Setul 1
de probleme şi exerciţii de matematică
(cu privire la mulţimi, relaţii binare, funcţii, ordinali şi cardinali)

S1.1 Să se arate că dacă mulţimile A, B şi C satisfac, simultan, relaţiile

$$A \cup B = C,$$
$$(A \cup C) \cap B = C,$$
$$(A \cap C) \cup B = A,$$

atunci ele sunt egale.

S1.2 Pentru oricare două submulţimi, A şi B, ale unei mulţimi E, are loc relaţia:

$$(C_A \Delta C_B) \cap C_{B \setminus A} = A \setminus B.$$

S1.3 Să se arate că, pentru orice mulţimi A, B şi C, are loc egalitatea

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

S1.4 Arătând în prealabil că, în $\mathcal{P}(E)$, avem

$$A \Delta B = C \Longleftrightarrow B = A \Delta C,$$

să se rezolve ecuaţia

$$A \Delta X = B$$

în cazul în care $E = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{b, d, e\}$.

S1.5 Să se compare A cu C şi B cu C, determinând apoi $A \cap B$, unde A, B şi C sunt următoarele mulţimi:

$$A = \{(a - b, a + b, 2ab) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{(\alpha + 2\beta, \alpha - 3\beta, 2\alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$C = \{(x - 1, x + 1, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

S1.6 Fie $X = \{1, 2, 3\}$ şi, în raport cu X, relaţiile binare

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}, \quad S = \{(1, 2), (2, 3)\}.$$

Să se determine domeniul, codomeniul şi inversa fiecăreia dintre relaţiile date. Să se verifice apoi egalitatea

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

S1.7 Considerându-se relaţiile binare

$$\rho = \{(3a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \text{ şi } \delta = \{(b, 3b) \mid b \in \mathbb{R}\},$$

să se arate că $\rho \circ \delta = 1_{\mathbb{R}}$.

S1.8 Să se stabilească care sunt atributele relaţiei de divizibilitate pe mulţimea $\mathbb{R}[X]$ a polinoamelor cu coeficienţi reali.

S1.9 Fie $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ şi $g \in \mathcal{F}(Y,Z)$. Să se demonstreze că dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci şi g este surjectivă.

S1.10 Două mulţimi nevide A şi B se numesc echipotente dacă există măcar o bijecţie $f : A \to B$. Să se arate că relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă.

S1.11 Să se demonstreze că o funcţie $f : X \to Y$ este injectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(f(A)) = A, \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

S1.12 Fie $G = \{(z,u) \mid z,u \in \mathbb{C},\ u = a+ib,\ a,b \in \mathbb{R},\ z = e^u = e^a(\cos b + i \sin b)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Este G o relaţie de tip funcţie?

S1.13 Să se dovedească că funcţia indicatoare (caracteristică) a unei mulţimi $M \in \mathcal{P}(E)$, generic notată cu χ_M şi definită (v. Definiţia 1.17) prin

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M, \end{cases}$$

are, $\forall\, A,B \in \mathcal{P}(E)$, următoarele proprietăţi (v. Propoziţia 1.4):

$$\chi_{C_A} = 1 - \chi_A, \quad \chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B.$$

S1.14 Fie $X \neq \varnothing$ o mulţime cu cel puţin două elemente şi $\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$. Pentru oricare $f,g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, se consideră relaţia "$\preccurlyeq$" definită prin:

$$f \preccurlyeq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall\, x \in X.$$

Să se constate că $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}), \preccurlyeq)$ este o mulţime ordonată, dar nu şi total ordonată.

S1.15 Folosind proprietăţile funcţiei caracteristice a unei mulţimi (v. Propoziţia 1.4), să se resoluţioneze **S1.1**, **S1.2** şi **S1.3**.

S1.16 Să se stabilească ce relaţie există între mulţimile

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists\, a \in \mathbb{R}, 0 < a \leq 1, \text{ astfel încât } x + ay = 1 \text{ şi } y - a(x+1) = 0\} \text{ şi}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in [0,1),\ y \in (0,1],\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

S1.17 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că f este bijectivă dacă şi numai dacă

$$C_{f(A)} = f(C_A),\ \forall\, A \in \mathcal{P}(X).$$

S1.18 a) Cunoscută fiind mulţimea $A \in \mathcal{P}(E)$, să se rezolve (în $\mathcal{P}(E)$) ecuaţia:

$$X \cap A = X \cup A.$$

b) Să se arate că:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B,\ \forall\, A,B \in \mathcal{P}(E).$$

S1.19 Pe $\mathbb{N}^*$ se consideră relaţia binară notată cu "div" şi definită prin

$$a \operatorname{div} b \Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } b = a \cdot c.$$

Să se arate că $(\mathbb{N}^*, \operatorname{div})$ este o mulţime ordonată. Este $(\mathbb{N}^*, \operatorname{div})$ şi total ordonată?

S1.20 Fie $X \neq \varnothing$ şi $\mathcal{F}(X) = \{f \mid f : X \to X\}$. Pentru f şi g din $\mathcal{F}(X)$, spunem că f este în relaţie cu g şi scriem $f \sim g$ dacă şi numai dacă există $h \in \mathcal{F}(X)$, bijectivă, astfel încât să avem $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Ce fel de relaţie binară este "$\sim$" pe $\mathcal{F}(X)$?

S1.21 Să se stabilească că, pentru orice mulţime A, cardinalul lui A este strict mai mic decât cardinalul mulţimii $\mathcal{P}(A)$.

Bibliografie recomandată

1. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică.Probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

2. I. Radomir, A. Fulga - *Analiză matematică.Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

3. F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.

4. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică.Exerciţii şi probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2005.