# 目录

# 1

# 一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程

## 1.1 等式

### 1. 等式的意义

我们来看下面这些式子:

(1) $m + 2m = 3m$; (2) $\dfrac{4x^2}{2x} = 2x$;

(3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;

(4) $a^3 + b^3 = (a + b)\big(a^2 - ab + b^2\big)$;

(5) $x - 5 = 8$; (6) $x^2 = 9$.

在代数第一册里, 我们知道, 用运算符号把由数字或者字母表示的数连结起来所得的式子, 叫做代数式. 单独的一个用

数字或者字母表示的数，也可以看做是代数式. 所以上而这些式子，都是用等号 $(=)$ 把两个代数式连结起来构成的.

用等号连结两个代数式所成的式子叫做**等式**.

在等式里，等号左边的代数式叫做等式的**左边**；等号右边的代数式叫做等式的**右边**，例如，在等式 $m+2m=3m$ 里，左边是 $m+2m$，右边是 $3m$.

## 2. 恒等式和条件等式

考察上面的第一个等式 $m+2m=3m$. 容易看出，这个等式的右边，是等式左边的两个项合并同类项的结果，所以不论等式里的字母等于什么数值，等式两边的值总是相等的. 例如，当 $m=-3$ 时，左边等于 $-9$，右边也等于 $-9$.

同样的，等式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是多项式乘法的结果，不论 $a$ 和 $b$ 等于任何数值，左边和右边的值总是相等的；等式 $a^3+b^3=(a+b)\big(a^2-ab+b^2\big)$ 是因式分解中常用的一个立方和公式，不论 $a$ 和 $b$ 等于任何数值，左边和右边的值也总是相等的.

我们再来考察上面的第二个等式 $\dfrac{4x^2}{2x}=2x$，这是根据分式的基本性质，从约分所得的结果. 当 $x=0$ 时，分母 $2x$ 等于 $0$，分式没有意义，所以 $x$ 的数值不允许等于 $0$，但是除了 $x=0$ 时分式没有意义以外，不论 $x$ 等于其他任何数值，左边的值总是等于右边的值.

这就是说，在上面的四个等式里，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，等式总是成立的.

一个等式，如果不论未知数的值如何，它的左右两边的值总是相等的，这样的等式叫做**恒等式**. 例如，上面所讲的四个等式都是恒等式:

由数字组成的等式, 也都是恒等式. 例如下面这些等式, 都是恒等式:

$$-(7-2)=-7+2;$$
$$(-2)^3=-8.$$

但是, 并不是所有含有字母的等式都是恒等式. 例如, 对于等式 $x-5=8$ 来说, 容易看出, 当 $x=13$ 时, 这个等式是成立的; 但是当 $x$ 代表 13 以外的其它的数值时, 左边的值就和右边的值不相等. 这也就是说: 当 $x\neq 13$ 时, 这个等式不成立 (这里符号 $\neq$ 读做“不等于”).

同样的, 当 $x=3$ 或者 $x=-3$ 时, 等式 $x^2=9$ 是成立的, 但是当 $x\neq\pm 3$ 时, 这个等式就不成立 (这里 $\pm 3$ 是“$3$ 或者 $-3$”的简便记法).

所以等式 $x-5=8$ 和 $x^2=9$ 都不是恒等式. 象这类只有用某些数值代替式子中的字母才能使左右两边的值相等的等式, 叫做条件等式.

**例** 判别下列等式是不是恒等式:

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(2) $2x+5=3x-1$;

(3) $(x+1)^2-x(x+1)=x+2$.

**[解]** (1) 这是两数和的立方公式, 不论 $a$ 和 $b$ 等于任何数值, 左右两边的值总相等. 所以它是恒等式.

(2) 因为 $x$ 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等, 例如, 当 $x=5$ 时, 左边等于 $15$, 而右边等于 $14$, 两边的值就不相等, 所以 $2x+5=3x-1$ 不是恒等式,

(3) 等式的左边化简后可得

$$\text{左边}=x^2+2x+1-\left(x^2+x\right)=x+1.$$

因为 $x$ 不论取什么数值,$x+1$ 的值总不会和 $x+2$ 的值相等, 所以 $(x+1)^2-x(x+1)=x+2$ 不是恒等式.

**[注意]** 例题 (3) 中的式子 $(x+1)^2-x(x+1)=x+2$, 因为它也是用等号把两个代数式连结起来构成的, 所以我们也把它叫做等式. 但是在这个等式中, 不论 $x$ 取什么数值, 左右两边这两个代数式的值都不会相等, 也就是说, 不论 $x$ 取什么数值, 这个等式总不能成立. 象这样的等式是假等式, 通常也把它叫做**矛盾等式**.

**习题 1.1**

1. 等式和代数式有什么区别? 举两个例子来说明.
2. 什么叫做恒等式? 举两个例子.
3. 指出下列等式中, 哪些是恒等式? 哪些不是恒等式?

   (1) $4+7=11$;　　(2) $-(x-4)=4-x$;

   (3) $3x-5=-2$;　　(4) $x^2=x\cdot x$;

   (5) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

   (6) $x^2=2x$;

   (7) $(a-b)^2=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

   (8) $x^2+y=x+y^2$;

   (9) $(x-2)(x+1)=x^2+x-2$;

   (10) $(x-2)(x+1)=0$;

   (11) $x^3-y^3=(x-y)\big(x^2+xy+y^2\big)$;

   (12) $x^3-y^3=1$.
4. 什么叫做条件等式? 举两个例子.

## 1.2　方程

我们来看下面这个问题:

什么数减去 $2$ 等于 $3$?

如果用 $x$ 表示这个数, 那末这个问题也就是问; 当什么数值时, 等式

$$x-2=3$$

能够成立.

在这个等式里,$2$ 和 $3$ 是问题中已经告诉我们的数, 这种数叫做**已知数**. 而字母 $x$ 的值, 需要根据它与等式里的已知数 $2$ 和 $3$ 之间的关系来确定.

等式里字母的值, 需要根据它与等式里的已知数之间的关系来确定的, 这样的字母叫做**未知数**.

含有未知数的等式, 叫做**关于这个 (这些) 未知数的方程**, 简称**方程**. 方程中的未知数也叫做**元**. 方程中不含未知数的项叫做**常数项**.

例如 $x-2=3$ 和 $x^2=9$ 都是关于未知数 $x$ 的方程;$x+y=10$ 是关于未知数 $x$、$y$ 的方程.

在方程 $x-2=3$ 里, 如果用 $5$ 代替未知数 $x$, 那末方程左右两边的值相等.

能够便方程左右两边的值相等的未知数的值, 叫做方程的解.

例如,$5$ 是方程 $x-2=3$ 的解. 又如, 在方程 $x^2=9$ 里, 用 $3$ 或者 $-3$ 代替未知数 $x$, 方程左右两边的值都相等, 所以 $3$ 和 $-3$ 都是方程 $x^2=9$ 的解.

只含有一个未知数的方程的解, 也叫做方程的**根**, 例如, 方程 $x-2=3$ 的解是 $5$, 也可以说, 方程 $x-2=3$ 的根是 $5$. 同样可以说, 方程 $5y=2$ 的根是 $\frac{2}{5}$; 方程的根是 $3$ 和 $-3$.

求方程的解 (或根) 的过程, 叫做**解方程**.

**例** 检验下列各数是不是方程 $x^2=x+2$ 的根:

(1) 1; (2) –1; (3) 2.

**[解]** (1) 用 $1$ 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 $x$, 这时,

$$\text{左边}=1^2=1,\quad \text{右边}=1+2=3,$$

$\because$ 左边 $\neq$ 右边, $\therefore$ $1$ 不是方程 $x^2 = x + 2$ 的根.

(2) 用 $-1$ 代替方程 $x^2 = x + 2$ 里的 $x$, 这时,

$$左边 = (-1)^2 = 1, \quad 右边 = -1 + 2 = 1,$$

$\because$ 左边 $=$ 右边, $\therefore$ $1$ 是方程 $x^2 = x + 2$ 的根.

(3) 用 $2$ 代替方程 $x^2 = x + 2$ 里的 $x$, 这时,

$$左边 = 2^2 = 4, \quad 右边 = 2 + 2 = 4,$$

$\because$ 左边 $=$ 右边, $\therefore$ $2$ 是方程 $x^2 = x + 2$ 的根.

## 习题 1.2

1. 用方程来表示下列数量关系:

   (1) $x$ 的 $2$ 倍加上 $7$ 等于它的 $5$ 倍减去 $8$;

   (2) $x$ 的 $3$ 倍比 $x$ 的 $5$ 倍小 $4$;

   (3) $y$ 比 $y$ 的 $\frac{1}{4}$ 大 12;

   (4) $x$ 的 $\frac{1}{3}$ 与 x 的 $\frac{2}{5}$ 的和等于 $22$;

   (5) $x$ 与 $2$ 的 差 的 $5$ 倍等于 $15$;

   (6) $x$ 与 $3$ 的和的平方等于 $x$ 的 $10$ 倍与 $6$ 的和.

2. 什么叫做方程的根? 用下列方程后面括号里的数值一一代替方程中的未知数, 指出哪些是方程的根? 哪些不是方程的根?

   (1) $2x - 5 = 1$,($3$,$4$); (2) $x^2 = 9$,($3$,$-3$),

   (3) $x^2 - x = 6$,($3$,$-2$);

   (4) $(x - 3)(x + 3) = 0$,($-3$,$3$,$0$);

   (5) $3x + 8 = \frac{x}{4} - 14$,($8$,$-8$);

   (6) $2x(3x + 2) = 0$,($-\frac{2}{3}$,$0$,$\frac{2}{3}$);

   (7) $x(x - 2) = 8$,($-2$,$2$,$-4$,$4$);

   (8) $x^3 - 7x = 6$,($1$,$2$,$-3$).

## 1.3 同解方程

我们来看下面的两个方程:

$$3x-2=4 \tag{1}$$

$$3x=6 \tag{2}$$

如果用 $x=2$ 代入方程 (1) 时, 方程两边的值都等于 $4$, 所以 $2$ 是方程 (1) 的根. 如果用 $2$ 以外的任何数值代替方程 (1) 里的 $x$, 例如用 $5$ 代替 $x$, 左边的值等于 $13$, 右边的值等于 $4$, 这时方程两边的值就不相等, 所以 $5$ 不是方程 (1) 的根. 因此, 方程 (1) 只有一个根 $2$.

用同样的方法, 我们可以知道方程 (2) 也只有一个根 $2$. 这就是说, 方程 (1) 的根和方程 (2) 的根完全相同. 两个方程, 如果第一个方程的解都是第二个方程的解, 并且第二个方程的解也都是第一个方程的解, 那末这两个方程叫做**同解方程**.

例如, 方程 (1) 和方程 (2) 是同解方程.

又如方程 $x^2=9$ 有两个根 $-3$ 和 $3$, 方程 $(x-3))(x+3)=0$ 也有两个根 $-3$ 和 $3$, 所以方程 $x^2=9$ 和方程

$$(x-3)(x+3)=0$$

是同解方程.

但是, 方程 $x+2=0$ 的根是 $-2$, 方程 $(x+2)(x-3)=0$ 的根是 $-2$ 和 $3$, 虽然方程 $x+2=0$ 的根是方程

$$(x+2)(x-3)=0$$

的根, 但是方程 $(x+2)(x-3)=0$ 的两个根里, 只有一个根 $-2$ 是方程 $x+2=0$ 的根, 而另一个根 $3$ 却不是方程 $x+2=0$ 的根, 所以这两个方程就不是同解方程.

**例** 已知方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有而且只有两个根:$-2$ 和 $\dfrac{1}{2}$, 方

程 $2x^2+3x=2$ 有而且只有两个根 $\dfrac{1}{2}$ 和 $-2$, 判别这两个方程是同解方程吗?

**[解]** 因为方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有两个根, 它们都是方程 $2x^2+3x=2$ 的根, 并且方程有两个根, 它们也都是方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 的根, 所以这两个方程是同解方程.

**习题 1.3**

1. (1) 什么叫做同解方程?

   (2) 方程化和方程不是同解方程?

2. (1) 第一个方程的根是 $3$ 和 $5$, 第二个方程的根是 $5$ 和 $3$, 这两个方程是不是同解方程?

   (2) 第一个方程的根是 $3$ 相 $5$, 第二个方程的根是 $3$ 和 $-5$, 这两个方程是不是同解方程?

   (3) 第一个方程的根是 $3$ 和 $5$, 第二个方程的根是 $5$, 这两个方程是不是同解方程?

   (4) 第一个方程的根是 $3$ 和 $5$, 第二个方程的根是 $3$,$5$ 和 $6$, 这两个方程是不是同解方程?

3. 下列方程后面的括号里的数是这个方程全部的根, 指出下列方程中哪些是同解方程;

   (1) $2x-3=x$,($3$);

   (2) $2x-1=3x$,($-1$);

   (3) $(x+1)(x-3)=0$,($-1$,$3$);

   (4) $5x-8=2x+1$,($3$);

   (5) $x^2-3x=0$,($0$,$3$);

   (6) $x^2-3=2x$,($3$,$-1$).

4. (1) $\dfrac{1}{2}$ 和 $-3$ 是方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 的根吗?

(2) 方程 $2x-1=0$ 和方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 是不是同解方程?

(3) 方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 和方程 $x+3=0$ 是不是同解方程?

5. (1) $5$ 是方程 $2x+1=3x-4$ 的根吗? $4$ 是方程 $2x+4=3x-1$ 的根吗?

(2) 方程 $2x+1=3x-4$ 和方程 $2x+4=3x-1$ 是不是同解方程?

## 1.4　方程的两个基本性质

在上一节里, 要判别一个方程和另一个方程是不是同解方程, 我们需要把两个方程的根一一代入检验, 这样的方法是比较麻烦. 为了解决这个问题, 并且能够正确地掌握后面解方程的方法, 我们先来研究方程的两个基本性质.

### 1.　方程的第一个基本性质

我们看下面一个问题:

什么数减去 $3$ 等于 $7$?

如果设某数为 $x$, 可以列出方程

$$x-3=7.$$

如果用算术方法来考虑: 某数减去 $3$ 所得的差是 $7$, 大家都知道, 这个某数 (即被减数) 等于差 $7$ 与减数 $3$ 的和. 列出方程, 可以得到

$$x=7+3.$$

这里, 当 $x=10$ 的时候, 方程 $x-3=7$ 的两边都等于 $7$, 方程 $x=7+3$ 的两边都等于 $10$. 这就是说,$10$ 是方程 $x-3=7$ 的根, 也是方程 $x=7+3$ 的根, 所以方程 $x-3=7$ 和方程 $x=7+3$ 是同解方程.

再看下面这个方程:

$$3x-2=10.$$

从这个方程的两边都减去词一个整式 $2x-1$, 得到

$$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1).$$

当 $x=4$ 的时候, 方程 $3x-2=10$ 的两边相等, 这时 $2x-1=7$, 所以两边都减去整式 $2x-1$, 实际上就是两边都减去 7, 因此方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 的两边也相等. 所以方程 $3x-2=10$ 和方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 也是同解方程.

根据上而所说的, 我们得到**方程的第一个基本性质**:

> 方程的两边都加上 (或者都减去) 同一个数或者同一个整式, 所得的方程和原方程是同解方程.

**例 1** 利用方程的第一个基本性质, 把下列方程变形成它的同解方程, 使方程的左边只留下一个未知数 $x$, 而右边是用数字表示的数:

(1) $x-5=8$; (2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$.

**[解]** (1) $x-5=8$.

方程的两边都加上 5, 得 $x=8+5$,

就是 $$x=13.$$

(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$.

方程的两边都加上一个整式 $-8x+\frac{7}{10}$, 得

$$9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}.$$

合并同类项, 得 $x=1\frac{3}{10}$.

**[注意]** 把方程逐步变形成它的同解方程时, 应该按照上面例题中那样一步一步分开写, 而不能用把前后两个方程连结起来. 例如, 从方程 $x-5=8$ 得出它的同解方程 $x=8+5$, 不能错误地写成 $x-5=8=x=8+5$, 很明显, 如果照 $x-5=8=x=8+5$, 这样的写法, 就会得出 $8=8+5$ 这样一个错误的结论.

我们来观察一下: 在上面例 1(1) 中的两个方程 $x-5=8$ 和 $x=8+5$ 里, 含有 $-5$ 的一项原来在方程的左边, 符号是负的; 后来在方程的右边, 符号变成正的了. 再看例 1(2) 中的两个方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 和 $9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}$ 里, 含有 $-\frac{7}{10}$ 的一项, 原来在方程的左边, 符号是负的, 后来在方程的右边, 符号变成正的; 而含有 $8x$ 的一项原来在方程的右边, 符号是正的, 后来在方程的左边, 符号变成负的了.

从上面的例题可以看出:

方程中的任何一项, 都可以把它的符号改变后, 从方程的一边移到另一边.

把方程中的项改变符号后, 从方程的一边移到另一边, 这种变形, 叫做**移项**. 移项以后所得的方程和原方程是同解方程.

移项的法则是:

| |
|---|
| 要把方程中的项从等号的一边移到另一边, 必须改变这个项的符号. |

移项法则在以后解方程中经常要用到, 必须熟练掌握.

**例 2** 利用移项的方法, 下列方程变形成左边只留下一个未知数 $x$ 而右边是数字表示的数的方程:

(1) $\frac{4}{7}x=3-\frac{3}{7}x$;　　(2) $8x+5=10x+1-3x$.

**[解]** (1) $\frac{4}{7}x=3-\frac{3}{7}x$.

移项, 得 $\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}x=3.$

合并同类项, 得 $x=3$.

(2) $8x+5=10x+1-3x$.

移项, 得 $8x-10x+3x=1-5.$

合并同类项, 得 $x=-4$.

**习 题 1.4 (1)**

1. 根据方程的第一个基本性质, 说明下列各题中的两个方程是同解方程:

(1) $5x-3=2$ 和 $5x=5$

[解法举例: 在方程 $5x-3=2$ 的两边都加上 $3$, 就得到 $5x=5$, 所以方程 $5x-3=2$ 和方程 $5x=5$ 是同解方程.]

(2) $4x+7=10$ 和 $7x=6$;

(3) $4x+3=2x-4$ 和 $2x=-7$;

(4) $2x-9=6-4x$ 和 $6x=15$;

(5) $\frac{1}{2}-3x=1-5x$ 和 $2x=\frac{1}{2}$.

2. 用移项的方法把下列各方程变形成它的同解方程, 使方程左边只留下一个含未知数的项, 而右边是一个常数项:

(1) $x-11=6$; (2) $2.7+x=4.2$;

(3) $4x=5+3x$; (4) $6y-2=5y$;

(5) $3-2x=4-3x$; (6) $7a+5=6a+5$;

(7) $9y+2=8y-6$; (8) $-5x-3=2-6x$;

(9) $2x-\frac{2}{3}=x+\frac{1}{6}$; (10) $\frac{1}{4}x+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}-\frac{3}{4}x$;

(11) $5x-8+6x=10x-1$; (12) $9x-3=13x+4-5x$.

[注] 第 (4),(6),(7) 各题中的未知数分别是不要错误地写成 $x$.

## 3. 方程的第二个基本性质

我们看下面这个问题;

什么数除以 $5$ 等于 $3$?

设某数为 $x$ 可以列出方程

$$\frac{x}{5}=3.$$

如果用算术方法来做, 大家都知道, 这个某数 (即被除数) 等于商 $3$ 与被除数 $5$ 的乘积. 列出方程, 可以得到

$$x=3\times 5.$$

这里, 方程 $\frac{x}{5}=3$ 的根是 $15$, 方程 $x=3\times 5$ 的根也是 $15$, 所以方程 $\frac{x}{5}=3$ 和方程 $x=3\times 5$ 是同解方程.

同样可以看到, 方程以 $2x=6$ 和方程 $x=3$ 的根都是 $3$, 所以它们也是同解方程.

从上面所说的, 我们得到**方程的第二个基本性质**:

| |
|---|
| 方程的两边都乘以 (或者都除以) 不等于零的同一个数, 所得的方程和原方程是同解方程. |

特别要注意, 如果用零乘方程的两边, 那末所得的方程就不是原方程的同解方程. 例如, 方程 $\frac{x}{5}=3$ 的两边都乘以零, 得到

$$\frac{x}{5}\times 0=3\times 0.$$

在这个等式里, 不论用任何数值代替 $x$, 左右两边的值都等于零, 它们是相等的. 所以这个等式就成为一个恒等式了.

因为零不能做除数, 所以不能用零去除方程的两边.

**例 3** 利用方程的第二个基本性质, 把下列方程变形成它的同解方程, 使方程的左边只留下一个未知数 $x$, 而右边是一个常数项:

(1) $\frac{x}{2}=-5$; (2) $-3x=7$.

**[解]** (1) $\frac{x}{2}=-5$.

方程的两边都乘以 $2$, 得 $x=-10$.

(2) $-3x=7$.

方程的两边都除以 $-3$, 得 $x=-2\frac{1}{3}$.

**习 题 1.4 (2)**

1. 根据方程的第二个基本性质, 说明下列各题中的两个方程是同解方程:

(1) $\frac{x-2}{3}=1$ 和 $x-2=3$;

[解法举例: 在方程 $\frac{x-2}{3}=1$ 的两边都乘以 $3$, 就得到 $x-2=3$, 所以方程 $\frac{x-2}{3}=1$ 和方程 $x-2=3$ 是同解方程.]

(2) $4x-8=6$ 和 $2x-4=3$;

(3) $\frac{1}{5}(3x-2)=-1$ 和 $3x-2=-5$;

(4) $\frac{3}{4}(5-2x)=9x$ 和 $5-2x=12x$.

2. 判别下列各题中的两个方程是不是同解方程:

(1) $3x=-18$ 和 $x=-6$; (2) $-\frac{x}{4}=-3$ 和 $x=12$;

(3) $x=3$ 和 $0\cdot x=0$; (4) $x=1$ 和 $x^2=x$.

[提示:$x=$0 是方程的根, 但是方程 $x=1$ 只有一个根 1.]

3. 根据方程的第二个基本性质, 把下列各方程变形成它的同

解方程, 使方程的左边只留下一个未知数 $x$, 而右边是数字表示的数:

(1) $0.2x=-3$; (2) $6x=4.2$;

(3) $\dfrac{x}{3}=-\dfrac{2}{5}$; (4) $-\dfrac{3}{2}x=15$;

(5) $-\dfrac{x}{7}=-\dfrac{3}{14}$; (6) $\dfrac{3x}{4}=-\dfrac{2}{3}$;

(7) $-0.75x=\dfrac{3}{4}$; (8) $\dfrac{3x}{4}=-0.6$;

(9) $-1.2x=-3\dfrac{3}{4}$; (10) $-5x=0$.

[提示: 遇到题中既有小数, 又有分数时, 可以先把它们都化成分数 (或者小数) 再行计算. 如果遇到分数不能化成有限小数, 像 $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{7},\dfrac{3}{14}$ 等, 只能得到循环小数时, 就把别的小数化成分数后, 再行计算.]

# 1.5 一元一次方程的解法

## 1. 一元一次方程的意义

我们来看下面的几个方程:

$$2x-7=5+x;$$
$$\frac{y-1}{3}=1-\frac{y}{2};$$
$$7(x-1)-5(x+2)=3(2x-1)+2(x-2).$$

这些方程都只含有一个未知数; 对于未知数来说, 方程左右两边的代数式都是整式, 并且未知数的次数都只有一次.

对于未知数来说, 方程左右两边的代数式都是整式的方程叫做**整式方程**. 只含有一个未知数, 并且未知数的次数只有一次的整式方程叫做**一元一次方程**.

例如上面这三个方程, 都是一元一次方程.

**例 1** 下面这些方程中所有的字母都表示未知数, 判别它们是不是一元一次方程, 并说明理由:

(1) $x+y=4$; (2) $x^2+x=5$; (3) $\dfrac{3}{y-1}=1-\dfrac{2}{y}$.

**[解]** (1) 在方程里, 有两个未知数 $x$ 和 $y$, 所以它不是一元一次方程.

(2) 在方程 $x^2+x=5$ 里, 虽然只有一个未知数 $x$, 但是 $x$ 的次数有 $2$ 次的, 所以也不是一元一次方程.

(3) 在方程 $\dfrac{3}{y-1}=1-\dfrac{2}{y}$ 里, 虽然只有一个未知数 $x$, 但是方程两边的代数式都不是整式, 所以也不是一元一次方程.

**习 题 1.5 (1)**

在下列方程里, 哪些是一元一次方程? 哪些不是? 为什么? (题中字母 $x$,$y$ 都表示未知数)

1. $4y-7=5$.
2. $x^2=16$.
3. $\dfrac{1}{2}x-1=x+3$.
4. $2x-y=1$.
5. $2x=0$.
6. $x+\dfrac{1}{x}=2$.
7. $3(2x-3)=5(x+1)$.
8. $(x-1)^2=9$.

解方程的方法, 就是根据方程的两个基本性质, 把原方程逐步变形成比较简单的方程, 直到最后得出象 $x=a$ 这样的最简单的方程. 因为根据方程的两个基本性质所变形得来的方程和原方程是同解方程, 所以最后得到的方程 $x=a$ 的根 $a$, 就是原方程的根.

在解方程的时候, 为了使计算方便, 我们常常利用移项的方法, 把方程中含有未知数的项移到方程的左边, 不含未知数的项移到方程的右边.

下面我们分别来研究数字系数的一元一次方程和含有字母系数的一元一次方程的解法.

## 3. 数字系数的一元一次方程的解法

**例 2** 解方程:$8x+1=6x-5$.

**[解]** 移项, 得 $8x-6x=-5-1$.

合并同类项, 得 $2x=-6$.

两边都除以 2, 得 $x=-3$.

为了检验解方程时计算有没有错误, 可以把求得的根代替原方程里的未知数, 检查方程左右两边的值是不是相等, 如果相等, 说明计算没有错误; 如果不等, 说明计算有错误, 就应该重做. 检验的方法如下:

**[检验]** 用 $-3$ 代替原方程里的 $x$, 得

$$\text{左边} = 8\times(-3)+1=-23,$$

$$\text{右边} = 6x(-3)-3=-23.$$

$\because$ 左边 = 右边,$\therefore$ 3 是原方程的根.

**[注意]** 检验时左右两边应该分别计算, 不能写成下面的形式:

$$8\times(-3)+1=6\times(-3)-5,$$

$$-23=-23$$

因为在检验时, 左右两边的值是不是相等还没有确定, 就不应该用等号把它们连结起来.

检验时, 如果计算简单, 可用口算,

**例 3** 解方程:$\dfrac{x}{12}-1=\dfrac{2x}{15}$.

**[审题]** 解这个方程的时候, 要先算出方程甩所有分母的最小公倍数, 然后把方程的两边都乘以这个最小公倍数, 使所得的方程不再含有分母方程的这种变形叫做**去分母**. 这个方程里分母的最小公倍数是 60, 所以我们按照下面方法来解方程.

**[解]** 两边都乘以 60, 得

$$\left(\frac{x}{12}-1\right)\times 60=\frac{2x}{15}\times 60,$$

就是 $$5x-60=8x.$$

移项, 得

$$5x-8x=60,$$

就是 $$-3x=60,$$

两边都除以 $-3$, 得 $x=-20$.

**[检验]** 用 $x=-20$ 代入原方程, 得

$$左边=\frac{-20}{12}-1=-2\frac{2}{3},$$

$$右边=\frac{2\times(-20)}{15}=-2\frac{2}{3}.$$

在例 1、例 2 中, 我们见到的方程如 $2x=-6$ 和 $-3x=60$, 都是形如 $ax=b$(这里 $a$、$b$ 是已知数, 且 $a\neq 0$) 的方程, 一元一次方程经过变形以后, 都可以表示成这种形式. 用 $a$ 除方程的两边, 就可得到这类方程的根是 $x=\frac{b}{a}$.

**例 4** 解方程:

$$5(x-1)=3(2-3x)-2(x+5).$$

**[解]** 去括号, 得 $5x-5=6-9x=2x-10$.

移项, 得 $$5x+9x+2x=6-10+5.$$

合并同类项, 得 $16x=1$.

两边都除以 $16$, 得 $x=\frac{1}{16}$.

**[检验]** 用 $x=\frac{1}{16}$ 代入原方程, 得

$$左边 =5\left(\frac{1}{16}-1\right)=-\frac{75}{16}=-4\frac{11}{16},$$

$$右边 =3\left(2-3\times\frac{1}{16}\right)-2\left(\frac{1}{16}+5\right)=-4\frac{11}{16}.$$

$\because$ 左边 $=$ 右边,$\therefore$ $x=\dfrac{1}{16}$ 是原方程的根.

**例 5** 解方程:

$$\frac{3x+2}{4}-\frac{5x+1}{2}=2-\frac{7x-1}{3}.$$

**[解]** 去分母 (两边都乘以 $12$), 得

$$3(3x+2)-6(5x+1)=24-4(7x-1).$$

去括号, 得 $9x+6-30x-6=24+4,$

移项, 得 $9x-30x-28x=24+4.$

合并同类项, 得 $7x=28.$

两边都除以 $7$, 得 $x=4.$

**[检验]** 用 $x=4$ 代入原方程, 得

$$左边 =\frac{3\times4+2}{4}-\frac{5\times4+1}{2}=-\frac{28}{4}=-7,$$

$$右边 =2-\frac{7\times4-1}{3}=2-9=-7.$$

$\because$ 左边 $=$ 右边,$\therefore$ $x=4$ 是原方程的根.

**[注意]** 1. 去分母和去括号时要注意符号.

2. 本题中去括号后, 方程左边有和“$+6$”和“$-6$”两项, 显然, 在合并同类项时可以消去, 所以移项时, 可以不列入计算, 减少运算手续.

从上面几个例子里解方程的过程, 我们可以概括出**解一元一次方程的一般步骤**是:

1. 方程里如果有分数系数, 先去分母;
2. 方程里如果有括号, 先去括号;
3. 移项;
4. 合并同类项, 化成 $ax = b(a \neq 0)$ 的形式;
5. 方程两边都除以未知数的系数 $a$, 得出方程的根 $x = \dfrac{b}{a}$.

在解方程的时候, 由于方程的形式不同, 上面所说的几个步骤并不一定都要用到, 并且也不一定都按照上面的顺序进行演算.

## 习题 1.5 (2)

解下列各方程, 并且加以检验 (1□12):

1. $2(5y-9)+2=2y$.
2. $3(x-2)=5(2x+3)$.
3. $\dfrac{2x-1}{6}=\dfrac{5x+1}{8}$.
4. $x-\dfrac{x-1}{2}=2-\dfrac{x+2}{3}$.
5. $\dfrac{3x-2}{3}-\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{8-2x}{3}$.
6. $x=1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{8}+\dfrac{x}{16}$.
7. $\dfrac{2y-1}{3}-\dfrac{3y-5}{2}-\dfrac{y+1}{6}-3=0$.
8. $4x+3.14-2x-1.68=4.16-3x+2.85$.
9. $3-\dfrac{5-2y}{5}=4-\dfrac{4-7y}{10}+\dfrac{y+2}{2}$.
10. $\dfrac{3x-1}{3}+3=\dfrac{3x+5}{4}-\dfrac{x-4}{6}-2\dfrac{1}{2}$.
11. $\dfrac{x+4}{5}-(x-5)=\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x-2}{2}$.
12. $\dfrac{3}{2}(y+1)-\dfrac{2}{3}(2y-1)=\dfrac{1}{5}(3y-2)-\dfrac{1}{10}$.

13. $x$ 等于什么数值时, 代数式 $x-\dfrac{1+x}{3}$ 的值等于 $2$?

14. $x$ 等于什么数值时, 代数式 $\dfrac{2x-3}{5}$ 与 $\dfrac{2}{3}x-3$ 的值相等?

**例 6** 解方程:

$$\frac{3}{2}\Big[\frac{2}{3}\Big(\frac{1}{4}x+1\Big)+2\Big]-2\frac{1}{2}=\frac{2x}{3}.$$

**[解]** 去括号, 得

$$\frac{3}{2}\Big[\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}+2\Big]-\frac{5}{2}=\frac{2x}{3},$$

就是
$$\frac{x}{4}+\frac{3}{2}=\frac{2x}{3}.$$

去分母 (两边都乘以 $12$), 得 $3x+18=8x$.

移项并且合并同类项, 得 $-5x=-18$,

两边都除以 $-5$, 得 $x=\dfrac{18}{5}=3\dfrac{3}{5}$.

检验后可以知道 $x=3\dfrac{3}{5}$ 确实是本题所求的根.

**[说明]** 1. 这个题目应该先去括号, 化简后再行去分母, 这样做, 比较简便.

2. 前面所说的检验, 虽然不是解一元一次方程中的必要步骤之一, 但是为了检查计算有没有错误, 读者还应该进行检验. 除了按照上面的方式来检验外, 也可以利用口算来检验, 本书为了节省篇幅起见, 以下各例中检验都从略.

**例 7** 解方程:

$$\frac{2x}{0.3}+2\frac{2}{3}-\frac{1.4-3x}{0.2}=0.$$

**[审题]** 这个方程里, 分母含有小数, 并且还有分数, 为了运算简便, 可以先把分母上的小数化成分数, 然后使分母变成整数, 并且把

带分数也化成假分数后再解.$0.3=\frac{3}{10}$, 所以 $\frac{2x}{0.3}=\frac{20x}{3}$;$0.2=\frac{2}{10}$, 所以 $\frac{1.4-3x}{0.2}=\frac{14-30x}{2}$;$2\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

**[解]** 原方程可以变形成为

$$\frac{20x}{3}+\frac{8}{3}-\frac{14-30x}{2}=0.$$

去分母 (两边都乘以 $6$), 得

$$40x+16-42+90x=0.$$

移项并且合并同类项, 得 $130x=26$.

两边都除以 $130$, 得 $x=\frac{26}{130}=\frac{1}{5}$.

**[说明]** 方程的右边是 $0$, 因为 $0$ 乘以任何数的积总是 $0$, 所以去分母后右边仍旧是 $0$.

## 习题 1.5 (3)

解下列各方程:

1. $2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1$.
2. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x-1\right)-6\right]+4\right\}=1$.
3. $x-2[x-3(x+4)-5]=3[2x-[x-8(x-4)]\}-2$.
4. $x-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3x}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(2-\frac{x}{4}\right)=2$.
5. $2x-\frac{2}{3}(x-3)=\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{2}(3x+1)\right]$.
6. $\frac{x-4}{5}-\frac{1}{3}(2x-1)+\frac{3}{2}[(x+1)-2]=0$.
7. $1-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1+x}{3}\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(2x-\frac{10-7x}{3}\right)$.
8. $\frac{x-1}{0.3}-\frac{x+2}{0.5}=1.2$.

9. $\dfrac{0.4x+0.9}{0.5}-\dfrac{0.03+0.02x}{0.03}=\dfrac{x-5}{2}$.

10. $\dfrac{1.8-8x}{1.2}-\dfrac{1.3-3x}{2}-\dfrac{5x-0.4}{0.3}=0$.

上面几个例子中，解方程的步骤都是按步标明，有利于正确掌握解方程的方法. 但是在熟练以后，为了迅速运算起见，写法和步骤都可以简化，举例说明如下.

**例 8** 解方程：

$$(x-1)^2-(x+3)(x-3)=(x+1)(x+2)-(x-1)(x+4).$$

**[解]**

$$x^2-2x+1-\left(x^2-9\right)=x^2+3x+2-\left(x^2+3x-4\right),$$

$$x^2-2x+1-x^2+9=x^2+3x+2-x^2-3x+4,$$

$$-2x+10=6,$$

$$-2x=-4,$$

$$\therefore\quad x=2.$$

**[说明]** 1. 这个方程虽然形式上不是一元一次方程，但是经过简化以后，就成为一元一次方程，所以仍旧可以用一元一次方程的解法来解.

2. 在简化写法和步骤的时候，必须特别注意去括号时各项的正负符号以及移项的法则.

**例 9** 解方程：

$$(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)-(2x+1)^3=1-12(x-2)^2.$$

**[解]**

$$8x^3-1-\left(8x^3+12x^2+6x+1\right)=1-12\left(x^2-4x+4\right),$$

$$8x^3-1-8x^3-12x^2-6x-1=1-12x^2+48x-48,$$

$$-6x-2=48x-47,$$

$$-54x=-45,$$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{6}.$$

**[说明]** 演算本题时应该尽量利用乘法公式，不要硬乘出来. 这样，可

以一方面熟练巩固过去学过的乘法公式，另一方面可以简化运算过程.

**习题 1.5 (4)**

解下列各方程 (可以用简化步骤演算):

1. $(x-1)(5x+3)-3x(2x-1)=7-x^3$.
2. $(2x-1)(x+7)-(3x-2)(x-4)+(x+5)(x-3)=0$.
3. $(8x-5)^2-(7x+5)^2=15\left(x^2-10\right)$.
4. $3(2x-1)^2-2(x-2)^2=10\left(x^2-2\right)$.
5. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)^2$.
6. $\left(1\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\left(1\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)(3x-1)$.
7. $(x+2)^3-(x-2)^3=3(2x+3)(2x-3)-5x$.
8. $(x-4)\left(x^2-2x+3\right)=(x-2)^3$.

## 7. 含有字母系数的一元一次方程的解法

前面我们所解的一些方程都是数字系数的方程，除了数字系数的方程，我们还经常会遇到含有字母系数的方程. 例如在方程 $ax=b$, 把 $x$ 作为未知数时，那末 $a$ 以作为 $x$ 的系数，叫做 $x$ 的字母系数，解含有字母系数的一元一次方程的步骤和解数字系数的一元一次方程的步骤是一样的，只是要注意用字母表示的那些已知数容许取的值有什么限制. 现在举例来说明.

**例 10** 解关于 $x$ 的方程:

$$ax+b=cx+d(a\neq c).$$

**[审题]** 在这个方程里，有五个不同的字母. 所谓解关于 $x$ 的方程，就是把 $x$ 作为这个方程里的未知数，而把其余四个字母 $a$,$b$,$c$,$d$ 看做是已知数，其中 $a$ 和 $c$ 都是 $x$ 的字母系数. 又，题目里注

明一个条件 $a \neq c$, 因此, 我们在解方程的过程中, 就要根据这个已知条件进行演算.

**[解]** 移项, 得 $$ax - cx = d - b.$$

合并同类项, 得 $(a-c)x = d - b$.

因为 $a \neq c$, 所以 $a - c \neq 0$.

方程的两边都除以 $a - c$, 得 $x = \dfrac{d-b}{a-c}$.

**[说明]** 根据题目条件 $a \neq c$, 所以 $a - c \neq 0$, 也就是说, 未知数的系数不等于零; 因此, 方程的两边才可以都除以 $a - c$. 如果没有 $a - c \neq 0$ 这个条件, 我们就不可以进行这样的演算.

对于含有字母系数的一元一次方程, 随着字母之间关系的不同, 它的解可以有三种不同情况. 例如, 方程 $ax = b$ 的解有下列三种情况:

(1) 如果 $a \neq 0$, 那末 $x = \dfrac{b}{a}$. 就是说, 方程 $ax = b$ 有一个解.

(2) 如果 $a = 0$,$b = 0$, 那末原方程变成 $0 \cdot x = b$, 所以 $x$ 可以取任意值, 我们说, 方程 $ax = b$ 如有无限多个解.

(3) 如果 $a = 0$,$b \neq 0$, 那末方程变成 $0 \cdot x = b$, 所以 $x$ 不论取什么值, 都不能适合这方程, 我们说, 方程没有解.

**[注意]** 当 $a = 0$ 时,$ax = 0x$, 实际上并不是 $x$ 的一次式, 但是为了方便, 习债上我们还是把方程 $ax = b(a = 0)$ 叫做一元一次方程, 并把方程

$$ax = b$$

叫做一元一次方程的一般形式.

**例 11** 解关于 $x$ 的方程 $ax - b = cx + d$, 并且加以讨论.

**[解]** 移项并且整理后, 得

$$(a-c)x = b + d.$$

讨论:

(1) 如果 $a \neq c$, 那末 $a - c \neq 0$, 所以这个方程有一个解, 这个

解是 $x=\dfrac{b+d}{a-c}$.

(2) 如果 $a=c$,$b=-d$, 那末 $a-c=0$,$b+d=0$, 所以这个方程有无限多个解.

(3) 如果 $a=c$,$b=-d$, 那末 $a-c=0$,$b+d\neq 0$, 所以这个方程没有解.

**例 12** 解关于 $y$ 的方程:

$$\frac{y-b}{a}=2-\frac{y-a}{b}\quad (a+b\neq 0).$$

**[审题]** 根据题意,$a$ 和 $b$ 都不能等于零 (因为如果 $a$ 或者 $b$ 等于零, 分式 $\dfrac{y-b}{a}$ 或者 $\dfrac{y-a}{b}$ 就没有意义, 那末原方程也就没有意义), 因此,$ab\neq 0$.

**[解]** 去分母 (方程两边都乘以 $ab$), 得

$$b(y-b)=2ab-a(y-a).$$

去括号, 得 $$by-y^2=2ab-ay+a^2.$$

移项, 得 $$ay+by=a^2+2ab+b^2.$$

合并同类项, 得 $(a+b)y=(a+b)^2$,

因为 $a+b\neq 0$, 方程的两边都除以 $(a+b)$, 得

$$y=a+b.$$

## 习 题 1.5 (5)

1. 由等式 $ad=bc$($a$,$c$,$d$ 都不等于零),(1) 用 $b$,$c$,$d$ 表示;(2) 用 $a$,$b$,$d$ 表示 $c$;(3) 用 $a$,$b$,$c$ 表示 $d$.

   [解法举例:(1) 把 $a$ 看做未知数,$b$,$c$,$d$ 看做已知数, 那末这个等式可看做关于 $a$ 的一元一次方程. 两边都除以 $d$, 得 $a=\dfrac{bc}{d}$.]

2. 在等式 $v=\dfrac{s}{t}$ 中,$v$ 表示速度,$s$ 表示走过的距离,$t$ 表示行走的时间. 设 $v$ 和 $t$ 都是已知数, 求 $s$.

解下列关于 $x$ 的方程 (3□11):

3. $3a+4x=7x-6b$.　　　　4. $(n-1)x=n(n+x)$.

5. $(m+1)(x-1)=(m-1)(x+1)$.

6. $3ax+b=2ax+c \quad (a\neq 0)$.

7. $mx-n=2x-3 \quad (m\neq 2)$.

8. $a(x-a)=b(x-b) \quad (a\neq b)$.

9. $3cx-5a+b-2c=6b-(a+3bx+2c) \quad (b\neq -c)$.

10. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x$.

11. $\left(x+a^2\right)\left(x+b^2\right)=(x+ab)^2 \quad (a\neq b)$.

12. (1) 由 $v=v_0+at$, 用 $v$,$v_0$,$a$ 表示 $t$;

(2) 由 $v^2=2as$, 用 $v$,$a$ 表示 $s$;

(3) 由 $F=\dfrac{f\cdot m_1m_2}{r^2}$, 用 $F$,$f$,$m_1$,$r$ 表示 $m_2$.

13. 解下列各方程:

(1) $y=mx+b$,$x$ 是未知数,$m\neq 0$;

(2) $ax+by+c=0$,$y$ 是未知数,$b\neq 0$;

(3) $s=vt+\dfrac{1}{2}at^2$,$v$ 是未知数,$t\neq 0$;

(4) $s=vt+\dfrac{1}{2}at^2$,$a$ 是未知数,$t\neq 0$.

解下列各方程, 方程中 $x$,$y$,$z$,$t$ 是未知数 (14□19):

14. $x-\dfrac{x}{a}=a \quad (a\neq 1)$.

15. $y+\dfrac{my}{n}=m+n \quad (m+n\neq 0)$.

16. $\dfrac{t}{a}-b=\dfrac{t}{b}-a \quad (a\neq b)$.　　　17. $\dfrac{a+bz}{a+b}=\dfrac{a+dz}{c+d} \quad (ad\neq bc)$.

18. $\dfrac{t}{a-b}-\dfrac{3}{a+b}=\dfrac{2bt}{a^2-b^2}\quad(a\neq b)$.

19. $\dfrac{x-n}{ac}+\dfrac{x-n}{bc}=\dfrac{x-n}{ab}\quad(a+b\neq c)$.

20. 解关于 $x$ 的方程 $\dfrac{x}{m}-\dfrac{x}{n}=1$, 并且加以讨论.

## 1.6　列出方程解应用题

上一节里, 我们已经学过一元一次方程的解法, 现在应用解方程的方法来解决一些实际问题.

我们看下面的例子:

**例 1** 某数的 $2$ 倍减去 $1$ 等于这个数加上 $5$, 求某数.

**[审题]** 现在要求某数, 我们就用字母 $x$ 表示这个某数, 那末, 某数的 $2$ 倍就是 $2x$; 某数的 $2$ 倍减去 $1$ 就是 $2x-1$; 这个数加上 $5$ 就是 $x+5$. 再根据已知条件"某数的 $2$ 倍减去 $1$ 等于这个数加上 $5$"这个相等关系, 就可以列成等式:

$$2x-1=x+5.$$

解这个方程, 求得 $x$ 的值, 就是某数.

**[解]** 设某数是 $x$.

因为某数的 $2$ 倍减去 $1$ 等于这个数加上 $5$, 所以根据这个相等关系, 可以列出方程:

$$2x-1=x+5.$$

解这个方程,$2x-x=5+1$,

$$\therefore\quad x=6.$$

**[检验]** 某数的 $2$ 倍减去 $1$ 是 $11$, 某数加上 $5$ 是 $11$, 恰巧相等, 所以 $x=6$ 是本题的解.

答: 某数是 $6$.

**[注意]** 1. 解应用题, 最后必须写出答语.

2. 为了检验解题有没有错误，可以把求得的结果根据题意加以验算，看是否正确.

从这里可以看出，用代数方法来解应用问题有这样一个方便，就是，如果用字母表示了问题中要求的量，那末根据所给的条件 (就是题中的数量关系)，可以写出与要求的量有关的一些代数式；再根据一个相等关系，就可以列出一个等式.

**例 2** 某农具厂计划生产新式农具 $141$ 件，现在已经生产了 $19$ 件，其余的要在 $15$ 天以内完成，平均每天应当生产多少件？

**[审题]** 如果设平均每天生产 $x$ 件，那末，$5$ 天就能生产 $5x$ 件，连同已经生产的 $19$ 件，就是原计划生产的总件数.

**[解]** 设平均每天生产 $x$ 件.

因为原计划生产 $144$ 件，所以可以列出方程:

$$5x+19=144.$$

解这个方程，$5x=144-19$，

$$\therefore \quad x=25.$$

检验 (略).

答：平均每天应当生产 $25$ 件.

**例 3** 一种小麦磨成面粉后，重量要减少 $15\%$. 现在要得到 $4250$ 斤面粉，需要多少斤小麦？

**[审题]** 重量减少 $15\%$，就是每 $100$ 斤重量要减少 $15$ 斤，也就是每 $1$ 斤重量要减少 $\dfrac{15}{100}$ 斤. 如果设需要 $x$ 斤小麦，那么磨成面粉后，重量要减少 $\dfrac{15}{100}x$ 斤. 因此，磨成的面粉的重量就是 $\left(x-\dfrac{15}{100}x\right)$ 斤，这个数量应当等于 $4250$ 斤.

**[解]** 设需要 $x$ 斤小麦，根据题意得

$$x-\frac{15}{100}x=4250.$$

解这个方程,$\dfrac{85}{100}x = 4250$,

$$\therefore \quad 5000.$$

检验 (略).

答: 需要 5000 斤小麦.

**例 4** 有两个卫生宣传队, 第一队有 32 人, 第二队有 19 人. 能不能从第一队调几人到第二队, 使两队的人数相等?

**[解]** 设从第一调 $x$ 人到第二队. 那末,

第一队调出 $x$ 个后, 还剩 $(32 - x)$ 人;

第二队调来 $x$ 个后, 就有 $(19 + x)$ 人.

因为经过调动后, 两队人数相等, 所以

$$32 - x = 19 + x.$$

解这个方程,$-2x = -13$,

$$\therefore \quad x = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

验算后, 知道 $6\dfrac{1}{2}$ 是所列方程的解.

但是人数不可能是分数, 现在 $x = 6\dfrac{1}{2}$ 就不符合实际意义. 所以这个应用题没有解.

答: 不论从第一队调多少人到第二队, 两队的人数总不会相等.

通过这个例题, 我们可以理解到: 列出方程来解应用题的时候, 从方程所求得的解不一定都符合应用题的要求, 我们必须根据实际意义来判定这个应用题有解还是没有解.

列方程解应用题, 应该检查求得的未知数的值是不是合理, 如果合理, 就写出答案, 如果不合理, 就说明应用题没有解.

从上面所讲的四个例子, 我们可以看到, 列出一元一次方程解应用题的一般步藤是:

(1) 仔细看清题意, 看哪些是已知数, 哪些是未知数, 它们之间有什么关系.

(2) 选择一个适当的未知数, 用字母 $x$(也可以用其他字母) 来表示它, 根据题目里所说的已知数与未知数之间的关系, 用 $x$ 的代数式来表示其他的未知数.

(3) 利用 (2) 中没有用过的等量关系, 列出方程.

(4) 解所得的方程, 求出未知数的值, 并且进行验算.

(5) 根据方程的根, 得出题目里所求的未知数的值, 并且检查求得的值是不是合理, 如果合理, 就写出答案 (包括单位名称), 如果不合理, 就说明应用题没有解.

**习 题 1.6 (1)**

1. 如果从 $33$ 里减去一个数的 $2$ 倍就得到 $7$, 求这个数.
2. 一个数的 $8$ 倍加上 $10$ 等于这个数的 $10$ 倍减去 $8$, 求这个数.
3. 某数与 $4$ 的和的平方等于其数减去 $6$ 所得差的平方, 求某数.
4. 某机器制造厂, 今年平均每月生产抽水机 $80$ 台, 比去年平均每月产量的 $1.5$ 倍少 $13$ 台. 去年平均每月生产多少台?
5. 把黄豆发成豆芽后, 重量可以增加 $7.5$ 倍. 要得到 $3400$ 斤这样的豆芽, 需要多少斤黄豆?
6. 某钢铁厂要用含铁量是 $58.8\%$ 的矿石炼出 $3000$ 吨铁, 需用这种矿石多少吨 (精确到 $10$ 吨)?
7. 酒精加水稀释后, 得到的一种酒精溶液的体积是原来酒精的体积的 $4.5$ 倍, 现在要得到这样的酒精溶液 $900$ 毫升, 需要酒精多少毫升?
8. 甲工厂有某种原料 $120$ 吨, 乙工厂有同样原料 $96$ 吨, 现在每天甲厂用原料 $15$ 吨, 乙厂用原料 $9$ 吨, 多少天以后, 两厂剩下的原料相等?

9. 甲水槽里有水 $34$ 升，乙水槽里有水 $8$ 升，现在向两个水槽里灌的水，都是每分钟 $2$ 升，多少分钟以后，甲槽里的水是乙槽里的水的 $3$ 倍？

10. 甲仓存粮 $32$ 吨，乙仓存粮 $57$ 吨. 甲仓每天存人 $4$ 吨，乙仓每天存入 $9$ 吨. 几天以后，乙仓的存粮是甲仓的 $2$ 倍？

11. 一个正数的 $3$ 倍加上 $16$ 等于 $4$. 求这个正数.

[提示: 注意这个数是正数.]

**例 5** 甲、乙两站间的距离是 $189$ 公里. 一列快车和一列慢车同时分别从甲、乙两站出发，相向而行. 快车每小时走 $72$ 公里，慢车每小时走 $54$ 公里，两车出发后几小时相遇？

**[审题]** 设两车在丙地相遇 (图 1.1)，这时快车从甲站到丙地的路程，加上慢车从乙站到丙地的路程，正好是甲、乙两站之间的全部路程.

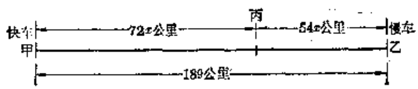



图 1.1

**[解]** 设两车出发后 $x$ 小时相遇. 那末快车走了 $72x$ 公里，慢车走了 $54x$ 公里，它们的和应当等于 $189$ 公里. 所以

$$72x + 54x = 189.$$

解这个方程，$126x = 190$,

$$\therefore \quad x = 1.5.$$

答: 两车出发后 $1.5$ 小时相遇.

**[说明]** 为了清楚地看出题中的数量关系，利用图来表示 (图 1.1)，可以帮助我们分析理解，列出方程. 这是分析应用题时一种常用的方法.

**例 6** 一队学生，去农村劳动，用每小时 $4$ 公里的速度步行前去. 出发 $20$ 分钟后，学校有紧要事情需告诉队长. 通讯员骑自行车

用每小时 $14$ 公里的速度追上去, 通讯员要多少小时才能追上学生队伍?

**[审题]** 设通讯员追上学生队伍需要 $x$ 小时. 那末, 通讯员每小时走 $14$ 公里,$x$ 小时共走 $14x$ 公里; 学生队伍每小时走 $4$ 公里, 在前 20 分钟已经走了 $4\times\dfrac{20}{60}$ 公里.$x$ 小时又可走 $4x$ 公里, 所以总共走了 $4\left(\dfrac{20}{60}+x\right)$ 公里.

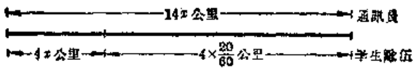



图 1.2

通讯员追上学生队伍时, 他所走的路程, 应该和学生队伍所走的路程相等.

**[解]** 设通讯员追上学生需要 $x$ 小时, 根据题意, 得

$$14x=4\left(\frac{20}{60}+x\right).$$

解这个方程,$7x=\dfrac{2}{3}+2x$,$5x=\dfrac{2}{3}$,

$$\therefore\quad x=\frac{2}{15}.$$

答: 通讯员需要 $\dfrac{2}{15}$ 小时, 就是 $8$ 分钟才能追上学生队伍.

**[说明]** 本题中, 步行的速度与自行车的速度都是每小时若干公里, 而已知的时间却是 $20$ 分钟, 所以解题时必须化成同一单位. 因此, 把 $20$ 分钟化成 $\dfrac{20}{60}$ 小时.

## 习题 1.6 (2)

1. 挖一条长 $1210$ 米的水渠, 由甲乙两生产队从两头同时施工. 甲队每天挖 $150$ 米, 乙队每天挖 $90$ 米, 要几天水渠才能挖好?

2. 一条街长 $1670$ 米, 甲、乙两个学生从街的两头同时相向而行, 甲骑自行车每小时走 $21$ 公里, 乙步行, 经过 $4$ 分钟后两人相遇, 求乙每小时步行多少公里.

3. 有一架飞机, 最多能在空中连续飞行 $4$ 小时, 飞出时候的速度是每小时 $600$ 公里, 飞回时候的速度是每小时 $550$ 公里, 这架飞机最远飞出多少公里就应该飞回来?

4. 两辆卡车装运棉花从产地开往仓库, 第一辆卡东的速度是每小时 $40$ 公里, 开出半小时后, 第二辆卡车也从产地开出, 它的速度是每小时 $550$ 公里, 结果两车同时到达仓库. 求产地和仓库之间的距离.

5. 甲、乙两站间的距离 $284$ 公里. 一列慢车从甲站开往乙站, 每小时走 $48$ 公里; 慢车走了 $1$ 小时后, 另有一列快车从乙站开往甲站, 每小时走 $70$ 公里. 快车出发后几小时与慢车相遇?

6. 甲、乙两站相距 $360$ 公里, 一列慢车从甲站开出, 每小时走 $48$ 公里; 一列快车从乙站开出, 每小时走 $72$ 公里.
   (1) 两列火车同时开出, 相向而行, 多少小时后相遇?
   (2) 快车先开 $25$ 分钟, 两车相向而行, 在快车开出后几小时相遇?

7. 甲、乙两人骑自行车, 同时从相距 $65$ 公里的两地相向而行,$2$ 小时后相遇, 已知甲比乙每小时多走 $2.5$ 公里, 求乙每小时走多少公里?

8. 一人骑自行车认甲地去乙地联系工作, 工作 $1$ 小时, 然后

步行回甲地，他来回连工作共花 $5$ 小时，自行车每小时走 $12$ 公里，步行每小时走 $5$ 公里，问甲地距乙地几公里？

**例 7** 一块农田要整地，由甲小队独做，$3$ 小时可以完成，乙小队独做 $6$ 小时可以完成，两小队合做，几小时可以完成？

**[解]** 设两小队合做 $x$ 小时完成.

甲小队独做，$3$ 小时完成全部工作，那末每小时做全部工作的 $\frac{1}{3}$，所以 $x$ 小时做了全部工作的 $\frac{1}{3}x$.

乙小队独做，$6$ 小时完成全部工作，那末每小时做全部工作的 $\frac{1}{6}$，所以 $x$ 小时做了全部工作的 $\frac{1}{6}x$.

因为两小队合做 $x$ 小时，全部工作完成；所以

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x=1.$$

解这个方程，$2x+x=6.3x=6$，

$$\therefore \quad x=2.$$

答：两小队合做，$2$ 小时完成.

**[说明]** 全部工作是一件完整的工程，看做是 $1$. 因此，甲小队每小时做了全部工作的 $\frac{1}{3}$. 以后类似这样的工程问题，都可以把全部工程作为 1.

**例 8** 某生产队要用含氨的氨水进行油菜追肥，现有含氨 $0.15\%$ 的氨水 $30$ 斤，配制时需要加水多少斤？

**[审题]** 氨水加水后，重量和浓度都发生了变化，但是氮水中所含氨的重量没有变化，也就是有等量关系：

$$\text{加水前氨的重量}=\text{加水后氨的重量}.$$

**[解]** 设需要加水 $x$ 斤. 那末，加水前含氧的重量是 $30\times 16\%$ 斤；加水 $x$ 斤后，氨水重量是 $(30+x)$ 斤，它的浓度是 $0.15\%$，因此氨水中备氨的重量是 $(30+x)\times 0.15\%$ 斤，因为氨水中含氨的重量不变，所以

$$(30+x)\times\frac{0.15}{100}=30\times\frac{16}{100}.$$

解这个方程,$0.15(30+x)=30\times 16$,

$$30+x=3200,\quad \therefore\quad x=3170.$$

答: 要加水 3170 斤.

## 习题 1.6 (3)

1. 一件工程, 甲队独做 10 天可以完成, 乙队独做 15 天可以完成. 两队合做多少天可以完成?
2. 一台机器的检修工作, 甲小组单独修 7.5 小时完成, 乙小组单独修 5 小时完成. 两组合修谣几小时完成.
3. 某池塘用三台抽水机抽水, 单用第一台抽水机,3 天就可以全部抽完, 单用第二台抽水机, 就需要 4 天, 单用第三合抽水机, 需要 6 天. 如果三台同时用, 几天可以全部抽完?
4. 一个蓄水池装有甲、乙、丙三个进水管, 单独开放甲管,45 分钟可以注满全池; 单独开放乙管,60 分钟可以注满全池; 单独开放丙管,90 分钟可以注满全池. 如果三管一齐开放, 几分钟可以注满全池?
5. 有含盐 15% 的盐水 20 公斤, 要使盐水含盐 10%, 需要加水多少公斤?
6. 有含盐 15% 的盐水 20 公斤, 要使盐水含盐 20%, 需要加盐多少公斤?
7. 某厂要配制浓度为 10% 的硫酸溶液 2940 公斤, 需要浓度为 98% 的硫酸溶液多少公斤?
8. 要把浓度为 95%的酒精溶液 600 克, 稀释成消毒用的浓度为 75% 的酒精溶液, 需加蒸馏水多少克?
9. 某生产队的试验田要喷洒 100ppm(ppm 是浓度单位, 表示百万分之一) 的“稻脚青”溶液, 在放 50 斤水的桶中, 应加入 20% 的“稻脚青”可湿性粉剂多少克 (精确到 1 克)?

10. 在 90 克食盐中, 要加入多少克水, 方能配制成浓度为 $15\%$ 的盐水?

上面几个应用题里, 所求的未知数都只有一个, 所以设这个未知数后, 就可以列出方程来. 如果应用题里所求的未知数有两个或者多于两个, 那末怎样设一个未知数, 使得仍能列出一元一次方程呢? 下面我们举例来说明.

**例 9** 两个数的和是 $8$, 它们的差是 $2$, 求这两个数.

**[审题]** 设较大的数是 $x$, 那末由于两个数的和是 $8$, 所以较小的数是 $8-x$.

再根据题意"它们的差是 $2$", 就可列出等式.

**[解]** 设较大的数是 $x$, 那末较小的数就是 $8-x$, 根据题意, 得

$$x-(8-x)=2.$$

解这个方程,$2x=10$,

$$\therefore \quad x=5.$$

较小的数是 $8-x$, 将所得的 $x$ 值代入, 得

$$8-x=8-5=3.$$

答: 这两个数是 $5$ 与 $3$.

**[注意]** 这个问题也可以设较小的数是 $x$, 那末较大的数是 $8-x$. 再利用差的关系, 得

$$(8-x)-x=2,$$

解这个方程, 同样可以求得两个数是 $5$ 和 $3$.

还可以设较大的数是 $x$, 利用差的关系, 那末较小的数是 $x-2$. 再利用和的关系列方程, 得

$$x+(x-2)=8.$$

也可以设较小的数是 $x$, 利用差的关系, 那末较大的数是 $x+2$. 再利用和的关系列方程, 得

$$(x+2)+x=8.$$

解这两个方程, 都可以求得两个数是 $5$ 与 $3$.

从上面这个例子, 我们可以看到:

列一元方程来解应用题, 如果题目中所求的未知数多于一个, 则可用一个字母表示其中任何一个未知数, 根据题中的条件, 用这个字母的代数式来表示其他的未知数, 然后, 再根据题中的另外条件, 列出方程. 求出这个未知数以后, 把它代入那些代数式, 就可求出另外的未知数.

**例 10** 汽车若干辆装运货物一批. 每辆装 $3.5$ 吨, 这批货物就有 $2$ 吨不能运走; 每辆装 $4$ 吨, 那末装完这批货物后, 还可以装其他货物 $1$ 吨. 汽车有多少辆? 这批货物有多少吨?

**[审题]** 设汽车有 $x$ 辆, 那末按每辆装 $3.5$ 吨计算,$x$ 辆汽车能装 $3.5x$ 吨货物, 这批货物就是 $(3.5x+2)$ 吨; 如果按每辆装 4 吨计算,$x$ 辆汽车可以装 $4x$ 吨, 但是装了其他货物 $1$ 吨, 所以这批货物就是 $(4x-1)$ 吨.

因为 $3.5x+2$ 和 $4x-1$ 都表示这批货物的吨数, 应该相等的, 这样就可列出一个方程.

**[解]** 设汽车有 $x$ 辆, 那末这批货物的吨数, 就是 $3.5x+2$, 也就是 $4x-1$. 所以

$$3.5x+2=4x-1.$$

解这个方程,$-0.5x=-3$,$\therefore x=6$.

代入 $4x-1$, 得 $4x-1=24-1=23$.

答: 汽车有 $6$ 辆, 这批货物有 $23$ 吨.

**[注意]** 也可以设这批货物有 $x$ 吨. 那末, 如果按每辆装 $3.5$ 吨计算, 汽车就有 $\dfrac{x-2}{3.5}$ 辆; 如果按每辆装 $4$ 吨计算, 汽车就有 $\dfrac{x+1}{4}$ 辆, 所以列出方程是 $\dfrac{x-2}{3.5}=\dfrac{x+1}{4}$.

虽然这应用题的解是一样的, 但是这样列方程比较麻烦, 解这个方程比较复杂, 计算的时候也比较困难.

从这个例子, 我们可以看到:

利用一元方程解应用题的时候，如果题目中的未知数多于一个，用字母表示哪一个未知数，就要看列方程是否容易，列出的方程是否简单，计算的时候是否简便来决定.

## 习题 1.6 (4)

1. 某班师生自制教具，一共做得数学和物理教具 $144$ 件，其中数学教具是物理教具的 $\frac{1}{2}$，问数学和物理教具各有多少件？
2. 第一个正方形的边长比第二个多 $10$ 厘米，它的面积比第二个多 $400$ 平方厘米，两个正方形的边长各是多少？
3. 煤油连桶重 $8$ 公斤，从桶中用去了一半煤油以后，连桶重 $4.5$ 公斤. 煤油和空桶各重多少公斤？
4. 在 $155$ 米的长度内装设 $25$ 根水管，一部分水管每根长 $5$ 米，另一部分每根长 $8$ 米，两种水管各要多少根？
5. 有货物一枇，共重 $39$ 吨，由载重 $6$ 吨和 $7.5$ 吨的驳船一次运走. 已知载重 $6$ 吨比载重 $7.5$ 吨的驳船多 $2$ 只，两种驳船各有多少只？
6. 用化肥若干斤给一块麦田追肥，每亩用 $6$ 斤，还差 $11$ 斤，每亩用 $5$ 斤，就多 $3$ 斤. 这块麦田有多少亩？用化肥多少斤？
7. 一个工人接到加工一批零件的任务，要求在规定时间内完成. 他打算每小时做 $10$ 个，就可以超过任务 $3$ 个，每小时做 $11$ 个，就可以提前 $1$ 小时完成. 他加工的零件是多少个？定多少小时完成？
8. 用两架掘土机掘土，第一架掘土机比第二架掘土机每小时多掘土 $40$ 立方米. 第一架工作 $16$ 小时，第二架工作 $24$ 小时，共掘土 $8640$ 立方米. 每架掘土机每小时可以掘土多少？

9. 两个水池共储水 $30$ 吨, 现在甲池用去水 $8$ 吨, 乙池注进水 $10$ 吨, 这样, 甲池的水就比乙池的水少 $12$ 吨, 原来两个水池各有水多少吨?

10. 一辆汽车在第一次旅程用去油箱里汽油的 $\frac{1}{4}$, 在第二次旅程中用去余下的汽油的 $\frac{1}{5}$, 这样油箱里还剩汽油 6 升. 油箱里原来有汽油多少升?

11. 一条铁丝, 第一次用去了它的一半少 $1$ 米, 第二次用去了剩下的一半多 $1$ 米, 结果还剩 $2.5$ 米. 这条铁丝原有多少长?

12. 长方形的长和宽的比是 $5:3$, 周长是 $96$ 厘米. 求这个长方形的面积.

**例 11** 某体育场的一条环行跑道长 $400$ 米, 甲练习长跑, 平均每分钟跑 250 米, 乙练习自行车/平均每分钟走 $550$ 米. 两人同时从同地同向出发, 经过多少分钟后两人又相遇?

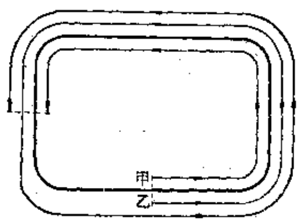



图 1.3

**[审题]** 因为两人从出发后到再相遇, 乙必须比甲多走一圈的路程 (图 1.3), 就是乙比甲多走 $400$ 米. 这就是说, 乙所走的路程比甲所走的路程多 $400$ 米.

**[解]** 设经过 $x$ 分钟后两人又相遇. 那末两人相遇时, 甲走了 $250x$ 米, 乙走了 $550x$ 米. 而实际上, 乙比甲多走了 $400$ 米, 所以

$$550x-250x=400.$$

解这个方程,$300x=400$,

$$\therefore\quad x=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

答: 经过 $1\frac{1}{3}$ 分钟后两人又相遇.

**例 12** 一艘轮船在甲、乙两地之间航行, 顺流行驶需要 $4$ 小时, 逆流行驶需要 $5$ 小时. 已知水流的速度是每小时 $2$ 公里, 求两地之间的距离.

**[审题]** 要解这个题目, 首先要理解顺流里航行的速度, 逆流里航行的速度, 静水里航行的速度和水流的速度之间的关系. 就是说, 顺流里航行的速度是静水里航行的速度加上水流的速度, 逆流里航行的速度是静水里航行的速度减去水流的速度.

现在用两种方法来解这个题目.

**[解 1]** 设甲、乙两地之间的距离是 $x$ 公里那末:

顺流里的速度是每小时 $\frac{x}{4}$ 公里, 已知水流的速度是每小时 $2$ 公里, 所以静水里的速度是每小时 $\left(\frac{x}{4}-2\right)$ 公里;

逆流里的速度是每小时 $\frac{x}{5}$ 公里, 水流速度是每小时 $2$ 公里, 所以静水里的速度是每小时 $\left(\frac{x}{5}+2\right)$ 公里.

因为静水里的速度是相同的, 所以 $\frac{x}{4}-2=\frac{x}{5}+2$.

$$5x-40=4x+40,$$

$$\therefore\quad x=80.$$

答: 甲、乙两地之间的距离是 $80$ 公里.

**[解 2]** 设轮船在静水里航行的速度是每小时 $x$ 公里. 那末:

顺流里航行的速度是每小时 $(x+2)$ 公里;

逆流里航行的速度是每小时 $(x-2)$ 公里;
顺流航行 4 小时, 共走 $4(x+2)$ 公里;
逆流航行 5 小时, 共走 $5(x-2)$ 公里.
因为甲、乙两地之间的距离是一定的, 所以

$$4(x+2)=5(x-2).$$

$$4x+8=5x-10, -x=-18,$$

$$\therefore \quad x=18.$$

用 $x=18$ 代入得

$$4(x+2)=4\times 20-80.$$

答: 甲、乙两地之间的距离是 80 公里.

从这个例子的两种解法, 我们可以看到:

在列方程解应用题时, 有时不直接设 $x$ 表示题中所要求的未知数, 而可间接设 $x$ 表示题中另外一个未知数, 通过这个未知数的值再求出题中所要求的结果.

应用这种方法, 有时比较容易列出方程, 解出结果来.

**例 13** 一个两位数, 它的十位上的数字比个位上的数字小 3, 十位上的数字与个位上的数字的和等于这两位数的 $\frac{1}{4}$, 求这个两位数.

**[解]** 设十位上的数字是 $x$, 那末, 个位上的数字是 $x+3$, 这个两位数是 $10x+(x+3)$, 十位上的数字与个位上的数字的和是 $x+(x+3)$. 根据题意, 得

$$x+(x+3)=\frac{1}{4}[10x+(x+3)].$$

解这个方程,$2x+3=\frac{1}{4}(11x+3)$,

$$8x+12=11x+3, \qquad -3x=-9,$$

$$\therefore \quad x=3.$$

用 $x=3$, 代人 $x+3$, 得

$$x+3=3+3-6.$$

答: 这个两位数是 36.

**[说明]** (1) 用代数式表示两位数要特别注意. 例如, 两位数 54, 实际上表示 $5\times10+4$, 因为十位上的数字 1, 就表示 10,2 表示 20 等等. 一般地说, 如果十位上的数字是 $a$, 个位上的数字是 $b$, 那末这个两位数是 $10a+b$, 不能写成 $ab$ 的形式. 因为代数式 $ab$ 只表示 $a$ 与 $b$ 的乘积, 它和 $10a+b$ 所表示的意义是绝然不同的. 决不能因为两位数 54 写成的形式"54"而产生误会.

同样, 如果有一个三位数, 它的百位上的数字是 $x$, 十位上的数字是 $y$, 个位上的数字是 $z$, 那末, 这个三位数应该写成 $100x+10y+z$.

(2) 在这个问题里, 如果直接设所求的两位数是 $x$, 就不好列式, 因此, 我们才设十位上的数是 $x$.

本题也可以设个位上的数是 $x$, 解法由读者自行完成.

## 习题 1.6 (5)

1. 甲、乙两人练习短距离赛跑, 甲每秒钟跑 7 米, 乙每秒钟跑 6.5 米.
   (1) 如果甲让乙先跑 5 米, 几秒钟后可以追及乙?
   (2) 如果甲让乙先跑 1 秒钟, 几秒钟后可以追及乙?
2. 某市举行环城自行车竞赛, 最快的人在出发后 35 分钟遇到最慢的人. 已知最慢的人的速度是最快的人的速度的 $\frac{5}{7}$, 环城一周是 6 公里, 两人的速度各是多少?
3. 甲、乙两个运动员在田径场竞走, 环跑道一周是 400 米, 乙的速度平均每分钟 80 米, 甲的速度是乙的 $1\frac{1}{4}$, 现在甲在乙的前面 100 米, 多少分钟后抿两人才能相遇?
4. 一个通讯员骑自行车在规定时间内把信件送到某地. 他每小时走 15 公里, 可以早到 24 分钟; 如果每小时走 12 公

里, 就要迟到 $15$ 分钟, 原定的时间是多少? 他去某地的路程有多远?

5. 工人甲接到做 $120$ 个零件的任务, 工作 $1$ 小时后, 因为要提前完成, 调来工人乙与甲合作, 再做 $3$ 小时就完成. 已知乙每小时比甲能多做 $5$ 个零件, 求甲、乙两工人每小时各做多少个零件.

6. 6. 一艘轮船, 航行于甲、乙两地之间, 顺水要 $3$ 小时, 逆水要 $3.5$ 小时, 已知轮船在静水里航行的速度是每小时 $26$ 公里, 求水流的速度.

7. 三个连续整数的和是 $15$, 它们的积是多少?

   [提示: 象 $2$,$3$,$4$ 或者 $7$,$8$,$9$ 等就是三个连续整数. 连续整数的特点是相邻两个数的差等于 $1$.]

8. 一个两位数的十位上的数是个位上的数的 $2$ 倍, 如果把十位上的数和个位上的数对调, 那末得到的数就比原数小 $36$. 求原来的两位数.

9. 三个连续偶数的和比其中最大的一个大 $10$, 这三个连续偶数的和等于多少?

   [提示: 象 $2$,$4$,$6$ 或者 $8$,$10$,$12$ 就是三个连续偶数. 连续偶数的持点是相邻两个数的差等于 $2$, 并且每个数都能被 $2$ 整除.]

**例 14** 某化学实验室有两种不同浓度的酒精, 甲种的浓度是 $90\%$, 乙种的浓度是 $75\%$. 现在要配成浓度是 $85\%$ 的酒精 $12$ 升, 两种酒精应该各取多少升?

**[解]** 设甲种酒精取 $x$ 升, 那末乙种酒精取 $(12-x)$ 升.

在 $x$ 升浓度是 $90\%$ 的酒精里, 含有纯酒精 $\dfrac{90}{100}x$ 升;

在 $(12-x)$ 升浓度是 $75\%$ 的酒精里, 含有纯酒精 $\dfrac{75}{100}(12-x)$

升;

在 $12$ 升浓度是 $85\%$ 的酒精里, 含有纯酒精 $\frac{85}{100} \times 12$ 升.

因为甲、乙两种酒精里所含纯酒精的总量, 应该等于浓度是 $85\%$ 的 $12$ 升酒精里所含纯酒精的量, 所以

$$\frac{90}{100}x + \frac{75}{100}(12 - x) = \frac{85}{100} \times 12.$$

解这个方程,$90x + 900 - 75x = 1020$,

$$15x = 120,$$

$$\therefore \quad x = 8.$$

代入 $12 - x$, 得

$$12 - x = 12 - 8 = 4.$$

答: 甲种酒精应取 $8$ 升, 乙种酒精应取 $4$ 升.

**例 15** 一种黑火药, 它所用的原料硝酸钾、硫磺、木炭的重量比是 $15:2:3$. 要配制这种火药 $160$ 斤, 三种原料应分别用多少斤?

**[审题]** 这个题目要求三个未知数, 如果用 $x$ 表示其中一种原料的斤数, 再用 $x$ 的代数式来表示其余两种原料的斤数, 就比较麻烦. 我们知道, 三种原料的重量比是 $15:2:3$, 就说明硝酸钾、硫磺、木炭的重量各占总重量的 $15$ 份、$2$ 份、$3$ 份. 如果设其中每一份的重量是 $x$ 斤, 那末三种原料的重量分别是 $15x$ 斤、$2x$ 斤、$3x$ 斤.

**[解]** 因为这三种原料重量的比是 $15:2:3$, 所以可设硝酸钾、硫磺、木炭的重量分别是 $15x$ 斤、$2x$ 斤、$3x$ 斤.

根据题意, 得 $15x + 2x + 3x = 160$,

解这个方程,$20x = 160$,

$$\therefore \quad x = 8.$$

所以 $$15x = 120; 2x = 16; 3x = 24.$$

答: 硝酸钾、硫横、木炭应分别用 $120$ 斤、$16$ 斤、$24$ 斤.

## 习题 1.6 (6)

1. 有银和铜的合金 $200$ 克, 其中含银 $2$ 份, 含铜 $3$ 份, 现在要改变合金的成分, 使它成为含银 $3$ 份, 含铜 $7$ 份, 应该再加入铜多少?

   [提示: 含银 3 份, 含铜 3 分, 就是合金里 $\frac{2}{5}$ 是银, $\frac{3}{5}$ 是铜.]

2. 某数学学习小组原来女同学的人数占全组人数的后来加入了 $4$ 个女同学, 女同学的人数就占全组人数的 $\frac{1}{2}$. 问该小组原来有多少个同学?

3. 有两种合金, 第一种含金 $90\%$, 第二种含金 $80\%$, 现在要制成含金 $82.5\%$ 的合金 $240$ 克, 应该每种各取多少克?

4. 甲种铁矿石含铁的百分数是乙种铁矿石含铁的百分数的 $1.5$ 倍. 甲种矿石 $5$ 份与乙种矿石 $3$ 份混合成的矿石含铁 $52.5\%$, 求各种矿石含铁的百分数.

5. 金放在水里称, 要减轻本身重量的 $\frac{1}{19}$, 银放在水里称, 要减轻本身重量的 $\frac{1}{10}$, 一块金和银的合金重 $530$ 克; 在水里称重量减轻 $35$ 克. 这块合金里含有金和银各多少克?

6. 甲、乙、丙三个生产队合修一条水渠, 计划出工 $52$ 人, 按照各队受益土地亩数的比 $3:4:6$ 出工. 三队各要出工多少人?

7. 配制一种农药, 其中生石灰、硫磺和水的重量的比是 $1:2:14$, 要配制这种农药 $2550$ 公斤, 各种原料分别需要多少公斤?

8. 有一种绝热的泥料, 它的组成物石棉丝、耐火粘土、细磨熟料的重量的比是 $3:7:10$. 现在要配成 $3000$ 公斤的绝热泥料, 三种原料各需要多少公斤?

9. 建筑工人在施工中，使用一种混凝上，是由水、水泥、黄沙、碎石搅拌而成的. 这四种原料的重量的比是 $0.7:1:2:4.7$. 搅拌这种混凝土 $2100$ 公斤，分别需要水、水泥、黄沙、碎石多少公斤?

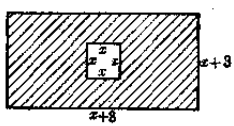
10. 甲、乙、丙三个生产队合修一条水渠，计划需派 $130$ 人. 根据各队的具体情况，甲队出的人数是乙队出的人数的 $1.5$ 倍，乙队出的人数是丙队出的人数的 $2$ 倍. 求各队应分别出多少人.

11. 有甲、乙、丙三种材料混在一起，甲与乙的重量的比是 $3:2$，乙与丙的重量的比是 $3:2$，如这种材料共有 $380$ 吨，三种材料各有几吨?

12. 长方形的长是宽的 $2$ 倍，如果宽增加 $3$ 厘米，那末长方形的面积就增加 $24$ 平方厘米. 这个长方形原来的面积是多少?

13. 如果一个长方形的长减少 $4$ 厘米，而宽增加 $7$ 厘米，就成了一个正方形，并且这个正方形的面积比长方形的面积大 $100$ 平方厘米. 求这个长方形的长和宽.

14. 因加工需要在长方形铁板的中央开一个正方形的口，口一边的长比铁板的长少 $8$ 厘米，比铁板的宽少 $3$ 厘米，这样，铁板的面积就剩下 $68$ 平方厘米. 求原来铁板的面积.




(第 14 题)

15. 收割一块麦地，每小时收割 $4$ 亩，预计若干小时完成，收割了 $\dfrac{2}{3}$ 以后，改用新式农具，工作效率提高到原来的 $1\dfrac{1}{2}$

倍, 因此比预定时间提早 $1$ 小时完成. 这块麦地的面积是多少?

# 1.7 分式方程

## 1. 分式方程的意义

我们来看下面这个问题:

某生产队收割全部夏收作物, 共需要 $12$ 天. 由于学生下乡参加夏收, 和农民一起劳动, 结果只用了 $8$ 天全部收割完毕. 问学生单独去完成这项夏收任务需要几天?

设学生单独劳动需要 $x$ 天才能完成, 那末每天能完成全部任务的 $\frac{1}{x}$.

农民单独劳动需要 $12$ 天, 所以每天能完成任务的 $\frac{1}{12}$.

现在学生和农民一起劳动只需 $8$ 天, 所以每天能完成任务的 $\frac{1}{8}$.

根据题意, 可以列出方程:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}.$$

这个方程, 分母中含有未知数, 和我们前面所学过的方程不同.

分母中含有未知数的方程叫做**分式方程**. 例如, $\frac{5}{x}=2$, $\frac{1}{x-3}+2=\frac{7-x}{x-3}$, $\frac{1}{1-x^2}=\frac{3}{1-x}-\frac{5}{1+x}$ 等都是分式方程.

## 2. 可以化为一元一次方程来解的分式方程的解法

有些分式方程, 只要把方程的两边都乘以同一个含有未知数的整式, 就能变形成为一个一元一次方程, 然后解这个一

元一次方程, 就可以找到原来分式方程的解. 下面我们举例来说明.

**例 1** 解上面问题中的方程:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}.$$

**[解]** 因为各分式的最简公分母是 $24x$, 所以方程两边都乘以 $24x$, 使它变形成为整式方程, 得 $24+2x=3x$.

解这个方程,$-x=-24$,

$$\therefore \quad x=24.$$

**[检验]** 把 $x=24$ 代入原方程,

$$左边=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}=右边,$$

$$\therefore \quad x=24 \text{ 是原方程的根.}$$

**[说明]** 检验时, 必须把求得的 $x$ 的值代入原分式方程, 不能代入变形后所得的整式方程.

**例 2** 解方程:

$$\frac{5}{x-1}=\frac{1}{x+3}.$$

**[解]** 方程两边都乘以 $(x-1)(x+3)$, 得

$$5(x+3)=x-1,$$

解这个方程,$5x+15=x-1$,$4x=-16$,

$$\therefore \quad x=-4.$$

**[检验]** 把 $x=-4$ 代入原方程:

$$左边=\frac{5}{-4-1}=-1, \quad 右边=\frac{1}{-4+3}=-1.$$

$$\because \quad 左边=右边,$$

$$\therefore \quad x=-4 \text{ 是原方程的根.}$$

**习题 1.7 (1)**

解下列各方程:

1. $\dfrac{3}{x-1}=5$.

2. $\dfrac{7x}{x+2}-2=0$.

3. $1-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{5-x}{x-4}$.

4. $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2-x}{2+x}=3$.

5. $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{5}{x}$.

6. $\dfrac{x}{x-5}=\dfrac{x-2}{x-6}$.

7. $\dfrac{9}{2y-1}=\dfrac{2}{3y+10}$.

8. $\dfrac{y+1}{y-1}=\dfrac{y-5}{y-3}$.

9. $\dfrac{9x-7}{3x-2}-\dfrac{4x-5}{2x-3}=1$.

10. $\dfrac{6x-1}{3x+2}-\dfrac{4x-7}{2x-5}=0$.

**例 3** 解下列方程:

(1) $\dfrac{1}{x-3}+2=\dfrac{7-x}{x-3}$;　　(2) $\dfrac{1}{x-3}+2=\dfrac{4-x}{x-3}$.

**[解]** (1) 方程两边都乘以 $x-3$, 得

$$1+2(x-3)=7-x.$$

解这个方程,$3x=12$,

$$\therefore\quad x=4.$$

**[检验]** 把 $x=4$ 代入原方程:

左边 $=\dfrac{1}{4-3}+2=3$,　右边 $=\dfrac{7-4}{4-3}=3$.

$\because$　左边 $=$ 右边,　$\therefore$　$x=4$ 是原方程的根.

(2) 方程两边都乘以 $x-3$, 得 $1+2(x-3)=4-x$.

解这个方程, 得 $x=3$.

如果把 $x=3$ 代入原方程, 分式 $\dfrac{1}{x-3}$ 和 $\dfrac{4-x}{x-3}$ 的分母都等于零, 这些分式就没有意义, 所以 $x=3$ 不是原方程的根, 也就是说, 原方程没有根.

　　这是怎么一回事呢? 难道我们的解法有错误吗? 不, 解法没有错误. 下面就来研究这个问题.

我们把 (1)、(2) 两题来对比一下, 在第 (1) 题中, 把 $x=4$ 代人变形后的方程 $1+2(x-3)=7-x$ 两边是相等的; 把 $x=4$ 代入原方程中, 两边也是相等的. 因此,$x=4$ 既是原方程的根, 也是变形后的方程的根, 但是在第 (2) 题中, 把 $x=3$ 代入变形后的方程 $1+2(x-3)=4-x$, 两边是相等的, 所以 $x=3$ 是变形后的方程的根. 而把 $x=3$ 代入原方程, 分式就没有意义, 所以不是原方程的根, 这个事实告诉我们, 方程的两边都乘以同一个含有未知数的整式, 有时所得的整式方程的根就是原方程的根, 而有时所得的根却不是原方程的根.

这种解变形后的方程得出来的不适合于原方程的根叫做**增根**.

为什么会产生增根呢? 先来看第 (1) 题, 在去分母的时候, 我们是用整式 $x-3$ 去乘原方程的两边. 因为在 $x=4$ 的时候, 整式 $x-3$ 不等于零, 也就是说. 我们只是用不等于零的同一个数去乘方程的两边, 根据方程的第二个基本性质, 所得的方程和原方程是同解方程, 所以所得的方程的根和原方程的根完全一样. 但是, 在第 (2) 题中, 我们用来乘原方程两边的, 虽然也是整式 $x-3$, 但由于当 $x=3$ 时,$x-3=0$, 所以实际上是用 $0$ 去乘原方程的两边, 因此, 变形后的方程和原方程的根就不一样.$x=3$ 只是变形后的方程的根, 不是原方程的根, 这样就产生了增根.

从上面所说的, 我们可以看到:

如果方程的两边都乘以同一个整式, 就可能产生增根.

因此, 在解分式方程的时候, 我们必须把解变形后的方程所得的根代入原方程, 进行检验, 如果适合的, 才是原方程的根; 如果不适合的, 就是增根, 应该把它去掉.

从上面所说的可以知道, 凡是把求得的根代入原方程时, 使分式的分母等于零的, 这个根就是增根. 因此, 检验时为了

简便起见, 也可以把求得的根代入方程两边所乘的整式中去检验: 只要在解的过程中不发生错误, 那末如果它的值不是零, 所得的根, 就是原方程的根; 如果它的值等于零, 所得的根, 就是增根.

**例 4** 解方程:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{3}{1-x}-\frac{5}{1+x}.$$

**[解]** 因为各分式的最简公分母是 $1-x^2$, 所以方程的两边都乘以 $1-x^2$, 得 $1=3(1+x)-5(1-x)$.

解这个方程,$1=3+3x-5+5x$,$-8x=-3$,

$$\therefore \quad x=\frac{3}{8}.$$

因为把 $x=\frac{3}{8}$ 代入整式 $1-x^2$ 所得的值不等于零, 所以 $x=\frac{3}{8}$ 是原方程的根.

(1) 用一个适当的整式 (通常取各分式的最简公分母) 乘方程的两边, 使它变形成为一个整式方程.

(2) 解所得的整式方程.

(3) 把所求得的根进行检验, 如果适合的, 就是原方程的根; 如果使原方程失去意义 (即某些分母等于 0), 就是增根, 应该去掉.

**解分式方程的一般步骤**

**例 5** 解方程:

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=0.$$

**[解]** 两边都乘以分式的最简公分母 $x(x-1)$, 得

$$3(x-1)+6x-(x+5)=0.$$

解这个方程,$8x-8=0$,

$$\therefore \quad x=1.$$

**[检验]** 把 $x=1$ 代入 $x(x-1)$, 它的值等于 $0$, 所以 $x=1$ 不是原方程的根.

$$\therefore\quad \text{原方程没有根.}$$

**例 6** 解方程:

$$\frac{2}{x^2+5x+6}+\frac{3}{x^2+x-6}=\frac{4}{x^2-4}.$$

**[审题]** 先要把各分式的分母分解因式, 再求出分式的最简公分母.

**[解]** 原方程变成

$$\frac{2}{(x+2)(x+3)}+\frac{3}{(x-2)(x+3)}=\frac{4}{(x+2)(x-2)}.$$

两边都乘以最简公分母 $(x+2)(x-2)(x+3)$, 得

$$2(x-2)+3(x+2)=4(x+3).$$

解这个方程:$2x-4+3x-6=4x+12$,

$$\therefore\quad x=10.$$

**[检验]** 把 $x=10$ 代入 $(x+2)(x-2)(x+3)$, 它的值不等于零, 所以 $x=10$ 是原方程的根.

## 习 题 1.7 (2)

解下列各方程 (1□11):

1. $\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{2-x}{2+x}=3.$

2. $\dfrac{10x}{2x-1}+\dfrac{5}{1-2x}=2.$

3. $\dfrac{2y+5}{3y-5}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5y-4}{2y-4}.$

4. $\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{6}{(x+1)(x-1)}.$

5. $\dfrac{1-3x}{1+3x}+\dfrac{3x+1}{3x-1}=\dfrac{12}{1-9x^2}.$

6. $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{x-3}{1-x}+1=0.$

7. $\dfrac{3}{1-y^2}=\dfrac{2}{1+2y+y^2}-\dfrac{5}{1-2y+y^2}.$

8. $5+\dfrac{96}{x^2-16}=\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x}$.

9. $\dfrac{1}{x^2-2x-3}+\dfrac{2}{x^2-x-6}+\dfrac{3}{x^2+3x+2}=0$.

10. $\dfrac{1-x}{1+x+x^2}+\dfrac{6}{1-x^3}=\dfrac{1}{1-x}$.

11. $\dfrac{7}{x^2-1}+\dfrac{8}{x^2-2x+1}=\dfrac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$.

[提示:$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)\big(x^2-1\big)$ $=(x-1)^2\times(x+1)$.]

12. (1) $x$ 是什么数值时, 代数式 $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}$ 的值是零;

(2) $x$ 是什么数值时, 代数式 $\dfrac{x}{6-2x}+\dfrac{11}{5}$ 和 $\dfrac{x-1}{x-3}$ 的值相等.

## 5. 含有字母系数的分式方程的解法

解含有字母系数的分式方程的步骤和解数字系数的分式方程的步骤一样, 但是要注意这些字母可以取的值有什么限制. 下面举例来说明.

**例 7** 解关于 $x$ 的方程:

$$\frac{1}{a}+\frac{a}{x}=\frac{1}{b}+\frac{b}{x}\quad(a\neq 0,b\neq 0,a\neq b).$$

**[解]** 两边都乘以 $abx$, 得 $bx+a^2b=ax+ab^2$.

解这个方程,

$$bx-ax=ab^2-a^2b,$$

$$(b-a)x=ab(b-a).$$

因为 $a\neq b$, $b-a\neq 0$, 两边都除以 $b-a$, 得

$$x=ab.$$

**[检验]** 把 $x=ab$ 代入整式 $abx$, 得到 $a^2b^2$. 因为 $a\neq 0$,$b\neq 0$, 所以 $a^2b^2\neq 0$.

$$\therefore\quad x=ab\text{ 是原方程的根.}$$

**例 8** 解关于 $x$ 的方程:

$$\frac{x+a}{b(x+b)}-\frac{x+b}{a(x+a)}=\frac{a+b}{ab}$$
$$(a\neq 0,b\neq 0,a\neq b).$$

**[解]** 两边都乘以最简公分母 $ab(x+a)(x+b)$, 得

$$a(x+a)^2+b(x+b)^2=(a+b)(x+a)(x+b).$$

整理后, 得

$$\left(a^2-2ab+b^2\right)=a^2b+ab^2-a^3-b^3,$$
$$(a-b)^2x=a^2(b-a)+b^2(a-b),$$
$$(a-b)^2x=(a-b)(b^2-a^2),$$
$$(a-b)^2x=-(a-b)^2(a+b).$$

因为 $a-b\neq 0$, 所以 $(a-b)^2\neq 0$, 两边都除以 $(a-b)^2$, 得

$$x=-(a+b).$$

**[检验]** 把 $x=-(a+b)$ 代入整式 $ab(x+a)(x+b)$, 它不等于零.

$$\therefore\quad x=-(a+b)\text{ 是原方程的根.}$$

## 习题 1.7 (3)

解下列关于 $x$ 的方程 (1□5):

1. $\dfrac{a+b}{x}=\dfrac{a}{b}+1\quad(b\neq 0,a+b\neq 0)$.

2. $\dfrac{x+m}{x-n}+\dfrac{x+n}{x-m}=2\quad(m+n\neq 0,m\neq n)$.

3. $\dfrac{x}{x+2a}-\dfrac{x}{x-2a}=\dfrac{a^2}{4a^2-x^2}\quad(a\neq 0)$.

4. $\dfrac{a}{x^2-2ax+a^2}-\dfrac{2}{a-x}=\dfrac{a^2}{4a^2-x^2}\quad(a\neq 0)$.

5. $\dfrac{a}{b}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)=1-\dfrac{b}{a}\left(1-\dfrac{b}{x}\right)\quad(a^3+b^3\neq 0)$.

6. 已知 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t$, 用 $a$、$b$、$c$、$d$、$t$ 来表示 $x \quad (a \neq ct)$.

7. 已知 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$, 推导出 $R=\dfrac{r_2}{1+\dfrac{r_2}{r_1}}$.

## 1.8 列出分式方程解应用题

在 §1.6 里, 我们已经学过列出一元一次方程来解应用题, 在实际问题中, 有时列出的方程可能是一个分式方程, 那就得应用分式方程来解.

下面我们看几个例子:

**例 1** 某农具厂新购一台自动化机床. 用自动化机床与旧机床同时加工一批零件, 共花了 $4.5$ 小时, 已知旧机床单独工作需要 $18$ 小时才能完成任务, 自动化机床单独工作需要几小时能完成? 自动化机床的效率是旧机床的几倍?

**[解]** 设自动化机床单独工作, 需要 $x$ 小时才能完成任务, 那末自动化机床每小时能完成任务的 $\dfrac{1}{x}$.

因为旧机床单独工作, 需要 $18$ 小时才能完成任务, 所以它每小时能完成任务的 $\dfrac{1}{18}$.

因为两台机床同时工作, 需要 $4.5$ 小时, 所以每小时能完成任务的 $\dfrac{1}{4.5}=\dfrac{2}{9}$.

根据题列出方程 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{2}{9}$.

两边都乘以最简公分母 $18x$, 得 $18+x=4x$.

解这个方程,$-3x=-18$,

$$\therefore \quad x=6.$$

把 $x=6$ 代入整式 $18x$, 它不等于 $0$, 所以 $x=6$ 是原方程的

根.

因为旧机床做同样的工作, 需要 $18$ 小时, 所以自动化机床的效率是旧机床的 $3$ 倍.

答: 自动化机床单独工作, 需要 $6$ 小时才能完成任务; 自动化机床的效率是旧机床的 $3$ 倍.

**例 2** 一个车工加工 $1500$ 个螺丝以后, 由于改进了操作方法和工具, 工作效率提高到原来的 $2\frac{1}{2}$ 倍, 因此再车 $1500$ 个螺丝时, 较前提早 $18$ 小时完成. 前后两种方法, 每小时各加工多少个螺丝?

**[解]** 设车工以前每小时能加工 $x$ 个螺丝, 那末加工 $1500$ 个螺丝, 需要 $\dfrac{1500}{x}$ 小时.

改进操作方法和工真后, 每小时能加工 $2\frac{1}{2}\times x=\frac{5}{2}x$ 个嫘丝, 那末加工 $1500$ 个螺丝, 需要 $\dfrac{1500}{\frac{5}{2}x}$ 小时.

因为后一次比前一次提早 $18$ 小时完成, 所以得到方程

$$\frac{1500}{x}-\frac{1500}{\frac{5}{2}x}=18.$$

就是 $$\frac{1500}{x}-\frac{600}{x}=18,\quad \frac{900}{x}=18,$$

把 $x=50$ 代入原方程, 知道 $x=50$ 是原方程的根.

把 $x=50$ 代入 $\frac{5}{2}x$, 得 $\frac{5}{x}x=125$.

答: 车工原来每小时能加工 $50$ 个螺丝; 改进后, 每小时能加工 $125$ 个螺丝.

**[说明]** 在解方程时，先把 $\dfrac{1500}{\frac{5}{2}x}$ 化成 $\dfrac{1500}{x}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{600}{x}$，这样，可以和分式 $\dfrac{1500}{x}$ 有相同的分母，运算就可以简便.

**例 3** 某生产大队离城市 $50$ 公里. 甲乘自行车从大队出发进城，出发 $1$ 小时 $30$ 分钟后，乙乘摩托车也从大队出发进城，结果乙比甲先到 $1$ 小时. 已知乙的速度是甲的速度的 $2.5$ 倍，求甲、乙两人的速度.

**[解]** 设甲的速度是每小时 $x$ 公里，那末乙的速度是每小时 $2.5x$ 公里；

因为大队离城市 $50$ 公里，所以甲从大队到城需要 $\dfrac{50}{x}$ 小时，乙从大队到城需要 $\dfrac{50}{2.5x}$ 小时.

因为甲早出发 $1$ 小时 $30$ 分钟 (即 $1.5$ 小时)，并且迟到 $1$ 小时，所以从大队到城，甲比乙多花了 $(1.5+1)$ 小时. 因此，可以列出方程

$$\frac{50}{x}=\frac{50}{2.5x}+1.5+1.$$

就是
$$\frac{50}{x}=\frac{20}{x}+\frac{5}{x}.$$

两边都乘以 $2x$，得 $100=40+5x$.

解这个方程，得 $x=12$.

把 $x=12$ 代入 $2x$，不等于 $0$，所以 $x=12$ 是原方程的根.

把 $x=12$ 代入 $2.5x$，得 $2.5x=2.5\times 12=30$.

答: 甲的速度是每小时 12 公里，
乙的速度是每小时 30 公里.

**[说明]** 注意把时间单位化成同一单位，所以 $1$ 小时 $30$ 分钟化成 $1.5$ 小时.

**例 4** 大小两部抽水机给一块池浇水, 两部合浇了 $2$ 小时以后, 由小抽水机继续独浇 $1$ 小时完成. 已知小抽水机独浇这块地所需的时间, 等于大抽水机独浇所需时间的 $1.5$ 倍, 求每部抽水机单独浇这块地各需要多少小时.

**[解]** 设大抽水机独浇要 $x$ 小时, 那末小抽水机独浇要 $1.5x$ 小时.

大抽水机每小时浇这块地的 $\frac{1}{x}$,$2$ 小时浇这块地的 $\frac{2}{x}$; 小抽水机每小时浇这块地的 $\frac{1}{1.5x}$, 共浇 $(2+1)$ 小时, 浇这块地的 $\frac{2+1}{1.5x}$.

因为它们合起来浇的地就是这一整块的地, 所以

$$\frac{2}{x}+\frac{2+1}{1.5x}=1.$$

化简后, 得

$$\frac{4}{x}=1,$$

$$\therefore \quad x=4.$$

答: 大抽水机独浇要 $4$ 小时, 小抽水机独浇要 $6$ 小时.

## 习 题 1.8

1. 把 $96$ 人分成甲乙两组, 使甲组人数和乙组人数的比等于 $3:5$, 两组各有多少人?
2. 一个车间加工 $720$ 个零件, 预计每天做 $48$ 个, 就能如期完成. 现在要提前 $5$ 天完成, 每天应该做多少个?
3. 国营农场一块地, 用一架拖拉机来耕,$4$ 天耕完一半, 后来增添了一架新式的拖拉机, 两架合作,$1$ 天就耕完了其余的一半. 新式拖拉机单独耕这块地, 需要几天? 新式拖拉机的效率是原来拖拉机的几倍?
4. 沿河有两个城市, 相距 $180$ 公里, 乘船顺水航行,$4$ 小时可以到达, 如果水流速度是每小时 $8$ 公里, 船在静水里每小时能行多少公里? 逆水回来需要多少小时?

5. 一架飞机顺风飞行 $1380$ 公里和逆风飞行 $1020$ 公里所需的时间相等. 已知这架飞机的速度是每小时 $360$ 公里, 求风的速度.

6. 甲、乙两地相距即公里, 一辆长途汽车从甲地开出 $3$ 小时后, 一辆小汽车也从甲地开出, 结果小汽车比长途汽车迟 $20$ 分钟到达乙地. 已知小汽车和长途汽车的速度的比是 $3:1$, 求小汽车和长途汽车的速度.

7. 甲、乙两个车工, 同时分别车 $1500$ 个螺丝. 乙改进了操作方法, 生产效率提高到等于甲的 $3$ 倍, 因此比甲少用 $20$ 个小时完工. 他们每小时各车多少个螺丝?

8. 甲、乙两个生产队共同耕完一块土地需要 $4$ 天. 如果由一个队单独来耕, 那末甲队需要的天数等于乙队的 $2$ 倍, 求甲、乙两队单独耕完这块土地所需的天数.

9. 一件工程要在计划的日期内完成, 如果甲总独做, 刚好能够完成. 如果乙单独做, 就要超过计划完成日期 $3$ 天. 现在由甲、乙两人合作 $2$ 天后, 剩下的工程由乙单独做, 刚好在计划日期完成, 计划的日期是几天?

   [提示: 计划日期的天数等于甲单独做所需的天数, 故可设甲单独做所需的天数是 $x$, 那末乙单独做所需的天数是 $x+3$.]

10. 甲乙丙三人合做一件工作 $12$ 天完成. 已知甲 $1$ 天完成的工作, 乙需要做 $1.5$ 天, 丙需要做 $2$ 天. 三人单独完成这件工作, 各需要多少天?

11. 稻田一块, 用甲乙两部水车浇水, 一共需要 $12$ 小时浇完. 如果用甲水车单独来浇需要 $20$ 小时, 用乙水车单独来浇需要多少小时?

12. 一个作业小组, 锄草 $15$ 亩以后, 因为增加了人数, 每小时

锄草的亩数等于原来的 $1.5$ 倍, 后来锄草 $20$ 亩的时间比原来锄草 $15$ 亩的时间少 $20$ 分钟. 原来每小时锄草多少亩?

# 本章提要

1. **几个重要的概念**　　等式, 恒等式, 方程, 方程的解, 解方程, 同解方程, 整式方程, 分式方程, 增根.

2. **方程的两个基本性质**

   (1) 方程的两边都加上 (或者都减去) 同一个数或者同一个整式, 所得的方程和原方程是同解方程;

   (2) 方程的两边都乘以 (或者都除以) 同一个不等于零的数, 所得的方程和原方程是同解方程.

3. **一元一次方程的解法**　　应用移项法则, 并且合并同类项, 把方程化简成 $ax = b$ 的形式, 再求出方程的解.

   方程 $ax = b$ 的解有三种情况:

   (1) 当 $a \neq 0$ 时, 方程有一个解 $\dfrac{b}{a}$;

   (2) 当 $a = 0$,$b \neq 0$ 时, 方程没有解;

   (3) 当 $a = 0$,$b = 0$ 时, 方程有无数个解.

4. **可以化为一元一次方程的分式方程的解法**.

   (1) 先把原方程变形成整式方程;

   (2) 解所得的一元一次方程;

   (3) 进行检验.

5. **列方程解应用题的一般步骤**

   (1) 审题, 要仔细阅读题目, 分析题意;

   (2) 设元和列出方程, 要选择适当的未知数设元, 再根据题意列出方程;

(3) 解方程，求出未知数的值；

(4) 检验并且写出答案.

# 复习题一 A

1. (1) 等式、恒等式和方程有什么区别？各例两个例子；

(2) 什么叫做方程的根？

2. 利用乘法公式，证明下列等式是恒等式：

(1) $(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)=a^8-b^8$；

[提示：先把开头两因式相乘，再依次与第三个、第四个因式相乘.]

(2) $(a+b)^3(a-b)^3=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4$.

[提示：$(a+b)^3(a-b)^3=[(a+b)(a-b)]^3$.]

3. 举例说明同解方程的意义和方程的两个基本性质.

4. 判别下列各题中的两个方程是不是同解方程：

(1) $3x+5=7x-1$ 和 $(3x+5)+(2x+1)=(7x-1)+(2x+1)$；

(2) $\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{y+2}{3}$ 和 $3(y-4)=5(y+2)$.

5. 解下列各方程：

(1) $3(x-7)-2\{9-3[9-4(2-x)]\}=22$；

(2) $\dfrac{5x+1}{6}+\dfrac{3x-1}{5}=\dfrac{9x+1}{8}-\dfrac{1-x}{3}$；

(3) $y-\dfrac{3}{17}(2y-1)=\dfrac{7}{34}(1-2y+\dfrac{10y-3}{x}$.

6. 解下列各方程：

(1) $(x-3)^2+(x-4)^2=(x-2)^2+(x+3)^2$；

(2) $(4x+5)(4x-5)=4(2x+3)^2-(100x-17)$.

7. 解下列各方程:

(1) $\dfrac{x+5}{x-1}-\dfrac{3x-3}{x+5}=\dfrac{8x+28}{x^2+4x-5}-2$;

(2) $\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{x-2}\right)^2=\dfrac{2x}{x-2}$;

(3) $\dfrac{3-x}{1-x}-\dfrac{5-x}{7-x}=1-\dfrac{x^2-2}{x^2-8x+7}$.

8. 解下列关于 $x$ 的方程:

(1) $\dfrac{x+1}{x+b}+\dfrac{x-1}{a-b}=\dfrac{2a}{a^2-b^2}\quad(a\neq 0)$;

(2) $\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\right)x=\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}-2x\quad(m+n\neq 0)$;

(3) $\dfrac{a^2-2x}{2x+1}-\dfrac{a^2+2x}{1-2z}=\dfrac{2\left(a^4-1\right)}{4x^2-1}$.

列出方程解下列应用题 (9□16):

9. 有两个修建队, 甲队有 $138$ 人, 乙队有 $98$ 人. 现因任务需要, 要求甲队人数是乙队人数的 $3$ 倍, 应认乙队抽调多少人到甲队?

10. 一生产队原有水田 $108$ 亩, 旱地 $54$ 亩. 现计划把一部分旱地改为水田, 使旱地只占水田的 $20\%$, 改为水田的旱地应是多少亩?

11. 甲、乙两站相距 $243$ 公里. 一列慢车由甲站开出, 每小时走 $52$ 公里; 同时, 一列快车由乙站开出, 每小时走 $70$ 公里; 两车同向而行, 快车在慢车的后面. 多少小时后快车可以追上慢车?

12. 一桶油连桶共重 $8$ 公斤, 油用去一半后, 连桶还重 $4.5$ 公斤. 原有油多少公斤?

13. 配制一种农药, 其中硫酸铜、生石灰、水的比是 $1:1.5:160$, 要配制这种农药 650 斤, 需要硫酸铜、生石灰、水各多少斤?

14. 一件工作, 由甲单独做 20 小时完成, 由乙单独做小时完成, 现在先由甲单独做 4 小时, 剩下的部分由甲、乙合做. 剩下部分需几小时完成.

15. 一根粗细相同的铜丝, 称出它重 132 公斤. 剪下 40 米后, 余下的铜丝重 121 公斤. 计算原来这根铜丝的长度.

16. 甲做 90 个机器零件所用的时间和乙做 120 个机器零件所用的时间相同. 已知两人每小时一共做 35 个机器零件, 两人每小时各做多少个?

## 复习题一 B

1. 1. 解下列各方程:

(1) $\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{7}(5x-6)+\frac{1}{5}(3x-4)=\frac{22x-63}{105}$;

(2) $\dfrac{1-\dfrac{1+\frac{1}{2}(1-x)}{3}}{4}=1$;

(3) $(x+5)^3+(x-5)^3=2(x+5)\left(x^2-5x+25\right)$;

(4) $\left(2x^2+3x-1\right)\left(2x^2-3x+4\right)=\left(x^2-1\right)\left(4x^2+1\right)$.

2. 解下列各方程

(1) $\frac{2y+3}{3y+3}+\frac{14y^2+2y-5}{15y^2-15}=\frac{8y+2}{5y-5}$;

(2) $\frac{6x+12}{x^2+4x+4}-\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}+\frac{x^2}{x^2-4}=0$.

[提示: 先约简分式, 再解方程.]

3．解下列各方程:

(1) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+6}{x+7}=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+6}$;

[解法举例: 本题如果一开始就去分母, 会得出很繁的方程, 采用下面做法, 可以简便.

因为 $\dfrac{x+1}{x+2}=1-\dfrac{1}{x+2}$, $\dfrac{x+6}{x+7}=1-\dfrac{1}{x+7}$, $\dfrac{x+2}{x+3}=1-\dfrac{1}{x+3}$, $\dfrac{x+5}{x+6}=1-\dfrac{1}{x+6}$, 所以原方程可以与成

$$1-\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x+7}=1-\frac{1}{x+3}+1-\frac{1}{x+6},$$

就是 $$-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+7}=-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}.$$

移项, 得 $$\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$$

两边分别通分, 得 $\dfrac{1}{x^2+13x+42}=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$.

去分母, 得

$$x^2+5x+6=x^2+13x+42, \quad \therefore \quad x=-\frac{9}{2}.]$$

(2) $\dfrac{x-8}{x-3}-\dfrac{x-9}{x-4}=\dfrac{x+7}{x+8}-\dfrac{x+2}{x+3}$;

(3) $\dfrac{x+7}{x+6}+\dfrac{x+9}{x+8}=\dfrac{x+10}{x+9}+\dfrac{x+6}{x+5}$.

4．解下列关于 $x$ 的方程, 并且加以讨论:

(1) $x+\dfrac{ax}{b}=a+b$;　　　(2) $\dfrac{m+n}{n}+2=\dfrac{x-n}{m}$.

列出方程解下列应用题 (5□15):

5．某工厂第一个车间的人数比第二个车间的人数的 $\dfrac{4}{5}$ 少 30

人. 如果从第二个车间调 $10$ 个人到第一个车间, 那末第一个车间的人就是第二个车间的人数的 $\frac{3}{4}$. 求原来每个车间的人数.

6. 一个拖拉机队用拖拉机耕一块地, 第一天耕的比这块地的 $\frac{1}{3}$ 多 $2$ 公顷, 第二天耕的比剩下的地的 $\frac{1}{2}$ 多 $1$ 公顷, 这时还剩下 $38$ 公顷没有耕. 这块地一共有多少公顷?
[说明:$1$ 公顷 $=100$ 公亩 $=15$ 市亩.$1$ 公亩 $=100$ 平方米.]
7. 要从含盐 $12.5\%$ 的盐水 $40$ 公斤里蒸发掉水分, 制出含盐 $20\%$ 的盐水来, 应该蒸发掉多少水?
8. 第一个正方形一边的长比第二个正方形一边的长多 $3$ 厘米, 而第一个正方形的面积比第二个正方形的面积多 $57$ 平方厘米, 求每个正方形的面积.
9. 甲、乙两工厂开展社会主义劳动竞赛, 原计划两厂共生产机床 $360$ 台, 现在生产了 $400$ 台. 已知甲、乙两厂分别比原计划超额 $12\%$ 和 $10\%$, 问甲、乙两工厂的原计划数和超额的机床台数.
10. 甲、乙两人, 各走 $14$ 公里, 甲比乙快半小时; 各走 $1$ 小时, 已知甲与乙速度之比是 $8:7$, 求两个的速度.
11. 一块地的播种工作, 甲、乙两人合作,$20$ 小时可以做完. 已知甲与乙速度之比是 $5:4$, 甲、乙两人独做各需几小时?
12. 有甲、乙, 丙三个数, 依次小 $1$, 已知乙数的倒数与甲数的倒数的 $2$ 倍的和, 与丙数的倒数的 $3$ 倍相等. 求这三个数,
13. 甲船从上游的 $A$ 地顺流下行到 $B$ 地, 乙船同时从下游的 B 地逆流而上, 经过 $12$ 小时两船相遇, 这时甲船已经走了全程的一半又 $9$ 公里. 已知甲船在静水中的速度是每小时

$4$ 公里，乙船在静水中的速度是每小时 $5$ 公里，求水流速度和两地间的距离.

14. 同院写家的灯泡，一家是一个 $25$ 瓦的，一家是一个 $40$ 瓦的，一家是两个 $25$ 瓦的. 这个月共付电费 $1.84$ 元，按瓦数分配，各家应付电费多少?

15. 一个车工小组，用普通切削法工作了 $6$ 小时以后，改用新的快速切削法，再工作 $2$ 小时，一共完成全部任务的 $\frac{1}{2}$，已知新方法工作 $2$ 小时，可以完成普通方法工作 $4$ 小时所完成的任务，用这两种方法单独工作去完成全部任务，各需多少小时?

# 第一章 测验题

1. 下列两个方程是否同解? 如果不同解，试找出所产生的增根.

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{3-x}{x-1}, x+1=3-x.$$

2. 解方程:$3(8x-1)-2(5x+1)=6(2x+3)+5(5x-2)$.

3. 解方程:$\frac{1}{2}(y+1)+\frac{1}{3}(y+2)=3-\frac{1}{4}(y+3)$.

4. 解方程:$(x-1)^2+5\frac{5}{9}=\left(1\frac{1}{3}x-12\right)\left(\frac{3}{4}x+12\right)$.

5. 解方程:$\frac{8-x}{7-x}+\frac{1}{x-7}=8$.

6. 解方程:$\frac{6}{x^2-25}=\frac{3}{x^2+8x-15}+\frac{5}{x^2-2x-15}$.

7. 解方程:$\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$.

解下列应用题:

8. 某战壕左翼有兵力 $250$ 人, 右翼有兵力 $350$ 人. 现因作战需要, 要使右翼兵力是左翼兵力的 $2$ 倍, 应从左翼调多少人去右翼?

9. 一条街长 $2.5$ 公里, 甲、乙两个学生从两端同时出发, 相向而行, 甲骑自行车, 速度是每小时 $20$ 公里, 乙步行, 经过 $6$ 分钟后两人相遇. 求乙每小时步行多少公里.

10. 一个拖拉机队耕一片地, 第一天耕了这片地的 $\frac{1}{3}$, 第二天耕了这片地的 $\frac{1}{2}$, 这时还剩下 $38$ 公顷没有耕. 这片地一共有多少公顷?

11. 一件工程, 甲单独 $15$ 天可以完成; 乙单独做,$12$ 天可以完成; 甲、乙、丙三人合做,$4$ 天可以完成. 丙单独做, 几天可以完成?

12. 总价是 $36$ 元的甲种零件和总价也是 $36$ 元的乙种零件混合. 混合后所得的零件, 每件比甲种的少 $0.3$ 元, 而比乙种的多 $0.2$ 元, 求甲种零件和乙种零件每件的价格.

# 2

# 一元一次不等式

## 2.1　不等式

在第一章里，我们已经学过，用等号连结两个代数式所成的式子，叫做等式. 现在来研究用不等号“$>$”或者“$<$”连结两个代数式所成的式子.

### 1.　不等式的意义

在代数第一册里，比较有理数大小的时候，我们用过

$$3 > -1, 0 > -2, -12 < -9, 7 < 13$$

等来表示两个数之间的大小关系. 为了表示两个代数式的值的大小，我们也可把这两个代数式用不等号“$>$”或“$<$”连结起来. 例如，我们可以用

$$a+1 < 3, a+5 > a+1, x-2 > 7, \frac{x-5}{2} < \frac{1}{2}$$

等式子分别表示不等号左边的式子的值大于或小于不等号右边的式子的值.

象这样，用不等号“$>$”或者“$<$”连结两个代数式所成的式子叫做**不等式**.

## 2. 绝对不等式和条件不等式

在不等式 $a+5>a+1$ 里，我们可以看到，不论 $a$ 取任何数值，这个不等式总是成立的. 例如,$a=3$ 的时候，得到 $8>4$;$a=0$ 的时候，得到 $5>1$;$a=-2$ 的时候，可以得到 $3>-1$.

但是，在不等式 $x-2>7$ 里，我们可以看到,$x$ 只有取大于 $9$ 的数值，这个不等式才能够成立. 例如，当 $x=10$ 时，这个不等式成立; 而当 $x=9$ 或者 $x=8$ 时，这个不等式就不成立. 这就是说，前一个不等式里字母可取的值不受任何限制，而后一个不等式里字母可取的值却受到数值范围的限制.

如果不论用什么数值代替不等式中的字母，它都能够成立，这样的不等式叫做**绝对不等式**. 例如,

$$x+7>x-1,a-2<a+5,a^2+1>0$$

等等，都是绝对不等式.

两边都是数字而能够成立的不等式，也叫做绝对不等式. 例如,

$$7>2,3>0,-5<-4$$

等，也都是绝对不等式,

如果只有用某些数值范围内的数值代替不等式中的字母，它才能够成立，这样的不等式叫做 条件不等式. 例如,

$$3x>1,x+1>0,3x-5<\frac{x}{2}$$

等等，都是条件不等式,

**例** 判断下列不等式中，哪些是绝对不等式? 哪些是条件不等式? 为什么?

(1) $2a+9>2a-3$; (2) $x+1>0$;

(3) $x^2+1>0$; (4) $|-2|<|5|$;

(5) $|a|>0$.

**[解]** (1) 因为不论 $a$ 是什么数值, 这个不等式总是成立, 所以不等式 $2a+9>2a-3$ 是绝对不等式.

(2) 因为 $x$ 只有取大于 $-1$ 的数值, 这个不等式才能够成立, 所以不等式 $x+1>0$ 是条件不等式.

(3) 因为不论 $x$ 是什么数值,$x^2$ 都不是负数, 因此,$x^2+1$ 的值总是大于零; 这就是说, 不论用什么数值代替不等式 $x^2+1>0$ 中的 $x$, 这个不等式都能够成立, 所以不等式 $x^2+1>0$ 是绝对不等式.

(4) 因为 $|-2|=2$,$|5|=5$, 而 $2<5$, 所以不等式 $|-2|<|5|$ 是绝对不等式.

(5) 因为只有当 $a$ 是正数或者负数时,$|a|>0$; 而当 $a=0$ 时,$|a|=0$, 不等式 $|a|>0$ 不成立, 所以不等式 $|a|>0$ 是条件不等式.

## 习 题 2.1

1. 用不等号“>”或者“<”连结下列各题中的两个式子:

(1) $5$ 和 $3$; (2) $-5$ 和 $-3$;

(3) $5$ 和 $-3$; (4) $-5$ 和 $3$;

(5) $|5|$ 和 $|3|$; (6) $|-5|$ 和 $|-3|$;

(7) $|-5|$ 和 $3$; (8) $-5$ 和 $|-3|$;

(9) $x+7$ 和 $x+2$; (10) $2a-5$ 和 $2a-9$;

(11) $2x-3$ 和 $2x+1$; (12) $3a-2$ 和 $3a+11$.

2. (1) $(x+2)^2>0$ 是不是绝对不等式? 为什么?

[提示: 要考虑 $x=-2$ 时, 结果怎样? ]

(2) 为什么说,$|a|+1>0$ 是绝对不等式?

3. 判断下列不等式中, 哪些是绝对不等式? 哪些是条件不等式? 为什么?

(1) $5a-8<5a+2$;　　(2) $-a+7>-a+3$;

(3) $3a^2+2>0$;　　(4) $x-1<0$;

(5) $-x^2-1<0$;　　(6) $2x-4>0$;

(7) $-3x>5$;　　(8) $|-9|>|2|$.

## 2.2　不等式的性质

我们知道: 在等式 $a=b$ 的两边, 如果加上、减去、乘以或者除以 (除数不能是零) 相同的数, 得到的结果仍旧是一个等式. 这也就是说, 在等式的两边作上述这些运算, 等号是不变的.

现在我们来研究, 在不等式 $a>b$(或者 $a<b$) 的两边作这些运算, 将会产生怎样的结果?

### 1.　不等式的两边加上 (或减去) 一个相同的数

我们看下面的例子:

$$\begin{array}{rl} 5>3 & \\ 2=2 & (+ \\ \hline 7>5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 5>3 & \\ -4=-4 & (+ \\ \hline 1>-1 & \end{array}$$

(加上 $-4$, 就是减去 $4$)

$$\begin{array}{rl} -4<-3 & \\ 5=5 & (+ \\ \hline 1<2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -4<-3 & \\ -2=-2 & (+ \\ \hline -6<-5 & \end{array}$$

(加上 $-2$, 就是减去 $2$)

比较上面这些例子中的每两个不等式, 可以看到: 在不等式的两边同时加上一个相同的数, 得到的仍旧是一个不等式, 而且不等号的方向不变.

一般地, 我们有以下的结论:

**问题 1** 在不等式的两边加上 (或减去) 一个相同的数, 不等号的方向不变.

这个性质, 用式子来表示, 就是:

如果 $a > b$, 那末 $a \pm c > b \pm c$;
如果 $a < b$, 那末 $a \pm c < b \pm c$.

**不等式的性质 1**

因为当整式中的字母取定了确定的数值时, 这个整式表示一个确定的数, 所以从上面这一性质还可以推出一个结论:

在不等式的两边, 加上 (或减去) 一个相同的整式, 不等式的方向不变.

**例 1** 在下列不等式的两边各加上指定的数 (或者整式), 会得到怎样的不等式?

(1) $a - b > 0$, 加上 $b$; (2) $x + 3 < 0$, 减去 $3$.

**[解]** 根据不等式的性质可以得到:

(1) $a - b + b > 0 + b, \quad \therefore \quad a > b.$

(2) $x + 3 - 3 < 0 - 3, \quad \therefore \quad x < -3.$

从上面这个例子可以看到, 在第 (1) 题 $a - b > 0$ 中, 不等号左边的 $-b$ 移到了右边, 并且改变了符号; 在第 (2) 题 $x + 3 < 0$ 中, 左边的 $3$ 也变号后移到了右边. 这种变形和解一元一次方程中的移项法则是一样的.

因此, 根据不等式的这个性质, 我们得到**解不等式的移项法则**:

不等式中的任何一项, 都可以把它的符号改变后, 从不等号的一边移到另一边.

## 2. 不等式的两边都乘以 (或除以) 一个相同的正数

我们看下面的例子:

$$\begin{array}{c} 18 > 12 \\ 2 = 2 \qquad (\times \\ \hline 36 > 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 18 > 12 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad (\times \\ \hline 9 > 6 \end{array}$$

(乘以 $\frac{1}{2}$, 就是除以 2)

$$\begin{array}{c} -9 < -16 \\ 3 = 3 \qquad (\times \\ \hline -27 < -18 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -9 < -6 \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \qquad (\times \\ \hline -3 < -2 \end{array}$$

(乘以 $\frac{1}{3}$, 就是除以 3)

比较上面这些例子中的每两个不等式, 可以看到: 在不等式的两边都乘以 (或除以) 一个相同的正数, 得到的仍旧是一个不等式, 而且不等号的方向不变.

一般地, 我们有以下的结论:

**问题 2** 不等式的两边都乘以 (或除以) 一个相同的正数, 不等号的方向不变.

这个性质: 用式子来表示, 就是:

如果 $a > b$,$c > 0$, 那末 $ac > bc$;
如果 $a < b$,$c > 0$, 那末 $ac < bc$.

**不等式的性质 2**

**例 2** 在下列不等式的两边各乘以或除以指定的正数, 会得到怎样的不等式?

(1) $\frac{x}{3} < 5$, 乘以 $3$; (2) $2x > -4$, 除以 $2$.

**[解]** 根据不等式的性质 2, 可以得到:

(1) $\frac{x}{3} \times 3 < 5 \times 3, \quad \therefore \quad x < 15$.

(2) $2x \times \dfrac{1}{2} > (-4) \times \dfrac{1}{2}, \quad \therefore \quad x > -2$.

## 3. 不等式的两边都乘以 (或除以) 一个相同的负数

我们看下面的例子:

$$\begin{array}{rl} 18 > 12 & \\ -2 = -2 & (\times \\ \hline -36 < -24 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 18 > 12 & \\ -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} & (\times \\ \hline -9 < -6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -9 < -16 & \\ -3 = -3 & (\times \\ \hline 27 > 18 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -9 < -6 & \\ -\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3} & (\times \\ \hline 3 > 2 & \end{array}$$

比较上面这些例子中的每两个不等式, 可以看到: 在不等式的两边都乘以 (或除以) 一个相同的负数, 得到的仍旧是一个不等式, 但是不等号的方向与原来的相反.

一般地, 我们有以下的结论:

**问题 3** 不等式的两边都乘以 (或除以) 一个相同的负数, 不等号的方向改变.

这个性质, 用式子来表示, 就是:

如果 $a > b$,$c < 0$, 那末 $ac < bc$;
如果 $a < b$,$c < 0$, 那末 $ac > bc$.

**不等式的性质 3**

应该注意, 不等式的性质 1 和性质 2 与等式的性质相同, 但是不等式的性质 3 却与等式的性质不同, 另外, 在等式的两边都乘以 0, 结果还是等式 ($0 = 0$), 但是在不等式的两边都乘以 $0$, 这个不等式就也变成了等式. 例如,$6 > 5$, 但是 $6 \times 0 = 5 \times 0$. 所以不等式的两边都乘以一个相同的数时, 必

须先判定这个乘数是正数、负数还是 0，然后正确地应用以上的性质.

**例 3** 在下列不等式的两边各乘以或除以指定的负数，会得到怎样的不等式?

(1) $-\frac{x}{5}-1$, 乘以 $-5$;

(2) $-4x<12$, 除以 $-4$.

**[解]** 根据不等式的性质 3，可以得到:

(1) $\left(-\frac{x}{5}\right)\times(-5)<(-1)\times(-5), \quad \therefore \quad x<5;$

(2) $(-4x)\times\left(-\frac{1}{4}\right)>12\times\left(-\frac{1}{4}\right), \quad \therefore \quad x>-3.$

## 习题 2.2

1. 在下列各不等式的两边各加上指定的数，所得的不等式是否仍旧成立?

   (1) $9>5$, 加上 $3$;

   (2) $-9<5$, 加上 $-5$;

   (3) $-9<-5$, 加上 $4$;

   (4) $-\frac{1}{2}>-\frac{2}{3}$, 加上 $\frac{1}{2}$.

2. 把下列各不等式的两边各乘以指定的数，写出仍旧能够成立的不等式:

   (1) $8>3$, 乘以 $2$;

   (2) $8>3$, 乘以 $-2$;

   (3) $-5<2$, 乘以 $5$;

   (4) $-5<2$, 乘以 $-5$;

   (5) $-4>-8$, 乘以 $\frac{1}{2}$;

(6) $-4 > -8$, 乘以 $-\frac{1}{2}$;

(7) $a < b$, 乘以 $-1$;

(8) $m > n$, 乘以 $-3$.

3. 把下列各不等式的两边各除以指定的数, 写出仍旧能够成立的不等式:

(1) $16 > 12$, 除以 $2$;

(2) $16 > 12$, 除以 $-2$;

(3) $-4 < -3$, 除以 $-1$;

(4) $6 > -9$, 除以 $-3$;

(5) $-25 < -10$, 除以 $-5$;

(6) $-a < -b$, 除以 $-1$.

4. 已知 $a > b$, 用不等号"$>$"或者"$<$"连结下列各题中的两个式子上:

(1) $a + 5$ 和 $b + 5$;

(2) $a - b$ 和 $0$;

(3) $-7a$ 和 $-7b$;

(4) $\frac{a}{3}$ 和 $\frac{b}{3}$;

(5) $\frac{a}{-5}$ 和 $\frac{b}{-5}$;

(6) $-\frac{2}{3}a$ 和 $-\frac{2}{3}b$.

## 2.3 一元一次不等式和它的解法

## 1. 一元一次不等式的意义

我们来看下面的问题:

什么数与 $1$ 的和大于 $3$.

如果用字母 $x$ 表示所求的数, 这个问题也就是问: 当 $x$ 取什么数值时, 不等式

$$x+1>3 \tag{1}$$

能够成立?

象方程一样, 我们把不等式 (1) 中的这个字母 $x$ 叫做未知数. 在这个不等式里, 只含有一个未知数, 而且在不等号两边的两个整式中, 只含有未知数的一次项, 这样的不等式, 叫做**一元一次不等式**. 例如下面这些不等式, 对未知数 $x$(或者 y) 来说, 都是一元一次不等式:

$$\frac{x}{4}<5;3(1—y)>2(y-6).$$

## 2. 一元一次不等式的解和解的集合

在上面这个不等式 $x+1>3$ 中, 容易看出, 用大于 $2$ 的任何一个数 (如 $2.1,3,3\frac{1}{2},\cdots$) 代替 $x$, 这个不等式都能成立; 而用等于 $2$ 或者小于 $2$ 的任何一个数代替 $x$, 这个不等式都不能成立.

在一个含有未知数的不等式中, 能够使不等式成立的未知数的值, 叫做不等式的解. 例如

$$2.1,3,3\frac{1}{2},\cdots$$

都是不等式 $x+1>3$ 的解. 很明显, 不等式 $x+1>3$ 有无数多个解. 通常我们把这些解的全体, 叫做这个不等式的**解的集合**, 或者简单地把它叫做这个不等式的**解集**.

不等式 $x+1>3$ 的解集 (比 $2$ 大的数的全体) 可以记作 $x>2$.

求不等式的解的集合的过程叫做**解不等式**.

在第一章里, 我们知道任何一个有理数都可以用数轴上的一个点表示出来. 不等式的解的集合也可以在数轴上直观地表示出来, 例如, 不等式的解的集合是就可以用数轴上表示 $2$ 的点的右边部分来表示 (图 2.1). 图中画的一个圆圈, 表示不包括 $2$ 这一点.

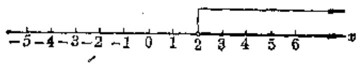


图 2.1

类似地, 如果不等式的解的集合是 $x<-2$, 就可以象图 2.2 中所画的那样来表示.

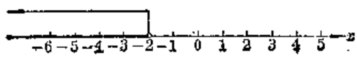


图 2.2

## 3.　一元一次不等式的解法

以前我们学习解一元一次方程时已经知道, 解一元一次方程的方法主要是应用方程的两个性质, 把所给的方程变形成和它同解的形式象那样的最简单的一元一次方程. 解一元一次不等式的方法和它一样, 我们只要正确地应用 §2.2 里讲过的不等式的三个性质, 把它变形成形式象 $x>a$ 或者 $x<a$ 那样的最简单的一元一次不等式, 这种不等式救表示了所给不等式的解的集合. 下面我们举例来说明.

**例 1** 解不等式:$3-2x<7$.

**[解]** 根据移项法则, 把 $3$ 移到右边, 得 $-2x<4$.

两边都除以 $-2$, 得 $x>-2$.

这个不等式的解集可以象图 2.3 那祥, 在数轴上表示出来.

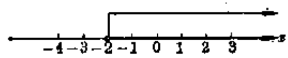


图 2.3

**[注意]** 把不等式 $-2x<4$ 的两边都除以 $-2$ 以后，得到的一个不等式是 $x>-2$，不等号的方向改变了.

从这个例子可以知道，不等式 $3-x<7$ 根据不等式的性质逐步变形成不等式 $-2x<4$ 和它们的解集是相同的. 象这样的两个不等式 $3-2x<7$ 和 $x>-2$，叫做**同解不等式**.

**例 2** 解不等式:$2(5-3x)>3(4x+2)$.

**[解]** 去括号，得 $$10-6x>12x+6.$$

移项，得 $$-6x-12x>6-10.$$

合并同类项，得

$$-18x>-4.$$

两边都除以 $-18$. 得 $x<\dfrac{4}{18}$，就是 $x<\dfrac{2}{9}$.

这个不等式的解集在数轴上表示如图 2.3 所示.

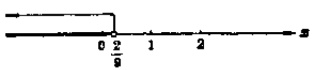


图 2.4

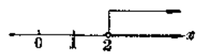


图 2.5

**[说明]** 为了约简分数，从 $x<\dfrac{4}{18}$ 得出 $x<\dfrac{2}{9}$，必须分步写出，不能错误地写成 $x<\dfrac{4}{18}<\dfrac{2}{9}$.

**例 3** 解不等式:$2(x+1)+\dfrac{x-2}{3}<\dfrac{7x}{2}-1$.

**[解]** 去分母，得

$$12(x+1)+2(x-2)<21x-6.$$

去括号，得

$$12x+12+2x-4<21x-6.$$

移项，得

$$12x + 2x - 21x < -6 - 12 + 4.$$

合并同类项, 得

$$07x < -14.$$

两边都除以 –7, 得

$$x > 2.$$

这个不等式的解集在数轴上表示如图 2.5 所示.

从上面的例子可以看出, **解一元一次不等式的一般步骤**如下:

(1) 去分母;

(2) 去括号;

(3) 移项;

(4) 合并同类项;

(5) 不等式的两边都除以未知数的系数 (除数是正数, 不等号的方向不变; 除数是负数, 不等号的方命改变).

**解分式方程的一般步骤**

由于不等式的形式不同, 所以在解不等式时, 上面的步骤并不一定都要用到, 并且也不一定都要按照上面的顺序进行演算.

**习题 2.3 (1)**

解下列各不等式, 并且在数轴上把不等式的解集表示出来;

1. $2x - 3 > 7.$
2. $6x + 4 < 2x.$
3. $8 - 2x > 3.$
4. $10 < 12 - x.$
5. $3(x + 2) > 6.$
6. $\dfrac{x}{2} + 1 < 4.$
7. $\dfrac{x+5}{2} > \dfrac{1}{3}.$
8. $\dfrac{2x-3}{7} < \dfrac{3x+2}{4}.$
9. $\dfrac{2(4x-3)}{3} > \dfrac{5(3x+1)}{4}.$
10. $\dfrac{5(y-1)}{6} - 1 > \dfrac{2(y+1)}{3}.$

**例 4** 解下列不等式:

(1) $\dfrac{x-5}{2}-\dfrac{x+7}{6}>\dfrac{5+x}{3}$;　(2) $\dfrac{15-x}{2}-\dfrac{7-x}{6}>\dfrac{5-x}{3}$.

**[解]** (1) 去分母, 得

$$3x-15-x-7>10+2x.$$

移项, 得 $3x-x-2x>10+15+7$.

合并同类项, 得 $0\cdot x>32$,

不论 $x$ 取什么数, 这个不等式都不成立.

$\therefore$ 原不等式没有解.

(2) 去分母, 得 $45-3x-7+x>10-2x$.

移项, 得 $-3x+x+3x>10-45+7$.

合并同类项, 得 $0\cdot x>-28$.

不论 $x$ 为任何值, 这个不等式总是成立.

$\therefore$ 原不等式是绝对不等式.

解不等式熟练以后, 写法和步骤可以简化.

**例 5** $x$ 是什么数的时候, 代数式如 $3x-7$ 的值

(1) 大于零?　(2) 等于零?　(3) 小于零?

**[解]** (1) 代数式 $3x-7$ 的值大于零, 就是

$$3x-7>0.$$

$$3x>7,\quad\therefore\quad x>2\frac{1}{3}.$$

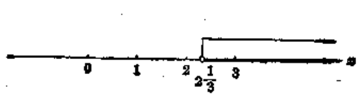



图 2.6

(2) 代数式 $3x-7$ 的值等于零, 就是

$$3x-7=0.$$

$$3x=7,\quad\therefore\quad x=2\frac{1}{3}.$$

(3) 代数式知 –7 的值小于零, 就是

$$3x-7<0.$$

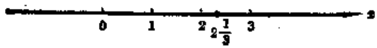


图 2.7

$$3x<7, \quad \therefore \quad x<2\frac{1}{3}.$$

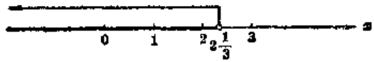


图 2.8

答: (1) 当 $x$ 取大于 $2\frac{1}{3}$ 的值时,$3x-7$ 大于零;

(2) 当 $x$ 取 $2\frac{1}{3}$ 这个值时,$3x-7$ 等于零;

(3) 当 $x$ 取小于 $2\frac{1}{3}$ 的值时,$3x-7$ 小于零.

**例 6** 某工人在技术革新后, 完成的生产量超过原来生产定额的 $5$ 倍, 如果他原来的定额是每月生产 $60$ 件, 这位工人现在每天平均生产的产品是多少?

**[解]** 设这位工人现在每天平均生产 $x$ 件产品, 那末一个月生产 $30x$ 件产品.

根据题意, 得到不等式

$$30x>5\times 60.$$

就是 $$30x>300, \quad \therefore \quad x>10.$$

答: 这位工人现在每天的产品多于 $10$ 件.

## 习题 2.3 (2)

1. 解下列各不等式:

(1) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{2+x}{5}>\dfrac{x+3}{2}$;

(2) $\dfrac{3x+1}{3}-1<\dfrac{7x-3}{5}+\dfrac{2(x-2)}{15}$;

(3) $\dfrac{3}{2}x-7<\dfrac{1}{6}(9x-1)$;

(4) $\dfrac{3(2x+5)}{2}>3x-1$;

(5) $x-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+1}{3}<1+\dfrac{x+8}{6}$;

(6) $\dfrac{2x+1}{4}<\dfrac{15x-2}{6}-\dfrac{1}{3}(6x+4)$.

2. 下列各代数式中, 字母取什么数的时候, 它的值是负数?

(1) $\dfrac{6x-1}{4}-2x$;　　(2) $\dfrac{3y-1}{2}-\dfrac{y}{2}$.

3. 下列各代数式中, 字母取什么数的时候, 它的值是正数?

(1) $\dfrac{2}{3}x+8$;　　(2) $2(x+1)-3$.

4. $x$ 是什么数的时候, 代数式 $\dfrac{3x-5}{7}-\dfrac{x+4}{3}$ 的值一定小于 $2$?

5. $x$ 是什么数的时候, 代数式 $\dfrac{2x-3}{7}-\dfrac{x+4}{3}$ 的值一定大于 $-1$?

6. 一个数的 $2$ 倍加上 $5$ 所得的和, 大于这个数的 $3$ 倍减去 $4$ 所得的差, 求这个数的范围.

7. 某机床厂原来的定额是年产车床 $2280$ 台, 计划今年完成

的生产量要超过原定额的 $2$ 倍, 这个厂今年每月平均要生产车床多少台?

8. 敌我相距 $14$ 公里, 得知敌军于 $1$ 小时前以每小时 $4$ 公里的速度逃跑. 现接上级命令, 我军必须在不满 $6$ 小时内追上敌人, 问我军应该用什么速度追击?

我们再来看下面的问题:

$x$ 取什么数值范围里的数时, 代数式 $3x+4$ 的值才不会是负数?

我们知道, 有理数可以区分为正数、负数和零三类, 正数都大于 0, 负数都小于 0. 所以要使 $3x+4$ 的值不是负数, 那末只要它的值大于或者等于零 (也就是不小于零). 我们用符号 $\geqslant$ 来表示"大于或者等于"(也就是不小于) 这一个关系, 那末上面的问题, 就可以归纳为解不等式.

$$3x+4 \geqslant 0.$$

应用上面讲过的移项法则, 可以求出所求的数值范围是

$$x \geqslant -\frac{4}{3}.$$

这个数值范围在数轴上表示出来如图 2.9 所示. 因为 $x$ 可以等于 $-\frac{4}{3}$, 所以图中数轴上表示 $-\frac{4}{3}$ 这一点要用黑点表示出来.

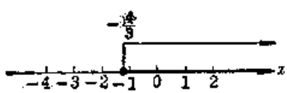


图 2.9

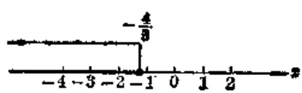


图 2.10

同样的, 如果我们要问当 $x$ 取什么数值范围里的数时, 代数式 $3x+4$ 的值才不是正数, 那末就可以用符号"$\leqslant$"表示

“小于或者等于”(也就是不大于) 这一个关系, 把问题归结为解不等式

$$3x+4\leqslant 0.$$

应用移项法则, 容易求出所求的数值范围是

$$x\leqslant -\frac{4}{3}.$$

在数轴上表示出来, 如图 2.10 所示.

**例 7** 一个车间计划在 $15$ 天内造出大型零件 $192$ 个, 最初 $3$ 天试制, 每天只做了 $8$ 个. 后来改进了技本, 结果在规定日期内可以完成甚至可以超额完成计划. 问第四天起, 平均每天至少做几个?

**[解]** 设第四天起, 平均每天做 $x$ 个零件, 那末最后的 $12$ 天里共做了 $(15-3)x$ 个零件.

因为前三天共做了 $8\times 3=24$ 个零件, 所以根据题意, 得到不等式

$$24+(15-3)x\geqslant 192.$$

就是 $$24+12x\geqslant 192,$$

$$12x\geqslant 168,\qquad \therefore\quad x>14.$$

答: 这个车间后来平均每天至少做 $14$ 个零件.

图 2.11 表示不等式解的范围.

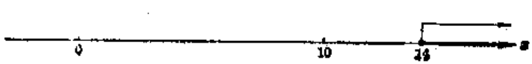



图 2.11

**习　题 2.3 (3)**

1. 求出适合下列各式的 –的数值范围, 并且在数轴上把它表示出来:

   (1) $4-\dfrac{3x-1}{4}\leqslant\dfrac{5(x+3)}{8}+1$;

   (2) $\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{13-x}{2}\geqslant\dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+3)}{6}$;

   (3) $(x-1)^2\leqslant(x+1)^2$;

   (4) $(x-1)(x-2)+1\geqslant(x+1)(x-3)-1$.

2. 某校学生下乡参加劳动, 每小时走 $4$ 公里, 出发后 $2$ 小时, 校方有紧要通知, 必须在 $40$ 分钟内送到. 通讯员骑自行车, 至少以什么速度才能在 $40$ 分钟内把信送到.
   [提示:$40$ 分钟内送到, 意思就是可以用 $40$ 分钟或不到 $40$ 分钟的时间送到.]

3. 某生产队种棉花 $75$ 亩, 收得皮棉 $13500$ 斤, 计划明年在同样面积上的总产量要达到 $15000$ 斤, 问每亩平均产量至少要比现在增产多少斤?

4. 一个工程队规定要在 $6$ 天内完成 $300$ 土方的工程, 第一天完成了 $60$ 土方. 现在要比原定计划至少提前 $2$ 天完成任务, 以后几天内平均每天至少要完成多少土方?

## 2.4　含有绝对值符号的不等式的解法

为了研究含有绝对值符号的不等式的解法, 我们先来复习一下绝对值的意义.

## 1.　绝对值的意义

在代数第一册里, 我们知道, 有理数的绝对值的意义是: 正数的绝对值就是它的本身, 负数的绝对值是和它相反的正数, 零的绝对值还是零.

用式子来表示就是:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{如果}a > 0; \\ 0, & \text{如果}a = 0; \\ -a, & \text{如果}a < 0. \end{cases}$$

例如, 如果 $|x| = 2$, 那末 x 的值就有两种可能:

如果 $x > 0$, 那末 $x = 2$.

如果 $x < 0$, 那末 $-x = 2, \therefore \quad x = -2$.

这个等式表明, 在数轴上表示数 $x$ 的点离开原点 2 个单位, 而不管这个点在原点的右边还是左边 (图 2.12).

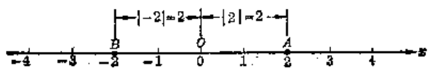



图 2.12

一般地说, 一个有理数的绝对值, 就表明这个数在数轴上所对应的点和原点间的距离 (不考虑方向).

根据绝对值的这一意义, 我们也就可以知道不等式 $|x| < 2$ 就是表明: 在数轴上表示数 $x$ 的点离开原点的距离不到 $2$ 个单位. 所以 $x$ 可取一切既比 $-2$ 大又比 $2$ 小的数值;$x$ 可取值的范围是:

$$-2 < x < 2.$$

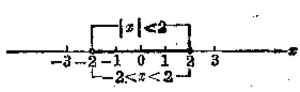



图 2.13

同样, 不等式 $|x| > 2$ 就是表明: 在数轴上表示数 $x$ 的点

离开原点的距离超过 $2$ 个单位, 所以 $x$ 可取一切比 $-2$ 小或者比 $2$ 大的数值;$x$ 可取值范围是

$$x < -2 \text{ 或 } x > 2.$$

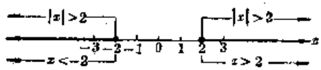


图 2.14

一般地, 我们可以得出以下的结论:

| |
|---|
| 如果 $\lvert x\rvert > a\ (a > 0)$, 那末 $x < -a$ 或 $x > a$; |
| 如果 $\lvert x\rvert < a\ (a > 0)$, 那末 $-a < x < a$. |

**[注意]** 1. $-2 < x < 2$ 读作"$x$ 大于 $-2$ 且小于 $2$". 不要把它写成"$2 > x > -2$"因为这样和数轴上表示数的大小的比较的规定不相符合.

2. $x < -2$ 或 $x > 2$ 只能分别写开, 不能错误地写成"$2 < x < -2$"或者"$-2 > x > 2$".

## 2. 含有绝对值符号的不等式的解法

利用上面所说的绝对值的意义, 我们很容易解一些简单的含有绝对值符号的不等式.

例如, 解不等式 $2|x| - 5 < 0$.

$$\because \quad 2|x| - 5 < 0, \qquad \therefore \quad |x| < \frac{5}{2}.$$

根据绝对值的意义, 可以知道 $x$ 可以取满足条件 $-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{5}{2}$ 的一切数. 通常我们可以说: 不等式 $2|x| - 5 < 0$ 的解的集合 (或解集) 是 $-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{5}{2}$.

又如，解不等式 $2|x|-5>0$.

$$\because \quad 2|x|-5>0, \qquad \therefore \quad |x|>\frac{5}{2}.$$

根据绝对值的意义，可以知道 $x$ 可以取满足条件 $x<-\frac{5}{2}$ 或 $x>\frac{5}{2}$ 的一切数，通常我们可以说，不等式 $2|x|-5>0$ 的解集是 $x<-\frac{5}{2}$ 与 $x>\frac{5}{2}$.

**例 1** 解不等式 $|x-3|<5$.

**[审题]** 如果先设 $x-3=y$，那末这个不等式就是容易求出 $-5<y<5$，这样也就可知 $x$ 要同时满足下面两个条件:

(1) $x-3>-5$, (2) $x-3<5$.

**[解]** 这样只要解这两个不等式，就可以把 $x$ 的取值范围求出.

$$\because \quad |x-3|<5, \qquad \therefore \quad -5<x-3<5.$$

$x$ 要同时满足两个条件:

(1) $x-3>-5$，由此得 $x>-2$.

(2) $x-3<5$，由此得 $x<8$.

因为这两个条件都要满足，所以 $x$ 可取值的范围是 $-2<x<8$，所以所求的解集是 $-2<x<8$.

在数轴上表示如图 2.15 所示,

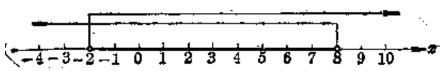



图 2.15

**[注意]** 从这个例子坷以看到解形式象 $|x-a|<b$ 的不等式，只要在数轴上找出表示不等式 $x-a>-b$ 和不等式 $x-a<b$ 的解集的那两条半射线的公共部分 (不包括端点在内).

理解了上面这种解法，以后在解题时可以把上面的解答

**[解]** 过程象下面这样来叙述.

$$\because \quad |x-3|<5, \qquad \therefore \quad -5<x-3<5,$$

$$\therefore \quad -5+3<x<5+3,$$

$$\therefore \quad -2<x<8.$$

所以原不等式的解集是 $-2<x<8$.

**例 2** 解不等式 $$|x+3|>5.$$

**[解]** $$\because \quad |x+3|>5,$$

$$\therefore \quad x+3<-5 \quad \text{或} \quad x+3>5,$$

就是 $$x<-8 \quad \text{与} \quad x>2.$$

因为 $x$ 只要满足上面的任何一个条件, 原不等式都能成立, 所以原不等式的解集是 $x<-8$ 与 $x>2$.

这个解集在数轴上表示如图 2.16 所示

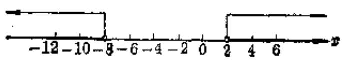



图 2.16

**[注]** 从这个例子可以看到形式象 $|x-a|>b$ 的不等式的解集在数轴上表示, 就是表示不等式 $x-a<b$ 和不等式 $x-a>b$ 这两条半射线 (不包括端点在内).

**例 3** 解不等式 $$|3-2x|\leqslant 4.$$

**[解]**

$$\because |3-2x|\leqslant 4, \tag{1}$$

$$\therefore -4\leqslant 3-2x\leqslant 4, \tag{2}$$

$$\therefore -7\leqslant -2x\leqslant 1, \tag{3}$$

$$\therefore \frac{7}{2}\geqslant x\geqslant -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

所以原不等式的解集是 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{7}{2}$.

这个解集在数轴上表示如图 2.17 所示.

要注意, 上面从不等式 (1) 逐步变形为不等式 (4), 每步骤

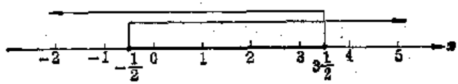


图 2.17

的根据是什么? 最后得出的解集为什么要表示成 $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$ 的形式?

**例 4** 解不等式
$$\left|3-\frac{1}{2}\right| \geqslant 1.$$

**[解]**
$$\because \quad \left|3-\frac{1}{2}\right| \geqslant 1.$$

$$\therefore \quad 3-\frac{1}{2}x \leqslant -1 \tag{1}$$

或

$$3-\frac{1}{2}x \geqslant 1. \tag{2}$$

解不等式 (1) 得 $-\frac{1}{2}x \leqslant -4, \quad \therefore \quad x \geqslant 8$.

解不等式 (2) 得 $-\frac{1}{2}x \geqslant -2, \quad \therefore \quad x \leqslant 4$.

把这两个不等式的解集合在一起, 就得到原不等式的解集是 $x \leqslant 4$ 与 $x \geqslant 8$.

这个解集在数轴表示如图 2.18 所示.

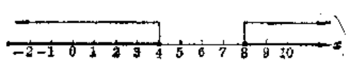


图 2.18

## 习题 2.4

1. 解下列不等式:

(1) $|x|+3>0$; (2) $|x|-3>0$;

(3) $|x|+3<0$; (4) $|x|-3<0$.

2. 解下列不等式:

(1) $|x|-3<7$; (2) $|x+2|>5$;

(3) $2|x+1|-3<0$; (4) $3|x-2|+1>0$.

3. 解下列不等式:

(1) $|2x-1|>\dfrac{1}{2}$; (2) $|1-3x|\leqslant\dfrac{1}{4}$.

4. 解下列不等式:

(1) $\left|\dfrac{1}{x}\right|<\dfrac{4}{5}$; (2) $\left|\dfrac{2}{x}\right|\geqslant\dfrac{1}{2}$.

[提示: 如果 $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$, 那末 $x>2$.]

# 本章提要

1. **几个重要概念** 绝对不等式和条件不等式, 不等式的解.

2. **不等式的性质**

(1) 如果 $a>b$, 那末 $a+c>b+c$(或者 $a-c>b-c$);

(2) 如果 $a>b$,$c>0$, 那末 $ac>bc\left(\text{或者}\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}\right)$;

(3) 如果 $a>b$,$c<0$, 那末 $ac<bc\left(\text{或者}\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}\right)$;

(4) 如果 $a>b$,$c=0$, 那末 $ac=bc$.

3. **一元一次不等式的解法**

(1) 应用移项法则, 并合并同类项, 把不等式先化成下面的形式:

$$ax > b \quad 或者 \quad ax < b.$$

(2) 再应用性质 2 或性质 3 求出不等式的解的集合.

<table>
<tr><th colspan="2">不等式</th><th>$ax > b$</th><th>$ax < b$</th></tr>
<tr><td colspan="2">$a > 0$</td><td>解集是 $x > \frac{b}{a}$</td><td>解集是 $x < \frac{b}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a < 0$</td><td>解集是 $x < \frac{b}{a}$</td><td>解集是 $x > \frac{b}{a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a = 0$</td><td>$b > 0$</td><td>无解</td><td>可以是任意值</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td>无解</td><td>无解</td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td>可以是任意值</td><td>无解</td></tr>
</table>

4. **含有绝对值符号的不等式的解法**

| 不等式 | $\|x\| > a$ | $\|x\| < a$ | $\|x-b\| > a$ | $\|x-b\| < a$ |
|---|---|---|---|---|
| $a > 0$ | 解集是<br>$x < -a$<br>或 $x > a$ | 解集是<br>$-a < x$<br>且 $x < a$ | 解集是<br>$x < b-a$<br>或 $x > b+a$ | 解集是<br>$b-a < x$<br>且 $x < b+a$ |
| $a < 0$ | 可以是任意值 | 无解 | 可以是任意值 | 无解 |
| $a = 0$ | $x \neq 0$ | 无解 | $x \neq b$ | 无解 |

# 复习题二 A

1. 绝对不等式和条件不等式有何区别? 各举两个例子.

2. (1) 如果一个正数大于另一个正数, 那末它们的绝对值谁大谁小? 举例说明.

   (2) 如果一个负数大于另一个负数, 那末它们的绝对值谁大谁小? 举例说明.

   (3) 如果一个数大于另一个数, 那末它们的相反数谁大谁小? 举例说明.

3. 下面两题的解法, 对不对? 为什么?

   (1) $-x = 8$, 两边都乘以 $-1$, 得 $x = -8$;

(2) $-x>8$, 两边都乘以 $-1$, 得 $x>-8$;

(3) $-x<8$, 两边都乘以 $-1$, 得 $x\leqslant -6$.

4. 在下列各方框中填入大于符号或小于符号:

(1) 当 $a>0,b\square 0$ 时, 那末 $ab>0$;

(2) 当 $a>0,b\square 0$ 时, 那末 $ab<0$.

5. 在数轴上, 指出表示下列不等式里的力的点所在的范围:

(1) $x>3$; (2) $x<-2$; (3) $1<x<4$;

(4) $-3<x<2$; (5) $|x|>2$; (6) $|x|<3$.

6. 解下列各不等式, 并且在数轴上把它们的解集表示出来

(1) $1+\dfrac{x}{3}>3-\dfrac{x-2}{2}$; (2) $3-\dfrac{3x}{2}>\dfrac{5}{8}-\dfrac{4x-3}{6}$;

(3) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{2x-1}{12}\leqslant\dfrac{3x+1}{6}-\dfrac{5}{4}$;

(4) $x-5-\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{x}{3}-1$;

(5) $(2x-1)^2-1>4(x-1)(x+2)$;

(6) $\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2\geqslant\left(\dfrac{x}{2}+3\right)\left(\dfrac{x}{2}-3\right)$.

7. $x$ 取哪些数时, 代数式 $\dfrac{3x}{2}-8$ 的值:

(1) 大于 $7-x$ 的值?

(2) 小于 $7-x$ 的值?

(3) 等于 $7-x$ 的值?

并且在数轴上把它们表示出来.

## 复习题二 B

1. (1) 如果 $a>b$, 是否一定会得到 $ac^2>bc^2$? 为什么?

[提示: 要考虑 $c>0$,$c<0$,$c=0$ 三种情况.]

(2) 如果 $ac^2>bc^2$, 是否一定会得到 $a>b$? 为什么?

2. (1) $5>4$, 那末 $5a>4a$, 对不对? 为什么?

(2) $a$ 与 $-a$ 哪一个大?

3. 解下列各不等式, 并且在数轴上把它们的解集表示出来:

(1) $3[x-2(x-1)]\leqslant 4x$;

(2) $5-\dfrac{x}{3}\geqslant 3\dfrac{1}{2}-\dfrac{4x+1}{8}$;

(3) $\dfrac{(2x-7)^2}{4}-\dfrac{x-1}{3}\geqslant\left(x-1\dfrac{1}{2}\right)^2$;

(4) $\left(\dfrac{3}{5}x-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3}{5}x+\dfrac{2}{3}\right)\leqslant\left(\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{4}\right)^2$.

4. 解下列各不等式, 并且在数轴上把它们的解集表示出来:

(1) $|x|+1>5$; (2) $|x|-2<3$;

(3) $|2x-3|>5$; (4) $\left|1-\dfrac{x}{3}\right|<\dfrac{2}{3}$;

(5) $3|2x+1|-4\leqslant 0$; (6) $2|1-3x|-1\leqslant 0$;

(7) $\left|\dfrac{2}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$; (8) $\left|1-\dfrac{1}{x}\right|>2$.

5. 已知 $a\neq b$, 求证:

(1) $(a-b)^2>0$; (2) $a^2-2ab-b^2>0$;

(3) $a^2+b^2>2ab$; (4) $ab<\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

[提示: 证明 (1) 时, 因为 $a\neq b$, 只要考虑不论的结果是正数还是负数,$(a-b)^2$ 应该怎样? 证明 (2),(3),(4) 时, 根据 (1), 利用解不等式的方法来证明]

6. 在爆破时, 如果导火线燃烧的速度是每秒钟 $0.8$ 厘米, 人跑开的速度是每秒钟 $5$ 米, 那末点导火线的人要在爆拔时

能够跑到 $120$ 米以外的安全地区去，这根导火线至少要有多少长？

7. 农具厂原计划在一个月内 ($30$ 天) 生产抽水机 $165$ 部，前 $8$ 天每天平均生产了 $5\frac{1}{2}$ 部，后来要求提前 $5$ 天超额完成任务，以后几天里，平均每天至少要生产多少部？

8. 求两位数，其中个位数字比十位数字大 $2$，并且这个两位数介于 $50$ 与 $60$ 之间.

# 第二章 测验题

1. 在下列空白处填入适当的条件:

 (1) 当 $a<0$,____________ 时，那末 $ac<0$;

 (2) 当 $a<0$,____________ 时，那末 $ac>0$;

 (3) 当 $a<b$,____________ 时，那末 $ac^2<bc^2$.

2. 解下列不等式，并在数轴上把它们的解集表示出来:

 (1) $2(x-3)>4$;　　(2) $2x-3\leqslant 5(x-3)$;

 (3) $\frac{1}{5}(x-2)\leqslant x-\frac{2}{5}$;　　(4) $\frac{x}{3}-\frac{x-1}{2}<1$;

 (5) $(3x-4)^2\geqslant(3x-2)(3x+2)-4$.

3. 解下列不等式:

 (1) $5|x|>3$;　　(2) $3|1-2x|-1\leqslant 0$;

 (3) $\left|\frac{3x-5}{4}-1\right|<\frac{3}{8}$;　　(4) $\left|2-\frac{1}{x}\right|\leqslant 3$.

4. $y$ 取什么值时，代数式 $\frac{5}{3}y-4$ 的值:

 (1) 大于 $\frac{3y-1}{2}-y$;　　(2) 小于 $\frac{3y-1}{2}-y$.

5. 某车工计划在 $15$ 天里加工 $420$ 个零件，最初三天中每天

加工了 $24$ 个，以后每天至少要加工多少个才能在规定的时间内超额完成任务？

# 3

# 一次方程组

## 3.1 二元一次方程

我们来看下面的问题.

已知两个数的和是 $4$, 求这两个数.

这个问题里有两个未知数, 如果设一个数是 $x$, 另一个数是 $y$, 那末根据题意, 就可以列出方程:

$$x + y = 4.$$

因为在这个方程里含有未知数 $x$ 和 $y$ 的项的次数都是 $1$, 我们把它叫做二元一次方程.

含有两个未知数, 并且含有未知数的项的次数都是 $1$ 次的方程叫做**二元一次方程**. 例如,

$$x + y = 4, \quad 2x - 3y = 7, \quad \frac{1}{3}x = 5y$$

等等都是二元一声方程.

现在我们来看方程

$$x + y = 4.$$

在这个方程里，使 $x$ 取不同的值，计算出对应的 $y$ 值，并且把各对对应值列成下表:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\cdots$ | $-5$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $2.5$ | $8.3$ | $\cdots$ |
| $y$ | $\cdots$ | $9$ | $4\frac{1}{2}$ | $5$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1.5$ | $-4.3$ | $\cdots$ |

很明显，把这个表里每一对 $x$ 和 $y$ 的值代入方程 $x+y=4$，都能使这个等式变成一个恒等式，例如，

取 $$x=-5,y=9$$

代入，得到 $$(-5)+9=4.$$

这是一个恒等式.

我们说 $x,y$ 这样的一对值适合原方程.

能够适合一个二元一次方程的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解. 例如，上面表里各对 $x,y$ 的值都是二元一次方程 $x+y=4$ 的解.

从上面的表里可以知道，在任何一个二元一次方程中，确定了其中一个未知数的一个值，另一个未知数的对应值就可以随着确定，因而得出这个方程的一个解，因此任何一个二元一次方程都有无数个解. 我们把二元一次方程所有解构成的这个整体，叫做二元一次方程的解的集合. 但是，并不是任意的一对 $x$ 和 $y$ 的值，都是这个方程的解. 例如，在方程 $x+y=4$ 里，$x=3$，$y=-5$ 就不是它的解.

为了能够清楚地表达二元一次方程的一个解是一对未知数的值，通常用括号“$\{$”把两个未知数的值并起来写在一起. 例如，方程 $x+y=4$ 的解是

$$\begin{cases} x=0, \\ y=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1, \\ y=5 \end{cases}$$

等等.

**例 1** 在方程 $2x-3y=5$ 里, 设 $x=-1,0,\frac{1}{3},1,3,6$, 求对应的 $y$ 值, 并且把各对对应值列成一个表.

**[解]** 把已知方程移项, 使含有 $y$ 的项在左边, 不含 $y$ 的项在右边, 得

$$-3y=5-2x.$$

两边都除以 $-3$, 得

$$y=-\frac{5-2x}{3}.$$

把所设的 $x$ 的值依次代入上式右边, 计算出对应的 $y$ 的值, 可以列成下面的表.

表里的每一组值都是二元一次方程 $2x-3y=5$ 的一个解.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $3$ | $6$ |
| $y$ | $-2\frac{1}{3}$ | $-1\frac{2}{3}$ | $-1\frac{4}{9}$ | $-1$ | $\frac{1}{3}$ | $2\frac{1}{3}$ |

**习 题 3.1**

1. 在下列方程里, 哪些是二元一次方程? 哪些不是?

(1) $3x+4y=0$;

(2) $5x-\frac{1}{2}=7$;

(3) $2x^2=5y-1$;

(4) $y=\frac{1}{2}x$;

(5) $\frac{1}{3}(x-3y+6)=2(4y-5x)+3$;

(6) $(x+y)(2x-3y+4)-7=x(2x-y)-y(3y+5)$.

2. 对于下列每个方程, 各求出它的四个解来:

(1) $x=2y$;　　(2) $y=3x-2$;

(3) $x-y=-5$;　　(4) $y=x+\frac{1}{2}$.

3. 先用一个未知数的代数式表示另一个未知数，然后求出方称的四个解来:

(1) $x-3y=5$;

(2) $2(x-y)=5$;

(3) $5x+2y-3=0$;

(4) $4x+2y=x-9y+1$.

4. (1) 求二元一次方程 $4x-3y=12$，在 $x=0$ 的时候适合于方程的 $y$ 的值，和在 $y=0$ 的时候适合于方程的 $x$ 的值;

(2) 把二元一次方程 $3x+y=8$，化成用 $x$ 的代数式表示 $y$ 的形式，然后填写适合于方程的数值表:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | |

## 3.2　二元一次方程组的意义

我们再来看下面的问题:

甲乙两数的和是 $4$，甲数比乙数大 $2$，求这两个数.

这个问题里有两个条件，如果我们设甲数是 $x$，乙数是 $y$，那末就可以列出两个方程:

$$x+y=4, \tag{1}$$

$$x-y=2. \tag{2}$$

这样我们只要求出既能适合方程 (1)，又能适合方程 (2) 的 $x$

和 $y$ 的值, 就能得到这个问题的答案. 这也就是说要解答这个问题, 只要求出这两个方程的公共解.

方程 (1) 和 (2) 都有无数多个解, 现在我们取定 $x$ 的一些值, 用列表法把这两个方程的解分别写出几个来, 如

方程 (1) 的解

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots$ |
| $y$ | $\cdots$ | $7$ | $6$ | $5$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0$ | $\cdots$ |

方程 (2) 的解

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots$ |
| $y$ | $\cdots$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ |

对比一下可以发现 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 既是方程 (1) 的解, 也是方程 (2) 的解, 这个解就是这两个方程的公共解. 这样我们也就找到了这个问题的答案: 甲数是 $3$, 乙数是 $1$.

我们把由几个方程所组成的一组方程叫做**方程组**. 含有相同的两个未知数的几个一次方程所组成的方程组叫做**二元一次方程组**. 例如上面问题中的方程 (1) 和 (2) 合在一起就组成了一个二元一次方程组, 记作

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2. \end{cases}$$

方程组里各个方程的公共解, 叫做这个方程组的解. 例如方程 (1) 和 (2) 的公共解 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 是上面这个方程组的解.

求方程组的解的过程叫做**解方程组**.

**[注意]** 1. 在书写方程组的时候, 要用括号“$\{$”把各个方程合写在一起. 同样, 方程组的解也要用括号合写在一起. 因为它实际上就是一个二元一次方程组.

2. 在 §1.2 里讲过, 一元方程的解, 也可以叫做根. 但是方程组的解, 只能叫解, 不能叫根.

3. 方程组里方程的个数与未知数的个数，一般来说是可以不同的. 本章中所研究的一次方程组，都是指未知数的个数和方程的个数相同的一次方程组.

**习题 3.2**

1. 检验下列二元一次方程组后面括号里的一对未知数的值是不是这个方程组的一个解：

(1) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}\right)$

(2) $\begin{cases} x+y=-1, \\ 2x-y=-5. \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}\right)$

2. 通过观察，确定下列二元一次方程组有没有解？

(1) $\begin{cases} x+y=7, \\ x+y=-2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=5, \\ 2x-2y=10. \end{cases}$

## 3.3 用代入消元法解二元一次方程组

下面我们来研究二元一次方程组的解法. 先来看下面的问题：

两个数的和是 $8$，它们的差是 $2$，求这两个数.

设两个数中较大的一个数是 $x$，较小的一个数是 $y$，就可以列出方程组：

$$x+y=8, \tag{1}$$

$$x-y=2. \tag{2}$$

如果利用一元一次方程来解这个问题，可以得出下面的方程来：

因为两数的和是 $8$，所以设较大的数是 $x$，那末较小的数就是 $8-x$. 又因两数的差是 $2$，所以可以列出一元一次方程

$$x-(8-x)=2. \tag{3}$$

实际上, 从上面的二元一次方程组的方程 (1), 我们可以得到 $y=8-x$. 因为方程组中相同的字母所表示的是同一个未知数, 所以在方程 (1) 和方程 (2) 中的 $x$ 和 $y$ 分别表示相同的未知数, 因此可以把 $8-x$ 代替方程 (2) 中的 $y$. 这样就得到了一元一次方程

$$x-(8-x)=2.$$

这显然和方程 (3) 是一样的.

解这个方程, 得到 $x=5$. 代入 $y=8-x$, 得到 $y=3$.

$$\therefore \quad \begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$$

就是原二元一次方程组的解.

这种解方程组的方法, 叫做**代入消元法**, 简称**代入法**.

**例 1** 用代入法解方程组:

$$x+3y=5, \tag{4}$$

$$3x-6y=6. \tag{5}$$

**[审题]** 这里,(1) 中的 $x$ 的系数是 $1$, 把 $x$ 化成用 $y$ 的代数式表示的式子比较简单.

**[解]** 从 $(1)$, 得 $x=5-3y$. (3)

代入 $(2)$, 得 $3(5-3y)-6y=6$.

解这个方程, 得 $-15y=-9$,

$$\therefore \quad y=\frac{3}{5}.$$

以 $y=\dfrac{3}{5}$ 代人 $(3)$, 得 $x=3\dfrac{1}{5}$.

**[检验]** 把 $x=3\dfrac{1}{5}$,$y=\dfrac{3}{5}$ 代入方程 $(1)$:

$$\text{左边}=3\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{5}=5=\text{右边}.$$

代入方程 $(2)$:

$$\text{左边} = 3 \times \frac{16}{5} - 6 \times \frac{3}{5} = 6 = \text{右边}.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 3\frac{1}{5}, \\ y = \frac{3}{5}. \end{cases}$

**[注意]** 用代入法解方程组时，从一个方程得出把一个未知数用另一个未知数的代数式表示的式子，必须钯这个代数式代入另一个方程中去，不能代入原来那个方程中. 例如在本题中，从方程 (1) 得到 $x = 5 - 3y$ 后，必须把这个代数式代入方程 (2) 中. 如果代入方程 (1)，那末得到 0=0，这样就不能达到求出 $x$,$y$ 的值的目的.

**例 2** 用代入法解方程组:

$$3x + 4y = 2, \qquad (1)$$

$$2x - y = 5. \qquad (2)$$

**[审题]** 这里，从 $(2)$ 中把 $y$ 化成用 $x$ 的代数式表示的式子比较简单.

**[解]** 从 $(2)$，得

$$y = 2x - 5. \qquad (3)$$

以 $(3)$ 代入 $(1)$，得

$$3x + 4(2x - 5) = 2.$$

解这个方程，

$$11x = 22,$$

$$\therefore \quad x = 2.$$

以 $x = 2$ 代入 $(3)$，得

$$y = 2 \times 2 - 5 = -1,$$

**[检验]** 把 $x = 2$,$y = -1$ 代入方程 $(1)$:

$$\text{左边} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 2 = \text{右边}.$$

代入方程 $(2)$:

$$\text{左边} = 2 \times 2 - (-1) = 5 = \text{右边}.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$

**[说明]** 用代入法解方程组时，要把一个方程里的一个未知数用另一个未知数的代数式来表示，为了计算简便，一般选用未知数的系数较简单的一个. 在例 1 中，选用方程 (1)，把 $x$ 化成 $y$ 的代数式，而在例 2 中，选用方程 (2)，把 $y$ 化成 $x$ 的代数式.

从上面两个例子可以看出，用**代入法解二元一次方程组的一般步骤**是:

(1) 把一个方程里的一个未知数 (例如 $y$) 化成用另一个未知数 (例如 $x$) 的代数式来表示.

(2) 把这个代数式代入另一个方程里，消去一个未知数 (例如 $y$)，得到另一个未知数 (例如 $x$) 的一个一元方程.

(3) 解这个一元方程，求得一个未知数 (例如 $x$) 的值.

(4) 把所求得的值代入第一步所得到的代数式里，求得另一个未知数 (例如 $y$) 的值.

(5) 把所求得的两个未知数的值用“$\{$”写在一起，就是原方程组的解.

**解分式方程的一般步骤**

为了检查计算有没有错误，可以把所求得的两个未知数的值代入原方程组，进行检验.

## 习 题 3.3

1. 检验下列各题后面括号里的 $x$ 和 $y$ 的值是不是方程组的解:

(1) $\begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 4x - 3y - 6 = 0; \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}\right)$

(2) $\begin{cases} 7x = 2y - 3, \\ 5x - 6y - 7 = 0. \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}\right)$

用代入法解下列各方程组 (2□13):

2. $\begin{cases} y = 3x, \\ 7x - 2y = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = x + 3, \\ 7x + 5y = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = -2y, \\ 3x + 4y = 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x, \\ 3x - 4y = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 5x - 3y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x + 3y = 0, \\ 12x + 7y + 1 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 8x - 12y = -40, \\ 6x + 5y = 12. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x - 8y - 3 = 0, \\ 5x + 3y = \frac{11}{12}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 5x + 2y = 25.2\ . \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2y + 3z = -4, \\ 6z + 5y + 7 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} v = 2.6 + 9.8t, \\ \frac{v}{3} - 3t = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 2(t - 9) + 3(t - 5), \\ x = \frac{t + 3}{2} - \frac{t + 2}{3}. \end{cases}$

## 3.4 用加减消元法解二元一次方程组

从上一节用代入法解二元一次方程组的步骤中, 可以看到解题的关键是要从这两个方程中设法消去一个未知数, 得到一个一元一次方程. 现在我们再来看上一节里做过的二元一次方程组:

$$x + y = 8, \tag{1}$$

$$x - y = 2. \tag{2}$$

在这个方程组里, 方程 (1) 中 $y$ 的系数是 $+1$, 方程 (2)

中 $y$ 的系数是 $-1$, 它们是两个相反的数. 因此, 只要把两个方程的左右两边分别相加, 就可以消去 $y$ 而得到只含有 $x$ 的一个一元一次方程:

$$2x = 10,$$

就是

$$x = 5.$$

在这个方程组里, 方程 (1) 中 $y$ 的系数是 $+1$, 方程 (2) 中 $y$ 的系数是 $-1$, 它们是两个相反的数. 因此, 只要把两个方程的左右两边分别相加, 就可以消去 $y$ 而得到只含有 $x$ 的一个一元一次方程:

$$2x = 10,$$

就是

$$x = 5.$$

把 $x = 5$ 代入方程组里的任何一个方程, 就可以求得 $y = 3$.

这种解方程组的方法, 叫做**加减消元法**, 简称**加减法**.

**例 1** 用加减法解方程组:

$$5x + 2y = 12, \tag{1}$$

$$3x + 2y = 6. \tag{2}$$

**[审题]** 这个方程组里,$y$ 的系数相同, 所以把方程 (1) 与方程 (2) 相减, 就可以消去 $y$.

**[解]** $(1) - (2)$, 得

$$2x = 6,$$

$$\therefore \quad x = 3.$$

以 $x = 3$ 代入 $(2)$, 得

$$3 \cdot 3 + 2y = 6,$$

$$\therefore \quad y = -1\frac{1}{2}.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=3, \\ y=-1\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

检验从略.

**[说明]** 两个方程相减, 求得 $x$ 的值后, 也可以用 $x=3$ 代入方程 (1) 中, 求出 $y$ 的值, 结果是一样的. 例如, 以 $x=3$ 代入 (1), 那末,

$$15+22y=12, \qquad \therefore \quad y=-1\frac{1}{2}.$$

这与上节所讲必须代入另一个方程中去是不同的.

**例 2** 用加减法解方程组:

$$x+5y=6, \tag{1}$$

$$3x-6y-4=0. \tag{2}$$

**[审题]** 这个方程组里没有一个未知数的系数的绝对值相等, 所以不能直接把两个方程相加或者相减, 而消去一个未知数. 但是, 我们如果把方程 (1) 两边都乘以一个数 $3$, 那末可以得到一个和它同解的方程 $3x+15y=18$, 这个方程中 $x$ 的系数和方程 (2) 中 $y$ 的系数相同, 这样就可以应用加减消元法把未知数 $x$ 消去.

**[解]** $(1)\times 3$,

$$3x+15y=18 \tag{3}$$

由 $(2)$,

$$3x-6y=4 \tag{4}$$

$(3)-(4)$,

$$21y=14, \qquad \therefore \quad y=\frac{2}{3}.$$

以 $y=\dfrac{2}{3}$ 代人 $(1)$, 得

$$x+5\times\frac{2}{3}=6,\qquad\therefore\quad x=2\frac{2}{3}.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=2\dfrac{2}{3},\\ y=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

检验从略.

**[注意]** 在把原方程组中的方程变形后，可加以编号. 在消元时，必须注意不要把方程弄错. 在解题过程中，不必再把两个方程用"$\{$"合写在一起.

**例 3** 用加减法解方程组:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=\frac{4}{3},\tag{1}$$

$$5(x-9)=6(y-2).\tag{2}$$

**[解]** 由 $(1)$,

$$3x+4y=16.\tag{3}$$

由 $(2)$,

$$5x-6y=33.\tag{4}$$

$(3)\times 3$,

$$9x+12y=48.\tag{5}$$

$(4)\times 2$,

$$10x-12y=66.\tag{6}$$

$(5)+(6)$,

$$19x=114,\qquad\therefore\quad x=6.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x = 6, \\ y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

检验从略

**[说明]** 用加减法解方程组时，要先把两个方程变形，使含有未知数的项在左边，不含未知数的项在右边，并且合并同类项.

从上面三个例子可以看出，用加减法解**二元一次方程组的一般步骤**是:

(1) 把两个方程变形，使含有未知数的项在左边，不含未知数的项在右边，并且合并同类项.

(2) 把一个方程或者两个方程的两边乘以适当的数，使两个方程里的某一个未知数的系数的绝对值相等.

(3) 把所得的两个方程的两边分别相加或者相减，消去这个未知数，得出另一个未知数的一个一元一次方程.

(4) 解这个方程，求得一个未知数的值.

(5) 用这个未知数的值代入方程组的任何一个方程，求出另一个未知数的值.

(6) 把求得的两个未知数的值用“$\{$”写在一起，就是原方程组的解.

为了检查计算有没有错误，可以把所求得的两个未知数的值代入原方程组，进行检验.

## 习题 3.4

用加减法解下列各方程组 (1□16):

1. $\begin{cases} 3x+2y=3, \\ 3x-2y=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 3x-y=15. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+3y=33, \\ 2x-y=-4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2y-3z=8, \\ 7y-5z=-5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+5z=25, \\ 4x+3z=15. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 12x+21y=15, \\ 16x-14y=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 4x-5y=-17. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x-4y+11=0, \\ 3y-4x+53=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4(x+2)=1-5y, \\ 3(y+2)=3-2x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3(x-1)=4(y-4), \\ 5(y-1)=3(x+5). \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{3}=13, \\ \dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3z}{4}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4x}{5}+\dfrac{5z}{6}=\dfrac{7}{15}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ 4(x+y)-5(x-y)=2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{m+n}{3}-\dfrac{n-m}{4}=-0.46, \\ 4m+\dfrac{3}{4}n=-2.59\ . \end{cases}$

15. $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3}=2.$

[提示: 可以取任意两式相等, 组成方程组. 例如, $\dfrac{x+y}{5}=2$ 与 $\dfrac{x-y}{3}=2$.]

16. $\begin{cases}(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8),\\(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1).\end{cases}$

## 3.5 含有字母系数的二元一次方程组的解法

解含有字母系数的二元一次方程组的方法, 和数字系数的二元一次方程组的解法一样, 可以采用代入消元法或者加减消元法. 现在举例来说明.

**例 1** 用代入法解关于 $x$ 和 $y$ 的方程组:

$$ax-by=a^2+b^2, \tag{1}$$

$$x-y=2a \qquad (a\neq b). \tag{2}$$

**[解]** 从 $(2)$, 得

$$y=x-2a, \tag{3}$$

代入 $(1)$, 得

$$ax-b(x-2a)=a^2+b^2,$$
$$ax-bx=a^2+b^2-2ab,$$
$$(a-b)x=(a-b)^2.$$

因为 $a\neq b$,$a-b\neq 0$, 两边都除以 $a-b$, 得

$$x=a-b.$$

以 $x=a-b$ 代入 $(3)$, 得

$$y=-a-b.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=a-b,\\y=-a-b.\end{cases}$$

检验从略.

**[说明]** 解字母系数的方程组时, 必须注意题目中的条件.

**例 2** 解关于 $x$ 和 $y$ 的方程组:

$$(a-b)x+(a+b)y=2\left(a^2-b^2\right), \tag{4}$$

$$(a+b)x+(a-b)y=2\left(a^2+b^2\right) \qquad (a\neq\pm b, ab\neq 0). \tag{5}$$

**[解]** 用加减法消去 $y$.

因为 $$a\neq b,\quad a-b\neq 0,$$

所以, 可在 (1) 的两边都乘以 $a-b$, 得

$$(a-b)^2x+(a+b)(a-b)y=2\left(a^2-b^2\right)(a-b). \tag{6}$$

因为 $$a\neq -b,\quad a+b\neq 0,$$

所以, 可在 (2) 的两边都乘以 $a+b$, 得

$$(a+b)^2x+(a+b)(a-b)y=2\left(a^2+b^2\right)(a+b). \tag{7}$$

$(3)-(4)$, 得

$$\begin{aligned}&\left[(a-b)^2+(a+b)^2\right]x\\&\quad=2\left(a^2-b^2\right)(a-b)-2\left(a^2+b^2\right)(a+b),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-4abx&=4a^2b-4ab^2,\\-4abx&=-4ab(a+b).\end{aligned} \tag{8}$$

因为 $ab\neq 0$, 所以可在 (5) 的两边都除以 $-4ab$, 得

$$x=a+b.$$

以 $x=a+b$ 代入 (1), 得

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b)+(a+b)y&=2\left(a^2-b^2\right),\\(a+b)y&=\quad a^2-b^2.\end{aligned} \tag{9}$$

因为 $a+b\neq 0$,(6) 的两边都除以 $a+b$, 得

$$y=\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=a+b,\\y=a-b.\end{cases}$$

检验从略.

**习题 3.5**

解下列关于无和!/的方程组 (1□8):

1. $\begin{cases}x+y=a+b,\\5x-7y=5b-7a.\end{cases}$

2. $\begin{cases}3x+y=2a+b,\\x-3y=2b-a.\end{cases}$

3. $\begin{cases}bx+ay=ab,\\y-mx=b\end{cases}\quad(am+b\neq 0).$

4. $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3a,\\x-y=a.\end{cases}$

5. $\begin{cases}mx+y=2m+1,\\x-my=2-m.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x+2y=(m+n)^2,\\x-2y=(m-n)^2.\end{cases}$

7. $\begin{cases}mx-ny=a,\\x-y=b\end{cases}\quad(m\neq n).$

8. $\begin{cases}ax+by=(a+b)(a-b),\\bx-ay=2ab\end{cases}\quad\left(a^2+b^2\neq 0\right).$

# 3.6 用二阶行列式解二元一次方程组

## 1. 二元一次方程组的解的公式

我们来解下面这个方程组:

$$a_1x+b_1y=c_1. \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y=c_2. \tag{2}$$

这里,$a_1$,$a_2$ 和 $b_1$,$b_2$ 分别表示未知数 $x$ 和 $y$ 的系数,$c_1$ 和 $c_2$ 表示常数项,$a_1$,$a_2$,$b_1$,$b_2$ 和 $a_1b_2-a_2b_1$ 都不等于 $0$.

我们先用加减消元法, 在方程 (1) 和 (2) 中消去一个未知数 $y$.

$(1)\times b_2-(3)\times b_1$ 得

因为 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 由 (3) 可得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{3}$$

把 (4) 代入 (1), 得

$$a_1\Big(\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\Big)+b_1y=c_1$$

化简并整理后可得

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{4}$$

这样, 我们就求得方程组的解是

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$$

**[注意]** 上面的解法中, 把 $x$ 的值代入 (1) 求另一未知数 $y$ 的值是比较麻烦的. 为了简便, 我们也可以直接从方程 (1) 和 (2) 中用加减法消去未知数 $x$ 来求得. 如

$(2)\times a_1-(1)\times a_2$ 得

$$\Big(a_1b_2-a_2b_1\Big)y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{5}$$

因为 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 由 (6) 可得

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

上面求出的这个结果，可以作为公式来应用. 例如，解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=5, \\ 5x-3y=2. \end{cases}$$

这里 $a_1=3$,$b_1=4$,$c_1=5$,$b_2=-3$,$c_2=2$.

$a_1b_2-a_2b_1=3\cdot(-3)-5\cdot 4=-9-20=-29,$

$c_1b_2-c_2b_1=5\cdot(-3)-2\cdot 4=-15-8=-23,$

$a_1c_2-a_2c_1=3\cdot 2-5\cdot 5=6-25=-19.$

代入上面的解的公式，即可求得方程组的解是 $\begin{cases} x=\dfrac{23}{29}, \\ y=\dfrac{19}{29}. \end{cases}$

## 2. 二阶行列式

观察上面得出的这个二元一次方程组解的公式，发现分母 $a_1b_2-a_2b_1$ 可以应用下面的方法来计算: 先把两个方程中 $x$,$y$ 的系数排成下面的形式

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & b_1 & \text{实线上两数的积取正号} & +a_1b_2 \\ & \times & & \rightarrow & \\ a_2 & & b_2 & \text{虚线上两数的积取负号} & \underline{\quad -a_2b_1} \ (+ \\ (-) & & (+) & & a_1b_2-a_2b_1 \end{array}$$

如果把 $x$ 的系数 $(a,a_2)$，或者 $y$ 的系数 $(b_1,b_2)$ 改用常数项 $(c_1,c_2)$ 来表示，就可用同样方法来计算 (3) 或者 (4) 中的分子.

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & & b_1 & & +c_1b_2 \\ & \times & & \rightarrow & \\ c_2 & & b_2 & & \underline{\quad -c_2b_1} \ (+ \\ (-) & & (+) & & c_1b_2-c_2b_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & c_1 & & +a_1c_2 \\ & \times & & \rightarrow & \\ a_2 & & c_2 & & \underline{\qquad -a_2c_1} \;(+ \\ (-) & & (+) & & c_1b_2-c_2b_1 \end{array}$$

为了方便起见, 我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

来表示并把它叫做**二阶行列式**, 就是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1,$$

其中,$a_1$、$a_2$、$b_1$、$b_2$ 叫做这个二阶行列式的元素, 横排叫**行**, 竖排叫**列**; 代数式 $a_1b_2-a_2b_1$ 叫做这个行列式的展开式.

把二阶行列式左上角元素与右下角元素的积减去左下角元素与右上角元素的积就可以得到二阶行列式的值, 这个法则通常叫做对角线法则. 例如,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3\times(-4)-2\times(-1)=-12+2=-10.$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ -b^2 & a-b \end{vmatrix} &= (a+b)(a-b)-\left(-b^2\right)\times 1 \\ &= a^2-b^2+b^2=a^2.\end{aligned}$$

## 3. 用二阶行列式解二元一次方程组

应用二阶行列式, 二元一次方程组,

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \left(a_1b_2-a_2b_1\neq 0\right) \qquad \text{(I)}$$

的解, 就可以简单地表示成 $\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \end{cases}$ 其中

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

因为二阶行列式 $D$ 是由方程组 $x$ 和 $y$ 项的系数所组成的, 所以通常把它叫做二元一次方程组的系数行列式, 可以看出, 把二元一次方程组 (I) 中的常数项 $c_1$ 和 $c_2$ 顺次代替系数行列式 $D$ 中的第一列的元素 $a_1$ 和 $a_2$, 就能得到二阶行列式 $D_x$, 代替第二列的元素 $b_1$ 和 $b_2$ 就能得到二阶行列式 $D_y$, 但是应该注意, 应用这种方法写出二元一次方程组的解时, 必须把方程组先写成形如 (I) 的一般形式.

**例 1** 解方程组

$$\begin{cases} 2x - 3y - 12 = 0, \\ 3x + 7y + 5 = 0. \end{cases}$$

**[解]** 原方程组就是

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12, \\ 3x + 7y = -5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 84 - 15 = 69,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 36 = -46.$$

所以方程组的解是:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{69}{23} = 3, \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-46}{23} = -2. \end{cases}$$

**例 2** 解关于 $x$、$y$ 的方程组:

$$\begin{cases} mx + y = m + 1, \\ x + my = 2m \end{cases} (m \neq \pm 1).$$

**[解]**

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m+1)(m-1), \\ D_x &= \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2m & m \end{vmatrix} = m(m+1) - 2m = m(m-1), \\ D_y &= \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 \\ &= (2m+1)(m-1). \end{aligned}$$

$$\because \quad m \neq \pm 1, \quad \therefore \quad D \neq 0.$$

所以方积组的解是:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \dfrac{m}{m+1}, \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{(2m+1)(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \dfrac{2m+1}{m+1}. \end{cases}$$

## 习 题 3.6

1. 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a-b & a^2-ab+b^2 \end{vmatrix}$.

2. 用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y+4=0, \\ x+3y-33=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-8=3y, \\ 7x-5y+5=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+y=5, \\ (a-1)x+2y=2(a+2) \end{cases} \quad (a \neq 3).$

# 3.7　三元一次方程组

## 1.　三元一次方程

现在我们来看下面的一个方程:

$$2x+3y+z=11.$$

这个方程里含有三个未知数 $x$,$y$,$z$, 并且含有未知数的项的次数都是 1 次.

含有三个未知数, 并且含有未知数的项的次数都是 1 次的方程, 叫做**三元一次方程**. 例如, 方程 $2x+3y+z=11$ 就是关于 $x$,$y$,$z$ 的三元一次方程.

任何一个三元一次方程, 经过变形后都可以化成

$$ax+by+cz=d$$

的形式, 这里,$a$,$b$,$c$ 分别叫做 $x$ 的系数,$y$ 的系数,$z$ 的系数;$d$ 是常数项.

例如, 方程 $5(x-2y)+1=2(z+2y)-3$ 化简后, 就可以变成:

$$5x-14y-2z=-4.$$

在方程 $2x+3y+z=11$ 里, 如果使其中的两个未知数各任意取定一个值, 那末就可以求出另一个未知数的值. 例如, 设 $x=1$,$y=2$, 就得出 $z=3$; 设 $x=3$,$y=\dfrac{1}{3}$, 就得出 $z=4$; 设 $x=5$,$y=-4$, 就得出 $z=13$,$\cdots$, 所以

$$\begin{cases} x &= 1, \\ y &= 2, \\ z &= 3; \end{cases} \begin{cases} x &= 3, \\ y &= \dfrac{1}{3}, \\ z &= 4; \end{cases} \begin{cases} x &= 5, \\ y &= -4, \\ z &= 13 \end{cases} \quad \cdots$$

都能够适合于方程 $2x+3y+z=11$, 它们都是这个方程的解. 很明显, 任何一个三元一次方程都有无数多个解.

## 2. 三元一次方程组和它的解法

含有三个相同未知数的三个一次方程所组成的方程组, 叫做**三元一次方程组**. 例如

$$2x+3y+z=11, \tag{1}$$

$$x+y+z=6, \tag{2}$$

$$3x-y-z=-4. \tag{3}$$

就是一个三元一次方程组.

解二元一次方程组时, 我们已经知道解方程组的基本方法是消元. 同样的, 要解三元一次方程组我们也可以用消元的方法, 一般的步骤是:

(1) 先从方程组的三个方程里, 设法消去一个未知数, 得出其它两个未知数的两个二元一次方程;

(2) 解由这两个二元一次方程所组成的二元一次方程组, 求出这两个未知数的一对值;

(3) 把求得的这一对值, 代入原方程组里的任何一个方程, 求出先前被消去的那个未知数的值;

(4) 把求得的这三个未知数的值结合在一起, 就得到原方程组的解.

例如, 上面这个方程组可以这样来解;

$(1)-(2)$, 得

$$x+2y+5. \tag{4}$$

$(2)+(3)$, 得

$$4x-y=2. \tag{5}$$

解 (4),(5) 组成的方程组 $\begin{cases} x+2y=5, \\ 4x-y=2, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

把 $x=1$,$y=2$ 代入 (2), 得

$$1+2+z=6,$$

$$\therefore \quad z=3.$$

验算后可知 $\begin{cases} x & =1, \\ y & =2, \\ z & =3 \end{cases}$ 就是原方程组的解.

**[注意]** 上面第一步消去 $z$ 时, 也可以应用代入法. 例如由 (2) 可得 $z=6-(x+y)$, 把它分别代入 (1) 和 (3), 就可以得出一个二元一次方程组. 具体解法, 留给读者.

下面我们再举两个例子.

**例 1** 解方程组:

$$3x+2y+z=14, \tag{1}$$

$$x+y+z=10, \tag{2}$$

$$2x+3y-z=1. \tag{3}$$

**[审题]** 先消去 $z$, 得出只含有 $x$,$y$ 的二元一次方程组. 因为 (1) 和 (3) 以及 (2) 和 (3) 中 $z$ 的系数都分别是相反的数 $+1$ 和 $-1$, 所以只要把 (1) 和 (3) 相加,(2) 和 (3) 相加, 就可以消去 $z$.

**[解]** $(1)+(3)$, 得 $$5x+5y=15,$$
就是

$$x+y=3. \tag{4}$$

$(2)+(3)$, 得

$$3x+4y=11. \tag{5}$$

解 (4) 和 (5) 组成的二元一次方程组, 得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

以 $x=1, y=2$ 代入 (2), 得

$$1+2+z=10, \quad \therefore \quad z=7.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x & =1, \\ y & =2, \\ z & =7. \end{cases}$$

检验从略.

**[说明]** 1. 要消去一个未知数, 可以利用已知三个方程中的任意两个, 只要选择运算比较简便的. 本题中, 如果消去 $x$ 或者 $y$ 显然就比较麻烦.

2. 在解方程过程中, 如果方程的各项系数有公约数时, 可以约简, 免得运算复杂. 如本题中 $5x+5y=15$, 就应该约简成 $x+y=3$.

3. 求得两个未知数的值后, 可以把这两个未知数的值代入已知三个方程中的任意一个, 只要选择系数比较简单, 使计算简便. 如本题中, 以 $x=1, y=2$ 代入 (1), 那末 $3+4+z=14$, 同样可以得出 $z=7$.

**例 2** 解方程组

$$2x+6y+3z=6, \tag{1}$$

$$3x+15y+7z=6, \tag{2}$$

$$4x-9y+4z=9. \tag{3}$$

**[解]** 先消去 $x$.

$(1)\times 2-(3)$,

$$4x+12y+6z=12$$

$$\begin{array}{r} 4x - \ \ 9y + 4z = \ \ 9(- \\ \hline 21y + 2z = \ \ 3 \end{array} \tag{4}$$

$(2) \times 2 - (1) \times 3$,

$$\begin{array}{r} 6x + 30y + 14z = 12 \\ 6x + 18y + \ \ 9z = 18(- \\ \hline 21y + 5z = -6 \end{array} \tag{5}$$

解 (4) 和 (5) 组成的二元一次方程组, 得

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}, \\ z = -2. \end{cases}$$

以 $y = \dfrac{1}{3}$,$z = -2$ 代入 (1), 得

$$2x + 2 - 6 = 5, \quad \therefore \quad x = 5.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x & = 5, \\ y & = \dfrac{1}{3}, \\ z & = -2. \end{cases}$

检验从略.

**例 3** 解方程组:

$$x + y = 20, \tag{1}$$

$$y + z = 19, \tag{2}$$

$$x + z = 21. \tag{3}$$

这个题目, 用代入法或者加减法都可以解. 现在另一种解法.

**[解]** 因为原方程组里 $x$,$y$,$z$ 的系数都相同, 所以

$(1) + (2) + (3)$,

$$2(x + y + z) = 60,$$

$$\therefore \quad x + y + z = 30. \tag{4}$$

$(4)-(1)$,

$$z=10.$$

$(4)-(2)$,

$$x=11.$$

$(4)-(3)$,

$$y=9.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x &= 11, \\ y &= 9, \\ z &= 10. \end{cases}$$

检验从略.

## 习题 3.7

解下列各方程组:

1. $\begin{cases} x+2y+3z=11, \\ x-y+4z=10, \\ x+3y+2z=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x+6y+7z=100, \\ x-2y+z=0, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-z=4, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=3, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-7y=-10, \\ 9y+4z=18, \\ 11x+8z=-19. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=27, \\ y+z=33, \\ x+z=30. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{10}=\dfrac{z}{5}, \\ 2x+3y=44. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+z+u=11, \\ x+2y+3z+4u=34, \\ 2x+3y+4z+u=25, \\ 3x+4+2z+u=22. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y+z=7, \\ y+z+u=15, \\ z+u+x=11, \\ u+x+y=9. \end{cases}$

[提示: 第 6 题, 可以把第一个方程写成两个二元一次方程. 第 7 题, 先消去其中一个未知数, 得出一个三元一次方程组.]

## 3.8 可化为一次方程组的分式方程组的解法

含有分式方程的方程组叫做**分式方程组**, 例如,

$$\begin{cases} 2x-y=3, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-1, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-6 \end{cases}$$

等等都是分式方程组. 第一个方程组里只有一个方程是分式方程, 第二个方程组里, 两个方程都是分式方程.

下面我们研究可以化为一次方程组来解的分式方程组的解法.

**例 1** 解方程组:

$$\frac{5}{x+2}-\frac{1}{y+3}=0, \tag{1}$$

$$\frac{y+5}{x-2}=3. \tag{2}$$

**[解]** 先把原方程组变形成整式方程组.

方程 (1) 的两边都乘以 $(x+2)(y+3)$, 并加以整理, 得

$$5(y+3)-(x+2)=0,$$

就是

$$-x+5y=-13. \tag{3}$$

方程 (2) 的两边都乘以 $(x-2)$, 得

$$y+5=3(x-2), \tag{4}$$

就是

$$3x-y=11. \tag{5}$$

解 (3) 和 (4) 组成的方程组, 得

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

把 $x = 3$,$y = -2$ 代入原方程组 M 的方程 (1) 和 (2), 都能适合. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

**[说明]** 由于把分式方程变形成整式方程, 所以从解整式方程组中所得到的解, 必须代入原分式方程组中进行检验; 如果适合, 就是原方程组的解, 如果不适合, 就是增解, 应该把它去掉, 这点和第一章中解一元分式方程时必须进行检验是同样的道理.

**习题 3.8 (1)**

解下列各方程组:

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{x-1}{y+3} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{1}{y+4}, \\ \dfrac{y+2}{x-2} + 1 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{y+2}{x+1} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{2x-5}{4} - \dfrac{3y+4}{3} = \dfrac{5}{12}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} = 0, \\ \dfrac{x}{x+4} - \dfrac{y+1}{y-3} = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+15} = \dfrac{y-6}{y+2}, \\ \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{y-1}. \end{cases}$

有些特殊形式的分式方程组, 我们可以利用改变未知数的方法, 把它变成一次方程组再解, 下面举例来说明.

**例 2** 解方程组:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -1, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} - \frac{4}{y} = -6. \qquad (2)$$

**[审题]** 观察这个方程组, 可以看出,

$$\frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{3}{y} = 3 \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{4}{y} = 4 \cdot \frac{1}{y}.$$

如果把 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{y}$ 看做新的未知数, 那末它就可以变形成二元一次方程组的形式, 先求出 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{y}$ 的值, 然后再求 $x$ 和 $y$ 的值.

**[解]** 设 $\frac{1}{x} = u, \quad \frac{1}{y} = v$; 那末原方程组就变成:

$$2u + 3v = -1, \qquad (3)$$

$$u - 4v = -6. \qquad (4)$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} u = -2, \\ v = 1. \end{cases}$$

就是
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = -2, \\ \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

因此
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = 1. \end{cases}$$

把 $x = -\frac{1}{2}, y = 1$ 代入原方程组都能适合. 所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = 1. \end{cases}$

**[说明]** 1. 象本题这样用新的未知数代替原有的未知数的方法, 叫做**辅助未知数法** (也叫做**换元法**). 以后解方程或者解方程组时

常会用到.

2. 本题如果按例 1 的方法一样, 先化成整式方程, 将要出现含有 $xy$ 的项, 这就超出了二元一次方程组的范围, 不仅目前不能解, 并且解法也比较麻烦. 这样可以看出引入辅助未知数法的优点了.

**例 3** 解方程组:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{5}{2y+3}=-4, \tag{1}$$

$$\frac{6}{x-3}-\frac{2}{2y+3}=5. \tag{2}$$

**[审题]** 利用辅助未知数法, 把 $\dfrac{1}{x-3}$ 和 $\dfrac{1}{2y+3}$ 看做新的未知数, 先求出 $\dfrac{1}{x-3}$ 和 $\dfrac{1}{2y+3}$ 的值, 然后再求 $x$ 和 $y$ 的值.

**[解]** 设 $\dfrac{1}{x-3}=u, \dfrac{1}{2y+3}=v$; 那末原方程组就变成:

$$2u+5v=-4, \tag{3}$$

$$6u-2v=5. \tag{4}$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}, \\ v=-1. \end{cases}$$

就是

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2y+3}=-1. \end{cases}$$

由 $\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2}, \quad x-3=2, \quad \therefore \quad x=5;$

由 $\dfrac{1}{2y+3}=-1,\quad 2y+3=-1,\quad \therefore\quad y=-2.$

以 $x=5$,$y=-2$ 代入原方程组都能适合. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=5, \\ v=-2. \end{cases}$$

**例 4** 解方程组

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=1, \tag{1}$$

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=-3\frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=-9\frac{1}{2}. \tag{3}$$

**[审题]** 把 $\dfrac{1}{x}$,$\dfrac{1}{y}$,$\dfrac{1}{z}$ 看做新的未知数, 用辅助未知数法解这个方程组.

**[解]** 设 $\dfrac{1}{x}=u$,$\dfrac{1}{y}=v$,$\dfrac{1}{z}=w$, 那末原方程组就变成:

$$u-2v+w=1, \tag{4}$$

$$2u+3v-w=-3\frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$3u-v-2w=-9\frac{1}{2}. \tag{6}$$

先消去 $w$.

$(4)+(5)$,

$$3u+2v=-2\frac{1}{2}. \tag{7}$$

$(4)\times 2+(6)$,

$$5u-5v=-7\frac{1}{2}. \tag{8}$$

解 (7) 和 (8) 组成的二元一次方程组, 得

$$\begin{cases} u=-1, \\ v=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

以 $u=-1$,$v=\frac{1}{2}$, 代入 (4), 得

$$-1-1+w=1, \qquad \therefore \quad w=3.$$

就是

$$\begin{cases} \frac{1}{x}=-1, \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{z}=3. \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ z=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

以 $x=-1$,$y=2$,$z=\frac{1}{3}$ 代入原方程组, 都能适合. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ z=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

## 习 题 3.8 (2)

解下列各方程组 (1□8):

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{y}=8, \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=51. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+4}+\dfrac{y}{2}=5, \\ \dfrac{3}{x+4}-\dfrac{y}{3}=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y}=2, \\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{y}=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{10}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}+5=0, \\ \dfrac{15}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}+1=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{5}{2x-1}+\dfrac{2}{3y+4}=3, \\ \dfrac{3}{1-2x}-\dfrac{1}{3y+4}=-\dfrac{5}{6}. \end{cases}$

[提示: 第 6 题中,$1-2x$ 应该先化成 $-(2x-1)$, 然后用辅助未知数法解.]

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{z}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{2}{z}=2\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{3}{y}=-\dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{2}{z}=\dfrac{5}{x}-4. \end{cases}$

解下列关于 $x$ 和 $y$ 的方程组 (9□12):

9. $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases} (a^2\neq b^2).$

10. $\begin{cases} \dfrac{a}{2x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{3y}=-1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{a}{2(x+y)}+\dfrac{b}{3(x-y)}=5, \\ \dfrac{a}{3(x+y)}+\dfrac{b}{2(x-y)}=5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{3a}{2x-2}+\dfrac{2b}{6y-3}=1, \\ \dfrac{b}{1-2y}-\dfrac{a}{1-x}=0. \end{cases}$

[提示:$2x-2$ 和 $6y-3$ 可以分别化成 $2(x-1)$ 和 $3(2y-1)$, 然后用换元法来解.]

## 3.9 列出方程组解应用题

前面我们学过列出一元一次方程来解应用题, 但是遇到问题中所要求的量多于一个的时候, 利用这种解法列出方程有时是比较困难的. 在学过了一次方程组以后, 我们就可以适当多设几个未知数, 列出方程组来求这些未知数, 使解题比较容易. 下面举例来说明.

**例 1** 某生产队用 $1$ 台拖拉机和 4 架畜力双铧犁耕地, 一天共耕了 $128$ 亩. 另外有一块 $244$ 亩的地, 用 $2$ 台拖拉机和 $7$ 架畜力双铧犁也是刚好 $1$ 天耕完. 每台拖拉机和每架畜力双铧犁每天各耕地多少亩?

**[审题]** 这个题目里要求两个未知量, 如果用一元方程来解, 列方程时需要较多的思考, 为了容易列出方程, 我们可以设两个未知数, 列出方程组来解.

**[解]** 设每台拖拉机每天耕地 $x$ 亩, 每架畜力双铧犁每天耕地 $y$ 亩. 那末,

$1$ 台拖拉机和 $4$ 架畜力双铧犁, 一天耕地 $(x+4y)$ 亩;

$2$ 台拖拉机和 $7$ 架畜力双铧犁, 一天耕地 $(2x+7y)$ 亩.

根据题意, 列出方程组:

$$x+4y=128, \tag{1}$$

$$2x+7y=244. \tag{2}$$

$(1)\times 2-(2)$,

$$y=12.$$

以代入 (1), 得

$$x=80.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=80, \\ y=12. \end{cases}$$

检验从略.

答: 每台拖拉机每天耕地 $80$ 亩, 每架畜力双铧犁每天耕地 $12$ 亩.

**例 2** 两种琉酸, 一种浓度是 $60\%$, 另一种浓度是 $90\%$. 现在要配制浓度是 $70\%$ 的硫酸 $300$ 克, 每种硫酸各取多少克?

**[解]** 设取浓度是 $60\%$ 的硫酸 $x$ 克, 浓度是 $90\%$ 的硫酸 $y$ 克. 那末,

浓度是 $60\%$ 的硫酸中取得纯硫酸 $\dfrac{60}{100}\times x$ 克;

浓度是 $90\%$ 的硫酸中取得纯硫酸 $\dfrac{90}{100}\times y$ 克;

浓度是 $70\%$ 的硫酸中应有纯硫酸 $\dfrac{70}{100}\times 300$ 克.

因为纯硫酸的重量相等, 所以可列出方程组:

$$x+y=300, \tag{3}$$

$$\frac{60}{100}\times x+\frac{90}{100}\times y=\frac{70}{100}\times 300. \tag{4}$$

$(2)\times 100\div 30$,

$$2x+3y=700. \tag{5}$$

$(3)-(1)\times 2$,

$$y=100.$$

以 $y=100$ 代入 (1), 得

$$x=200.$$

检验从略.

答: 浓度是 $60\%$ 的硫酸要取 $200$ 克,
浓度是 $90\%$ 的硫酸要取 $100$ 克.

**例 3** 一个工人用普通切削法完成一半任务以后, 改用快速切削法做其余的一半, 因此在 $2$ 小时内完成全部任务. 如果用普通切削法完成全部任务的 $\frac{1}{3}$ 后, 其余的改用快速切削法,$1$ 小时 $50$ 分钟就可以完成全部任务: 单独用普通切削法或者快速切削法完成全部任务, 各需要多少小时?

**[解]** 设用普通切削法完成全部任务, 需要 $x$ 小时, 用快速切削法完成全部任务, 需要 $y$ 小时.

那末, 用普通切削法完成一半任务所需的时间是 $\frac{1}{2}x$ 小时, 用快速切削法完成其余的一半任务所需的时间是 $\frac{1}{2}y$ 小时. 用普通切削法完成全部任务的 $\frac{1}{3}$ 后, 其余的任务就是 $1-\frac{1}{3}$.

根据题意, 列出方程组:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=2, \tag{6}$$

$$\frac{1}{3}x+\left(1-\frac{1}{3}\right)y=1\frac{50}{60}. \tag{7}$$

整理后, 原方程组可以变成:

$$x+y=4, \tag{8}$$

$$x+2y=\frac{11}{2}. \tag{9}$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} x=2\dfrac{1}{2}, \\ y=1\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

检验从略.

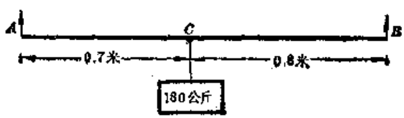
答: 用普通切削法完成全部任务需要 $2\frac{1}{2}$ 小时,

用快速切削法完成全部任务需要 $1\frac{1}{2}$ 小时,

## 习题 3.9 (1)

列出二元方程组解下列各应用题:

1. 两个数的比等于 $5:6$, 它们的和等于 $18.7$, 求这两个数.
2. 用 $5$ 辆胶轮大车和 $4$ 辆卡车一次能运货 $24$ 吨;$10$ 辆胶轮大车和 $2$ 辆卡车一次能运货 $21$ 吨. 一辅胶轮大车和一辆卡车一次各能运货多少吨?
3. 一批机器零件共 $420$ 个. 如果甲先做 $2$ 天, 乙与甲合作, 那末再做 $2$ 天完成. 如果乙先做 $2$ 天, 甲、乙二人合作, 那末再做 $3$ 天完成. 求两人每天各做多少个零件.
4. 一根质置均匀的捧全长是 $1.5$ 米. 在距 $A$,$B$ 两端分别是 $0.7$ 米和 $0.8$ 米的一点 $C$ 的地方, 挂有 $180$ 公斤重的物体, 在 $A$,$B$ 两点各用多少力往上提, 才能使棒 $AB$ 保持平衡? [提示:$A$ 点往上提的力与距离的乘积, 应当等于 $B$ 点往上提的力与 $BC$ 距离的乘积.]




(第 4 题)

5. 某工厂第一车间的人数是第二车间人数的 $\frac{4}{5}$ 少 $30$ 人, 如果从第二车间调 $10$ 个人到第一车间, 那末第一车间的人数是第二车间人数的 $\frac{3}{4}$, 求各车间的人数.
6. 一只船载重量是 $520$ 吨, 容积是 $2000$ 立方米. 现在有甲、乙两种货物, 甲种货物每吨的体积是 $2$ 立方米, 乙种货物

每吨的体积是 $8$ 立方米. 两种货物应读各装多少吨, 才能最大限度利用船的载重量和容积?

[提示: 所谓最大限度利用船的载重量和容积, 就是说, 使甲乙两种货物重量的总和等于 $520$ 吨, 体积的总和等于 $2000$ 立方米.]

7. 甲、乙两工厂, 按计划每月生产 $360$ 架机床; 上个月开展劳动竞赛运动, 甲厂完成了计划的 $112\%$, 乙厂完成了计划的 $110\%$, 结果两厂一共生产了 $400$ 架机床. 上个月每个工厂各超额生产了多少架机床?

8. 玻璃厂熔炼玻璃液, 原料是由石英砂和长石粉混合而成, 要求配料中含二氧化硅 $70\%$. 根据化验, 石英砂中含二氧化硅 $99\%$, 长石粉中含二氧化硅 $67\%$. 在 $3.2$ 吨原料中, 石英砂和长石粉各需多少吨?

9. 两种酒精, 一种含水 $15\%$, 另一种含水 $5\%$. 现在要配制含水 $12\%$ 的酒精 $500$ 克, 每种酒精各需要多少克?

10. 铅蓄电池里需要装每立方厘米重 $1.2$ 克的稀硫酸, 已知浓硫酸每立方厘米重 $1.84$ 克, 水每立方厘米重 $1$ 克. 现在要配制 $2.1$ 升蓄电池用的稀硫酸, 浓硫酸和水各需要多少立方厘米?

[提示: 假定原来体积的和等于后来的体积,$1$ 升 $= 1000$ 立方厘米.]

11. 有一个长方形, 如果它的长增加 $6$ 厘米, 宽减少 $3$ 厘米, 它的面积不变, 如果长和宽各减少 $4$ 厘米, 那末所得的面积比原来的面积少 $104$ 平方厘米. 原来长方形的面积是多少?

12. 某人乘自行车以每小时 $15$ 公里的速度从甲地到乙地去, 回来时因另有别的事情绕路回来多走了 $3$ 公里, 他行车的

速度虽然每小时增加了 $1$ 公里, 但是所费的时间仍旧多用了 $7\frac{1}{2}$ 分钟. 去的路程和回来的路程各多少?

13. 代数式 $ax+b$ 中, 已知 $x=2$ 时, 它的值是 $1.4$,$x=-2$ 时, 它的值是 $-1.8$, 求 $a$ 和 $b$ 的值.

**例 4** 上等稻谷三束, 中等稻谷二束, 下等稻谷一束, 共有谷 $39$ 斗; 上等稻谷二束, 中等稻谷三束, 下等稻谷一束, 共有谷 $34$ 斗; 上等稻谷一束, 中等稻谷二束, 下等稻谷三束, 共有谷 $26$ 斗. 上、中、下三等稻谷每束各有谷多少[①]?

**[解]** 设上等稻谷一束有谷 $x$ 斗, 中等稻谷一束有谷 $y$ 斗, 下等稻谷一束有谷 $z$ 斗.

根据题意, 列出方程组:

$$3x+2y+z=39, \tag{10}$$

$$2x+3y+z=34, \tag{11}$$

$$x+2y+3z=26. \tag{12}$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} x=9\frac{1}{4}, \\ y=4\frac{1}{4}, \\ z=2\frac{3}{4}. \end{cases}$$

检验从略.

① 这是我国古代算书"九章算术"(公元 263 年刘徽重辑) 方程章里的一个题目. 原题是:"今有上禾三秉, 中禾二秉, 下禾一秉, 共有实 $39$ 斗; 上禾二秉, 中禾三秉, 下禾一秉, 共有实 $34$ 斗; 上禾一秉, 中禾二秉, 下禾三秉, 共有实 $26$ 斗. 问上中下禾各一秉有实多少?"古代解这问题用"直除"的方法. 所谓直除, 就是从一个方程累减 (或累加) 另一个方程的意思, 它的原理和加减法解方程组相同.

答: 上、中、下等稻谷每束分别有谷 $9\frac{1}{4}$ 斗, $4\frac{1}{4}$ 斗,$2\frac{3}{4}$ 斗.

**例 5** 用锌、铜、镍三种金属混合成三种不同的合金, 第一种合金所含锌、铜、镍的重量的比是 $2:3:1$; 第二种合金它们的比是 $2:4:3$; 第三种合金它们的比是 $1:2:1$. 现在要用这三种合金混合成另一种新的合金, 使其中含锌 $10$ 克, 铜 $18$ 克, 镍 $10$ 克, 问这三种合金各用多少克?

**[审题]** 第一种合金中含锌、铜、镍的比是 $2:3:1$, 实际意义就是锌占这种合金的 $\frac{2}{6}$, 铜占 $\frac{3}{6}$, 镍占 $\frac{1}{6}$. 现在要用这三种合金混合成另一种新的合金, 就是要从三种合金中共得到锌 $10$ 克, 铜 $18$ 克, 镍 $10$ 克.

**[解]** 设三种合金分别用 $x$ 克,$y$ 克和 $z$ 克. 根据题意, 得

$$\frac{2}{6}x+\frac{2}{9}y+\frac{1}{4}z=10, \tag{13}$$

$$\frac{3}{6}x+\frac{4}{9}y+\frac{2}{4}z=18, \tag{14}$$

$$\frac{1}{6}x+\frac{3}{9}y+\frac{1}{4}z=10. \tag{15}$$

解这方程组, 得

$$\begin{cases} x=12, \\ y=18, \\ z=8. \end{cases}$$

检验从略.

答: 第一、第二、第三种合金分别用 $12$ 克、$18$ 克扣 $8$ 克.

## 习题 3.9 (2)

列出三元方程组解下列各应用题:

1. 有一个三位数, 它的十位上的数等于个位上的数与百位上的数的和, 个位上的数与十位上的数的和等于 $8$, 百位上的数与个位上的数互相调换后所得的三位数比原来的三位数大 $99$. 求这个三位数.
2. 三个数的和等于 $51$, 第一个数除以第二个数, 得到商是 $2$ 而余 $5$; 第二个数除以第三个数, 得到商是 $3$ 而余 $2$, 这三个数各是多少?
3. 汽车在平珞上每小时走 $30$ 公里, 上坡珞每小时走 $28$ 公里, 下坡路每小时走 $35$ 公里. 现在走 $142$ 公里的路程, 去的时候用 $4$ 小时 $30$ 分钟, 回来的时候用 $4$ 小时 $42$ 分钟, 这段路平路有多少公里? 去的时上坡路、下坡路各有多少公里? [提示: 去时的上坡路、下坡路分别是回来时的下坡路和上坡路.]
4. 一个车间每天能生产甲种零件 $300$ 个, 或者乙种零件 $500$ 个, 或者丙种零件 $600$ 个, 甲、乙、丙三种零件各取一个配成一套. 现在要在 $28$ 天内使产品成套, 生产甲、乙、丙三种零件应该各用几天?
5. 某工厂一个车间加工机轴和轴承, 一个人每天平均可以加工机轴 $15$ 个或者轴承 $12$ 个, 该车间共有 $90$ 人, 问应当分配多少个人加工机轴, 多少个人加工轴承, 才能使每天生产的机轴与轴承配套 (一个轴承和一个机轴配成一套)?
6. 甲种合金含铅、锑、锡的重量的比是 $5:2:1$; 乙种合金含铅和锑的比是 $7:1$; 丙种合金含铅和锡的比是 $2:1$. 现在要得到一种铸造铅字用的合金 $100$ 公斤, 使其中含铅 $82$ 公斤, 锑 $15$ 公斤, 锡 $3$ 公斤, 甲乙丙三种合金应当各取多少公斤 (精确到 $0.1$ 公斤), 才能使溶化后得到所需要的合金?

7. 有三种化学肥料; 甲种每公斤含氮 $53$ 克、磷 $8$ 克、钾 $2$ 克; 乙种每公斤含氮 $64$ 克、磷 $10$ 克、钾 $0.6$ 克; 丙种每公斤含氮 $70$ 克、磷 $5$ 克、钾 $1.4$ 克, 某生产队要把上面三种化肥混成一种化肥, 总重 $23$ 公斤, 其中共含磷 $149$ 克、钾 $30$ 克, 三种化肥各需多少公斤? 其中共含氮多少克?

8. 代数式 $ax^2+bx+c$, 在 $x=1$ 时的值是 $0$, 在 $x=2$ 时的值是 $3$, 在 $x=-3$ 时的值是 $28$. 求这个代数式.

   [提示: 分别以 $x=1$,$x=2$,$x=-3$ 代入, 列出关于 $a$,$b$,$c$ 的三元一次方程组, 求 $a$,$b$,$c$ 的值.]

**例 6** 甲、乙两个工人共同工作, 原计划 $6$ 天完成全部任务. 他们共同工作 $4$ 天后, 乙因为另有紧急任务需要调走, 余下的任务由甲单独工作,$5$ 天才全部完成. 如果甲、乙两工人单独完成这一任务各要多少天?

**[解]** 设甲单独完成这一任务需要 $x$ 天, 乙单独完成这一任务需要 $9$ 天. 那末, 甲单独工作一天能完成全部任务的 $\frac{1}{x}$, 乙能完成全部任务的 $\frac{1}{y}$; 甲、乙两人共同工作一天, 能完成全部任务的 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

根据题意, 列出方程组

$$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=4, \tag{16}$$

$$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{5}{x}=1. \tag{17}$$

整理后, 原方程组可以变成

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1, \tag{18}$$

$$\frac{9}{x}+\frac{4}{y}=1. \tag{19}$$

设 $\frac{1}{x}=u,\frac{1}{y}=v$, 那末方程 (3),(4) 就变成

$$6u+6v=1, \tag{20}$$

$$9u+4v=1. \tag{21}$$

解 (5),(6) 组成的方程组, 得

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{15}, \\ v=\dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

就是 $$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{15}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10}. \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=15, \\ y=10. \end{cases}$$

把 $x=15$,$y=10$ 代入方程 (1) 和 (2) 都能适合. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=15, \\ y=10. \end{cases}$$

答: 甲单独完成这一任务需要 15 天,
乙单独完成这一任务需要 10 天.

**例 7** 轮船顺流航行 $80$ 公里, 逆流航行 $42$ 公里, 共用 $7$ 小时. 另一次在同样时间里, 顺流航行了 $40$ 公里, 逆流航行了 $70$ 公里. 求轮船在静水中的速度和水流的速度.

**[解]** 设轮船在静水中的速度是每小时 $x$ 公里, 水流的速度是每小时 $y$ 公里. 那末, 顺流航行的速度就是每小时 $(x+y)$ 公里, 逆流航行的速度就是每小时 $(x-y)$ 公里.

根据题意, 列出方程组:

$$\frac{80}{x+y}+\frac{42}{x-y}=4, \quad (1)$$

$$\frac{40}{x+y}+\frac{70}{x-y}=7. \quad (2)$$

设 $\frac{1}{x+y}=u$, $\frac{1}{x-y}=v$, 那末原方程组就变成

$$\begin{cases} 80u+42v=7, \\ 40u+70v=7. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} u=\frac{1}{20}, \\ v=\frac{1}{14}. \end{cases}$$

就是

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=\frac{1}{20}, \\ \frac{1}{x-y}=\frac{1}{14}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x+y=20, \\ x-y=14. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} x=17, \\ y=3. \end{cases}$$

把 $x=17$,$y=3$ 代入方程 (1) 和 (2) 都能适合, 所以这就是原方程组的解.

答: 轮船在静水中的速度是每小时 $17$ 公里, 水流的速度是每小时 $3$ 公里.

**习题 3.9 (3)**

列出方程组解下列应用题:

1. 两只水管同时开放, 经过 $1$ 小时 $20$ 分钟注满水池. 如果第一只水管开放 $10$ 分钟, 第二只水管开放 $12$ 分钟, 那末只能注满水池的 $\frac{2}{15}$. 每只水管单独注满水池各需多少小时?
2. 一只汽艇顺流航行了 $24$ 公里, 到达目的地后, 逆流回来, 共用 $2$ 小时 $20$ 分钟. 另一次在 $1$ 小时 $20$ 分钟内, 顺流航行了 $8$ 公里, 逆流航行了 $18$ 公里. 求汽艇在静水里的速度和水流的速度.
3. 甲、乙两工人合作, 在 $12$ 天内可以完成一件工作. 如果甲工作 $2$ 天, 乙工作 $3$ 天, 那末他们只能完成全部工作的 $20\%$. 两人单独完成这件工作各要多少天?
4. 一个水池有甲、乙、丙三个进水管. 甲、乙两管同时开放,$1$ 小时 $12$ 分钟可以注满水池, 乙、丙两管同时开放,$2$ 小时可以注满水池; 甲、丙两管同时开放,$1$ 小时 $30$ 分钟可以注满水池. 甲、乙、丙三个水管单独开放, 各要多少小时才能注满水池?
5. 甲、乙、丙三人合做一件工程,$15$ 天可以完成. 如果甲、乙合做 $10$ 天, 其余的由丙单独做, 那末还要 $30$ 天才能完成; 如果甲、丙合做 $20$ 天, 其余的由乙单独做, 那末还要 $8$ 天才能完成. 问当甲、乙、丙每人单独做, 要多少天才能完成这项工程?

## *3.10 待定系数法

这一节里, 我们将学习一次方程组在解某些数学问题中的应用. 先来看下面的问题:

不做直式除法, 怎祥求多项式 $2x^3 - x^2 + 5x + 6$ 除以多项式 $x + 2$ 的商式和余式?

在代数第一册里学习带余式的除法时，我们已经知道，被除式、除式、商式和余式之间，有着如下的关系：

$$被除式 = 除式 \times 商式 + 余式. \tag{1}$$

这里商式的次数，应该是被除式的次数与除式的次数的差，而余式的次数至少要比除式的次数少 $1$.

根据这一事实，可以确定：

1. 因为被除式 $2x^3 - x^2 + 5x + 6$ 是 $x$ 的三次式，除式 $x + 2$ 是 $x$ 的一次式，所以所求的商式应该是 x 的二次式；

2. 因为除式 $x + 2$ 是一次式，所以所求的余式，只能是一个常数.

这样，为了要求出这个商式和余式，我们不妨引进一些未知数. 设商式中二次项、一次项和常数项的系数分别是 $A$、$B$ 和 $C$，即商式是 $Ax^2 + Bx + C$，余式 $D$，是代入 (1) 就可得到一个恒等式

$$2x^3 - x^2 + 5x + 6 = (x + 2)\big(Ax^2 + Bx + C\big) + D,$$

也就是

$$\begin{aligned} &2x^3 - x^2 + 5x + 6 \\ &\quad = Ax^3 + (2A + B)x^2 + (2B + C)x + (2C + D) \end{aligned} \tag{2}$$

因为 (2) 是一个恒等式，等号两边的这两个三次式都已写成标准形式，对应项的系数要分别相等[①]，由此我们就可列出一个关于未知数 $A$、$B$、$C$、$D$ 的方程组

$$\begin{cases} A = 2, \\ 2A + B = -1, \\ 2B + C = 5, \\ 2C + D = 6. \end{cases} \quad 解之，得 \quad \begin{cases} A = 2, \\ B = -5, \\ C = 15, \\ D = -24. \end{cases}$$

代入假设的商式和余式，于是就可求得

① 这是两个多项式恒等的定理，严格的证明，今后在代数第四册里将会学到.

商式是 $2x^2-5x+15$, 余式是 $-24$.

象上面这样的解题方法, 叫做**待定系数法**, 我们解题时开始引进的那些未知数 $A$、$B$、$C$、$D$ 叫做待定系数.

待定系数法是数学里一种重要的解题方法, 应用时一般有以下的步骤:

1. 先引进一些待定系数, 根据题设列出一个恒等式;
2. 把列出的恒等式化简, 然后根据两个多项式恒等的性质列出一个方程组;
3. 解方程组求出那些待定系数, 作出最后的结论.

下面我们再举几个应用待定系数法解题的例子.

**例 1** $a$、$b$ 是什么数值时, 多项式 $x^4-5x^3+11x^2+ax+b$ 能被 $x^2-2x+1$ 整除? 并求出它的商式.

**[审题]** 根据题意, 多项式能为除式整选, 所以余数一定是 $0$. 现在被除式是四次多项式, 除式是二次式, 所以商式一定是二次多项式, 并且被除式的最高项是 $x^4$, 除式的最高项是 $x^2$, 所以商式的最高项一定是 $x^2$ 项.

**[解]** 设商式 $x^2+mx+n$, 那末

$$\begin{aligned}x^4+5x^3+11x^2+ax+b&=\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+mx+n\right)\\&=x^4+mx^3+nx^2-2x^3-2mx^2-2nx+x^2+mx+n\\&=x^4+(m-2)x^3+(n-2m+1)x^2+(-2nm)x+n\end{aligned}$$

因为上式是恒等式, 所以对应项的系数相等.

就是
$$\begin{cases}m-2=-5,\\n-2m+1=11,\\-2n+m=a,\\n=b.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} m=-3, \\ n=4, \\ a=-11, \\ b=4. \end{cases}$$

所以,$a=-11$,$b=4$, 商式是 $x^2-3x+4$.

**例 2** 把分式 $\dfrac{4x-5}{2x^2-5x-3}$ 化成两个分式的和, 使这两个分式的分母分别是 $2x+1$ 和 $x-3$.

**[审题]** 观察已知分式的分母 $2x^2-5x-3$, 它可以分解成两个一次因式,$2x+1$ 和 $x-3$, 用来作为另两个分式的分母, 现在的问题是这两个分式的分子是什么? 为此我们可以先作出一个假设. 因为两个分母的代数式都是一次式, 那末它们的分子都应该是常数, 所以可设它们的分子分别是 $A$ 和 $B$.

**[解]** 设两个分式的分子分别为 $A$ 和 $B$. 那末
$$\frac{4x-5}{2x^2-5x-3}=\frac{A}{2x+1}-\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-3)}$$
$$=\frac{(A+2B)x+(-3A+B)}{2x^2-5x-3}$$

因为上式是恒等式, 现在两个分式的分母相同, 所以它们的分子必须是恒等式, 因此对应项系数相等, 就是
$$\begin{cases} A+2B=4, \\ -3A+B=-5. \end{cases}$$

解这个方程组, 得
$$\begin{cases} A=2, \\ B=1. \end{cases}$$

所以,
$$\frac{4x-5}{2x^2-5x-3}=\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{x-3}.$$

**[说明]** 这种类型的题目叫做分一个分式为部份分式问题, 以后在代数第四册中将作专门研究.

**习 题 3.10**

1. 用待定系数法求 $3x^3+5x^2-2x+15$ 除以 $x+3$ 所得的商式和余式; 并且用直式除法检验其结果是否正确?
2. 用待定系数法求 $\left(2x^4+3x^3+4x^2+x-2\right)\div\left(x^2-x+1\right)$ 的商式和余式、
3. 已知 $x^4+4x^3+6ax^2+4bx+c$ 被 $x^3+3x^2+9x+3$ 整除, 求 $a$、$b$、$c$ 的值.
4. 把分式 $\dfrac{x+7}{6x^2+7x-3}$ 化成两个分式的和, 使这两个分式的分母分别是 $3x-1$ 和 $2x+3$.
5. 把分式 $\dfrac{3x-9}{\left(x^2-1\right)(x-2)}$ 化成分式 $\dfrac{A}{x-1}$、$\dfrac{B}{x+1}$、$\dfrac{C}{x-2}$ 的和, 求 $A$、$B$、$C$ 的值.

# 本章提要

1. **几个重要概念及其一般形式**

(1) 二元一次方程:

$$ax+by=c \quad (a\neq 0, b\neq 0).$$

(2) 二元一次方程组:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad (x \text{ 或 } y \text{ 的系数不能全为 } 0).$$

(3) 三元一次方程:

$$ax+by+cz=d.$$

(4) 三元一次方程组:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$ ($x$或$y$或$z$的系数不能全为0).

2. **二元一次方程组的解法**

(1) 代入消元法, (2) 加减消元法, (3) 行列式法.

3. 二元一次方程组解的三种情况

设 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ ($a_1$、$a_2$、$b_1$、$b_2$ 都不等于 0).

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">情　况</th><th rowspan="2">方程组解的结果</th></tr>
<tr><th>从系数看</th><th>从行列式看</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>当 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$</td><td>当$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$</td><td>有唯一个解 $\begin{cases} x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \end{cases}$ 即$\begin{cases} x=\frac{D_x}{D} \\ y=\frac{D_y}{D} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$</td><td>当$D=0$而$D_x\neq 0$或 $D_x \neq 0$</td><td>没有解</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$</td><td>当$D=0$而$D_x=0$或 $D_x=0$</td><td>有无数多个解</td></tr>
</table>

4. **三元 (三元以上) 一次方程组的解法** 用消元法逐次消元, 最后转化为解一个二元一次方程组的问题.

5. **可化为一次方程组的分式方程组的解法**

(1) 一般方法: 去分母, 把原方程组中的各个分式方程变成整式方程, 求出解后再检验;

(2) 换元法.

6. **待定系数法** 先根据题意, 假设一个或几个未知系数, 列

出一个恒等式，然后利用两个多项式恒等，它们对应项的系数必须相等的原理，列出方程组，从而求出假设的未知系数.

## 复习题三 A

解下列各二元一次方程组 (1□4):

1. $\begin{cases} x(y+1)-y(x-1)=8, \\ y=x-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2x-3y+1}{2}+\dfrac{3x-2y-3}{3}=1, \\ \dfrac{x+2y+6}{4}-\dfrac{4x+2y-2}{5}=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{3x-2y}{2}+1, \\ \dfrac{3x}{2}-\dfrac{4y}{3}=\dfrac{3x+4y}{6}-1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+15}=\dfrac{y-1}{y-9}, \\ \dfrac{x-3}{x}=\dfrac{y+6}{y+9}. \end{cases}$

5. 解下列关于 $x$,$y$ 的二元一次方程组:

(1) $\begin{cases} ax+by=a^2+2a+b^2, \\ bx+ay=a^2+2b+b^2 \end{cases} \qquad (a^2-b^2\neq 0)$;

(2) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)x+\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)=4, \\ \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2 \end{cases} \qquad (a>b>0)$.

解下列各三元一次方程组 (6□7):

6. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ y:z=2:3, \\ 3x=z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=8, \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}=10, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=2. \end{cases}$

8. 解下列关于 $x$,$y$,$z$ 的三元一次方程组:

$$\begin{cases} x+y=3m, \\ x+z=4m, \\ y+z=5m. \end{cases}$$

9. 当 $a$ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} ax+3y=9, \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 才有唯一的解?

10. 一个工厂去年的总产值比总支出多 $500$ 万元, 今年的总产值比去年增加 $15\%$, 总支出节约 $10\%$, 因此总产值比总支出多 $950$ 万元. 求公年的总产值和总支出.

11. 从某人民公社到械市, 要先走坡道后走平路. 一个通讯员骑自行车以每小时 $12$ 公里的速度下坡, 然后以每小时 $9$ 公里的速度通过平路, 到达城市共用 $55$ 分钟. 他回来的时候, 以每小时 $8$ 公里的速度通过平路, 然后以每小时 $4$ 公里的速度上坡, 回到公社就用了 $1\dfrac{1}{2}$ 小时, 问从该人民公社城市有多少公里?

    [提示: 先要分别求出坡道和平路各有多少公里.]

12. 甲、乙两仓库共存粮的 $95$ 吨, 现在从甲仓库运出它的存粮的 $\dfrac{2}{3}$, 从乙仓库运出它的存粮的 $40\%$, 那末乙仓库所余的粮食是甲仓库的 $2$ 倍. 甲、乙两仓库原来各存粮多少吨?

13. 甲种铁矿右含铁的百分数是乙种铁矿石的 $1.5$ 倍, 甲种铁矿石 $5$ 份和乙种铁矿石 $3$ 份混合, 就含铁 $52.5\%$. 求甲、乙两种矿石含铁的百分数.

14. 代数式 $ax+by$, 在 $x=5$,$y=2$ 的时候, 它的值是 $7$; 在 $x=8$,$y=5$ 的时候, 它的值是 $4$. 求这个代数式.

# 复习题三 B

解下列各二元一次方程组 (1□2):

1. $\begin{cases}(x+2)^2+(y-3)^2=x^2+y^2,\\(x-3)^2-(y+2)^2=x^2-y^2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=18,\\\dfrac{9}{x+y}-\dfrac{10}{y-x}=66.\end{cases}$

   [提示: 把 $y-x$ 变成 $-(x-y)$.]

3. 解下列关于 $x$,$y$ 的二元一次方程组:

4. 解下列各三元一次方程组:

5. 解下列关于 $x$、$y$、$z$ 的三元一次方程组:

$$\begin{cases}x-5y-3z=a,\\3x-5y-z=b,\\3y-x+5z=c.\end{cases}$$

6. 解方程组:

$$\begin{cases}(m-1)^2x+\big(m^2-1\big)y=(m+1)^2,\\(2m-1)x+(m+1)y=m^2-1\end{cases}\quad(m\neq 0,m\neq\pm1).$$

7. $A$,$B$ 两城的距离是 $50$ 公里. 甲乘自行车从 $A$ 往 $B$, 出发 $1$ 小时 $30$ 分钟后, 乙乘摩托车也从 $A$ 出发往 $B$. 已知乙的速度是甲的速度的 $2.5$ 倍, 并且乙比甲早到 $1$ 小时, 求各人的速度.

8. 一只轮船在一条江里顺流航行 $100$ 公里, 逆流航行 $64$ 公里, 共用 $9$ 小时, 如果逆流航行 $80$ 公里, 顺流航行 $80$ 公里, 那末所需要的时间也是 $9$ 小时. 求轮船在静水里的速度和水流速度.

9. 代数式在 $ax^2+bx+c$, 在 $x=-1$,$x=3$,$x=\frac{1}{2}$ 的时候, 它的值分别是 10,14,4. 求这个代数式.

10. 某车间每天能生产甲种零件 500 只, 或者乙种零件 600 只, 或者丙种零件 750 只, 甲、乙、丙三种零件各一只配成一套, 现在要在 30 天内生产最多的成套产品, 问甲、乙、丙三种零件各应生产几天?

11. 一列客车和一列货车在平行的轨道上同向行驶, 客车的车身长 200 米, 货车的车身长 380 米. 客车的速度比较快, 它从后面赶上货车, 如果从车头赶上到车尾超过的时间为 1 分钟, 而两车的速度之比是 $5:3$, 求各车的平均速度, 如果两车在平行的轨道上相向行驶, 从车头相遇到车尾相离的时间需要多少秒钟?

[提示: 快车在 1 分钟内从赶上并且超过货车, 实际行驶的距离是快车和货车的车身长的和, 就是 $(200+280)$ 米.]

12. 把分式 $\dfrac{5x^2+14x-1}{2x^3+3x^2-3x-2}$ 化成三个分式的和, 使它们的分母分别为 $x-1$,$x+2$,$2x+1$.

# 第三章 测验题

1. 证明恒等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 \\ a_2 & kb_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 7x-3y-15=0, \\ 5x+6y-27=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\dfrac{2y+4}{3}, \\ y=\dfrac{3x-4}{2}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{2x-(x-y)}{6}=\dfrac{x+y}{5}-1, \\ \dfrac{y-2(x+y)}{8}=y-x. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8}, \\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8}; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x-y-2z=-10, \\ 4x-y-4x-4z-10=0, \\ 3x+4y-z-8=0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{2}=\dfrac{x+y}{3}, \\ x+y+z=9; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{10}, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=-\dfrac{5}{6}; \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{5}{2(2y-3)}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{10}{3-2y}-\dfrac{1}{3(2-x)}=2\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

3. 甲乙两人做同样的机器零件. 如果甲先做 $1$ 天, 乙再开始做,$5$ 天后, 两人做的零件就同样多. 如果甲先做 $30$ 个, 乙再开始做,$4$ 天后乙反而多做 $10$ 个. 求两人每天各做多少个.

4. 某工厂今年第一季度生产的甲乙两神机床比去年同期多 $72$ 台, 增长了 $30\%$, 其中甲种机床增长了 $40\%$, 乙种机床增

长了 $16\%$. 求今年第一季度生产甲种机床和乙种机床各多少台.

5. 有三种合金: 按重量算, 甲种含金 $5$ 份、银 $2$ 份、铅 $1$ 份; 乙种含金 $2$ 份、银 $5$ 份、铅 $1$ 份; 丙种含金 $3$ 份、银 $1$ 份、铅 $4$ 份. 现在要溶成金、银、铅的量相等的合金 $27$ 两, 问甲, 乙、丙三种合金需要各取多少两?