseteq A$ este majorată (în raport cu R), iar un cel mai mic majorant există pentru B , atunci acesta se numește **margine superioară** a mulțimii B și se notează cu $\sup_R B$. Analog, dacă mulțimea nevidă B este minorată (în raport cu R) și există un cel mai mare minorant pentru B , atunci acesta poartă denumirea de **margine inferioară** a lui B și se notează cu $\inf_R B$.

Definiția 1.12 a) O mulțime parțial ordonată (A, R) se numește **relativ completă** (sau **complet ordonată**) dacă și numai dacă, pentru orice $\emptyset \neq B \subseteq A$, minorată, există $\inf_R B$ și, pentru orice $\emptyset \neq C \subseteq A$, majorată, există $\sup_R C$.

b) O mulțime total ordonată strict este numită **bine ordonată** (altfel spus, cu ordine bună) dacă orice submulțime nevidă a ei are cel mai mic element.

Funcții

Definiția 1.13 1. Prin **funcție** (echivalent, **relație funcțională**) pe o mulțime nevidă A , cu valori într-o mulțime nevidă B , se înțelege o relație binară $f \subseteq A \times B$ pentru care $D(f) = A$ și, pentru orice $x \in A$, așa încât $(x, y) \in f$ și $(x, z) \in f$, avem (cu necesitate) $y = z$.

2. Domeniul relației funcționale $f \subseteq A \times B$ poartă, uzual, denumirea de **mulțime de definiție a funcției** f , iar codomeniul lui f se numește **mulțime în care f ia valori**.

Tot uzual, o funcție f , definită pe o mulțime (nevidă) A și cu valori într-o mulțime (nevidă) B , se notează prin $f : A \rightarrow B$.

Definiția 1.14 i) Pentru $f : A \rightarrow B$, mulțimea $G \subseteq A \times B$, egală cu $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numește **graficul funcției** f .

ii) Două **funcții** $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ se numesc **egale** dacă și numai dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x), \forall x \in A = C$.

iii) Pentru $f : A \rightarrow B$ și $\emptyset \neq C \subset A$, numim **restricție** a lui f pe C , notând-o cu $f|_C$, funcția de la C la B definită prin $f|_C(x) = f(x), \forall x \in C$.

iv) Dacă $f : A \rightarrow B$ este o funcție și $\emptyset \neq C \subset A$, atunci mulțimea $\{y \in B \mid \exists x \in C \text{ așa încât } y = f(x)\}$, notată cu $f(C)$, se numește **imaginea lui C prin f** .

v) Pentru $f : A \rightarrow B$ și $\emptyset \neq D \subseteq B$, mulțimea $\{x \in A \mid \exists y \in D \text{ așa încât } y = f(x)\}$, notată cu $f^{-1}(D)$, se numește **preimaginea lui D prin f sau imaginea inversă a lui D prin f** .

Definiția 1.15 i) O **funcție** $f : A \rightarrow B$ se numește **injectivă** (sau **injecție**) dacă și numai dacă, $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ii) Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **surjectivă** (sau **surjecție**) dacă și numai dacă $\text{Im}(f) = B$.

iii) Când $f : A \rightarrow B$ este simultan injecție și surjecție, atunci f se numește **bijecție** (sau funcție **bijectivă**).

iv) Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **inversabilă** dacă și numai dacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

În cazul existenței lui g , funcția unică g se numește **inversa lui f** și se notează, uzual, cu f^{-1} .

Definiția 1.16 Dacă $f : A \rightarrow B$ este o funcție și $(A, R), (B, S)$ sunt mulțimi parțial ordonate, atunci f se numește **monotonă** (în context) dacă și numai dacă

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{ cu } x_1 R x_2, \text{ avem } f(x_1) S f(x_2).$$

Noțiunea de funcție caracteristică (indicatoare) a unei mulțimi asigură o legătură în plus între noțiunile de mulțime și funcție.

Definiția 1.17 Fie A o mulțime oarecare. Se numește **funcție caracteristică (indicatoare)** a mulțimii $A \neq \emptyset$ și se notează, de regulă, cu χ_A , funcția dată prin:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Când $A = \emptyset$, $\chi_A \equiv 0$.

Propoziția 1.4 *Funcția caracteristică a unei mulțimi satisface următoarele relații*

$$\chi_{C_A} = 1 - \chi_A, \quad \forall A \in \mathcal{P}(E),$$

cu $C_A = E \setminus A$,

$$\chi_A \leq \chi_B \iff A \subseteq B$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E),$$

unde E este mulțimea (cea mai amplă) la care ne raportăm.

Proprietățile evidențiate de Propoziția 1.4 pot fi folosite la stabilirea și demonstrarea unor relații relative la mulțimi, cum sunt, de exemplu, cele specificate de Propoziția 1.2.

Ordinali și cardinali

Una dintre noțiunile matematice cu importanță, printre altele, în semantica limbajelor de programare este aceea de **ordinal**, bazată pe conceptele de **mulțime tranzitivă** (v. Definiția 1.2) și de relație binară de **bună-ordine** (v. Definiția 1.12 -b).

Definiția 1.18 *O mulțime X este numită **ordinal** dacă este tranzitivă și bine ordonată, în raport cu ordinea prin apartenență.*

Propoziția 1.5 (*Proprietăți ale ordinalilor*)

- i) $\alpha \notin \alpha, \forall \alpha$ ordinal.
- ii) $\alpha \in \beta$ și $\beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma$ ordinali.
- iii) Dacă $\alpha \in \beta$ și β este ordinal, atunci α este ordinal.
- iv) Dacă α este ordinal, $X \subset \alpha$ și X este tranzitivă, atunci $X \in \alpha$.
- v) Pentru oricare ordinali α și β , are loc exact una dintre relațiile: $\alpha \in \beta, \alpha = \beta, \beta \in \alpha$.
- vi) Dacă X este o mulțime nevidă de ordinali, atunci $\bigcap X$ este ordinal și anume cel mai mic ordinal al lui X .
- vii) O mulțime tranzitivă de ordinali este ordinal.
- viii) Dacă α este ordinal, atunci $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ este, de asemenea, ordinal, numit ordinalul succesor al lui α . Reciproc, dacă $S(\alpha)$ este ordinal, atunci și α este ordinal.
- ix) Dacă X este o mulțime nevidă de ordinali, atunci $\bigcup X$ este ordinal și, dacă X are un cel mai mare element, atunci acesta este $\bigcup X$.

Definiția 1.19 *Se spune că ordinalul α este mai mic decât ordinalul β , notând aceasta prin $\alpha < \beta$, dacă $\alpha \in \beta$.*

Grație Propoziției 1.4 - i) și v), se poate afirma că orice mulțime de ordinali este total ordonată strict, prin " $<$ ", sau, echivalent spus, prin apartenență. Totodată, " $<$ " este o bună-ordine pe o mulțime de ordinali.

Definiția 1.20 a) Un ordinal α este denumit **ordinal succesor**, dacă există un ordinal β astfel încât $\alpha = S(\beta)$. Altfel, α este numit **ordinal limită**.

b) α este declarat **ordinal finit**, dacă $\alpha = 0$ sau dacă α este ordinal succesor și orice $\beta < \alpha$ este fie 0, fie ordinal succesor. Altfel, α este numit **ordinal infinit**.

Se poate vedea că mulțimea tuturor ordinalilor finiți este ordinal. De asemenea, se poate constata că orice ordinal limită este marginea superioară a mulțimii tuturor ordinalilor mai mici decât el. Cel mai mic ordinal infinit este notat cu ω . Clasa tuturor ordinalilor este notată, adeseori, cu Ord .

Definiția 1.21 Două mulțimi nevide oarecare, A și B , se numesc **echipotente** dacă și numai dacă există o funcție bijectivă $h : A \rightarrow B$.

Un rezultat de reținut este cel care stipulează faptul că o mulțime oarecare poate fi bine ordonată dacă și numai dacă este echipotentă cu un ordinal. În plus, pentru orice mulțime A , există un ordinal unic α , echipotent cu A , care nu este echipotent cu nici un alt ordinal mai mic decât el.

Definiția 1.22 (a unui **cardinal**)

a) Se numește **număr cardinal** al unei mulțimi A (sau **cardinalul mulțimii** A) cel mai mic ordinal α echipotent cu A .

b) **Număr cardinal** sau, simplu, **cardinal** este numit orice ordinal care satisface a) pentru o anumită mulțime A .

Propoziția 1.6 Pentru orice ordinal α , următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) α este cardinal;
- ii) α nu este echipotent cu nici un ordinal $\beta < \alpha$;
- iii) α este cardinalul mulțimii α .

Observații:

- 1) ω este număr cardinal.
- 2) Două mulțimi sunt echipotente dacă și numai dacă cardinalele lor sunt egale.
- 3) Cardinalul unei mulțimi A se notează cu $card(A)$ sau $|A|$ sau $\#A$.
- 4) Prin convenție, $|\emptyset| = 0$.

Definiția 1.23 *j) Pentru două mulțimi A și B , spunem că avem*

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(B),$$

dacă există o injecție de la mulțimea A la mulțimea B .

jj) Avem

$$\text{card}(A) < \text{card}(B),$$

dacă și numai dacă $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ și $\text{card}(A) \neq \text{card}(B)$.

Observație: Relația binară introdusă prin Definiția 1.23-j) este o relație de parțială ordine pe mulțimea tuturor mulțimilor, întrucât este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. Mai mult, deoarece, pentru orice două mulțimi A și B , avem fie $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$, fie $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$, relația " \leq " este una de totală ordine.

Definiția 1.24 *Se numește **număr Hartogs** asociat unei mulțimi A , notat cu $h(A)$, cel mai mic ordinal α care nu este echipotent cu nici o submulțime a lui A .*

Propoziția 1.7 *Pentru orice mulțime A , $h(A)$ este cardinal și $\text{card}(A) < h(A)$.
 $h(A)$ este cel mai mic cardinal mai mare decât $\text{card}(A)$.*

Propoziția 1.8 *a) Dacă $\alpha = \text{card}(A)$, atunci $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^\alpha$.*

b) Pentru orice număr cardinal α , are loc inegalitatea:

$$\alpha < 2^\alpha.$$

Bibliografie selectivă

1. Marina Gorunescu - *Lecții de analiză matematică pentru informaticieni*, Ed.Univ.Craiova, 2000.
2. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Ed. Tehnopress, Iași, 2005.
3. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Ed. Fair Partners, București, 2011.
4. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Ed. Polirom, Iași, 1998.
5. V. Postolică - *Baze ale matematicii actualizate prin eficiență*, Ed. Matrix Rom, București, 2008.
6. F. L. Țiplea - *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
7. B. Poonen - *Infinity: Cardinal Numbers*, 2002.