中小学数学教学论著译丛

作为教育任务的数学

【荷兰】弗赖登塔尔　著

陈昌平 唐瑞芬等　编译

上海教育出版社

中小学数学教学论著译丛

作为教育任务的数学

[荷兰] 弗赖登塔尔 著
陈昌平 唐瑞芬等 编译

上海教育出版社

责任编辑 冯 贤
王耀东

中小学数学教学论著译丛

ISBN 7-5320-2983-2/G·2913
定 价: 16.50元

序

像乐章的序曲一样,序言通常是最后才写的,把它放在本书的最前面,这是一种写作风格的反映。我通常把这种风格在数学专著或数学教科书里的表现称为“教学法的颠倒”为适于印刷,必须把发现一项成果的顺序颠倒过来加以阐述;特别是对一些关键性的定义,它们其实是结构的最终笔触,却总被摆在最前面。多年来,我把这种教学法的颠倒同思维实验做了对比研究。的确,你不该把你的数学成果按照你发现它的那种过程去向别人讲解,而要采取另一种方式,即设想你当时已经有了现在的知识,你将是怎样发现那些成果的;或者设想一个学生的学习过程得到指导时,他是应该怎样发现它的。这实际上就是苏格拉底(Socrates)给门诺的奴隶授课时所遵循的宗旨。思维实验的目的就在于找出学生怎样才能把他要学的知识“再创造”出来。

我上面说了,序言是教学法颠倒的一种反映。的确,序言并不是书的一个组成部分,它甚至可以被撕毁,但它毕竟是有用的。首先对评论家有用,有了序言就用不着通读全书了;其次对作者本人有用,使他能

像作曲家一样得到机会回顾一下自己的写作动机。虽然我刚才所谈已经涉及到我的这些动机之一了，但我不想继续这样做下去，而想来说明我似乎有点忽视了某些内容的理由。

本书不是一本数学方法论的书，不是要系统地论述某些教材应该怎样教；它甚至也不是对教材作系统的分析。我对那些用统计数字加以评估的课堂教学经验很少涉及；对发展心理学或学习心理学的实验结果也极少引述。也许这本书的最大特点之一是它很少引述别的著作。下面我要来讲讲我的道理。

首先，关于心理学的文献，说实话，我觉得丝毫没有必要用那些高雅的心理学来装饰低格调的教育论著的，尤其是那些和教育不相干的文献，更是没有引述的必要了。如果有人一定要那样做，那么我想我是要反对的，现在，滥用皮亚杰（*Piaget*）的名字已经成为教学法文献的一种司空见惯的现象了，这使我有时不得不对此进行评论，并特别在附录中用比较连贯的形式说明皮亚杰的研究工作对于数学教育究竟意味着什么。

也许有人期望从学习心理学获得一些有益于数学教学的东西，至少希望经过仔细的钻研后能从中得到教益。然而，尽管我发现在学习心理学中有许多有趣

的甚至于是引人入胜的东西，但我要寻找的东西却几乎什么也找不到。我原想通过一本出色的现代书籍[1]去了解什么叫做学习以及怎样把它划分为阶段的，但是我觉得那里所讲的和我自己的经验以及我和别人在一起进行数学学习时所得的经验相去很远。对此，我深感惆怅，而不禁自问：数学真的是那么与众不同么？我多么渴望有谁既出色地懂得数学又懂得心理学，能告诉我们沟通这两者的桥梁何在。

除了某些一般性概念外，我不曾从心理学中撷取任何经验性材料。我的材料多数是直接地来自教科书、教学方案、实际课堂教学以及对个别儿童的观察，或者间接地来自与教师的交谈与讨论。关于第二类材料的来源，读者在本序言的末段里，可以读到一些人的名字和说明；相反，来自教科书、教案和课堂教学的材料，只要可能，我都不作引述，我这样做是出于不得已，因为我经常对这些材料加以评论，而且往往是批评性的。这些材料本来是可以严格地分为严肃认真的和废话连篇的两类，如果我都在脚注中加以引述，那就成了良莠不分，也太提高了那些坏作品的身

[1] R. M. Gagné,《The Conditions of Learning》, London, 1965。

价了，这是我不愿做的，因此除了少数的例外，我都不作引述。

由于一些别的原因，我对数学教学法的研究工作也都不曾提及，其中主要的原因是，对于这些工作，除了某些一般性的内容外，它们的成果我无法使用。下面我来说明为什么。

我想到的第一类研究工作是那样的一类，它们想要说明某些材料的可教性。著者告诉我们这些材料何时在何地做过试验，有时还给出统计数字来说明试验的成果。但是，在多数情况下，对所用的教法都不加以说明，这样，就使得这类报告变得毫无价值了。因为，不必再做任何试验便可肯定：任何要试的内容都可以用适当的办法硬塞给儿童的。不久前，我见过一门个别教学的课（应该说它是出类拔萃的！），在那里儿童由于受到错误思想的灌输，在几年间，顺从地去证明一些相同的荒谬内容却毫无怨言。而就因为这样便说那些材料是“可教的”！

我对这类研究不敢相信，还有更为严肃的理由，那就是它们最多只证明那些材料是“可学的”，而不是证明它是“可教的”。“可教的”与“可学的”的确不是一回事。某些教师能教的内容，许多其他的教师不一定能教。如果内容在数学上有错误或教学法上有谬误或者

无价值，那么许多教师就会拒绝教，或者教而索然无味，这样它就成为不可教的了。此外，还有些内容非常特殊，以致必须详细说明教法，才有可能施教，而这种详细说明却通常都没有给出。我这里说的教法，是指适合于所教内容的教学形式，而不是指教学方法上的细节。本书对这一点也是忽略了的。的确，我们在设计教材与教法时，不仅要衡量哪些内容可学和值得学，而且要考虑到教师能否学会教，或者我们能否教会教师去教。当我回顾我自己的活动和我这本书时，我不敢说我在这方面的能力是很高的。

现在，我要继续谈我无法有效地使用的第二类研究工作。这就是那些关于某种内容的两种教法或材料安排比较的研究。这些研究，譬如说，会宣称某种方法不比另一种方法差的概率是98%。像这样的研究报导，我大约是在三十年前第一次见到。那是关于地理课的而不是关于数学课的研究。那研究工作本身可以说是无可指责的，但令我惊奇的是，地理课和我在中学时代所见的一样，依然是最为枯燥无味。从那以后，我所见到的类似研究工作为数不少。这使我往往不敢相信，怎么到今天过仍旧读到这样的东西。

也许我见到的只是一些例外的情况吧。但是，这类研究工作在技术上无论怎样完善，都不能回答教育的

基本问题，即该教什么？为什么目的而教？拿这些内容教谁？我要批评的是这类研究工作背后的思想，也就是要指出，用统计数字把自己装扮起来并不就是把自然科学的精确性引入到教育研究中来了。那种自负地宣称小数点后面第七位数字是准确的而无视小数点左边的数字都错了的态度，并不是科学的态度。我不是从这样的一些试验中学，而是从自己的和别人的课堂教学经验中，从教科书中（不管是我喜欢的或不喜欢的）以及从有经验的教师关于教材和学习表现的实事求是的分析中，学到了不少的东西。

真正的教育活动意味着遵循自己的真诚信念去探索正确的教育途径，而教育科学首先应该是对这种真诚信念的合理性作出论证，你可以把它称为哲学。但不管我们叫它做什么，它是不可或缺的，任何细节的研究都无法代替它的，相反，只有在健康的教育哲学的土壤上，具体的研究工作才能兴旺起来。

本书虽然也研究了许多细节，但它肯定是一本数学教育哲学的书。我不是第一个写这类书籍的人。我们学习前人的著作应该是学习他们的思想。像本书这样的一类书籍，其科学性不是由它有了多少脚注[1]来

[1] 指引用过别人的著作——编译者注。

衡量，而是要看它对数学教育哲学这个首要问题讨论的彻底性如何。

我对教学作过许多讲演，也写过许多文章。拿本书同已发表过的文章比较，它并没有本质上全新的材料，在个别地方我甚至把发表过的论著全文摘录。在本书中我只是对自己原有的思想做了一番整理，这种工作对于像我这样一位数学工作者却不是一件轻而易举的事。问题不在于这里要用辩证的而不是演绎的方式，也不在于局部材料的组织，而是在全局性的组织上面，这是主要的难点所在。我不能使用数学课本专著中的形式化组织，写诸如“由定理……（见第……页）及推论……中的条件（见第……页），可知第……页与第……页的定义等价”一类的句子，但又找不到别的组织形式。因此，从数学家的观点看来，本书组织得很差，许多重复无法避免。

我向别人学到了许多东西，我这里无法详细叙述，但我完全明白它的重要性，并充满感谢之情。是我的妻子第一个建议我从理论上对教育进行研究，那是我和她一起从事教育工作的时候。在教育心理学家中，给我影响最大的，要算德克罗利（O. Decroly）了。在从教育角度去阐述数学方面，我受到了布劳韦尔（L. E. J. Brouwer）的数学观点（而不是他的教育观点）

的影响。自 1945 年到 1963 年，我从新教育研究会属下的荷兰数学工作组中，学到了许多带原则性的重要知识，也学到了许多教学法细节上的知识。对于这个工作组的成员，我异常感激，在他们当中，我只需指出范希尔（*P. M. van Hiele*）和他已故的夫人格多芙（*D. Geldof*）。近年来，由于国际教育研究的活动，我结识了许多新朋友。我对在国际会议上使我获得教益的人们，一律表示感谢，特别是要感谢凯思特努沃（*Emma Castelnuovo*），克里戈芙丝嘉（*Zofia Krygovaka*），塞维斯（*W. Servais*）与勒维（*A. Revuz*）。我把我的书献给一切从事数学教学的人们。

弗赖登塔尔

1970 年 12 月 27 日于乌德勒支

编译者序

本书的作者弗赖登塔尔（Hans Freiadenthal,1905-1990）是荷兰藉数学家和数学教育家。早在三、四十年代，他就以拓扑学和李代数方面的卓越成就而为世人所知。从五十年代初起，他把主要的精力放在数学教育方面，发表了大量著作，也开展了广泛的社会活动，在1967年至1970年间任“国际数学教育委员会”（IOMI）的主席，召开了第一届国称数学教育大会，创办了《数学教育研究》（Educational Studiesin Mathematics）杂志，在国际范围内为数学教育事业做出了巨大的贡献。由于这些业绩，有人把他和伟大的几何学家克莱因（F. Klein）相提并论，说：“对于数学教育，在上半世纪是克莱因做出了不朽的功绩，在下半世纪是弗赖登塔尔做出了卓越的成就。”[1]

弗赖登塔尔关于数学教育的论述，主要收集在他下列三本巨著之中：

1.《作为教育任务的数学》,1973年版；

---

[1] 见G. Howson,“Hans Freudenthal and the Foundation of a Disciplitis of Mathematics Education”,Sonderdruck ZDM 856。

2.《除草与播种——数学教育学的序言》，1978年版；

3.《数学结构的教学法现象学》，1983年版。

其中的第一本是最基本的，他在那里阐述了他对数学和数学教育的各种基本观点；第二本和第三本是这些观点的进一步发挥和发展。本书就是其中第一本的编译。由于原书篇幅太大（英文本680页），所以我们除了对最初的十章（这里包括了弗赖登塔尔关于数学和数学教育的主要论点）基本全文翻译外，对其余的九章（其内容是关于一些具体学科教学的论述）做了一些删节和组编工作，搞成这个编译本，希望用较少的篇幅把他的主要思想介绍给我国的读者。

弗赖登塔尔是一位学问精深而广博的学者，对数学科学研究有丰富的经验和杰出的成就，对数学教育有广泛的实践经验（他甚至长期地教导儿童学习，以考察儿童的学习和认识过程）和深入的理论研究。他对各种问题都有自己独创的见解。数学教育的理论和实践同数学的理论和实践，在本质上有很大的差别，它受制约的因素很多、其正确与谬误有时难于判断，因而显出了很大的相对性。但是我们相信，无论读者同意或不同意他的看法，都会从他的书中得到益处，

受到启发。为了阅读他的书，事先对他以下两方面的思想有些了解，可能会方便些。

第一方面是他对数学的看法。在弗赖登塔尔看来，数学是系统化了的常识。如 $3+2=5$，矩形的面积等于长乘高，都是常识。这些常识是可靠的，不像某些物理现象（如感觉铁比木冷；以为运动物体会无条件地终于停止）会把人引入歧途。因为这样，数学比任何其他自然科学都更易于创造：一个聪明的儿童，靠自己就能发现或创造出许多数学知识；在历史上，数学是最古老的学科，它比天文学还早出现了两千年。

常识要成为数学，它必须经过提炼和组织，而凝聚成一定的法则（如加法交换律）。这些法则在高一层次里又成为常识，再一次被提炼、组织，而凝聚成新的法则，新的法则又成为新的常识，如此不断地螺旋上升，以至于无穷。这样，数学的发展过程就显出层次性，构成许多等级；同时也形成诸多如抽象、严密、系统等特性。一个人在数学上能达到怎样的层次，则因人而异，决定于他的先天和后天条件。但是，一个为多数人都能达到的层次必然存在。数学教育家的任务就在于帮助多数人去达到这个层次，并努力不断地提高这个层次，和指出达到这个层次的途径。

第二方面是他关于学习方法的看法。弗赖登塔尔

反复强调：学习数学的唯一正确方法是实行“再创造”，也就是由学生本人把要学的东西自己去发现或创造出来；教师的任务是引导和帮助学生去进行这种再创造的工作，而不是把现成的知识灌输给学生。他认为这是一种最自然的、最有效的学习方法。说它最自然，是因为生物学上“个体发展过程是群体发展过程的重现”这条原理在数学学习上也是成立的，即：数学发展的历程也应在个人身上重现，这才符合人的认识规律。数学在其发展中，走过漫长而曲折的道路，它不断地修正过自己的进程，避开过弯路，绕过死胡同，重新明确前进的方向。像这样的历程是不必让它在学生身上重现的。弗赖登塔尔说，他所说的“再创造”是指应该使学生体验到：如果当时的人有幸具备了我们现在有了的知识，他们是怎样把那些知识创造出来的。说这种方法最有效，是因为只有通过自己的再创造而获得的知识才真被掌握，和可以灵活应用；而更为重要的是，数学是人的一种活动，如同游泳一样，要在游泳中学会游泳，我们也必须在做数学中学习数学，也就是在创造数学中学习数学。弗赖登塔尔指出，搞数学研究的人就是用再创造的方法去阅读别人的论文的。

关于再创造学习方法的重要性，弗赖登塔尔还从

另外的角度去加以阐述。他经常指出：数学家向来都不是按照他创造数学的思维过程去叙述他的工作成果，而是恰好相反，把思维过程颠倒过来，把结果作为出发点，去把其他的东西推导出来。弗赖登塔尔把这种叙述方法称为“教学法的颠倒”指出了这种颠倒掩盖了创造的思维过程，如果学习者不实行再创造，他对学习的内容就难以真正的理解，更谈不上灵活应用了。他喜欢举的例子是皮亚诺（Peano）的自然数公理系（虽然他说在初等数学里，这种例子也比比皆是）。

他说在这个公理系中数学归纳法占有关键地位；但数学归纳法在古代便已被人们直观地使用了（例如，在证明 $a^m a^n = a^{m+n}$ 中）。到了 17 世纪，帕斯卡（Pascal）在研究二项系数而建立“帕斯卡三角”（中国数学家杨辉早在 13 世纪便建立了这个“三角”比帕斯卡早了近四百年）时，发现了这条原理，并且相当清晰地叙述了它；18 世纪初，詹姆士·贝努利（J·Bernoulli）再一次独立地发现了它；其后是德国数学家克斯特纳（A. Kästner，1719 ~ 1800）用比较抽象的形式叙述了它，然后是皮亚诺用抽象的形式把它嵌入到他的公理系中去。这是数学归纳法的历史发展过程。但是大多数教科书不讲这些，而是颠倒过来，把

皮亚诺公理系作为起点，由它推出数学归纳法，然后把归纳法用到具体的问题上去。弗赖登塔尔认为，学习数学归纳法的正确途径是，向学生提出一些必须用数学归纳法才能解决的问题，(这种问题很多，在组合数学中为更多，例如把奇数逐个地相加，就得到一切自然数的平方数。)迫使他直观地去使用这个方法，从而发现这个方法。在学生发现了和懂得了这个方法后，再去帮助他用抽象的形式把它叙述出来。至于从数学归纳法再进到皮亚诺公理系，那是一个更大的飞跃了。学生必须对某些简单的内容进行过公理化的工作，获得了一些经验以后，才有可能实现这个飞跃。

可以认为，“再创造”是弗赖登塔尔关于数学教学方法的基本思想，它是学习的基本方法，也是判断教法好坏的基本准则。无论是学习数学的抽象(例如对概念的抽象)，或数学的公理体系，或数学的形式体系(即严格的数学语言和数学符号)，或数学的程式(即解决一定问题的具有确定步骤的做法，其中特别包括各种算法——Algorithms)，都无例外地应该使用“再创造”的方法，而不应该生吞活剥地进行灌输。用弗赖登塔尔本人的话来说，那就是“与其说让学生学习公理体系，不如说让学生学习公理化；与其说让学生学习形式体系，不如说让学生学习形式。一句话，与其说

让学生学习数学，不如说让学生学习数学化。这和我们所说的“授人以鱼，不如授人以渔”也许有某些相同之处。

1987年，弗赖登塔尔曾到华东师范大学和北京讲学，他的讲学得到了广大听众的欢迎和重视。不幸他于1990年月以85岁的高龄谢世，使我们不能再听到他的声音了。就让我们以这份编译工作奉献给他，愿他安息。

我们的编译工作分配如下：第一、二章，陈昌平，邹一心；第三至十章，唐瑞芬；第十一、十四章，李士锜，忻重义；第十二、十三章，唐瑞芬，忻重义；第十五章，李士锜；第十六章，唐瑞芬：第十七至十九章，李俊；附录，李士锜，并为准确起见，附录的译文特请周克希先生作了审查和校正；本书序是由陈昌平译。由于我们的水平有限，编译工作中一定有许多不妥甚至错误之处，我们诚恳希望读者批评指正。

陈昌平

1992年2月24日

目录

第一章

数学的传统

谁也不知道人类先发明了什么，是书写还是算术？字母的出现虽然比阿拉伯数码早了两千年，但这不说明任何问题。数学比这些数码要早得多了。在早期的活动中，算术和书写是连在一起的。然而是否在这以前很久，人们就早已口头地或使用筹码进行着计算？这就谁也讲不清了。值得注意的是在印欧语系中，由1到10以及100这些数词，是这语系的各个民族所共有，可见它们在书写之前早就有了。

不管发展的情况究竟怎样，至少在公元前三千年末，相当完整的初等算术与代数就已存在于巴比伦，它不是我们现在的关于x和y的形式代数，它的未知数是用（长方形的）“长”与“宽”等术语来表示的。相传巴比伦的科学是僧侣们的事业，但这种说法会使人误解。因为这里所谓的僧侣实际上是指那个时代的知识分子，指职员，教师，图书管理员，星象观测者，占卜者，寺院和宫殿的建筑师，魔术师等。对于数学的诞生，诸如计算员、勘测员、商人、货币兑换商、银行职

员、簿记员、出版商、桥梁道路与城市的建造者等各类人物都起过催生的作用,但是他们的需要很快就得到满足了。两千年间,在巴比伦的寺院学校里,学生们做的数学题目都不怎么实际,老师让他们计算:铺一条 100 千米长、1 厘米宽的沥青马路要付几天的工资;或者,将 65 个金币的遗产分配给五个兄弟,每个弟弟比他最小的哥哥少得 3 个金币,问各得金币多少。这类亘古不变的题目——一块石头比其自重之半重一磅,问其重几何?一长矛靠墙直立时高于墙一米,若离墙 3 米斜靠于墙上则恰与墙顶相平,问矛长几何?——代代相传。

的确,他们就是学习这些东西的——他们用表格和筹码学会了有用的乘法与除法。但是他们解那些毫无用处的线性方程和二次方程,其目的何在?人们不禁要问:他们曾否抱怨过?而如果抱怨的话,他们的父辈和老师又怎样回答的?

他们也许回答道:学生之所以要及早学习数学,是因为数学是智力的磨刀石;或者干脆说:其他课程甚至比数学更无用,例如苏美尔语(Sumerian)虽是灭绝了二千年的语言,或者千年前有过的阿卡德(Accad)楔形文字,虽然巴比伦人早已不用,但都还在学校里教呢!或者教师会回答:再等几个月吧,到

了明年就会告诉你怎样利用这些数学来计算历法、节期、和日月星辰的轨道的。

天文学是人类的第二门科学，而数学天文学则比数学迟生了两千年，它是一门实用的科学。你不能像虚构一道数学题目那样使用魔术从太空里召唤出星辰，而只有运用天文学，才可以知历法、节期，预测日月亏蚀，考察战争、瘟疫、暴风、洪水，预料国家乃至个人的福祸。这是一门有用的科学，在这里，数学得到了很好的应用，难道这是数学存活了两千年的理由么？但是，即使是在这些天文的应用中，也还没有用到二次方程呀！只有在下面的一类问题里才会用到二次方程，如“长与宽之积为面积；把长超过宽之量与面积相加得 183，而长与宽之和为 27，求长、宽与面积。”千百道这样的题目刻在粘土块上被保存了下来。虽然有关的理论文献，即阐述解题法则的“教科书”这样一类古代遗物，十分少见。

埃及的数学不是刻在粘土上，而是写在易于腐烂的草纸上，所以遗物更少了。但是在这里，同样的原理起着作用：数学迅速地、而且大幅度地超过了实际的需要。那些计算师、测绘员何以如此迷恋于他们所熟悉的数字和图形，如此热衷于拿它们做游戏，揭发它们的秘密，探测它们的奥妙，这确实是令人费解的。有

许多书上说希腊前的数学都是一些基本应用题的汇集。这种说法根本是不对的。

希腊数学的确异乎寻常。从残留下来的少量材料看来（如果这些材料可信的话），希腊数学一开始就和其他的数学不同。大约公元前 6 世纪，希腊人必定也学过巴比伦的数学与天文学的。从关于泰尔斯（*Thales*）的各种传说中就容易见到巴比伦的影响；许多以为是毕达哥拉斯（*Pythagoras*）及其学派的成就其实是属于巴比伦数学的。例如关于人所共知的所谓毕达哥拉斯定理，巴比伦人在希腊人之前的两千年就已经知道了。难道是毕达哥拉斯首先证明了它么？其实也不是。这样的一个定理不是靠观察或者量度三角形的边长就能发现的，它只能通过证明才能发现，但是许多书竟然说“证明定理”这种做法是希腊人的创造而不是巴比伦人的发明。

其实，希腊人的贡献在于把证明变成了数学中的一项原则。在希腊，数学被编写成为今人所称的演绎体系。这大概发轫于泰尔斯，传说是他证明了许多定理的。仔细看看那些命题就会发现，它们并不是像毕达哥拉斯定理那样的定理，而是像“等腰三角形的两底角相等”之类，就是说是一些一目了然的事实。这表明了那些人在证明这样一些定理时，他们是发现了

一种新的游戏，即：为证明而证明。由此我们可以断定：他们创造了一种体系，使得证明成为其中的一种有意义的活动。而在巴比伦，关于这种体系以及这样的证明方法没有留下任何痕迹。什么是演绎体系？自古至今，亚里士多德（Aristotle）的解释最为清楚。他说，任何真正的科学都始于原理，以它们为基础，并由之而导出一切结果来。欧几里得（Euclid）的原本就是从定义、公设与公理开始的。但这不是他的创造。由一些原理出发来处理几何学的习惯至少在欧氏原本的一百年前就已存在，只不过别的作者使用别的术语罢了。也许几何原本的第一位作者希波克拉底（Hipppocrates）就已经知道这样做了的我们不知道这种习惯的来源，不知道它是来自哲学还是来公众集会上的辩论术。可以想象，这样一套原理是战胜诡辩和在诉讼中取胜的一种手段。

欧几里得没有把他使用的公理全部明显地列举出来。但是如果因此而责怪他不完备，那么这种观点就太现代化了。一门科学是以原理为基础的，但并没有人要你把所有的原理都举出来；究竟举多少？这是可以讨论的。

欧氏原本中有些部分看起来很像现代数学。例如它的第五卷和第六卷中的比例论与相似论就是这样。

这些部分通常被认为是欧多克斯（Eudoxus）的杰作，它相当于现在的实数理论。但是欧氏原本也含有些部分，其演绎结构是十分薄弱的。实际上，欧氏原本是一种编纂之作。然而，尽管如此，它在两千年间备受敬仰，并引起了许多人的模仿。敬仰是有道理的，但模仿却往往并不十分成功。当然，对于像阿基米德（Archimedes）与惠更斯（Huygens）这样的人自当别论，因为他们和欧多克斯一样，是伟大的公理学家，但是像斯宾诺莎（Spinoza）企图把哲学几何化、莱布尼兹（Leibniz）企图把法学和政治学公理化、威士顿（Whiston）企图把气象学公理化等一类工作，是没有多少说服力的。什么是公理化？公理应如何叙述？这些问题一直到 19 世纪末在帕施（Pusch）把自己的学说教给意大利的几何学家，和在希尔伯特（Hilbert）的著作中才得到了说明。

在我们的眼光里，演绎性与公理化的内核是希腊数学中最令人惊叹的特色，它的另一个伟大特色是发现了无理数——正方形的对角线与其边的不可公度。任何两个量的比一定能用某个自然数表达出来，这好像是再也明显不过的事了，但它竟然是不对的！根据现代的历史学家所说，希腊人的这项发现引起了数学基础上的一场危机。但这种说法也可能是太现代化

了。的确，不可公度性和毕达哥拉斯的“万物皆数”的教理是水火不相容的，但毕达哥拉斯学派里的数学家们想方设法去寻求出路。他们需要一个关于比的新定义，一个不用自然数的定义。他们起初使用了无限逼近的方法，但终于又放弃了；最后的解决办法和“戴德金（Dedekind）分割”的方法相类似。这些都在欧氏原本的第五卷和第六卷中得到了阐述。在那里也用古代的方式阐述了 ε（Epsilon）的方法。希腊人不仅抛弃了无限过程，而且也把巴比伦的代数一并取消了。既然数不足以解释几何中的比，那就把它驱逐出几何！实数是不知之物，有理数被禁绝——至少在纯科学中如此，商人和工匠继续使用着分数，但对于数学家说来，正像对于毕达哥拉斯那样，数即自然数，是神圣不可侵犯的。柏拉图对把“单位1进行分割”的意图表示了愤慨。

那么，代数是被抛弃了么？不，不完全是。因为人们发明了一种代用品：几何代数，一种把代数运算、线性方程与二次方程及其求解步骤都化为几何滑稽戏的体系。这种体系在欧氏原本的第二卷中得到了阐述，并在第十卷中、特别是在无理性的分类中加以应用——一种难懂得出奇的数学。

几何代数，这是一种方法论上的教条主义与对严

密性作狂热追求相结合的不切实际的产物，它是一种瘟疫，一种终于扼杀了希腊数学的瘟疫，在代数与无限小的启发性方法还能口头地与官方颁布的欧几里得——阿基米德严密数学并行传授之时，学生还能在官方的桎梏之下学习着如何进行工作，而连这个传统也中断了时,就一切都丧失殆尽了。到了公元 3 世纪，巴比伦数学的传统好像在复活——纯正的代数学家丢番图（Diophantus）的存在显示了这一点。但可惜，这不过是回光返照，是最后的一次闪烁了。代数，它是在阿拉伯人手里重新被创造出来，并通过印度人和中世纪的基督教徒而得到了复活的（尽管当时的希腊文化的继承者们还继续受着希腊严密性的作弄）。第一个和希腊传统相决裂的是笛卡儿（Doscartes）。这是个藐视一切传统的人物。他把犁放到了马的前面去。他不是把代数几何化，而是把几何代数化了，这就是现在大中学校里称之为解析几何的东西。与此同时，极限过程和无限小方法又开始流行了起来，并终于引导到微积分的发明（牛顿（Newton）的流数与莱布尼兹的微分与积分）。的确没有人能真正懂得是什么样的鬼使神差叫希腊人拒绝了代数。欧多克斯的 ε 方法没有被理解，或者虽被理解但却被排斥了；欧几里得——阿基米德的严密性受到了敬仰，似极少人真

懂，并且在惠更斯以后再也没有别人去模仿他们的做法了。一直到19世纪，当严密性重新被重视时，人们才懂得希腊数学的实质。也许这个过程是一种历史的必然吧：欧多克斯的严密性窒息了希腊数学，当好的和坏的同时被抛弃后，造成了千年的数学空白，然后是解放的到来和严密性的艰难的重建（它需要比古代更长的时间），并终于发现许久许久以前古希腊人竟已经知道了那么许多的东西！——也许这里的每个环节在历史上都是不可避免的。

关于数学严密性的传统就讨论到此为止了。只是我要再一次指出：对古代的严密性不要过分夸张。欧氏原本中就有漏洞，甚至有虚假的论证。但是，另一方面，现代的读者对于平行性理论中所显示出来的仔细慎重不能不感到惊叹，我们在欧氏原本里所见到的平行公理必定是欧几里得以前的希腊数学家们长期研究过的某个问题的最终答案。从偶而见到的对于别的平行观点的指责看来，希腊人关于平行性的知识比欧氏原本中流传下来的要多；虽然非欧几何的出现在历史上是遥远的后代的事，但是希腊人对它的知识比表面的历史记录要多。在这里，犹如在数学严密性问题上一样，欧氏原本为几何基础所确立的传统延续了两千年之久。关于几何方法，欧氏原本也起了同样的

作用，即“添辅助线”的方法，这种方法是用辅助线把图形分割成一串全等的三角形，以便逐一地过渡，通过全等关系的锁链去证明两个量的相等——这真是方法论上的疯狂行为！例如，试看一道中学数学的传统习题：“已知一正方体及其一顶点 A，证明 A 的三个相邻顶点所确定的平面垂直于通过 A 的空间对角线。”为了证明它，需要多少个全等三角形啊！但事实上，凭观察就知道：以过 A 的空间对角线为旋转轴将正方体旋转 120° 时，正方体及此对角线保持不变，由此便得到了证明。然而就在一二十年前这样的证明还被认为是不正规的。可幸的是，在现在的中学教学中，反射、平移、旋转终于成为时髦的东西了。在几何学的建造中，映射出现于 19 世纪，它是现代几何的一项原理，但是全等三角形这种欧氏传统在 19 世纪还如此顽固，以致于像 F. 克莱因（Felix Klein）这样的大权威也没有能够把映射引入到德国的中学教学中去。在欧几里得以前的“原本”里，关于映射的讨论似乎还被允许的，但在欧氏原本里，几何映射虽然还留下了点滴的残骸，但总的说来，它是被欧几里得扫地出门了，这决定了它们直到 19 世纪的命运。为什么映射不合法？可能是由于它的运动学的低下格调同几何学的静力学的高贵风度不相和谐的缘故吧！几何学同物质世

界分离以后，它同“变化”这种运动的特性就不能协调了——像这样的哲学主张直到近代都还能听得到。追想起来，这可能就是映射被排斥的原因。希腊的传统竟如此之牢固，以致函数这种现代的运动变化的思想都改变不了几何学上的习惯。

根据古代的传说，是毕达哥拉斯把几何从工匠的手艺提升为一种自由的艺术，就是说提升为一种那些不愿弄脏手脚的自由民的业务。它和算术、音乐、天文一起在中世纪合称为四艺。据说这四艺都是毕达哥拉斯提出来的。事实上至少是他的第一批门徒传授了这四艺的。“数学”（Mathematics）一词也就是从他们当中产生出来。毕达哥拉斯的门徒中有一批人自称为“数学家”（Mathematician），是因为他们在研习几何、算术、音乐理论、天文学这四门学科。这四门学科被称为“自由的艺术”，其对象被认为是超然于尘世的。这种观点被柏拉图和他的学派进一步深化了，它被世人所接受并发展成为一种传统。

这至少是他们自己的理论。但这并不妨碍希腊的许多数学家去探讨数学的应用。有的人甚至进行了机械技术的研究，其中有阿基米德这样伟大的数学家。事实上，希腊数学和巴比伦数学一样，远远超越了它们的应用——超越多远？这可以从圆锥曲线的

理论看出一斑：它们诞生后经过了两千年，到开普勒（Kepler）发现行星的轨道是椭圆时，才得到了应用；这其实是数学的特性——它寻求各种思想模式，以供应用者选择使用。

数学无疑是希腊科学成就的顶峰。希腊人在理论上的成就比他们在经验科学上的高，这是不难理解的。其实巴比伦人的情形也大致相同。人们一旦掌握了思维的威力，他们就会不停地运用它的。哲学家反复地强调过：感觉是不可靠的，从远处看去，物体变小，方塔变圆；摇橹在水中好像被折断。只有一副清醒的头脑才能认识世界，懂得自然界的奥秘。

在希腊思想中，唯理论占重要的地位。但如果因此而以为希腊人不重视观察自然，那就是夸张其辞了。持这种看法的人往往以芝诺（Zenon）为例，说芝诺竟然想要证明兔子追不上乌龟这种违背常识的事。实际上，芝诺当然也知道这违背常识。但是他提出的悖论不是想要否定实际，而是要指出对实际的看法存在着互相矛盾的理论。也有人把亚里士多德看成是唯理论者，说他把演绎推理看得高于经验。但这种看法，一般而论也是不对的。我们感到惊奇的倒是亚里士多德不是用数学——力学的思想框架，而是从生物——心理的角度去解释自然，以致他的某些议论看起来是在

变戏法。现代力学之所以得到发展，并非因为伽利略（Galileo）、惠更斯、牛顿这些人比起希腊人来是更优秀的观察者，而是因为他们对自然界的分析更加合乎逻辑、更加深入。亚里士多德关于宇宙有限性的证明之所以被否定，并非因为这个命题不能被证明，而是因为他的证明中有着严重的缺陷。另一方面，伽利略关于“真空中自由落体速度相同的命题，并不是以观察为依据，而是建立在卓越而惊人的分析之上的。希腊天文学证明了希腊人是知道观察的意义的。他们的天文学家提出要“挽救现象”，意思是说要根据天文数据去调整他们所建立的具有众多偏心与本轮的星系模型中的参数，以符合天象。他们当然必须这样做；因为相符的程度是衡量真实性的标准，而是否相符是容易检验的。其实，除了天文学以外，在希腊也还存在着一类应用数学的。流传至今的希罗（Hero）[1]的著作就是例证。时至今日，由纯理论数学到应用性极强的数学之间存在着几乎是连续过渡的各个环节。但是当我们谈论古代的科学时，就千万要记住：那时候的数学能从应用中获得的刺激是极其有限的。单凭这点就

[1] 编译者著：原书如此。估计这里说的是 Heron。关于 Heron 的著作，读者可参阅【美】克莱因著《古今数学思想》中译本第1册。

足以确定古代数学的命运了,更不必说它本身还带着一种瘫痪的病菌,那就是几何原本在格式上带来的缺陷。几何原本是一种典型的“现成科学”的样本,如果有好教师,它是好课本;但对于自学者,它却是一本天书。关于这点,我们以后还将讨论。

印度人、阿拉伯人和中世纪僧侣们所重建的数学是一种和毕达哥拉斯要把它提升为自由艺术的数学毫无联系的全新科学。它主要地产生于应用。阿拉伯人从印度学会了数字的新写法,并把它传播到欧洲,这就是我们现在所用的十进位制,它比希腊与罗马的记数法都高明。它固然是高明的,但是我们对此又不可过分夸张。人们也许会问:希腊人、罗马人用他们那种笨拙的数字是怎样进行计算的?那不烦死人么?他们为什么那么不切实际?希腊人使用了巴比伦的六十进制,为什么他们不把数写成位数的形式(甚至是十进位数的形式)呢?

其实,说希腊人、罗马人的算法不切实际,是根本不对的。因为古代的人不是在纸面上进行计算,而是在算盘上用算珠进行计算的。算盘是自然的进位器具,自古以来都被使用,至今仍流行于东亚。用它计算虽稍不便,但并不慢于纸笔计算。印度——阿拉伯的数码计算是在沙盘上书写数字计算的基础上发展

起来的，其后计算方法的更新是以廉价纸张的出现为条件。

印度——阿拉伯记数法诚然是一大收获，但是进步是缓慢的。令人奇怪的是十进分数要等到16世纪才由斯蒂文（Stevin）引入，而六十进分数在巴比伦时代便已存在。

更为奇怪的是普通分数，它经过了很长的时间才被人们普遍接受。什么是2除以7？回答说是“七分之二”这种回答听起来像花言巧语。一个计算员总是在感到有东西要进行计算时才去做计算的，于是他把$\frac{2}{7}$写成$\frac{1}{4}$与$\frac{1}{28}$之和，觉得这样好看多了。这是古埃及人的习惯，他们把一个分数表达为以1为分子的几个分数之和。希腊人模仿了这种做法，无论是数学家或是天文学家都这样做，只要他们的哲学良心使他们认为“分数”这概念是可接受时他们就这样做了。一直到印度时代，普通分数才真被接受。印度人和现代人做法一样，也用分子与分母来表达分数，只是省去了中间的一小横。承认普通分数（以及以后又承认负数）是一种典型的代数思想，一种超越单纯地计算的思想。这种思想通过引进新的元素来使四则运算及它们的法则通行无阻。另一种代数思想是符号化，即：使

用不同于日常语言的符号去表示变量。在往日的代数书里就是用“设有一数”如何如何这种方式来引入一个问题的。在丢番图的著作里,“数”这个字就已越来越多地表示一个运算符号了。这种做法延续于印度与阿拉伯的数学之中。在中世纪后期的一些著作中已含有代表未知数的符号及其幂的整套体系,其中甚至含有高于三次的幂,而这样的高次幂是以往的几何学家所禁止使用的。15 世纪时出现了以未知数的多项式为分子与分母的形式分数,这是符号代数发展中跨出的重要一步。我们现在使用的代数始于 16 世纪末的韦达(Vièta)他用字母不仅表示我们所说的未知数,而且也表示“不定元”。笛卡儿把几何代数化是另一个重要步骤,他消除了代数相加的各项必须具有相同维数的限制。在笛卡儿手里,代数学中的希腊传统终于寿终正寝了。

与此同时,笛卡儿在代数里创立了一种新的强有力的传统,当时,惠更斯在物理里同笛卡儿竞争,而莱布尼兹则在数学里同他竞争。一些大数学家——牛顿、莱布尼兹、贝努利(Bernoulli)家族、欧拉(Euker)、拉格朗日(Lagrango)、拉普拉斯(Laplace)等献身于无限小运算,不断地作出改进。当然,除这些人外,一定还有许多人也在学习并懂得这

种新方法的，但是这样的人究竟有多少？当时有着许多用日常用语写的几何与代数的通俗课本，这证明了那时几何与代数知识的广泛传播——包括在大学里传播。但是无限小运算的情形如何？它那时的发展是超过了代数的，那么它在学校里是否设课传授了呢？就我所知，在整个 18 世纪里，没有学校开过微积分课。这真是史无前例的令人吃惊的现象。为什么会那样？那时的大学经过艰苦的努力已经接受了笛卡儿的学说，甚至于也接受了哥白尼（Copernicus）的学说，它们对微积分为什么显得如此难于接受？

实际上，18 世纪的大学的确比较死气沉沉。而且，当时数学界的头面人物都不在大学里执教。科学是科学院和一些学术团体做的事，而那里面的人都和教书无关。但是，事情还有另外的一面，那就是印刷术把科学的传统引上了新的轨道：口头讲授虽仍然重要，但已不是必不可少的了。如果微积分是在几个世纪以前被发明而又不在学校里施教的话，那么它一定是已经消失得无影无踪了。然而当时情况已经起了变化，供人学习微积分的书籍已经出现，而且至少在天文学里是需要微积分的，因此一定有人阅读那些书籍的，虽然人数可能不会多。由于当时代数的传统比较强烈而且读者想要读懂微积分的书的话，他就必须与书的著

者意味相投,所以当时学微积分的人肯定比学代数的少得多。印刷术的发展使科学界的领头人物不必急于创办学校,许多人对此也感到心满意足,但毕竟由于学校太少而严重地阻碍着科学的发展。后面我们将知道,19 世纪是怎样弥补这种缺陷的。

法国多艺大学(Ecolo Polytechnique)的创立和德国洪堡(Humboldt)改革的开展标示着活跃的科学活动重新回归到大学。这种回归的速度在各地和在各种学科中不尽相同，在哥尼斯堡与柏林，雅各比(Jacobi)和他的讨论班独领风骚；而在哥廷根，在高斯(Gauss)的领导下则只讲授初等数学。但新的传统在形成；在法国产生了分析教程(Cours d'analyse)、理论力学与画法几何;在德国出现了椭圆函数课程。现在,在集合论、拓扑学与代数学的影响下，法国分析教程这种古典的结构已经解体，它成了始自康托(Cantor)并以弗雷谢(Fréchet)、豪斯道夫(Hausdorff)、斯泰尼茨(Steinitz)和诺特(Noether)等为后继人的重建数学的运动的牺牲品;至于理论力学的传统,当人们从更为广阔的角度去理解数学的应用时,这种传统也就黯然失色而归于消亡了;极为荒唐的却是画法几何这门完全孤立的、同其他数学领域毫无联系的、在任何地方都不曾有过应用

的、僵化的学科，竟然被当作应用数学的典范备受崇拜而流行了一百年之久！椭圆函数在历史上的重要性却是比较容易理解的，因为它是所谓的“初等函数”以后的第一个函数论中的突破，并且是进入一些新领域的必经之道，它存活了几十个年头，这也是数学传统惰性律的一种表现。

19 世纪中另一桩时髦事物是不变量的代数理论。它显示了符号方法的魅力。然而令人奇怪的是它也终于衰落了。当希尔伯特无意而又隐晦地指出，在一种更为深入的观点下不变量理论是平凡琐碎时，这种理论就结束了，并演变成为多项式环的代数。19 世纪中，范围广阔的几何学有着类似的命运，它蜕化为代数的一个部分而衰亡了，并取得了“代数几何”这样一个令人不能满意的名字。20 世纪中曾蓬勃发展于德国的单变量复函数论也经历了相似的兴衰过程。解析函数论的情形大体上也是如此，它起源于欧拉的工作，兴盛于本世纪的前三十余年，而今已相对静寂，虽然它的课题还远未解决。本世纪二、三十年代广为流行的一类微分几何也很快变成了僵硬贫瘠的学科。纵观历史，传统与更新不断相互交替。时至今日，一门学科兴盛的持续一般不超过一代人的时间，成果总是具有强大的说服力的。在数学领域里尤其是如此，因

为在这里优劣的评估比较容易。在数学里,被委曲了的天才几乎是没有的。关于阿贝尔(Abel)的令人心酸的故事纯属虚构,他工作的重要意义立即便被当代人所公认了的,事实上是他的学者地位使他得以周游各地;关于柯西(Cauchy)丢失了阿贝尔的论文的传说也不过是虚构。阿贝尔绝非死于饥饿,虽然他英年早逝,没有来得及见到他名满天下的荣耀,这却是事实。伽罗瓦(Gelois)也是死得过早了——如果他活得长些,他的理论会传播得更快的。也有人说黎曼(Rienmann)也是死于饥饿,这也是不对的,事实上是他和阿贝尔一样死于肺病,虽然他活得长些,是在他的声誉达到了顶峰时才死的。有人认为康托是受当代人冷落的牺牲品,但这不是事实,更不是他患病的原因。他的点集理论是立即便被人们接受了的,虽然抽象集合论还需要一段长时间的酝酿才能产生;数学的其他领域也要有一个成熟的过程才会感到对集合论的需要。集合论向数学其他领域的渗透经历了一个缓慢的过程。对此我们将在下一章加以叙述。

把布尔(Boole)也算作不为人理解的天才,这是夸张。因为要求对一种孤立而空洞的形式给以高度的赞扬,这是不切实际的,这种空洞的形式是否有用,要经过一段时间才能判别,在它还没有用实质性的内容

加以充实之前，是怪不得同时代的人忽略了它的。逻辑学家常常把弗雷格（Frege）当作天才，这又是极大地言过其实，他谨小慎微地生活在自己狭小的数学角落里，对外界的数学状况茫然无知，这对他十分不利。

在本章开始时，我们谈到了“有用的数学”。后来随着对历史传统的讨论越多，对“有用的数学”谈论就越少。现在让我们回到这个问题上来。在巴比伦时代，数学是平民、商人、工匠、测量员的数学，再添上天文学家的数学；在希腊，它达到新的顶峰、占星学家和航海人都需要它。希腊——罗马的技术对数学的需求显然超过了巴比伦和埃及，但那仍然是极为贫乏的数学应用；这种情况反过来又限制了纯数学的发展，这不是因为数学的发展缺少刺激，更为严重的是因为在任何社会里，一门对社会无用的学科是得不到多少人去对它进行研究的。典型的例子是：当罗马人讲“数学家”时，他们指的是占星学家。当时的数学家维持生计十分艰难，律师、雄辩家、艺术家、哲学家、甚至诗人赚钱都容易些。在基督教统治的中世纪里，僧侣推进了科学，但是在他们的工作中，数学是微不足道的部分。

到了16世纪，数学和科学好像突然地兴旺了起来，以至在17世纪产生了像伽利略、笛卡儿、开普勒、惠更斯、牛顿、莱布尼兹等一批出类拔萃的人物。其原因何

在？历史通常是由人文主义的学者们去写的，他们对于数学和科学的兴起，是通过文艺复兴的三棱镜去考察的，但是实际上，古典文艺的复兴对数学和科学的新发展并不真像人们通常想象的那样起了关键的作用。应该说，关键是技术。技术是推动历史前进的动力。人们通常忽视这一点，原因是多数历史学家都不懂技术，他们没有注意到文艺复兴前的三百年间技术已在发展。公元 1200 年至 1500 年间新技术的发明比人类历史上曾经有过的总和还要多——其中包括一系列重大的发明，其最后环节就是印刷术。正是这些发明为数学和科学的突飞猛进扫清了道路。这倒并非因为那些技术马上就需要更高超的科学，而更多地是因为新事物的发明激发了人们探索自然和了解数与形之奥秘的热情。

无疑，数学是得到了越来越多的应用。大量有实用内容的课本显然是为想要使用数学的人们编写的。牛顿把天体运动学推进到天体动力学，并为此而发明了流数论。贝努利家族研究了许多对技术可能有用的力学问题。但是，应用对数学真的产生重大影响是始于 19 世纪之初，这正是 19 世纪里应用数学得到蓬勃发展的背景。对于这一点，人们直到现在都很少觉察到。

法国的科学家对应用数学的发展起了关键的作

用，像傅里叶（Fourier）、泊松（Poisson）、柯西（这些名字就说明了这一点）。那时，从事应用数学的研究突然地变成了荣耀的事，因为这种研究受到了多艺大学的重视，这所大革命时期创建的新学校傲视着那些僵化了的古老大学。这自然是做得过分了：过分提高了应用数学和贬低了纯粹数学的做法，对19世纪的法国数学从整体上产生了很大的损害，但这毕竟是次要的：把注意力转移到应用上去，这对19世纪数学的发展起了极为有利的、纲领性的作用。

这里说的"应用"不是指天文学（它产生了数千年后，在拉普拉斯手里达到了新的顶峰），也不是指一些古典的应用，也不是指概率论（它那时是在横向发展，而不是走向纵深），而是指现在称为"数学物理"的这个广阔的领域，它对数学以后的发展起了强劲的推动作用。这个领域，虽然前面有过欧拉、拉格朗日，拉普拉斯等人的工作，但是它的真正的开始是起于傅里叶、泊松和柯西。

教科书往往使人产生以下想法：力学原则上已由牛顿所建立，剩下的不过是一些细节上的工作。这种想法是完全错误的。实际上，质点系的力学就已经需要新的原理，更不必说流体力学、热传导、弹性力学、刚体振动、液体与气体的理论了。这些也就是19世纪

所研究的课题。研究人员以物理观念为向导创立了一整套的方法，它们变成了现代偏微分方程论、积分方程论和泛函分析中的典范。上述那些课题所产生的强劲动力至今都还在发挥着作用。

奇怪的是，数学物理的理论是由这样的一些人建立的，他们对物理的意义有坚定的信念，但对实际却并没有多少知识，并且远离着实验。在弹性力学中发展起来的数学方法起初是在电磁学与光学中得到应用和检验的，它给出了事先预料不到的然而是重要的结果。在本世纪,数学也从应用中获得了巨大的刺激。泛函分析得到量子力学的引导而发出了新的光辉；数理统计得力于统计实践的帮助为人所共知；而数值分析和计算机会为未来的数学带来什么成果，这还没人能够预料。

对数论、代数几何与范畴论的热爱不应妨碍对以下事实的认识：如果没有应用的推动，数学会变得多么贫乏！数学起源于实用，它在今天比以往任何时候都更有用！但其实，这样说还不够，我们应该说：倘若无用,数学就不存在了。

为什么要如此强调数学的用处？这是因为真理最容易被忘记。连那些对教育和教学负责的人们也常忘记这一点。我不是说他们会或者他们能否定数学的用

处,而是要说:教学与教育是实践,把口头的认识付之实行常常需要很长的时间。

第二章
今日的数学

今日是什么

“今日”从何时开始,这不容易说清楚。如果在数学家当中做一次调查,那么占多数的答案也许是:“由布尔巴基(Bourbaki)开始。”虽然布尔巴基圈子里的人未必就同意这个说法。另一个大家熟悉的年代是1870年,它是以实数的近代理论和若当(Jordan)的《置换论》这部最早的群论著作为标志的。但以1870年为界有个缺点,那就是它距离群论的诞生已有半个世纪,更为欠缺的是,像黎曼(Riemann)这样的现代数学家也刚逝世。

不久前,在一次数学讨论会上,一位青年人在他的报告中说:“这可从石器时代的一条定理得到……”。如果我没有搞错的话,他所指的定理才不过是20年前的事。一位年长的听众便打断了他的话:“你指的是新石器时代吗?”事实上,石器时代何时结束,在地球上各个地区显然并不相同,他那么说似乎直到现在还有人生活在石器时代似的。类似地,在数学里,许多世

代——前天、今天和明天——会同时并存。人们对新事物接受的快慢程度各不相同，年轻人比年长者更易接受新事物。

按一种常被引述的说法，像抽象代数、拓扑、测度论、泛函分析、希尔伯特（Hilbert）空间等学科在第二次世界大战之前没有学校开设。当然这种说法是过分夸张了，提出这种说法的人显然是只就他所知道的大学而论的，但引述的人把他的话引申开去了。我是在1930年取得了博士学位的，当时除了抽象代数以外，我听过由著名数学家讲授的所有这些课程。当我在1930年进入另一所大学时，我又学了抽象代数，但那里却不开泛函分析。在那时，测度论和拓扑学已经使用着铅印的课本了。

的确，在1930年前，并非所有的大学，甚至也不是多数大学都讲授这些题材，更不必说像数学基础、李（Lie）群这样的课了（这两门课在我读的大学里是有的），但这不是主要的，问题不在于这些课程开不开，而在于怎样开。从今天大量的或多或少雷同的教科书中所见到的——线性代数代替了老的解析几何与行列式；抽象代数代替了传统的复数域上的代数；微积分受到了泛函分析的影响等等——这样一类新的课程大致是1935年开始开设的，约在1950年，这些新课

程就在大学教育中占了上风，至迟在1935年，它们已在大学里普及。

方式的改变

应该说，大学数学系与物理系一年级学生所需要的数学基础知识在内容上都不是新的，只是新在表达方式上。为要了解数学方式在这几十年的变化，可以拿本世纪初所写的一本书或一篇文章逐字逐句地读，并尝试用今天的语言把它表述出来就会知道的。诚然，那时也有一些书——例如1914年豪斯道夫（Hausdortff）写的《集合论》——读起来就像是昨天才写成的，但它们是新方式的传播者。只要拿豪斯道夫的书同申弗利斯（Schoenflies）写的同样内容的书《通论》（Berichte）作一比较，就会知道豪斯道夫的书的先进性了。自然，方式改变的历史至今尚未终结。这种可以称之为形式化（formalizing）的新倾向也许只是才开始。到本世纪末，读起本世纪初所写的数学文献来可能像读古文一样。

在这段时期里，进行数学活动与创作的人中，很少人会自觉地意识到这种方式的改变，但是，如果他们拿自己过去的著作同他们今天的著作作一比较，就会发现其中有了很大的变化。我记得我在大学读书

时，在一堂数学课中，一位学员指出，课中的某些定理可以用群论去解释和证明，对此，教师摇摇头说："它们之间毫无关系。"而在今天，在证明这些性质时，没有人不用群论。直到我读完大学以后才知道伽罗华域——以前的人是这样称呼有限域的——原来是体（körper）。我读一年级时，有三门不同的课程都讲线性相关与线性无关的概念，讲的是不同的内容，用着三种不同的术语，这使我感到震惊，但不敢相信它们会是相同的东西。当我记起坐标变换有时由于某种神秘的原因而变为"逆步"[1]时，感到像做了一场恶梦似的。

方式的改变——变量

我记不得我是什么时候第一次了解到以下的基本事实：要给出命题，必须对命题形式中的变量加以约束；还有，有存在性的量词与普通的量词的区别，你应该经常明确地说明你指的是哪一种。我不相信，在我开始读数学的年代里，就有这样的教师，他对写在黑板上的各种变元的约束问题作了些比口头解释还多的事。而学生喜欢专心抄黑板，不去注意教师的讲解，

[1] 设 f 为向量空间 E 的自同构，则 f 的逆 f^{-1} 的转置叫做 f 的逆步——编译者注。

所以笔记通常很糟。在日常用语中,人们对量词的类别往往不予注意,因为这从上下文中就可知道的。例如:“我买了一辆汽车”中的“一”是存在性的量词(有那么一辆汽车,我买了它);而在“一辆汽车很贵”中的“一”却是普通的量词了(对所有汽车而言,一辆汽车是很贵的),因为没有人相信我会占有所有的汽车,或以为我在断言只有一辆汽车是很贵的。但是,如果学生只抄黑板而没有记下教师口头所说的量词的类型,那么他们凭藉上下文进行推论的根据有时就不存在了。在我开始教微积分时,对在黑板上用文字写出极限与连续的定义,感到很头痛,只是很久以后,我才懂得:每当使用或证明一个序列的收敛性或一个函数的连续性时,都应当在黑板上写下这样祈祷式的文字:“对每个……,存在一个……,使得对所有的……,每当……,则……。”当然,半个世纪以来,数学家们就熟悉了这种模式的,但是40年前,在任何数学文献中,都没有清楚地写过这种模式。

在数学中,像上面所说的情形到处可见。一种清晰的表述有时只在长时期的实践之后才得到,而在此之前,学生对他自己一知半解的东西,只好从教师的表情中去猜测。

由于方式的改变,现在人们自觉地使用这些模式

了。1938 年，我在微积分课程中，突然想起要把连续的否定形式详尽地写出来，先用 $\varepsilon-\delta$ 定义，后用极限定义，并论证它们的等价性。我回忆起这件事就像发生在昨天，因为那是我第一次意识到强调思维模式在教学法方面的价值。我相信自那时起，不少数学家也有这种感觉。他们也许也认为使用逻辑符号能减少在黑板上书写的麻烦，但是他们在数学课上又不敢炫耀得像一个发疯的逻辑学家那样。而现在的式样，不只是要求把逻辑模式显化，而且要求直接使用逻辑符号了。当然，我应补充说，在黑板上写出的逻辑材料大部分几乎不适宜于印刷（印刷出来也不是坏事）。

刚才讲了关于变元约束的方式变化，现在也许是来讲一种术语的表达方式的时候了，直到 30 年代它还相当流行，但在近几十年内逐渐消失了。假设那时有篇文章开头说："设 R 是一个拓扑空间"，或"设 G 是一个群"，或"设 f 是一个连续函数"或"设 P 是射影平面上的点"，那么稍后，当作者想谈及一个拓扑空间时，他会说：一个当他想谈及一个群时，他会说一个"P"；当他想谈及射影平面上的一点时，他会说一个"P"。他甚至会这样写："设 S 是一个 R"，或"设 $R_1,\cdots,R_n$ 为某几个 R"。这样，R 便由一个空间转化成一类空间，其他情况也相同。一方面这多少受了

日常用语的自然影响，例如在日常用语中，“人”既可以表示单个的个人，又可以表示整个人类。这也许受了传统逻辑中像“一切 S 是 P”这样的命题的影响。但是从另一角度看，这也是一种因循，而只要我们懒得去为一些重要的基础概念——诸如拓扑空间集、群集、连续函数集、作为点集的射影平面集等等引进简捷的名称或适当的缩写，这种因循的现象也就会继续存在下去。这种因循的现象在口头上还是常见的，但近年来在书面上则已少见了。

方式的改变——函数

我不记得是什么时候，才知道函数不是指 $f(x)$ 而是指 f。估计那是在 1935 年吧。然而即使我理解了这一点，我却不敢这样表述它。有一段时间，我甚至写：“映射 $fX \subset Y$ 意思是指映射 f：把 X 映入 Y，看起来好像是装模作样。后来，许多年间，我曾指责“函数 $f(x)$”的说法，并不准我的学生们这样说，我却仍然写“序列 a_n”。

一些固执的人在终于改变了看法之后才认识到这种革新是那样地不可避免。为什么在毫不碍事时也不应随意地用 f 或 $f(x)$ 来表示函数呢？当你认为毫不碍事时，你会对别人的那种写法觉得是在演戏法。

在只是讨论一个函数或二个函数，或给出的函数是显式的函数组时，怎样写的确是毫无关系的。但是怎样表达某个函数属于一个函数集 A 呢？可以写成 $f(x) \in A$ 吗？不能！因为它有另外的意思，它表示的不是函数属于 A，而表示函数值属于 A。当然，从上下文或许也能看出所表述的意思是什么，但这不能作为依据。

如果承认这一点，就不容许再用

$$\begin{aligned} S(f(x)) &= \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \\ \text{或} \quad T_a(f(x)) &= f(x+a)。\end{aligned}$$

来表示积分算子 S 或平移算子 T_a 了。它们应该表示为

$$\begin{aligned} (Sf)(x) &= \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \\ \text{或} \quad (T_af)(x)) &= f(x+a)。\end{aligned}$$

的确，这并非小事。泛函分析对阐明记号起了许多作用，如果研究的主要对象是函数集合与函数空间，研究这样的一些集合与集合之间的映射，而这些集合又组成空间，这些空间与空间之间又进行映射，等等，那么竟然相信上下文能表明你所指的意思，那就太天真了。随着研究对象的抽象性的提高，需要确切的表达方式就越来越不可避免了。

方式的改变——句法结构的前后不连贯

甚至还有更微妙的东西。让我们分析一下下面众所周知的定理证明。

定理：$\sqrt{2}$ 是无理数。

证明：

（1）假设（将被否定）有整数 p、q，使 $p/q=\sqrt{2}$。

（2）可设 p 和 q 互质。

（3）将（1）平方，得 $p^2/q^2=2$，从而

（4）$p^2=2q^2$。

（5）$2q^2$ 是偶数，因此 p^2 是偶数，从而 p 是偶数。

（6）令 $p=2p'$ 对于某个整数 p' 成立。

（7）$2q^2=4p'^2$。

（8）$q^2=2p'^2$。

（9）q^2 是偶数，从而 q 是偶数，这是矛盾。

在（1）中，变量 p、q 被一个存在性量词所约束，在（2）中，它们却变成自由的了，但显然它们要受到条件（1）的限制，而这在文中未曾提及。在文中，（1）中之 p、q 与（2）中之 p、q 是没有联系的；在（1）中 p、q 是受约束的，它们可以用别的两个字母代替，但如果我们真的这样做，荒谬就变得明显了。在（6）中也有

类似的情况，变量 p' 是被约束的，因此它在（8）中的出现和在（6）中的出现是无关的。

这是吹毛求疵吗？是的，到现在还是，也许明天人们还会以别的方式提出同样的问题的。即使在今天，就有这样一些人，他们会因写出上面例子中的那种证明而感到羞愧。但是，只要别人还用这种老的方式写时，他们也就继续这样做，因为多数人都不愿炫耀自己。然而十年，二十年以后也许没人再敢于写如此含糊的东西了。虽然上述方式的谬误很容易改过来，但它却如此顽固，这真令人惊奇。其实，我们要做的唯一修饰只是在（1）的末了添上"我们称它们为 p、q 就可以了"。对于（6）也如此。

另一个在前面提到过而现在已经消失的马虎事是："映射 $fR \subset S$，它是指映射 f 把 R 映入 S，现在表述这事的方式是："映射 $f\colon R \to S$"。这种表达方式虽然已经好得多了，但是它仍说明了人们对老的表达方式错在那里还不清楚，否则要求澄清的程度还要强烈些。以下通过几个例子来说明我所指的是什么。例：

设 A、B、C、D、E 为一般位置上的点，平面 $\alpha = ABC$ 与直线 $l = DE$ 交于 $\alpha \times l = F$。

我选 $x \notin M$；

$Z = X \otimes Y$ 称为 X 与 Y 的张量积；

序列 $a_n=\dfrac{1}{n^2+1}$ 收敛。

试问：问题在哪里呢？“$fR\subset S$”，“$\alpha=ABC$”，“$l=DE$”，“$\alpha\times l=F$”，“$x\notin M$”，“$a_n=\dfrac{1}{n^2+1}$”它们在文法上称为句子，在逻辑上称为命题。如果所讲的是“映射……”、“平面……”、“直线……”，则人们对引号内的三个点的地方，期望着见到映射、平面、直线的名字；在“我选”的后面，人们期望着见到的是一个受词。但在上述的各例中所见到的却是一个句子。自然，意思是清楚的，即：在 f、α、l、x 的后面应加标点，或添括号。就是说应该写作：

“映射 $fR\subset S$”，

“平面 $\alpha=ABC$”或“平面 $\alpha(\alpha=ABC)$”，

“直线 $l=DE$”或“直线 $l(l=DE)$”，

“我选一点 $x\notin M$”

在其他类似的例子中也都如此。

对于映射，已经引入了比较清楚的记号，但在其他情况，马虎现象依然盛行，我相信，许多人是知道这一点的，但他们不愿小题大作。也许十年、二十年后这种杂乱情况会得到澄清。

在上面所引述的例子里，新方式没有战胜老方式。

现在有很多人在谈及“现代数学”时充满着自信，好像现在的一切问题都已解决了，直到世界末日，一切都光辉灿烂，连数学的语言表达也不例外。

30 年前，以下的写法是一种好的方式：

设 R 与 S 为紧空间，又设 R 一对一地连续映射在 S 上，则 R 与 S 同胚。

这是对的，但它比写的人想要证明的或想要表达的意思要少些。当然，R 与 S 是同胚的，但是它们的同胚是由那假设存在着的由 R 到 S 上的连续映射所表明的。就是说，写的人要表达的意思是：

设 R 与 S 是紧空间，又设 f 是从 R 到 S 上的连续 1-1 映射，则 f 是一个同胚对应。

这说明当他引述那定理并加以应用时，他是按他所想的而不是按他所叙述的意思去用的。

方式的改变——会吠的就是狗

群通常定义如下：

“一个集合 G 在其中定义了乘法，使得

(1) $(ab)c = a(bc)$,

(2) $ae = ea$ 对某个 e 成立，

(3) 对每个 a，存在一个 a^{-1}，使 $aa^{-1} = a^{-1}a = e$。”

在这个定义中两次出现“定义”一词，而两处意义不同，这会令人费解；一个定义可以用来作为另一个定义的工具，也显得奇怪。实际上，第二个“定义”只是说在以中存在着一种乘法而已。但用“定义”一词使人们以为这乘法可以任意选择。因此，我们应该说：“一集合 G，在其中存在着乘法，使得……。”现在变得清楚些了，但还不能令人满意。“乘法”是以约束变元出现的，但如果需要，如何称呼它呢？好！称之为 M 吧。

“一个集合 G，具有乘法 M”。

但什么是乘法？显然它是由 G 的序偶到 G 的一种映射，我把它写作：

$$M \in (G, G) \to G,$$

于是，一个群由两件东西组成，一个集合 G 和一个乘法 M，所以一个群是一对 (G, M)。这样我们必须老老实实用 M 表示乘积，从而把群的定义写为：

“一个群是一集合 G 与一映射 $M \in (G, G) \to G$ 的一对（G, M），使得

（1）$M(M(a, b), c) = M(a, M(b, c))$。

（2）有 $e \in G$，使 $M(a, e) = M(e, a) = a$。

（3）对每个 $a \in G$，有一个 $a^{-1} \in G$ 使

$$M(a, a^{-1}) = M(a^{-1}, a) = e\text{”。}$$

但这还不对，因为这里还有一个存在性约束变元出

现，即（2）中之“e”它在（3）中表现为常量，并反复地被引述。此外，对 a^{-1} 也显得陌生，指数 -1 究竟是什么类型的记号呢？

最简单的改述方法是把特殊元素 e 以及“……的逆”这个函数放入群的原始事项中。这样，群的定义就成为

“一个群是一个集合 G、一个映射 $M\in(G,G)\to G$)、一个 $e(\in G)$、一个映射 $I(\in G\to G)$ 的四元组，使得：当 $a,b,c\in G$，则

（1）$M(M(a,b),c)=M(a,M(b,c))$，

（2）$M(a,e)=M(e,a)=a$，

（3）$M(a,Ia)=M(Ia,a)=e$。”

这样定义以后，一切顾虑都消失了，你就可以放心地写“群 G”、$(ab)c$ 等等，并按老的方式做一切事。的确，彻底地分析了情况，并按此模式去给出一些数学对象的定义，这是有益的。

日常用语是满足不了数学的精巧要求的。例如“交换群”与“拓扑群”虽具有同样的语法模式，都是用一个修饰词说明一个名词，但两种说明却具有完全不同的特性。交换群是满足 $ab=ba$ 的一个群，交换群之集合是群之集合的子集合。而拓扑群却不是一个群，它是以 G 上的一个群和 G 上的一个拓扑的二元组，

并且这二元必须协调,即 M 和 I 必须在 G 的拓扑中连续。在拓扑群中忘其拓扑得群;忘其另一半得拓扑空间。

同样,有限域是域,但有序域不是域而是由一个域及其基础集上的一个序所组成的一个二元组;一个阿基米德(Archimedes)有序域却是一个有序域。一个欧氏向量空间不是一类特殊的向量空间,而是具有欧氏度量的向量空间。一个定向的欧氏向量空间也不是一类特殊的欧氏向量空间,而是附加了一个定向的欧氏向量空间,但述语"n 维"却永远只是限定词。数学用语的这种区别性,显得微妙,但却是基本的,在日常用语中,不易找到和它类似的东西。

一种类似的情况也长久不为人们所理解,即:实数可看作复数,但反不过来;然而一个复向量空间同时是一个实向量空间,但也反不过来——因为,一个向量空间如果允许在其中同复数相乘,那么当然也允许在其中同实数相乘,但(一般地)是反不过来的。如果 R 作为复向量空间是有限维,那么作为实向量空间时,它的维数加倍。然而,如果在一个实向量空间 R 中选定了一个基底后,则可用一种自然的方法把 R 拓广为复向量空间(或者更好地说是 R 与其基底合成

的二元组可加拓广),唯一要做的事是做出基底元素的一切复的线性组合。

上述现象的背后存在着一个简单的事实,即:由 M 到实数的函数也是由 M 到复数的函数,但反之不然;然而,由复数到 M 的函数可以看作由实数到 M 的函数,那就是通过限制来实现,但这反不过来。

大约从 1930 年起,各种独立地形成与发展的抽象结构开始系统地互相结合,由此而产生了拓扑群、拓扑环、拓扑域——即一个集合,它既有拓扑结构,又有相协调的代数结构,就是说,那代数结构在那拓扑的意义下必须连续;也产生了度量群、度量环、度量域——即带有度量的群,等等;也产生了有序群、有序环、有序域、有序拓扑向量空间,等等。这种结合的技巧发展于 1930 年前后;相应的语言表达方式,如前而所阐述的,则发展于近二十年内。

在这个发展过程中,有过一些有趣的事,试述其一:几十年间,拓扑空间被定义为一个集合 R,在其中指定某些子集称为开集,使得空集与 M 本身是开集,且两开集之交以及任意多个开集之并均为开集。当一个拓扑空间已给定时,人们通常说"在基础集合上定义了一个拓扑。"那么试问拓扑是什么?其实就是需要添加到集合上去使它成为一个拓扑空间的那个东西。

现在，拓扑空间定义如下：一个拓扑空间是一个二元组 (R,T)，其中 R 是一个集合，T 是 R 的子集组成的集合，使得 $\varnothing \in T, P,Q \in T \to P \cap Q \in T$，$T' \subset T \to \cup_{P\in T'} P \in T$（实际上，$T$ 就是由前面定义中称为开集的那些集所组成）。在拓扑空间 (R,T) 中，R 是集合，T 是它的拓扑。拓扑就是须添加进去使集合及成为拓扑空间的那个东西，这个东西就是 T，那个开集的组。以前，"空间的拓扑"是含糊的东西，现在清楚了，就是它的开集组。

几何公理可作为例子来说明传统能延续多久。古代公理法与现代公理法都来源于几何学，所以几何学保留某些古风在时间上比其他公理化的领域要长，射影几何的公理化可按如下的希尔伯特式样做出：

诸公理是关于某些称为点与线的东西。公理 I：过不同两点有且只有一条直线。公理 II：两不同直线有一个且只有一个交点。公理 III：……等等。

试拿它同群的定义作一次比较吧，那就好像我们在定义群时，可以不用"群"这个字，而只要说有一些东西，它们可以相乘，使得……"似的。

该如何把上而的几何公理化表达得合适呢？

一个射影平而是一个三元组 (P,G,I)，它由两个不相交的集合 P、G 及一个它们之间的关系 I 所组

成,使得……P 的元素称为点,G 的元素称为线,I 称为接合关系;$I(x,y)$ 可以说成"x 在 y 上"或"y 通过 x"。

方式的改变——形式化的工作

以上关于数学方式改变的例子,都限于语法现象方面的例子,看来好像是在吹毛求疵。责怪数学家吹毛求疵,并非毫无根据,也正因为如此,所以一个显得吹毛求疵的结果有时要经过整整一个世代才被人们所接受,也就不足为怪了。尽管有着种种吹毛求疵,我预料某些现时的马虎习惯会再延续几十年之久。原因何在?那是因为数学家和其他人一样是保守的,而改革需要克服阻力。然而,到了不可避免的时候,它们最终也将被人们所接受的。当思想能被直观地描述时,马虎的语言是能被接受的;但是一件事越抽象,离直观越远,就越需要用仔细的语言来表达。回顾我在大学学习时,我有把握地说,对数学分析的基础,我现在的同事们要比以前的教师讲解得清楚些,这是因为,他们使用了逐步发展起来的更好的语言工具。这种语言对高水平的知识交流以及对研究工作都带来了好处。

我强调过:数学语言的完善化是一个连续的过程,

它的最终阶段将成为如此准确,以致可以用计算机处理。符号逻辑从整体上表明这套语言的模样是怎样的。但完全不能肯定地说,几十年后数学家们就会用符号逻辑的语言来写书和写文章了。和计算机打交道,要用特殊的方式。有人说,这是因为计算机很蠢,而我宁可说那是因为它的智慧和我们的不一样。我们的生活经验使我们能把许多事情看成是显然的。而计算机并没有我们的那种经验,所以那些事情对于它们就显得陌生。人际间的信息沟通,可以通过心领神会的方式进行;对搞程序设计的人,我们完全不必用机器语言和他进行交往。

语言是一种弹性工具。在用日常语言表达数学事实时,必须改造它,使之适应数学的箱要。这种改造的过程还在继续着。最终阶段情况如何,还很难预料,但也可能是这样:日常用语虽然被用逻辑工具强烈地改造过,但却不被完全地形式化;很可能有多种不同程度的形式化,各自适应于一定的特殊目的并在一定的交流环境中使用。

自觉地掌握语言,把它作为准确表达的工具,这就叫做形式化。这是组织现代数学的方法之一。我们在后面将更详细地说明现代数学有一种强烈的组织起来的倾向,而形式化是它的手段之一。我敢预言:现在

在数学里用得最多的形式化，将来必会成为数学家们最有效的可迁移的一种活动。因为世上没有任何东西能像语言表达那样在人类活动的一切领域中广泛使用；数学家们对语言的自觉分析势必到处产生强烈的影响。

外延性抽象

在讨论现代数学的特征时，我首先谈到了它的现代化的特点，即：数学表达的再创造和形式化的活动。现在是揭露它的一些更老的渊源的时候了，这些老的渊源仍保有其青春的活力。前面我讲过，有些评论家认为现代数学开始于1870年前后，即开始于康托（Cantor）和戴德金（Dedekind）。大家知道，克罗内克尔（Kronecker）曾打趣地说过："上帝创造了整数，其他都是人造的玩意儿"我们确实不知道尘世间究竟是谁创造了数。但是，任何一个没有受过数学教育的外行人都能说出康托做了什么事，这是独一无二有如此殊荣的数学家了。当然，这并非坏事。那些人说康托的最伟大的贡献是他发明了"集合"这个术语。实际上"集合"（Menge）一词是后来的创造，当初康托是把它叫做"簇"（Mannigfaltigkeit）的。

当然，通常作为最重要的东西介绍给非数学家

的，并不是"集合"这个词，也不是把一些对象称为集合的这个观念。而且那也不是空集（那是策梅罗（Zennelo）的发明），也不是一些已知集合的子集、交、并等形式，也不是集合能被映射到其他集合上去的观念——恰恰是集合论的其他特点给了数学以深远的影响。

我在前面指出了：克罗内克尔说过上帝创造了整数。在康托之前，自然数从未被分析过，它是预先被外加到数学中来的。而在康托手里，自然数变成了"势"这个更具普遍性概念的一种特例。互相之间能建立起一一对应的集合称为等势的集合，等势集合所公有的东西就叫做集合的势。势可以相加——通过把代表它们的集合（假设不相交）的相加来进行。这自然要证明：相加结果与所选的代表集合无关。按同样的模式，可定义势的积与幂：一个由集合组成的集合 Φ 的积是指由 Φ 到 Φ 中一切集 X 的并的映射 f 全体，其中要求这些映射 f 具有以下的性质：对所有的 $X \in \Phi, fX \in X$ 成立。类似地可定义幂。这样终于由有限集的势而产生整数 $(x \geqslant 0)$ 及关于它们的运算①。

① 现代中小学课本中最令人吃惊的地方是对这个理沦所作的错误解释。

康托关于势的定义在某一点上不是那么“现代化”的。那就是他说的：势是所有等势集所公有的东西——这是一种含糊的概念。今天人们是这样说的：“等势”是一种等价关系；势就是这个关系中的等价类；也就是说，M 的势就是所有和 M 等势的集合的类。（我这里谨慎地说“类”和 M 等势之集的集合“太大”了；如果把通常集合论的招术用到它上面去，会出现一切集之集那一种悖论。）

用外延的办法说明概念，即用此概念所包含的东西全体来说明概念，这是现代数学构造概念的一种枢纽。另一种定义方法是用“……是公有的”，“我把……看成是相等的”这样一类语式，这样给出的定义称为意图式定义，因为它把概念表达为概念创造者的意图。用外延来描述概念时称为外延式定义。用外延式定义来描述概念是由康托的集合论开始的，或者至少是受到集合论的强烈启示与推动的，这种倾向称为外延论（例如“把 A 映射到 B 内”这种说法就像是说明映射的意图，它的外延式表达则为：“由 A 到 B 内的映射是二元组集 (A, B) 的一个子集 f，它具有以下性质：对每个 $a \in A$，有且只有一个 $b \in B$，使 $(a, b) \in f$”）。

把整数定义为有限集之势好呢，还是用皮亚诺

(Peano) 公理来定义好? 关于这问题的答案, 我们推迟到以后再说, 这里要强调的是前面所阐述的概念构造模式已成为现代数学中的一种典范, 并且已经是数学中的平凡事。下面再举几个别的例子。由整数出发, 可把有理数作为分数 (或作为整数的有序偶) 构造出来, 其中如分数 $2/3$ 与 $4/6$ 被看成相同, 一般地当 $ab' = ba'$ 时, 把 a/b 与 a'/b' 看成相同。运算法则的定义, 一如既往, 也就是把 a/b 与 c/d 之和定义为 $(ad + bc).bd$,积定义为 ac/bd。容易看出,这里的各项可用表示和它相同的东西来代替而毫无关系。这种构造法,如果用现代的外延式来表达,那就如下:定义一个关系 $\backsim$:$a/b \backsim c/d \leftrightarrow ad = bc$,这是一个等价关系,而有理数就定义为这个关系的等价类,即一个有理数就是互相等价的数偶的最大集。在这里我们不说:"把 a/b、c/d 看作相同"这样的话,而是引进了一件新的东西, 一件为所有互相等价的数偶所公有的东西, 那就是它们的等价类,然后我们把这个等价类称为一个有理数, 等价类的和与积是由数偶的和与积所导出的。当然,这里要证明:等价数偶加 (乘) 等价数偶仍是等价数偶。

用这样的技巧,可建造整数 mod$m$ 的计算,同余的意图式定义是"a 与 b 认为是相等, 若它们的差是 m

的倍数如果用外延式来叙述,它就变为“a 与 b 称为等价,若 $a-b$ 被 m 整除;一个等价类就称为一个整数 mod$m$”,同样,这里也要证明:“由某个整数作为代表来进行的加法与乘法,可以迁移到整数 mod$m$”,就是说,和与积不依赖于代表元素的选择。

另一个例是关于 mod$f(x)$ 的计算,其中 $f(x)$ 是域 P 上多项式环 $P[x]$ 中的一个不可约多项式。要将 $f(x)$ 的一个根添到 P 中去就要进行这种运算的。再一个例子是有理数域 Q 向实数域的扩张:在 Q 的一切柯西序列所成之集 Ω 中,定义一种等价关系,它的等价类就称为实数,然后把 Q 中的加法与乘法扩充到 Ω,这里同样要证明等价序列加(乘)等价序列得到等价序列。

我还可以举许多例子,但说不出新鲜事来了,都只不过是重复外延性概念的构造模式:由具有等价关系 $\backsim$ 的集合 Ω,得到等价类集 $\Omega/\backsim$。对于 Ω 上的已知结构(无论是由一些关系或由一些运算所确定的),只要知道它是和这等价关系相容,就可以把它迁移到 $\Omega/\backsim$ 上去。事实上,在数学以外,这种方法也是构造概念的一种重要手段。用“等重”、“等长”、“同颜色”的关系,可以把事物按重、长、色分类(如 3kg、5m、淡红),对它们可以使用序关系(多与少),也可以相加。

但是,在日常生活中,这不是构造概念的唯一原则,例如:"椅子"这个概念是由一些"用途"的准则来确定的。这种概念构造法已在数学中出现,它是我们要讨论的另一种工具,它也是现代数学的特点之一。

公理化抽象

1870 年前后是集合论的开始,并且也是现代公理化的开始,这自然是发生在几何学中。几何学自古以来就是以一些基本公设、公理为基础构建成一个演绎体系,这为世人所熟知。非欧几何本来可以引出现代公理化的,但它约在 1830 年出现后,直到 1870 年很少被人注意。在 19 世纪四、五十年代,史陶特(Von. Staudt)曾企图对射影几何与复射影几何公理化。帕施(Pasch)是第一个建立了欧氏几何的无可指责的公理系的人。他教数学家们如何建造公理系,但他的工作很快被希尔伯特的卓越著作《几何基础》(1899)所掩盖了。自希尔伯特以后,"公理"与"公理化"成了新的概念,自古希腊直到 30 世纪初期的哲学文献,"公理"都意味着一类命题,它既不能证明,也不需证明,它是任何证明的基础与前提,并且比起由它导出的任何东西都更突出、更必需、更明显、更普遍。像平行公设这样的命题,人们在许多个世纪中都想对

它加以证明，它在欧几里得的书中或其后的一般几何书中的确不叫做公理，而叫做“公设”（*Postulate*）。即使是帕施，当他所指的是几何的基本命题时，他也不说成是公理。在法语与英语的书籍中，直到本世纪初还称这些基本命题为“公设”大概是亨荷尔茨（*Helmholtz*）最早称几何公设为公理的。他这样做可能是由于他对康德（*Kant*）的著作作了错误的解释。亨荷尔茨以后，庞加莱（*Poincaré*）与希尔伯特跟着照样做。是希尔伯特通过他的“几何基础”把现在“公理”与“公理化”的使用神圣化了。

希尔伯特的《几何基础》是用下面的模式开始的：我们设想三类不同的东西，……点，……线，……面，……设想它们之间有一定的关系，诸如“在上"、“介于”、“平行”、“合同”、“连续”、……关于这些关系的确切而完整的描述包含在几何公理系中。

那些期望见到像欧几里得（*Euclid*）的“一点是没有部分的事物”之类描述的人会感到失望。这在希尔伯特的公理系中没有显性的描述，而是隐性地通过假设点、线、面具有某些性质及它们之间具有某些关系来加以说明。例如：“对于两点，有一条直线含有它们”等等。弗雷格（*Frege*）曾经严厉批评希尔伯特的体系，因为这种体系使他无法判断究竟什么是点，特别

是无法判断他的表是不是一个点。传说希尔伯特反驳弗雷格（及其他人）说：公理化的实质就在于我们也可以不说点、线、面，而说桌、椅、石头。只有那些明显地叙述在公理系中的性质才与演绎推理有关。这和下棋一样，棋子不是由它的形状决定，面是由下棋所必须遵守的法则所决定的。

对隐性定义的认识是一重大进步，它已成为一般科学现代方法论的一个典范。隐性定义的重要性最早是由几何学家热尔岗（Gergonne）（1818 年）强调的，这是在背离亚里斯多德（Aristotle）科学理论道路上跨出的决定性步骤。从亚里斯多德到热尔岗，都把由显性叙述的原理出发去发展科学看成是一种不容置疑的理想，虽然这种理想几乎从未近似地实现过。

当希尔伯特成功地把欧几里得几何建立在公理化的基础上，并用此方式隐性地定义了几何学的诸概念之后，公理化便马上转入了另一个方向，这在希尔伯特的《几何基础》中已见其端倪了。希尔伯特的最为重要的目的是在于研究他的各公理间的关系——如果抛弃这条或那条公理，会产生什么结果？倘无影响，则此公理可弃。若不可弃，则弃去后而得的较弱公理系所产生的便不是欧氏几何，而是一种较弱的几何学，一种满足截短了的公理系的几何学。这类公理系

有着许多互不同构的“模型”，它们在希尔伯特之后，获得了发展的势头。应该说，这样的公理系在那以前已被知晓，只是到那时为止当人们谈及时还没有称之为公理化罢了。今天，对一个集合赋予假设，使之成为群时，也把这些假设称为公理——群的公理，这对传统的所谓公理已跨出一大步了。

公理系如何产生？群概念的历史提供了极好的说明。在 19 世纪几何复活时期，变换是个关键词。射影、仿射、相似、以及其他各样变换和它们的复合，以及它们形成群的事实，这些在人们用“群”这个词来表达这个概念之前许久便已被发现；人们甚至知道和说得出什么是一个群；置换群也是在群概念出现前便被研究了的。1870 年前后，群的概念形成了，那时不但已有了一大堆的群，而且对群的研究也累积了丰富经验，虽然所有的理论都是用各自的特殊术语论述的。群论于是作为一种组织手段应运而生，它是用把所有的群都具有的关键性质明显地叙述出来这种办法去组织那一堆具体的结果。这些性质——乘法满足结合律、存在单位元与逆元——以后就叫做群的公理。利用一些公设来规定什么是群，这和几何学中的做法是相同的。但是，几何学的公理本质上只被一种模型所实现，而群公理却被许多模型所满足。这恰好是群公理合理

性的所在：用同一工具处理各种个别情况，这样日子好过得多了。

群的处理方法是构造概念的另一种典范方法，它跟外延法是针锋相对的。制造群的概念不是把所有认为是属于群的那些东西放在一起组成一个集合而命其名为群的，而是把各种已知的群所共有的特点勾画出来，然后把凡有这些特点的对象称为群，这是公设性或公理化的概念构成法。这种方法其实在上述例子之前就已使用，只不过直到本世纪这种公理化概念构成法才如此地被广泛应用，以致无法把所有应用的例子一一列举出来了。

域概念有相似的历史，几百年间，人们对有理数系与其四则运算（加、减、乘，除）以及这些运算所遵循的法则都十分熟悉；对具有相同运算与法则的实数系虽不那么熟知，也较少阐述，但也是知道的；然后是复数系，它除了缺少有序性外，和前面两种数系没有很大差异。复数系也是代数的基砷，在其中代数运算可以施行，并且一切代数方程在其中可解。实际上，它对19世纪的代数活动是范围太大了。当时代数研究所涉及的是一切较小的数系，其特性是可以进行四则运算的数系，这样的数系被戴德金称为“体”（Körper）——你不要相信是戴德金发明了域的现代概念这种

故事。他所知的只是数域，即复数的子域。同样，他的“环”也只是一些数系，在其中四则运算的前三种可以施行。的确，把域概念推广到函数域上去的是 19 世纪的韦伯（Weber, 1893）。此外，在数论里，有限域被知晓，虽然当时被称为“伽罗瓦域”（德文是 Galoisfelder，以区别于 Zahlkörper【数域】）但前面的这些都还不足以引到域概念的发现，一直到 p 进数域这种新的例子出现以后，人们才得以把所有那些例子置于统一的名称——即斯泰尼茨（Steinitz, 1910）的一般性的域概念之下，现时所称的“抽象代数”或“近世代数”实际上是由此开始的。在一集合中，假设引进了加法与乘法，使它们具有旧的域中那些熟知的性质，那么这个体系就叫做一个域，一个抽象域。这样称呼用以区别于那些旧的域，因为它们已久为人知，所以是更为“具体”。

其他代数概念的历史，大致也都如此，我只想再指出一个例子，它是终于跨出代数领域而也复盖其他学科内容的那批代数概念中最早的一个，那就是“模”（在一个数环上或在一个数域上的模）这个代数概念。如果用现代的术语来说，那么它是一个加法子群，它的元素可以和环（或域）的元素相乘。通常，以前只研究有限生成的模。1914 年前后，分析学家发明

了“线性空间”这个名称，用来概括所有熟悉的函数空间。在30年代，解析几何发生了一次教学革新，用具有普适性的公理化术语去定义常见的几何向量空间。其实上述这些都是相同的概念，但直到今天还没有一个统一的名称。代数学家叫模，几何学家叫向量空间（这名称为代数学家所接受，如果基础环是一个域的话），分析学家叫线性空间。如果最后一个术语能把其他的都排斥掉，也许是可取的。

在希尔伯特以后，代数与拓扑（由弗雷谢（Fréchet）和豪斯道夫（Hausdorff））是最早被公理化了的数学领域（我们前面的例子都取自代数）。现象是相同的：要把欧氏空间、黎曼面，流形、函数集等置于统一的名称之下，首先产生的名称是“距离空间”，其次是“拓扑空间”。如果说抽象代数能合理地由旧的代数概念而产生和延续，那么拓扑学是在一片零乱中创新概念的；新的基本概念产生于需要，而决不可能从旧的奇特的方法——概念中诸如完备性，紧性、可分性、或更为深奥的概念诸如连通性、维数、积空间等当中得到启示。当然，随着时间的推移，代数也需要用新的概念丰满自己。

“抽象”的观点对于分析学，更是起着决定性的作用，因为抽象的方式引出了大量的结果，这些结

果在一定意义下是具体的，即它们是能用旧分析的工具表达出来的，但是它们却不能用旧的方法获得。我生动地回忆起：殆周期函数理论的例子使我震动得如雷轰顶。波尔（H. Bohr）称一个单元连续函数为殆周期函数，若对 $\forall\varepsilon > 0$，有 $l(\varepsilon)$ 以及在任何长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间内有一个“殆周期” $\tau(\varepsilon)$，使对 $\mid f(x+\tau(\varepsilon))-f(x)\mid < \varepsilon$，对成立 $\forall x$。如果真能理解，你就知道它是一种绝妙的发明。不过，我应该承认，当我作为大学生参加一个殆周期函数的讨论班时，我对殆周期函数并没有真正的理解。有一天我读到了博赫纳（S. Bochner）用抽象形式改述了的殆周期函数的定义，即：对连续有界函数集赋予上确界范数，使它成为线性空间 Φ，并在此空间中考察一切平移算子（即由 $(T_a f)(x)=f(x+a)$ 定义的算子），则 Φ 中的元素称为殆周期函数，若由一切 $T_a f$ 所组成的集在 Φ 中有紧的闭包。这样我眼里的翳障散尽，使人们突然地懂得了波尔（Bohr）的定义和证明的实质，博赫纳对波尔的定义所作的抽象改写，是我体验到抽象方法威力巨大的最有说服力的证明。实际上它大大地推进了波尔的定义，把它从实直线平移群上的殆周期函数推广到任意群上去了。

直至 20 年代末，代数，拓扑与分析的公理化努力

大致是独立地进行的，分析包含着代数与拓扑的因素，它启发人们去把各种结构结合起来。例如实数域，它可以看作是拓扑域、或有序域、或度量域，它是两个或多个结构的结合，这些结构必须以适当的方式互相协调。一个拓扑域是一个有了拓扑的域，其中的域运算在此拓扑下连续。一个有序域要求其序在加法或在与正数相乘时保持不变，一个度量域有模 $|\cdots\cdots|$，使 $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ 于 $|ab|=|a|\times|b|$。用同样的方法可得到拓扑群、度量群、拓扑线性空间、度最线性空间。公理化抽象对事物的性质进行分析与分类，能给出更高的清晰度和更深入的理解，即使是对实数理论这种初等理论，也值得知道，哪些性质依赖于环公理，哪些依赖于域公理，哪些依赖于乘法交换律，哪些依赖于完备性，哪些依赖于局部紧性等等。

几何学中发生了什么事?

看今天的数学结构，好像几何学的荣华已尽。在以往许多个世纪里，即使在代数与分析获得成功之后，几何学始终被尊为唯一的真正的数学，被看作是数学严密性的典范。直至 19 世纪的下半叶，当代数与分析（与几何无关地）建立在严格的基础之上以后，人们看到传统的几何学并不像大家所想象的那样严密，这

就动摇了几何学的稳固地位。的确，从古代直到18世纪末，几何学本身没有什么发展，对其他数学的发展也没有做过什么贡献。后来，在19世纪初，几何学苏醒了，获得了新的活力，并由于它的繁荣而极大地促进了群论及代数中许多部分的发展，并为现代公理化的形成作了准备。

现在，几何学的情况如何？在布尔巴基的数学体系中它已消失；在杂志中，称为几何的文章不超过篇幅的5%；在大学中，几何学干脆不被提及；可以自称为几何学家的人也因这名称显得过时，而不这样称呼自己了。但是，如果仔细考察实际，情况似乎两样。我随机地抽取了一篇文章，按其标题属于分析，但在文章的一段中，我挑出了以下的字眼："希尔伯特空间"、"向量空间"、"维数"、"特征向量"、"相似性"、"映射"、"凸"、"反射"、"邻域"、"数直线"、"中心立方体"、"线性"、"平移"、"包络"、"射影"——在一篇非几何的文章中却用了那么多的几何字眼！更引人注目的是还使用了"公理"这个字。这个字是由希尔伯特在他的《几何基础》一书中赋以现代意义的。

词表意，在近世代数与分析中，几何术语的使用表明了几何直观已渗透到了整个数学。这可用一些例子说明：

19 世纪复变函数论的迅猛发展就是其中一例，它是由于几何学进入了分析引起的，即高斯（Gauss）用平面上的点来表示复数以后引起的。方程 $x^n = 1$ 的代数意义通过它的几何解释以及它与高斯平面上正 n 边形作图的密切关系而变得清晰；椭圆函数的双周期性通过它的几何解释而变得明白而有趣。尽管在 19 世纪的最后 30 年间，维尔斯特拉斯（Weierstrass）的函数论代数化看来好像是对几何直观取得了绝对的胜利，但是，1900 年前后所解决的大问题都来自黎曼、来自黎曼曲面、共形映照和单值化的几何概念——这些概念起初只是纯粹地用几何方法描述并只用直观方法处理的。

另一个例子是 1870 年以后数概念获得的新生。数，作为一些事物的个数，作为基数，其根源是直观的。在人类与个人的历史中，做加法与乘法计算都是开始于用手指或卵石。但是，数概念迅速地凝固于数的运算法则之中，这特别是作为数范围扩充的结果而体现的。这在人类的群体或个人的发展中都是如此。数作为一些东西的个数，这是最原始的应用，但它同数学、同真正的数学全无联系。至少是到了康托，他才第一次把那种不自觉的直观抽象过程，即把直观根源引向形式的数概念的过程自觉化了。那就是我们在前面已

经指出过的：集合、映射、一一映射及由它们所决定的等价类。

集合论比它以前的任何数学都显得更为抽象，更为严密。也正因为这种原因，几何直观作为一种组织手段与兴奋剂以防止集合论退化为一些单纯的算法，从来没有在任何别的领域里曾经显示过那么重要。康托是从数直线的几何学中提炼出了抽象化的序并建立了点集论。集合论在本世纪初的另一个成就是测度论，它来自几何中的面积概念，并使那时已成了干枯计算工具的古典积分概念产生了一场革命。与此同时，点集论常成为一门新的几何学科：拓扑学，它把“连结”这个直观概念加以详细规定，并用于研究几何图形。拓扑学中最强有力的代数方法起源于对直观上最简单的几何图形——多面体的研究，如布劳韦尔（L. E. J. Brouwer）所做的那样，面对几何直观提出最高要求的却是那些显得病态的反例的构建，这些反例是更抽象的点集拓扑理论的宠儿。根源在于代数与集合论的拓扑方法对近世代数与分析产生了强烈的影响。与此同时，几何直观却似乎在拓扑本身里消失了。但这不过是表面现象，在拓扑学这个圈子里不时地冒出的思想与课题都有着强烈的几何背景，并且近年来

好些老的课题被直接地运用一些不依赖于代数拓扑的几何方法所解决了。

在代数的影响下,朴素的空间观念在19世纪经历了一次重大的精确化。在解析几何里,平面曲线与空间曲面被分别用二元方程与三元方程来描述;反过来,方程的代数性质却可以用曲线或曲面的性质来阐明。如果几何学家会想到考察和思考 n 维空间的话,几何学对于 n 元方程的研究不是可以有些用处么?如果把 n 阶行列式解释为 n 维空间的体积的话,它不是可以被更好地理解么?的确,约在19世纪末,n 维空间成了几何学家的研究对象。在这里,它的代数根源却十分明显:它由坐标开始,通过代数的方法建立起来。在20世纪出现的新的处理是由抽象代数学家推动的。在这点上他们显得比真的几何学家还要纯正,他们要求:在定义与处理 n 维空间时,点或向量这个几何元素应当是原始的,而坐标是导出的。今天,线性空间或向量空间的概念已成为一切数学家的公共财产。

线性代数里的许多内容经过几何解释只会变得更加清楚。突出的例子是,约在1800年发明的最小二乘法,这种代数技巧只有在把平方和理解为毕达哥拉斯(Pythagorean)测度下的距离平方才能理解明白。

与此同时，空间概念推广到了无限维，推广者是分析学家，他们需要抽象的函数空间为他们的新方法服务。在使用“空间”这术语的同时，他们抓住了整套的几何术语、几何思想方法与几何直观。

如前所述，“公理化”这术语与概念是由几何开始征服了数学的。在许多世纪中，几何学是个哲学问题，这问题是：纯理性好像是闭着眼睛一样，它怎么能对现实作出判断呢？（难道空间及其中的三角形、平行线、球等等不是现实的一部分么？）而这些判断又是正确的，只要我们睁开眼睛，画出直线，量出角度，就能发现的。经过19世纪中一个缓慢的成熟过程，终于引出了希尔伯特《几何基础》中所给出的答案。这个答案被爱因斯坦（Eindltein）简练地表述如下：

“当数学定理涉及现实时，它们是不确切的；当它们是确切时，它们就不涉及现实……公理化的步骤在于把逻辑形式同现实、同实际的直观的内容严格分开……公理是人类精神的自由创造”。

希尔伯特的体系并不像欧几里得的那样从定义出发，而是由一些公理出发，即由一些关于不定义的概念如点、线、介于、合同等的命题出发，这些概念的含义是由那些公理规定的。就像游戏规则一样，公理是任意的；但为了实际应用，它们是必须满足一定目的

的。从逻辑的角度看，要问一个公理系是否真？那是没有意义的，只能问它们是否相容。

几何学的逻辑状况由公理与公理化的概念所阐明，希尔伯特的《几何基础》对此所作的阐述首先产生影响于拓扑学和代数。豪斯道夫把拓扑空间公理化了；而代数则被重建在用公理化定义的群、环、域等的基础之上。今天，公理化方法已渗透到了整个数学。起初，几何工作并没有受到这新方法的很大影响，直到 30 年代，几何学家才想起人的思想有创造公理的自由——这种自由只受几何学家的高明的直观与相容性的要求所检验。希尔伯特在证明几何公理系的相容性时，是通过一套满足这些公理的代数体系（解析几何）去进行的，这种做法可以引导新的重要代数体系的发现。事实上，在 30 年代，几何学的确引出了交换域（一种在乘法结合律上受到某些限制的域）这个新而有活力的代数概念。

这仅是许多例子中的一个。在群论中（其中的结构不比抽象集合论中的结构强多少），几何问题常引出有意义的课理。《代数几何》也许不再是一种几何学了，虽然它有着几何的名称，然而它的发展却常常受着真正几何问题的影响。《几何数论》则是在问题与方法上都是真正的几何学。

现代数学的特点之一是它与诸古典学科之间的界线模糊。几何学作为一种联结的领域,其界线已难以辨认,但是几何方法却总是反复地突然露面。为什么几何直观常被宣告已经死亡,而强劲依旧,甚至于在一些看来和几何学毫不相干的领域中也是如此?显然这是因为几何直观能告诉我们什么是可能重要、可能有意义和可接近的,并使我们在课题、概念与方法的荒漠之中免于陷入歧途之苦,这用康德的话来说,就是:“缺乏概念的直观是空虚的,缺乏直观的概念是盲目的。”

思辨数学与算法数学

设有白酒与红酒各一杯,两者份量相同。现从白酒中舀一匙费放入红酒杯中,调匀后,舀回一匙费放入白酒中。问白酒杯中所含红酒是否少于红酒杯中所含的白酒?

实际上两种含量一样多。设酒杯容量为 a,匙羹容量为 b,在第一次动作之后有……大家知道如何求解,但有 1/3 的人会因计算中出错而烦恼。只有少数人会思考如下:两个杯子最终所盛液体份量相同。设将每杯中的白酒与红酒分离,则盛白酒杯中之红酒是来自红酒杯中之所失,红酒杯中所失之份量是由白酒所代

替。因此盛白酒杯中之红酒与盛红酒杯中之白酒份量相同。

第一种作法是算法求解;第二种作法是思辨求解。这只是大量例子中的一个,虽然它很典型。我们以后会见到其他的一些。目前这例子的作用在于说明算法数学与思辨数学的区别。关于这种区别在教学法上的重要性以后再说,下面先谈一些历史。

“算法”(Algorithm)这个术语是为了纪念阿尔·花拉子米(Al Huwàrizmi)(Muhammad ibn Mûsâ, 8 世纪)的名字。他整理了印度——阿拉伯的计算方法。计算方法或可称为计算诀窍,现在就叫做“算法”。韦达(Vieta)的代数、笛卡儿(Deseartes)的解析几何、莱布尼茨(Leibuiz)的微积分就是一些算法。它们的发明者对此是十分自觉的。韦达在他的著作序言中强调了这一点。笛卡儿把他的《几何》看成是他的《方法论》(Discours de la méthode)中所论方法的第一个例子;莱布尼茨则着迷于算法的追求,他虽然实际上只成功过一次,但他的算法被公认为十分巧妙,以致牛顿的实质上等价的工作变得黯然失色,没有任何地方能有别的算法像微积分那样显示出它的威力来。一些曾经需要像阿基米德或惠更斯(Huygens)那样

的天才方能解决的问题,在莱布尼茨以后任何一个平庸的数学工作者都能用机械的办法来解决了。

运用算法可以增强人的自信心,能满足人要游戏的天性,这可能是许许多多无关重要的算法也能在一段时间里蓬勃生长的原因吧。例如:画法几何;不变量理论中的符号方法;计数几何学中的舒伯特(Schubert)算法等。那些没有玩过这些算法的人,很难想象出它们多么吸引人。傅里叶(Fourier)级数、更一般地正交函数级数、傅里叶积分、留数;高斯——格林——斯托克斯(Gauas——Green——Stokes)积分公式;海维赛德(Heaviside)计算法和拉普拉斯(Laplace)变换等,都是19世纪流传下来的著名算法。关于本世纪的算法,最引人注目的例子是在拓扑中发明并且还在继续发展的同调理论,以及和它密切联系的同态的图表法。

常有人说:现代数学之不同于古老数学,在于它强调的是思辨的因素而不是算法。我承认这一点,并曾几次指出过:最引人注目的新事物,也就是引起现代化过程发生的事物——集合论、抽象代数、分析学、拓扑都是思辨的产物,它们是冲破了算法的僵化外壳喷射而出的。然而,任何熔岩终将凝固,任何思辨的新生事物都在其自身中包含着算法的萌芽,这是数学的特

点。计算曾是一门科学,在它机械化以后,数论才能茂盛,如果没有微积分的算法,分析也永远不会发展。算法化意味着巩固,意味着由一个平台向更高点的跳跃,算法为更深的发掘提供技巧,把算法数学与思辨数学对立起来,好像其中之一是巍巍高塔,可以从它的顶峰藐视着另一方,这是不公正的;我们也不能把它们看作是新与旧的对立。

组织与数学化

科学一旦跨出单纯收集材料的阶段,它便将从事于经验的组织。算术与几何所应组织的经验是哪些,这是不难指出的。用数学方法把实际材料组织起来,这在今天就叫做数学化。但是数学家有这样的倾向,一旦依赖逻辑的联系能取得更快的进展,他就置实际于不顾,在一堆数学经验形成后,这些经验又要求组织起来,这时有什么方法可供使用?当然,还是数学方法,这就是数学本身被数学化的开始:首先是局部的——怎样进行定义?导出什么结果作为定理?这事作为那事的根据抑或倒转过来?是否应将此事作为另一事的特殊情况来加以证明,抑或应先证明此特殊情况然后加以推广?随着时间的推移,数学化将进入整

体性的考虑，自觉地建立理论——显性的或公理化的理论。

这是个古老的故事了：希腊人知道某种二次方程可以解释为平面曲线，孟纳奇莫斯（Menaichmes）证明了这些曲线就是圆锥曲线。然而阿波罗尼乌斯（Apollonius）却从圆锥曲线出发，最后导出了它们的方程。近代，又转了回来、从二次方程出发。但在射影几何中，人们把圆锥曲线定义为射影相关的线束中对应直线相交的轨迹，椭圆函数是作为椭圆积分之逆而被发现的，它们有双重周期，并满足一定的函数方程。后来的人就试图用这些函数方程或双周期去定义椭圆函数。

今天，把数学数学化是数学家主要关心的事情之一。没有任何其他学科能像数学一样，把重新改造数学变成了数学家的第二天性。数学家的行为好像是说：重复与照抄是法律禁止的。任何人讲课都把材料重新组织到自己满意为止。如果这种组织确实是新的、有独创性的，而且比旧材料要好的话，那有什么不好呢？

形式更新的渴望，在其他学科中并没有这么强烈。当我看到理论物理的某些章节在几十年间甚至几百年间从一本书抄到另一本书，而作者甚至没有意识到

由不同时代流传下来的材料在形式上与内容上的相互矛质,我就不禁感到痛惜。在力学教科书中,下面的情况几乎成了常规:一方面,正交变换按欧拉的方式不使用本征值处理;另一方面对称变换则按拉普拉斯方式使用了本征值处理,并且在这两种方式中都使用着数学中早已抛弃了的方法。在统计力学中,历史上前后更迭交替的理论,被说成是等价的,而且各自都使用着很久以前临时创造出来的概念与公式,这样的事难道不够奇怪吗?

一个数学家如果不按部就班地依着数学的连续再组织前进,而是要突然地跃过这个发展中的一列环节,那么他将会遇到困难。一个非数学家通常习惯于在他自己的领域中使用他学生时代所学到的数学知识,这样他就会倾向于拒绝现代数学。大家知道,物理学家往往对一些连经济学家、心理学家、语言学家都并不感到困难的新数学抱冷淡态度,其原因就是物理学家经常使用数学,而另一些人却是新手。从长远看,物理学家想在大学目前所教的,并且不久将来也在中学要教的数学以外并行地培育出自己的数学来,大概是力不能及的。

我们已强调说过:不断更新数学的方式,这决不是一时的兴致,而是一种需要。大家知道,科学发展极

为迅速。为掌握已有的知识，就需要组织。这对数学是如此，对其他学科也是如此，唯一的差别只在于数学家对于组织更为自觉，在更高的水平上进行，这是因为在数学中，组织本身是一项数学活动。毫无疑问，即使数学在不断发展，现在的一位数学家比他五十年前的同事能通晓大得多的数学领域，原因就在于借助新的组织形式。从长远看，其他的人将从数学家的组织经验中得益，而数学家也能给他们以帮助。在不久的将来，关于经验的组织甚至研究领域间的组织的研究，将成为数学家所研究的应用课题。在那里，他们的形式化经验——即语言组织——将充分发挥其效力。

数学组织的最为壮观的例子自然是布尔巴基，这真是个有说服力的数学组织啊！其说服力如此巨大，以至皮亚杰（*Piaget*）竟能在发展心理学中重新发现了布尔巴基的体系。真是可怜的皮亚杰！他的遭遇不会比康德好。康德才把欧氏空间神化为“一种纯粹的直观”，非欧几何就被发现了！皮亚杰不是数学家，所以他不知道数学体系的建造者是多么地不可信赖。当范畴概念的重要性被发现时，布尔巴基的数学体系还未完成。毫无疑问：范畴论将成为重新组建数学的原理，而当布尔巴基的结构被用范畴的式样改建后，旧的痕迹将消失无遗。到那时，如果哪位领头的发展心

理学家想要来说服我们承认数学概念的范畴发展模式——肯定会是这样的——那么，那就是范畴式数学体系在尚未完成之际即将被新的原理所代替的时刻来到了，这种新的原理肯定是要来临的。数学永无止境，任何崇拜某一数学体系的人都应留意这份忠告。

现在，范畴概念正在成为组织数学的一种美妙的手段。如果读者不知道什么是范畴，那他不必过于担忧。本书的作者也并不深知它们究竟是什么，原因之一是它们还在旺盛发展，他曾以为只要他能教这些内容，他就能使自己和别人相信他是知道范畴是什么的，然而虽几经尝试，他却从未成功（目前他只做到了一点：他更好地理解了范畴作为组织手段的局限性）。也许在某一天会有人找到处理它的好方法，然后又有人把它加以改进，这样或者在二十年或更短时间以后，大学一年级的学生就将学习范畴论了。

如果说由于种种原因我还不能说明范畴是什么的话，那么我倒愿意讲个故事给你听，那是一位数学教授和一个写了一篇有关现代题材的论文的人的故事。那人不是教授自己的学生，甚至也不是数学家，而是一位工程师，他带了 30 页的手稿交给教授，希望作为学位论文予以接受。教授很忙，他把稿子粗看了一遍，说："这必须用范畴论。你是知道范畴论的，对

么?”“不。”那人回答道。他走了,去学了一下范畴论,这不需要许多时间,因为越是现代化的数学就越简单。于是那三十页的文章被简缩成了三页,而三页的学位论文就太可怜了,但过了不久,它又增长成为三十页,内容比原来的增加了十倍。

这故事叫我想起了莫根施特恩(C. Morgenstern)的一首诗,我现在把德语的原诗抄录在下面,然后用英文解释它的意思(这可不易)。

Korf liest gerne schnell und viel;
darum widert ihn das Spiel
all des zwölfmal unerbetnen
Ausgewalzten, Breitgetretnen。

Meistens ist in sechs bis acht
Wörtern völlig abgemacht,
und in ebensoviel Sätzen
läßt sich Bandwurmweisheit schwätzen。

Es erfindet drum sein Geist
etwas, was ihn dem entreißt:
Brillen, deren Energieen
ihm den Text – zusammenziehen!

Beispielsweise dies Gedicht

läse, so bebrillt, man - nicht!
Dreiunddreißig seinesgleichen
gäben erst - Ein - - Fragezeichen!!

（柯尔夫（Korf）爱好读得多读得快。于是脑子里塞满垃圾般的无用之物。本来三言两语就能说清楚，却写成绦虫一般的长文。于是他发明一种裁文眼镜来救自己。譬如用它来读本诗，他就只读到一个“不”字！三十三首这样的诗就只变成一个问号符。）

应用

读了这一章，会使人相信：现代数学不过是传统数学的一种方式变化，这当然不对。在本世纪里，不仅解决了许多古老的数学问题，而且产生了崭新的数学分支。我前面特别地强调了方式因素，那是因为它对中小学的数学教学起着决定性的作用。至于内容上，我相信在近期内，中小学数学不会跨过19世纪的门槛。

当然，我应当指出一个例外，那就是通常所谓的应用数学。在中小学里，一些最时髦的应用数学例子将可能比传统的占优势——其原因将在本章后面阐明。

在第一章开始时，我便讲到了应用数学，或者说，讲到了直接有用的数学，因为那是最早的数学；我同时也强调了数学和它的应用之间的相互作用。能否说

由于现代数学的变化影响了它和应用之间的关系呢?我认为不显著。在自然科学和技术中,数学的最大份额仍属古典领域:代数、特殊函数、微分方程、积分方程、变分法中的比较“具体”的问题等等。现代的计算技术使它们变得更重要了,因为许多方法在过去只是一种崇高的理论,而现在可以用世俗的数值途径来处理了。由此,这应该加以强调,以反对大、中学校里那种忽视分析学的倾向。

然而,必须指出,在数学的使用者中间,现代数学不很受物理学家的欢迎。这种抗拒在 1930 年当群论以及希尔伯特空间的埃尔米特(Hermitean)算子进入理论物理时就表现出来了。近代物理是依赖于这一类数学的,但它们从未为物理学家所全心全意地接受,他们把群论还原为古典代数,把群论方法的真正长处都抛弃了;类似地,抽象分析学的抽象因素能避免就避免。毫无疑问,物理学家那样企图回避现代数学,而仅使用随机应变的临时手段或总是归结为古典方法,这只会损害他们自己。只有正视现代数学才会符合他们自己的利益。

数学应用的现代领域之一是统计。统计学在 1930 年前后便取得了现在的形式,和所谓“数学物理”相比较,统计学大部分只用了初等数学。因此,毫不奇怪,

统计学是各种没有受过正规数学教育的人们所能接受的领域。各行各业的科学家和工程师都在这领域中进行工作。1945 年以后，统计工作者激增，这种增长势头现在虽然已有减弱，但统计学仍然是数学的一种重要应用，并在将来也将继续如此。

在应用学科中出现一种最为令人注目的东西，它的内容不容易用一、二个字说得明白，那就是通常被称为“运筹学”的。它包含：自动装置理论、开关回路与计算机逻辑、计算机系统分析、博弈论、通讯技术与信息论、数据与信息处理、线性规划、控制论、图论中的许多内容等等。与其空述，不如举几个例子，即使看来比较平凡或表达含糊，但只要能说明其特点也就可以了。

要在一列数中找出最大的数，或把它们按大小次序排列，用什么方法最为迅速？含 100 个未知量的线性方程组，用什么方法求解？解的精度如何估计？为了一个特定的目的，如何选择最好的开关回路？一个电话交换台应当有多大的规模才能避免用户排队或避免电话遗失？库存多少才能使店主既避开脱销又避开库存过多。赌牌时装假恫吓奏效吗？在某国中走过个指定地点的流动推销员该走怎样的公路线最短？在一堆球中有一个比较轻，其余皆同重，用什么方法能

最快地找出这个轻球来？要发的电报如何编码最便宜？怎样翻译密码？如何避免发报中数码的错误？如何消除信息传递中的噪音？噪音中隐蔽的频率如何发现？如何制作拼板游戏？…

我相信这些例子比前面列举的学科名目更能说明什么是“运筹学”。在古典数学中，这些问题常常不被看重，它们每个都寻求着自己的特殊的数学理论。特别是“有限”问题，即具有一个有限步骤解题理论的问题，只有当它具有适当的解题策略，这种理论才有实用价值，因而事实上重要的只是这个策略。

由于这些要求而产生了大的计算机，并对这些计算机发明了各种解题策略，而计算机本身又是问题的源泉，这些问题也要求有解题策略。自古以来，数值方法对天文学非常重要，三角函数与对数函数的计算方法就是在其中发展起来的。第二类数值使用者是测量学家与保险学家，他们在 19 世纪制造了数值计算工具。到世纪末，许多现在流行的数值方法发展起来了。计算机的产生，使对数时代宣告结束。1945 年自动计算机的问世是真正的计算革命的开始，它们巨大的计算速度使大量数值问题求解成为可能。其结果，数值数学迅猛发展。在其中有着层次分明的各种不同的水平，各种各样的人在其中进行工作——把实际问题数

学化的人，懂得公式并把它变成可以进行数值计算的形式的人，会读公式并把它翻译给机器的人。还有另一个系列：计算机的制造者，策略制订者，计算机语言制订者，程序员。的确，这是一门多面的数学，它被各计算中心所研究。

使用数学的领域增加了许多。我们不必逐一地指出计算机在什么地方使用了。类似地，统计材料在哪里处理，数学方法就在那里发展。通常，新的应用领域所需要的，既不是古典分析，也不是“数学物理方法”。新的应用问题往往是组合数学问题、优化问题、逻辑问题与组织方面的问题，对于这些问题在文献中找不到现成的解决方法。有些学科通过计算机而进行了一次革命。如何使用计算机进行阅读与翻译教材的问题远未解决，但它对语言学家提出了新的挑战，要求他们用新的、受数学影响的观点去研究语言结构。如果要把计算机使用于医疗诊断，则各类症状必须按逻辑的方式加以组织。现在的经济学家把症状预测的数学模型用到宏观经济权衡上去了。

现在，谁都知道那种关于计算机的骇人听闻的说法，说计算机会有一天变成了我们的统治者。这只是我们的幻想抑或将来的世界果真如此？无疑，这问题的答案就像解一个微分方程一样，是真正的数学。

第三章

传统与教育

我的书架上有一本17世纪的小册子，它的标题是“看看谁是各种手艺、发现与职业的创造者或发明者”。它回答了许多问题：谁发明了度量衡、算术与时间推算，谁是第一个魔术师，谁是第一个陶工，谁发明了武器。圣经与神话中记载着，是上帝、英雄与圣人教给人类文学、科学与智慧，我们从尊敬的传统中获知他们的名字。小册子的作者承认自己并非无所不知，他不知道是谁发明了火药，指南针与时钟机构，实际上，这些发明在历史上出现的时间肯定还要再晚些，而且，被认为发明了它们的那些人恐怕也确实是把它们发明得太晚了哩！

技术的进步如人类历史一样地悠久，但如果说名字与日期是历史的支柱，那么15世纪以前的整个技术都属于史前期，有关早期发明家的一切都是传奇。犁和轮，算术和几何都是重要的发现，就像蒸汽机和电一样，可是为什么古时候的发明家都是无名氏？为什

么我们的祖先把他们的发明都归之于神或神话中虚构的人?

近几个世纪内,思想模式有所变化,要理解我们前辈的思想方式愈来愈感到困难。自古以来,传统是人类社会的凝固剂,法律、阶级、风俗、习惯都凌驾于人类之上。实际上对抗传统是危险的。众所周知,历史曾开始于某一个黄金时代,从那以后就再无任何发展,只是不断地衰退。我们的祖先无论在身心、智慧、道德各方面都比我们优越,而我们的子孙也将永远落后于我们。这是一个不可抗拒的法则,我们的全部任务就是做个好的继承人。人类必将不断地衰老,进步只是无神论者的幻想。这是一种古老的历史哲学,却至今还有市场。

事实上,人类历史必然是一个前进的历史,它冲破了这类哲学的桎梏。可是,法典的制定者、发明家与文学家都是小心谨慎的人,他们从不说自己在进行革新,因为成为一个革新者是要冒险的。从表面上看,他们总是关心着恢复古老的风俗,挽救被人遗忘的智慧,复活传统的手艺。有谁作出了一项发明有可能暴露它创造者的所有痕迹就会被抹掉;甚至他本人就可能编造了一个传说,说是天上的神赐给人类的礼物。只有科学家才是勇敢的人,他们有朝一日会承担

责任，不顾一切地去冒险。我们知道的第一个名字是泰尔斯（Thales），是否因为他所在之地不是一个大城市，因而他敢预言日食，并声称发现了数学定理，而不致于被人当作巫士处以绞刑？

一般说来，传统是铁的法律。就像代数、几何是公元前三千年由巴比仑人创造的——也许是一个人创造的——流传了20到30个世纪，直到被希腊人原封不动地接受。接着，巴比仑人的悲剧又在希腊重新上演，在短期爆发出天才的创造之后，往往紧跟着的却是长时期的沉默、僵化。徒弟继承着师傅的事业，但徒弟自己却永远也不会变成师傅。杰出的作品不能培育出新的杰作，却只能作些评说，引导徒弟前进的火炬中燃烧的不是上帝的创造之火，而是温馨的崇敬之情。

希腊科学传播到印度、阿拉伯的土地上，同样的故事在重复，而古老的文明投掷到中世纪的欧洲，也没有显示出新的模式，虽然永不停顿的文化发展模式一向被认为是欧洲历史的特征。对外国文化的接受甚至更为缓慢，而且带着从未有过的敬畏感。

与前面几个世纪的酝酿时期相比，文艺复兴时期看来像是一次创造性的爆发。我早已指出历史学家往

往低估了12世纪以来技术飞速发展的意义——那么富饶的技术发明,其顶峰则是印刷术。

这一技术防止了再一次自我封闭的恶性循环,手写本永远不能像印刷品那样方便地传播知识与科学。书本接替了教师的权威,徒弟离开了师傅,自修者也开始玩上了第一小提琴。科学转化成了研究,学者也成了研究者。

两千年来学者重复着亚里士多德(Aristotle)的断言:较重的物体下落得较快。谁敢那么骄傲地以为自己比亚里士多德还要聪明?伽利略(Galileo)敢,他权衡了亚里士多德的教条,推断它不可能真,他做了实验并且确实证明这个断言是错的。

不多几年以前,人们还认为宇称守恒定律是个真理,直到李政道与杨振宁对此提出了怀疑,而事实上它是错的。年轻一代经常以卵击石。他们想不通为何老一代总是相继重复又相互模仿。对年轻人来说,没有什么是神圣不可侵犯的,就在最近几个世纪内,整个社会改变了对学校实践与研究的全部看法。教师不再拥有不可侵犯的教条,学生也不再是仰师傅鼻息的徒弟。学生在实验室是教授的合作者,在一个小组中不可能有天生的权威,只有自然涌现出来的最成熟者成为为首者。如果说大学里仍然有着一个最后的传

统，那就是没有传统的传统。出版社仍在传播着现成的科学，但是大学实验室有着更高的信念：要证明科学不是教出来的，也不是学出来的，而是创造出来的。

我所描绘的现代高等教育的画面是否带有太鲜丽的色彩？我是否太夸张？确实是这样，我不会坚持说大学里科学的所有侧面，各个分支都是这种情况，我甚至可以确定每个地方也不尽相同，因为人类文化学者告诫我们，当代人还有生活在石器时代的。近来我和一群学生讨论大学的任务，这些学生大多数来自人文学科，他们认为大学的任务是提供信息，而如果他们要提出问题的话，那是因为大学没有提供足够的信息，或是提供了错误的信息，有偏见的信息，或是因为它压制信息大学应该提供全部有效的信息，让学生从中挑选所需要的材料。他们认为采取课题的形式还是比较好的，通过他们所搞的课题，经过共同努力就形成了信息库。

这可能正是他们对学习的看法，不管怎么说，他们相信还有人按照中世纪教学法传统在进行学习。教授们在课堂里教未来的医生如何看病，未来的工程师如何造桥，以及未来的数学家如何计算。事实上，直到个半世纪以前实际情况还是如此。而今天我对他们说，科学的看法是在医院病房、实验室与实习中讲授

的，而优秀的学生参与研究是他课程中重要的部分。他们同意类似于骑自行车、游泳、滑雪这些活动不能从教科书中学，但我不能使他们相信科学也是一种活动，它不可能通过讲座与书本来学，而只有通过行动来学，当我告诉他们学生在实验室里做什么，以及如何通过解决问题来学习科学时，他们的反应就好像我在和他们开玩笑。而学生可以作为教师在科学上的协作者——这一点他们更不相信，认为这必然是个美好的神话。

今天我不能想象这样一种训练方式，就是青年人必须侧耳静听老年人的教诲，在数学与几乎所有的自然科学中，那样的时代早就过去了。可在一般人的心目中，科学的观念还是教出来的、学出来的，而不是实践出来的，当然最错误的是关于自然科学及其实验室的看法，关于大学数学我不能太肯定。一位年轻的同事从成功地学习数学转向研究数学时，他相信数学论文是在书写的形式中发明的，在很长一段时期内，他就企图按此方式进行研究，结果当然是一无所成。幸运的是最终他知道了应该如何做——这种事情无人能真正告诉他。那位同事在学习中教师从不迫使他去解决高于他的常规技能要求的问题，然而这恰是唯一

合适的研究方法，最终他还是掌握了如何做数学，我相信他会在教学中应用这一知识。

像我同事所受到的这种数学教学在今天的大学里可能已不多见，不管理论上怎么说，有关实际教学本身知道得很少，我担心被动的学习仍然普遍存在于许多学校。多年来我们接触了一些一年级的大学生，我们要他们评价中学的数学教师，几乎所有学生所欣赏的教师大多是“会将问题解释清楚”他们认为一个好的教师应该讲得多、容易听懂。对每一类何题都能举出一个例子，对学生的要求能适可而止，不会施加太大的压力。（当然这些学生并不是最差的，也许还是未来的数学家！）我相信大多数的教师不会这样纵容学生，我只是认为值得知道在学生的心目中教师应该是怎么样的。学生对教师作用的另一种解释，则是希望整个学校体系改变为有利于学生活动，取消班级制，以个人或以小组进行学习，教师不再支配学习活动，而是因势利导。

一年级大学生经常抱怨我们在课上没有足够的“解释”，在练习中面对的问题以前从未见过同类的例子，因而与中学的习惯相比，要求他们发展更多不同的首创精神，为了使学生树立起更大的自信心，就必须经常给以一定的压力！情况确实如此，这里需要有

一个短期的过渡，但往往到二年级末，学生还要求作更多的讲解。我们必须绝对抵制这种要求，我们经历过好多次，讲得愈多，解释得愈细，学生的成绩曲线下降得愈快，在实际工作中对题材稍作推广立即就导致紧张。讨论中我们给学生解释这些事情，一开始他们可能不相信，但逐渐地他们就会理解，短时间的讲课与助教指导下比较广泛的练习相结合的体系是有意设计而并非任意制定的。

也许读者认为我混淆了两件截然不同的事情。本章开头谈的是对传统的信仰以及逐渐地从中解脱出来，接着谈到教学的发展从被动地听转为主动地获得。这两件事是怎样相互联系的呢？就是通过所谓教育将它们连结在一起。人们主动地形成课题是否会比被动地接受现成的东西学得更好一些，对这个问题我完全不加考虑——事实上更多地决定于题材的类型，它是否更适合于这一种方法而不是那一种方法。暂时我不关心教学法的结论，一种权威的方法是好是坏或是不适合学习过程，都无关紧要，之所以说这个方法不可能，就是因为它不符合现代社会的特性，老的权威不能再束缚解放了的青年人的学习过程。将我们的文化遗产作为现成的材料原封不动地传授给青年人，这种做法太危险了。我们的教育应为青年人创造机

会，让他们通过自己的活动来获得文化遗产，同时应该让他们学会自信，相信自己在学习过程中可以充分地施展自己的才能。

歌德（*Goethe*）在《浮士德》中嘲笑了传统，同时以明确的方式表达了他的看法："从你父辈那儿继承的任何东西，获得它就是为了占有它"。过去的文化变动较小，在遗产与占有之间不存在裂缝。只要父亲活着，儿子总是未成年，而当父亲一死，儿子就继承了父亲的生命与工作。今天每个人都是整个世界的继承者，谁也没有什么特权——如果说今天还不是如此，那明天必将如此。占有不再是一种状态，而是实现占有的连续活动，教育就是引导这个过程，而不是好心地将礼物塞满人们的手和脑。

婴儿最初几个月具有免疫力，一年以后天生的免疫力消失，他们必须学会保护自己身体。疾病袭击儿童，身体就作出反应，采取相应的活动。医生的医术就是促进身体具有抵抗疾病的能力。

青年人在智力上也会受到毒害，广告与娱乐活动中粗制滥造的无价值的文艺作品就是对青年人的威胁，这不是因为它们污染了道德情感的天然源泉，而是因为不必通过自身的活动就能享受。要防止这一点，只有一个办法——激励人们的意志投入活

动——凡是通过自己的活动而发现科学、艺术与道德的儿童必然具备智力上的免疫功能,就像他具有身体的免疫功能一样。

没有哪种生物像人一样生下来是那么孤立无助,所以哲学家相信精神开始于空白,这当然是不正确的,但有一点是对的,即人类必须学习许多体力与智力活动,而其他生物却具备天赋的本能,学习是一个缓慢的过程,不能采用任何方法来强迫它,这是人与其他动物的区别。缺乏本能因而需要学习,导致人类显示出这样的特征,要在接受与拒绝两者之间进行自由的选择。大自然赐给动物以即刻必需的本能,赐给人类的却是一个机会与任务:获得遗产并且占有它。

在我们的社会中,从文化遗产到文化占有的道路是漫长的,所有权已经成了一个模糊的概念。本世纪初,将算术教给一个孩子,对于要维持他所继承的人类清苦的生活,仅仅作个记帐人而言,他所学的已经足够了。可是商业已经逐渐转向机械的与电子的计算机,人工的计算可能会消亡。如果我们今天的教学只是将一些东西灌输给儿童,而10年或20年后,计算机会比人做得更好,那岂非自找麻烦。坦率地说,我们无法知道今天教给儿童的题材,是否就是他们未来所需

要的。但是我们可以教给儿童更为宝贵的东西，不是特定的题材，而是如何去掌握题材。

学生将学习过程理解为只是一个信息流，因而他们指责大学提供了错误信息，要求大学应该成为传递正确信息的通道，如果只考虑这一方面，他们可能是正确的，但应该使他们知道，学习与接受信息毕竟是两回事。

这个观念在教学实践中渗透到何等程度？每当我提到被动地学习与主动地获得时，总有人说："这是像夸美纽斯（Comenius）一样古老的故事。"关于夸美纽斯我不清楚，但至少我知道裴斯泰洛齐（Pestalozzi）[1]就曾再三强调过，这意味着"一次"是不够的。如果认为自夸美纽斯以来，教育方面什么事情也没有发生，那是不正确的。至少画册中的马和马车都陆续地换成了火车、汽车、飞机和火箭，这不是在挖苦。不要以为伟大的教育家没有取得杰出的成就，因为他们没有实现自己的愿望。事实是社会也在变化，夸美纽斯与裴斯泰洛齐说过的话，进入新的时代就有了不同的含义。教育必须与社会保持并驾齐驱，错误就在于将理想的概念当成了现实，那些企图实现赫尔伯

[1] Pestalozzi（1746 － 1827〉提倡实物教学法的瑞士教育学家——编译者注。

特（Herbart）或杜威（Deway）的理想的实践家，也同样会感到失望。而另一方面在理想与现实之间的差距也并非是无可辩驳的定律，这一点也已被福楼拜（Fröbel）、蒙台梭利（Montessori）等人所证实。

我不能断定当前的教育实践在实现主动地学习的要求上达到了什么程度？重复这些要求只是旧话重提还是开辟了新天地？近几年的一些亲身经历令我大为吃惊，例如：一所中学七年级的本国语课，教师讲了一个小时，不停顿，不提问题，也没人回答；另一所中学七、八年级的数学课，教师滔滔不绝地讲解，几乎没有时间进行提问，虽然最初10分钟让学生重复前节课的内容，但由于学生表达不好，还被教师打断了好几次。接着又观摩了五、七、十年级的数学公开课，那些最高水平的教师足足讲了三刻钟，学生甚至不敢透气，随后进行书面练习，要求学生运用教师已经证明的定理，也只是将定理中出现的参数赋以具体数值。

最令我沮丧的是参加公开课的教师，他们显然认为这样一个过程是教学法的模式，并且赞赏执教者的高质量表现，他们似乎并非意识到这就是有人曾经夸张地描述过的学校：“每一个人都在睡觉而仅有一个人在讲，这种状态就是教学。”

我不相信中学或大学里那些卓越的教师都像我刚

才提到的那些一样，我也为自己的幸运而祈祷，因为我遇到的多半是好教师而不是演说家。刚刚提到的那种模式的课在我那个时候不可能有，我想这是近年来的一个新成就，这样的上课方式是电视屏幕上的方式，也许可以称之为 *T.V* 模式。这样的课自然没有任何留给学生的机会，可以想象一下，如果学生提了一个愚蠢的问题教师无法回答！或是展开一场讨论，结果这节课的目的没有达到，要是允许出现这些混乱的情况，利用电视这种手段就太花费了。好几个星期我在电视上看一个幼儿园教师上课，每天她一个人像瀑布一样喋喋不休地讲一小时，两个星期后她已经取得了效果，没有哪个儿童敢打断她，于是她又转到一个新的小组再如法炮制。显然因为这是个摸式，它可以在电视上表演，也正因为它是在电视上表演，所以它成了个模式。

应该承认有一个重要的因素，传统的教室是否会妨碍学生主动的学习？黑板与座位的安排是否会使学生的眼睛必然被引向教师的讲解，因而只能被动地听？实际上我相信大多数学校必须改组教学，以保证学习只能是主动地学，而不能被动地学。

学习过程中教师的作用还需要从另一方面来考虑，学生从中学里习惯的小型班级转到现代的人数众

多的大学,经常由于缺少师生之间的个人接触而感到不习惯,这个问题自古以来就存在,也许可以上溯到中世纪时代,甚至伊甸园时代。有人认为学生要求与教授面对面交谈这是否太过分了?但即使是电视上的演说家也从电视机中注视着你,为什么教授却不能呢?

对大学教学个别化的要求是不切实际的幻想,未来的教学会变得更加非个别化,而且不仅限于大学。如果教育要普及到社会各阶层,它必须成为一个可以销售的产品。数学的大部分内容都适宜于程序化的学习过程,要以个别传授的方式来教就是一种不必要的浪费。个别参于(与)应当用在真正需要的地方,比如检查学习过程,因为单靠学生的自我检查是不够的。程序教学在不久的将来会是一个重要的任务,在近几十年内个别化教学将会达到它的数量极限。现在主要的问题是主动的学习甚至创造性的学习是否也可以实现程序化,本书中将不止一次地提到这点。

合理地改革教育是社会的迫切需要,教育正在成为一种成批的产品。有人抱怨这种成批生产,可我认为你无法拒绝教育的成批生产。

成批生产已经是一个半世纪以来我们的社会经济发展的秘密,直到四分之一世纪以前,人们还普遍相

信“手工制作”的东西要比成批生产的东西好，即使在那时这也是一种错误的概括。今天大多数人都同意几乎在所有的工业中，个别制作永远也达不到成批生产的质量，所以个别的手工劳动只限于一些工艺品的生产。

如何使教育也能成批生产这个问题就更大了，我们不能不管，因为不能拒绝那些要求受教育的人。我担心这个问题很难使人理解，特别在西欧，无论在任何会议上谈到数学教育总是指社会精英的教育而忽视其他，精英教育与群众性教育的差异传统上由学校名称就反映出来了——像德国的大学预科和法国的公立高级中学。60 年代初荷兰的立法甚至进一步加强了这种差异。十年是个很长的时期，如果有人还相信这种学校类型的差异可以继续维持下去，那他必定是睁眼瞎子，必定忘记了所有的事，而且什么也没学到。为了唤醒睡梦中的人是否应该更为喧闹？不仅早该废除学校教育中的地位差异，对 18 岁以后的教育也同样如此。另一方面我们期望未来的学校会根据学生的才能、兴趣以及学习态度的各种差异而显示出教育的多样性。

直到现在西欧的教育还是一种精英教育，大多数的改革运动加强了这个倾向。就说数学，我担心它的

教学计划和教学方法都遵循着一种信念，即数学教育是培养数学家的教育——谁跟不上就被淘汰，这个信念数学家看来是非常自然的。对于被淘汰的或是从未从事过的，则将精英的数学再安排第二次的灌输。即使是美国和她进行的为所有人的数学的庞大试验，群众性的数学教育仍处于试验阶段，还没有一种令人信服的新设想。迫切需要解决的一个问题是，数学是为精英的还是为所有人的——必须为属于教育整体中的数学设计一个形象。

第四章
数学教育的用处和目的

数学教育的用处和目的,已有很多人从各个不同的角度进行了长期的讨论,有关这方面没有什么可说的,其实,本章的目的就是想表明这一点。

数学教育最大的问题就是用处与目的之间的分歧,任何一个其他的教育领域,都不像数学教育那样,在无用处的目的与无目的的用处之间有着如此之大的距离。难道直接的目的就是使用,而远距离目标的使用就是目的?从使用到目的有没有连续的过渡?有谁能知道直接的应用在哪里终止,而间接的目的又从哪里开始?因为用处与目的基本上不相同,而且两者之间有着漫长的一段路,所以不会产生什么问题。儿童开始学习读和写的时候,也许并未意识到有什么目的,但教师当然知道所教的每一行的目的是什么。很清楚,那就是掌握读和写的技能,实际上,这个技能开始于儿童读写第一行之时,随后则是一个完善的过程。当然这里面也有一定的教学顺序,也有内容是否适当的问题,但从整体而言,不能说每个读和写的练

习都会使学生更靠近目标,目标并非是读这个或写那个,而是可以不受限制地读和写。字母的发明使人们有可能读写认识的词与不认识的词,也能从基本的读物开始,继续进步到阅读报纸和百科全书。

算术与读写就已经有了差异,但还不是很大,而当算术愈接近真正的数学,就愈令人产生怀疑。人人知道,学习读和写的用处就是会读和写东西,但什么是学习算术的目的呢? $2+2$ 的用处姑且承认之,而长除法、分数、分子、分母以及应用题、趣味计算等又有什么用呢? 实际上,知道算术意味着什么? 任何人学了读书和写字,就可以读和写他所需要的每一样东西,但即使你做了多年的算术,仍然还有许多问题没有做过。可能算术的最基本的目的是完全确定的:解决口常生活中的数值计算问题。但是水平愈高,目的就愈是不明确。人们愈来愈怀疑是否要将简单的算术作为一个题材,因为对于复杂的问题,使用机械的计算机会比最熟练的人类"计算机"工作得更好。半个世纪以前,情况就不同,那时一个教师会认为培养学生解算术题是个永恒的事业,并为此而自豪。从某种意义说他是对的,因为拥有熟练的计算技能就可以借此谋生。认为培养学生的算术技能是终生为之奉献的事业,这样的教师至今仍然存在。如果一阵风把你刮

进这样的教室，面对者全班奇迹似的计算技能，你也许不相信自己的眼睛与耳朵。这样做的总的价值是否值得赞美？它所显示的并非魔法而是真实的成绩，能驾驭一般水平的班级使之达到这一高度的人是个艺术家。访问者在仔细视察之后，作出的反应更周密了。儿童是完全可塑的，教育艺术家可以塑造他们。实验表明几乎任何东西都可以教，只要你掌握了教的诀窍。在这一个出现计算奇迹的班级里，访问者会清醒地询问自己："这样做法是否值得？"对于教师中的计算迷来说，算术是一个最终目的。他们相信计算，也相信它的教育价值。同样也有书法、体育、文法和句法的信徒，但是信奉算术的是最有才能的，所以也是最危险的。他们所教的算术是自身能力的顶点与极限。如果一个教育工作者只知道所教的那些，并不知道得更多，那他总是错误的。他不懂得站得高可以望得远，他会把仅有的一点知识捧上了天，当作是不可侵犯的信条。这对算术与其他任何东西同样是危险的，为学校设计数学教学计划而又不了解学校的数学家，从来没想到学校中还有什么事情比学习数学更重要，这些人当然也像那些计算迷一样，陷入了狭隘的观念之中。

来自美国的最新提法，将算术包括在数学之中，如果它不只是一种提法，而是指数学真正能从 1+1 开

始就作为一个整体来教，那倒是件好事。但无论从现代的教科书或是现在的师资培训工作中，都看不到这样做的迹象。我担心结果是：不少国家在低年级教“数学”的人甚至不懂得什么是数学。

有一个时期人们认为算术本身就是教育目的，这有一定道理，因为每个班级总有几个聪明的孩子希望以其计算技能取得成就。但是算术的这种成就只是一种视错觉。观察者只注意到心算快而且几乎没有差错，当然，他不会去更精确地数一数，作出所谓没有差错的判断，实际上到底有几个差错。一百次基本的加法、乘法中出现一个错误，这看起来是个辉煌的成绩。然而这个百分数意味着三个一般水平的笔算乘或除法中就有一个是错的——实际上，这几乎是普通初等算术教育的一般结果。不必再争了，这个实际结果不仅不能令人满意，同时也没有更多的价值。准确度即使提高一千倍也不见得好，尤其是考虑到，无人能与现代计算机的速度相比，传统的算术教育中，除了纯计算问题外，也有构造的问题（分数与括号）和应用题。算术就是用这些东西建成一堵反对真正数学的墙，使之自我封闭以保护它逐渐僵化，现在最坏的脓肿已切除，但我不能确定真正的数学是否已经渗入了低水平的算术。

体系

数学教育的目的很难确切地表达。我们都知道,数学有许多应用,很多学生将来必须用数学。如果我们能告诉每个学生,哪些数学概念与技能是他将来需要的,那倒是件好事,可事实没有这么简单,而且恰好相反。数学又是如此灵活,对于大量的数学一般原理,不论就个别而言还是就整体而言,究竟有什么实际应用,又适用于什么范围,都难以明确规定。

这是否意味着课程可以随心所欲地规定?如果不知道学生最终要应用哪一类数学,是否可以按照我们的爱好来教?有人大声回答“是”但许多人会认真地思考。

首先考虑到,存在一种约束,那就是学生的接受能力。这不像人们想象的那么严重。因为更多地依赖于如何组织题材。再说成功也没有真正的标准。有人对某些题材进行了试验,教过以后检查学生是否理解。然后作出这样的判断:例如,学生掌握了所有细节,或是学生能解这类问题,就是对一般命题中的参数赋以特定值。像这类判断可能意味着很多东西,也可能意味着一些更本质的特性,这可以通过例子来证实,然而这总是局部的标准。可以声称对一个孤立的题材取

得了教学上的成功，但这是个廉价的成功，因为只要采取有力措施，特别在题材涉及面不太广又不太深的情况下，任何孤立的事物都可以成功地教会。可是这种周部的成就不能说明什么问题。真正重要的是要了解这个题材如何与数学教育的整个主体相适应，它能否成为整体中的一个组成部分，或者它是如此孤立，以致最终在教育整体中没有留下任何痕迹。

有时会听到由这类试验得出的结论，简直夸张到惊人的地步。例如经常提到小学就可以教群论。实际上进行的试验只不过是让儿童运用几个特殊的群来进行一些运算（活动本身可能是极为有用的），也许就把这些对象称作群，或是在较高水平上给出了群的定义。如果把这也称为群论，那么按照同样标准，计算就是数论，处理函数就是函数论，而量量尺寸、称称重量就是物理！究竟是否是群论还缺乏合理的标准。这种说法是欠妥的，因为人们真的相信这是群论，那就必须对“群论”负责。我承认有人真想在学校中教群论。我想实践会证明要做到这一点不可能在小学，甚至也不可能在中学的低年级。

其次，某个题材能教，并不等于说这个题材就应该教。数学教育中虽然没有确定的分界线，但也不能忽视一定的先后次序。两个题材孤立地看都是可教的，

但这一个可能比那一个更为重要一点。其中最起决定性作用的往往是这个题材更为符合整个体系。还有一种很值得怀疑的论点偶而也会在试验报告中出现,即题材是有趣的。这种论点是虚伪的,因为我们并非按照学生是否喜欢的标准来选择题材。事实上,如果兴趣也是一定的价值标准,那么教育工作者的任务就是给学生灌输这种意识。真正的教师会使计算变得有趣。儿童喜欢计算题,特别是除法。机械地计算、模仿与跟踪都会成为有趣的活动,当然教师也不能滥用这一点,否则他就成了煽动者而不是教育工作者了。我们不会用糖来宠坏自己的孩子,对吗?当然我也并非主张味道愈是不好的食物就愈有利于我们的健康。我只是说兴趣应该是可以培养的。

前面的讨论蕴含着一种看法,似乎教哪类数学是无关紧要的,因为无人能预测儿童将来的需要。但如果认为对一般儿童的未来生涯绝对一无所知,这种说法也是不正确的。至少有一点几乎是必然的,即他也许不会成为一个数学家。随着学生从小学到文法学校,再由高年级选读科学分支到大学转向与数学有关的领域的学习,这种必然性逐渐减小。我们应该反复强调人们最容易忘记的一点:除了未来的数学家以外,还有许多人必须学数学,其中只有少数人会用到

一些比较复杂的数学，大多数人只用一些简单的数学，而即使是那些从不应用数学的人，也应该学数学，因为数学已经成了人类生存所不可缺少的一个方面。

数学家自然倾向于培养数学家，教师很可能按照自己的模式来设计数学课，来塑造学生。因为教师是数学家，他不容易避开这种诱惑，就是为未来的数学家设计数学教育。解释这个习惯并不表示赞成它。数学家永远不该忘记在未来数学家的需要中，数学的教育简直是太重要了。有时会听到这类自夸——“我们是数学家，我们知道什么是好的数学，这是我们的事，其他都是胡扯。”这种反应，自然是极个别的。但是只管教数学而不管其他的倾向深深地扎根于数学家的心中，虽然受到抑制但仍然非常活跃。许多内容需重新进行合理的安排，在数学趋向于数学化时，数学思想总是要表现自己的。学生当然应该学习数学化——我是指从现实情境的数学化开始，而数学情境的数学化可能是结果而并非出发点。有相当多的人认为，将儿童引入数学体系是数学教育的目的，这一体系散发出迷人的美学魅力，但却不能为数学知识浅薄的人所理解。以数学体系为最终目的只能是未来数学家的目的——还不是全部，因为相当多人并不欣赏这个体系。有很多理由表明，这永远不可能是普通数学

教育的目的。如果以目标含糊的体系来决定题材，那就常常是包含了无价值的东西却排斥了有意义的事物（前者的例子，如强调数的概念的关系与琐碎细节；后者的例子，如删掉了不符合体系的全部几何）。如果这个体系完全按创始人的观点构造，可能以其逻辑的严密性迷惑了创始人自己，而如果另外的数学家也同意这个观点（这是极少的），那也可能受了迷惑。但是如果按照这个体系来进行教学，那是违反教学法的（例如按照系统化的要求，想以仿射观点来反对度量观点）。

受体系的约束是企图培养学生成为数学家的一种最明显的表示。与其说这是一种成功的尝试，还不如说它与自然倾向完全矛盾，以致只会引起学生对数学的反感。当然，对各种特殊情况我们不能事先预测，但是估计学生不会成为数学家这件事从统计学看来还是颇为可靠的，因而我们不该再想把他培养成数学家。遗憾的是，这种倾向并非数学家的专利。地理学家想教育所有的人成为地理学家，书法家又想把所有人培养成为书法家。一旦有人建议将数理统计或计算机数学放进课程，那就必然会形成一门培养未来的统计学家或程序设计专家的专业性很强的课程。这正是我们的通病，狭隘的或是狂热的想法，有时还兼而有

之（请记住我指的是"我们"；人们提出批评时，我既感到骄傲又深感羞愧。）

这常常是一种狭隘思想的表现。如果有人说他不知道学生将来如何应用数学，这可能是谦虚，但也可能是遁词，用以掩盖他确实不知道数学如何应用。许多现代教科书和幻灯片中有关集合的例子，充分揭示了作者不知道集合的用处是什么。有人固执地避免集合与映射的无限性，使该领域更为孤立。有人介绍一般的函数却避而不谈特殊的函数，这种做法表明他们根本没有掌握函数的意义与重要性正在于它们到处可用。但并非所有怪现象都可用无知来解释。如果说将中学的概率论处理得像纯测度论一样的作者，会从未听说过概率的应用，这是不大可能的。将概率与一切现实割裂只能是狂热者的工作，他就是要保护纯数学，以对抗一切应用的影响。坦率地说，这种狂热潜伏在我们所有人的头脑中。总想有一个完全平衡的概率结构，一个奇迹般的完整体系，一切都按严密的规则安排。例子只会扰乱了这个伟大的统一体，就像在崇高的结构殿堂的窗户内放上了花草。我们是否应该用这样的课程来满足应用者的需要？我们是否应该从实际问题开始来设计总体方案？我们是否应该放弃毫无应用价值的基本定理，而挑选另一个可以应用但却

不太基本的定理？不，因为这会导致整个体系的混乱。即使我们这些数学家被比体系更美的问题所吸引，我们也仍然不会放弃这个体系。

应用

初等算术的近期发展引起了混乱。不管对传统的算术书提出任何指责，至少它们清楚地意识到数学的应用性，并且提供了可供多方面应用的知识。传统教育肯定存在严重的缺陷：追求不必要的复杂性，创造不现实的问题，在算术结构内规定特别的解题方法，其实只要用一点稍深的数学就可作为适当的工具。近年来，糟糕的是算术教学落后于社会发展的步子，不考虑日益增加的各种应用的可能性，反倒一味追求形式变换的花样，因为他们根本不了解应用，却抵制不住现代数学的形式的令人眼花缭乱的魅力。大量的传统经验被抛弃。典型的一个例子就是过分强调自然数的（趋）势，在数与现实之间的多种多样联系中，它的作用是最无足轻重的。我担心这种趋势继续发展，会严重损害算术教育，特别是有关应用，而不是计算技能，因为后者几乎已经深入人心。毫无疑问传统的算术教育不仅培养学生的实际计算能力，而且提供了大量的实际应用问题（分数可能要排除在外）。我恐怕

未来的算术教育会遭受严重的挫折，而且我确信现代数学对此应承担责任，虽然它是无罪的。

函数与映射也是以一般形式引入，丝毫不提它们与现实以及早先的数学知识之间的关系。我断定这种关系一般都不知道，值得再次证实以显示其多样性。自从函数、映射与初等代数引入学校以后，在自然科学上有许多应用，可是出现了一种反常现象。物理和化学的教师认为数学在这些方面的应用，都应该是数学教育的任务，数学教师有责任为此作好准备；可是又不了解这种准备究竟进行得如何，于是只好尽量少用数学。这样，从小学、中学一直到大学，就形成了一个奇迹——非数学化的自然科学。物理教师上课时避免出现函数，给定公式中的参数都代以具体数值，尽量减少有关的数学。自然科学的这种非数学化，同时损害了数学教育与自然科学教育。它会导致数学的枯燥乏味与自然科学的肤浅。如果自然科学没有数学这一重要工具，如果数学家没有从自然科学背景中了解到问题的重要性，那么不论是数学还是自然科学都不可能发展到今天这样的阶段。当然学生的认识发展过程与科学的发展并不相同，因为历史并不懂什么系统，而教育却能够而且应该使之系统化。如果我们希望学生学会运用数学，那就必须打破使数学与外界隔

绝的障碍，尽可能应用于其他科学中去，以便使学生学会如何应用，并善于运用。如果希望学生能掌握相互关系，就必须教给他各种关系。如果抱怨物理学家教的是非数学化的物理，那同时也应抱怨数学家搞的也是孤立的数学。数学教师通常认为：我教我理解的数学，对于应用我不了解，即使知道一点，也不符合数学的严谨性，我又无法使之严密化，如果将它们放进来，就会破坏了数学的逻辑结构。我们不应责怪数学教师的无知，因为他确实不知道如何用数学。他上哪儿去学呢？许多国家的数学教师培训中很少包含自然科学的副修课，而很多教数学的人自己也不懂物理，或是只学过非数学化的物理，培训课程与应用毫无关系。有个组织这类课程的人曾对我说："如果将有用的数学教给教师，等教师一旦掌握，企业就会将他们买去，所以只能教给他们永远不能用于校外的数学。"我不相信事情会如此糟糕。再说这当然不能成为这类课程不教应用的理由。关键还在于课程的组织者对此没有树立正确的观念。

在有关教师培训的一次国际会议上，有人提出课程中没有包括计算机，并且认为数学教师应该了解如何用计算机回答问题，会上的反应是一片寂静。我想如果有计算机专家在场，一定会提出一个有关数值数

学的完整课程，而顺利地通过了这门课的人，恐怕去企业工作会比留在学校当教师更好。如果有非数学家在场，他也会认为，一个数学家应该了解，计算机这一奇迹的出现，给数学发展开辟了广阔的天地。假定有个学生向教师提出这样的问题，教师的回答可能是：计算机不属于数学课程。如果学生再问："为什么不属于？"教师的托词可能是："当前各种科学都是相当专门化的。"也许最容易逃脱困境的回答是："那是11年级的课程"，然后希望学生到那时就忘了这件事。

但是我们能做些什么？虽然你已经设计了一个进一步训练抽象数学而与外界隔绝的课程，你却无法否认数学在社会中扮演的角色，应该知道从过去、现在一直到未来，教数学的教室不可能浮在半空中，而学数学的学生也必然是属于社会的。如果你正好尽了一番努力，从教学计划中删除了几何，因为它不够精确；又删除了微积分，因为找不到恰当的表达方式；难道随后你会接纳与教学计划格格不入的计算机？你已经设计了一个课程，它的每一部分都是属于同一种模式的，从集合，关系一直到向量空间，难道还有什么地方可以放计算机？计算机可能是有用的，但它却是个外来的异物。

也许有人会找到解决办法——讨论二进制，这就

意味着计算机。至今还有人相信二进制是计算机的最深奥的秘密。概率与统计可以联系一般测度概念,将它处理成为测度论的一部分。同样可以将微积分安排成为拓扑的一个分支。

充满着联系

不要教孤立的片断,应该教连贯的材料,这个观念从原则上看是正确的。因为有联系的事物学得快,记得牢。但是有各种各样的联系。有教师所理解的,也有教科书作者所理解的。这两种联系用处都不大,可不幸的是学校教学计划内建立的逻辑联系大多属于这一类。那就是数学内部的联系,构造成统一的数学,与此同时却牺牲了数学与外部的联系,而后者却正是更自然与更重要的,这正是后面要讨论的问题。

从数学教育的用处和目的出发,我提到了应用数学。在应用数学家中有人不喜欢这个词。他们声称,数学只有一种,它的某些部分与外部事物紧密相关,而另一些部分关系较少。他们这样说是对的,似要防止这样刻划的特性被人滥用,以证明可以教没有外部联系的数学。不管怎样,我希望没有人会推断出,我喜欢在中小学教应用数学——我不提倡学校里学计算机数学就是为了培养程序设计家,也不主张学概率

就是培养统计学家:更不赞成为了什么目标而学应用数学。数学的最大优点就是它的灵活性。数学如果为了迎合某些应用而失去了灵活性,它就僵化了。我并不要求学生学应用数学,我只是希望他能学会如何去用数学。这并非功利主义。所以我宁愿以的数学来代替应用数学。这又是夸美纽斯(Comenius)所渴望的:人们学习的每件事情都应该是充满着联系的。当然必须知道,哪些联系应该培养和加强。在赫尔伯特(Herbart)学校的影响下,相关公设被解释为单一学科的教学应该组成一条连通的链。可奇怪的是,学生并不欣赏教师故意制造的勉强生硬的联系,反倒欣赏自然的不联系。

总之,我考虑的不是学科内部的联系,也不是数学内部的联系。这种联系必须是自然形成的,至于是否如此也应该从学生的观点来决定。内部联系的最完美的表现就是体系。其中所有的部分都保持着很好的平衡,互相之间紧密联系,没有哪个部分可以丢掉。但问题是学生能否理解这个体系?能否有效地掌握它?事实上,学生是不太可能掌握的,尤其是如果整个体系近乎一种幻想,学生就更不可能理解。然而最糟的是内部联系的得到乃是牺牲了外部联系。

例如,在开始教算术、几何与集合论时,就无法提

到它们之间的本质联系。尽管教师会埋怨不能施展自己的逻辑——美学才能，但这些联系只能以更高的观点在更高的水平上才能建立。甚至这些领域中非常重要的逻辑联系概念，如自然数的不同侧面之间，代数运算的不同观点之间，以及序概念，几何图形的仿射性质与度量性质之间的联系，都必须推迟。因而，最初要紧的是算术、几何、集合论概念与现实的关系。

当然，强化联系是重要的，但关键是要知道从哪一方面去强化。数学应该是相互联系的，但联系不一定是直接的，也不一定在数学内部。任何人开始学习本国语时，一般都是从语言表达所反映的现实情境出发，也就是说，亲身体验的现实是保证联系的结构，而语言表示则处处依附于这个现实结构。在这个依附过程中，先是主要反映现实结构内部的联系，以后再逐渐地发展成适合结构要求的形式系统，最终它将形成一个独立的与现实结构无关的体系。这是语言发展的独特现象，但如不坚持联系现实，语言就将成为虚无的、不现实的。

数学自然不仅是一种语言，即使语言也不仅是一个形式体系。为了教学有联系的数学，先去寻找直接联系，这样做法并不聪明，还是应该从数学与它所依附的学生亲身体验的现实之间去寻找联系。数学依附

于现实结构，虽然起初似乎与数学无关，在成长过程中这种联系会得到发展。让数学家的数学体系自由翱翔吧——对非数学家而言，与亲身经历的现实的联系将是至关重要的。

事实证明，为什么小学生能学会说本国语，却学不好数学？因为他整天都生活在本国语言交往中，甚至做梦也是。数学每周只上 4 ～ 5 小时的课，又相互不联系，这样学怎么能持久呢。每个教师都遇到过这种曲折，几星期之前教的内容，学生全都忘记，甚至不留任何痕迹，除非在此期间曾加以巩固。即使几星期前的题材与现在的内容有某种逻辑联系也不起太大的作用，因为这是教师或教科书作者构造的联系，以为这种联系会在学生的头脑中发挥能动作用。事实上，那几个星期中所学的数学片断，对于学生的现实生活经历来说，完全是个外来物，因而很快就会消失了。每个人都能体会到不相关的事忘记得有多快。一些试验者声称，已经证明了这个或那个是可教的，我认为这并不奇怪，儿童确实能学所有你想教的东西，但儿童也将很快地完全忘记。一个教学试验如果不涉及教材的深度及保持的时间有多久，那是没有意义的。而决定其深度的不是别的，就是与现实生活经历的联系，而这些联系又保证了记忆的持久性。

当然并不排斥内在的数学联系，只要它们是有效的。但不应狭义地把内在联系局限于演绎关系。例如类比就是一种甚为有效的关系，可用于处理数学内部与外部的各种情境。它具有很大的教育价值，因为通过对象之间的类比，可以由一个解释另一个，从而使学生产生兴趣，使人信服，并能形成抽象的想象能力。

严格的分类学家自然认为，像类比这种同太模糊，不严密。只要可能的话宁愿用“同构”或“公理系的模型”，这是真正的形式数学。但如不通过类比导致这些发现，无人能认识同构并构造公理系的模型。学生理解类比比强加于他的形式的同构语言掌握得更好，要理解得更深。

类比是建立数学内部与外部联系的一个极为有效的手段，因为在试图使整个世界系统化的所有手段中，它是最自然、最基本的，即使在较高水平也仍然具有生命力，学生甚至在学数学以前就知道。过高地估计类比是危险的，特别在数学中，但是人们必须正确看待并有意识地应用它。

关于类比还可以讲很多，我之所以提到类比，主要是为了反对人们对所谓充满着联系的数学作太狭隘的解释。

讲到充满着联系的数学，我强调的是联系亲身经

历的现实，而不是生造的虚假的现实，那是作为应用的例子人为地制造的，在算术教育中经常出现这种情况，我不否定游戏的真实性，低水平的游戏可以是有用的激发动机的手段，但过于依赖游戏是危险的。游戏毕竟不能代替亲身经历的现实，游戏规则如果不是每天练习也像数学一样容易忘记，甚至忘得更快。只有亲身经历的现实才是将数学凝聚成整体的真正支柱，无论游戏是多么迷人并引起兴趣，但它永远代替不了现实的作用。

丰富的联系还能保证一旦学会这种数学就不容易忘记。但这不等于说，学数学的目的就是不要忘记。可以采用组织好的记忆方法，使任何题材学了就记住，但这有时反而成了一个负担。因为随着人们思维的成熟，所占有的知识材料会愈来愈有密切的联系，从而可以自成体系而不必硬去记住，就像当你熟练地掌握了一种外语时，就不必去记那些文法规则。而当你深入地了解历史知识后，日期、年代也就自然地消失了。这并不是说我们不应该学习这些东西，而是说它们实际上是被到达顶峰的人所踢掉的梯子，无论在个人生活中，或是人类历史中都遵循着这个规律。一个数学家一生所学的数学，也许90%最终会被当作累赘而排除，但这还是必需的，因为它们的作用就是为

了被进一步的数学所代替。所以重要的并不在于一个人所学的数学是被记住了还是被忘记了,而是在于它是否仍然具有活力,是否仍能起作用,这同样是个人生活与人类历史的规律。就像企图三等分角的无数次的失败,也是一种活力和作用的表现,因为正是它为伽罗瓦理论开辟了道路。而要保证有活力,就必须教给学生充满着联系的数学。

由此推断,学习哪些数学似乎是无关紧要的,只要它充满着联系。从某个意义来说这是正确的。有一个古老的信念,学习的价值在于它本身而不在于学什么,这是一个形式的价值。例如人们对拉丁文有很高的评价,认为它是可以训练逻辑思维的一种形式训练。这种说法有一定的道理,拉丁文的规律性有它的形式价值。其实语言分析是一种有利于发展外部联系的活动,问题是学校中在这方面所做的大多数却形成了一种伪科学。

思维的训练

来自毕达哥拉斯传统的中世纪的七艺中,数学所在的四艺(算术、几何、音乐、历史)比人文学科的三艺(语法、修辞、辩证法)地位更高,当然哲学的地位

比四艺更高,它仅次于神学。由于数学的历史悠久,人们对数学有着高度的评价,认为它是一种训练工具。

人们相信,数学是智力的磨刀石,对于所有信奉教育的人而言,都是一种不可缺少的思维训练,于是我们就需要数学教师进行这种思维的训练,也就需要数学教授培养这些教师。当事情进展到在从事数学科学研究的人中挑选教授时,数学研究也就由科学院进入了大学。

18 世纪的法国,柏拉图(*Plato*)教育思想中数学的重要地位得到了恢复,大革命以后,由于革命的理性主义思想以及拿破仑(Napoleon)对数学的兴趣,数学的训练与研究又得到了新的肥沃的土壤,著名的“大学校(*Grandes Ecoles*)”就是在那时建立的,我们不妨称之为具有数学基础的军事学校,或是具有军事基础的数学学校。人们自然地认为拿破仑所取得的军事胜利,与他的军官们所受的数学教育有关。数学对军事科学有用,这是一个古老的经验:一位将军必须能计算出什么时候会与进攻的敌人相遇,一位堡垒建筑师必须知道如何构造正多边形。但是数学真正作为军事教育的一种方法,那还在于它是一种思维的训练。在法国取得成功之后,其他国家毫不犹豫地仿照

法国的榜样，纷纷建立起学校，从而为19世纪数学的飞速发展创造了前提。

如果说数学与法国的军事成就之间真有什么关系的话，那也不能简单地说成是优秀的数学知识决定了它的胜利。并非数学教育提高了法国军队的实力，而是借助于数学的筛选作用，比单纯从贵族特权或法律或语言能力的角度去挑选人才，显然又多了一个数学能力的侧面。

不管怎么说，事实是数学作为一种思维的训练，在历史上是个重要的因素。许多学生学习一大堆数学以证明数学教师存在的合理性，教师又必须研究数学以证明数学教授存在的合理性，而教授又需根据技术的需要来创造数学并证明它是有效的。今天的数学当然是一门非常有用的科学，然而为了达到这个重要地位，必须跨过一片无用的沙漠，在那儿数学被一些超越世俗的贵族小心地护理，他们强迫民众必须学习一种作为思维训练的无用的数学。

历史是个不可思议的向导，哥仑布（Columbus）发现了美国，他却误认为是印度。如果思维的训练是个虚构的故事，智力的磨刀石也是一种假象，那么这是一个孕育着真实的假象，一个迷人的事物引诱我们踏上了正确的道路。

是否存在思维的训练？数学是否是其中的一种？甚至是最好的一种？对于这种含糊的问题，人们很难回答。现在所用的各种测试方法不说明什么问题，它只能在局部范围内反映教学效果，至今为止，我们还缺少跟踪学习的全过程的方法，自古以来教育家对此问题经常给以肯定的答复，我怀疑也可能有许多怀疑论者会给以无条件的否定。因为无人能证明一个好的数学家在其他科学领域中也必然会有很高的成就，也不知道数学天才是否必然具备一般天才所有的特征。同样也无法使人相信，数学家的超人智力完全是由数学所决定的，因为谁也不知道，如果数学家不学数学而去学其他东西，又会有什么样的结果。就像抽烟与癌症之间的关系，即使根据统计资料也难以说明，两者之间具有必然的因果关系呢？还是只是一般的关系？同样，数学学习与杰出的智力之间，是因果关系呢？还是仅仅是一般关系？这些讨论都是很难得出答案的。

筛选的工具

每个教师都坚信这一点：谁的数学学得好，那他在其他领域中通常也能学好，这可能是对的。但谁也不知道，如果他从未学过数学，是否对其他领域就一定

学不好。那些赞美数学是一种思维的训练的人，他们指的是否是学生的智力而不是数学成绩，他们是否知道数学也是一种适宜的选择测试。实际上这是有关数学的一般价值唯一公正确信的因素所致。数学作为智力才能的选择工具，比其他学科甚至比智力测验更可信，而且也容易操作。为此，在各个领域内都将数学作为一个筛选工具，不仅对自然科学、技术、医学教育的学生要通过这个考验，甚至对大多数人文学科的学生也有一定的数学要求。

我们能否由此推出，数学教育的目的就是在数学教学的基础上挑选学生？或者说，数学教育的目的就是考试？虽然我们从感情上反对这个结论，但是数学被高度评价为一种选择工具却是事实。作为教育家我们拒绝接受以选择作为教育的目的，而作为数学家却相信，数学能用于这个目的真是太好了。

通向上层社会的梯子很窄，为了避免拥挤，要买票，要通过入场考试；当今的上层社会已有所扩展，梯子也更为宽畅，也许有一天社会层次的差异会消失。但即使到那时社会还是要对其成员进行各种挑选，教育家无法拒绝在这种选择过程中予以合作，这里唯一的问题就是如何合作？“如果没有入场考试，人人都想学医学、药剂或法律，这是必须防止的。”用彩票抽奖

的方法可能比较简单,但是谁会接受它?另一方面,教育家是否允许某些题材最终只是被作为筛选工具而教?数学是预测一般能力的卓越工具这个论点也不再具有结论性的意义,因为,很显然,一旦某个学科被列入考试项目,它所教的内容必然是最容易考的东西。而下面的怀疑也是很自然的,那就是作为思维训练的数学能由那些最容易考的题材适当表示吗?不需要我来证实这种怀疑;学校的每门学科都处于同样的危险之中,那就是退化成为了考试而教学。

考试本是一种有意义的活动,教师可以通过检查教学过程以发现问题,予以改进;学生可以知道自己是否真正学到了东西,学习态度是否正确,以及是否具备必要的学习能力;同时还有有关的一些人想知道,学生究竟学了些什么。前面我就指出过,现有的考试、测验方法只适用于判断局部的学习成绩,要全面测试学习结果是绝对可能的,这在数学中可能比其他学科都更为容易。从大学的数学教学看,观察学生在数学活动中的表现会比评定他的一篇论文获得更多的信息,我想任何教育家都会肯定这个经验,虽然这只是反映了局部的教学效果。我知道到处有法律与规则来规定各类考试。许多国家只有大学才是将计划、教学与考试统一处理的机构,按计划进行教学,也不

必将教学与考试相互割裂，因为授权于他们能建立一个好的榜样，使考试能消除其作为筛选工具的剧烈竞争，并将其推广。

这必须涉及教育政策，我无法详细论述这个问题。也许令人懊丧，但事实就是如此，不论学生如何深入地探索数学，如果不能由一个共同的选择标准来认定其水平，社会对此就不太感兴趣。教师与学生必须承认这一事实——学生追求每门课的分数，教师时职责是在给分宽严之间作一个最佳选择。考试成了一种目标，可以测试的内容成了大纲，而教学可以测试的内容则成了一种方法。

是否必须这样做？遗憾的是这正反映了现实情况，但即使充分考虑到社会现实，似乎也不应该是这种情况，以后我将加以说明。

逻辑思维

数学是否是一种思维训练这一问题仍未解决，这个问题很棘手，我们当然要求回答“是”，但这是否在欺骗自己？

自古以来就认为逻辑思维当然必须由数学来训练，形容词“逻辑”在此意味着什么很难说，为什么不是简单的“思维”？实际上，存在一种亚里士多德的所

谓逻辑，它不是“逻辑思维”的逻辑，因为它和思维没有多大关系。除了著名的三段论法“所有的人都会死，苏格拉底是人，所以苏格拉底也会死”之外，还有其他的思维模式。这种简单的主语——谓语模式不能表达太多的思想，像关系模式和量词系列都是必不可少的，而且思维也不局限于形式的表达方法，它常常会用非形式的方法比如类比的方法进行：

“如果你邀请张先生，你也应该邀请李先生。”

“为什么？”

“因为他们是朋友。”

“但上次王先生邀请了李先生，却没有邀请张先生，所以……”

“那是另一回事。我们可以邀请李先生而不请张先生，但却不能邀请张先生而不请李先生。”

“为什么不能倒过来呢？李、张是朋友和张、李是朋友不是同一回事吗？”

“是同一回事，但是如果你请了张起生，张太太就会告诉李太太，李太太就会对此感到不满，而张太太却不会因为这种小事而生气。”

“女人的事我可管不着了。”

“对不起，你结婚了没有？”

“我结婚了，但不是和李太太。”

“李太太也很幸运,不是吗?”

“越说越离谱了,你这是女人的逻辑。”

我想这是关于逻辑思维的一个很好的例子,这句话我是认真说的。因为在这谈话中包含着一些形式因素,如张先生与李先生之间的对称关系,但它不同于数学的讨论,数学中的形式因素常是隐含着的,而谈话却是按具体方式进行的。(应该注意,最先打破形式结构的“非逻辑”论据是丈夫的“但不是和李太太”,所以不能认为他是在抱怨他妻子的错误的逻辑。)

如果说数学教育是逻辑思维的一种训练,那么首先得训练数学中的逻辑思维,这是天经地义的事,而下一个问题也许就是这种训练能否转化成别的什么东西。但是让我们试问一下:用什么方法才能使这种高度形式化的思想得以转换?事实上只有通过有效地进行类比的方式,不管是有意识的还是无意识的。以上例子中的对称,就是通常称为逻辑思维的一个形式因素,更精确地说,就是存在一种情境,它关于两个参数是对称的,因而在此情境中进行的活动也应该是对称的。对称这个概念在数学中也很重要,只是传统数学中(或者更确切地说在中小学数学中)很少认识到这一点,甚至被不相干的算法所掩盖或代替——如几何中的对称被全等定理的应用所抑制,而代数中的

对称则常被具体的算法所淹没。其实我们应该在数学中加强对称这种形式因素的训练,开始可以是无意识的、隐含的,最后则应该有意识地,使之通过有效而明确的方式表现出来,这在数学中还是最容易做到的。

可以想象,认识并运用某些数学结构是一种思维训练,但这意味着预先假定将它们作为思维训练来教,即对这些结构的认识和运用有意识地进行练习,不只是在数学教育本身,还应结合非数学的例子以相关的方式进行练习。并且必须注意,真正能够起到思维训练作用的是数学方法而不是具体的题材,因而必须强调方法,并尽可能使之明确。

多年来,我连续观察了大学数学系、物理系一年级学生对数学态度的变化,我不敢说这些观察能证明什么,何况数学、物理系的学生也不是这个年龄段的青年中的随机选择,我只是观察他们的数学发展情况,同时也寻求数学以外的特性。我列举了许多问题,去问入学第一周的一年级大学生,以至与二年级大学生作比较。这些问题从不用于正式测验,总是以非正式的谈话方式进行:

(1) 诗人中最伟大的画家与画家中最伟大的诗人,是否同一个人?

（2）诗人中最老的画家与画家中最老的诗人，是否同一个人？

（3）如果诗人中只有一个画家，那么画家中是否只有一个诗人，他们是否同一个人？

（4）一个小镇上有许多房子，房子里有许多桌子。对任意 $n=1,2,3,\cdots$ 下列断言成立：如果一座房子里有 n 条腿的桌子，那里就没有多于 n 条腿的桌子。问以下命题是否成立：对 $n=1,2,3,\cdots$ 如果一座房子里有 n 条腿的桌子，那里就没有少于 n 条腿的桌子。

（5）一个篮子里有各种不同颜色和不同形状的物体，试问篮子里是否一定有两件物体，它们的颜色和形状都不相同？

这些问题给一年级学生造成了很大的困难，但是一年以后，即使一般水平的学生都认为这些问题是幼稚可笑的（除了最后那个似乎是最困难的问题）。我不能肯定，是否由于学习了数学而使他们取得了进展，但我可以肯定，数学教育中对数学方法加以强调不是没有用处的。

其中第四个问题，我曾在 80 个一年级学生的课堂上提问过，没有结果；以后由一位中学教师给文法学校最高年级的理科班作为书面测验，那位教师很注意

学生的逻辑训练,结果只有几个学生得出的答案与问题有些关系,但其中一个答案还是错的,至于其余的学生全回答不上来。

而在经过大学一年的数学教育后,这个问题就被认为是可笑的。

语言

这五个问题很难称之为数学,只是其中包含了数学结构中所熟悉的某些形式因素的特征。我的经验能否证明,对这些结构的认识在大学一年级就得到了训练?除非我能排除一个因素:我不能确定学生对问题的语言是否正确理解,有时我甚至可以确定他们并不理解。如果我不怕和皮亚杰(Piaget)犯同样错误,我就不妨断定多数情况下语言理解不成问题。在皮亚杰几乎所有的实验中,他要证明一定年龄的儿童,不可能正确地完成这一个或那一个活动,可以绝对肯定,儿童在语言方面就没有理解对他们的要求。因此皮亚杰的实验不是与认知有关,而是与语言的发展有关。

但这里不存在这个问题。一年级的数学教育确实对大学生的语言使用能力有所增进。不管数学是否作为一种思维训练,它对语言运用方法的影响是显然的。加上语言的通用性,它和我们所有的智力表达与

智力活动都有联系，因此数学语言的特性可以超越数学的范围而起作用。

科学家的语言以及科学与语言的关系部随着不同的科学而有相当大的变化。诗人和小说家的语言有区别，而且其语言特性又不同于某些人文科学。从基本的语言实践到数学家的语言之间存在着相当大的距离，数学家可以任意操纵各种词汇，不管它们的原意，只是按照数学的需要，用定义将各种东西缩简成如此简单的记号，不容任何人提出异议。这在其他科学中就无法做到，比如物理学家就必然受到语言含义的不确定性的牵制。

数学术语常被其他领域借用，如“重心”、“力的平行四边形法则”、“合成"、“未知数 x”、“集合”、“信息”等，可也常出现一些外行滥用数学语言的现象。当人们使用数学术语却不懂其真正含义时，连数学家都想不通，他究竟受过什么样的数学教育！有位记者报道一台大型计算机的运算速度相当于光速的三分之二；一位生物学家断言各种动物的繁殖速度，可与声速、光速相比拟；有位哲学家把群论的抽象化进程描绘成：从置换群到变换群，最终的顶点是微分方程群；一些语言哲学家把阿贝尔（*Abel*）群与伽罗瓦（*Galois*）群并列；也有人把“无理数”与“无限小”混为一谈。

这些现象的存在,实际上恐怕是没有受到真正的数学教育。

在人文科学中,法律的语言是高度精确的,但它的精确性只限于词汇,它的语法还是老式的。有一次数学演说中提到黎曼(*Riemann*)假设还没有证明,法律系的一位教师就问我:“这岂不是矛盾吗?一个假设不就是一个证明吗?”譬如有一个案例,父子两人同在一次事故中丧生,没有证人在场,可是谁先死对遗产分配很有关系,于是某些国家的法律中就作了这样一个假设——“较老的先死”,于是在这个案例的审理过程中,这个“假设”就已经具备了“证明”的效力。对律师来说,“证明就是通过一系列的争辩,使某个判断令人信服,他不知道数学中的“证明”有着一个不同的、更为客观的含义。如果要抱怨什么人的话,那就是对他的数学教育应负责任的人,这不是指他的数学教师,而是那些制订计划并编写教科书的传统的奴隶。

如果我提出数学可以是一种思维的训练,特别是关于语言的使用。这当然不是指对单词的理解和运用,而是数学可以教会一个人:如何正确掌握词的含义,如何避免循环定义,如何正确运用语言来构造命题。各种数学语言表达都具有确切的含义,例如:交换群是一个群(具有可交换性,$ab=ba$),有序群是由一

个群和在其元素集合上的序组成的偶,序与群满足一定的相容性;而“伽罗瓦群”则是一个函子,它给某一对域指定一个群广,“外尔(Weyl)群”又是另一个函子,它给一个李(Lie)群指定一个有限群。

更为基本的例于如:等边三角形是特殊的三角形,而等腰三角形却不同,因为它是由一个三角形及三角形的一个顶点所组成的偶,其中过顶点的三角形的两条边相等,因此一个等边三角形是否属于等腰三角形,必须依赖于定义中是否指定了某个顶点;直角三角形当然是三角形,但全等三角形就不是特定的三角形,它们是三角形集合的特定子集中的三角形;同理,一个三棱锥是一个特殊的棱锥,但却不是一个四面体,因为三棱锥是由四面体和它的一个顶点所组成的偶。

我承认传统的几何语言并没有如此复杂,它的语言已经被神圣不可侵犯的两千年传统所确定。如果有人相信数学本身内在的良好语言习惯就会成为一种思维的训练,他将会失望;即使是以现代结构的语言分析方式来表达,情况也一样。如果有人以现代结构语言表达的群的定义强加于你,“群是由一个集合、一个乘法、一个单位元和一个逆元组成的四元组,满足……”如果不通过新旧定义的比较进行再创造,只是

鹦鹉学舌一样,把它当作一个既成事实接受下来,那也不是思维的训练;只有依赖于自身的方式,联系多方面相关的背景,来获得相应的数学专门语言,这才是一种思维的训练,

以上提到的都是有关数学概念的语言建设,如偶对、三元组等一些形式化概念;此外还有量词的明确化,也是过去几十年中数学语言的一大进步,例如

总有人在这里,

和　有人总在这里,

这两句话的区别,可以通过量词的交换来解释:

$$\bigwedge_t \bigvee_x \quad \text{时刻 } t \text{ 时}, x \text{ 在这里},$$
$$\bigvee_x \bigwedge_t \quad \text{时刻 } t \text{ 时}, x \text{ 在这里。}$$

在日常中活的语言中,各种定冠词、不定冠词以及量词常常被忽视,甚至省略,或是意思含糊不清,但是在数学或是数理逻辑中就会注意到以上两种表达方式的差异,因而这样的数学教学或是数理逻辑教学就可以成为一种思维的训练。

数学家认为逻辑不能单用主语——谓语结构进行,它非常需要关系结构和量词结构,但在语言专业分析中,似乎还未觉察到这种影响,常常会遇到一些模糊的表达方式,比如字典中的一些定义,如:

兄弟:与另一人有相同父母的男子称为该另一人

的兄弟……这里量词“另一个”的地位是不清楚的。正确说法应该是

x 的兄弟：与 x 有相同父母的男子。

再如：

比：一个量除以另一个量的商……

正确形式应该是：

x 与 y 的比：x 与 y 的商。

又如：

随机数：是一个数，它和它所属的数集中任何数的出现可能性是相等的，（注：以单数定义。）

这个“注”照抄原文，并非我添加。还有一些类似的例子：

所有的动物都是平等的，而某些比另外一些更平等。

这一对双胞胎是多么像啊，特别是左边的那个。

这些表达方式在日常生活的语言中都可以接受，但就严格的数学语言而言，都是成问题的。由此可见，数学语言对日常用语的影响几乎是不存在的——我不必重复为什么。

解决问题

人们对数学给以高度的评价，因为它是解决许多问题的一种方法；对数学的这种信任，首先来自于数本身的吸引力；其次在于算术教育使人引起的联想，就如在利息问题上：不仅可以算利息，也可以算本金、利率或是存期，这岂非是个奇迹？即使某个问题缺少一些数据，人们也会相信，数学家总会算出来。（有这么一个故事：给出一艘海轮的长度、宽度、重量、排水量、速度、建造年代以及少量其他数据，然后你问："船长的年龄是多少？"如果人们不能回答，你可以说："船长 34 岁。"于是人们会问："你怎么知道？"你就回答："他告诉我的。"）对于数学的这种单纯的信任很难动摇，人们怀疑数学家有隐藏的秘密。他们不相信数学家不会计算如何在蒙特卡罗赌城中取胜，也不相信所谓不存在赌博体系的解释。人们认为数学家一定掌握证券交易所的赌博体系，高斯（Gauss）和约翰·梅纳德·凯恩斯（John Maynard Keynes）不就是用这个方法赚了好多钱吗？至于也有数学家在证券交易所亏了本，人们会把这解释成这是由于理论与实践的脱节。

对数学的这种信任，到了今天又由于对计算机的

信任（或者说是迷信）而进一步增强，但总有一天对后者的信任将超过前者；实际上在美国已经把计算机作为程序设计者，并且用超级计算机在设计计算机。但是一般的人并不知道，计算机到底有多大威力，再说超级汁算机也必须通过某种方式由人来进行设计的。

对于数学的这种信任，同时也联系着对某些数学家的失望，因为这些数学家显然不知道或是不肯暴露数学究竟能干什么。人们并不了解数学能处理什么样的背景情况，当一份帐单的总值过高或是电子仪表发生了故障，人们不知道数学可以帮多少忙；也没有人会想到请数学来检查一下，某种所得税的税率是否会在你赚得更多的时候留下的份额却更少。下面一件事使我非常震惊：在一次知识分子的聚会中，某人玩了一套纸牌游戏。27 张纸牌放成 3 列 9 行，一个旁观者挑了一张牌，记住，并告知该牌属于第几列，将牌按列收起，再按行排好，旁观者再次告知该牌属于第几列，纸牌再次按列收起，又按行排好，旁观者第三次告知该牌在第几列，玩牌者将牌一张张顺次放下，翻开其中一张，确实就是旁观者开始时选定的牌。

大多数人都感到这是一个魔术，但其中有一个人利用数学立刻解释了这个把戏，并且说该牌是第 14

张，其他人和玩牌者都认为他事先就知道这个游戏（注：每次收牌时，保持选定牌所在的那列总是放在另外两列中间），他们相信这个游戏是个经验事实，却不相信这个游戏完全可以通过数学的方法来分析和理解。

当然，以上问题的分析还很难被称为数学，数学应该从问题的一般化开始，然后在信息理论结构中更深刻地理解该问题。我们这里的目的并不要求用如此高的观点来讨论这回事，我要讲的只是：对于非数学家我们不能要求他会独立地解决这个纸牌游戏，感到遗憾的是在学校中学过一些数学的知识分子，也把这个游戏看成是魔术或是经验事实。

这就证明了学校数学没有能使学生认识到，哪些类型的问题是可以用数学方法处理的。当然这也证明了这样的数学教育并没有成为一种思维的训练。但是如果人们只会套公式，而从不亲身体验一下数学可以成为解决问题的一种活动，那又怎么能做到这一点呢？

简化

解决问题只是数学活动的一个侧面，不应过高估计。数学家在解决一个问题以后，总是将它颠过来又

倒过去,从许多观点再加以考虑。举个例来说,平面上的正 n 边形有多少条对称轴? 任何人即使没有学过几何,也可以直观地作出回答。当 n 是奇数时,通过每一顶点与对边中点形成一条对称轴;当 n 是偶数时,有两类对称轴,一类通过一对对顶点,另一类通过一对对边的中点。不论哪种情况,最终结果都是有 n 条对称轴。

非数学家到此为止,但是数学家会问:是否能有一个统一的方法求解? 注意到对称 S 的轴必通过正 n 边形的中心,如果事先已知给定的另一点 p 在 S 下的像,则对称 S 就被决定了;如果取 n 边形的一个顶点为 p,则它的像 Sp 也必定是顶点,由此即推出,应该有 n 条对称轴。

对不同情况作统一的证明,这显然是数学的特征;非数学家不会轻易击中要害。一开始这个观念在数学中并不像现在那么深入人心,随着数学的发展,这个观念才日益完善,并被普适地接受且承认它是一种思维的训练。只是在教学中应该这样教,不是将详细整理好的证明提供给学生,而是必须让学生自己发现粗略的证明,自己加以整理。只有通过这样的活动,才能使学生跨出超越局部的问题解决的第一步,而走向独立自主地建设数学体系。

数学家喜欢将问题和解答进行简化。例如,顾客在书店里买一本书,书价 10 先令,他付了一张 1 镑的钞票,书商无零钱可找,请隔壁的鞋匠帮忙,鞋匠给他一双修好的鞋,可收修鞋费 16 先令,鞋匠原来欠书商 2 先令,结果书商从鞋匠那儿拿到了 6 先令,加上自己的 4 先令,总共找给顾客 10 先令。下午鞋匠告诉书商,1 镑钞票是假的,试问书商欠鞋匠多少钱,他自己损失多少钱?(注:1 镑合 20 先令。)

这类问题常常会引起混乱,最好的办法就是通过对问题的仔细观察以抓住问题的主体,去掉所有的枝节,也就是使问题得到简化。当然不能说只有数学家才会这样做,但实际上不熟悉数学的人往往不相信简化而乱搞一气。

我无法告知,在数学的什么地方可以学到这种简化的能力?有的只是更复杂化的经验:商店与售货员之间的一份佣金合同,凡销售 400 个荷兰弗罗林,佣金固定在 5%;而超过 400 弗罗林以上,佣金就取销售额总数的平方根值。可是合同中并未规定,这个平方根值是以单笔销售额计算还是以每月或每年的总数计算。幸运的是售货员在决定这件事以前就死了。

数

如果说数学教育要有什么收获的话，那么我们希望这收获是：人们能知道什么是数。对于数的理解只要超出了直接的范围，就会出现许多问题。多 3 个 0 或少 3 个 0，对许多人来说已经太复杂而不被注意了，全世界人口是几十亿还是几万亿对他们来说都一样；一个国家的预算是几十亿还是几万亿，地球的历史有几百万年还是几十亿年，这些都已经超过了普通人的理解。报纸上会出现下面一类报道：一架飞机的油箱中装了 20,000 吨燃料；莱茵河上的一块浮冰从波恩延伸到科隆，估计重 100,000 千克。有的报导甚至把山脉和飞机的高度从米改换成了千米；降雨量从毫米变成了厘米。有的报道说："一光年是一个日历年的 300,000 倍，面一光秒是普通一秒的 300,000 分之一"等等。荷兰国家预算的 40% 用于"研究和发展"这一信息披露在许多报纸刊物上，议会内外也反复讨论，直到有位数学家感到可疑而去核对，才发现原来是办事员造成的错误，实际应该是 4%。

百分比是一个弱点，报纸上说某一个党自上次选举以来又赢得了 5%，这可能意味着该党所得的公众选票从 15% 增加到 20%；"参加者的 10% 是未婚妇女"

可以理解为女性参加者的 10% 是未婚的,也可以有其他的理解;再如"葡萄牙文盲的百分比高于所有西欧国家的总和";1969 年法国黄金价格从每克 16 法郎上涨到 18 法郎;世界各国报纸声称法国货币贬值率为 $12\frac{1}{2}\%$(而不是 $11\frac{1}{9}\%$);几个月后对德国的估价又发生了类似的错误。

转换又是另一个弱点,四舍五入的英尺和英里的数据转换成米和千米的数据时,常常带有好几位小数。最近发现珠穆朗玛峰的高度比原来低了 50 米,可是新闻报道中却说反而比原来高度高了几百米,那是因为新闻工作者进行了一次粗略的转换——把一米的三分之一作为一英尺,还有人把温度从华氏到摄氏的转换表用来进行经度到纬度的转换。我很高兴有一次我还防止了一次甚至更糟的转换,一家报纸的办公室叫我去,想要知道美国的 π 值。

在讨论了有关数学应用的一些高深的例子后,我觉得需要回归更为坚实的大地,为此我以这些凡人琐事作为本章的结束。

第五章
苏格拉底的方法

苏格拉底（Socraks 对奴隶）：请告诉我这是否正方形？你能否理解？

奴隶：是。

苏：我们是否可以在这里加上一个相等的正方形？

奴：是。

苏：有了两个是否还可以加上第三个？

奴：是。

苏：最后在这个角上是否还可以再添上一个？

奴：是。

苏：这里是否共有四个正方形？

奴：是。

苏：现在整个图形是原来图形的多少倍？

奴：4 倍。

苏：但你是否记得，它应该是某个图形的 2 倍？

奴：当然记得。

苏：从顶点到顶点连结这样一条直线，是否就将正方形分成两个相等部分？

苏格拉底（问奴隶的主人门诺（Meno））：亲爱的门诺，你是怎么想的，他是否表达了任何不是他自己的意见？

门诺：没有，全部是他自己的想法。

以上对话引自柏拉图（Plato）的《门诺》这是著名的苏格拉底方法的范例，是精心制作的一节课。教师预先考虑各种可能的想法，包括对的和错的两方面，在上课过程中，学生只要简单地回答“是”或“否”，或通过某种方式表示他正在听。如果要求学生讲出更多实质性的东西（当然也是事先准备好的），那就是苏格拉底方法的一个变种。前一个世纪的算术教科书或教师手册中，就有这类课的例子，例如比例与分配除法，我想这可能适合于指定两个以上的儿童担任不同的角色来进行。苏格拉底方法的这一变种要求学生也必须作好充分准备，而原始的苏格拉底方法只要训练好教师，同时要求学生不打瞌睡就行了。

也许读者不相信，但我绝对深信，苏格拉底方法仍然是或者说应该是教学基本原则之一，而当代的许多教学却还是属于苏格拉底以前的。如果一位讲师高声说：“各位听众，我们今天来讨论一个问题……”他就是宣告了他采用的是苏格拉底方法。可能这些都是空话，可能在说了最初几句话之后，他就从口袋中掏出

一份讲稿来念，那是他在家里早就考虑好的，根本没有听众。但是他的开场白还是认真的，因为在家里备课的时候，他脑子里出现了想象中的听众，他对他们作演讲，想象着有些人在倾听，有些人会打断他的演讲，提出不同的看法，与他进行讨论，有人同意，有人反对，而他在为自己辩护。讲师将这一想象中的过程记录下来或记在脑中，有错就及时改正——他标出了可能出错的地方，也不忘记标上某个时刻可以来上一句措辞巧妙的双关语，然后他正式去上课，就用了前面的开场白。课后那些听众会说："他表达了我思想深处的东西"或是"他一点一点地驳斥我，好像知道我会说什么"或是"现在我知道为什么我不同意这个看法"。

我喜欢这样的讲座，这样的课。虽然只是一个人在讲，但并非只是一个人的队伍，其他在听的人都是参与者。听完课，每个人都独立作出什么是对的决定。这正是苏格拉底所自称的，讲师只是助产士，他把我们自己的思想表达出来，而不是表达他自己的思想。

那就是苏格拉底方法，或者称作辩证法，或者如马赫（Mach）所称的思想实验教学法，它是从伽利略（Gajileo）到爱因斯坦（Einstein）也许直到今天仍然是理论物理的一个重要方法。而所谓思想实验教学法

我是指在一个教师或教科书作者的头脑里,想象有一个或是一群主动的学生,设想如何教他们,如何应付学生可能有的各种反映,并且根据这些想象中的学生的活动来决定教学的方法。狭义地说,苏格拉底所做的就是在教学过程中再创造或再发现所教的东西。题材都是在学生的眼前发生而不是教条式地灌输。虽然苏格拉底方法中,学生自己的活动是虚构的,但是应该让学生有这种感觉,那就是所教的东西都是在上课的过程中产生的,而教师实质上只是一个助产士。

与苏格拉底方法相对的方法称为“跳伞者方法”,思想像降落伞一样突然从天上掉下来。数学家很容易偏爱这种方法,因为数学是逻辑相关的。先规定定义,然后是定理,定理当然不是规定而要证明,但是定理叙述,证明方法又是规定的。这套方法是由某些人设计好一个严密的逻辑体系,然后加以制定的。要改变创造了这种体系的教师的想法是很难的,因为他花费了许多精力建造起这个体系,他喜欢在这个结构中活动。实际上从数学观点来看,所有这一切也确实无懈可击,这就是逻辑。至于谁如果不理解逻辑,那就建议他最好别学数学。这些教师很难理解,除了逻辑体系以外还会有其他观点。理论物理学家常常像数学家一样思考问题。我跟一位教授学电磁理论,他将麦克

斯韦（Maxwell）方程写在黑板上，再从它导出所有的电磁理论。物理学家称这个过程为公理系统化，并为之辩护："如果试图逐步推出麦克斯韦方程，那会令人厌倦，而用公理系就可以进行得很快。"他们也许是对的，如果教授变得令人厌倦，那该多糟！

力求用发生的方法来教概念，并不意味着必须完全按照知识的发展顺序，甚至连走过的弯路与死胡同都不加删除地教。而是设想那时如果有教师已经知道了我们现在所知道的东西，应该如何去发现，就像看得见的人可以告诉盲人如何去创造和发现。糟糕的是历史女神并非掌握苏格拉底方法的教师，而人类的教师又并不比学生高明多少。大自然又常给人造成一些假像，例如距离愈远，物体愈小，以及河水好像折断了桨。再如普兰克（Planck）辛辛苦苦地由统计公式得到了量子，可是不多几年之后，爱因斯坦从光电效应很容易就推导出来，上帝对此也许正在暗自发笑！

用发生的方法教既不是"根据布尔巴基（Bourbaki）"，也不是历史女神如何公开宣布斯芬克斯（Sphinx）之谜及其解答。它既非逻辑概念，又非历史概念，也不是心理学概念。我们不能相信心理学家所说的发展心理学进一步证实了布尔巴基体系。再说，对个人而言，数学怎么发展并不重要，那是心理学家

所追求的。作为教育家,我要知道的是数学如何在一位好的教师的引导下发生,然后我就会按照这个方法来教,于是形成了一个循环。但是这并非恶性循环,因为强调的是“发生”而不是“强加于人”。

苏格拉底究竟说了些什么缺乏真实的记载。但是显然苏格拉底不相信真正的知识是实际创造的,所谓创造的故事都是冒险家,诗人与诡辩家的杜撰。在人类生存以前,灵魂就已经具有了所有真正的知识。学生只要回忆,教师的责任就是帮助他。教学过程只是引导学生去回想起他已经忘掉的东西。获得知识只是再发现我本人灵魂深处已有的东西,而并非别人知道的东西。我们不必全盘否定苏格拉底,但也不必全盘继承。我们保留他的通过再发现来学习,但这个“再”并非指学生的前世,而是指人类的历史,也就是重复人类祖先发现他们所拿握的知识时的发展情况,我们不妨称之为再创造,当然名称并不重要。

在苏格拉底方法中,“再创造”并非只限于字面上的理解,它确实是真正的再创造。苏格拉底再次巩固了教师的权威作用,主动权在教师手里,他不仅引导学生,也告诉学生如何进行再发现,因为在他的思想实验中,早就按学生的情况对此作了充分考虑。

另一种完全不同的方法,它依据的哲学是:数学应

该是有系统的,而这个系统又应该是题材的逻辑分析结果,或者是这个结果的逆序。所以说如果分析表明语言由句子组成,句子由单词组成,单词由音节组成,音节又由语音组成,那么要教语言就必须从字母和语音的结合教起,然后一步步到音节、单词、句子,最终得到整个故事;如果分析表明总共存在十类词,那么文法就必须根据十类词来教,从冠词开始,到连接词结束。而如果对数学的分析表明数学有一个演绎结构,那么就必须按照这个结构来教数学,或者更精确地说,要按照教师或教科书作者相信的某个特定的演绎体系来教。

这就是我所谓的违反教学法的颠倒。唯一与教学法有关的要素——题材的分析被抛弃了;学生面对的只是分析的结果,或是看着知道结果的教师将被分析的内容再放在一起。

这是我们写数学论文的方法。我们省略了导致结果的思想过程。我们甚至不知道该如何表述,如果要讲的话就好像要将自己的隐私公诸于众。作为数学家一向有如实反映客观的好习惯,但得出一个特殊观念的方法是微不足道的小事,我们毕竟是在写数学论文而不是写“自白书”。然而某些具有教学法天才的作者,却欣赏另一种写法,他们揭示出,如果在创造前就

像在创造后那样聪明,他们将会如何创造,这些作者就是运用我所谓的思想实验在练习。他们想象有一个更聪明的人,用更令人信服、更有用和更聪明的方法来重新创造这个题材,这就不是我们所追随的发明家的历史足迹,而是经过改进的、引导得更好的历史课程了。

这个方法是不符合大众需要的。因为数学论文是为掌握窍门的专家写的,他们受过训练,知道如何阅读已经完成的论文,也知道它是如何创造出来的。而学校教科书的作者也仿照这种方式,他们忘记了学生并非数学家,学生对教材究竟要做什么,可能一无所知,有谁来关心这些在大学甚至早在中学时期就处于困境之中的可怜虫呢?

在名为“新数学”的一系列教科书中,有好的也有坏的。坏的那些暴露出严重错误,使人容易警惕,但好的那些呢?很明显作者仔细考虑了每个细节,不留任何漏洞,但是他又一次省略了所有教学法方面的考虑。他深刻地分析为什么这样安排题材,而不是根据其他准则,为什么选这一个定义而不是另一个,为什么将这个定理放在那个例子前面,而不是倒过来。在写教材之前也许他也进行了思想实验,可是在写成教科书时,却丝毫不留痕迹。如果能够从作者获得一些

背景材料也许很有帮助，因为可以清楚知道，每一步的设计都是经过深思熟虑的。但是这对教师来说又有什么区别呢？因为教师根本不知道这些考虑。

最近15年内写作和出版的大量现代数学大纲都是如此。对于知道什么是集合论、近世代数、线性代数的教师，提供了一点新东西，但对那些不知道的教师，无论在理解题材还是详细阐述两方面，都提供得很少，根本不适宜于进行教学。事实上这种大纲至多只能作为讨论的基础，即使在这方面，也没有真正说到点子上。可能有一点是提到了日程上，那就是学校里应该教多少集合论、近世代数与线性代数。接着所有决定性的争论都应该是具有教学法性质的，但是大纲并没有给出这样的机会，所有形成大纲的有关教学法方面的考虑，已经全被作者省略了。数学家再次胜过了教育家。如前所述，数学家是习惯于客观如实反映的，他列举了某个客观对象的定义、定理和证明，就是没有给出思想过程。如果要求他公布导致结果的某些观念，他会感到自己好像暴露于众目睽睽之下，在他的教学理论著作中，他仍然保持忠实于客观的态度，他给出结果与人们交流，就是不提所经过的道路。如果发表一篇数学作品，它虽然不表明作者如何获得结果，但它至少还会以数学证明的形式揭示如何达到某

些客观真实的思想。可是在这些大纲中,任何可以讨论的东西都被抛弃了,留下的就是教条的形式。

提问可以有助于揭露每一步的考虑,并且了解它的教学法的动因,但多数情况下会发现教学法的考虑在此不起作用,或者只是服从于作者的题材哲学。例如,问一位几何公理系的作者:“为什么你用那样的方式来安排?”他回答:“因为以这样的方式,我可以推迟引入正交性,并将有关问题只限于仿射概念。”下一个何题是:“对 12 ~ 13 岁的孩子来说,正交性是否太难?”而他会继续声称,他对仿射概念的尊重使他愿意尽可能不用到直角,可以不用的话就不用。他不能将这个理由暴露给学生,因为直角是客观存在,而他却企图回避。但是他是否相信,他的这种尊重仿射概念的态度会以某种神秘方法,从方法的设计者去传给教师,最终又传给学生呢?通过思想实验也许可以揭示这点能否做到,或是至少可以发现他自己的原始思想。如果他这样做了,他会注意到需要多少几何知识才能考虑这些问题,并且他也能估计到,要在几何教学的哪个阶段他所设想的方法才能起作用。

为什么你采用这样的方式?因为它增强了有关领域的系统性。因为用那种方式我可以很容易地得到一

个后面可用的引理。因为学生应当听到过……因为合同概念应该在相似概念之前处理。

为什么你省略了这个？因为后面可以将它作为一个特殊情况由……导出。因为对这个班级不可能严密地处理……。

这些回答都从一个基本假定出发，那就是教给学生现成的数学，这种数学由数学家事先组合好，他们知道每个部分是如何配合的，其中每一个部分的用处又是什么，但是对学生却没有介绍这些秘密的知识，因而在学生看来，所获得的只是一堆毫无意义的孤立的砖头。这许多秘密都隐藏在这样一个体系内，甚至可以难倒数学专家。这是为什么？因为作者寻求着数学中充分的美的享受，或是因为他被数学的严密性与系统化的顾虑所缠住。于是严密性正好反映了作者对体系的忠诚水平，而系统化又保证了作者对体系的彻底理解。

这种教学法纯粹是苏格拉底以前的。能够激励作者的严密与系统的概念不可能去影响学生，因为学生缺少所有的前提。如果学生只是模仿教师，他是不是也应该模仿教师（或教科书作者）的顾虑呢？他是不是也会被这种顾虑所缠住呢？

我并不相信这类大纲与这类教科书是现实教育的

特征。我向数学工作者（大多是学校教师）提出问题:“为什么你用那个方法来做这件事情?”我得到了另外的回答。事实上如果我没有得到另外的回答,我就永远也不会写这本书。我从实际的教育工作者那儿学到了各种教学实践,他们知道如何用教学法来推动他们的工作。其中少数人也写了一些很好的教科书,读起来令人愉快。

最好能设身处地将自己放在作者的地位。我是从大学教师的观点来看的,但从中小学教师的立场来看也不会有太多的差别——也许可以描述得更为丰富多采。

我定义一个概念,证明一个定理,从定理的角度发现定义不合适,于是就改变定义,并重新系统阐述定理。这不是你在上课时所做的吗?但是你能把这放入一本书中吗?如果学生没有理解老的定义为什么不行,他就不可能理解新的定义,如果你相信这一点,你就不会发表它。

我为了解释向量空间的公理,一定先在实数域或复数域上展开,因为其他的都不能用。以后,当学生熟悉了另外的域,我就必须扩充概念。这岂不麻烦,为什么不将次序倒过来呢?不,这会造成教学上的失败。如果我以向量空间作为方法论的出发点,任何其他途

径都会引入歧途，也会是违反教学法的。可是作为写书来说，有谁会在第 1 页定义了向量空间，到了第 100 页又承认这个定义太狭窄呢？

我编写了一个不完全的证明，并问"错在哪里？"没有人敢印刷，也找不到出版商。

再如演讲者十分流杨地在黑板上计算　mod m，在两数之差是 m 的倍数时，这两数就是相等的，不多几个月后，他发现可用等价类更精确地去做。现在如果让某人以这种方式写一本书，人们会相信作者写书时一定喝醉了，虽然那些人在教室里也会这样做。甚至他的学生也会提出责问："为什么你先给出了一个不严密的临时性的定义？""为什么随后你又反对它？"

这也许是印刷术造成的恶果，因为必须是确定的东西才能印刷出版。你不能在第 112 页宣布放弃第 12 页上的结论，也不能在第 12 页就证明第 112 页的内容必须作一点推广以便用于 114 页，你只能在第 12 页就证明整个内容，希望读者在读第 114 页时不会忘记。否则评论家就会评论："作者没有注意到第 112 页的命题可由第 12 页的命题稍作推广，并可以不太困难地加以证明。"

现代由于出现了复印方法已经缓和了印刷这个矛盾。不管怎么说，书是苏格拉底方法的主要敌人，它不

需要这样的东西。按理某人应当写一本与他教课过程同样方式的书，但谁敢这样做？中学曾有过这种尝试，但却经常被人认为太混乱而加以拒绝。实际上如果以系统论者的眼光而不是教育家的眼光来看，那就必然是如此。

我相信许多教师都是按照比教科书更合理的方法在教。但是如果教师不太自信而是依赖教科书，他们会怎么做呢？我们也不能视而不见，我就曾看到，有的教师就是在照本宣读。好在教科书中也包含问题，教师演示其中的一个，另外的就让学生做。一旦教师习惯了这种做法，他甚至不再操心那些课文内容，因为考试中唯一需要的就是解决问题。

应该用什么来代替教科书？我们如何学习方法？一个教师如何从另一个教师那儿学习怎么教？出版他的实验过程吗？但也常常不是他的教学过程的真实写照。能否出版思想实验方法？这方面最引人注目的例子是波利亚（Polya）的书，书中叙述了老波利亚如何教小波利亚创造数学，你可能会反对说，只有非常少的儿童能成为波利亚。如果不考虑这一点，我们应当承认波利亚的书确实是阐述并解释了教学理论方法论的研究原理，比那些无原理的教学理论方法论文献要优良得多。

第六章
再创造

夸美纽斯

毫无疑问，从苏格拉底（*Socrates*）到夸美纽斯（*Comenius*），中间还有许多教师，但其中第一个引起我们注意的是夸美纽斯，他写了很多教育学，从著作的丰富这一点来看，几乎是空前绝后的。

在柏拉图（*Plado*）的对话中，主要方式是某个人在讲，其他人回答“是”或“否”。而在夸美纽斯的同时代人中，相当多的人甚至还没有达到这个水平。有位教师在文章中写道：“上课时学生只能听……不能讲，否则就会妨碍师生双方按时完成课程。如果需要问什么，学生可以记下来，课后有的是时间。”

夸美纽斯根据理论与实践两方面的理由反对上述做法，他认为教师应该通过提问以激发学生的活动，且不说别的，至少可以确定学生没有打瞌睡。

夸美纽斯的主要原理是：学生不仅通过语言，而且通过完整地感觉现实来学习。为此他创造了著名的所谓打开感觉器官的理论，这与被动的语言吸收相

比较，对学生来说是一种新的活动。例子、规则与模仿——这是夸美纽斯教学方法的三个阶段学生在前两个阶段是否处于被动状态？不，因为夸美纽斯发现，包括看、听、尝、嗅等各种感觉，只要是有意识地插入于教学之中，都能成为学生的活动。例子后面是规则，教师从经验中描绘出理论结果，这是保证活动的合理性所必不可少的，这种理论是在实践之前的感觉体验中提取出来，至于实践则是根据规则对例子进行模仿。这里，教师的任务是演示并解释例子，再告知学生如何模仿，而学生的任务是亲身体验、理解并且进行模仿。譬如教写字，只告诉学生“这样做”是不够的，必须演示给他看，让学生的眼睛跟着教师的手和笔一起移动，然后再模仿。不应该传诉学生钟是怎样构成的，而应该演示给他看，在他的眼面前将一个钟拆成各个零件，再装配起来，如果可能的话，还应与其他钟作比较。所以夸美纽斯的“例子”不是静止的，它本身就是一个过程。学生在学习中不仅要注视着教师正在演示的正确的活动，还要根据教师的指令，自己也动手做。夸美纽斯的教学论原理是：

教一个活动的最好方法是演示。

引用这么一句话并考虑我们今天该怎么说将是有用的。我的意见是：

学一个活动的最好方法是做。

这个提法与夸美纽斯的追求也许没有太多区别,只是重点从教转向学,从教师活动转向学生活动,并且从感觉效应转到运动效应。譬如教骑自行车、游泳和驾驶,例子和理论都没有太多用处,学生必须做这些动作,当然这也得先有一些有利条件。目前对于运动能力的教学,确实在这样做;可是对于智力才能的教学,这种观点渗透到什么程度呢?是否在这一点上我们还处于夸美纽斯或是夸美纽斯之前的时代?

在例子与模仿(这里学生是完全主动的)两者之间,夸美纽斯加进了理论,这里学生则是被动的。难道还能有另外的做法吗?因为教师知道理论,他可以传送给学生。这些理论包括单词的类型名称、种类规则、动植物分类、如何相加与相乘的知识、在什么条件下天平取得平衡,以及在教室里、在街道上、在人群中以及在上帝面前的行动举止等。

想和做

随着时代的发展,事情日益复杂,感觉世界日益增大,模仿的机会更多,最重要的是,有关的理论也日益扩展,它的性质又有了深刻的变化,因此,夸美纽斯对教学过程的划分不再适合当今的时代。或者应该说,

人们称之为理论的东西,作为一种并不明显的背景知识,以及作为一种相当明显的活动,对许多人来说都变得愈来愈至关重要了。

今天任何人学游泳,既不需要例子,也不需要理论,只要教游泳的人思想上有这么一套操练规则,知道什么条件下,人可以跳进水里,作正确的游泳活动就行了。今天的农民与电气工程师比夸美纽斯时代的农民和铁匠,必然知道更多的理论,这些理论不是仅供研究用的,它是在田野和车间里做出来的,它只是活动的延伸。

我不必详细说明夸美纽斯以后的教育是如何发展的。重点愈来愈多地从教师的活动转向学生的活动,学生的自信日益增强,在感觉体验、理论与实践之间的界限逐渐消失:感觉体验在成为意识之前,已经过理论上的删节,思想无非就是一种在智力上继续的活动而已。而成为意识的那部分感觉体验,又有很大的解释余地,以至于教师必然无从再垄断对它们的解释;同样;要是活动本身在理论中开始得更早些的话,那么教师对限定活动内容的垄断也就难以为继了。

好奇怪的世界!居然在想和做之间出现了人为的界限。欧氏原本就是个典型的例子,它包含定理与作图问题两类数学内容。定理是要证明的,而作图是要

做的。定理结束于“必须证明什么”作图最后则是“必须作什么”。评论家经常告诫我们，作图也是证明，即存在证明——他们企图用这祥的方法，不惜任何代价地保留几何的静态性质。然而有一点使人怀疑，即欧几里得（Euclid）作图是仿效性的做，因而也是想和做这一整体概念的最美好的一个证明，可是早期的教学法专家不能理解这一点。如果说作图是一个活动，一次实践，可以留给学生做，那么在它前面必须放上一个理论，因为没有理论的实践就不合乎社会的合理存在。为此，他们就创造了欧几里得作图的分析。通过一张分析图，以多少有点仿效的方式发现了作图，于是作图的分析就成为数学教学的苏格拉底部分。在此，很自然想到，如果在定理证明之前也加上一段分析，岂不也同样可以创造证明吗？不，只有在实践前面应该加理论（即作图前加一段分析），而证明却不行。这就是想与做割裂所造成的一个怪现象。当然每个人想要证明某些新东西，总是从分析开始，但这种分析只存在于草图阶段，写出来的确定的证明恰好是分析的逆过程。只有作图是个例外，分析与作图两者都包含在教科书内，因为否则的话，作图将是无理论的实践。这岂不是很奇怪。

从社会学观点看，想和做的关系也在变化。不久以

前所谓劳动总要求一定的体力。所以科学家与技术员有实验室，学者有研究所，商人有办公室，他们都不去车间。在脑力劳动与体力劳动之间有差别，但这条界线在哪里呢？哪里是一个工作的结束，又是另一个工作的开始呢？从建筑工地上的独轮车搬运工，到按动电钮的吊车操作工，从参加具体施工的工程师，到设计图纸的建筑师，这一条长长的链子上有着许多必不可少的环节。究竟哪里是设计的结束，哪里又是操作的开始呢？

要说想和设计也是做，这种说法也并非没有道理。如果一位化学家在分析或综合蛋白质，你说他是在纸上开始做的，还是在试管中开始的？这个分析或综合过程又是在哪里完成的？在计算机上还是在纸上？1938 年春一位理论物理学家在我花园里描述了一个思想实验："假设我们能在撒哈拉沙漠的某处堆起这么多千克的铀 U-235"。这是一个思想实验，因为那时世界上任何地方都没有这么多铀，但他确实是相当仔细地想象在沙漠中实行。关于他所描述的这个实验结果，就像以 8 千米秒的速度发射一个物体必然会绕地球运动一样，几乎无人怀疑。在这次谈话后七年，思想实验成了现实，虽然不是在撒哈拉而是在洛斯阿拉莫

斯[1]附近的沙漠中,稍后又在广岛上空。1945 年 8 月我问自己,在这一长链中,又能说哪里是思想的结束,动作的开始呢? 究竟何时是核时代的开始? 那么多研究公式 $E = mc^2$,研究 U-235 的中子生产平衡,研究核弹的科学家中,谁能说自己没有对原子弹的诞生作过贡献呢?

20 年代后期,我和一个朋友一起,为了一个不知名的原理,必须解一个微分几何问题;30 年后,我发现它已经用于沃克尔(Wankel)发动机。这并非指某人在代数几何或拓扑中所作的研究工作,一旦发现就在不久的将来可以应用;但也不能错误地认为数学家所生活的世界,一定比鳞翅目专家研究的蝴蝶,化学家研究的环状化合物,或是考古学家研究的古代制品更为抽象。数学家、自然科学家和文学家一样地关心人类,他们研究的对象都与人类本性密切相关,人类创造的概念体系就像网一样覆盖着包括人类在内的大自然整体。在文学家看来,数学家是一架计算机,严谨而缺乏首创性;而且文学家与社会学家都相信,在当前这一自动化时代,凡是数学家与自然科学理论家所做的每件事,都可以由计算机来做,只要把程序编

[1] Los Alamos,洛斯阿拉莫斯,是美国一城市—编译者注。

好。另一方面，文学家自己的工作却必须要求人类的首创精神与直觉。但任何从事创造性数学的人都知道，在与数学相关的任何问题中，直觉比严密的逻辑过程起着更为重要的作用。约翰·冯·诺伊曼（John von Neumann）曾经说过："在证明一个定理之前的两个星期，你就应该知道它成立；然后就只要证实它，那比证明容易。"然而外行是很难将数学、自然科学看作是人类活动的。

现成的数学与做出来的数学

数学、语言、艺术这些词都有双重意义，艺术最明显，一种意思表示历史学家所研究的完成了的艺术，另一种意思表示艺术家所运用的艺术。关于语言的双重意义似乎不太明显，其实语言学家还是很强调的。关于数学，每个数学家都知道（至少无意识地），除了现成的数学以外，还存在一种作为活动的数学。但是这个事实几乎从不强调，非数学家更是从未意识到。

现代数学通常只作为一个现成的产品来分析，后面再附上一个形式的综合，结果就成为现成的数学。像罗素与怀特黑德（Whitehead）所写的"数学原理"给我们的唯一印象就是，数学是一个合理的活动，是一串定理的排列，意思是，证明定理 87 时，允许使用

定理43，但不能使用定理141。这就像铁板钉钉子一样，是一个死的体系，其中所有的句子都是命题，既没有问题，也没有课题，甚至缺少可以形成问题与课题的语言，即使语言分析学家也难以从语言表达的静态解释中找出矛盾。事实是数学一被创造出来，它就形成了一种清晰的形式表达，成为一个现成的产品而无法摆脱。当然，真正的数学家从不尊重他人的这种现成的数学，以我为例，阅读数学论文，从来也不是从第一个字读到最后一个字；我从结果开始，先评价它的展示方式是否简洁，再考虑它的正确性；如果无法确信，就从论文中找出一些关键之处，从中可以看出它是如何被证明的；如果再不行，就得找出一些引理，以便由它导出主要定理，或者甚至需要仔细看一下某些证明，必要时再回头去看前面的根据，直到最终用我自己的方法证实了结果，而在我掌握了所有关系以后，也许再系统地通读论文。其他人几乎也采用同样方式。也许有人可以一页页、一行行、一个个字地系统读论文，这样做反映出一种很强的思维训练，这并非每个人的特性。我想一般规律都是采取原始调查的方式，把旁人的论文作为一种做出来的数学，想由自己来再创造，当然这比自己写论文要容易一些，因为必要时你可以从论文里“剽窃”所需要的东西。

一方面要将数学作为一个现成的产品提供给世界，另一方面又要将现成的数学转换成做出来的数学，这是否会成为一种矫揉造作的现象？其实，没有人能够理解现成的作品，它并非那么简单。我们常常以做出来的方式掩护现成的数学，例如以“找到一个 δ”代替“存在一个 δ”，以“从 p 推出 q”代替“p 后跟随 q”，还常常喜欢用“作一个代入……”和“我们将表明……”这类话。虽然这些短语很肤浅，但却表明了我们无法保持现成的数学的虚构性。当然也不应该忘记总有一些天才的数学家，他能以一定的书写形式，使读者看到了他所创造的数学的假象，他们的作品完美得使你可以从第一个字读到最后一个字。以前有不少这类好书，不知今天是否仍然存在这类文献。

近几个世纪以来，重心已从现成的科学转向活动的科学，从学者转向研究者。这个过程自然也影响到学校中学科的形成与分离，特别是学校中的数学，它与真正的数学大不相同。本世纪初就注意到数学教育中存在一个两次断裂的现象，那就是对数学教师的培训是不连续的，当他从中学升入大学时，已将中学数学忘记，而在几年后当他回到中学去作一名教师时，又将忘记大学数学，而将几年前断掉的线再接起来。这个矛盾本质上还是现成的科学与作为活动的科学

之间的对立,教数学当然应该适合学生的水平,但也不能完全脱离了真正的数学,成了一个不够严密的算法的集合,成了一个虚构的童话。一个世纪以来学校数学的独立发展已经进入了死胡同,既不引导到较高等的数学,又不引导它应用于生活。就荷兰而言,我可以断定这个结论适用于三分之二的题材与全部的方法。

造成这一现状的原因,是由于以下两种不同的特性相撞的结果。首先就题材而言,教的是数学,那是一个演绎体系,是现成的科学。其次就教学法而言,又必须激励学生主动的学习。将数学作为一个现成的产品来教,留给学生活动的唯一机会就是所谓的应用,其实就是作问题。这不可能包含真正的数学,留作问题的只是一种模仿的数学,虽然已经精心培育了一个世纪,但其最低水平就是将一般陈述中的参数代以特殊值或是至多思考一下理论的模式。于是学生离校时对数学留下一个不正常的形象,那是多年来的教育所造成的。

我们不能让历史的发展再重蹈覆辙。这种担心不是无根据的,历史早就在重复,新的数学一旦进入中学,就带着一长串附属的问题与传统数学的问题相对抗。理由是相同的——面对现成的数学,学生唯一能

做的事就是复制。所以要使学生活动，就必须以所谓的应用来补充，从理论上发展或是简化，或是对一般参数作简单代入。

希望学生能开展活动，不仅由于教学法的理由，也出于对学校体制的考虑。在各类教育中主要的一个问题是教师如何测试学生的进展，单纯让学生鹦鹉学舌地复述所学的现成的数学，当然不能令人满意。于是问题就演变为练习，而测验材料最终成了教学的目的。一个世纪以来的考试问题证实了长期以来所教的沉闷的模仿数学，不是有效的数学，而是无价值的数学。

随着数学的重要性日益增强，教学问题的迫切性也随着增长。如果数学是被应用的，那就应该教与学应用的数学，可是应用常被误解为在一般理论中的参数代之以数值。我认为数学的每次应用都是重新创造，这不可能通过学习现成的数学来培养。当然操练性的算法还是不可缺少的，但仅限于此不能创造教应用数学的机会，这种所谓的应用数学缺少了数学的灵活性。传统中学数学的最严重的缺点就是无用，让我们使新的数学变得更为有用。

对学生和数学家应该同样看待，让他们拥有同样

的权利，那就是通过再创造来学习数学，而且我们希望这是真正的再创造，而不是因袭和仿效。

我相信现在大多数人会同意，不应该将教的内容作为现成的产品强加给学生。今天大多数的教育工作者都将教学看作进入某种活动的开端。科学的顶峰总是创造性的发明，可是目前教学的水平居然还低于教师的水平。学习过程必须含有直接创造的侧面，即并非客观意义的创造而是主观意义上的创造，即从学生的观点看是创造。通过再创造获得的知识与能力要比以被动方式获得者，理解得更好也更容易保持。我不知道这个课题是否经过正式测试，但是许多迹象表明，这是可能的。前面提到过，语言和数学的静态解释将教的内容作为现成的产品加以分析，在教学过程中就将分析的结果以综合方式提供给学生。结果就是，语言被作为是语音、词类、主句、从句的一个综合体来教，而数学就是根据预先建造好的演绎体系来教。这种做法非常适应语言与数学的静态解释，但即使按照苏格拉底方法，也至少要让学生参与基本分析，以便让他们了解这些分析的砖块最终究竟建造什么样的大厦。然而这种教学与语言和数学作为一种活动的解释还是有距离的。

一种活动的分析

作为一种活动的解释，首先要求将教的内容作为一种活动来分析，在这方面语言教学比数学教学做得更好一些——也许从某些侧面看语言教学比数学教学更为容易，很少有人将数学作为一种活动来分析。也许由于对现成的数学所作的分析质量很高，且为传统的数学原理以及布尔巴基（Bourbaki）等一系列教科书的体系所公认。只有波利亚（Polya）的书作为对做出来的数学进行分析的少数事例之一。事实上，每一位好的教师至少有一次或者甚至很多次想用思想实验的方法来作这种分析，任何人只要注意观察，就会找到很多这种例子。

将数学作为一种活动特别是作为一种学的活动而进行系统的分析，这方面工作做得很少。皮亚杰（Piaget）及其学派是否做了这种分析？我认为没有。皮亚杰的研究不能与真正的数学解释相联系。虽然他给实验对象的任务是数学，但他几乎从未测试过这些对象是否理解他阐述任务时的语言，因此其研究目的与其说是数学内容还不如说是语言。在另一些情况下，与其说是测试儿童对数学问题的反应，还不如说是实验指导者在测试儿童如何驾驭并解决比较复杂

的问题,或是你能否以错误的暗示来哄骗儿童。更为忧虑的是,有些实验对象可能徘徊于对错两种回答之间,实验指导者却诱使他选择错的一个。更糟的是实验指导者明显地将对的答案标为错的。且不说这些严重的错误,还有更为深刻的理由可以说明为什么皮亚杰这些孤立的实验结构不能揭示学习数学的本质特性,这将在附录中叙述。

再创造与发现

将数学作为一种活动来进行解释和分析,建立在这一基础上的教学方法,我称之为再创造方法,这个观念在许多地方或迟或早地独立形成。今天,原则上似乎已普遍接受再创造方法,但在实践中真正做到的却并不多,其理由也许容易理解,因为教育是一个从理想到现实,从要求到完成的长期的过程。

我所谓的再创造,经常被理解为发现或是再发现,我也用过几次,其实用什么词本没有什么实质性的关系,只是因为“发现”这个词经常含有出乎意外的、耸人听闻的或是引人注目的这一类意思,这就会使再创造方法的含义受到根本性的限制。实际上存在一系列的实验清楚地表明,再创造方法对通常认为很引人注目的那些内容也是适用的。有些人从他们所

谓的这一方法的动力的角度来论证再创造方法的意义——这样做仍然是在依据一些不相干的准则来限制这一方法。

最使我烦恼的是，对于再创造这个概念，大多数都作了太狭溢、太肤浅的解释。我觉得范·希尔夫妇（*Van Hieles*）对再创造的解释更为深刻与基本，为了说明这一点，我必须解释他们所说的学习过程的层次是什么意思。为此我必须对下面冗长的离题话向读者致歉。

学习过程的层次

范·希尔夫妇开始从事教学工作时，像许多青年教师一样没有准备，也没有人教他们如何做。他们只能摸索着进行，也许观摩老师的课，当然还是不够的。随着时间的继续，他们有机会相互讨论并与其他人一起讨论教学。他们反省自己的教学活动，观察、回忆并分析所做的一切。他们发现思想在不断地活动，但其间有着相对的层次；在进入较高层次时，较低层次的活动就成为分析的对象。这就是他们在学习如何进行教学的过程中，所认识到的学习过程的一个明显的特性。随后他们将这个特性转移到学生的学习过程中，

也发现了类似的层次。对我来说这似乎是个重要的发现。

这些层次是什么，我在此只能以少量例子作部分的解释。比如完全归纳法，某些人可能认为这是个重要的原理，可以让学生进行再创造以得出确定的公式。而要能创造完全归纳法，其前提是必须让学生了解一些完全归纳法的重要例子，二项式系数与二项式定理也许是历史上最好的例子，当然也有其他例子。教科书常将二项式定理作为完全归纳法原理的推论，在数学创造过程中这是个恶性循环。没有这方面的亲身体验，是不可能形成完全归纳法原理的，而二项式定理正是导出原理的决定性体验。如果从皮亚诺（*Peano*）公理系这一自然数的形式理论推出完全归纳法，那也是教学中一个类似的恶性循环，同样可以认为如果不能系统阐述完全归纳法，也就无法创造皮亚诺公理系。而要想系统阐述完全归纳法，必不可少的条件是知道什么是完全归纳法，而要知道就应该练习，比如用二项式定理。可是通常的演绎过程却以皮亚诺公理为基础，导出完全归纳法原理作为一个定理，以后再用于各种例子，这是违反教学法的一个显著的颠倒的例子。因为对学习过程的分析揭示出实际的教学过程恰好相反，首先必须有例子以迫使学生发

现完全归纳法,通过特殊例子他认识到普遍的原理;随后又将其用于更复杂的情况;再在掌握原理的基础上,才能在教师的帮助下进行系统的阐述;最后如果他在公理化方面有一些亲身体验的话,他才能进入皮亚诺公理的轨道。类似的例子还有,几乎所有的现代教科书作者都相信,自然数的形式理论可以建立在基数的基础上,这无论从数学还是从教学法观点来看都是错误的。事实正好相反,自然数形式理论必须以了解完全归纳法原理为前提,这是自然数形式理论的下限,但对中学教学而言,自然属于高级阶段。

从上述例子中,可以明显地看出学习过程的不同层次,在最低层次上,完全归纳法是具体做出来的,到下一个层次,它就被有意识地组织成一个原理,变成了供反思的题材,到同一个或更高一个层次,它又转化成一种语言模式,由此再到皮亚诺公理系,那就已经不是一种局部的数学派生物,其中隐含着一个普遍原理(如完全归纳法);不如说它已经形成了整个领域的一个组织,它的语言型式(就像完全归纳法)又成为其他数学活动的反思题材;接着又对完全归纳法作了一次再解释;它不仅作为一个数学原理,而是解释为一个假定的性质,与另一些性质一起作为自然数的特征。

历史也是按照这些层次在发展。自古以来就使用完全归纳法;“边与对角线数”是该原理的深刻应用。第一个有意识掌握这个原理并进行系统阐述的是帕斯卡(Pascal),但真正以语言形式将其形成原理,那还需要一段过程。直到很迟以后,戴德金(Dedekind)和皮亚诺才在公理化过程中将此原理再解释成一个定义。回顾群的概念也有一段类似的历史:19 世纪上半叶只是本能地用群运算,接着就有意识地形成了原理,随后明确地形成群的有关性质,最终达到了公理化的抽象。

数学活动是一个组织经验领域的活动,只是它的经验领域和组织方法都十分特殊。前面的例子已经表明如何通过层次将数学活动分层,那就是较低层次的组织方法变成较高层次的研究题材。至于学习过程如何从一个层次进到另一个层次,则是一个教学法的问题,应该根据教学法的特定经验来回答。但不同层次之间的关系肯定是符合逻辑分析的,常常是以大量的量词作为提高层次的工具,就像完全归纳法的情况,它超越于自然数的所有性质之上。

在整数运算中,将某个数 m 的倍数忽略不计,在某个层次上可能是不成问题的 i 可是在下一个层次上,也许就是需要仔细讨论的主题,而有关的规则还

可以形式化。同样,分数在某一个层次上可以直观地运算,而在下一层次中,必须将分数化简等问题形式化为一定的规则,然后才可以进行运算。至于在更高层次的讨论中,模 m 的整数与分数的这些规则还可以在外延抽象化结构中进一步形式化。分数的例子还表明,每一个层次都不可跳过,然而习惯上却又常常会省略第一层次,或者至少是过早地转入第二层次,因为即使学生在一个较低的层次上能熟练地运算,如果不让他经受足够的亲身体验而强迫他转入下一层次,那是无用的,只有亲身的感受与经历,才是再创造的动力。

范·希尔关于层次的分析是从几何教学开始的,几何应该是从数学地组织空间的现象开始,通过这样的活动完形(gestalts)成几何图形,可实际却正好相反,几乎所有的课程都是从已经组织好了的数学对象开始,因而学生就被剥夺了一次最好的机会,即是被剥夺了将一个非数学的题材形成为数学内容的"数学化"的机会;同时也就堵塞了纯数学与应用数学之间的一个重要联系。然后,如果学生已经掌握了一些几何图形作为背景,就可对其多样性的变化进行组织。例如,只要演示一些平行四边形的图形,学生也能掌握什么是平行四边形,这就像告诉儿童什么是椅子一

样的一种抽象化，并没有什么神秘。但是现在通常的过程却是由教师给出平行四边形的一个形式定义，于是又一个层次被跳过了，学生又被剥夺了创造定义的机会；甚至还有更糟的，因为在这个阶段，学生根本不可能理解形式定义，更无法理解形式定义的目的和意义。（有些教科书还解释什么是定义，它实质上是又跳过了一个层次。）

如果允许一个学生重新创造几何，他会怎样做呢？给他一些平行四边形，他会发现许多共性，发现如对边平行、对角相等、邻角互补、对角线互相平分、由对角线分成的某些三角形全等，以及用全等的平行四边形铺满平面的可能性等等大量重要的性质。接着他又会发现这些性质之间的联系，通过铺平面是导致这些发现的最有效的方法。于是就开始了逻辑地组织，用蕴含箭头记号来标志这些关系，最终他会发现由其中的一个性质就可导出所有其他的性质；也许不同的学生会选择不同的基本性质，由此，学生就抓住了形式定义的含义，它的相对性，以及定义等价的概念；通过这样的过程，学生学会了定义这种数学活动，而不是将定义强加于他。

当然一些权威的数学家十分讨厌这样的教学。往往在学生还不知道定义是什么时，就要求他进行证

明！难道定义、假设、命题、证明就是唯一正确的顺序？事实上，这些权威数学家忘记了他自己开始观察并研究一个新领域时，也并不是按照这个顺序的。

学习过程是由各种层次构成的，用低层次的方法组织的活动就成为高层次的分析对象；低层次的运算内容又成为高层次的题材。学生学习如何用数学方法进行组织，将自己自发的活动数学化，或者说希望教师能以这样的方式教他。范·希尔曾经描述过，如何跳过学习过程中的层次。“在某种程度上可以不管这些层次。对那些训练熟练技能的教学，有可能超过学生的实际层次，就如儿童不懂分数的意义可以训练分数的运算，或是不知道微商与积分是什么，也照样可以训练微积分运算一样。也就是说，不必涉及数学活动的意义，只要能借助一些简明的规则（算法）来描述活动，那样就可以教给学生超过其实际理解水平的熟练技能。确实，一个学生以这种算法方式获得的某种能力，有可能不会应用，那只要再教给他大量的应用模式，同时还教给他一些特殊的记忆方法，以免混淆。在很多情况下，特别是只要求保持短期的记忆，譬如说，为了应付一次测验或考试，那这样做就足够了。但即使如此，我们仍然无法确定，将某个题材的层次降

低,是否会是一种愚蠢的教学方法。因为不给学生提高层次的机会,是否会使学习过程停顿甚至退化。”

有个例子也许可以解释上述议论。有位教师教毕达哥拉斯(*Pythagoras*)定理,只告诉学生记住两种不同的形式,$a^2 = b^2 + c^2$ 和 $a^2 = b^2 - c^2$,并用它们来解几何问题;还给出特殊的记忆规则,以便确定在特定情况下,该用哪一个公式;到最后,他将问题的类型全部分类,列成一个表格,以供学生查照,但他就是不教定理的证明。

范·希尔还注意到学习过程的不连续性。不连续性表现在学习曲线中有时会有跳跃,这些跳跃就显示了不同层次的存在。这说明学习过程曾经停顿了一下,以后又开始;与此同时,学生似乎也“成熟了”。有时教师感到不能顺利地解释教材,他似乎与那些达到新层次的学生讲着同一种语言,可是对未达到新层次的学生来说,他们无法理解这种语言。这些学生也许可以接受教师的解释,但对教材的理解无法深入,他也可以模仿某些活动,但对自己的行为也心中无数,感到无能为力,除非他能达到新的层次。这时学习过程又显现出一种连续的特性,形成常规与算法技巧,由此又将导致一次新的跳跃,以引向更高的层次。

最低层次

一般地了解了学习过程的层次概念，我再回过来解释为什么对当前数学教育中的“发现”感到完全不满意。一般地说，实验室的试验通常都以统计方法来分析学习过程，从而提出改进教学的意见，而不是通过教室中的个别体验：在教室中可观察到的学习过程的不连续性，在实验室中就可能忽略。实验室的试验往往固定在一个层次上，只注意算法技巧的连续发展，从而追溯到发现法的有目的有价值的应用。有一个著名的例子，那是第纳斯（Dienes）的试验，声称6～12岁的儿童可以掌握二次方程、有限群、同构以及模等，而实质上这仅仅是儿意的游戏。作为一种演示也许留下了深刻印象，因为是由师生双方共同完成的，但是显然无法培养通过传统教学能够获得的许多能力。

我早已指出了发现法的天生局限性。每件事情只在学习过程的一个固定层次上发展，特别像现在的情况，实质上是在最低层次上。我并不认为这个层次可以忽视，正好相反，我要强调的是传统数学教学跳过了这个层次，恰好是犯了一个错误。最近有人开始研究这个层次（其中就有第纳斯），但必须完全清楚，也

应该强调这是最低层次,是数学之前的层次。如果不说清楚,我担心整个活动将会被人判定是非数学的,不相干的,因而予以拒绝。实质上活动是为数学作准备的,所以在更高程度上是相关的。

在这类实验中,儿童所完成的不是数学。但旁观者确实可以把它解释为数学,因为他熟悉数学,也了解实验过程中儿童的活动是什么意思,可是儿童并不知道,他们只是以数学概念来作游戏,用自己的双手有目的地、熟练地操纵这些概念。游戏是极为重要的,范·希尔也以类似的方式让儿童在教室中作游戏,但这是最低层次,是不可缺少的,但又是暂时的。

只有到了下一个层次,儿童才会进行反思,并分析在最低层次中的组织方法;这时才开始有了点数学味道,虽然也还是微不足道的形式,但不再是开玩笑了。儿童在最低层次通过操作对概念进行运算,但却不知道自己在做什么;我们是从较高的层次了解这个的,儿童也要到了下一层次才了解自己和别的儿童在最低层次所做的事情。如果要说,儿童在这个层次中学习集合论、群论或是线性代数,那就像把唱歌说成是学习音乐理论,把小修小补说成是研究机械学,观察天空就是研究天文学,讲话就是研究语言学一样可笑。而且数学还更为不同一些。人们不懂音乐理论仍

可以唱歌，不学机械力学照样获得熟练的手艺与实验技能，不掌握最基本的天文学也可以了解天空，不研究语言照样可以熟练地讲话。而数学却必须将学生提高到更高的层次，如果不是全面提高，也至少要在某一部分上，那样他才能理解最低层次的活动的含义，遗憾的是现在许多人却停留在最低层次上。所以研究这个层次是非常重要的，其重要性在于认清最低层次并非结束，否则人们就会相信最低层次与数学无关，因而用于最低层次的发现法也不适合于提高层次。

错误的观念早就根深蒂固了，这可以拿经常引用的布鲁纳（J. Brunner）在《教育过程》中的一段话为证：

我们从这样的假设开始，即每个题材均可以以某种适当的智力形式，有效地教给处于任何发展阶段的任何儿童。

在同一个地方，英海尔德（Inhelder）作了类似的评论，还加上了布鲁纳没有提到的重要的修饰：

……假定儿童通过他们可以触摸的材料来学习，而与那些数学表达式分开。实际上，可以教给儿童大量的数学素材，只要所有的数学都从素材中消失。也可以让儿童像自动计算机一样工作，从成人的观点解

释,他们是在做数学。如果人们有可能进行这样的实验,那就应该问一下:这样做的目的何在?

回答是明确的,因为这是最低层次,是数学的前驱,后面必须紧密联系着为之作准备的数学,这样才能使准备中所含的深入内涵不致逐渐消失。原则上不应该在最低层次培养儿童的数学能力,除非他能够进到下一层次,也就是能够对最低层次的数学活动进行反思。至于究竟在什么年龄适合于学什么,这显然依赖于个别人的特点。一般来说,6 ~ 7 岁的儿童可以计算并解简单的计算问题,令人吃惊的是 8 ~ 9 岁的儿童常常会解一些有点复杂的文字题,但如问他“你怎么知道”他的回答往往是“我觉得是这样”;等他们再大一点时,如果不加帮助,他们就不会解这类问题。我曾多次试过下述问题:

当安妮像玛丽现在这么大时,安妮的年龄是玛丽的 2 倍,现在安妮 24 岁,问玛丽几岁?

大人解这个问题,可假设玛丽年龄为 x,然后解。可是儿童通常更为直观地计算,在他们眼前似乎有个时间过程,他们能“看到”玛丽有几岁。然面他们有这种表达能力却并不等于他们能解释为什么这样做。

任何人观察儿童做算术,都会经历这种现象:如果你问“你是怎么做的?”他可能会对你耸耸肩膀。如果

以再创造的方式来教数学,那就应该认为这种反应正是学生在数学上趋向成熟的一个下界。只要儿童没能对自己的活动进行反思,他就达不到高一级的层次。当然高层次的运算可以作为算法来教,但结果不能持久,这已经被分数教学的失败所证明。(我承认,由于教师与教科书作者对于如何从直观的分数进展到算法的分数,最终又如何引出分数的规则,缺乏适当的观念,从而使情况更为恶化。)

总之,在最低层次通过再创造来激发活动是必要的。但要使它真正有意义,就必须作好充分准备,而不能成为非本质的游戏。再创造是关于研究层次的一个教学原则,它应该是整个数学教育的原则,而不仅限于最低层次,那里的情况近似于借助操作游戏来演示明显的数学特性。

第七章

用数学化方法组织一个领域

赫胥黎(Huxley)认为“数学训练几乎是纯演绎的。数学家从少量简单的命题出发,命题的证明是如此明显,而被认为是自明的,其余的工作就是从这些简单的命题来进行巧妙的演绎。”他又提出“数学是那样一种研究,根本不懂得观察、实验、归纳与因果关系。”事实恰好相反,要对数学进行分析,就经常需要新的原理、新的观念和新的方法的帮助,这不可能通过任何词语的形式来定义,而是直接从人类意志的内在力量与活动中涌现出来,从思想的内在世界连续更新的反思中产生出来,这种内在世界的变化现象就像外部的现实世界一样要求密切地注意和识别(对个人来说,这种内在世界不妨理解为物体和它的影子之间的对应关系)。数学研究需要不断的观察和比较,它的主要武器之一是归纳,它经常求助于实际的试验与证实,同时它还对想象力与创造力进行最好的训练。

(摘自西尔威斯特(Sylvester)数学论文集)

到目前为止,有关教学理论的分析主要是局部的观点,还没有看到按照数学的整体结构来进行教学,这里说的整体结构不是将数学作为一个事先建造好的演绎体系,好像一个倒过来的金字塔那样,因为如

果这样教,显然不符合再创造的教学原则。我们应该理解所教的数学整体结构,并非是一具僵硬的骨架,而是随着学习过程中数学的发展而发展的。正像数学家的数学结构也并非像书架上陈列的书那样一成不变,而是每天都在改变,那为什么学生就应该学木乃伊式的数学呢?

数学的整体结构应该存在于现实之中。只有密切联系现实教的数学才能充满着各种关系,学生才能将所学的数学与现实结合,并且能够应用。传统的算术教育就是这样,所学的大多数都是可以应用的,要让算术有应用的机会,对这一点的重要性不应低估;人们对于自己已经学得很好、掌握得很牢固的知识,往往会忽视学习它们的困难性和重要性。除了初等算术以外,没有哪个数学领域可以使所学的大部分予以应用,即使大学也是如此。这种数学往往远离所赖以生存的现实,处于一种与观实不相关的状态,所以即使学了也立即忘记。

如果说传统的数学教育也涉及到数学的应用,那它根据的模式却经常与教学法颠倒。不是从具体问题出发,再用数学方法进行研究,而是先学数学,将具体问题作为它的“应用”。这个问题还不大,更有甚者,人们通常所谓的应用,只是在一般公式的参数中代以

某些特定数值，实质上只是一种常规的特殊化。由于数学应用的不切实际，人们对它产生了怀疑，因而在近年来的大扫除中，数学与现实的关系被当作垃圾抛弃了。这个大扫除的另一优点就是演绎系统更为纯洁、完美与至高无上，它的不朽形象再也不会被应用所损害。

算术教育已经提供了一条正确的道路。如果要教充满着联系的数学，就应该将它与有关的内容紧密联系起来，无论这种关系的另一部分是数学、物理还是日常生活，必须一而再、再而三地从它出发。负数如果要用于杠杆，那就应该从杠杆开始；对数应该从计算尺、大气压力或是双曲线开始，因为它在那儿有用；内积应该开始于力学研究，导数应该开始于速度、密度、加速度；而线性函数则应该开始于自然界与社会中每个人都必须了解的所有比例关系。

今天许多人同意，学生也应该学习将非数学的（或是不完全数学的）内容数学化，也就是学习将非数学内容组织成一个合乎数学的精确性要求的结构。将空间完形为图形是空间的数学化；整理平行四边形的性质，使之形成推理联系，以得出平行四边形的一个定义，这是平行四边形概念领域的数学化；安排几何定理使之从少量的几个可以推出全体，那是几何的

数学化(或公理化);再借助于语言学的方法组织这个体系,这是又一个题材的数学化,现在称之为形式化。历史在重演——平行四边形的每个一般陈述都是一个数学陈述,但是这些陈述的整体本身只是一个大杂烩,只有用逻辑关系建立结构,它才成为数学,而这个过程就是数学化。几何定理之间即使局部相关,就其全体而言也只是各个章节的混合物,只有借助公理系才能使之数学化;至于以各种语言表达所构成的杂烩,只有借助于语言学的组织才导致形式体系的建立。

前面谈到的实际上已经是数学化过程的较高层次,那就是对局部的数学材料进行整体的组织。凡是写过数学论文的人都会有同样的体会:即使结果及其证明均已确认,也仍必须通过数学方法将其组织成一个过程,使得沿此路线可以导出结果。至于建立一个数学定义,则比发现命题或证明具有更本质的作用。很难理解,为什么数学家认为数学化是一个粗制滥造的活动,因而将数学化排除在教学之外,并且声称数学化应该是数学家的事,而与学生无关。事实正好相反,毫无疑问学生也应该学习数学化,当然从最低的层次开始,也就是先对非数学内容进行数学化,以保证数学的应用性,同时还应该进到下一个层次,即至

少能对数学内容进行局部的组织,至于究竟应该进行到何等程度,这个问题还有待于讨论。但是,如果要教公理系统与形式体系,那公理化与形式化是不能忽视的。因为没有数学化就没有数学,特别是,没有公理化就没有公理系统,没有形式化也就没有形式体系。我们至少应该记住夸美纽斯(Comenius)的教导:教一个活动的最好方法是演示,或者进一步相信,学一个活动的最好方法是做。那就是说,如果将数学解释为一种活动的话,那就必须通过数学化来教数学、学数学,通过公理化来教与学公理系统,通过形式化来教与学形式体系。

当前已经有不少人对数学教育提出了数学化的要求,但我担心其结构太狭隘,常常把数学化理解成最低层次的活动,即只能应用于完全非数学的内容。于是,最时髦的提法就是为现实中某个微小而孤立的片断——所谓“情境”进行数学化,也就是为情境建立一个数学模型。

以数学化方法进行教育的另一种提法是”问题解决”,这里的问题可以是各种层次的。除了前述的“情境”是表示对局部的具体情况进行数学化以外,一般而言,“问题”已经是以比较抽象的状态来描述某一情境的核心,因此我反对这种提法。问题应该来自于情

境，而儿童则应该学习从情境中辨认问题，提出问题也是数学。

在作了这些准备以后，我希望大家能清楚，我所说的用数学化组织一个领域是什么意思。它是数学教育的必然趋势，它是一条保证实现数学整体结构的广阔途径，而并非金字塔的塔尖。情境与模型，问题与求解这些活动作为必不可少的局部手段是重要的，但它们都应该服从于总的方法。

除了前面说的以外，还可以通过更多的例子来理解用数学化组织一个领域的含义。最令人信服的例子还是几何——诸如四边形的分类（为了可以辨别定义），对称、用全等图形铺平面、角的概念以及几何的代数化等等。其他领域的还有：杠杆原理，与重心有关的代数，根据各种法则得到的自然量之间的关系——特别是函数关系，数学化的微观经济（*micro-econoniy*，一个特别吸引人的课题，据我所知，中学还没有尝试过），以数值方法为出发点所建造的分析学、波的传播以及示波器等等。不加渲染地列举这些例子也许就足以说明问题。

上面提到的某些题材通常都被看作是物理的一部分，为此我想说一下近年来所谓的综合训练，以免把

我提出的组织一个领域的方法与所谓的课题方法混为一谈。

为什么科学教育至少在开始的时候不分科训练更好，这个问题值得讨论；譬如数学，如能联系实际进行教学，那天地就广阔得多。至于综合的科学教育需要延续多久，那是另一个问题。实施综合的科学教育的一个有效手段是组织“课题”，这种例子到处都是，比如“地球空间”、“水”、“营养”，这些课题很适宜于进行现象学的探索，但却缺少科学理论的培养。许多人声称要到 14 岁时理论能力才会超过现象学能力，应该说我并不相信心理学家说的已经证明了这一点，但如果这是真的，可以建议综合的科学教育进行到 14 岁；在这以后，组织各学科的配合教育会比综合教育更好。

在综合的课题中已经包含了数学，因为总有一些东西要相加、相乘或是计算百分数，但这对数学而言并不说明什么问题。在那些课中，8 ～ 9 岁的儿童所做的数学也许比 14 岁所做的更为深刻。历史上，数学开始得比其他学科早，这当然不说明什么问题，而且正如我前面强调过的，心理学家是否能证明自然科学非得诞生得比数学晚许多年不可，倒是很值得怀疑的。不久的将来，必须考虑用数学工具来进行自然科

学教育，其实数学早已在自然科学的综合教育中得到了很大发展，至少在物理教育中是如此。

这不应该妨碍我们的协作，特别是与物理的协作。物理需要数学作为一种辅助的训练，当然物理也可以直接存在于现实之中，就是这个现实同样也为数学提供了题材，并从中形成了数学组织化；已经设计了一些数学与物理配合的模式，但似乎还不够理想。例如：在物理的某个阶段教折射定律时，不能用数学公式来表示，因为按照数学传统，要两年以后才学正弦，那么正弦能否早点出现呢？数学家反对说，这是不可能的，因为三角需要这么多星期来教，因而除非在代数结束之后，否则我是抽不出时间来开始教三角的。这就是体系狂的不合理性。根据体系，正弦属于三角，所以必须在三角中教；而在三角中，除了正弦以外，还有余弦、正切、余切、倍角公式、加法公式、正弦定理、余弦定理等一大堆公式与定理，只要你不愿吞下整个的苦果，你也就别想先得到正弦，从体系的角度看，或是全部接受，或是一点不提。那么是否可以将正弦作为教学函数的一个奇妙的例子，以几何方式从圆引入，而不是以代数方式引入呢？我甚至认为这是学生应当学习的函数的最早例子之一。

另一个例子——在体育音乐理论中产生了相互关

联的算术序列与几何序列，根据体系的规定，数学还没有学得这么深，但是为什么不能早一点研究这个题材呢？这不是函数联系的一个美妙的例子吗？

对物理学家来说，微积分总是出现得太迟，他们需要微商与积分概念，还有少量函数的导数与积分，希望这些能早点出现，可是数学家却被体系所束缚，他们认为要末是引进全部微积分，否则就只能限于所谓中学微积分。物理课中的应用可以有力地带动许多数学概念，如梯度和线积分，但根据规定多变量微积分不属于中学课程，因而数学课上一点也不能提。

另一方面，物理学家也受体系的牵制，质量效应类型的定律诸如重心定律与库仑（Coulomb〉定律，从数学来看是同类型的，但却由于它们来自不同领域而被分开处理。所有“比的”量（比重、比热、比电阻等等）有助于数学家引入并解释线性函数，而物理却教得太迟。杠杆原理对代数初步很有价值，可以由此引入并阐述，但物理又很难配合。

如果数学教育与物理教育要真正地配合，必须要求数学家与物理学家双方都放弃自己的体系。代数、三角，解析几何、无穷级数、微积分都不应该看作封闭的单元。只是以数学为一方，物理为另一方分别看作一个整体；根据难度及共性相互结合起来。

但是将现代化数学教育与物理结合，会使任务更为复杂，这一做法是否明智？我建议应该在有数学，物理联合会的国家比如德国进行试验，其他国家需要认真考虑教师培训的问题。

另一个问题是数学教育与物理教育的配合是否真的必要？物理学家是否真的要用那么多数学？如果要教充满着联系的数学，是否也真的应该而且可能涉及这么多物理？如果比较仔细地翻阅一下物理教科书，看他们究竟用了多少数学，那一定会使你大失所望。物理学家主要只要求学生能阅读公式；能对参数代以数值；也许提到一些与物理有关的比较容易的数学公式和证明，或是在力学中提到微商。但总的说来，他们避免所有真正的、深刻的数学，可以认为物理是彻底的非数学化，即使用到数学也是在很低的层次。教科书中有一些使人震惊的例子：比重定义为单位休积的重量，根本不提体积与重量的比例关系，也不管线性函数与比例系数；杠杆原理由矩的概念形成，也不提反比例，因为那要用到一大堆数学；一般而言，不论是量的比、或是杠杆、比例与反比例的概念，从更广的背景来看，物理就是回避函数概念，只是将现成的公式强加给学生。

可以理解物理学家的处境，他不愿意由于学生不

熟悉所用的数学而影响了物理。所以很自然地他便降低物理教育中的数学水平，因此数学家不必为物理困扰，物理学家也并不希望从数学家那儿得到什么，他们满足于自己能想得起来的一点可怜的数学。这是互不关心的一个恶性循环，长此以往，数学教育与物理教育将形成完全割裂的结局。有些国家的情况没有这么糟，但在荷兰，几乎所有的中学数学教师只知道自己做中学生时所学的物理，物理教师也一样。

这是因为到了大学，数学仍然不关心物理应用，物理教育中也继续应用那些特别琐碎的、低级的数学。我想在此强调这一点，因为在大学阶段，这个问题是最容易补救的。没有权威来规定我们的大纲与日程，只要通过一年级课程的教师之间的正常接触就可以解决很多问题。

同时还有令人担忧的事实，那就是物理学家在教学中用的是低级的数学，因而学生学的就是非数学化的物理，学生不理解数学在物理中如何应用，根据他的体会，数学与物理是不相关的。在这种情况下，被物理学家所拒绝的数学，如果再由数学家提供出来，学生能接受吗？

我的回答是，这就是数学家的任务。因为不能指望物理学家会在物理教学中尽力展示数学的可应用性，

数学家对此应该更感兴趣。他应该乐于使学生不仅学数学,也学如何用数学,而且不仅用于物理上。我没有提化学,那里的情况更糟。虽然化学课要用的都是非常初等的数学,可是数学在化学中可以说是完全失败的,因为化学家喜欢用他们自己的数学。

数学有它自身的特点,我想应该从数学的角度以不同的方式来理解综合教育。数学的独特性也许相当于本国语言教学的特性。我建议不是数学与其他学科配合,而是围绕数学来综合,即以数学为核心学科,再吸收其他学科的题材,让学生将它作为是用数学来组织的领域。这并不是说其他学科不必要或是降低其价值,而是至少让学生学会用数学可以做什么。

实际上,最初学数学就是采取这样的方式。初等算术教育就是这样结合的,当然不是和自然科学结合,因为对于儿童来说,自然科学尚未形成,因而只能和儿童的各种日常活动相结合。这种结合应该尽可能维持下去,特别是一直到儿童逐渐进入自然科学概念并受其影响的时候。事实上,存在那么一个过渡阶段,既非物理,又非化学,亦非生物,自然科学家会愿意将这种乐趣奉献给数学。我是指当世界上的各种关系还没能用自然科学来分析时,却可以通过函数作数学的描述。

传统的算术教育所涉及的关系大多是社会生活方面的，如偿还贷款，或将两种质量与价格都不同的果脯混在一起，这些都很难符合儿童所接触的生活现实。再如水盆的塞子以及行军队伍的相遇和追及问题等，是否可以借此引进适当的观念，也令人怀疑。但如作为单价、比重这类线性函数的比例因子，或是速度、增长率、周期等，这些都是从观察现实的初步分析中抽取出来的现象，也许还很难称为自然科学，但却可以促进科学的分析。这些内容都非常适合于早期的数学教育。

算法

形成最早的算术概念的分析是很初步的，它没能导致最初的算法。这里“算法”这个词特别贴切，因为按一种模式进行计算，与现用的含义没有太大区别，它最早可能由花拉子米（Al Huwàrizmi）提出。在这以前（有些地方甚至在其后几个世纪还这样）人们用算盘上的算珠进行计算，这是使用具体材料的一种直观的活动。数学家通过观察，了解了计算者所应用的规则（例如逢 5 或逢 10 的转换），计算者本人却不必知道。因为他处于最低层次，他当然可以升到下一层次，但并非必要。接着算珠就被阿拉伯数字所代替，在没

有发明纸以前,就写在细沙上。开始时,阿拉伯数字不像算盘上的算珠那么具体,计算者要将算盘上的活动翻译成书写的计算,他必须理解自己在做什么。这样他就进入了一个较高的层次,通过建立其规则而创造了笔算。经过长期的发展,算法可以自动化到这样的程度,甚至规则也可以从人们的意识中消失,就像开灯关灯,人们不需要知道开关是如何工作的,开关坏了可以由懂得原理的人来修理。同样计算出现了误差也可以由懂得这些数码如何工作的人来纠正。儿童直观地计算 $8+5$,如果给以适当的具体材料,他甚至还可以分解成 $(8+2)+3$。最初这也许是一种无意识的技巧,而一旦成为有意识之时,儿童就达到了下一层次,并从而建立了加法的书写算法;如果最后他将这个算法系统地进行阐述,那就又进到了更高的层次。当然也可以教给儿童现成的算法,以便跳过中间的层次,这可能加快学习过程,但也可能使学习过程放慢甚至停顿。除非儿童能够证实 $(8+2)+3$ 这种分解是合理的,并且感到这是必需的,他才能自动地应用算法。理解算法的最好途径是发现它,没有什么比依靠自己的发现更令人信服。如果不给儿童必需的时间,如果算法是生硬地灌输的,随之而来的必然是一个糟糕的反应。创造算法的目的与基本原理,就是要使算

法能像例行公事那样应用,但如处理不当就不可能做到。如果将算法作为一《规则教给尚未达到这一层次的儿童,那是无效的,他们会犯愚蠢的错误,并且会混淆了不同的算法。

对数学来说算法具有极大的重要性,代数、微积分、概率中都有算法。当前数学的强烈趋势就是盛行算法化。同调、上同调、图和范畴的算法都是最近的创造,将一个领域算法化是更容易超越该领域的一种方式。算法不会自己自动化,然而却可以信助于常规使之自动化。这是算法的基本原理,但也正是算法为什么会危及教育的理由。算法对师生双方都有吸引力:教师宁愿教算法,因为可以不让学生再创造,也许甚至在学生能够再创造以前就将算法强加给学生;学生也很容易被一个巧妙的算法所迷住,就像被一个游戏迷住一样。举个极端的例子来说,有些除法问题难道不是一味着眼于结果有没有余数,而对一个数能否被另一个数整除这一点根本不去过问的吗?作为本身的目的,是否根本不需要发明可怕的分数与括号表示?是否有一些根本没用的代数算法进入了儿童的头脑?

我想再次强调:算法是好的,数学中的常规也是不可避免的。某些算法必须根据学生的水平,通过再创造来学习。借助操练以获得算法的自动化是必要的,

而且操练也是训练的一部分,但不能像过去那样常被过于夸大。革新家们倾向于强调自由探索,尤其在最低层次,我不想说他们过于夸大了这一点:但是我早已表示过,希望能更多地注意向更高层次的转移,在更高层次上进行探索。操练的自动化也是一个重要的任务,我将在处理代数语言时再谈。

除了算法以外,我们知道还有所谓模式、策略和战略——这些与算法相比都不适宜于自动使用。譬如有一个模式:购买商店里各种商品,那就用加法。更一般的一个模式:比例法则。有一个策略:设未知数 x(以应用代数算法)。还有一个战略:解一个问题,然后加以推广。

我曾向 6 岁的儿子提出下述问题:“商店橱窗里有价格为 50 分的书,25 分的玩偶和价格为 10 分的陀螺,玛丽有一个弗罗林,她进商店买了所需要的东西,还剩下 50 分,试问她买了什么?”我儿子毫不犹豫地回答:“一个玩偶”。问他为什么,他说:“玛丽是女孩,不是吗?”一年以后我再问他同样的问题,他回答说:“一个弗罗林 85 分。”

这是一个不寻常的问题,因为除了数字以外,还需要在三种可能的解答中作出决定。当然容易理解当时的模式还不是函数,但情况是不平常的。很遗憾我没

有调查如果以“一个儿童”代替“玛丽”我儿子会怎样回答，问题中的名字与性别居然会使他错误地理解。我相信在他那个年龄能够找到正确的结果，但也是以并不恰当的方式。在他的年龄，他知道某些算术模式，但却没有掌握一个策略，那就是“在文字题中，人的名字是不相干的”。(在日常生活中名字当然有关。对好学生应该利用这些资料进行训练，例如，给出允许有两个数值解的问题，其中一个解由于年龄或性别关系而被取消。)

在我儿于那个年龄出现这种情况是显然的。他已经学过系统的算术，过早地熟悉了一些常规，然后就应用下述策略：“一个问题中如果包含两个以上的数，那就将它们相加。”这一类策略在最高层次上也仍然会遇到。在一次群论课上，我定义了群和自同构，再引入内自同构作为一个例子，然后我问是否还存在其他的自同构，一个学生回答说：“是的，因为否则你就不用区分内自同构。”

总之，模式、策略与战略都和算法一样是重要的，应该进行培养，但却不能太早，必须到学生能够自己进行再创造的那个时候。

奇异

相对于算法、模式、策略与战略而言，还有一类奇异的、个别的经验，如希腊语教育中所谓的罕用语——只用过一次的语言。历史是由这类奇异事物组成的，但是人们却不想按这样的方式教。数学中确实有很多东西能够学也应当学，但这是由于它本身的原因，比如出于好奇心，但却不能作为一个范例。学这个有什么价值呢？我的意思是，对于教师和未来的数学家，他们可能会欣赏这些充满着联系的数学，但是对于一般的学生，是否值得强迫他学呢？这一内容对他究竟有什么价值？仅仅遇到一次，以后又随即忘记？

你知道我说的是什么意思——所有几何定理与三角公式的那些证明，学过了，可能下节课再重复一次，然后全忘记。这类东西有可能作为范例来学，但需要重新作很多解释。我看到过一套教科书，二年级学集合论，一直不用，直到九年级再用。也见到将有理数作为整数的等价类形式地引入，除了满足教师（或教科书作者）渴望的精确性以外，别无其他目的，它们在整个体系中是完全孤立的。还有实数的形式公理体系，它的实质性部分（有界集必存在上界，或戴德金分割）永远也不能运算。这类例子还可列举很多：

连续性定义从来不用,因为所有考虑的函数都是连续的;黎曼(Rienmann)积分也从来不用,因为实际上求积只是求微的逆。

另一类罕用语是数学蛋糕上的葡萄干,是证明课上的展览品。例如,苏格拉底(Socrates)的遗产,倍平方,$\sqrt{2}$ 的无理性,或是欧几里得(Euclid)关于无限个素数的存在性等问题。这些问题通过苏格拉底方法和再创造教学,保证能使之顺利解决。但是课后数学教师反问自己:“它是否有助于二次方程解的教学呢?”

这话听起来像是在逗笑,其实却是虽不中,但亦不远了。我只想重申一下反对的理由。示范课之所以被人误解,正由于它们是示范课的缘故。从数学蛋糕上拣葡萄干,这本身就是一个不切实际的指令。了解一个题材如何符合于数学教育这一整体,这是合乎要求的,也是必不可少的。有人提出,杰出的片断必须容许其保持孤立,但我认为,正因为是杰出的,那就更值得努力将其更深入地结合进数学教育中,而不能使之成为罕用语。这就要求教师必须更为仔细地检查教学内容。下面我将通过三个例子以表明它们的教学法是如何受到两千年传统的牵累的。

我从 10 岁的儿子那里学到了门诺(Meno)问题。

他告诉我，他会做一些割补的活动，并且漫不经心地说："我要做一个 2 平方毫米的方孔"。我即刻进入了苏格拉底的角色，问他："你怎么做?" 当然，我想他会作出一个普通的错误回答，但是他的回答却是："做一个边长为 $1\frac{1}{2}$ 毫米的正方形。" 我困惑地问："为什么?"

我想他的回答一定是求 $1\frac{1}{2}$ 的平方。可事实却不是，这个头脑中映像极为逼真的孩子，回答说："我拿两个边长为 1 毫米的正方形，将其中一个分割成四个相等的长条，将其粘到另一个的四条边上。" 我拉长了脸，他也犹豫不决。实际上这自然是错的，因为每个角上都缺了点什么。我告诉他应该以另外的方式将正方形割成相等的部分，但不能割成矩形。要让学生发现用对角线进行分割并不容易，但无论如何这个粘贴法比门诺的方法要更为自然一些。

接着，可以从两个方向对毕达哥拉斯（*Pythagoras*）定理继续探索，系统地研究割补术，或是转入代数，讨论 $\sqrt{2}$ 的系统迫近，其中是最粗糙的一个近似值，还可以讨论连分数，边和对角线数，以及代数方程的数值解。这样可以使门诺问题不致孤立。

$\sqrt{2}$ 的无理性可以用老的方法，令 $\sqrt{2}=p/q$（既

约分数），平方得 $p^2 = 2a^2$，除以 2 就得出矛盾。问题的这种形式化从教学法角度看是错误的，因为至少这是教学过程中第一次出现无理数，从学习过程的层次来看，在形式化之前还应有一个层次，问题的正确提法应该是：作出 $\sqrt{2}$。意思是先应有个实验结果，而不是一个先验的事先建立好的陈述，这里不可能产生顿悟。这是一个局部问题，也是应该探索的一个领域。此外，作出 $\sqrt{2}$ 是什么意思？是否已经作出了？因为我们已经有了算法表达式"$\sqrt{2}$"。

更好的方法是这样做，要求解方程 $x^3 + 3x^2 + x - 4 = 0$，从图象看出方程有解，但不是整数，（在 $\sqrt{2}$ 的情况下，解的存在与整数解的不存在更为明显，那是个有利条件。）于是试以 9/10，稍大，也许是 8/10？又太小。从中得到启发要找接近 9/10 又不太复杂的分数，我们能找到的最好的是 8/9，又太小。作了这些类似的准备以后再试 p/q（既约），乘以 q^3，得到 $p^3 + 3p^2q + pq^2 - 4q^3 = 0$，在 $\sqrt{2}$ 的无理性的传统证明中，除以 2 其实是完全不相干的，只要导出矛盾，即 q? 中必须包含一个素数因子，于是得出 $q = 1$，由此又得出了一个方法可以系统地求出满足方程的整数 p。另一方而还可以继续系统逼近，如霍纳（Horner）方法等，这就是一个领域的探索。

最后是关于无限多个素数的存在性，传统的方法是已知素数 $p_1,\cdots,p_k$，教师由此直接得出 $p_1\cdots p_k+1$，在试验中，我从未看见过这种解答，往往是其他解法。首先问题的形式应该改成：系统地找出素数，至于是否有无限多，那只能在较高层次上讨论。开始当然用自然数序列，根据埃拉托斯散（Eratosthenes）筛选法，2 是素数，记下，划掉 2 的所有倍数，留下哪些数呢？都是 $2n+1$ 型的数。下一个素数，记下 3，划掉 3 的倍数，又留下哪些数？$2\cdot3\cdot m+1$ 与 $2\cdot3\cdot m+5$ 型的数，其中哪些又不能被 5 整除？只有 $2\cdot3\cdot m+5$ 型中 m 不是 3 的倍数的那些数适合。由此即可顺利地得到数 $p_1\cdots p_j+p_{j+1}\cdots p_k$，它不能被 $p_1,\cdots,p_k$ 整除，这样的数必然有新的素数因子，于是最终导致无限多个。至于 $p_1\cdots p_k+1$ 这一形式却并不明显。更系统的方法还可以打开其他的思路：

如何找出所有不能被 2,3,5 整除的数？其形式为 $2\cdot3\cdot5\cdot m+r$，其中 $r=1,7,11,13,17,19,23,29$，即 $1\leqslant r\leqslant 30$，且 r 与 30 互素。于是形成了模 30 的互素的余数概念，总共有多少？这就导致欧拉（Euler）函数，原问题也就成为整除性问题领域的一部分。

由此可以得出一个教训，即涉及教学法的问题不应该太简单、太特殊地形成，也不应该太孤立地阐述。

第八章
数学的严谨性

庞加莱（*H. Poincare*）曾经说过：

你是否相信逻辑学家总是按形式逻辑规则所指定的那样从一般推导特殊？因为如果用这个方法，他们永远也到不了科学的前沿阵地；科学的征服只能通过特殊情况的一般化来实现。

当数学科学变得严谨的时候，它表现出一种不可忽视的人为的特性，它忘掉了自己的历史起源：只显示出问题是如何解决的；却没有显示出问题是如何提出的，以及为什么提出的。

这说明逻辑并不充分，证明的科学并非全部科学，我认为应将直观作为一个补充部分，或者说应将直观作为逻辑的对立面，或作为矫正的方法。

严谨的层次

数学与其他的思维训练相比而言，有个有利条件，那就是对每一个陈述，你都可以确定它是对还是错。一篇数学论文的好坏，重要与否，富有独创性或是微不足道，这些都不容易确定，但是毫无疑问一定能知道它是对还是错。物理就很难确定，除非这种物理实质上是数学。一个物理理论希望在现实中得到证实，

但即使未经证实也不一定是错的,也许只是适用范围较小。除数学以外的所有科学,有用与否的标准经常与真理的标准有关,但实际上无人真正知道如何来掌握它。而只有数学可以强加上一个有力的演绎结构,从而在数学中不仅可以确定结果是否正确,而且甚至——或者说实际上仅仅是——确定结果是否已经正确地建立起来。这就是所谓数学的严谨性,也是数学的度量标准,教数学也必须用这个标准。

谁来判断所教的数学是否严谨?教师。当然,教师也许可以用红墨水。但学生不能,他必须首先学会什么是严谨性。用不恰当的比喻,就像用电刺激一个老鼠,听到铃响就跳过障碍一样。教师并非任意使用红墨水,而是按照适合于学生的规律,因为学生也是人类,我们要借助于红墨水来提高他们的效率。我以前的一位学生第一次给学生上课时,学生问他,代数式的项从等号一边移向另一边时要改变符号,这是否也是他的规则,因为原来的教师是这样规定的。学生总是要询问新教师的规则是什么——对于数学教师也同样如此。

以红墨水作为教数学的严谨性的手段只能适用于最低层次的学生。对人类而言,除了操练还有教育这一更有效的手段,教育的特点之一就是自由。毫无疑

问，学生不可能用其他方式，只有通过再创造来学习数学的严谨性，而且还有不同的层次。严谨性可以具体做出来，但却不必知道它是什么；严谨性也可以用于单独讨论的一个有意识的准则；最后还存在一种全局性的严谨性概念，以便应用于作为一个整体的数学。

由于各方而的原因造成对严谨性的评价有许多分歧，很多人都未能正确掌握，因而做起来没有想象的那么容易。从历史上看，在数学家的头脑中，数学的严谨性也并不相同，只要不是闭眼不看事实，人们都会同意，情况至今仍然未变。直到一个世纪以前，人们还是直观地用无穷小概念进行运算，它工作得很出色，因为它是直观的；随后人们对此提出的批评日益尖锐，于是大家转而相信必须用 ε。到现在 ε 又失去了地盘，我们期望一、二十年后会有“伟大的发现”，即真正理解了一个世纪前的无穷小方法是完全严谨的，因为微分算法早已现代化了。

当我在大学学习时，严谨的微积分课程开始于一年级的数论基础：自然数、整数、有理数和实数。今天它却开始于一个公理化的定义，实数系是具有某些性质的一个有序域或拓扑域。四十年前你可能会被一句话问瘪：“你怎么知道存在这样一个域?” 这个

问题现在就可以回答:“如果你从整数或集合出发,你怎么能肯定它们一定存在呢?”当然,在内容较深的课程中,“存在性证明”(注意,只是一个相对的存在性证明)可以被加进去,但即使这样安排也只是出于一种有意识的考虑教学的选择。更为惊人的是当今的教科书作者,显然由于考虑到教材的精确性,试图将原先出于教学法的理由而推迟到大学高年级的课程——自然数、整数、有理数与实数及其存在性证明的形式理论——放到中学来教。为了忠实于体系,必须使之严谨,因而你必须回到整数,甚至从集合开始。但如认为这是严谨性的顶峰,那就错了,它只是一顶旧帽子,一点也不现代化。真正的现代数学家会告知那些革新家,整数比实数更成问题,而集合也比整数更成问题。从某种意义看,试图在中学阶段教形式化的数的理论,从数学与教学法两方面来说都是失败的,因为很难使任何人信服。

这只是顺便提到。其实与教学法真正有关的是另一个问题,就是学生是否能理解为什么要严谨就必须由实数归约至有理数,由有理数归约至整数,由整数归约至自然数,并且由自然数归约至集合,或者说为什么要严谨就不容许回避这些。只要你无法向学生解

释这个决定的含义,而将这个理论强加给学生就是不公平的,因为没有人需要这个理论。

当代有些人相信,除了公理化体系以外,没有严谨的数学。但也没有理由就此停留在公理体系上。进一步的要求是完全形式化,即通过与现实割断一切联系的语言去沟通。这样就更为自命不凡,事实上,公理化假设中已经排除了应当教给非数学家的大量数学。那些提倡在中学教公理系统的人,也知道这个无可否认的事实,也容许非公理化的数学必须当作所谓的经验数学来教,因为这是不可缺少的,但同时又想将它与所谓严谨的数学割断关系。这是我们早就指出的数学的两重性,有两种数学的教义,一种是为神提供的,而另一种是为公牛提供的。经验的数学即为自由发现的数学,比那些为教师或教科书作者强加的,局限于公理范围的数学更为重要,没有理由说它是不严谨的,严谨性有层次,每一个题材存在着适合它的严谨性层次;学生应该通过这些层次而获得他们的严谨性。数学家也应根据不同的严谨性层次进行运算;只有瞎子才会断言只存在一种严谨性。

一个 6 岁的儿童用手指或用计算器算出 $8+5$,这也许不是数学,但在那个层次,这是一个严格的证明。当他长大后,根据严谨性的要求,$8+5$ 必须分解成

$8+2+3$ 来计算，因为在这个层次有一个隐含的规则，那就是加法表只用于 10 以内，即 $a+b=c$，其中，$1 \leqslant a<10, 1 \leqslant b<10, 2 \leqslant c<10$。稍迟一点，就可以直接利用 $8+5=13$，不必再分解，这也是严谨的，因为这时加法表可用于 20 以内，即即 $a+b=c$，其中，$1 \leqslant a<10, 1 \leqslant b<10, 2 \leqslant c<10$。这里，教师与学生都是严格地按照一些无意识的规则在做游戏。这些规则并非有人特别发明，是参加者相互交流而形成的，也没有人（包括教师在内）能将其明确地阐述。一旦学生拒绝继续进行老的游戏，就自然地从一个规则体系转到下一个，但这种转换是不连续的。

前面提到的我儿子的论点（她不是一个女孩吗?）是不严谨的，当然解答也是错的，即使玛丽离开商店时剩下 75 分而不是 50 分，这个回答也仍然是不严谨的，因为有些女孩并不喜欢玩偶。此外，还有另一意义下的不严谨，那是它违反了这类问题中所隐含的规则，就是人的名字是无关紧要的，那个孩子可以不叫玛丽而叫约翰。（这也不是绝对的；到较高层次，问题涉及现实的详细情况，名字可能就是很本质的。）

局部的组织

如果学生发现，用圆的半径沿圆周量6次正好可以形成一个正六边形，并且指出等边三角形的角是60°，以此来解释这一经验，那么这是严谨的。可是对于有教养的数学家而言，以此作为论据当然令人吃惊。实际上，在这个论据中隐含着多少先决条件？要达到这个结果需要涉及到多少公理？能否根据欧几里得（Euclid）、希尔伯特（Hilbert）或线性代数来实现？无论从这个体系或那个体系，要得到这个结果，需要经过漫长的道路，学生必须知道这一事实，但是如果将公理体系强加给学生，他就永远不会知道。从教学法观点看，这样做是个错误的过程。严谨性的任务是使人信服，可是现成的数学从来也不能令人信服。要在保证严谨性的条件下取得进展，第一步就是要怀疑人们当时相信的严谨性，没有这个怀疑就学不到什么东西，只能听任其他人来规定严谨性的新标准。

当然像正六边形这类问题学生应该问自己："我实际上作了什么预先假定？"如果他反复地提出这个问题，最终会走入歧途，出现循环论证。我们知道这个问题，但学生却并不知道，必须让他经历这个过程，没有这种体会，他就无法掌握公理体系的意义。

直到那时他才能运用所谓一个领域的局部组织。这是一个重要的概念，特别是为了要从教学法角度来理解几何教学。几何概念与关系总是分析到某个任意的界限，或者说到达这样一点，似乎能用肉眼分辨出什么是概念的含义，以及能确定命题是否成立。这是经验空间几何中每个人的推理方式；绝对不是从遥远而不可捉摸的公理出发，而是根据模糊、变动但又能假定正确的事实。于是领域被组织成或大或小的片断，而不是一个整体。在物理中以及任何用到数学的领域中都是这样做的。

逻辑的严谨性

没有理由认为上述过程是不严谨的。局部的组织有它自己的严谨性。比如，辨别一个定理与其逆定理，什么是循环论证，“必要”与“充分”之间的区别，或是存在性与普遍性之间的区别——这在局部组织中就像在整体组织中一样清楚。我甚至认为，严谨性的某些侧面在做出来的数学中要比在现成的数学中更为清楚，特别能理解什么是相关的，什么是不相关的。在现成的数学中，“如果一个三角形有四个顶点，它是等边的”这样一个陈述是真的，然而在作为活动的数学中，这却是荒谬的。在现成的数学中，为什么

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 成立（如果允许提任何问题），可以回答“因为地球是圆的”，这是由于逻辑学家告诉我们，只要 q 真，那么 $p \to q$ 就真。操作性的数学培养不同的严谨性概念：对“为什么”的回答，必须是相关的，那才是严谨的。因此形式逻辑规则甚至不能告诉我们什么是严谨性。在形式逻辑的结构中无法回答下列问题，诸如“为什么你这样下定义？”或是“你能借助那个来证明这个吗？”或是“以前你用过这个方法吗？”然而应该再三强调的是，这些问题就像计算一个整数或是证明一个公式一样，确实是数学，但在所有现成的数学中却很容易忘记。要回答这类问题要求一种不同的严谨性，对这种严谨性的含义至今还没有人试图系统地阐述。因为对操作科学的逻辑，全人类都处于最低层次。对此我并不遗憾，正好相反，这可以使我们不会按照现成的数学的逻辑来教做出来的数学的逻辑，但是我们应该处处认清楚这也是数学。

使数学脱离现实

讨论中有人向我提出抗议说：“最后必须让学生知道数学与现实世界之间有着清晰而严格的区别”。我的回答是：“你是对的，但也是错的。如果你目的在于教数学的严谨性，那是对的，但如果你是为教不相关

的数学作辩护,那就是错的。如果你强调学习,那是对的,但如果你提倡教现成的公理系,那又是错的"。

学生一开始学计算(我是指开始学那些不相联系的算术时),就已将数学理论与现实世界分开。当然这是需要训练的。但在操练过程中,学生有时可以忘记现实世界中7是由七个单位组成的。学生要学会将数学放入一个括号内,以便使它得以安全运转,唯恐接触现实而损坏。也值得花时间去理解确实存在真理它既不依赖于气候,也不决定于好的祝愿,幸运的是学生同时也学会了去掉保护纯数学的括号,用数学来解决日常生活中的算术问题,用数学来理解计算机的工作方式。

我的反对者们回答说——这不是我们的意思。我们想要让学生最终应该学习一种公理化的理论,它是通过防水舱与现实世界隔离的。我会问——为什么?数学理论与现实世界的分离应该在较早阶段通过简单例子来体会,这比以后用高度复杂的例子要更好一些。但他们回答说——简单例子比如整数,它与现实世界的联系太密切;不能脱离每周七天或是七个矮人。可我的答复是:难道集合、映射与逻辑连接词和现实世界分离会更容易吗?

确实学生应该学会将数学放入现实世界的括号

内——这是数学严谨性的实质——但是他也应该知道,相信防水括号的存在只是一种幻想,因为否则的话,他就不会去考虑如何改进括号的防水性能。我想指出,通过本国语言形成的公理系统并非是严谨性的顶峰;因为本国语不像吸墨水纸那样可以防水。然而,没有人试图将完全形式的数学带进教室。再则,做出来的数学不在括号内,也不能放进括号内,而且只要某些事情必须用限制在括号内的数学来完成,那括号也必然会分解,而这点也是学生应当知道的。

我们的学生喜欢它——这才是回答。他们习惯于公理体系而不喜欢其他东西。他们反对半严谨性,他们喜欢在毫无疑问的体系内活动,“是”就是“是”,“否”就是“否”。我说——那是你自己的过错。考虑一下你是怎么做的!你的一百个学生中也许有一个将成为数学家,九十九个只是用数学,他们所在的世界没有体系,却有的是各种疑问,而且很少有清楚的“是”或“否”。是你以假象将学生引入歧途。难道学生真的喜欢那些无余数的长除法、难缠的分数与机械的求微吗?那是因为你教给他们的。教育可以教出真正的热爱。

一个问题

电话铃响,我搁下我的笔。昨晚在一群轻松愉快的伙伴中我提出了一个问题。打电话者是在场者之一。他已经解决了那个问题。问题是这样的:

在一个有限定向图(一个“格”)中,给定了一个最高的结点和一个最低的结点,两者不重合。两人玩一种游戏,轮流将棋子放在图的结点上。如果一个结点被占领了,所有较低的结点(根据定向)都禁止再放棋子。谁被迫在最高结点上放棋子,谁就输。

证明先开始的人有一种策略可以保证赢。

昨晚我提出问题时,有人问我什么是定向图,另一个人问“禁止”是什么意思。但没有人问“最高最低”、“游戏”、“轮流”是什么意思,也不问“开始”、“放”,“赢”和“输”是什么意思,更不问赢的策略又是什么。然而,这里没有括号内的问题。我们可以用任何真实的图,真的来玩游戏,难道我们不能吗?事实上,如果我们要解这个问题,我们是在玩游戏中解决,是生活在游戏情境之中。要解这个问题,没有公理系能帮助我们,也不能加括号。恰好相反,只有在现实世界中我们才能理解它。你自然也可以如此严密地解

这个问题,使之成为能揭示数学的严谨性是什么的最令人信服的例子之一。

如果有哪位教师说这是他的学生所喜爱的问题,那就请来电话告诉我。

第九章
教学

理论家的权威

大多数教育家将他们的哲学系统地阐述为各种要求。他们习惯于告诉其他人应该如何教。其中有些人可能也演示一下，应该怎么做。早自17世纪以来，有些人巡回旅行，通过他们的示范博得了大家的赞美。他们以各种理论补充其实践。但是我们常常不知道两者该如何配合。不管情况如何，当然无人能否认他们是有才能的人。但就凭这一点，难道他们就有权规定别人应该如何进行教学吗？

总之，教育家是产生了一些影响，然而也许还不够。我们要问这种影响究竟有多大？是否没有限制？首先是在理解方面的限制：对他们的理解有多深？其次是人类本性的限制：是更鼓励教育家，还是着眼于人类的能力？第三是社会的限制：他们追求的教育在所生存的社会中是否可能实现？

用传统的术语来讲，这是“理想与现实”这一论题

的许多变种之一。只是不要忘记理想也是现实，不过是比同代人看得更远一点的现实。

我没有足够的根据来规定其他人的教学方法。在中学教室里我不是作为教师，而是作为学生和观众出现。如何教大学生，已给我带来了很大困难——但在这方面我倒是学到了不少。其实，我最长的经历与最大的困难是教我自己这个最糟的学生。然而，如果有人说苏格拉底（Socrates）方法或再创造方法是不现实的，也是不可能的，那我可以保证，我曾亲眼看到这些方法的使用，我只是对实际的经验加了点逻辑分析。我也曾在教室里和教材中看到如何组织一个领域的例子，当然在推广这个观点之前，对教材作更多的分析是必不可少的。

顺便说一下，我并不认为本书的宗旨以及我在教学理论中提倡的要点就是，我应该为实际教育工作者规定教学方法。当然，我的哲学仍然是与以违反教学理论的方式来影响中学教学的任何企图作斗争。特别反对纯粹由内容决定的教学，以及所有的教条主义观点，它们忽视了数学教学的心理学前提及社会内涵。这些教条主义的影响常常是由大学教授的本性所造成的，他们倾向于将中学数学看成是有关的题材内容，看作是一个体系。有时候甚至中学教师也会陷入

于题材之中，从而越来越被教材所俘虏。大学教师所作的有关中学数学的讲座通常也只限于题材内容，而不敢涉及教学的可能性；经常无目的地、简单地通过题材的选择与表示来选择教学法，即喜欢教现成的、不相关的数学，而反对教学生可以应用的数学。如果由中学教师来编写教材，也许可以发挥这方面的影响；前面我曾解释过，在编写教材过程中，教学法是如何被扼杀的。

教条主义如何影响我们的工作，可以从历史上的例子来说明。如果一位权威宣称，对某件事的这一种处理方式是严谨的，而另一种方式则是马虎的，那就可能对教学起了决定性的影响，也不管对此问题是否真正理解。例如，有一位权威发现了欧几里得（Euclid）的第一个合同定理的证明不严密（实际上是完全正确的），可是为了不想让自己丢脸，没有人敢去触动这个定理，或者用任何其他方式去介绍它。有位大学教师对汉克（Hankel）的代数定律持久性作了一个理解错误的注解以后，就无人再敢不严格地扩展数的概念；只是将代数定律作为不很明确的公设来介绍。在德国，对克莱因（Klein）思想的不加考虑的抄袭，阻碍了许多合理的发展。我记得荷兰在19世纪30年代也曾发生过类似的事情。1937年荷兰高中数学课

程进行改革；这次改革是少数教师理想主义的表现，他们简单地依赖数学演绎的强制力量，作为教学法的自动启动的动因，认为不需要任何教育学和教学法的论证，也不需要任何社会背景来验证他们的建议。坦率地说，那些报告中所鼓吹的计划如果不说是异想天开至少也是不现实的。几十年的教学实践证明了这一点，但是当时却几乎无人敢反对这些观念。少数例外之一，是伟大的范·戴齐格（D. van Dantzig），他以十分令人信服的论据与这种教学哲学作斗争，这种教学哲学不考虑心理条件与社会条件，也不考虑对数学教学的影响。然而，范·戴齐格的争论并未能使谁抛弃那些理想主义的理论。好的教师有他们自己的标准，可能认为自己正在实现这一计划，即使他们的标准与所要实现的计划并不很匹配，但他们完全有权相信自己正在执行。但是大多数教师不愿意承认自己不能实现这一不现实的计划，因为该计划显然已经赢得了普遍的同意。1937 年改革的基本观念不是被驳倒，而是被简单地背叛了。少数教科书作者想简单地实现一小部分的理想主义计划，但只有很少的学校使用他们的书。另一批作者并不理解计划的真正含义，或者即使理解的话，在他们的教科书中对这个宏伟的计划也只是口头上说得好听。计划内所包含的一些课题，原来

考虑能有助于对数学的深刻理解,现在被教科书作者转换成必教与必学的题材,但却不要求理解,甚至简单地被删掉。

我叙述这段历史不只是揭示计划与课程的不可靠性,而且因为这种情况看起来很典型,所以我担心历史会重演。当时被称为“严谨”与“粗糙”的角色,如今被称为“现代”与“过时”有时看起来就像女式时装店那样。实际上真的发生过这种事,1955 年被某个权威所否定的,谁知到了 1965 年却成了最现代的式样。照样也没人反对。但是这表明对数学的题材与方法需要经常进行再思,某些东西是否是新的并不是决定教学的准则。当然没有人愿意落后,也没有教师愿意承认,自己不能按照大学教授或教科书作者规定的那样严密地教。其实,我担心的是在中学教学中鼓吹“现代”数学和“现代”的严谨性,这不仅反映了对它们的重视,往往也预兆着挫折:人们害怕权威的批评的眼光,人们担心,如果谁承认对极限概念的处理稍微粗糙了一些,或是谁认为几何公理系不可能在九年级教,那就会被人视为落后或是过时。事实上,我不能理解,为什么中学教师几乎从来也不抗议,甚至从不反对所有的证据都表明那只是幻想的课题。难道他们认为不值

得这样做？或是他们真以为有些事情就像权威所说的那样简单，怀疑这一点是愚蠢的？

教学的实践

如果将理论性的、纲领性的文献排除在外，那就不容易了解教师实际上是如何教的。大部分材料由以下几方面组成：

（1）课程与计划，

（2）教科书与大纲，

（3）考卷，

（4）理论性的教学研究，

（5）经验性的教学研究。

课程大多数比较模糊，并且通常容许作多种解释。计划一般比较详细，但其主要特征是制定目的与标准，它们不管这些目的能否达到，或是这些标准是否与实际教育相匹配。前面提到的报告，它导致了1937年荷兰高中的数学课程改革，就是一个引人注目的例子；这次改革仅仅是在纸面上进行，因为它的基本观念是非常不现实的。

能否由教科书来判断教学呢？无论哪里的教科书都有好有坏。哪一种最有影响？通常好的教科书只用于少量班级，即使是否定的征兆也不能证明什么。再

说我也不相信数学教育真的像所用的教科书那么糟。教育作为一种人类活动，它是那么复杂，不能由教科书作全面的反映。一本好的教科书其特征是，作者对题材进行逻辑的分析，根据他的教学理论（或明或暗的）对题材作深思熟虑的安排，某些情况下甚至还加上一点评论。如果一位教师拿到这样一本书，他的反应可能具有两重性。或者他不理解该书的基本教学观念，他只是注意到该书的安排不同于自己过去所学的，也不符合他的习惯，于是他就直截了当地说这本书是混乱的。或者他倒是理解该书的基本教学理论，但是却并不赞成。无论是哪种情况，他都有很大的可能去求助于那些毫无特色的教科书，这种书在编写时，既不事先对题材作任何的分析，也没有任何教学法的背景，只是以任意方式罗列一下问题的目录，然后为了问心无愧而将零星的理论片断拼凑在一起。一位普通教师用这类教科书，再补充上他自己的理论来进行教学，完全有可能超过一位好教师的教学，如果那位好的教师只是局限于一本有特色的教科书，但书的特色又不能与他自身的教学特色相配合的话。

实际教学的第三个信息来源是考卷，假定有谁非常了解准备考试时的操练特色，也熟悉评估结果的技巧，那就知道这是一个很有价值的信息源。一个外国

人如果单看我们的立体几何考试题,或是看到三种外国语的翻译考卷,他会真的相信我们的学生都是几何或语言的天才,除非到他发现了,几何成绩是进行了高度特殊化训练的结果,而语言成绩则是根据了相当低标准评估的结果。

理论性的教学研究经常具有这种特点,就是告诉其他人必须如何教。然而这只是计划,经常是实现不了的。提出这个观念的人根据自己的实际教学经验,对它坚信不疑,并声称已经证明他的方法是成功的,但其他人可能怀疑,他的成功是否更多地由于他的个人品质,而并非方法本身。经验性的教学研究经常由于试验情境的不现实而受到损害。试验的班级特别可疑,是否会在不同于中学一般情况的特殊条件下发生。教育心理学家的实验室甚至缺少适当的、可以认为具有代表性的实验环境。数学课的现场实录在教学法研究中仍是卓越的成就。

我在中学访问的经历中,发现两个极端:一方面是高度实现了我所谓的再创造教学,另一方面则是权威的教学面对被动的听众,那是我自己做学生时从未见到过的;甚至大学的情况也不是经常如此糟糕。我也必须承认,在最自命不凡的现代数学与最陈旧的教学法之间存在一个很高的正相关。

这可能是由于偶然性。什么是两个极端之间的中间状态,也许并不引人注目,但我相信一定存在许多中间状态。因为如我早先解释的,教学的情况也许要比教科书好一些。

教学的组织

要实现真正的现代数学教育,必须从根本不同的方式组织教学,否则是不可能的。在传统的课堂里,再创造方法不可能得到自由的发展。它要求有个实验室,学生可以在那儿个别活动或是小组活动,教师可以观察学生的活动,以便必要时可以介入。从另一个角度看,课堂也应被取消:教师不应该单独教,而是应该组成 2 ~ 3 人的小组,互相观摩,互相学习。这意味着应该组成混合班,相同年龄的或者是不同年龄的。当然,实验室工作还应结合教师与学生的大组进行的大型对话以作为补充。

已经有这样的教学材料可以代替教科书用于上述这类教学中。甚至还可以结合书本进行再创造教学,已存在着这种方法的萌芽。然而还可以想象一个更为高级的阶段:循序渐进的再创造教学。

欧洲各国今天大约有 1% 的人从事教育工作。以后几十年内教育事业将成倍或三倍地增长,每位教师所

面对的学生数,也许今天还很少,到时也会大量增加。这意味着如果还是采用目前的教学方法,那么从事教育工作的人数将增长到 5 ~ 10 倍。这就表明我们目前的方法必然要失败。由个别教师对年龄较大的层次进行教学的做法很快就会像手抄本一样地过时。当代的浪漫而激进的青年一代要求更为个性化的教学,我们应该以此为重点。要让他们像数学家那样以同样的方式阅读文献,自由地再创造,为此我们应该教育我们的青少年,使之具备正确的态度,并学会正确的方法,会在学习过程中进行循序渐进的再创造。

第十章
数学教师

“征求游泳教师，他本人必须能游泳”，刊登这一招聘启事的人，显然希望保证那位游泳教师能够教游泳。但是由于某些理由，他却要求应征者不仅会教别人，而且自己应该能实践。除此以外，还要求教师掌握游泳的救援工作，训练急救，要懂得一点手臂与腿的肌肉的解剖学、生理学知识，还要学习游泳的历史——我不知道今天训练游泳教师要教些什么。

根据美国的一位成功者自传——我不记得他是否成为教授或是百万富翁，或者两者兼而有之——我只记得一件轶事。当他年轻时，他没有钱，有个聘请捷克语教师的广告，他去应聘了。实际上他根本连一个捷克字也不知道，但这没有问题。他用一半的钱自己先去学，经常是他作为学生时所听的课比他作为教师时要教的课提前一节。教师只要比他所教的题材多掌握一节课，就可以达到目的了。正如有人评论说，他们在昨天学的内容，今天就会教，这是多么短的消化道！

教的人应该知道得比他所教的内容更多，而且不

应该恰好在他要教的时候才知道，还必须稍微早一点。大家都同意这一点。但是应该“多”多少？又需要“早”多少？对此，国内外专家、外行均无定论。

这个问题不仅在教师培训中，在教学中也到处存在。一个巴布亚的儿童从他父母那儿学习的，恰好是他生活中必需的知识，因为他自己的生活与他父母的生活没有太大的差别。事实上，在发达国家与发展中国家之间存在着很大的差别，我们的儿童与青少年必须学习比他们真正需要的更多的知识。这个超额部分总是由所学事物的形式价值所证实，在数学中则是作为一种思维的训练而被证实，但是，现在让我们不要停留在这一点上。

教师关于他所教的专业究竟应该知道些什么？最低限度他必须知道所要教的内容。如果这是一个唯一的条件的话，那么一个聪明的孩子只要在高中法语课或者数学课上获得高分，他就可以教中学法语课或数学课，就像前面提到的具有短的肠子的人一样，我是说就题材内容而言他可以教，当然真的要教他还应该知道如何教，然而这一点可能在大学里也没有真正教会他们。

法语比数学更为明显，只就有关题材进行培训显然是不够的。就像作为游泳教师要求能游泳，作为法

语教师应该希望他能讲,能读、能写。但是这些能力并不属于中学外语教学的目的,因而也不能由法语的高分来判定。作为一种现代语言,其必备的严格极限自然也高出了所教的内容。幸运的是我们现在还不需要研究,除这个最低极限外,还应该加上多少梵文、拉丁文、历史文法与文献。

数学就不是如此简单。一个学生法语期终考试成绩为 A, 他可能熟知许多词汇, 因而能不用词典翻译一本未见过的教材。但对数学中的这个成绩 A, 那是表示一个清醒的头脑,能判断中学数学中的一个论据是否有效,也能设置问题加以解决和分类。反正, 自有数学考试以来, 教师就要求应考者知道更多的数学, 甚至比以后要教的还要多。这个“多”不仅表示一种渐进的区别,而且还是中学数学与高等数学之间的质的区别。前面我们提到过两种数学的哲学,其中一个是另一个的翻版,但却以美丽的神话形式出现。克莱因(F.Klein)创造了“双重忘记”这一术语,第一次进入大学时忘记中学数学,随后回到中学当教师又忘记高等数学。自克莱因之后直到不多几年前,这一裂缝在继续加宽。长期以来中学数学很少变化,而大学的某些教师甚至渴望在学生回中学当教师以前,将他们领向永远在变动的研究前沿。

大学学习时期的作用是什么?在两次忘记之间的括号内包含着什么?当然,有合适的论据可以说明,为什么中学不应该留给那些"有短的消化道的人们"来支配。我们有充分的理由认为,在学数学与教数学之间必然存在一个区间,而如果想填满这个区间,只有服从一个并不陌生的要求,那就是认真研究数学。即使根据这些先决条件,也还是无法知道这个"消化"时期应该有多长,4 年还是 8 年。当社会地位升高的梯子比现在更窄的时候,严峻的竞争条件也许有一些作用。考试的权衡在一定程度上决定于社会的供求关系。

有时在口述或书写的教材中,最重要的部分包含在括号之中。这也许同样可用于大学的学习,它相当于教师生涯中的括号。它应该穿过括号而起作用。那么未来的教师在大学里学些什么是否有关系呢?当然有关系。但是括号内究竟应该包含什么呢?或者我们可以不管它?

前几年我们努力补上中学数学与大学数学之间的"第一次忘记"的缺口,中学数学大跨步地赶上了一个世纪的积压内容。在数学及其应用方面,要使从中学跨入大学就像在中学里升一个年级一样。当然要取得这样的胜利还必须实现许多条件予以保证。

这个改革有一个引人注目的特性,即教师培训应该满足一个重要的准则:即使新的计划与他自己当中学生时流行的计划有巨大的差别,教师也应该能教。根据荷兰的经验,高中教师数学培训提高班的基础课程,过去大致达到了这个准则。然而,其他中学教师的初级培训就很难说,更不用提小学教师了。

很显然,这个准则意味着,每一种训练必须包含其自身内部对快速变化的反应的敏感性,这不仅适用子数学教师的培训,实际上也适用于全社会。根据美国报纸的估计,一个大学研究生毕业时,现在可平均服务于五种专业,其中的三种目前还不存在。(我无法验证这是否确实,或者我记住的数据是否正确。)

为什么对中学数学与大学数学之间的缺口的弥补工作拖延了这么久?为什么半个世纪以前或者甚至更早提出的要求至今仍未实现?随着数学的社会重要性日益增长,沟通裂缝的迫切要求也日益强烈。但是数学本身也在发展。数学在各个方面都在发展,有的愈来愈远离中学数学,但也有更接近中学数学的。我曾多次指出,重建数学常常意味着选择它的最基本的概念重新进行探索,而这些概念经常是恰好位于中学数学与大学数学的裂缝面上,今天这个裂缝面已经转变

成为接触面。由于数学的发展,两边正在互相靠拢,裂缝也正在填满。

自从克莱因弥补裂缝的企图夭折以来,事情有了什么变化,只要通过对他的“高观点下的初等数学”作一分析就可以清楚。有许多初等数学的现象只有在非初等的理论结构内才能深刻地理解。克莱因的观点就想为教师日常的课堂活动提供一个科学的背景。无疑这样做可以缓和一下裂缝。但是克莱因的背景对教师而言,只能作为周末的风景观赏,却不能作为间接的手段进入教室。因此,不能影响中学数学。例如,克莱因详细说明了伽罗瓦(Galois)理论是中学二次方程、三次方程求解的背景,但事实上伽罗瓦理论高踞于中学数学水平之上。如果中学数学的趋势完全颠倒,可能爱尔兰根纲领会有教学法的效果,但是这与每个人的思想相差太远,因此爱尔兰根纲领还是只能作为一种背景科学。

今天谁想恢复克莱因的企图,去教“高观点下的初等数学”,就必须从接近中学数学的较低水平做起。域与群这类干巴巴的概念已经借助于抽象代数开始渗入中学数学,它们是如此接近于教学,因而完全可以包括进去;通过这一新的抽象转向,用以引入和解释概念的例子也可以变得更为简单,像伽罗瓦理论这样

深刻的应用也不需要创造更高的科学背景，一些特有的概念如公理系统、域和集合论，克莱因甚至还未提到。看来最基础的东西要接近于最初等的东西这是一种顿悟，它需要半个世纪才能成熟。

当某个时期我们对数学结构的理解有很多长进的时候，就可以影响中学数学，这时我们就可以着手处理另一个问题，那就是数学为什么只借助粗糙的经验方法来应用。对这个问题没有回答，因为从未有人认真地考虑过它。所以我们可以来回答，如何教数学的应用，只是多少有些犹豫不决，也有不少保留。

根据前面的考虑，我曾经想形成数学教师培训的最低要求，诸如：

(1) 使教师能自信地使用现代数学的基本方法，

(2) 提供为理解现代数学结构所必需的基本知识，

(3) 发展有关如何应用数学的某些概念，

(4) 对如何进行数学研究作初步介绍。

稍微作些解释也许更好。(2) 两点我只限于基本的。这就是说即使包含非基本的，也只是为了引导到基本的上面或是有助于说明。第 (1) 点中我强调了活动的自信心，而第 (2) 点中我省略了这条。我曾多次解释过，为什么第 (3) 点是必不可少的；但我在第 (3) 点中的阐述方式是希望能避免将教师培训成

为应用数学家。第（3）点中明显应包含计算机数学。我怀疑，能否通过副修课的学习使未来的教师实现第（3）点；但无论如何副修课的培训只应该对那些已经精通了副修课中有关的数学而且还愿意继续使用的人进行。我加上第（4）点是想不仅使教师对领域的整体组织有个概念，而且也希望他们能参加进去。这个可以通过讨论班来实现。

这是对各类中等教育的数学教师的最低计划，当然对中学高年级教师还有更高的要求。以这个计划为基础，教师培训的时间会比现在减少。这不一定是个损失。我不赞成对缩短学习的鼓吹。限制课程不是缩短学习的好办法。学生可以在同样时间内少学一些，至少荷兰就是这样做的。我要打破现在的一种幻想，似乎通过考试就打开了通向学术生涯的道路，学生已经学会他一生足够使用的知识。我认为学习应该延续一个比较长的时期：第一次短期培训，以后常规的重复补充，以更新知识并适应新的发展。以后我再介绍过去几年内流传很广的这类课程的一些特性。

迄今为止，我还没有考虑数学教师的教学法培训。显然教也是属于人们通过做而学习的一种活动，教学法显然也是，但如果停留在这一最低层次那是不合适的。这就是说，在大学里的初步学习只能获得一定程

度上的教学法训练。如果背离夸美纽斯（Comenius）的理论，我们今天竭力主张对这些理论也应该再创造（所以当然不可能在实践之前），于是一位教师在开始教学工作以前只要学少量理论，主要通过自己的和别人的例子来学习，分析人们准备进行、正在进行与已经进行的教学。未来的教师应该学习思想实验的方法以及如何转述，这是为教师专业中联系教学实践的理论活动作准备，根据我的经验，没有多少教师以自己与别人的教学作为研究对象。谈到这种活动时，大多数人都相当惊讶。

除了专业文献以外，许多国家的教师继续培训工作直到几年以前还是局限于听不定期的讲座，大多是有关科学题材的，自然也有一些零零落落的讨论班。最初，教师作为一个听众参加革新运动；听到有关新题材所作的革命性的讲解，他们感到困惑与害怕；可是最深入教师心中的教学法却几乎不讨论。不久的将来必须考虑教师再培训的新计划。这将导致许多国家必须更新课程。开始是作为应急措施而设计的，接着也许进而获得一个常设的地位；这恰是我解释的为什么教师培训的份量应该适当，那是它本身发展的需要。

这些课程的特性有很大变化。有关题材方面就有

两个极端的例子：一种是正好教给教师他几年内要教的内容——结局就是他恰好会教——另一种则是为他提供作为背景的科学，他根本不能用于教学。这类课程发展的方法趋向于让参加者有更大的活动余地，常见的就是讨论班形式。但各国之间差别很大。有些国家或地区不可能组织讨论班，因为“有着良好教养的人们”认为那是属于政治家的事。

我可以更详细地谈到我们荷兰自己的经验。几年来已经组织了一些合适的课程，一年两周；课程重点环绕实际的练习，即进行问题解决的个别活动。全国有一半的高中教师参加这些课程；大多数都能主动地参与实际练习。较低层次的其他教师参加夜校；结果也令人满意。对这两种培训都开设教学法课程。在这些课程中，也不是告诉教师应该教什么，应该如何教。这些课程的任务是对教学法经验作分析，进行小组讨论。如果发现在这种抽象基础上进行的讨论太混乱，那就准备好课堂教学的音像资料供讨论参考。

最大的问题仍然是小学教师（我国小学有六年）。因为数学不是小学教师培训的必修课，即使他最终成绩不及格，还会容许他去教小学的算术与数学，或是有时还超过这个水平，因为他可以自夸为懂得有关一元线性方程组以及毕达哥拉斯（Pythagoras）定理的

数值应用这些方面的数学。小学教师的人数大约是高中教师人数的 50 倍。虽然他们的再培训问题看起来很难解决，我们还是准备提出一个大规模课题以千方百计地解决问题。

上述课程都是在现代化数学教育的结构下设置的。1970 年荷兰教育部决定，将数学题材与教师再培训的发展工作提高到作为一个常设机构的地位。

第十一章

数的概念——客观的形成途径

以方法论,发生论和教学论的观点看,数在内容和形式上都存在着许多不同方面的概念。例如,从内容上看,数就有自然数、整数、实数和复数,这几类数通过嵌入关系而互相联系。因此,片面地谈论“数的概念”就会产生误解。本章将以方法论的观点比较系统地探讨计数的概念的形成,例如,数是怎样形成的?如何扩张及限制它的范围和运算?我们也要提到发生论的观点。后面几章则不是很系统地讨论数的概念的内容。

数的概念的形成可以粗略地分成以下几种:计数的数、数量的数、度量的数和计算的数。这里先作一些简单的说明。

计数的数　　自然数的序列是无穷无尽的。对儿童学习来说,计数的最初几步就像他们学习颜色和字母名称一样艰难,因为找不到可以类比的东西。而后,他们突然地领会了整个无穷序列。这是一个概念性的突破。计数的数也是计算活动中不可替代的对象。以

后，人们感到需要往回计数，于是就产生了负数。计数的数在数学上称为序数，它通过完全归纳法和皮亚诺（Peano）公理得到形式化。其发展的顶峰就是超限序数。

数量的数　　数量的数的产生也许早于计数的数。动物尽管不会计数，但能认识小的数量。人们不依赖于计数同样也能够认识一些小的数。儿童很早就学计数了，但他们不会注意到计数能用来确定一个集合的数量。数量的数可通过集合的势或基数得到形式化，其发展的顶峰就是无限基数。

度量的数　　要度量一个量，可以像用勺子一次次地舀空装满水的容器那样，用一个单位去量那个量。这时常常要用到单位的倍数。为了方便地度量长度，人们就在直尺上预先标上单位的刻度。但对度量来说，单位的线性排列不是本质性的。例如面积可以用单位面积按不同的次序去量。如果不能完全量尽，那么就形成一个带余除法，或者是将单位等分，产生了分数。度量的数在有理数域中得到形式化，并由此通过无限过程而得到实数。不能互相度量的量是非阿基米德域所讨论的问题。

计算的数　　这是数的有关算法的一个侧面。在这里，数被理解为按照一定法则进行运算的对象。它

按公理化方法得到形式化,数是由公理定义的环或域中的元素。

计数的数

无论从历史的、发生的还是从系统的角度来看,数的序列都是数学的基石。可以说,没有数的序列就没有数学。如果某些现代的教科书持另一种观点的话,那就是作者的解释错了。实际上,对孩子们来说计数不久便成了一种理论需要。儿童的计数活动远远超出了他们的实际需要。原始人没有数的代码,但是他们会用一些标记或符号来表示数。各种语族中,从1到10的数、10的倍数、100的倍数,数的代码都相似,但是1000以上就不同了。是否是某些语族的祖先数不下去了?当时是否真有实际需要对10的更高次幂都给以名称?实际上,如果数必须写下来,那么这种需要便存在。如果仅是在算盘上作计算,就没有这种需要了。要表示出更高次幂,只须在算盘上添加几列就可以了。在绝大多数语言中,1到20的数码的读法和写法是不规则的,但在算盘上和阿拉伯数字里是很有规则的。那就是简单的进位制:1加9时出现了零,而在下一个位置上出现了1。

自古以来,就有这样一个惯例:一年级教数教到

20，二年级教到100，三年级教到数的无限序列或相近的内容。但实际上儿童早在一年级就能无限制地数数了。这实在是件大事情。在蒙台梭利（Montessori）式的学校里，或幼儿园里，儿童年龄到了某一阶段时，教师就让他们在长纸条上写数：1，2，…，10，11，…也许写到19后，儿童需要教师指点一下，到了29后，又需帮助一下。而到了39后，儿童也许就不需要教师的帮助了。一直到99，儿童会重新要求教师帮一下。有一个小女孩专心致志地埋头于这一活动。当她写到1024时，不肯再写下去了，而说“就这样继续下去”。这是很了不起的。“就这样继续下去”就是数学。它是人类过去创造了的，而对个人来说正在创造的最早的数学，它是伟大而又重要的数学，也是最深奥的数学。我之所以强调这一点，是因为许多人对此还不理解。试问：女孩发现了什么？看起来好像是在说：纸条上的数列在继续，但确切地说，应是数的记号在继续。这就是说，女孩突然发现了一条写下所有数的非常简单的原理：0后面是1，1后面是2，…，9后面是0，同时在左边添加1。它简单得足以教会儿童和机器。

但是，这个女孩会总结出这一原理吗？恐怕不会。她还没有这种数学能力。然面，她会运用它，也知道它可以无限制地进行下去。这就是说，她发现了无限。

这在数学上是一件了不起的大事。这正是数学的出发点和归宿。

计数后紧接着便是最基本的算术。加法是继续计数，减法是往回计数，这是传统的教学法中的一项基本原理。形成这项正确原理的灵感来自于数的计数这个侧面，然而它却被新数学的教学法专家忽视了。当然，我们不应把数数弄得既沉闷又琐碎。可以向前数，向后数，或是两个两个地数（2，4，6，…），或是三个三个地数（3，6，9，…），或是把一些数凑成十或几十（3 加 7 等于 10），等等。在传统的算术教科书中，这些都是要认真练习的。这些练习可以与数轴结合起来进行。它能为心算做好准备，也能为计数的算法化和笔算做好准备。

此外，单纯的计数也是一种活动。数小石子，数街道上有多少盏路灯、数一列火车有多少节车厢等，其结果得到基数。也可以数有节奏的活动，例如标出一场游戏的时间周期。门牌号码、戏院的座位号码等都是按顺序编排的。要在某个体系中数下去，就要懂得它的编排原理。数列中“就这样继续下去”的原理贯串于全部算术教学之中，无论是时间的无限，还是空间的无限，都靠这项原理去掌握。表示 $\sqrt{2}$ 时，可算到某一位小数，然后点三点，表示可以无限地计算下去。

要表示一个圆时，可将它描述为内接多边形的无穷序列，而这些多边形的边数是可以无限增加的。所有这些无限过程，从数列的形成到无穷函数列的收敛，都是想象为时间上的无穷无尽，或是看作连续不断地变化。

构造帕斯卡（*Pascal*）三角形（图 11-1）也是遵循了上述原理。每一行开始和结束均为 1，其他每一位置上的数是其左上角和右上角的两数之和，最后一行省略号的意思是“等等”。实际上，这里有一个现成的封闭的公式：上述第 n 行（行数从 0 开始）第 k 个位置上的数是 $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$，它是二项式的一个系数容易证明

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

... ...

图 11-1

其中 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$。这里同样也有三点，读者当然明白它的意思是“等等”。但这不是一个封闭的式子，它要经历一个时间的过程。这种缺点能否消除呢？这是做得到的。让我们先看下面的定义：

定义：$0!=1$，每当已经定义了 $n!$ 后，就有 $(n+1)!=(n+1)$。

这种定义看起来稍好一点，但是在定义中却有“已经定义”这样的字眼，并且“每当”两字仍使人想起其中存在一个历时的过程。因此，下面的定义看来更合适一些：

定义：$0!=1\wedge\bigwedge_{n\in N}(n+1)!=(n+1)\cdot n!$。

从严格的逻辑观点看，现在确实是一下子被定义了。上述讨论涉及到递归或是数学归纳法。它们能捕获住无限过程。这种情况就像奶粉罐头上印着一位广告女郎，而她手中正捧着一个同样的奶粉罐头，通过归纳抓住了无限。我们知道，凡是涉及自然数的命题，要证明它对所有自然数均成立，就需要用完全归纳法。完全妇纳法原理将上述省略号“⋯”，及其含意“等等”加以形式化，把无限掌握在一个小小的空间里，就像奶粉罐上的图片那样。完全归纳法原理的典型公式为：

φ：令 E 是涉及自然数的一项性质。（自然数是从 1 开始的，现在人们往往喜欢从 0 开始考虑问题）假设

$E(0)\wedge\bigwedge_{n\in N}(E(n)\rightarrow E(n+1))$，则 $\bigwedge_{n\in N}E(n)$。

即如果对数 0 具有性质 E，并且当对自然数 n 具有性

质 E 时,对它的后继 $n+1$ 也具有性质 E,那么就能断言:对一切自然数都具有性质 E。当然,性质 E 可以是各种各样的。

完全归纳法也可用另一种形式 φ' 来叙述。如果令具有性质 E 的 N 中的元素的集合 M,为则

φ': 令 $M \subset N$, $0 \in M$ 且 $\bigwedge_{n\in N}(n \in M) \to (n+1 \in M)$,则有 $M=N$。

换句话说,这个及的子集 I 就是及本身。

怎样证明 φ 或 φ' 成立呢? 实际上 $0 \in M$,由此可得 $1=0+1 \in M$,$2=1+1 \in M$,$3=2+1 \in M$,等等,即证明了 φ' 对一切自然数都成立。也就是说,要证明 φ',就必须打开小小的空间,全称量词要由时间上的归纳和“等等”来代替。

完全归纳法也可用形式 φ'' 来叙述。其方法是把 φ' 看作一个公理:

φ'': 令 N 是一个具有元素 0 和到自身的映射 f (fx 称为 x 的后继) 的集合, 其中 f 是一一映射, $fN=N\backslash\{0\}$ (即 N 中每一元素都有一个后继,并且除 0 以外的每一个元素都有一个前驱)。那么

$$(0 \in M \subset N \wedge fM \subset N) \to (M=N)$$

(即若 0 属于 M, 并且 M 中每一元素的后继也属于 M,则 M 等于 N)。

这里其实有一个极小性:N 不可能有一个真子集,其中既包含 0,又包含子集中任一元素的后继。这个要求是不可缺少的,例如,考虑这样一个集合:N 之后添加上 Z,即为:$0,1,2,\cdots,\cdots,-3',-2',-1',0',1',2',3',\cdots$ 我们可以得到一个集合 K 它满足条件:f 是一对一的后继函数,且 $fK=K\backslash\{0\}$。但它有一个真子集 N,也具有同样性质。这从本质上讲就是自然数序列的皮亚诺公理。

以上从最原始的数的概念(不包括无限)开始,到单纯地计数,到单纯地作出完令归纳法,直至自觉地认识理解,进而有意识地加以形式化,最终以其公理化形式嵌入集合论,已经形成了相当复杂的数的概念。它们反映了各种层次上不同的严谨性。但这种严谨性是数学上的,并不一定与学习过程的层次相吻合,因此,在教学中如何加以处理还有待很好地研究。

数量的数

一个集合的元素个数通常是由计数而得到,但这并不是唯一的途径。能否撇开计数而建立集合元素个数的概念呢?基数或势就是数量数的形式化。

集合的势是康托(Cantor)提出的。两个集合之间如能一一对应,则称它们等势。例如映射 $n\to 2n$ 是

整数集到偶数集上的一一映射,故整数集与偶数集等势。非等势的集也可以相互比较,如 B 可以一一映射到 A 内,而反过来则不行,就称 A 的势比 B 的势大。

康托认为,集合的势或基数是所有与它等势的集合所共有的。现在流行的说法是:集合 A 的势就是与 A 等势时所有集合的类。在势的观点下,等势集合可看作没有本质区别的。一个无限集可和它的真子集等势,这一现象曾困扰着康托以前的数学家。它可用来定义有限集:有限集是一个不能与其真子集等势的集合。空集的势为 0,仅有一个元素的集合的势为 1,两个元素的集合的势为 2,等等。势的和、积、幂的定义一般可从有限集的有关定义导出:如果 A、B 分别有 m、n 个元素,并 A、B 不交,那么并集 B 的势为 $m+n$;有序对集合 (A,B) 的势为 $m\cdot n$,而 B 到 A 内的映射集合的势为 m^n,因为对 B 的 n 个元素中的每一个元素来说,在 A 中都有 m 个可能的元素作为 B 到 A 内映射的像。同样,在有限集的情况下,势的比较可看作将通常的自然数按照其次序进行比较。这里各种运算律(交换律、结合律、分配律)的运用也是相当明确的。

势与上面所说的计数数的传统概念及其引入相比要简单得多了,并且能令人信服,在计数中,关于“有

多少”这个问题，必须通过数已知集合中元素的个数才能回答。为了比较两个集合的大小，就必须数两者。如数目相同，则它们等势；如 A 比 B 先数完，则 A 的势比 B 的势小。有必要如此复杂吗？从势的观点来看，集合是可以直接比较的。和与积也可很容易地一下子引入，而用计数方法的话，就要有一个颇为麻烦的数的过程。还有，如果用势来定义自然数，那么就可以在较早的阶段让儿童学习一些演绎的数学；如果用计数来定义，则必须等学完了完全归纳法，才能对数的概念作演绎处理，而这是相当高级的学习。

很显然，学校中应该这样来教：用势的概念引入数，即让儿童使用这些作为势的数进行运算。刚开始读书时，儿童只知道计数数。他们不知道数的意义，却能倒背如流。这时，数作为一个数量的度量，就能起到帮助儿童重新构造思想的极好作用。在较高的层次上，儿童就能够了解这种教学法所依赖的数学理论，就能有意识地通过有限集的势来构造自然数了。

关于数量数的深入讨论

当前，有一股神秘的浪潮正冲击着数学教学理论，在一些较高水平的教科书中，关于自然数的理论似乎都是从势的角度去严格展开的。我要指出：从数学角

度看,至少从通常对数学的理解看,数量数,即势,并不足以成为自然数的一个基础。

如果自然数服从一般的势的概念,人们就必须定义什么是有限势。只定义 0、1、2 或再多一些数显然是不够的,而要掌握所有的有限势,我们只能说"等等"。它的含意就是:在 n 个元素的集合上添加一个新元素,便得到 $n+1$ 个元素的集合。这样的定义是合理的,可以接受的,而且也能导出全部有限势。但遗憾的是,只有当自然数早已存在时,才可如此定义。先要假设已经知道了 N,势 n 才能简单地定义为有限集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的势,集合及本身才成为可数无限势的一种表示。

也许有人会说,他的确是用到了 N 来定义有限势,定义势为 0、1、2、⋯的集合,但只是利用了数的序列,并未用到, 中许多深奥的关系,也未用到加、乘等运算。这似乎是允许的,然而却完全错了。为了从 M 得出有限集及其性质,首先必须证明:每一个 $n(n\in N)$ 唯一地表示一个势;其次,为了定义势的运算,还必须证明:对两个有限集,它们的并、它们的元素组成的偶对的集合以及一个集合到另一集合的全体映射的集合均为有限集。要真正地做到这一切,完全归纳

法是必不可少的。那些教科书就是在这一点上存在着漏洞。

不归结为一般性的原理，只是一个接一个地引进有限势，这还是可以接受的。但要从给定的无限集 M 中取出一个可数无限集，就需要及 N 全体了。这是不可避免的，想用“等等”来代替也不行。要能这样取出，就需要用到选择原理或与它等价的原理。选择原理保证了对无限集 M 的每个有限子集 X，均可找到一个元素 x，使 $x \in M \backslash X$。更精确地说，假设 f 是 M 的有限子集的集合到 M 内的映射，使得 $fX \in M \backslash X$，那么，归纳的道路就畅通了：定义 $A_0 = \varnothing, A_{n+1} = A_n \cup \{fA_n\}$，最后得到 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，它是 M 的可数无限子集。显然，A 的构造过程还是利用了完全归纳法。

我提到过有限集的性质：它不能与其任何一个真子集等势。戴德金（Dedekind）利用它反过来定义无限集，一个集合如能与其一个真子集等势的话，该集合就是无限集。于是，困难就转到戴德金意义即通常意义的有限集上了。要证明：不与任何真子集等势的集合，就与 N 的某个子集等势，这需要一个历时的过程，要从中数出一个可数子集，否则就要用到选择原

理。戴德金的定义还包含了另一层意思,即要得到 N 那样的可数无限集,前提是先要存在某个无限集。罗素(Russel)和怀特黑德(Whitehead)的方法与之相差不大,他们按归纳方法定义有限势,同时得到 N:空集的势是 0,如果 M 的势是 m,则 $M\cup\{c\}(c\notin M)$ 的势就是 $m+1$。照这种定义,包含 0,并且有 x 就有 $x+1$ 的最小集合就是 N。但他们也无法避开这样一种假设:首先存在某个无限集。

人们可以去设想一种只有有限集的集合论,它也可以具有一些常规运算。在此理论上建立起来的数学,可以定义每一个自然数。但由于没有自然数集合,也就没有任何关于自然数的定理,也就无法概括地定义自然数的运算。如果它能称为数学的话,那它就是非常原始的数学,仅仅停留在尚未出现与无限有关的概念的水平上。

我要指出的是,那些教科书中上述方法的错误还只是次要的。他们最主要的错误是,作为教育工作者,对数学方法的要求定得太高。学生接受了由势来引入自然数的观念,他们就不会去注意一些具有本质性的定理,因为那些定理是被心照不宣地提出的,证明又被省略了,或者被随便地用“等等”来归结的。于是,自然数、完全归纳法中的精髓被抽去了。这种方法就不

是促进理解数学的方法。我承认,某一阶段年龄的儿童可能很难理解完全归纳法,但我们并没有理由要将一种很容易引起错觉的理论强加给他们。读者也许已经注意到集合论不是那么简单的,即使是那些通常认为能适应中、小学水平的内容,也有许多棘手的问题,有很多绊脚石,它们甚至对优秀的数学家来说也是障碍。我们不能不加批评地让那些毫无数学经验的学生去摹仿那些对数学家来说也会感到头痛的内容。我想规劝那些不能领会我的解释,或更确切地讲,不能重新考虑这一点的人,不要去教那种内容。我的意思不是指其太难了而不能学会。如果教师利用成绩来加以刺激,学生也是能达到要求的,问题是教师应当如何处理这些教学内容。如果他不加批判地接受了这种内容,那么,尽管他不应该去教它,他也可能去教。而如果他能作出足够的批判,那么尽管他能去教它,但他也不愿去教。

这些教材为什么能被学校采用呢?我猜想是作者受了自然数的数量侧面的迷惑,也许还受了皮亚杰(Piaget)的影响。然而作为数学工作者,他们应该知道,自然数的数量侧面并不足以成为自然数引入的基础,它的效果并不大,漏洞却不小。作者们也许会辩解道:“如果要建造一幢大楼,就必须从打基础开始。”我

要回答说："不！你应该从图纸开始，在打基础以前就应该先知道究竟要将大楼造得多高。"

那么，中小学的实际教学应怎样进行呢？我认为教等势和势的比较是相当简单的事。只要确实弄清楚自然数和 N 作为给定的概念，只要它们不被错误地描述成是建立在集合论基础之上的，有限集和可数无限集是可以掌握的。我更深入的想法是利用完全归纳法，以计数数来奠定自然数及其运算的基础。这是一种典型的，简捷可靠、富有创造力的方法。它不需要皮亚诺公理，也不必明确地阐述完全归纳法。而且我们知道，用归纳方法定义的加法和乘法与算术中的加法和乘法是很接近的。这里所谈的是一种可能性，并不意味着是一种必要性。至于其他的途径，我认为现在已经证明它们是行不通的。

我还要指出：与自然数的计数侧面相比较，数量数不是那么重要的。虽然数量数侧面对描述自然数无法胜任，但它看起来既简单又重要。人们不禁要问：为什么它在数学史上出现得那么晚？这个问题其实不难回答，在康托的理论出现以前，它不是一个很重要的问题，而且即使在康托之后，在数学的许多领域中，它仍是无关紧要的，不久便被一些更精致的理论所替代了。1940 年以前，抽象代数、拓扑、抽象分析中还大量

地用到超限基数，但后来查恩（Zorn）引理成了数学的关键，而它在很大程度上是不受势影响的。这里顺便指出，康托的成就并不是以数量侧面去解释自然数及其运算，而是他敢于将这种对数来说很自然的解释推广到无限集上。当势的概念被用到无限集上时，才显示出它的深远意义。因此，过多地强调基数是不必要的。我认为数量数可以在组合问题中起重要作用。我们不应把它用到会引起误解的地方，去作为数的概念的基础。

我再要指出：从自然数的教学方法看，数量数侧面是不能胜任这项任务的。数的概念的数量侧面对个人来说是怎样发展的呢？儿童很早就开始学计数了，并把它当作是一种乐趣。他们的计数能力要远远超出对数量的理解，然而并不一定就懂得计数数和数量数之间的联系。数的概念产生中，计数数是最初始的，最具有意义的。数量只是进一步深入时的一个侧面，这一点不应被发展心理学和教育学所忽视。没有证据可以说明儿童是以一一映射下的不变量来构造数的，它不过是数学家的理性化思想。儿童不会从等价集合的类去构造一个一个的数，而是在一个广阔得多的范围内来学习这一不变性的。即使在自然数的不变性中，一

一映射下的不变性也只是一个特殊情况。人们没有理由要将它作为检验儿童是否掌握数的概念的标准。

毫无疑问，正是皮亚杰首先从心理学的角度对数量侧面作了强调。他受康托的影响，转向对数的数量侧面的发展进行研究，却不管其他侧面。他相信完全可以从势的概念来引入自然数的概念。从皮亚杰实验中的被试的数学水平看，这在数学上是对的，因为这时自然数只是单个存在的数，尚未组成整体，但他忽视了在整个体系中所存在着的漏洞，这就诱使他将更强的结论加到了心理学上，加到了计数侧面上。于是，教学法专家所借用的那些理论，其实并不是实验的结论，而是一种错误的，至少是被误解了的数学猜想。皮亚杰可能读了一些有关的数学著作，然而他未用那种方式去解释数量。他将“5 是等价于某个标准集合的集合的类”理解为“5 是一个由 5 个等价单位构成的类”。皮亚杰用毫无特色的“等价”一词代替了“等势”，由此产生了误解。

我并不反对皮亚杰关于自然数的观念，但他没有理由认为儿童一开始是按照一种形式的过程去理解数的，而这种过程即使是对未经过数学训练的科学家来说也是难以理解的。可以肯定地说，儿童最终必须要学习计数数是一一映射下的不变量，必须学习两个

集合的并，必须通过组成偶对的方法来学习乘法，必须在更高的水平上去有意识地达到形式化。这里我所反对的是把自然数限制在数量侧面，或是过份强调这一侧面的一种倾向。一旦数的概念与数的运用联系起来，数量侧面就无关紧要了。人们绝不会把数量概念与5点钟、5年级、数轴上的点5等等联系起来，它们与数量数完全不同。

现在的实际教学，在较低及较高水平上都过分强调了自然数的基数侧面。例如，一些人用这样的方法教：画一张文恩（*Venn*）图，上有三枝铅笔、两只铅笔盒、一块橡皮，并有一面小旗，旗上标有“6”，说明文恩图表示了6这个数，然后是一个并号或加号，第二张文恩图则有两枝铅笔、两块橡皮，一面标有“4”的小旗，后面还有一个等号。初次看到这类问题，我还平静地对它一笑了之，但当我看到电视上的数学课程内容时，我就禁不住捧腹大笑了：一所房子的屋顶上插有标着“6”的旗子，表示它是5扇窗、一扇门的集合；还有另一所类似的房子。然后，把两所房子挪到一块，旗子则合二为一。我真不知道如何回答这类问题。

我并不忠实信仰传统方法，但我认为，即使人们热衷于现代的教条，也不能对最复杂的教学法中的古老经验视而不见。我对算术的现代方法作了一些比较，

发现好的方法都强调计数。当然这并不是说要儿童通过数数的笨方法去学习计算，而是说他们应当系统地学计数，进而在一个可数的格式塔（组织结构）中计算。为此，要用到齐性的、有结构的材料——我上面提到的例子既违反了齐性，又违反了结构性。要是那样的话，除了让他们依赖乏味的数数外，并不能使他们直观地利用具体材料学到加法。应该让他们在两条水平直线上，或是在算盘上给两个数（如 8 和 5）建立结构关系。这时，齐性的、有结构的集合就能发挥作用了。当然，无结构的、非齐性的例子也不能忽视，它们同样存在于世。

我看到不少算术书完全忽视了计数。由于过份强调数量侧面，致使儿童所学的计数成了单纯、乏味的数数，即没有系统地计数，完全忽视了将加看作继续数，将减看作往回数这种心算与笔算之间最重要的环节。

另外，在较高的水平上，甚至很好的教科书也完全忘记了计数数。我提出过数量侧面不足以成为数的基础，但这并不是要忽视它，在哪种程度上了解它是另外一件事。如果学生不仅能证明 $a+b=b+a$，$a \leqslant b \wedge b \leqslant c \rightarrow a \leqslant c$ 这类公式，而且能进一步了解数的运算性质，那么弄懂自然数的数量特征就更好

了。能将自然数的数量侧面进行运算的机会并不多，但也不算少。如能在较高水平上意识到数量侧面，它就可在组合数学中作运算了，而完全归纳法则适合于计数数侧面。

度量的数

日常生活中最重要的是度量的数，例如，数人或数蛋等等。数量数就是对集合的度量，但要度量的其他东西几乎都不是集合。度量一个量需要标准单位，而度量的结果是一个数。由于有许多不同的量，故需有许多不同的单位，如长度、而积、体积、高度、质量、功、电流强度、大气压和货币值等，它们经过度量，便成了量值。有时，学生弄不清楚为什么度量一些量需要用不同的单位，而度量长度和宽度又可用同一单位？为什么要用加仑为单位来度量汽油，用千瓦小时来度量电，用不可思议的单位来度量热量？算术中只教以上众多单位中的一小部分，为了满足需要，物理学家就制定了合理的度量体系。数学家喜欢将所有标量看作为同一个概念。当单位确定后，就可用同一类的数去度量所有的量，这是数学的优点。但为了学会如何应用数学，学生就应该学习各种量的起源、特征，并弄懂它们之间的关系，应该说这也是数学。

当教学法专家问起什么是数学上的度量时，纯数学家就会介绍测度论，即

一个系统 M, B, μ，由集合 M、N 的子集的集合 B 及 B 到实数集内的一个映射 μ 所组成，使得

（1）$M_1, M_2 \in B \longrightarrow M_1 \cup M_2 \in B \bigwedge M_1 \cap M_2 \in B \wedge M_1 \backslash M_2 \in B$；

（2）$M \in B \longrightarrow \mu(M) \geqslant 0$；

（3）$M_1, M_2 \in B \wedge M_1 \cap M_2 = \varnothing \longrightarrow \mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$。

教学法专家还会讨论3kg是什么意思，而3kg=3000g又是什么意义？kg 是否仅是代数中使用的字母因子，是否由 1kg=1000g 通过乘法分配律，即可得 3kg=3000g。但是，如果拿上述问题去问某些大学数学教授，他们会耸耸肩膀说你可用测度论来解释。”然而，测度论与这些问题并不相干。

量

量 G 是非空集合，有一个序关系（$<$）和一个加法（$+$），若 $a, b, c \in G$，则有

（1）$a < b$ 或 $a = b$ 或 $b < a$（“或”是互斥的）；

（2）$a < b \wedge b < c \longrightarrow a < c$；

（3）$(a + b) + c = a + (b + c)$；

（4）$a+b=b+a$；

（5）$a+c=b+c \longrightarrow a=b$；

（6）$a<b \leftrightarrow \bigvee_c (a+c=b)$（易证 c 是唯一的）。

从加法导出正整数乘法：

$$1 \cdot a=a,(1+n) \cdot a=a+n \cdot a(n \in N^{+})$$

即 $n \cdot a=a+a+\cdots+a$（n 个加项）。通常还需要除法，即

（7）$\bigwedge_{a \in G} \bigwedge_{n \in G} + \bigvee_{b \in G} a=n \cdot b$（$b$ 作为 a 的 n 分之一，也是唯一确定的）。

于是，G 对正整数，进而对正有理数（Q^{+}）有乘法和除法。

例如，设 G 是一个重量系统，它可以这样来得到：在这个系统中，物体的“重量相等”关系可利用天平引入，另一个关系“轻于”亦可用同样方法引入，此外设想两个物体可合并。“重量相等”是等价关系，它引出了等价类，这些等价类即通常所说的重景，我们可以称它们为重量类。集合设即这些重量类的全体，称为重量。我们将重量类中物体的“轻于”关系看作为“$<$”，“合并”关系看作为“$+$”。于是均可满足以上公理，这是对实际经验的理想化描述。

我们在 G 中选择一个单位或标准 e，e 的正有理数倍形成了集合 $Q^{+} \cdot e$，我们可设想 G 中有元比 $Q^{+} \cdot e$

中所有元都小（或都大）。具有此性质的量 G 称为非阿基米德的。如果以下原则成立就称 G 为阿基米德的：

（8）对 G 中的元 c, G 中不存在小于 $Q^+ \cdot c$ 的所有元或大于 $Q^+ \cdot c$ 的所有元的元素。

即对 $c, d \in G$ 存在 $r \in Q^+$, $s \in Q^+$, 使得 $d < r \cdot c$ 和 $d > s \cdot c$。当然, r 可选作整数, s 可选作整数的倒数。即对 $c, d \in G$, 存在自然数 m, n, 使得 $d < m \cdot c$, $d > \dfrac{1}{n} \cdot c$。故有

（8'）$\bigwedge_{c,d} \bigvee_{n \in N} d < n \cdot c$。

这是阿基米德公理的一般形式。教科书中通常是从（8'）开始,再由它导出（8）的,这是违反教学法的颠倒。教科书之所以采用这一次序,理由之一是两千多年以来,无人怀疑它;理由之二是如果从（8）开始,就显得过分简单了。为迷惑初学者,就从（8'）开始。事实上,作为数学的活动;应该从（8）开始,再简化成（8'）。

现设 G 是阿基米德的，我们选 $e \in G$，对每个 $a \in G$，按序将 $Q^+ \cdot e$ 分成两部分，由此决定 Q^+ 的一个划分，即形成两集 $\{\tau \in Q^+ | \tau \cdot e \leqslant a\}$, $\{\tau \in Q^+ | \tau \cdot e > a\}$,这叫做 Q^+ 的一个分割。通常,它

决定了一实数 $\alpha \in R^+$,即 $\alpha = sup\{\tau \in Q^+|\tau \cdot e \leqslant a\}$。由定义,$a$ 关于 e 的度量是 α,这是一个正实数。令 $a = \alpha \cdot e$,这样对每个 $a \in G$,它就是 e 的实数倍。可是,前面只提到 Q^+,不能推出每个正实数都能起到这种作用,因此还需加上另一条公理:

（9）$G \supset R^+ \cdot e$,甚至 $G = R^+ \cdot e$。

容易证明对 $\alpha, \beta \in R^+, \alpha < \beta \rightarrow \alpha \cdot e < \beta \cdot e, (\alpha + \beta) \cdot e = \alpha \cdot e + \beta \cdot e$。

若称 a 关于 e 的度量为 $v(a)$,那么,可得

（Ⅰ）v 将 G 映到 R^+ 内（若假设（9）成立,则可将 G 映到 R^+ 上）;

（Ⅱ）$a < b \rightarrow v(a) < v(b)$;

（Ⅲ）$v(a+b) = v(a) + v(b)$;

（Ⅳ）$v(e) = 1$;

（Ⅴ）$v(ta) = tv(a), t \in Q^+$,这从（Ⅲ）容易推得。

存在且唯一存在一个函数,具有这些性质,它是 a 关于 e 的度量 $v(a)$。如果用 $e' = \alpha \cdot e$ 代替 e,可得 a 的新度量 $v'(a)$,不过此时是 a 关于 e' 的度量。两者有关系:$v'(a) = \alpha^{-1} v(a)$。这些都很显然,在此只想指出一点,量的理论与集合测度论虽有某些相似之处,但它并未用到集合测度论。

如果已知两个量 a_0, a_1,试图找到一个共同的单

位,使它们可用整数表示,这就是欧几里得(Euclid)算法的目的:

$$a_0 = q_1 a_1 + a_2 \quad (0 \leqslant a_2 < a_1),$$
$$a_1 = q_2 a_2 + a_3 \quad (0 \leqslant a_3 < a_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

a_0 若能被 a_1 除尽,则余数为 0;否则余数 a_2 比 a_1 小。依次类推,如果在某一步出现余数为 0,即 $a_{n-1} = q_n a_n$,则 a_0, a_1 容易用 a_n 及整数因子来表示,a_n 就是 a_0, a_1 的共同单位,甚至可能是最大的共同单位,q_i 是 $\dfrac{a_0}{a_1}$ 展开成连分数的分母。如果这一过程不能中止,则可得到一个无限的连分数。

自然而实际的测量方法在古巴比仑时代便有了。若 $a \in G$,且不能用单位 e 的整数倍量尽,则取一个更小的单位。日常生活中,一个量总有许多单位。例如,距离单位就有哩、唓、呎、吋。巴比仑人用固定关系将同类的标准单位联系起来,他们偏爱因子 60。而今天,人们偏爱 10。在我们的语言和我们祖先的算盘中都采用十进制。如果单位 e 太大,就除以 10 的幂再测量,测量的结果只须移动小数点的位置。其名称可以加上前缀,如将毫、微、毫微、千、兆、千兆等附加在标准单位如秒、吨、米上,作为一个新单位使用。

如果只允许十进位制,则可除性公理 7 可改为

$$\bigwedge_{a\in G}\bigvee_{b\in G} a=10\cdot b。$$

于是普通分数就消失了,作为测量结果只会遇到有限十进小数,如果将测量过程理想化就会出现无限十进小数。在此系统内,$\frac{1}{3}$ 须用无限十进小数表示,一般有理数也是如此。所以,将测量结果解释为普通分数是与测量过程不符合的,普通分数产生于除法而不是来自于测量。

度量记号作为函数记号

我们回到老问题:如何解释 $3\mathsf{kg}=3000\mathsf{g}$? $3\mathsf{kg}$ 又是什么意思? 事实上,可选择千克作为重量单位 e,即某些对象的等价类,这个重量类就是 $e=1\mathsf{kg}$。对重量类 $a\mathsf{kg}$ 中的对象,度量 v 关于单位 e 的取值为 $v(a)\mathsf{kg}$,则 $a\mathsf{kg}$ 可看作为函数 v 中 a 的原像,或 v^{-1} 是 Q^{+} 的一个映射,它给实数指派了重量类。在此,数 a 对应于重量类 $a\mathsf{kg}$,即“kg”的意思与函数记号“v^{-1}”相同,只是一个在自变量的右边,一个在左边。从这个意义上说,我们可以将这个函数记号放到自变量左边,就像目前流行的函数记号一样,即以 kg3=g3000 代替 $3\mathsf{kg}=3000\mathsf{g}$,而对自变量不加括号也是可以的。所

以,度量记号可以看作为函数记号。$、cm、sec、g 等是分别将数映到货币值、长度、时间和重量上的函数,kg 和 g 之间的联系可表示成

$$\mathsf{kg}x = 1000 \cdot \mathsf{g}x,$$

即 kg 是 g 的 1000 倍。这一解释非常明显,但不可思议的是至今几乎无人承认它。

比例运算法则

量的理论很多。量以各种方式彼此相关,还可由给定的量构造出新的量。

量之间最自然的关系是同态,即存在量集合 G 到量集合 G_1 的一个映射 f,并保持如下结构:

$$a < b \to f(a) < f(b), f(a+b) = f(a) + f(b)。$$

由此可推出 $f(\tau a) = \tau f(a), , \tau \in Q^+$ 对于阿基米德量来说,这是 1 − 1 映射。只要(9)成立,它就将 G 映到 G_1 上。只要对单一的 $a \in G$,给定其像 $f(a)$,则 G 到 G_1 的同态 f 即被确定。如果(9)满足,$f(a)$ 甚至可在 G 中任意指定。由于量集合 G、G_1 可分别用度量 v 和 v_1 描述,因此,f 可用 R^+ 到自身上的一个映射 g 来表示,即

$$g = v_1 f v^{-1}, \quad 或 \quad gv(a) = v_1 f(a)。$$

它表示 g 将 a 的度量映成 $f(a)$ 的度量,g 是 R 到 R 的一个线性映射的限制,故 g 有如下形式

$$g\tau = a\tau(\tau \in R^+)。$$

这里,a 是一固定的正实数。这是比例运算法则的数学背景。同样, 在反同态基础上可建立比例运算法则的逆, 即对于一个 f, 满足 $a < b \to f(a) > f(b)$, $f(na) = \dfrac{1}{n}f(a)$, $n \in N^+$, 则有 $f(\tau a) = \dfrac{1}{\tau}f(a)$, $\tau \in Q^+$。同样,若 φ 将 a 的度量映成 $f(a)$ 的度量,则可将 φ 写成 $\varphi(\tau) = a\tau^{-1}$。

量的同态例子还有:映射 f 给重量类指定货币值;或给实物体积指定其重量, 量的反同态例子有: 如果给定了矩形的面积, 对它的长指定其宽; 在一个工程问题中, 为了完成这一工程, 对所需时间指定其工人人数。

量的乘法和除法

量与量之间不仅有比较关系, 而且它们可互乘互除。通过这些运算, 可得新的量, 如价格/重量, 其单位可能是 \$/pd; 重量/体积, 其单位可能是 $g \cdot cm^{-3}$; 路程/时间, 其单位可能是 $cm \cdot sec^{-1}$ 或哩/小时, 这些量的度量分别称为单价, 比重和速度。物理学家

以不同的方式去理解量的乘、除，例如他们会写出 $150\mathsf{km}:3\mathsf{h}=50\mathsf{km}/\mathsf{h}$。有些数学家则反对这类具体数的计算。但是具体数是绝对严谨的，你无法阻止日常生活所需要的量的乘、除。实际上，在现代数学中，量的乘积就是张量积，互逆的量则称为互相对偶。下面作一简单的介绍。

给定两个量 G、H 根据线性空间和模的张量积的直线平移法则，可建立一个形式积 $G\cdot H$，它由形式积 $a\cdot b$ 所组成，其中 $a\in G$，$b\in G$，且规定：

$$(\alpha a)\cdot b=a\cdot(\alpha b),a\in R^{+}。$$

由此可知，对单位 $e\in G$，$f\in H$，$(\alpha e)\cdot(\beta f)$ 只依赖于 $\alpha\beta$。如果 $a=\alpha e$，$b=\beta f$，那么，可将 $\alpha\beta$ 视为关于单位 $e\cdot f$ 的度量。而 $G\cdot H$ 的元的加法和比较，可利用它们的度量单位接着定义（还存在着更抽象的、不用到单位和度量的定义方式）。

例如，功 = 力 · 距离，矩形面积 = 长 · 宽。在此，$\mathsf{kg}\alpha\cdot\mathsf{m}\beta=\mathsf{kg}\cdot\mathsf{m}\alpha\beta$ 是有意义的，$\mathsf{kg}\cdot\mathsf{m}$ 由函数 kg 和 m 所组成，将数映到功上。$\mathsf{cm}\alpha\cdot\mathsf{cm}\beta=\mathsf{cm}^2\alpha\beta$，这里 cm^2 将数映到而积上（注意：$\mathsf{kg}\cdot\mathsf{m}$ 不是函数 m 和 kg 的复合函数，cm^2 也不是函数 cm 的幂）。

从量的逆来解决量的除法是否有意义呢？路程除以时间或者面积除以长度是有意义的。但是，时间和

长度的倒数是否都有意义呢? 有! 长度的倒数在光学中称为屈光度(屈光度为 m^{-1})。而时间的倒数在声学中称为频率(例如音乐会的音高标准为 425/秒),或无线电波的千赫。上述每个量至少存在着一种有意义的算术运算(例如, 屈光度定律: 物体和像的距离的倒数和等于焦距的倒数)。

量的倒数是有运算意义的, 例如, 频率具有频率·时间 = 振荡次数。又如, 单价 = 价格/重量, 比重 = 重量/体积, 速度 = 路程/时间。计算这些量可理解为

$$
\begin{aligned}
\$\alpha \cdot (\mathsf{kg}\beta)^{-1} &= \$ \cdot \mathsf{kg}^{-1}\alpha\beta^{-1}, \\
\mathsf{g}\alpha \cdot (cm^3\beta)^{-1} &= \mathsf{g} \cdot \mathsf{cm}^{-3}\alpha\beta^{-1}, \\
\mathsf{m}\alpha \cdot (\mathsf{sec}\beta)^{-1} &= \mathsf{m} \cdot \mathsf{sec}^{-1}\alpha\beta^{-1}。
\end{aligned}
$$

(sec^{-1} 与将数映成时间的函数的逆不同, sec^{-1} 表示将数映射成时间的倒数。)

除量的乘除之外, 还可取量的对数而得到用于描述声音强度水平的度量, 称为分贝。

数轴

在各种不同水平的教学中, 量的模型是十分重要的。根据公理, 所有的量都同构, 因此知道了一个量也就知道了全体。为了了解各种量及其相互关系, 只需用一种模型去研究量的概念就足够了。

在所有量中，最数学化的是长度。事实上，它是几何的一个基本概念，比时间更具体。所以，最常见的量的模型是长度，它在无限的尺——数轴上实现了高度的具体化。另外在数轴上还讨以确定一维向量。

“数轴”作为数的模型，给人的印象通常是水平的或垂直的。有时两者也可联合使用，以便借此设计图象。它们可以是不同量的模型，例如，一种设备的数量与价格，其图象就是一个形象化的价格表，根据比例法则，从表格可得到一个线性函数。此外，我们也可近似地利用数轴对算术四则运算加以形象的解释，数的加、减能解释为数轴的移动和反射；其乘、除能解释为数轴上单位的放大和缩小，计算规则显得清晰直观。在现代算术教学法中，数轴是借用于现代数学的最有价值的工具。

数轴像一把尺，它的点可以固定不变地被看作是实数，这在教学上有很大优点。算术教学一开始就应该使用数轴。最初，数轴上只标自然数，然后，由减法得出负整数，由等分和缩小得出分数，由测量得出十进小数，先是有限小数，然后是无限小数，于是便逐渐填满整个数轴（这里不是用数和点来填，而是用占有数值的点来填）。但这不是引进数的过程，也不是真正的数域的扩展，只是“研究领域”的不断发展。实数

的直观形象要比它本身出现得晚，运算也是如此，我们可将加法看作为移动，将乘法看作为扩大。当然，上述方法仍需要进行讨论，这不仅涉及到数的概念，也涉及到所有数学概念的教学。在这样的讨论中，最适当的出发点还是数的概念。

描述还是创造概念——分析还是综合

数轴显示了数的存在性及其内部结构，更确切地说，它能使学生得到在给定的范围里进行计算或运算训练的感受。为了确保存在性，人们还要对所给范围加以更周密的分析和描述。起初是表示整数的位置，说明加法及大、小；除法产生分数，最后说明每一实数介于有理数之间。一些描述可能并不完美，到了大学，漏洞就可逐步加以弥补了。从数学和教学法角度讲，现在的方法是完全合理、合适的。那么，证明实数域的存在性究竟为了什么呢？实数是从有理数这个有序域用戴德金（Dedekind）分割或有理数的柯西（Cauchy）序列来引出的。要找到这些工具，我们就须从集合论中挖掘出子集或子列，挖掘出等价类，挖掘出集合或等价类的代数运算，挖掘出原先的域到新构造的域的同构嵌入。最后还要挖掘出最困难的东西：新的域确实具有所要求的拓扑性质，例如，其每一个

柯西序列都收敛。这是一个重要的过程，其重要性主要在于它对类似的过程是一个范例，能以完全相同的方式构造出度量空间、拓扑群、环、域，从而创造了许多新的结构，这就是该过程的来龙去脉。

同样，从整数出发采用数对导出有理数，这又是一种重要方法。其重要性主要在于能同样应用于任何无零因子的交换环对其商域的嵌入，这就是该方法将得以推广的来龙去脉。

证明存在性，需要我们作化归。对于整数问题就要回到自然数。对自然数呢？就要追溯到集合论和作为等势集的类。事实很清楚，证明一个存在性总要用到另一个存在性作为前提。然而，即使有可能拿不出东西去作为最前面的基础，这样做也比一个初学者的理解强。这对中学来说是同样的。我们应当从某个基础开始去作分析和描述，要揭示某个对象作为人类思维的自由创造物，必须让初学者多少理解一点为什么应该这样做，否则是没有多大意义的。如果两个存在性的互相化归不是孤立的行为，而是能对新实体的真正的创造起示范作用的话，那么它在教学上就更能说服人了。

实数

数轴上的实数同有理数一样早就存在。不管实数是否被定义，单位正方形的对角线总有长度。在毕达哥拉斯（*Pythagoras*）定理形成以前，这个长度就是 $\sqrt{2}$，它是客观存在的，但不能写成 $\dfrac{q}{p}$（这里都是整数）的形式。如果用十进小数表示 $\sqrt{2}$ 则：要使用无数个符号。例如，$\dfrac{1}{3}$ 可写成 $0.333\cdots$，当然 $\dfrac{1}{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 不同，$\dfrac{1}{3}$ 是有理数，而 $\sqrt{2}$ 是无理数。人们可根据自己的需要，将 $\sqrt{2}$ 的测量或计算结果表示到任何一位小数。但这个过程不必告诉学生，现在不必再学古典的平方根算法了。

希腊人有两种计算这种无理数的好方法，其中之一现称为欧几里得算法（或连分数展开法）：设 $a_0=\sqrt{2}$，$a_1=1$，可得 $q_1=1, a_2=\sqrt{2}-1, q_2=2, a_3=(\sqrt{2}-1)^2, q_3=2,\cdots$ 舍去某个余数 a_n，再倒算，即得 $\sqrt{2}$ 的逐次逼近值：$\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{5},\dfrac{17}{12},\dfrac{41}{29},\cdots\cdots$

还有一种更有效的方法，它早被古巴比仑时期的数学家们所掌握了。计算 $\sqrt{2}$ 就是去找一个面积为 2 的正方形。为逼近其边长 $\sqrt{2}$，可先找一个面积为 2 的

矩形，然后使其长、宽之差越来越小。开始时，设矩形的一边为 $a_1=1$，则另一边 $b_1=2$，取两者的算术平均值作为新边，得 $a_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1)=\frac{3}{2}, b_2=\frac{2}{a_2}=\frac{4}{3}$ 重复此过程，得 $a_3=\frac{1}{2}(a_2+b_2)=\frac{17}{12}, b_3=\frac{2}{a_3}=\frac{24}{17}$，两边之差为 $\frac{1}{204}$；$a_4=\frac{1}{2}(a_3+b_3)=\frac{577}{408}, b_4=\frac{2}{a_4}=\frac{816}{17}$，两边之差为 $\frac{1}{235416}$；……容易证得矩形的两边之差趋于 0，且边长趋于 $\sqrt{2}$。

任一实数可用无限小数表示。但需注意，其表示法是不唯一的，例如，2.3000⋯⋯ 等于 2.2999⋯⋯ 如果规定由 9 组成的一个无限的尾数可用 0 来代替，且在不同于 9 的最后一个数字上加一个单位，那么，在此限制条件下，任何实数均可由无限十进小数给定，这些无限十进小数可以按自然的过程进行运算。根据以上所述，可以证明这个系统满足拓扑条件，即有界集具有最小上界（设 A 是 0、1 之间的数的集合，子集 A_1 由 A 中第一位小数最大的数组成，在 A_1 中取第二位小数最大的数组成子集继续下去，所有 A_n

的交由一个实数组成，它是 A 的最小上界）。这说明定义了关系，运算的十进小数集合实质上是实数域。

在中学数学中，可以利用十进小数的例子来证明实数域的存在性（当然这不是对 12 岁学生的教学内容），还可便学生了解运算的大致定义和有关算术法则（域的公理）的不太严格的证明，这一理论可和计算机应用一起引入，当然，这并不是说就应当这样去做。

还有一个问题：如果实数用十进小数来表示很方便，那么为什么还要创造复杂的柯西序列、戴德金分割和区间套呢？无限十进小数是特殊的柯西序列：接连地将十进小数 a 停止在第 p 位上，可得数列 $\{a_p\}$，它满足：对于任给的 ε，只要 $10^{-N(\varepsilon)} < \varepsilon$，当 $m, n > N(\varepsilon)$ 时，总有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$，这样的序列显然收敛于 a。实数域中这些特殊的柯西序列的收敛意味着所有柯西序列的收敛，因此，只要用特殊的柯西序列就可定义实数了。但是，数学家们并不满足于这种简单的方法。因为，用一般的柯西序列或戴德金分割定义实数能显示出理论上的精确。

如果要在中学数学中用柯西序列或戴德金分割来定义实数，我倒不一定反对，但看来这是行不通的。两次大战之间，荷兰就有人将戴德金分割写进了教科

书，但教师弃之不用。现在也还有这样的教科书。另外，有一些教学法专家认为不能将实数的严密定义引入中学。因此，他们还反对在中学教分析。于是，“严密”就是戴德金分割、柯西序列，等等，这是对严密的曲解。

我们知道：一个学生完全能懂得实数是数轴上的一个点，或是一个无限十进小数。他能进行运算，就要比只知道实数定义的人更懂得数学的严密。在数学中也很少再有比无限十进小数更适宜进行运算的对象了，因而，把实数解释为十进小数是足够严密的。如果需要在教学中引进实数概念，那么把它理解并解释为十进或二进小数是最适当的。对于这个观点，我已宣传了二十多年。教师也许常按此方式进行，但理论家及教科书作者似乎很讨厌它，这就使实数理论因深深的偏见而成为教条。

计算的数

人类很早就用位值制来计数和计算了。实际上，它的本质就是算盘。例如，要表示 762，可分别在代表个位、十位、百位的列上放 2、6、7 个算珠或画出相当数量的符号。当印度-阿拉伯数发明后，数的位值表示就由书写形式给出，即利用数字 0，1，…，9。其中零的

引入是重要的一步,它表示明确的舍弃或作为占位符号,在算盘上可解释为空档。

笔算与机器算术(指非自动计算机)的算法相互之间有很大差别。笔算中,乘法被归纳为乘法表,而机器中,乘以一位数字 k 是按 k 个相等的加数相加进行的。显然,在一个小机器的存贮器中不能插入太多的表,而对人脑来说,记忆它们没有多大困难。机器能同时在各处相加,但对绝大多数人来说却不行。机器进行除法是重复地做减法,而笔算除法,却复杂得多。计算机以二进制为基础,可能利用了极简单的加法、乘法表,而让人使用二进制计算就不一定有利。

在某些国家的教学计划中,过去经常有位值制理论的内容。而在另一些国家中,这些内容却被视为无效的练习而长期屏弃。不可思议的是,一些国家经过各种改革试验后,反而保留了这些内容。我认为今天存在着一个场合,可以显示位值制理论的意义。我们可在小学还未教位值算术时,便教如何使用非自动计算机,因为机械计算理论的第一步和位值制理论的第一步是等价的。

代数原理

我们以前通过等分和测量引入分数，目的在于体现分数的直观形象。在教分数时，人们惯于尽可能快地转入算法，然后归结出约分、扩分，以及运算的法则，并加以应用。这样的教学法肯定是站不住脚的。事实上，测量产生的是小数而不是分数。分数的出现是为了使除法可以进行下去。即为了解除除法的限制，而引入分数，则 $\frac{7}{3}$ 可作为除法问题"$7:3$ 是多少？"的解而出现。一旦接受了 $\frac{7}{3}$，那么在计算中便可将其作为这一除法的结见来加以处理。数学上对如下的表示更为满意：$\frac{7}{3}$ 可理解为 $3x=7$ 的解，而 x 表示满足该方程的一个值。此式将分数由算术带入了代数，显然它是建立在代数基本原理基础上的。在代数中，常常有数域或运算扩充问题。例如，从自然数出发，将 -3 作为满足 $(-3)+3=0$ 的数来引入；$\sqrt{2}$ 作为满足 $(\sqrt{2})^2=2$ 的正数来引入；更一般地，将 $a^{\frac{p}{q}}$ 作为满足 $(a^{\frac{p}{q}})^q=a^p$ 的数来引入；i 作为满足 $i^2=-1$ 的数来引入。将 $3x=7$ 两边乘以 5，得 $15x=35$，它表明 $\frac{35}{15}$ 与 $\frac{7}{3}$ 是相等的，这就是通常的约分和扩分。两个有

理数 $\frac{7}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$ 相加,若设其中的一个数为 x,而另一个为 y,则由方程 $3x=7,5y=3$ 可导出关于 $x+y$ 的方程,这只需在上述两方程的两边各乘以 5、3,于是得 $15x=35,15y=9$,两式相加可推得 $15(x+y)=44$。在形式上,它与通常的分数加法没有区别,但它又被放到了一个有数学意义的场合中,引出了一个清晰的模式,同时又体现了具有以方程为背景的有意义的过程。也许,有人会感到分数的直观性丧失了。但事实上,这种直观性是否存在也值得怀疑。现在的计算是根据一般的模式来进行的,如果没有相当的代数实践经验,人们是不可能真正理解它的。反对这一方法的人认为,方程 $3x=7$ 是否存在解还不知道,故这一方法所用到的代数运算及定律都是凭感觉假设的。但必须指出传统的分数算术也未导出这一存在性。如果以存在性为目标,那么同样能以不同的形式来加以表示,实质上它就是取等价数对的方法。只要 $ab'=a'b$,便可定义 (a,b) 和 (a',b') $(b,b'\neq 0)$ 是等价的。这一定义可由下列事实得出:根据通常的算术法则,由方程 $bx=a$ 和 $b'y=a'$,再得到 $a'bx=a'a$ 和 $ab'y=aa'$,可导出相同的解。同样,数对的加法可以应用通常的运算律,通过求 $bx=a,dy=c$ 的解的加

法而得到,其他运算也可类似地得到。最后,由数对的等价类得到有理数,而有理数的运算可由数对的运算转换过来。

形成抽象的类的教学理论是否有价值是很成问题的。与其介绍等价类,还不如规定当 $ab' = a'b$ 时,则有 $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ 来得自然。大胆一点地说;这就是指:当 $ab' = a'b$ 时,$ax = b, a'y = b'$ 有相同的解。

假如根据笛卡儿(Descartes)模式,将数对映入平面,那么定义有理数(如 $\frac{7}{3}$)的等价类会更加直观。在这个映像中,一个数对的等价类就是经过原点的一条直线,经过原点的所有直线(除铅垂线外)只要通过另外一个整数坐标的点在这种表示中就起作用,甚至可用这些直线来定义有理数,它是引进有理数的一项独特的建议,但至今为止,还未看到过有关这种概念的系统论述。同样,也可用此法引入实数,只要将经过原点的所有直线都作为像(除铅垂线外)便可。

有理数是否要用数对的等价类来定义,并不取决于其过程是否简单直观,或是否能使人信服,而是要看这种方法能否成为一个范例。那么,在哪种情况下采用等价类定义可以成为范例呢?唯一的情况是从一

般的整环扩展到一个域，即从一个无零因子的交换环扩展到它的商域。对它的证明也要用到元素对的等价类。这种抽象代数的内容是否能在中学里教呢？商域的构造对于刚引入有理数时的那种水平来说是不适合的，但可以在中学的最后阶段里教，而且，在采用这种形式化方法之前，应该先用形式化程度稍低一点的方法作一过渡。

例如，我们可用运算 $\frac{a}{b}\cdot b=a$ 来引入有理数 $\frac{a}{b}$。对负数也可这样做：定义 -3 是能满足 $(-3)+3=0$ 的数，与定义有理数运算的方法相同，可以导出负数的运算。例如，由 $(-3)+3=0$，$(-4)+4=0$，两式相加得 $[(-3)+(-4)]+(3+4)=0$，于是 $(-3)+(-4)=-(3+4)$。在第一个等式的两边同时乘以 4，在第二个等式的两边同时乘以 -3，得 $4\cdot(-3)+4\cdot 3=0$ 和 $(-4)\cdot(-3)+4\times(-3)=0$，于是得 $(-4)\cdot(-3)=4\cdot 3$。

再如，根据 $\sqrt{a}$（a 为正有理数）具有性质：其平方为 a 的数，从 $x^2=a$，$y^2=b$ 出发，用乘法及传统的算术定律可推出 $(xy)^2=ab$，于是得 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。这是代数的，即形式的讨论。对于 $\sqrt{a}$ 是否存在，唯一，独立，则是另外的问题。事实上，我们早已表明该如何处理它了。

同样,运算也可扩充。对 $a^n(a>0)$ 来说,原来规定 n 是自然数,现在要把 n 扩展到有理数,仍要求通常的幂的算术运算法则成立,即要求 $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{(\frac{1}{n})\cdot n} = a^1 = a$ 成立。它定义了 $a^{\frac{1}{n}}$ 为这样的数,它的 n 次幂应是 a,所以 $a^{\frac{1}{n}}$ 必须是 a 的 n 次方根,其中可能相差一个符号。唯一需要补充的是,应规定当 n 为偶数时,$a^{\frac{1}{n}}$ 是正的。同样对 a^{-n} 有:$a^{-n}\cdot a^n = a^0 = 1$,由此可定义 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$。最后对有理数 $r = \frac{m}{n}(m\in Z, n\in N)$,可定义 $a^r = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$,在此,必须检验这种定义是否不依赖于 r 的特定表示:$\frac{m}{n}$,还必须证明通常的运算法则是可行的。

引入复数时,遇到同样的问题,显然 $x^2=-1$ 无实数解,因此 i 可作为具有性质 $i^2=-1$ 的新数来给以引入。

从代数一开始,就有一个熟悉的原理,我在本节的小标题中称之为代数原理。数的计算侧面首先应表示为算法的算术:每一个表示特定数的特定符号要按某些固定的法则运算,算法代数的符号可以有不同的起源,它们有所指却又不是很清晰地表示一个对象,但至少在一开始就能让人们知道如何作运算。例如 $\frac{7}{4}$,

就可由乘 4 得 7 这个法则完全确定, $\sqrt{2}$ 就由这个数的平方为 2 这个法则来确定。在代数活动中, 我们就不再去考虑数是分数、小数, 还是等价类, 只考虑数的计算侧面。每个人从自身的代数活动中知道, 计算数是一个高度有效的侧面, 它不仅支配着诸如扩展数的概念及其运算等基本活动, 而且一般说来, 还支配着方程的建立及求解。设未知量为 x, 先确定 x 所满足的条件, 再按运算法则作关于 x 的运算, 使条件简化并转变为明确的条件。方程 $x+3=0, 4x=7$, $x^2=2, x^2=-1$ 虽然在给定的数集中不可解, 但引入了 $-3, \frac{7}{4}, \sqrt{2}$ 和 i 这样的新数后就有解了。

我们知道, 在数域的扩展中, 明确的算法起始于 1 到 9, 再明确地扩展到整个位值系统, 甚至扩展到有限或无限十进小数。这一扩展是自然的, 也是符合教学法的。起先只有自然数及其运算, 然后负数作为某类方程的解而出现, 并对其实施通常的运算, 运用这些通常的做法可证明 $(-4)\cdot(-3)=12$ 等问题。以后, 有理数也作为某类方程的解出现, 过去的运算在某些条件下得到了扩展, 如 $\frac{7}{3}+\frac{3}{5}=\frac{44}{15}$。根式、分数指数也类似, 可证明 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}, a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$。

在这里,某些定律是在某些运算中才成立的,并且在扩展这些运算时,要求这些定律依然成立。"运算律的持续性"是自然的要求。事实上,对运算律持续性的讨论历来决定着这些扩展问题。例如,数集扩充到复数域就曾因有序性而受到牵制。

对代数原理的评论

来自大学的评论结果是禁止在中学里讨论关于"算术运算律的持续性"的问题,因此,留给中学教师的最安全的事情是简单地规定:$(-4)\cdot(-3)=12$,$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$。这样,他们就屈从了通常的看法:代数是一项无意义的活动。迄今为止,尚有一些教科书规定了这些规则。教学法专家发现了一种方法,试图从严谨的数学家的严厉指责中去拯救这些规则。他们认为:上述这样的扩展过程纯粹是约定的。确实,我们似乎能合理地解释为什么要让 $(-4)\cdot(-3)=12$, $9^{\frac{1}{2}}=3$,但不能证明它。因为它们是任意约定的,可以用另一个约定来代替。教师根据前面所讲的方法似乎合理地解释了 $(-4)\cdot(-3)=12$,然后告诉学生:这不是证明,只是一种似乎合理的论证。因为在我们所谓的证明之中,已经对负数使用了分配律,对此我们从未证明过,连对正数也未证过。

即使教师从不去教公理，他也必须知道什么是公理，并不得不用到有关的知识。这样，他就会以另一种方式来描述他所做的事情。他会说：我们要引入新数 $-2,-3$，使之满足 $2+(-2)=0,3+(-3)=0,\cdots\cdots$ 而且交换律等等仍成立。如果能够满足这些要求的话，那么我们就可同样证明 $(-2)\cdot(-3)=6$ 等，于是他便按上述的方法继续做下去了。

教师说明 $(-2)\cdot(-3)=6$ 的方法在数学上是极为重要的，它不是一种似乎合理的论证，而是表明了是否有可能将自然数的概念扩展到整数，并使运算律依然成立且结果在本质上是唯一的。

在数的概念和运算的扩展中，扩展过程的第一步可在较低水平上教，而对扩展的存在性，就要求学生至少处于已懂得新元素的存在性的某种水平上。在低水平上，许多扩展问题可以形式化地进行，如果所需条件得到满足，扩展过程肯定可得到唯一的结果。一些教科书不去证明唯一性，而去证明存在性，这从教学法和数学上讲都是荒谬的。

形式的附加

$\sqrt{2}$ 是一个计算对象，为了确认这个对象的存在性，我们可将它看作数轴上的一个点。但是，如何处理

它的最初始的定义呢？能否证明将 $\sqrt{2}$ 平方后，所得结果就是 2？这个运算方法能否令人满意？为何经常称 $\sqrt{2}$ 为实数？对此无论怎么回答，都必须小心谨慎。

若 x 满足 $0 \cdot x = 1$，或 $x^2 + 1 = 0$，或 $10^x = -1$”，就会产生矛盾。按照通常的算术运算定律，第一个方程可化为 $0 = 1$；根据通常有关序的定律，第二、三个方程的左边应为正，而右边则小于或等于 0。如果放弃序的定律，则第二个方程有复数解，而对第三个方程，就应讨论如何以一种合理的方式将 x 由实数扩展到复数，使 10^x 能取负值。

如果要对受到某种方程限制的 x 进行计算，虽然它可以服从某些算术定律，但其结果可能会与某些东西不相容。事实上，相容性的概念是相对的，在一个域中的不相容在另一个域中可转化为相容，方法之一便是使用更加代数化的形式附加方法。

例如，对 $\sqrt{2}$ 进行运算是什么意思？我们从有理数 Q 开始，引入 $\sqrt{2}$，然后就得到表达式 $a + b\sqrt{2}(a, b \in Q)$。这些表达式可按下列法则进行加、减、乘：

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}。$$

也可进行除：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a+b\sqrt{2}} &= \frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} \\
&= \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2},
\end{aligned}
$$

其结果还是同类型的数（注意分母不为 0，因为 $\sqrt{2}$ 不是有理数）。由于通常的算术定律成立，于是它们组成了一个域 $Q(\sqrt{2})$。

在所有这些计算中，唯一需要知道的是 $(\sqrt{2})^2 = 2$。至于 $\sqrt{2}$ 作为实数，介于哪两个有理数之间，那是无关紧要的。是否只有这种"介于"才能保证 $\sqrt{2}$ 和 $Q(\sqrt{2})$ 的存在性呢？不，这里有很简单的方法。考虑元素取自 Q 的有序对 (a,b)，并根据以下方法运算

$$
(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),
$$

$$
(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)。
$$

容易证明这些有序对满足域的公理，故组成一个域。在此域中，$a \in Q$ 可表示成有序对 $(a,0)$。由 $(0,1)\cdot(0,1)=(2,0)$，可知 $(0,1)$ 就是 $\sqrt{2}$。

这是抽象代数的内容，那些发誓只信仰一种体系的人会想把它同引进实数完全分离开来。实际上，只要出现根，并用代数方法进行运算，它就是抽象代数。人们可能会感到惊奇的是，早在八年级，甚至在布尔巴基（*Bourbaki*）出现以前，学生就已开始练习抽象

代数了。其实早在古巴比仑时期,形式附加就已开始训练了。当然,对根的运算这类活动并不就变成抽象代数,除非你已经考虑到它。

前面对 $\sqrt{2}$ 的讨论用到了数对这个工具,这是否可成为中学数学的一个课题呢?我相信是可以的。当然,不是在刚引入 $\sqrt{2}$ 时,以后可让学生通过与数对有关的运算,用来解释先前的初级活动,学会用高观点来看已熟悉的无理性。奇怪的是,如此自然的想法从未在学校中实现过,教科书中也看不到有任何形式附加的内容。许多教科书虽然引入了域的概念,但这样做的目的却丝毫没有体现出来。事实上,形式附加为从较高的观点上看初等代数和说明整个抽象代数有何运用提供了一个引人注目的学习机会。

在传统教学中,形式附加虽然有时也用作训练,但这是无意识的,只有在实数域过渡到复数域时,它才被正式认可。实际上,通过一些更复杂的例子,还可以更深刻地理解形式附加在数的计算侧面上的重要作用。

第十二章
数的概念从直观方法到算法化和推理化的发展

根据数的概念的发展情况，我将有关的学习过程区分为以下几个阶段：直观的运算；算法的运算；代数的运算；整体的组织（域的概念）；便之从属于数学的体系。这种阶段的划分不一定与前面提到的学习过程的层次相一致，它并不表示时间上的接续，对于不同的概念，学生常处于不同的学习阶段。而对于间一概念，有时也可能同时在两个不同的阶段上进行运算。

用结构化材料进行的直观算术

前面我们强调了计数的数在教学中应当优先考虑。自古以来，直观算术的教学法都试图将计数过程系统化，也许至今好的教学方法也仍然如此。儿童通过继续数数来学习加法，通过往回数数来学习减法，通过按两个一数、三个一数等数数方法来学习乘法等等。

自古以来，结构化材料在系统计数的教学中起着

重要的作用，没有迹象说明这种做法应当改变。文恩（Venn）图的一个很大缺点便是忽视了结构化的必要性；学生当然也应该学会用无结构的材料来学习，从中学会如何为其建立结构；但像文恩图那样使用无结构材料或是故意破坏结构，那只能是一种理论上的满足，对算术教学却毫无用处。

文恩图的出现妨碍了对系统计数的学习。在做加法运算时，它们将学生引向重新数数，而不是继续数数。我还未发现用文恩图教减法的方法，我所见到的最聪明的方法是，用 5 只鸟，3 只栖息于树，2 只在飞，来解释减法 $5-2$。用文恩图解释减法大多要用拙劣的语言，即使是对成人也不例外。奇怪的是经过这么多失败之后，人们仍对文恩图深信不疑。

计算材料还必须满足另一个要求，那就是它的齐性，算盘上的石子、小球、算珠都被认为是等价的。强调材料的齐性，应当看作是集合论观点的推论，因为集合的一个元素就屉一个元素，别无它意。然而，今天大多数算术书作者却显然尽可能在表示集合的非齐性，并且希望儿童用非齐性的集合来学习算术——文恩图是一个大杂烩，包括各种不同的字母、数、星形、十字形与其他无意义的图形。这种想法的依据不是教学法原理，而是一个数学上的错误：黑板上两个不同

位置的 a 表示同一物体,作者的想法似乎是,在同一个文恩图中不允许两次出现同一符号,因为那就是表示同一元素,而不是不同的元素。这种想法是错误的,因为它先假定了文恩图是一个无意义的符号集合,而不是儿童必须计数的图象描述。有些教科书甚至想使儿童相信,一个集合的元素数目只有在所有元素都不相同的情况下才能确定。儿童当然也应该用非齐性材料来进行学习,但这并不适宜于训练计算技能。

关于材料的结构化,可区分为逻辑的(或传统的)和直观的两种观点,数系是用位值逻辑地构造而成;在测量及更具体的货币体系中有着相似的结构。在算盘上能摸仿出这种位值结构,一个算珠移到左边一列,即是原来的十倍值。但有的算盘就只是一个直观的结构化材料,每一个算珠都表示同一个单位。

限于纸上的材料

以前,对比较小的数的运算,总是借助于具体对象的集合,特别是手指,它是一个常用的工具。近年来有个趋势,就是具体有形的对象被它们在纸上的图形所代替,这种做法如果符合常识与想象,倒也是合理的观点;可奇怪的是,很多好方法不采用,却由文恩图控制着这一领域。我认为世界上最好的教科书就是匈

牙利的算术书，它完全避开了文恩图，只用自然的组合来表示集合，例如木块搭成的高楼，书架上的书，长凳上的儿童。并在这种背景下进行数字的加和减，如 $5-2$，即表示一个五层高楼倒塌了两层。

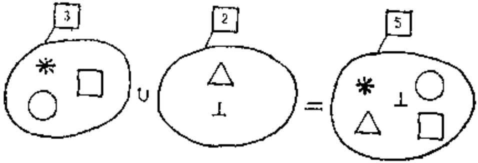


图 12-1

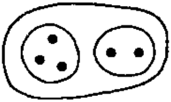


图 12-2

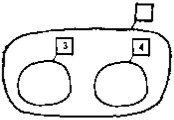


图 12-3

另一方面，我们也经常可以看到一些毫无意义的文恩图（图 12-1）。有的用加号代替 ∪ 号，甚至在代表和的图中用的对象与加项中的对象完全不同。自然也有一些正确的表示（图 12-2），它是儿童将两堆算珠相加的真实画像，但与匈牙利人的方法相比，就显得不自然，且抽象和拙劣了。图 12-3 的方法也难以令

人满意。另外减法始终是所有文恩图解法的绊脚石。相比较而言,可移动的具体材料和匈牙利人的方法为更好。

我想,如果材料不受限制的话,有经验的,富于想象力的教师会更好地利用所提供的条件去教学。限于纸上的算术教学材料有以下优点:第一,易于检查学生的个别活动;第二,给予无经验教师一个完全设计好的、可具体操作的教学法。这一点特别重要,它有利于将教学材料装订成册,以便使教学顺序及教学方法完全固定下来。这个好处不仅适用于算术教学的第一阶段,还可以进一步地扩展。

结构化材料的例子

许多现代教学材料都被有意识地建立了结构。表示数的基本原理是,每个单位具有相同的形状和大小,再适当地排列,就可以组成更大的对象。例如,第纳斯(*Dienes*)设计的单位立方体的教学材料,它按维数系统地排列,10 个单位立方体排成列,100 个排成面,1000 个又排成一个大的立方体,依此类推。也可以用不同于 10 的数为基。除了简单计算之外,这一教学材料还有其他的用途,如解代数方程等。儿童似乎比

数学教师更容易使用这一材料,因为数学教师太依赖于形式方法,反而不善于直观地学习。

教学法专家从未主张用纯计数来推动计算。上述材料偏爱系统的计数和结构化的加减法,而它们最终应导致算法的计算。据说儿童接触直观教学材料时间太长,会妨碍算法算术的过渡。我可以想象用手指计数确是一种真正的危险,而用现代的教学材料似乎不会形成这一弊端。因此,我想应该让儿童玩直观教学材料,他喜欢玩多久就让他玩多久,只要能熟练地掌握,材料愈复杂,儿童获得的知识也就愈多。

偶对集

从数量侧面看,两个自然数的积是由偶对集定义的。

设 A 是 a 个元素的集合,B 是 b 个元素的集合,则 $a \cdot b$ 是偶对集 (A,B)(即 (a,b) 的集合,$a \in A, b \in B$)中元素的数。图 12-4 的矩形模式使乘积 $3 \cdot 6$ 具体化了(这里 $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,3,4,5,6\}$)。毫无疑问,矩形模式应广泛用于乘法的直观教学。但在传统算术中,它虽未被忽视也未被推广,显然因为它

图 12-4

在算法计算中用处不大。为了看出 $3\cdot 6=18$,必须重新排列模式,这就破坏了它扩形状和对称性。为此,教学法专家相信还是计数方式好,只是计数的每一步要大于 1。系统计数在理论和实践两方面都是一个有用的工具,然而,有些现代算术书却完全无视这一点。

系统计数就是归纳地构造乘积,例如,将 $3\cdot 6$ 看作 $6+2.6$,一般地,将 $(1+a)\cdot b$ 看作 $b+a\cdot b$,同时以 $0\cdot b=0$ 或 $1\cdot b=b$ 为出发点。这是乘法表的训练原理,大多数台式计算机也是按这样的方法,用加法归纳地构造出乘积的。

乘法化归为加法是获得算术技能的最有效方法,但被某些教育改革家所否定,理由是"以后在域的概念中,乘法的出现独立于加法,因此在早期阶段也应考虑这一点。"这一论点是完全错误的,是纯粹的教条主义。在一般域的概念中,乘法和加法分开是合理的,但是一般域的概念只是个空盒子,至少需要举出一个域的例子,也至少要提供一个有加法、乘法的集合,如果不想将一般域的概念局限于有限域,那么首先形成的域就应该是有理数域。而在有理数域中,如果乘法不用形式的定义,就可以省掉不少麻烦。

但是不应该忽视乘法的矩形模式,新数学的一个优点就是强调矩形模式,可以训练学生从矩形模式中

看比如像 $7 \cdot 8$ 这样的乘积,还可以结合使用前面提到的第纳斯结构化材料,然而也不宜过于强调,因为这种直观方式对大多数教师并不适宜,他们还是习惯于系统计数,习惯于归纳地生成乘积和乘法表。

目前的教学理论对矩形模式有点过分强调,但奇怪的是可以运用矩形模式的实际应用反而被忽视。因为许多教育改革家所欣赏的自然数的数量侧面在各种实际应用中不起作用,那些因子往往是实数,甚至是负数,而矩形模式的数量基础不适合这些情况。

其实,在算术中常见的应用是组成偶对集。已知两个有限集,A 有 a 个元素,B 有 b 个元素,于是偶对集 (A, B) 就有 ab 个元素。例如:"5 个男孩、4 个女孩可以组成多少男孩 − 女孩对?"然而真正的应用通常是给定一个集合,要将它构造成一个偶对集。比如,学校的时间可以分成每星期的天数与每天上课的节数,于是就形成一个一周 5 天,一天 4 节课,每个星期有 20 节课的模式,这就将原始的学校时间集合 Ω 结构化了:A 是一星期中天数的集合,B 是一天中课时的集合,而 (A, B) 就是星期几和第几节课所组成的偶对集,这里 A, B 和 (A, B) 均可理解为 Ω 的子集的集合。

这样的例子随手可得。最引人注意的就是将一个

矩形按宽分成 5 条, 按高分成 4 条 (不必相等), 于是生成 20 个子矩形。如果子区间对应于单位, 即宽 5 高 4, 就可用矩形模式计算面积。至今我还清楚地记得我入学前的第一次数学经验——一个矩形的面积如何通过水平与垂直的分割来计算, 我对此大为困惑。我所以要讲这件事, 是因为成年人太容易忘记究竟什么能使儿童吃惊。现在我才真正理解了那次经验, 重要的不是 5 个横条与 4 个竖列的集合可以算出 $5 \cdot 4 = 20$ 个对象这一事实, 真正使我困惑的就是一个无结构的矩形, 可以进行构造, 并使之结构化。我父亲将它画在沙滩上, 书上的矩形加上所有的辅助线都不如这个原始结构直观。

偶对集的势等于因子集的势的乘积, 这一点连傻子也能记住, 但就像问题中的一般集合必须由特定集合来代替一样都不是我们所要讨论的问题, 唯一相关的问题是偶对集的结构必须由学生来创造。传统算术中只用矩形证明面积公式, 接着就忘记了矩形的结构化。当然计算边长分别为 23.46*cm* 与 17.89*cm* 的矩形面积, 没有人会画一个矩形, 并按这些数字来重分。因此, 面积公式在算术教学中是不可操作的。但学生可以想象这种重分, 要做到这点, 他还必须作足够的练习, 即如何将一个集合结构化为一个偶对集。一个矩

形在两个方向上的重分应该是按照两类特性构造一个集合的应用和具体化,而且这种重分不应局限于等距离的。

虽然我强调偶对集可作为一种构造方法,但同时我也必须强调在许多情况下不能使用它。如前所述,如果由 5 个男孩、4 个女孩组成全部男孩 -女孩对。偶对集确实是在集合论意义下的正确模型,然而更多情况下偶对集并不适合。例如,5 只猫,每一只猫有 4 个爪,共有多少爪? 再如,5 人会议必须指定一位主席和一位秘书,共有多少种不同的指定方式? 这类问题的数学模型就不是偶对集,而是从集合 P 到集合 Q 内的映射,使 Q 的所有元素都有相同个数的原像。同样,m 只篮子,每一只有 n 个鸡蛋,其中鸡蛋的集合也不能构造成为偶对集,只能通过一个映射 f,将每个蛋映射到它所在的篮子。在这一映射中,像集的势是 m,而每一个像恰好有 n 个原像。

这一模型在教学中应该充分运用,它是集合论概念的一项极有价值的应用。

矩形模型的推广

一旦利用矩形模型来直观解释自然数的乘法,那么分数乘法马上就变成最直观的运算了。单位正方形

可以用 $5\cdot 4$ 个边长分别 $\dfrac{1}{5}$ 和 $\dfrac{1}{4}$ 的矩形来填满，这样一个矩形是正方形的 $\dfrac{1}{20}$，于是 $\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}$。同样可直观地得出 $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{20}$。

这里将矩形面积解释为边长之积，或反之，将两个量之积解释为以给定因子为边的矩形。众所周知，古希腊的几何代数中两个量之积经常被称为矩形，这个术语至今还留下痕迹，我们总是将 a^2 读作 a-方。在积分概念的定义与应用中，乘积被解释为矩形仍然起着很大的作用。有人以实验揭示，儿童会自发地将力矩看作是力与力臂之积。

以矩形作为乘积的直观形象应当进一步发展，即不仅用边长与矩形面积，也不仅用自然数因子为例，这是积分概念中的要求，而实际在更为初级的阶段就可以作些尝试，比如可将人 − 小时，千克 − 米，千瓦 − 小时和瓦映射成单位正方形，用这些标准测得的量作为矩形，例如将 100 人 − 小时（瓦）看作是 5 人（安培）和 20 小时（伏特）的矩形或是 4 人（安培）和 25 小时（伏特）的矩形等等。具体数的乘法在应用与教学中都很重要，但这里我只想强调它的直观形象。

矩形模式最重要的应用是时间乘以速度得到路程（或体积乘以密度得到质量等）。事实上,时间并不比路程长更为直观,而速度、密度等也只是导出量,必须将路程长除以时间,质量除以体积才能得到它们。因此人们应当先有对不同速度的体验,估计它们的相互关系,首先是“多”和“少”,然后是“加倍”和“一半”,最后才会找出速度的精确测量。这一过程可在重量（质量）与体积上再现,也可在许多其他的量偶上再现。从这些例子中,将一般原理具体化,最终形成一个明确的公式。当然也可以将速度和类似量的计算规则直接告诉学生,但这种方法总是不很成功的。

在形成速度概念之前要经历一段漫长的过程。在算术教学的早期阶段,人们应该用逻辑上相似但更为直观的概念,如单价（价格与数量的商）。但一旦出现速度概念,就应得出所有直观表示,应该展现作为“时间”与“速度”之积的“路程”矩形,也应容许可变速度,至少要防止学生认为速度是常数。对于等加速运动,其路程的测量应该是速度图象所限定的三角形面积,并且通过这样的方法有意识为学习一个函数的积分就是函数图象所限定的面积作好准备。顺便指出,图象也是一种直观形象方法。

两种除法

在竭力提倡直观模型之后，必须谨防任何夸大直观的做法。

乘法的矩形模型关于因子是对称的，而当具体数相乘时就没有对称性，如果千克或件数乘以单价，工作时数乘以小时工资，月数乘以 30，则在乘数与被乘数之间或多或少地存在着明显的区别。

教学法专家在除法中觉察了这个不对称性，由于除法本身是一种高度直观的运算，“5 人分 20 只面包，每人得多少?”与“分 20 只面包，使每人得 4 只，可分给多少人?”两者从直观上看，就是截然不同的事情，前者 20 只面包由 5 人分称为分配除法，后者 20 只面包除以 4 只面包是比的除法。要求学生用不同的方法解两个问题，特别是两种情况下的长除法是不同的。

确实一般教师应该意识到，具体问题的提出是有区别的，即使在分配除法中也不是唯一的。进一步可考虑所有的除法，面积除以长度得到宽度，千克除以体积得出 $\mathrm{kg/cm^3}$，路程除以时间得到速度等等。为了相容起见，应当给所有问题发明各种特殊类型的除法，不能认为两种除法就比成百种除法更合理。但是数学的特征就是把同构的步骤归纳成抽象模式，矩形

模型就是通用于乘除法的模式。学生应学会以矩形模式解释具体数的乘法,数量数可以相乘,测量数也可以。使用模型时,建议注意因子的对称性,于是就不必再按照哪个因子作除数而区分两种除法了。

我也认为应该训练学生解两类问题,如“4 乘以什么得 20?”与“什么乘以 4 得 20?”等等。但是不要在每种情况下得出一个特殊的法则,而应理解为它们具有共同的模型,所以一种法则就足够了。我所以提出这个论题,就是因为如果某些教学法专家不是从量的基础理论出发来考虑除法,那么两重除法的问题就会一代一代地死灰复燃。

关于数轴的两个错误

由于传统的束缚,数轴总是画成水平的。而大多数常见的数轴却是垂直的:如温度计,房屋的层次,量身高的设备。事实上水平数轴对幼儿并不适宜。可能大家都知道应该怎样去做,但总是不能改变,因为传统实在太权威了。

通过极化可以形成许多概念,比如正 – 负,左 – 右,但对两极却并不能真正辨别。有些儿童知道从左到右不需要太长时间,但他们不会应用。例如,拨盘上从 d 到 b,钟面上从 3 点到 9 点,究竟是右转还是

左转。我从报纸上看到有些地区的居民辨别左右很困难，而只能代之以东西南北。成年人往往对儿童遇到的极化困难缺乏理解，他们以为这是不言自明的，与右手相应的当然是右腿，右眼以及右转，可是儿童对掌握极化概念却很困难。我不知道困难来自动觉方面还是来自直观领域，也不知道是否有这方面的研究。

自然数首先是作为数量的数，或者是作为计数的数，与时间序列相应。时间也有一个极化过程，那就是过去和未来，但这是一个自然强加于人的极化。要画一条直线并解释为数轴，还需要一个方向，通常按习惯在两个中间挑一个。水平或近似于水平的直线，常按画的方向从左至右定向，但垂直的直线却常与画的方向相反，从下到上定向。书写材料的上下也按习惯规定，奇怪的是所有文明世界都有同样的惯例：靠近书写者的那边是下。儿童开始时对此并无固定想法，但所有儿童图书上所画的人和动物都是按这种方向站立着，于是他们很快就被灌输了“上下”方向。

对幼儿使用数轴，我相信画出由下到上的垂直定向，要比“左－右”的水平定向好得多，也许画条倾斜的数轴会更好，比如借用某些游戏中倾斜的梯子。当然这个建议不大可能被采用，因为水平的数轴太根深蒂固，而且垂直的甚至倾斜的数轴会严重破坏教科书

版面的美观。数轴表示中还有另一错误，数轴像许多尺一样画有分点或短线，在其左边写下 1,2,…… 当然不写 0，这就造成儿童用尺时常犯的错误（从 1 量起而不是从 0 量起）。曾见到一数轴，1,2,…… 这些数字恰好写在分点中间，作者显然想给区间编号，这件事本身并不蠢，公元的纪年就是这样做的：公元1年从耶稣降生开始，他的第一次生日就是公元 2 年的开始。可是这个方法用于表示纪元前就不符合实际了：因为纪元前1年之末耶稣降生，因而 0 年就不存在了。那些想给区间编号的教科书作者，当他继续探索数轴的负方向时，必将遇到困难。

作为一种形象化工具的数轴

便用算盘时，认定自然数就是算珠数量，而使用第纳斯结构化材料时，就将自然数看作单位立方体的数量。数轴完全抛弃了这些观点，一系列等距离点像路边的房屋一样编号，而且该系列还能越过 0 而继续向左。所有我看到的教科书都是在教了半年或一年的数量数以后，突然地转向数轴；简单地运用教过的数，根本不涉及数量定义。事实上，数轴的计数特点（虽然受了一种序数方法的限制），即使孩子们也是早就很熟悉的了，因为他们在校内外、课内外甚至许多游戏

中就早已接触到。可是情况正好相反，数的概念中最活跃的计数侧面，在教学中往往受到抑制，却通过枯燥的教科书来教数量侧面；借助于数轴人为地将算术教学孤立于儿童的生活之外，使儿童就像暖房里的花朵一样。

数轴的直现性与前面提到的直观材料不一样，它与位值制无关，因此对于算法计算没有用处，但可以在数轴上直接看出很多东西："多与少"可由轴的方向直观表达，加法具体化为向右移动，减法则是向左，乘法具体化为伸缩（放大或缩小）。把自然数嵌入数轴就表明数轴所包容的不仅是自然数，这预示着数域与运算的扩展。此外映射可以较早出现，毫无疑问这是一个有利条件。数轴好像对各方面都是有价值的工具，与其他直观材料相比，数轴是确定的、可长久使用的，它不像有些材料只用一会就被放弃。但要注意一种危险的倾向，那就是有人对数轴寄予的希望过大，走得过远。

数轴是否称作教学材料那只是一个名称问题，也许有可移动导轨作为数轴上的计算模型，或像计算尺那样的装置。数轴的原理是简单的，具体化则可以多种多样。数轴可以三种方式用于教学：

（1）数轴作为尺，其上的点固定地对应于实数，即尺的解释或实体解释。

（2）直线上原点、单位、方向均可任意标出，点可由实数标出，即坐标解释。

（3）直线作为固定的基础，数像算子（加法算子、乘法算子）一样活动，即算子解释。

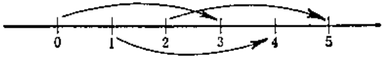


图 12-5

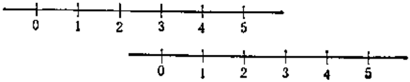


图 12-6

先说明如何在实体解释中表示加法，以后再阐明为什么第二、第三种解释从教学法观点看应予否定。我在现代教科书中看到两种方法：（i）以箭头表示 0、1、2 分别加 3（图 12-5）；（ii）数轴像尺一样向右移 3 个单位（图 12-6）。两个映射均可想象为由单位跳动而生成的。按照这个想法，向左就解释为加负数。这样负数首先只出现在函数记号中，但立刻可导出它们在数轴上的位置，于是可将 N 扩展成 Z。

这样，映射就被人们用这种方式所理解了，即数

轴上的一个元素被指派到数轴上的另一个元素,而不是改变点的标记,这也就是今天人们所理解的几何变换:点被指派到点;同样,空间运动被看作是函数空间的算子。这是直接揭示映射过程的通用方法,也是教学上最有效的方法。

坐标解释

坐标解释方法将点与数互相分离,所以它的应用范围有限而且也不太明确。以前常把变换解释成坐标变换,物理学家至今仍保持着这一习惯。当然,只要你固定一个坐标系,并且只作一种实际解释,那么是否用坐标就没有关系了,因为将坐标与点分开只是一种不必要的重复。但是推崇坐标解释的人喜欢将这种解释扩展到变换,于是这种做法就显得不自然了,其目的也不明确了。

在数轴上引进一种新的刻度,方向与单位不变,只是新的原点放在原来的 3 上,原刻度用蓝色,新刻度用橙色。加 3 就解释为改变标记:同一点新的标记 x 对应于原来的标记 $x+3$。如果说加 3 就是从新标记对应于原标记,这种提法岂非太蠢!实际上它可以改说成加 3 就是将原点向左移动 3 步(或者如果你愿意,说成向右移动 -3 步)。可是这对那些正为理解左

－右极化而苦恼的学生来说，是很容易被弄糊涂的，特别在数轴被画成垂直方向时看起来更荒谬。

乘法也一样，乘以 3 表示除了原蓝色刻度以外，还引进新的橙色刻度，然后对原标记 $3x$ 的点指定新标记 x，或是将原单位缩小成三分之一。

记得在我大学第一年时，所谓的协变，逆变令我受尽了折磨。当时我对它一点也不理解，直到我自己教一年级课，将它放到现代线性代数结构中才弄懂：

> 简单地说，就是：n 维向量空间 R 可以用 $e_1, \cdots, e_n$，为有序基的坐标来描述，点 $x=\sum \xi_i e_i$ 的坐标就是 $\xi_1, \cdots, \xi_n$，如果另选另一组基 $f_1, \cdots, f_n$，而
>
> $$f_j=\sum_i a_{ij} e_i$$
>
> 于是点 x 就有新坐标 $\eta_1, \cdots, \eta_n$，且满足
>
> $$\sum_i \eta_j f_j=\sum_i \xi_i e_i$$
>
> 由此 $$\xi_i=\sum_j a_{ij} \eta_j。$$

这表明坐标变换是相对于基而言的，用现代术语很容易理解，但需要到学习的高级阶段才行。

我想，如果引入这样复杂化的运算，数轴就会失去它作为形象化工具的特性。当然到一定的时候必须训练原点与单位的改变，这是解析几何或线性代数的坐

标变换问题,教师知道这是困难的一章,但并不能因此就把它说成是一种把引进运算和说明它的直观表示的过程都弄得复杂化的方法。

算子解释

在算子解释中,数并非等同于直线上的点,而是看作直线的映射,将直线看作一根刚性的棒。直线是基础,而数学的实质则是关于直线的运算。3 不是直线上的点,只是将每一点向右移动 3 个单位的映射;3 与 5 的和是映射 3 与映射 5 的复合映射,即右移 3 与右移 5 的复合,结果就是右移 8。另外的说法是:3 是大小为 3 且指向右面的一个箭头,可以将它放在直线的任何地方,箭头相加就是将它们首尾相接。

这是高等数学中普遍使用的方法,看起来很优美,而且也是正确的。常用的加法解释缺乏对称性,一个数加上另一个数,从文法上分析,一个是运算的直接对象,另一个却是间接的;在数轴上看起来也一样,如果 5 加上 3,5 是一点,3 是一个运算,结果得到 8 又是一点。而借助算子解释就可消除不对称性。

根据算子解释,自然数集 N 由数轴上整区间的右移组成,或是由可移动的箭头组成。要得到乘法,可以考虑加法半群 N 的自同态,即映射 f 满足

$$f(a+b)=fa+fb,\quad a,b\in N。$$

这当然太抽象了,要它能起作用,必须使 N 有更具体的实质,N 不应该由映射组成,而应该是基础本身。我们应该将 N 看作是由轴上任意固定原点出发的箭头所组成的链,从而将 N 嵌入数轴。于是 N 中的加法就成了点的加法而不是箭头的加法,这时才可以讨论乘法。乘法是具有加法结构的数轴的伸缩。将 1 映成 a 的伸缩被称为乘以 a 的乘法,这又是不对称的,因为假如 a 与 b 的积 $a\cdot b$ 指 b 乘以 a 的结果,那么 a 是乘数,b 是被乘数,这又一次破坏了数学的美。看来更好的办法是定义两个伸缩的乘积,而不是将伸缩就看作乘积。将 1 映成 a 与将 1 映成 b 的两个伸缩的乘积定义为两个映射的乘积,而 ab 就定义为乘积映射下 1 的像。以后又可将从 1 到 a 的伸缩等同于数轴上的点 a,接着再对它进行到 b 的伸缩,从而再次得到 ab。再往下,就不是将加法与乘法运算定义为映射,而是将直线的某些映射看作是群(或半群)的元素,加法与乘法作为群的运算引入,到以后才将群元素与数轴上的点等同起来,所有这些原理与细节,教师都应理解并教给学生。

第一个真正了解这些困难并顺利加以克服的人是第纳斯。他抓住一点,就是将数解释成为算子不可能

是无限期的，某个领域的算子，当它要在该领域中进行运算时，必须重新将其解释为实体。这种重新解释应该小心进行，因为只有当学生对最初的领域已经熟练掌握到操作时可以不用直观的联系，那才有可能实现。所以尽管数的算子解释能给教学带来好处，但最好不要夸大这一点。对教师与学生来说，应当使事情更为容易，而不是使之更为复杂。最终目的是将数作为实体，这是丝毫不容怀疑的，而将数看作算子只会妨碍这一观点。

某些教学法专家将数的算子解释用于乘法情况，特别是分数乘法。如果将数轴放大 3 倍看作是一个映射并求其逆，就得到缩小 3 倍，可写作乘以 $\frac{1}{3}$，这就是 $\frac{1}{3}$ 的定义：用乘法算子解释缩小 3 倍。放大 5 倍与缩小 3 倍的复合，根据定义就产生乘法算子 $\frac{5}{3}$；再将这种算子相乘，比如 $\frac{5}{3}$ 乘 $\frac{7}{4}$，在映射复合的意义下就是一个直观的运算，乘法规则也很明显，运算对象的加法、乘法关于加法的分配性也容易推出，但是无人能够解释为什么这些算子不仅可乘，还可相加。分数相乘在教学上从未遇到过任何麻烦，这是最容易的分数

运算。但在分数被解释为算子时,加法仍是一件模糊不清的事,至于除法则跟本不能以此方式引入。

实体解释

一开始就确定数是实体,而不是算子,数被固定于数轴上,不能随便移动,也不考虑由于原点、单位改变所引起的变化,映射是把实体指派给实体。

前已提及,许多人不喜欢这种说法:加 3 就是将 5 映射成 8。其中 5 与 8 是实体,而 3 却是一个算子,因为其中缺少数学的对称美。乘法也一样,5 乘以 3 得到 15, 这里 5 与 15 是实体,3 又是一个算子, 也不对称。其实这是解释不当的缘故,以乘法为例,3 是一个数,是数轴上的一个实体,就像 5 与 15 一样;但 3 同时也决定了一个算子,即起到将某数 3 倍的作用。这是日常语言中的表达方式,既是数 n,又是算子 n 倍,两者可以很清楚的区分,为什么我们不能借用这种微妙的处理方式呢?

如果将 3 倍的运算表示为

$$3\cdot : x \rightarrow 3\cdot x, \quad \text{或} \quad \bigsqcup_x 3\cdot x,^{①}$$

① $\bigsqcup_x 3\cdot x$ 表示 $3\cdot$ 是 x 的一个函数, 同理, $\bigsqcup_x \cdots\cdots$ 表示 $\cdots\cdots$ 是 x 的一个函数。

其中“3·”表示函数符号。对任意数 $a \in N$（或 $a \in Z$，或 $a \in R$），它也决定了一个函数 $a\cdot$，即

$$a\cdot : x \to a \cdot x, \quad 或 \quad a\cdot = \bigsqcup_x (a \cdot x)。$$

这样就很容易处理数 a 与算子 $a\cdot$ 之间的转换了，两者记号不同，也就不会使学生困惑。（注：这些函数记号当然不是教给学生的语言，只是进行教学理论分析的语言。）

为什么加法不能作同样的简化呢？以“$a+$”表示算子：

$$a+ : x \to a + x, \quad 或 \quad a+ = \bigsqcup_x (a + x),$$

意思是右移 a，这里数 a 是实体，同时它又决定了一个算子 $a+$。

同样，减法可理解为函数

$$- : x \to -x, \quad 或 \quad - = \bigsqcup_x (-x),$$

可将它形象地看成是关于原点的反射。而如

$$7- : x \to 7 - x, \quad 或 \quad 7- = \bigsqcup_x 7 - x,$$

它是数轴的一个反演，使 0 与 7 交换（图 12-7）。一般的，

$$a- : x \to a - x, \quad 或 \quad a- = \bigsqcup_x (a - x),$$

它是使 0 与 a 交换的一个反演。当然可以将“$-$”理解为“$a-$”的特例，即表示“$0-$”。

儿童掌握减法的这种形象化表示毫无困难。如进

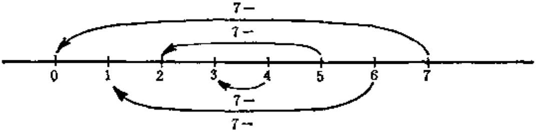


图 12-7

行如图 12-7 那样的反演,使 0 与 7 交换,这时数 3 对应的数就是 $7-3$ 这一结果,儿童理解 $a-b$ 要比成年人更快,因为他们不受算法的约束。

数轴的系统化

最初,数轴上标出的点只是自然数集 N 的元素。加 3 即右移 3 个单位,而加 3 与加 5 复合,即得加 8 的运算,由此可导出加法的结合律。减法"7−"是交换 0 与 7 的反演,它的直观价值前已提及。$(a+b)-b$ 和 $(a+b)-a$ 有着不同的直观意义。

为使加法的求逆不受限制,负数的像就必须出现在数轴上。于是 (-3) 被解释为加法算子 $(-3)+$ 中的决定性部分,而算子 $(-3)+$ 则被视作算子 $3+$ 的逆;或是为了使 $a+x=b$ 这类问题中的解 x 不受限制,而先在数轴上标出 $-1,-2,-3,\cdots\cdots$ 但 $(-a)+$ 仍作为 $a+$ 的逆,而 $b-a$ 就是 $a+x=b$ 的解。

正因子的乘法可理解为数轴的伸缩,因子 a 即表

示将 1 映成 a 的伸缩,但如何解释负因子的乘法在此上下文中并不明显,这有待以后讨论。乘法像加法一样可以复合,也可以推出相应的规则。最后对乘法求逆,比如乘 3 的逆,就出现了分母为 3 的分数,而 $\frac{1}{3}\cdot$ 就成为一个新的乘法算子,将 $\frac{1}{3}\cdot$ 与 $7\cdot$ 复合就得 $\frac{7}{3}$,于是得到一般的有理乘法算子 $r\cdot$,这里 r 是有理数(也可以负数)。

分数被解释为算子,形象而直观,不少人将其用于分数的教学,课堂实践也令人满意。但这个方法有局限性,如果分数能以某种方法解释为乘法算子,那么分数相乘就像映射复合一样是个自然的过程,可是这种算子的加与减就很难理解了。

于是为了使分数加法能够形象化,就不是将分数作为算子,而是想象成对整数集 Z 的乘法求逆时,分数就出现在数轴上。对数轴还应再重分,使分数的加减也可看作是数轴上的移动。

除法可作为乘法的求逆,但无论用数轴或是用另外的形象化手段,或是什么都不用,对于非整数的除法总是一种形式运算,找不到它的直观本质。在数轴上或是用矩形模式,乘法总可看作某物的倍数,但除

法却不能反映分配过程,当然可以将除法解释为乘法之逆,但这是一种逻辑解释而非直观解释,要理解这一运算,需要具备的前提与算术中常用的大为不同。

还想指出一点,为了直观处理算术运算,数轴这一工具也并非万能的,没有哪一种直观材料或模型可以复盖整个领域,但若共同使用则可以取长补短。有一种自然的倾向,就是往往过于强调某一种直观材料,其实教学法专家应该在他的思想实验中对各种可能性进行试验,如果某些方法失败,那就应该放弃。就像实验科学中,若有一个实验失败,就绝不会自欺欺人地将它保留下来,那为什么教学理论却要谋求自身的失败呢?

作为一种形象化工具的图象

我们已经多次讨论了具体数的相乘,它的一种直观形象就是矩形模型,另一种直观形象是借助于线性函数的图象表示,有人提出过一个可使线性函数具体化的装置,即将可动的透明尺安装在一块格子板上。传统上由比例运算法则所统治的领域很少使用图象表示,一张价格表是很实用的,它给出了某商品从 1kg 到 10kg 的价格。但是一个图象会更令人信服,在路程作为时间函数的图象中应格外留意:运动不一定是

等速的。很少有人真正知道速度（或称速率）是什么，如果你从伦敦飞到阿姆斯特丹，55 分钟的飞行距离是 350km，而飞机上广播正在告知旅客，飞机正以每小时 850km 的平均速度飞行，这里的平均速度常常是指最大速度，不管怎么说，非等速运动的图象不容忽视。

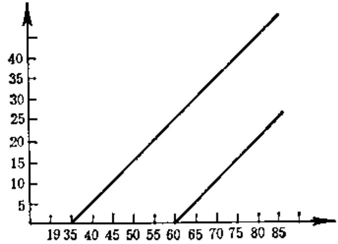
用图象表示函数显然不仅是一种形象化的工具，也是一种解题工具。即使是那些不现实的自行车相遇与超过问题，控制湖水量的源与流问题，以及酒与饮料的混合问题，都可以通过图象来自然地解决。当然这并不是说要去处理这些问题，我只是指那种模式，它同样也通用于一些合乎情理的题材。

在函数出现以前就使用图象，函数的图象表示就可以更系统地学习了。例如，男孩生于 1962 年 7 月 1 日，他父亲生于 1937 年 1 月 1 日：什么时候男孩年龄是他父亲年龄的一半？［图 12-3(1)］又如列车从 A 和 B 两地以不同速度相向而行：什么时候两车相遇？［图 12-8(2)］再如，甲每月从自己的帐上转一笔金额到乙的帐上：什么时候乙的帐户总金额会大于甲？［图 12-8(3)］最后以船的顺流或逆流而行为例说明图象加法与减法［图 12-8(4)］，以时钟的两个指针的定期相遇问题为例说明周期运动的图象表示［图 12-8(5)］。

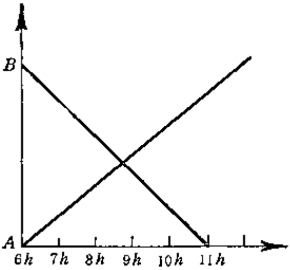
最早讨论的函数

$$\bigsqcup_x (a+x) \quad 与 \quad \bigsqcup_x a\cdot x$$

自然不应忘记，而且其中的数值变量 a 有着非常具体的含义。

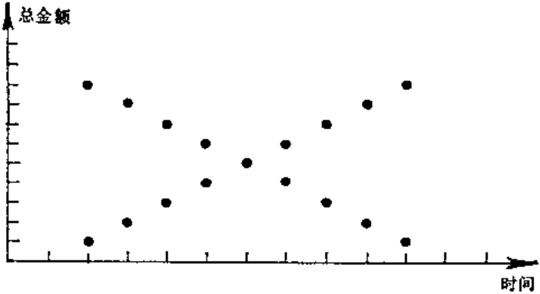


(1)

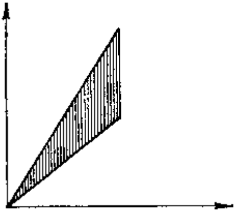


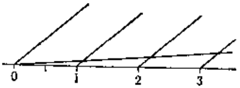
(2)

图 12-8



(3)





(4) (5)

图 12-8

杠杆

我曾多次提到杠杆可作为一种形象化的工具，它不仅可用来显示负数及某些运算，还能显示代数规则。

整数（或有理数、实数）在杠杆上有两种表示法：一是像水平数轴上那样，以杠杆臂上支点右边的距离为正，左边的为负，以支点作原点；二是作为力（重量），从上至下为正，反之为负。两类不同的量的乘积在物理上称为矩（力乘力臂），其加法也是物理意义上相加。如果力矩的和，即乘积的某种和为零，则杠杆平衡。

如何解释两个表达式的相等？平衡应当以天平两侧的量值相等为标准，但杠杆上的距离，一侧为正，另一侧为负，无法比较。平衡即力矩和为零，即某些乘积表达式之和为零。也许可以将力矩理解成直观的旋转效应，在不同臂上由重量实现的两种表达式如果显示出同样的旋转效应，则它们是相等的。但旋转运动与力矩都不够初等，要在相当高的水平才能应用。

还有一种更具体的方式定义杠杆上两个表达式的相等，即它们都与在某一确定力臂上的一个确定重量

相平衡,如 $3\cdot(-4)=4\cdot(-3)$,因这两者都与 $4\cdot 3$ 平衡(图 12-9)。

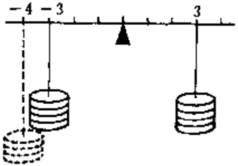


图 12-9

杠杆表示生成了乘积的和,但如何表示减法?用“取走”无法解释,当然如有需要可以设想减数悬挂在杠杆的“错的一侧”但这种解释实在太不自然了。

尽管有这些问题,我还是相信杠杆是个有价值的装置,只要不是将全部算术都压上去使之负担过重,我们可以利用它来解释代数观念,并给出负数的一个最重要的应用。使用杠杆可以显示某些表达式是正还是负,即它们使杠杆右转还是左转。我说过旋转效应不容易理解,那是指定量的理解,如果从定性的角度,即只要决定某个力是使杠杆右转还是左转,那是容易感受的。用这个方法可以决定 $5\cdot 7, (-5)\cdot 7, 5\cdot(-7), (-5)\cdot(-7)$ 这些表达式中哪个是正,哪个是负,特别是杠杆还能简单地显示出乘积中的负号可以相互抵消。

可能要问:为什么对 $(-a)\cdot(-b)=ab$ 要作这么多的解释,而不是采取简单规定的方式?而且就算真的需要解释,那又为什么不限定一个例子?回答是因

为通过一个负号形成相反的运动是通向负数的全部应用的线索；也因为使用乘法是一种检验标准，用以了解这种应用是否符合实际，是否深入。算术以后的数学充满了关系，你甚至一个也不能丢失，但是你当然应该忍住，不把一个模型挤干到最后一滴，在陷入困境之前就应停止，并推迟关于杠杆的更加系统的处理。

计算机

算盘是一个教十进位值的直观材料，计算机也是，当然我指的是非自动的，曲柄台式计算机（不是电子计算机）。我建议在刚引入加法，像 $8+5$ 时，就开始使用计算机，同时也不丢弃算盘。我们可以对计算机这个材料寄予什么希望呢？

首先是为学生今后进一步使用计算机打好基础，这方面相对来说并不重要。更为重要的是非自动计算机能帮助学生透彻理解十进位值制，它是位值加、减法和转换的直觉演示，它表明数字如何存入，乘、除如何由重复进行加、减法完成，以及什么是余项，小数点的位置如何等等。另一个优点是使学生可以面对实际，把学生从陷于计算错误而不能自拔的窘境中解救出来，特别在长除法中。

我知道有人反对,他们担心学生被计算机宠坏以后,就不再去学加法、乘法表的使用,当然我们要防止这一点。善于思索的教师会设计出许多对策,如让学生用计算机算出 $1\cdot 7, 2\cdot 7, \cdots\cdots$ 并记下结果,这远比用他自己的方法建立乘法表来得可靠,而且也达到了同样的目的;让同学之间比赛乘除法,一个用计算机,一个用心算,那个用汁算机的人会知道而且永远不会忘记,计算机计算 $9\cdot 9$ 也需要很多时间。

在上述各种直观方法中,使用汁算机计算最接近笔算。当然我并不取消多位数笔算,如果我以后不再讨论这些技能,那只是说明我不知道在传统的教学理论中,除了和计算机使用有着密切联系的内容外,还应加上什么。随着计算机使用的推广,心算、笔算的技巧无疑将会有所削弱,但这并不值得遗憾,虽然一百多年来,每一代人总在抱怨年轻一代算术技能下降了,可实际上,过去这方面的技能也并不像人们所想象得那么好。

但有两个算法我不能避而不谈——分数与比例运算法则,它们在传统算术中有着推理的而不是直观的基础,在这方面,它们不同于整数的纯算术算法。在此,我必须转向一个更为基本的问题。

推理方法与直观方法——比例运算法则和分数

算术的结构应当扩展到什么范围？在算术的教学中，数与运算一开始都是直观的数据，应用也有相当的直观性。接着算术逐渐变得愈来愈抽象，所涉及的数与应用问题的内容都超过了想象，熟练的教学法专家设计了更为复杂的直观工具，成功地通过了这些障碍。前面提到的线性函数图象就是其中一例，但在多于一个变量时它就失效了，在这个领域中传统的组织工具是比例运算法则，它非但不直观而且非常具有逻辑性。那些学过代数的人会用代数方法来解问题，即使问题比较复杂，他也会设置未知数以使问题代数化。教师与教科书作者如果懂得代数，却让学生以传统的算术方法来解这类问题，那是在骗人；如果他们不懂代数，那就只能带着学生在暗中摸索。这是双重标准的教学法，即将一个题材初等化。可是这种初等的描述只有那些掌握了非初等描述的人才能理解——这是一种该受指责的教学哲学的特性。如果代数是解一个问题的最适当的方法，那么学生像教师一样有同样的权利用这一方法来解。如果四年级的学生问：是否可以使用 x 来解？回答是：等到八年级。这是

宣告了教学法的破产,因为到了八年级,学生必须化更多的精力在下一个目标——二次方程上,根本没有机会再去从事四年级的算术问题,这样大多数学生就从未学会用代数来解。

用传统的应用题,我们能做些什么?三个量中 a、b、c 中,$ab=c$,已知两个量,求第三个量;或四个量 a、b、c、d 中,$abc=d$,已知三个量,求第四个量(例如,路程=速度×时间,或利息=本金×利率×年数等等,也包括"什么数乘以……,可得……"或是"必须将……乘以什么数才得……"的问题)。这些都是产生于算术而又非算术的问题,我们不应把它们从算术中驱逐出去,但也不应采取过去的做法。学生应通过多样化的直观方法去对付这些问题,直观方法自然处于准数学的基础水平,因而学生又不应停留在这一水平上,因为他还必须继续学数学。在这样的背景下,最早表现出来的数学动向,就是分析与理解一个人的行为,一些有才能的算术教学法专家尝试了这个方法,但却很少成功。他们希望学生能逻辑地分析自己的活动,先借用于日常语言——像这一类的阐述:a 与 b 的商是一个数,b 乘以它得 a。它确实比用 x 简单,但这种描述方式也就是我前面反对的人为的初等化,认为

学生不够成熟,不会使用 x,但却相信他们能用这样的阐述来解题,那是一个错误。

上述练习作为学习代数的准备是有意义的。但这一准备如果作得过早,由于学生还没有较强的数学思维能力,那就会显得无意义。但也不能延迟太久,以至错过为学习代数作好准备的机会。

对比例运算法则的讨论同样可应用于传统的分数教学,几乎不容怀疑分数教学是教学法的一大失败,我相信只要它仍然被限制在现有的算术背景下,它将继续失败。

传统上直观引入分数的效果极好,因为儿童可用直观的分数进行计算,但教师随即转向算法的分数,就使学生陷入了进退维谷的困境。虽然学了化简法则、四则运算法则以及混合运算,但这只是无意义的游戏。因为像 $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}, \frac{2}{3}-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}, \frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ 这样简单的运算,只要睁开眼就可在数轴上看出来,但对复杂的分数如 $\frac{127}{131}$ 和 $\frac{8}{47}$ 学生能做些什么呢?当然这些数能在数轴上找到大致位置,但学生先应学会粗略估计以免出错。分数运算中最有意义、最直观的是乘法。化简也有意义,虽然可以导出但缺乏直观。加减法相对比

较直观,但不易导出,也很少有意义。至于除法在算术中是最不直观的,难以导出而且是无意义的。复杂分数的运算在算术中是很难激发学生兴趣的。

复杂分数及其运算是教师的发明,它只能在高水平上理解,范·希尔(*Van·Hiele*)注意到并强调了一个事实,渗透于分数中的观念显然是代数观念,引入分数及其运算是为了使四则运算及其规则的适用范围不受限制,一个域关于某些运算封闭的观念完全是代数的,它是所有代数本质的基础。分数及其运算由于缺乏直观性,应该由上述代数观念导出。我认为唯一诚实的做法就是告诉学生,引入分数就是为了要求算术运算的适用范围不受限制。这是一种抽象的导出概念,几乎不受实际需要的影响。负数的存在也归功于减法不受限制的要求,除了分数与负数以外,其他的都可以直观作为导出的动力。

现今,人们作了许多努力以改进算术结构下的分数教学,其中有些是值得注意的,只要它们没有转移对现实问题的注意,我会第一个表示欢迎。如果这些努力只是在教学上有价值的话,那么它们同时也是特别危险的,因为它们只是推迟了对问题的真正解决,也许这是无限期的推迟。依我看来,唯一可接受的解决办法是在代数中处理分数。

这当然不是说要将分数作为数对的等价类。前节讲过,构造 $\frac{7}{3}$ 这一分数是为了解方程

$$3x=7。$$

于是取一个 x, 认为它是满足上式的, 我称这个行为规则为"代数原理"。两边乘以 5,得到

$$15x=35,$$

这就是说 $\frac{7}{3}$ 与 $\frac{35}{15}$ 是相同的。为了将 $\frac{7}{3}$ 与 $\frac{3}{5}$ 相加,可以由

$$3x=7 \quad 和 \quad 5y=3$$

导出关于 $x+y$ 的方程,即

$$15(x+y)=44,$$

则

$$x+y=\frac{44}{15}。$$

其他运算应该用类似方式来教, 意思就是将 $x, y, \cdots\cdots$ 看作是某些方程的解, 并利用通常的算术规则对它们进行运算。必然有人指责,这个策略要预先假定和、积等的存在性。我们不妨用一种正面的描述:假设和、积等的存在性,再严格证明扩展体系中的算术法则,以及和、积等的算法形式,这一点比存在性更为重要,因为这是经常需要用到的性质。

推理方法与直观方法——负数

关于比例运算法则和分数的教学，我建议从直观方法直接到代数方法。直观是有局限性的，长期限于直观教学将妨碍学生的思维。学习算术的目的是为了掌握算法的技能。

本世纪初的实验表明算术之所以薄弱常常由于对数的概念有一种顽固的直观看法。正常情况下，思维活动中的直观成分应逐渐下降，这并不说明直观没有用。学生能做 $7+5$，因为他以前曾直观地做过；学生能进行笔算，那是他的算盘经验的后效；如果说最终他能以各种方式熟练地应用算术，起决定性作用的可能就是他了解多种形式中运算的直观意义。

但并不建议太多地依靠直观作为教学工具，分数与比例运算法则的教学都说明，直观方法可能有效，但不够；我的结论是应该及时退出直观方法，而强调推理的方法，当然这种推理方法必须是真正的数学。

即使在早期阶段，也应考虑直观教学达到何种程度。在一形成算术法则时就要问，是借助于直观还是让学生用推理方法证明？交换律与结合律看起来如此明显，而它们的根据却只能在高水平上探究，当然可以不言而喻地应用，比如求 $8+5$ 就借助

$8+(2+3)=(8+2)+3$，这实际上就是一个算术法则，但是否需要点明呢？为了说明 $8+x=13$ 可以通过 $x=13-8$ 来解，只要利用加减法的直观意义也就足够了，即使像分配律，它是较高程度的算法，也没有理由认为需要比直观证明更多的东西，像 $a-(b+c)=a-b-c$ 这个法则也是非常直观的，人们常喜欢用词语去表达这个直观思想：为了将 b 和 c 一起拿走，可以代之以一个一个地拿走。

我认为需要超越直观而运用推理方法的首先是负数。我喜欢将负数放在分数之前，尽管按传统理解，分数是算术，负数是代数；负数及其运算可利用数轴直观进行，而且效果甚佳。但对此我心中并不踏实，理由之一是前面提到的极化的干扰，它可能降低数轴的价值。

我已经讨论过处理负数的一种推理方法，有一 x 满足

$$x+a=0,$$

另有一 y，满足

$$y+b=0,$$

要求加法与乘法满足通常的法则。于是从

$$(x+y)+(a+b)=0$$

推出

$$-(a+b)=-a-b;$$

从 $\qquad b(x+a)=0 \quad$ 和 $\quad (y+b)x=0$

推出 $$xy-ab=0,$$

则 $$(-a)\cdot(-b)=ab。$$

显然，教学负数的困难不在于引入，也不在于像 $3-7, 7+(-3), (-7)+3, 2\cdot(-5)$ 这些问题，而在于像 $3-(-7), 10-(-7), (-3)\pm(-7), (-2)\cdot(-5)$ 这类问题。论证一种负数教学的新方法，就得花时间去检查哪类问题包栝进去了，哪类遗漏了。

多年来我宣传归纳外推法，让学生填写下列表格：

$$3+2=5,\quad 3-2=1,\quad 3\cdot 2=6,\quad (-3)\cdot 2=-6,$$
$$3+1=4,\quad 3-1=2,\quad 3\cdot 1=3,\quad (-3)\cdot 1=-3,$$
$$3+0=3,\quad 3-0=3,\quad 3\cdot 0=0,\quad (-3)\cdot 0=0,$$

$$3+(-1)=\_\_,\quad 3-(-1)=\_\_,$$
$$3\cdot(-1)=\_\_,\quad (-3)\cdot(-1)=\_\_,$$
$$3+(-2)=\_\_,\quad 3-(-2)=\_\_,$$
$$3\cdot(-2)=\_\_,\quad (-3)\cdot(-2)=\_\_。$$

这是超越 0 的归纳外推，这个方法可以与直观方法相结合，由于它要通过计算与推断来检查，因而可以作为数轴的生动补充，如果不用数轴，那它就是最自然的方法。而且，虽然不是形式归纳，但蕴含着真正的数学，它再现了计算过程中计数的数所遇到的情

况，因而也预示了它在一个更高水平上可成为严密的证明。

应用算术

本节并不意味着，在算术教学中应用应该成为独立的一章。相反，我要强调它与“纯”算术的密切联系。事实上，这是一个老传统，算术教学开始于应用，又回到应用，至少到分数为止是这样的。浏览一下算术书就会看到大量丰富的应用，它内容详细、系统而且完整，看起来好像作者已经彻底分析了应用算术的所有可能性与必要性，其实这是悠久的传统留给我们的多层次积累，它的教育效果也确实不坏。从市场与商店可以看到很多人都掌握算术，特别值得注意的是算术教学不仅在算术上成功，在应用上也成功，这是算术教学与代数几何教学的区别，后者的题材脱离现实，人们掌握了暂时也不会用，这并非说算术的应用比较简单，只是因为算术教得比较好。

在“新数学”以前的算术书上有这类例子，印出一张火车时刻表，并提问“某人从甲地旅行到乙地，准备8点钟出发，应该乘哪次车？何时到达乙地？”我担心“新数学”会对这种陈词滥调耸肩一笑，因为问题没有叙述清楚。我们不应该求某一组火车出发时间的最大

下界吗？至少它也应该是个像样的公式，虽说只要它没有构成公理体系就不能算是像样的数学。

同一个计算问题可以出现许多不同的表达方法，例如：

（1）甲 16 岁，几年前他是 10 岁？

（2）甲 10 岁，乙 16 岁，乙比甲大多少？

（B）甲 10 岁，乙 16 岁，乙几年前与甲现在一样大？

是否要把同一个问题 16 － 10 编造出一千种不同形式？一般公民解这些问题都绰绰有余，如果你认为这太烦琐，那就证明你的算术已经学好了。

这么多人能学会算术是不是一个奇迹？这是奇迹，但也不是奇迹，它太容易解释了。因为算术教学密切联系应用，从而再也不会产生有关应用方面的问题。应用算术过去是，现在仍然是最直观的一章，也最接近学生的想象。

这样看来我似乎满意了算术教学的成果，那为什么我又为它花了这么多时间？因为我一点也不满意。我是否从中发现了大量错误？事实上我无法查证今天的教学对儿童的社会影响。我只能从现行的教科书来判断今天的教学。近年来的算术教科书有个趋势，就是离开应用，虽是想尽量直观——那是可喜的——但更强调抽象，就本身而言，这并非坏事，但抽象常常

伴随着形成体系，于是就要排除一切不符合体系的东西，这是危险的。数的体系是：自然数，整数，有理数，实数，而自然数的原理是势，只有少量应用才能适合这一体系，火车时刻表中的数是有理数还是自然数？在算术体系中没有时刻表的地位。传统的算术书清楚地表明问题从易到难的发展，不很强调系统性，同一问题一再重复只是改变数据。16 − 10 的问题借助各种可能的表达法分散在一个较长的时期内教，而不是一下子教，在新类型的问题中又重复着老问题，事实上，这种重复还很多，像这样的教科书在每个系统论者看来都是个怪物，没人喜欢怪物，然而每个数学家都喜欢系统性。

大量可供选择的应用题是连续积累下来的，也许到了该清理的时候，也许更为抽象比许多具体应用会带来更大的进步，但我看到有一种过于夸大的趋势，我担心这种趋势如果占了上风，我们的儿童将学习更多无用的数学，甚至还有比这更坏的副作用。

我承认，更抽象些可能会有效地代替应用并超越应用，这应该认真地研究，例如 16 − 10 的表达法可以归结为两个等价的问题，即“a 早于 b 多少？”和“b 迟于 a 多少？”再使用少量逻辑结构模式，还可以归结为同一问题。儿童当然应该学会将这类表达法解释成同

一逻辑模式的不同模型，在这方面，强调逻辑结构可能比强调算术更好。在算术教学中的这种逻辑结构是很值得研究的，通常改革家将逻辑领域限制得非常狭窄，他们喜欢的题材是关系。可能学生知道了“大于”关系的传递性，但这对算术教学是无用的。

儿童在算术教学中经常学到这些原理，但只是作为低水平的一种活动，不带有意识的知觉或至少没有任何明确的阐述，应该要求在这方面的教学目标就是将学生提到高水平。

这使我想起了代数，那儿的情况更糟，在算术中，我们只是抱怨学生无限制地停留在低水平，而在代数中，学生甚至连低水平也没有学会。无疑通过仔细分析具体情况会有所好转，但这就意味着要离开封闭系统这一象牙之塔。

我曾寻求过另外一些教应用算术的系统，其中并无什么新观念，有时我也尝试将其推迟到 6 ～ 8 年级，然而较早一些可能更容易成功。传统教学中应用算术是分散进行的，我并不主张以独立的一章“应用算术”来代替，我宁愿以综合的方式去引入问题，对详细情况用数值来表达同时又作算术的解释，就像以前的商业算术那样，那些问题今天已经过时，不能引起兴趣，但在描述统计领域内，这种处理是自然的，在这

方面，有些好的教科书取得了惊人的效果。在通常枯燥的抽象化之后，读到这种现实主义的书令人耳目一新。

第十三章

数的概念的发展——代数方法

我必须对题材特别是标题的安排表示歉意，因为将算术与代数截然分开，确切地说是在荷兰学制中，六年小学与中学是截然分开的。在小学六年级学完算术后开始学代数，这无疑是不对的，但实际情况是如此，这种情况也许还将继续下去。我相信高年级小学教师是能够将代数方法结合进算术教学中的，但有一个不利条件，即改革小学教育是一件危险的事情，一旦打开锁链，教师与学生都将无助地面临变革的数学潮流，这种数学是以“新数学”为幌子的。代数与算术分开，有一定的理由，那就是算术比较直观，接近现实，或至少它应该如此，而代数却典型地以形式符号方法为其特征。不可否认，传统的算术教学早就越过了界线，以冒充初等化的方式侵占了代数方法的领域，如分数及所有涉及比例运算法则的部分。在这些地方，代数方法比通常应用得更早些。

字母

代数开始的典型特征是文字演算。现代数学的进展在教学中倾向于更早将字母作为数学符号使用,集合是用字母命名的,其元素的名字也都是字母。

教学法专家与教科书作者都非常清楚在代数中引进字母的含义,每个教师也知道。如果不注意的话,代数很快会退化成 26 个字母的游戏,教师知道,这是个问题,一个关键问题,一个困难问题。教科书处理这一问题时,采取的是一个较慢的进程,这一发展由于商业意识或无经验的作者传播的所谓"新数学"的闯入而突然终止,使数学教学理论在这一点上倒退了一个世纪。现在与过去都有(不合格的)数学读者开始于"数有整数,负数,分数,阿拉伯数,罗马数,常数与变数。"一位荷兰教学法专家曾告诫过,要注意学生的一个倾向,即在代数中除了数集以外还设想一个字母集合。在一次旅行中,我打开一本新书,看到作者引入函数

$$(n, a) \to na,$$

明确地将其作为数集 Z 与字母集 L 这一集合对到单项式集合的一个映射,盛怒之下我将书丢出了窗外,这仍是相当不负责任的做法,烧掉它可能更安全!

几乎所有的“新数学”都引入了字母的集合。理由是显然的，人们不知道什么是集合，也不知道集合在真正的数学中的作用，因此他们不得不设法编造一些集合和集合应用的例子，但又不能用数集，因为数必须由集合来引入，于是剩下的只有字母集合可供使用了。字母的集合自然是非常合理的，因为集合可用世界上存在的一切东西来构成。但是引入字母的集合也是危险的，其危险性就像船只在北冰洋中失事，人们从一块浮冰跳到另一块上，但最终逃脱不了灭顶之灾。

古代的数学就已利用了字母，如 C 可用来表示平面上的一个点，表示哪一点没有关系，除非要求比如 C 在直线 AB 上，但究竟 AB 是上哪一点也没有关系，除非再要求比如 C 不是 AB 的中点；a^2 中的 a 根据需要可以是整数、有理数，也可以是实数；要求 $x^2-3x+2=0$ 成立，x 就只能是 1 或 2；“π”是希腊字母，它表示一个特殊的数。

“3”表示一个特定的数，“x”可表示许多对象，每次都需重新规定容许 x 取值的范围。如果 x 所能取值的集合未指明，则它可能是常量，也可能是变量。

教学法专家总是努力向学生解释这一点，学生很不理解怎么可能是 $a=b$，而不是 $a=a$、$b=b$？于是

教师编造了以下问题：a 可能是 2、4、7、11 中的一个，b 可能是 2、3、7、9 中的一个，什么情况下 $a=b$?（如果愿意还可用集合来提问）或者当 a、b 允许取以上数值时，$3u$、$2a+3b$、b^2 的值是多少？等等。

教师总是极度耐心地给学生灌输代数中的字母表示某种东西，如果不知道公式中的组成部分的意义，那么公式也没有意义，同时也灌输代数决不是 26 个字母的游戏的思想，但完全无用。

"新数学"的发明者本身受的是哪种教学？在这以前教的又是哪类数学？他们是否被现代数学的远景所迷惑而想脱离传统数学？他们是否意识到已经处在不稳固的基础上？最可能的解释是他们想使数学中出现奇迹，创造一种自力更生的学校数学。为了发现 $\{a,b,c\}$ 这样的东西，你必须在真正的数学中到处寻找，也许找到了 $\{1,2,3\}$，或者 $\{a,b,c\}$ 是方程的解集，……或者甚至令 a,b,c 是三个不同实数（则 $\{a,b,c\}$ 是三个实数的集合）。当然，若 a，b，c 是三个不同的字母，则 $\{a,b,c\}$ 只是三个字母的集合，但必须小心：$\{a,b,c\}$ 也可以是"x"，"y"，"z"，这最后三个字母的集合。

在"新数学"中，每件事情都是混乱的，模糊的。$\{a,b,c\}$ 是字母 a，b，c 的集合，它有三个元素，当然各

不相同，要学生求 $\{a, b, c\}$ 与 $\{1, 2, 3\}$ 的交，并使他回答交是空的。因为一个集合由字母组成，而另一个由阿拉伯数字组成，至于罗马数字则又组成了一个不同的集合。

“新数学”中类似这样的畸形是很普遍的，我担心那些一心奉献于教学事业的教师们，是否明白他们现在的工作首先要清除“新数学”的寄生菌，我更害怕面对在小学中接触过这些无意义内容的儿童们，我们的代数教师又该怎么办，他们如何教给学生，偶然 a 也会等于 b 以及因为 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$，所以 $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ 也成立？如何教给学生代数不是关于 26 个字母的无意义的游戏？到最后，我们的中学教师是否也会被传染？因为“新数学”的寄生菌正在冲击着一切。

这些还不是最危险的，我更担心的是那些认真而又严密的教科书，至少在数学上是正确的，如果它被指控为教学上的畸形，作者会回答：“你还想要什么？数学是正确的嘛！”

我手头有一本并非无错，但水平相当高的中学第一年（六年级）的数学课本。当然它是从集合论开始的，但几乎都是有限集，这在真正的集合论中是很难遇到的。书中总是将元素明确地写在括号内或

几乎总是表示成文恩（Venn）图。从不知道元素究竟是什么，常常用拉丁字母表示，有时也用点或其他东西。括号中的字母任意放在文恩图内，因此每个字母 a，b，c，……总是表示字母本身或文恩图中的位置。将 a，b，c……解释为变量是合适的，因为它们在文恩图中是任意定位的，但这并非作者的本意，学生也不能这样解释，在这个背景下始终不会出现真正的变量。如图 13-1 所示，是集合 $\{a,b,c\}$ 的文恩图，作者从来不提这样的问题：$x \in \{a,b,c\}$ 吗？答案应是 $x \in \{a,b,c\} \leftrightarrow x = a \vee x = b \vee x = c$，即 x 属于这个集合当且仅当 x 是 a，b，c 中的一个。然而"新数学"却正好相反，认为 x 恰好是另一个字母，或是文恩图中另一个确定而未表明的点，因此学生的答案应是 $x \notin \{a,b,c\}$。由于不提变量，因此即使有各种映射图象，也仍缺乏函数表示。该书大部分都是这样的表达方式，但又突然出现了"设 a 为自然数"并用 a,b,c 表示分配律及其他代数性质，即使到此时，"a"也只是 a，没有其他意思，既不表示数或任何东西，也不能被其他字母代替，它是个专用名词。接下去又突然出现了从未有过的变量概念，在做了一会儿练习之后，又同样突然地恢复了字母的原有用途。面对这种情况，学生怎么办？教师怎么办？小学生长期以来或者中学生

一年以来,一直认为字母只代表自己或文恩图中的确定点,现在却要求一下子将字母理解成完全不同的东西,即理解成一个任意的不确定的数,结果可想而知,学生毫无生路,根本学不到一丁点儿的代数。看来解决的办法只有一个,那就是把这种课本赶出教室。

图 13-1

这方面的罪魁祸首是“新数学”,上面所引的书就是这种新潮流的一个例子,显然作者从未注意到数学中存在变量这种东西,也没有注意到变量是用字母表示的,历来的教学法专家努力使学生习惯于字母的用处,而这些作者似乎从未注意到这个问题。“新数学”与传统完全割裂,整个自以为高深的集合论只是关于 26 个字母的无意义游戏,这是 15 年改革运动的苦果,因为多年来只是针对题材的革新,而对这种狭隘思想提出警告的人反遭嘲笑,任何教学理论的讨论均沦为笑柄。

我想先解释一下我为何先处理代数,然后才处理集合和映射。我的题材是按照分析次序而不是按照教学次序安排的,由于今天集合论放在所有其他题材之前已被看作当然之事,因为每件事情都是以集合论作为基础的,因此我们暂且接受建立的数学必须源于集

合论这一观点。但即使如此，也不能说数学的设计必须从集合论开始，数学为某些目的服务，学生必须学代数与分析。集合论能极大地改进数学教学，在此观点下，集合论作为改进教学的手段应该教。几年前出版的中学现代代数前面一半是最现代的集合论，而后面一半完全与前面无关，依然是传统的使用向量方法的解析几何，这当然不好。但现在又出现了另一种错误，即学了集合论后，学生所学的数学必须从内容和教学两方面都决定于集合论，不允许用别的工具，这是更加危险的做法，会使任何进一步的数学教学都不可能进行。如果只考虑有限集，只用文恩图说明集合，教师所演示的字母只是字母本身，或是文恩图中的一个点，那么学生理解变量的道路就将被堵住，学生无法理解字母可表示变量，特别可表示一个整数，有理数或实数。

请别误解我的意思，我不是说你应该讲变量，或解释什么是变量，即使可以这样做也是无意义的。关键是要使学生习惯于像“其中 a 可以是任何正数”这种解释，当他读到或写到数学表达式中的字母时，他必须习惯于问自己：这个字母的含义是什么？必须知道数学不是字母的游戏。

系统地看，字母作为数学符号有两种作用。首先，

字母可作为专用名词，如 π 是个完全确定的数，或用 A 表示两直线交点。显然特定集合需要使用标准的专用名词，如 Z,N。其次，字母可作为不确定的名词，就像日常语言中的“人”，可以表示所有的人，有时无法确定，有时不需要指明。前者是方程中的未知数，后者就是一般叙述中的不定元。

如果字母作为一个数的不确定名词，那又为什么要用这么多 $a,b,c,\cdots$ 其实，这就像我们讲到这个人和那个人一样，学生不理解 a 怎么能等于 b，你可以告诉他“实际上，a 与 b 不一定相等，但也可能偶然相等，就像我想象中的人恰好与你想象中的人相同”最本质的一点是要使学生知道字母表示某些东西，不同的字母或表达式可表示相同的东西。例如“伦敦”和“英国的首都”意义是相同的。由于这个原因，将字母过多地作为专用名词是教学法上的错误，当然我也不会禁止字母作为专用名词，例如“设 A 是集合 $\{1,2,3\}$”。

必须强调日常语言与数学语言的某种差异，日常语言中不确定名词可以辨别某一类对象，比如“人”，其意义不言而喻。而代数中的不确定名词如“a”，“b”，“c”，……所表示的那类对象必须明确提出。为了消除这一差异，常强调 a 是“数 a”的简写，“A”是“点 A”的简写，有时还要求学生将“a^2+3b”读作“数

a 的平方加上数 b 的 3 倍”。这样做法是否切实可行?我前面曾提出过这类问题:

a 可能是数 1,2,3,4 中的一个,

b 可能是数 1,2,3,4,5 中的一个,

什么是 $2a,3b,2a+3b,a+b,a-b,(a+b)(a-b)$, a^2-b^2 等?

当然也可以用更形式的集合语言来阐述,a,b 分别在集合 A,B 中变化,则

$a+b$ 的集合是什么?其中 $a\in A,a\in B$。

这两种方法并不互相排斥,相反倒可以相互补充,从性质与目的来看,这些练习与以前的代入常规有很大区别。

字母的应用从未知数开始,还是从不定元开始,这是一个传统的争端。如果比较一下初始引入的材料(不定元用在一般的代数、几何、物理和日常生活的关系中,而未知数则用于解决问题),形势似乎对方程与未知数有利。但仔细审查又难以决定,因为通常总是由简单问题引入,这些问题学生已经在算术中多次练习过,不用“x”就会解。我想不定元比未知数更能恰当地说明不确定名词,如果代数也紧密联系应用的话,不定元会很自然地出现在许多解释自然与社会现象的公式中,而且不定元接近于函数概念,前面例子中

的 $2a,3b$ 自然不是函数,但也可解释为 $a\in A,a\in B$ 的函数。

严格地说,变量总是在限定的形式内才使所在的表达式有意义,然而这种限定应该明确到何等程度,是个未解决的问题。在几何中看起来比较合理,只要说明大写字母表示点,于是“点 A”,“线段 AB”、“三角形 ABC”就提醒学生变量所限定的集合。而在代数中,至少一开始,你只能经常强调字母的意义,至于如何明确地使用量词,那是另一回事。有许多形式上的细微差别:

(1)令 a,b,c 为整数,则 $a(b+c)=ab+ac$;

(2)$a(b+c)=ab+ac$,对所有整数 a,b,c 成立;

(3)$\bigvee_{a\in Z,b\in Z,c\in Z} a(b+c)=ab+ac$

等等,其中只有(2),(3)中出现明确的量词(所有与),我并不想宣传不成熟的量词符号;但我要强调在任何情况下都不必限死在一个公式,相反,可以借鉴日常语言的同义语,而且变量的限定也可以增进对变量观念的理解。

至于存在的限定在代数开始时,几乎不起作用,这时的存在只是显示所叙述的东西,还远离复杂意义之下的存在,更重要的是了解什么是条件方程,什么是

所要解的未知数,看来将这类限定形式化比量词更为重要,读者可能注意到,我习惯于将方程写作比如:

$$(?x)x^2 - 2x + 3 = 0$$

或 $(?x)a + x = b$(意思是关于 x 求解)。

这是代数方法部分,但并非是它的教学理论基础。我试图告诉教学法专家与教师,字母在数学中的用处是什么,并且解释哪些字母作为不确定名词,但并非将它教给学生,就像一个儿童学习本国语言,我们不必告诉他什么是副词,只要教他如何用副词。同样,学生应该体验到代数表达式是有意义的,其中的字母是不确定名词而并非字母集合的元素,几乎不必使用“不确定名词”这种术语。好的例子比行为规则更能有效地形成好的习惯,当然在更高水平上,“好习惯”可以成为分析或评论的对象,教育工作者应该更有意识地去理解这一点。而如果学生由于教师教得不好,虽然掌握了大量数学,却不知道数学表达式中字母是有意义的,那就必须帮助他们有意识地分析这个领域。

等号

$$2 + 7 = 9,$$

这个式子传统的自然解释是：已知 2，加上 7，结果是 9，但另一种解释是将 2+7 看作一个数，整个表达式就是表示两数相等的一个陈述。

将 2+7 作为一个数的解释是真正的代数，，它与文字演算紧密相关，如果像上面那样将 2+7 解释为一个算术问题，那就无法理解这种 $a+b$ 这种表达式，事实是如果不知道 a 和 b、又怎能计算 $a+b$? 我们不能将 $a+b$ 解释成将 a,b 相加的一道指令，只能说是 a 与 b 的和，如果 a,b 是数，则其和也是数。在代数历史上这种解释最早出现在分数中，人们写下 $\dfrac{37}{71}$，随即决定这是一个数而不是一个问题，后来有人写下

$$\frac{2x^2+100-20x}{10x-x^2}=25,$$

又一次将分数解释为数（这再次显示了分数与代数方法之间的紧密联系）。

包含“$\leqslant$”，“$\in$”，“$\subset$”这类符号的式子是一个陈述，但包含“$=$”就不容易理解了。事实上 a=b 就意味着 a，b 是同一个东西，或者说等号的左右两边给出同一个东西的名词，2+7 与 9 是同一个东西的表达式，就像“伦敦”与“英国首都”一样。

这个问题还与前面提到的“现成的”数学与“做出

来的"数学相联系,在现成的数学中,计算 2+7 是没有意义的,它已经完成,形式主义者甚至会说,为何一定要得出 9,也可以得出 7 十 2,1+(1+7)等等。将数学作为现成的产品,或是在形式主义观点下,像"计算 $(a+b)(a-b)$"或"将 a^2-b^2 化成乘积形式"这类问题,他们都无法理解或是不想理解,我们当然必须使学生理解这些问题究竟是什么意思。

关于等号的等价关系 $(a=a, a=b \to b=a, a=b \vee b=c \to a=c)$ 其实也只是将 $a=b$ 解释为 a 与 b 是同一东西的必然推论,不必求助于繁琐的公理,那只是一种伪严密性。如果愿意更为形式地描述相等的概念,不妨借用莱布尼兹(Leibniz)的著名定义——两个对象是相同的,如果它们所有的性质都相同;两个对象是不相同的:如果它们至少有一个性质不同。我并非建议将以上分析用于中学数学,我只是希望作者与教师应该深思这些问题。

代数公式的语言

学生必须学习使用本国语言读写代数公式,每个教师都知道,要达到这个目标有很多麻烦。有的课本对此花了很大功夫,有的则根本不管,他们只考虑违立一个现成的数学体系,而体系一旦确立,就没有教

学理论的地盘, 只是作为附属于体系的逻辑结果。在此过程中, 有时为了弥补缺陷, 常在体系外面添上附录部分,以训练实际技能。

我并不要求课本对此提供更多的教学理论分析材料, 也不知道这方面是否有系统研究, 我自己的材料就是与教师谈话及研究课本所获得的经验。学生通过短期或长期的学习, 最终掌握了代数语言, 然而学生与教师都不知道究竟遇到了什么? 似乎没人知道最初的学习障碍是什么, 以及人们是如何克服这个障碍的。需要长期观察才能理解这一现象, 单靠短期经验是不够的。学习代数公式的语言与学习本国的语言虽然有点相像, 但毕竟有许多不同。本国语言是永久使用的, 而代数公式的语言只有很少的练习机会。代数公式语言与我们自然的语言, 以及诗句、化学符号都有很大的区别, 例如, 学生必须知道什么地方需要加括号, 什么地方不需要加, 就像在计算机上操作时一样,“$a+b$”常表示计算和的指令, 而“$(a+b)$”则表示和本身, 这些都不是很简单的事情。通过括号及惯例才能将代数表达式系统地结构化, 这恰是代数语言与本国语言的区别。

在某些国家中规定计算顺序是: 幂运算, 乘法, 除法, 开方, 加法, 最后减法。按照这一顺序, $3-7+6-$

$8+4$ 就变成了 $(((3-7+6)-(8+4)$,然而按通常的顺序应是 $(((3-7)+6)-8)+4$。上述规定也无法解释 $3-5-8$ 应理解成 $(3-5)-8$ 还是 $3-(5-9)$。加法、乘法与顺序无关,因为它们满足结合律,但减法、除法、幂就与顺序有关,因此对加和减的代数公式语言应遵循:

原理 1:从左至右进行运算,即将所有开括号放在最左边的地方。这就是按照排成一行的自然的线性顺序。

原理 2:将违反线性顺序的运算式垂直排列,表示将这些式子放在一起。分数就是这种例子。

原理 3:在一部分代数表达式上面加一短横线,表示将这些代数式放在一起。

在使用括号以前,人们就是用短横线表示联系。一些非常特殊的表达式如 $\overline{n+1}$,还一直使用到本世纪初,现在我们仍在根号后使用这一方法,如 $\sqrt{a+b}$ 此法也可用于共轭复数。

原理 4:被括号包括的式子表示一个整体。

原理 5:某些代数运算具有连接功能。

这是代数表达式最古老的结构方法,例如相乘就比相加减有更紧密的连接功能,这是自然形成的惯

例。从代数公式首次出现起就无人怀疑乘法优先于加减法,幂运算优先于其他运算。

原理 6:某些符号是分割记号。

等号就具有此性质,“$\geqslant$”,“$\backsim$”等等都是分割记号。阅读长的代数公式的技巧,首先是要找到这些分割记号。

由此可见,公式语言并不如我们想象的那样简单。例如分数记号 $2\frac{3}{7}$ 早在使用加号之前就有了,但学生常会把它看成是一个乘积,这是不合理的“历史遗产”,是否已经到了可以取消的时候?用加法记号,把 $2\frac{3}{7}$ 表示成为 $2+\frac{3}{7}$,或直接写成 $\frac{17}{7}$,岂非更好?

加减符号的两重意义(即性质符号及运算符号)容易混淆,这是教学上的另一苦恼。有人提议可用 $\overline{3}$ 代替 -3,这一方法十分有效,因为 $\overline{3}.25$ 比 -2.75 容易在数轴上定位。

还有一些表达式的习惯写法,如为什么我们写 $2a$ 而不写 $a2$?写 $2ab$,而不写 $a2b$?学生常不理解,特别是省略了一些多余的括号,造成了不少错误,如学生不知道 $2(ab)$ 就是 $2ab$,却错写成 $(2a)\times(2b)$,特别在 a,b 是复杂的表达式时。过去的教学法专家懂得这些

危险所在，但现在这种认识似乎已经消失，不再组织对代数公式符号的练习，学生也几乎不理解符号在结构化中的作用。

事实上，代数表达式的语言比起普通语言更复杂，为此必须按难度逐渐增加的方式设计好一个计划，引导学生逐渐掌握它，然而这样的材料很难找到。

通常教师很强调代换，但大多限于用数代替字母的练习，而像以 $2a+3b$ 代替 a，$a-4$ 代替 b 这样的练习却很少，或几乎没有。应该引导学生学会从 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 中得到 $(2a+2b+a-4)(2a+3b-a+4)=(2a+3b)^2-(a-4)^4$。学生还可练习将 $-a$ 代替 a，$-b$ 代替 b 等。而用 $(\Diamond+\bigcirc)(\Diamond-\bigcirc)=\Diamond^2-\bigcirc^2$ 这种模式作为普遍熟悉的教学手段可更易于理解公式中的每个字母就像一只箱子，可放入你所想放的任何东西。还有以变量代替数，从而推广数值结果. 这也是一种非常重要的代换，但在中学里却几乎不加练习，因为中学数学还没有达到这样的形式化程度。

“用任何方法教代数公式的语言总能取得成功”的观点是危险的。语言的使用应当是自动化的，教错后要补救很不容易。学好代数公式语言在很大程度上涉及语言教学问题，教师与教科书作者应高度意识到它的特殊性。

代数公式有两种，一种相当于字，一种相当于句子。后者又可分成肯定的，条件的和疑问的。问题应清楚地显示需要解答什么?“字”是否需要转换? 依据什么原理? 方程中有多于一个的字母时，应表明计算哪个字母，以及条件句是否要转换成肯定句，疑问句是否要回答等。

不容忽视代数公式的语言教学不同于其他语言教学的一个重要特性，当学生达到高水平时，公式语言可独立于具体内容的理解而被自动掌握，这不同于日常语言。在代数公式语言的训练过程中，根据需要，应该经常从形式语言回归到具体内容，即使形成自动化也不应割断其根源。在教算术时，这个目的可以通过将应用问题分散到纯算术的练习中来达到。纯算术的练习中插入些应用内容，但在代数中却不行，学生必须有意识地使用代数语言，不仅会用公式，还要知道为何这样用而不是那样用，否则代数将成为无意义的游戏.

第十四章
数的概念的发展
——从代数原理到代数的整体组织

代数原理的发展

在第十一章中,我们曾经对代数原理作了静态的描述,现在来谈谈它的发展。

这一发展是从自然数开始的。自然数的加法和乘法运算遵循了一些法则,这些法则可能有一大堆。在较高水平上,人们将它们看作一个整体,这时就可以说,只要其中很少一部分就足够了。应该看到这个“足够”的意思不言而喻的,它并不是“对实际需要的足够”或“对下一次考试的足够”或“对升到高一年级的足够”。诸如 $(a+b)^2$,$(a-b)^2$,$(a+b)(a-b)$ 等等,其中有些公式对实际应用很重要,但前面所讲述的足够与实际应用稍有区别。一些公式有可能从更简单、更基本的法则导出。当然,人们应该知道是否值得去导出某些公式,但这又是一个实际问题。

我们应当明白在演绎基础意义上的充分性并不是

显然的，巴比仑人或埃及人的数学很不错，但未必知道它；希腊的几何贴近了这一点；代数尽管先前也有了充分性的观念，但直到现代才得以实施。因此充分性只有在演绎基础意义上才能被人理解。而要构想这种观念，人们有机会在定律之间应作不止一次的推导。在以演绎的观点组织算术运算法则以前，它们之间的逻辑关系一定要先被人们所熟悉，在思想实验中。我们能辨别出学习过程的大致水平：首先进行数的运算，然后注意这些运算需满足的法则，并将其公式化，根据局部联系，局部地组织这些法则，最后构成一个完整的演绎体系。

学习过程中可能会遇到意外，某些运算在不加限制的情况下无法进行。引进新的对象就可弥补这一点。它可以以直观的方式引入，而且是在原先的一般法则成公式以前，甚至在还未注意到这些法则以前引入。数域的扩充也可以利用理性的工具来达到，即自觉或不自觉地利用了我所说的“代数原理”，这就必须承认旧数域的算术法则，因为数域必须按这个方针来扩展，即对新对象运算时，原先的法则仍成立。

从自然数扩展到整数，再扩展到正有理数，进一步到有理数，模式都是相似的，负数可以直观引入，而要构造分数，则必须先承认算术运算法则。

从幂到对数

平方和幂运算都不是新运算，人们将其看作一元或二元运算，认识了它们的算术运算法则，并形成了公式。但为什么 $(xy)^2 = x^2 \times y^2$，而不是 $(x+y)^2 = x^2+y^2$？为什么 $z^{x+y} = z^x \cdot z^y, z^{xy} = (z^x)^y$？这一点上，传统的教学法不灵了，新的教学法的前景恐怕也不妙，这种运算的二重转换仍令人迷惑不解。

为了解二次方程，平方根很早就引入了。开平方在有理数域中是受限制的，因此应当扩展数域。$\sqrt{2}$ 具有两重性，它既是代数数又是实数，既是计算的数又是度量的数，作为运算对象，它的平方是 2，但又可被分数或小数按任意精确程度逼近。这两方面都必不可少。学生应当熟练地用 $\sqrt{2}$ 进行运算，既把它当作其平方是 2 的数，又不忘记它介于数轴上两个有理数之间。开方产生大量新的算术法则，虽很陌生，但与幂的运算法则很相像。而对数的

运算法则就大不相同了。在对数计算中，某些教学法专家原则上避开了对数及 log 记号，等到学生熟练掌握了对数运算技巧以后才引入。他们将数 a 改写成 10^p 的形式，以此来解释对数表。若用对数方法计算 ab，学生只要将 $a = 10^p, b = 10^q$ 转换成 $ab = 10^{p+q}$，

再查表看什么是 10^{p+q}。这一方法很有用,它避免了学习对数运算法则。

在学习对数之前,必须将幂指数扩充至负数,有理数,甚至实数。这一扩充仍是由代数原理来完成的。现在当然不必引入新对象,只需要按保留的一些运算法则对运算作内推和外推。

组织代数的过程

传统的中学代数中包含了大量足够对付考试的算术运算法则,但与算术运算法则相应的演绎顺序却很少。改革者们则提出了相反的观点,他们从演绎顺序开始,选择最直接的途径到达比如(或有序域)的公理。的确,只要学生知道算术的四种基本运算,这些公理即可归结出来,随后,从域的公理继续演绎下去。这种做法对教师很有益处,他们不需要为一大堆传统的障碍操心了。

学校是不允许学生自己来整体组织教学内容的,不允许他们从大量已有的运算法则中挑选出适当的法则,而只能得到现成的东西;也不允许他们由此导出更复杂的运算法则(或宁愿让教师来推导)。现成的法则强加给学生时,他们还不明白法则的互相推导是什么意思,至于大量法则的精简就更不用提了。域

的公理确是教师可以信赖的良药，能保证他睡个安稳觉，不被恶梦打扰。

这就是违反教学法的颠倒。教师以组织好的形式强加给学生，而学生则毫无机会自己去加以组织，其实教师的东西也不是他自己组织的，而是来自于教科书；教科书作者也不是他自己组织的，而是简单模仿了大学的代数课本。

用域的概念组织代数的做法来自大学，在大学水平上这样做有其深刻的道理，但在中学水平上又是另一回事了。如果认为将大学代数稀释到某个度就可以转换成中学代数，那就是奇迹中的奇迹了。我们必须经过认真调查研究才能知道域的概念作为一个适当的组织原理是否应在中学阶段出现。

让我们比较一下代数的传统结构与域的结构有何区别，传统的代数有七种运算：加、减、乘、除、乘方、开方、对数，这些都是二元运算（也许除了最后一个）而域的概念中只有加和乘两种二元运算，以及取相反数和倒数两种一元运算，除此之外还有序（大于、小于）关系。今天，七种传统的运算仍具有生命力，学生至少应熟悉幂的运算法则，并知道如何由此导出开方根的法则。对数的法则可以暂时不要，但最终还是非常有用的。

把中学代数限制在域中最基本的那些运算上是否明智？如果是明智的，那么其他运算又如何处理呢？

域 K 是关于加法的交换群，$K\backslash\{0\}\}$ 是关于乘法的交换群，K 中的加法公理和 $K\backslash\{0\}\}$ 中的乘法公理就是普通的交换群公理。如果学生以前学过了公理化群，那么这些域公理就提供了丰富的内容，而不是一个新问题。群的运算可以解释为加法或乘法。如果学生还不了解群，那么仔细观察有理数域中的加法和乘法，就可提供公理化群的模式。从发展的观点看，学生应加强加法和乘法之间的形式类比：

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)=b+a & ab=ba \\
(a+b)+c=a+(b+c) & (ab)c=a(bc) \\
a+0=a & a\cdot 1=a \\
a+(-a)=0 & a\cdot a^{-1}=1 \\
a-b=a+(-b) & \dfrac{a}{b}=a\cdot b^{-1} \\
-(a+b)=-a=b & (ab)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1} \\
a+a=2a & a\cdot a=a^{2} \\
a+a+a=3a & a\cdot a\cdot a=a^{3} \\
(-a)+(-a)=-2a & a^{-1}\cdot a^{-1}=a^{-2}
\end{array}
$$

最后一行的右式可能是一个新的归纳发现——定义也可以被发现。这样做的目的是要给学生创造练习

组织的机会,而不是给他一个现成的公式,但以下再扩充两行,类比就不一定行了:

$$a > 0 \to a + a > 0 \qquad\qquad a > 1 \to ab > 1$$

这是正确的,但在

$$a > 0 \to a + b > b \qquad\qquad a > 1 \to a^2 > 1$$

中,右式必须先假设 $b > 0$。

还缺少有关加法和乘法的分配律,即

$$n(a + b) = na + nb \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$n(a - b) = na - nb \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

如果非整数指数还没引入的话,则右式中的 n 必须为整数。

分配律可解释为 $\bigsqcup_x nx$,它是域 K 上的加群到自身内的一个同态,有 $n(x + y) = nx + ny$,及 $n \cdot (-x) = -nx$。同样,与它对应的 $\bigsqcup_x x^n$ 是乘群 $K \backslash \{0\}$ 到自身内的一个同态,有 $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$。

下面左边的同态是保序的或反序的:

$$a < b \wedge n > 0 \to na < nb$$

$$0 < a < b \wedge n > 0 \to a^n < b^n$$

$$a < b \wedge n < 0 \to na > nb$$

$$0 < a < b \wedge n < 0 \to a^n > b^n$$

这里的类比还是不完全的，因为右边必须附加条件 $a>0$,这就要将同态限于 K^+,即 K 的正的部分。

K 的加法结构和 K^+ 的乘法结构都从属于群的概念。那么两个有序群之间能否建立起同构呢？事实上对固定的 $a>1$, $\bigsqcup_{x\in R} a^x$ 就是这样的同构。同样对 $0<a<1$,$\bigsqcup_{x\in R} a^x$ 是反序的同构。这就是说,依赖 a 可以决定是加群 R 及到乘群 R^+ 内的同构还是反序同构。这些同构和反序同构就是指数函数。

如果先建立从 R 到 R^+ 的同构 f,这里 f 必须满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

则可更直接地得到指数函数。特别是 f 必然将算术序列 $0,h,2h,3h,\cdots\cdots$ 映成几何序列 $1,k,k^2,k^3,\cdots\cdots$ 这就是 17 世纪发明对数表的方法。对数必须允许将几何序列转换成算术序列，并由此将乘、除法转换成加、减法。对数的函数作用越来越得到加强，在几何的观点下，x 的自然对数成了积分 $\int_1^x \frac{dt}{t}$。直到欧拉（Euler）才清楚地认识到对数是指数函数的逆。

如果把平方根算作代数内容，那么对数也有同样的“权利”，这里不需要拓扑或分析的知识。对数像代数方程的根一样，也来自代数问题，即来自在加群 R 和乘群 R^+ 之间建立一个保序同构的问题。只要确定

哪个数映成 1（对常用对数来说是 10，对自然对数来说是 e），这个同构即可唯一确定，这就是代数特征的概念。

我们着手组成了一个域，它含有加、减、乘、除、乘方、开方与求对数七种运算。虽然未产生域的概念，但所用到的仍是代数性质的方法，如果想要在数学中找出域的概念起作用的地方，那么我相信第一个例子就是代数的和超越的附加，但这些概念完全不适宜于中学。

代数的整体组织——计算尺公理

对中学代数内容的看法尽管存在分歧，但也有一致的意见。代数的内容太丰富了。域的概念无法来概括它，而这个巨大的财富又无法划归到分析的名下，虽然在高年级是不应忽视与分析的多边关系的。升大学的考试中常能遇到这样的问题：$2^{\sqrt{2}}$ 是什么？学生常取两次对数来计算。但 $2^{\sqrt{2}}$ 的定义是什么呢？先对有理数 r 定义 2^r，再求当 r 趋向于 $\sqrt{2}$ 时 2^r 的极限，作为 $2^{\sqrt{2}}$，但这只是书本知识，考后即忘，何况学生缺乏 2^r 收敛的任何感觉。虽然学生的解答完全正确，但这个表达式之所以存在，完全是因为它可以用对数方

法计算。对数或指数函数不能与代数分开，在组织代数时应考虑这个事实。

现在我们用公理化方法来综合我们的结果。

公理 1　K 是具有两种二元运算的有序集，有 $>$，$+, \cdot, 0, 1$。

公理 2　K 是关于加法的有序交换群，0 为零元。它除了满足有序集及交换群公理外，还满足相容性条件

$$a < b \to a + c < b + c。$$

公理 3　$K \backslash \{0\}$ 是关于乘法的交换群，1 为单位元，且 $K^+ (= \{a \in K | a > 0\})$ 是有序交换群，即除了满足交换群公理外，还满足相容性条件 $0 < a < b \bigwedge c > 0 \to 0 < ac < bc$。

公理 4　乘法 $\bigsqcup_{x \in K} ax$ 是加群 K 的同态（分配律）。

公理 5　乘群 K^+ 具有一个作用于加群 K 上的有序同构，称为 log。

凭着直观我们可以承认这些公理。最后一条我称它为计算尺公理，可粗略地表示为：存在一个计算尺。

计算尺公理也可称为“对数表公理”，计算尺虽没有通常的对数表精确，但它却能较直观形象地表示连

续确定的对数函数。对数比例尺在科学上也被广泛使用,它对数学虽不重要,但在数学教学中却不应忽视。

利用计算尺公理足够用来定义中学代数中经常使用的其他运算。首先,从 K^+ 到 K 的同构有许多,将其中任意一个与 K^+ 或 K 的自同构复合,就得到一个新的同构。

设 a 是由计算尺公理所提供的同构中 1 的原像,该同构可记为 $\log_a$,有 $\log_a a = 1$,则 $\bigsqcup_{x^v} \log_a x$ 也是 K^+ 到 K 内的一个同态,$v > 0$ 时保序,$v < 0$ 时反序。特别地由 $v = (\log_a b)^{-1}$ 可得又一个同构:b 的像是 1,记为 $\log_b$。于是有 $\dfrac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$,由此过程可得由 K^+ 到 K 的同构,其中 $c \in K^+\backslash\{1\}$ 被定义为 1 的原像。假如 K 是实数域,则这个过程表达了所有的同构。

在这种公理化的方法中,幂 $u^v (u \in K^+)$ 可通过 $\log_a U^v = v \log_a U$ 来定义,此定义不依赖于对数 (即 a) 的选择。对整数 v,该定义恰与幂的初等定义相吻合。由 log 的同态性立刻可得到如下的幂的算术运算法则,如 $(u_1 u_2)^\varpi = u_1^\varpi u_2^\varpi$,它可从下面的推导中得出:

$$\begin{aligned}\log(u_1u_2)^{\varpi} &= \varpi\log(u_1u_2)\\ &= \varpi\log u_1+\varpi\log u\\ &= \log u_1^{\varpi}+\log u_2^{\varpi}=\log u_1^{\varpi}u_2^{\varpi}\text{。}\end{aligned}$$

同样可得 $u^{\varpi_1+\varpi_2}u^{\varpi_1}u^{\varpi_2}$,$(u^{\varpi_1})^{\varpi_2}=u^{\varpi_1\varpi_2}$。

事实上由定义知 $\log_a a^x=x$, 它意味着 $\bigsqcup_x a^x$ 是 $\log_a$ 的逆, 由此可从对数函数的同态性质导出指数函数的同态性质。

计算尺公理的提出是为了补充有序域公理的不足, 但以上内容主要是为教师提供信息来源, 至于学生是否需要以及能否去进行中学代数的整体组织, 还需另加讨论。

量角器公理

角不仅要测量, 还要计算。例如求两向量所成的角, 或已知三角形边长求角, 这些问题均可追溯到下面问题:在欧几里得(Euclid)坐标平面中, (x,y) 是单位圆上的已知点, 求从 $(0,0)$ 到 (x,y) 的射线与 x 轴正方向所夹的角, 或度量单位圆上从 $(1,0)$ 到 (x,y) 的弧度。

若 (x,y),(x',y') 是单位圆上两个点, 弧 $(1,0)$,(x',y') 被合同变换到弧 (x,y),(x'',y''), 其中 (x'',y'') 是单位圆上的点, 则角或弧度 $\varpi(mod 2\pi)$ 满足可加性, 即

$$\varpi(x'',y'')=\varpi(x,y)+w(x',y')。$$

用模为 1 的复数 $z=x+iy$ 比用实数对更合适。这些复数组成乘法群 E，于是单位圆的旋转可表示成 $\bigsqcup_{x\in E}\alpha z$，其中 $|\alpha|=1$。角的度量可看成是 E 到 $R_{mod 2x}$ 的一个函数 ϖ，$\varpi\in E\curvearrowright R_{mod 2\pi}$，使

$$\varpi(z_1\cdot z_2)=\varpi(z_1)+\varpi(z_2)。$$

这是一种对数。ϖ 是乘法群 E 到加法群 $R_{mod 2x}$ 的同构，并保持 E 的循环次序。以上所述可接着前面提到的五个公理，而作为公理 6。

公理 6　设 $K(i)$ 是 K 的复数扩张。对 $a,b\in K$，有模 $|a+bi|=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$。设 E 是模为 1 的元素所组成的循环有序群，则存在一个 E 到加法群 K 的保序同构。

此公理可生成余弦和正弦，$\cos\alpha=Re\varpi^{-1}(\alpha)$，$\sin\alpha=J\varpi^{-1}(\alpha)$，以及熟知的性质与公式。

计算尺和量角器是同现实密切联系的，计算尺公理和量角器公理的名称已说明了它们的现实内容。它们是否应成为中学教学中的公理呢？要回答这个问题首先应调查教学中究竟需要教怎样的公理系。我认为，像计算尺、量角器这种直观的数学模型，应以较高的观点反复进行讨论。这样做的一个目的是要弄清它们对代数的公理组织的嵌入，另一个目的则是要了解

其在数学分析中的地位。在任何阶段中，它们都是对数学教学有价值的题材。

第十五章
集合与函数

集合是什么?

几年前,当新数学出现,并要求中小学教师教集合论时,有人向数学家提出了“集合是什么?”的问题。我不知道当时数学家是怎样回答他们的,但可以肯定,不少回答这类问题的人已经犯了大量教学法上的错误。

对集合论概念的解释存在着两个极端,一个极端是给出集合的形式定义,给出这种定义的人甚至还定义了元素是什么,这使我们想起了欧几里得(Euclid)对“单位”所作的定义:“单位就是被称作为1的东西”。的确,在数学课中,常常要用到定义,例如,定义平行四边形是什么等等,大概由此可以推想,要是学生不知道“集合是……”,“元素是……”,“如果……,那么这个元素就属于这个集合”这类说法,教师怎么能在学校里教集合论呢?

现在,我们都在教公理和公理系统,但实际上,许多人并不知道它们是怎么产生的,公理和公理系统起

着整体地组织一定范围内的知识的作用,可是这并不是公理系统的起源。某些人认为,集合论应从公理开始教,一开始就须明确规定“集合”“元素”等等概念。这是错误的。按现在的看法,几何公理系统是包含了“点”、“直线”、“在上”等等不加定义的概念的命题系统,并根据公理进行运算。集合论如同其他任何领域的理论一样,除非你已经掌握了它,否则你是无法用公理方法把它表达出来的,集合论中同样包含了许多深奥的意义,这是中小学生无法了解和掌握的。然而,我就恰恰看到过用公理化方法引进集合概念的中小学教科书,并让只有十一、二岁的孩子去学习。

那么,有没合讲解集合论的新方法呢?回答是肯定的。我们可以采用通常处理数或处理几何图形的那种方法去教,就像我们不需要去解释数是什么,点是什么,我们也不必去明确定义集合是什么。有人会提出,这两者是不同的,譬如,我们可用集合的一些概念,如基数,去定义数,因此,集合才是最基础的概念。我认为,采用演绎的方法去定义数是一种错误的教学法,就如不必去定义呼吸是什么,走路、游泳是什么一样,人们只要作一些观察,都会学着去做,事实上,作明确的定义是旧时的方法论的特征,这就是集合论解释的一个极端——形式的伪定义。

另一个极端就是给出文恩（Venn）图，几乎所有的教材都想让读者相信，如果围绕着一些数码、图形或一些无意义的符号画上一条封闭的曲线，这就是集合。而用括号表示的如 $\{a,b,c\}$,$\{\xi,<,0\}$ 同样也是集合。有一位教师说，文恩图和括号是一样的。如果用两条水平的平行线将括号连接起来，它们的差别就消除了，我问他，那么逗号起什么作用呢？他竟回答说，逗号可以省略掉，因为集合中的元素应当是不同的。

括号还有一种用法，例如，行星的集合可以记为：

$$\{x|x\text{是行星}\}。$$

这种方法比具体罗列元素要方便得多。例如，可以表示骑兵的集合，教室中留长发、戴眼镜的学生的集合。为了明确这点还可以画出文恩图，并且强调骑兵的坐骑以及全体留长发、戴眼镜学生的头发和眼镜并不包括在文恩图中。

在数学上已经证明：空集是唯一的，而最引人注意的教学问题是由空集概念引起的。有这样一件事情。一位十岁的小女孩请父亲辅导她学习新数学。作业被老师批改后，父亲发现他的看法都被判为是错的。小女孩向父亲解释说，基数相同的两个集合作为集合来说并不一定相同；两个空集的基数都为零，它们也不一定相同。例如，一只空冰箱与一只空纸篓就不相同。

父亲弄不懂，又很尴尬，就请教了一位数学家。数学家又去拜访小女孩的老师。老师认为，黑扳上两条中间不画任何东西的封闭曲线代表了两个不同的空集。她辩解说，如果我们讨论的是人的集合，那么空集就是“无人的集合”；如果讨论的是点，空集就是“无点的集合”。空集是什么，要依赖于全集的内容。我这里给出两个文恩图，就意味着原来的全集就是不同的。那位数学家提出了异议：如果由这一对文恩图做出交和并，则它们就不是不同的集合了，老师同意了这种说法。但她又提出，那么围绕两个文恩图的两条封闭曲线的意思是什么呢？这就涉及到问题的要害了。

括号

如果我写下：“……是一个集合”，那么省略号的地方应该填入什么呢？

我们先来看一个具体问题，“……是一头驴”省略号处应填入什么？如果填入“托马斯”，那么句子是否成立要考虑到具体情况。“托马斯”可能是一头驴的名字，也可能是指一头驴的父亲，这时，这个句子是成立的，因为一头驴的父亲也是驴，而省略号处如果填上“时间”就不对了。但是如果说“x 是一头驴”对不对呢？我理解在通常情况下 x 不代表驴的名字。而“* 是一

头驴”的说法就使人糊涂了。因为它可能是指一个文字游戏，记号 * 仅代表一头驴的符号。

如果想把一头真的驴子放到这里省略号的地方，当然是不可能的。那么，我们就用一张驴的图片来代表。显然，这里不是“一头驴的图片"的意思，否则句子就变成：“一头驴的图片是一头驴”。因此在语言中，习惯于用名称而不是用图片。

对“A 是一个字母”这种说法，人们就应更加谨慎一些，这里的“A”不再是某件东西的名称了，而是字母 A 的一个形象。所以谨慎的说法是：“符号 A 是一个字母”或是“‘A’是一个字母”。

我们再回到原先的问题上去，“……是一个集合”，省略号处可以填上两个集合的并集。如果懂得一些符号或字母的特定意义的话，也可以填上 N、Z 这样的字母，或者，也可以说“$\{7, 9, 12\}$ 是一个集合；如果我们说“$\{a, b, c\}$ 是一个集合”，又会怎样呢？这需要先弄清楚指什么东西。如果 a、b、c 是三个不同的点，则 $\{a, b, c\}$ 就是点的集合；如果 a、b、c 是三场不同的雷雨，则 $\{a, b, c\}$ 就是雷雨的集合。在大部分教科书中，$\{a, b, c\}$ 表示字母的集合。实际上，在 $\{a, b, c\}$ 中，符号代表了某些东西的名称，它可以是各种各样的数或点，或是雷雨，甚至也可能是字母的名称。一般说来，

符号不一定就代表了字母 **a**、**b**、**c** 本身，而是代表了其他东西。这是数学中的习惯，也是很合理的。否则，如果 a、b 只是字母本身的话，那么谁能理解"$a=b$"所表示的含意呢？

这并不是吹毛求疵，新数学的教科书中几乎充斥了字母的集合，这样做的理由是什么？我想这些课本的作者很少考虑这种问题，甚至从未想过这样做会引起错误。这是因为他们在展开数学内容之前就先引进了集合论，故此他们没有其他的选择余地。他们在讨论集合论问题时，必须装作既不知道数，也不知道点，更不能谈及变量。所以，$\{a,b,c\}$ 就变成了不含意义的字母 **a**、**b**、**c** 的集合。这样就使得数学的建立从基础上一开始就变成了无意义的活动。

我们早就见过符号的集合。例如 $\{\triangle,\bigcirc,\square\}$，它可能有几种含意：在括号之间，可能是一只狮子，一头大象，一匹骆驼，即包含了每种当中的一个；或是一只指定的狮子，一头指定的大象，一匹指定的骆驼，或是指这三神动物的集合。如果对象是三角形、圆、正方形，也可以有上述几种含意。当该集合解释为包含一个三角形，一个圆，一个正方形时，就会出现 $\triangle\notin\{\triangle,\bigcirc,\square\}$ 的情况。因为括号外和括号内的三角形不是同一个三角形。正确的描述应当是：

$A=\{a,b,c\}$，这里 a 是三角形，b 是圆，c 是正方形（图 15-1）。字母代表对象，而不代表对象的名称。A 并不是字母的集合。

在括号内不用名称而用图片来表示集合的元素是很正统的，一般不会引起异议。图片就像象形文字，是半语言的，但我们仍应该谨慎地分析自己的做法。那就是

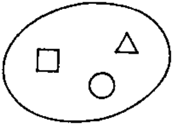


图 15-1

（1）每一张图片应表示一个对象，要分得清是哪一个；

（2）如果同一个对象用不同的方式表示，那么就要清楚地说明不同的表示是指同一个对象；

（3）应注意避免用一个个别的对象代表这一种对象，因为它不能清楚地表示串其中的区别。

具体可以这样做：一开始就引入全集，其中包含了儿童、大象、球、洋娃娃、椅子、樱桃等等。儿童各穿不同的衣服，大象则有不同姿势，以示区别。要引用对象时，正规的方法是使用名称，这是符合实际生活的，如果要使用图片时，就需要有一个合理的体系，否则会产生误解。

文恩图

前面我提出过句子“……是一个集合”的省略号处可填入什么的问题,很清楚,必须填入语言。$\{a,b,c\}$就是语言的表达。动物的图片虽然不是正规语言,但如果看成是象形文字的话,也可以说是一种语言的代表,而文恩图则不是一种语言现象,我从未见过将文恩图填入省略号处的。

数学课本中,除了文字外还有不少图。例如等边三角形,对数函数图象,皮亚诺(*Peano*)曲线等等。图总是反映了某样东西。它有时是相当具体的,例如罗马的圣·彼得教堂的照片;有时则要求结构精确、可靠,例如该教堂的平面图。一张图也可以带有语言的注解,在边上作一些说明,或是列出一些细节的名称。高度抽象的图常能反映出非常确切的含意。一条水平的直线,标上一些数字,就说明了实数集;一条椭圆形的曲线表示了一个开集;一幅框图表示了一个特定的过程。

从教学法角度看,图应当符合哪些要求呢?我认为,第一,它要反映出某样东西;第二,它要简洁明了,无需赘述;第三,表示事物的原理要清晰,易于掌握。

我想这些要求是合理的。现在我就用这些要求来衡量一下文恩图,看它满足了多少。

最简单的情况是"自然文恩图",即画在平面上的简单封闭曲线内部的图片。这些图片画得较形象,一看就明白。我读大学时,一开始接触的就是这种文恩图。现在的小孩也容易看懂。运用这种图可以画出集合的交,并以及补集等。其目的是要说明集合之间处于什么样的状态或关系,例如分离,相交,包含等等。但是文恩图也有其局限性。像一个集合是另一个集合的元素,一个集合究竟是有限集还是无限集、或是有确定数目的元素等,文恩图就很难简单地表示清楚。文恩图也从未用来表示过一个集合的元素究竟是什么东西。

现在这种自然文恩图在数学课本中很少见到了。它们不是用来表示无限集,特别是不用来表示集合之间的关系,只是使用文恩图表示集合本身,其中又犯了不少错误。文恩图虽然保留了一个特怔,即封闭的曲线,但它的功能是什么呢?我的印象是,这条曲线只起着把无联系的东西包含在一起的作用。例如,为了把 $\times$,$*$,$\bigcirc$ 等放在一起看成一个集合,就围绕它们画上一条封闭曲线。有人认为这是有疑问的,集合中的

图形应当表示出统一性来。要是这样的话,文恩图的封闭曲线也就没有存在的必要了。

另有人认为,文恩图所表示的集合应由明显不同的元素组成。例如,不能同时画上两个三角形。这是一种误解。文恩图所表示的集合与语言符号所表示的集合不是一回事。集合 $\{\triangle, \triangle\}$ 只表示一个三角形,但文恩图中的两个三角形就是不同的三角形,因为它们分别处在不同的位置上。若用数学符号表示 m 个不同的三角形,可以写成

$$\{\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_m\}。$$

但用文恩图表示这个集合,可以画成图 15-2,却不能画成图 15-3,因为它表示的是三角形名称的集合了。

图 15-2

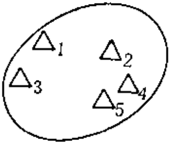


图 15-3

一般的文恩图只是象征性的草图,图形不必真实。苹果的集合可以画成封闭曲线中的一些小圆。如果要表示桌子上几个筹码所组成的集合,我认为应当画成

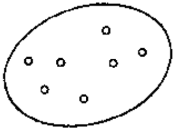


图 15-4

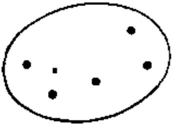


图 15-5

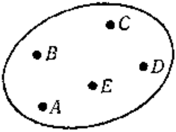


图 15-6

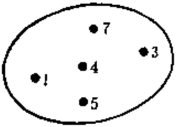


图 15-7

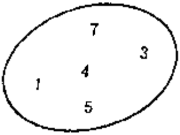


图 15-8

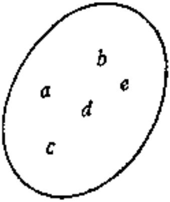


图 15-9

图 15-4，而图 15-5，图 15-6 所表示的是平面上的五个点。图 15-6 还添加了字母，这就超出了文恩图的基本要求了，但作为各点的名称，这还是可以理解的。而图 15-7 中的数字就很难判定它们的意思了。图 13-8 则完全没有明确表示出元素是什么。它可以理解为集合 $\{1,3,4,5,7\}$。同样，图 15-9 也会引起误解。总之，这些错误的文恩图都不符合前面所说的三个要求。那些

教科书的作者可能从未仔细考虑过这些问题，他们只是相互抄袭而已。

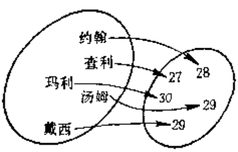


图 15-10

一个倾向性的问题是一些人过分热衷于文恩图，以致文恩图用得太滥了。例如，用图 5-10 表示每一儿童对应于一体重（千克）的函数。左边的封闭曲线内部是名字，右边的则是数。其中“29”有两个。这样就使得整个映射是一对一的。实际上，这种关系用数轴来表达要自然得多。如果只想用图来表示集合本身，而不想表示并、交等关系时，不一定要用文恩图，而应首先想到采用其他方式可能会更有效地达到目的，若将一种有用的方法硬性推广到所有的场合中去，便会沦为教条。遗憾的是，这种情况在数学家中并不少见。

到哪里去找集合?

在现实世界里能找到数、圆、正弦函数吗? 肯定不能。数学与观实世界的关系很微妙，人们为了理解现实世界，采用了简化的模型来模仿它，这就是数学化。这种模型在一开始时可以相当具体，经过一段过程后，具体内容就逐渐被抛弃，它就变得越来越抽象。

例如自然数，无论实际事物是怎么数的，数列的结构始终起着数学模型的作用。在人类历史上，具体的模型是手指，或算珠。这种模型是可靠的，从来不会对 $3+2=5$ 产生误解。然而三头牛加两头牛是否就是五头？这就有赖于具体情况。例如当再去数时，牛可能跑掉了一头，或是死了一头，也可能又生下了一头小牛。

从具体模型到较抽象的模型以及思维模型，步子跨得并不算大。加法对牛、人、钱是适用的，但不会去用在电话号码上，线性函数对商品的"价格 - 重量"关系，液体的"重量 - 容积"关系来说是很好的模型，而对"工人数 - 工作时间""圆周 - 面积"关系却不适用。有人认为这是数学的失败，其实这是他们自己将模型的适用范围想象得太广了。

集合是很基础的概念。它看起来好像没有用到什么模型作为媒介，而被直接用于实际。可是，如果儿童在课本中看到一张图上画出了三颗樱桃的集合，一个孩子说："三颗樱桃"，别的孩子会知道这句话表示了什么意思。那么，它们是真的樱桃吗？集合论刚开始时会引起这种疑问。我看到过一部电视教学片，其中花了十五分钟将各种物品的图片放到括号中去，同时用一个单调的配音重复地说："这是一个集合。"事实

上，只有在已经使用了集合时，譬如用映射比较集合，找出子集的集合等等时，才开始了集合论。这里，映射、子集的集合等，都不是具体的现象。它们是一种模型，以这种或那种方法应用于现实。

这就促使我们去考虑另一个问题：

如何运用集合论的模型？

这个问题不可能用人为编造的例子来回答。其关键不在于集合是什么，而在于集合有怎样的运用。

我曾提过自然文恩图。若要分析两个国家间的边界这样一个概念，可以这样看：两个国家在地图上用两种颜色的区域表示，它们以类似一条曲线的东西接壤，表示了共同边界。用数学术语讲，一个国家就是地图或地球上的某个集合。邻国间的边界就是两个点集的交。如果它们不是邻国，则没有共同边界，即共同边界是空集。当然，国家实际上不是地球上的点集。在靠近边界处，很难说清楚某一点是否属于某一国家。国家也不只是二维的，采矿和航空的司法权将它扩展到三维。此外，国家可能用城市、乡村及其人民的集合来定义似乎更好一些。国家也有一些方面是无法适合集合论模型的。如果认为国家是陆地表面上点的集合，那么“荷兰是它十一个省的并集”的说法就不错

了。我们可以用一条线将国家分为南部和北部，或是东部、西部。另一方面，我们也可以将一个国家的人口按一些特征来划分，例如性别，成人和儿童，婚姻状况等等。

这些都是非常特殊的例子。给出了这种集合，你能立即指出它的元素。数学例子可能会深奥一些，如要找到平面上离点 M 距离为 r 的点集，就要用到圆规；要找到与 A、B 两点有相同距离的点的集合，就要用到尺规作图；要找到满足方程 $x^2-3x+2=0$ 的 x 的集合，就要解这个方程。当然，学生应该了解未明确给出元素的那种集合。但这并不是说，每一个问题都要归结为求解集的题目，也不是说，每一个问题的解都要写成集合的形式。例如，表示“谁害怕大灰狼”就根本没有必要写成 $\{x|x\text{害怕大灰狼}\}$。

人们可以按下述模式去解方程：$x^2-3x+2=0$。

$$
\begin{aligned}
&\{x|x^2-3x+2=0\} \\
&\quad=\left\{x|x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+2-\frac{9}{4}=0\right\} \\
&\quad=\left\{x\middle|\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\} \\
&\quad=\left\{x|x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\vee x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\right\} \\
&\quad=\left\{x|x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{x|x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\right\} \\
&\quad=\{x|x=2\}\cup\{x|x=1\} \\
&\quad=\{x|x=2\vee x=1\}。
\end{aligned}
$$

这里将集合的概念变成了运算的概念。人们也可以说:“半径为1的圆面积的集合是单元素集合 $\{\pi\}$”。这样说本身并不错,但是太做作了。

如果说:“平面上到 A、B 两点距离相等的点集是线段的垂直平分线”,那么这个集合论模型是可运算的。这一点很重要。它们可比较,且服从集合论的运算。

在教学中引进集合论与在数学中引进集合论的目的并不完全相同,它需要考虑更多的因素,即如何与实际生活和数学内容联系起来,不应该把引入集合当作一种时髦,而应对其各种特殊情况作一番深思熟虑后再采用。

有些人在教学中利用集合演绎出自然数，我认为集合并不能做到这一点。一旦用基数概念导出自然数，那么自然数的数量意义就会消失，而集合概念也会失去它的运算性质。

还有人把集合作为函数概念的基础，这既是数学的误解，又是教学法的误解。集合并不是函数的前提。即使集合的引入要早于函数，它对函数概念的形成也不起什么作用。

一些教科书作者喜欢把集合概念搬进所有的场合，把一些毫无关系的东西或不可能做到的东西都塞进集合论的框架中去，这是不恰当的。

结构化的全集——小世界

集合论的模型从幼儿园起就可以恰当地运用。这一点第纳斯（*Dienes*）早已认识到了。他提出了一种根据几个特征来划分全集的活动。在这种活动中，集合论的关系和运算是结构化和形式化的适当工具，包含、交、并、补集等运算都很自然地紧密联系着实际生活。它还可组成抽象的偶对，从而使给定的集合形成某种结构。这种活动的另一个很大优点是，要进行的运算是施加在预先设计好的全集上，而不是施加到任意构成的集合上。这样做符合儿童的心理特点。我们

从几何教学中知道，儿童学习平行四边形、正方形等封闭图形比学习角、直线等非封闭图形要更容易些。非封闭的全集由于其对象可以扩展而不易掌握。

简单地讲，第纳斯提出的活动材料是以一盒积木作为全集。它可以按颜色、形状、长度、厚度等不同标准进行分类，以此来进行逻辑游戏。尽管我很赞赏第纳斯的材料，但它实际上仅向学生提供了一套“先验”的结构材料，使得他们只能模仿，失去了自己构造全集的机会，而且，他的材料太数学化了。

我设想了一种像玩具盒那样的全集，称为“小世界”，对象是学龄前儿童。“小世界”中有汽车、洋娃娃、积木等等，让儿童按照色彩、形状、大小、意义、功能（会动，不会动）等标准进行分类。他们可以练习精细地分类、粗略地分类，还可以按充分或必要条件来分，从中也可以学习什么是必然，什么是偶然，例如在这个“小世界”中正巧所有红色会动的东西都是小汽车，然而在另一个“小世界”中却并非如此。玩具盒中的标准也不一定独立，红色的可能都是汽车，而汽车不一定都是红色的。总之可以有各种自然的组合。

最主要的事情不是仅仅使用构造好的材料，而是以这种材料更好地进行构造性活动。我这里要强调偶对的形成，如果是在群论中引出直积的概念，则可

以从一个给定的群 G 的正规子群 H、K（除了单位元外，H、K 不交）出发，得到具体的直积 HK、它具有如下性质：HK 也是群，它的每一个元素的表示方式唯一，即用 H 中的一个元素及 K 中的一个元素的积来表示。然后，我们可以从两个群 H 和 K 来构造抽象的积：偶对 $(h,k)(h \in H, k \in K)$。在其元素之间，我们可以规定一个乘法，使之建立联系：$(h,k) \cdot (h_1,k_1) = (hh_1,kk_1)$。在中小学中，我们是用另一种方式引进两个集合 A、B 的偶对集合 (A,B) 的。一开始是抽象地组合起 A、B 的元素，然后才在给定集上具体地构造偶对的结构。

我设想“小世界”可作为学龄前儿童进行逻辑、集合理论练习的材料，但我认为其结构还是太抽象，太程式化了，可能仍是一种思维训练。我宁愿把它看作为一种低层次的玩具，一种初级的游戏，甚至可用更自由的材料，以适合于儿童进行构造活动。主要的问题是材料的意义能否被儿童完全理解。我们还要弄清数学教学整体框架中局部的成功能带来什么收获。如果集合只是用来解释基数，那么随着这种基数的性质以后在数学中的重要性的降低，它的作用就会很快消失。集合论的运算在结构化的全集中可有本质的

运用，但目前还无法知道这个问题在整个教育中的意义。

突如其来的集合

我们前面提到过构造全集的问题。这种集合可以采用一些常用的运算，例如根据性质找出子集，或组成若干个集合的并、交或补集。而要构造集合 V 的子集的集合 $P(V)$，则需要有较高水平的抽象能力。一般说来，$P(V)$ 是不直观的。在教学上很难实施。像自然数、整数、偶数、小数等等集合，在一定程度上往往可以直观理解，但 V 的子集的集合则完全不能相提并论。如果找一个基数很小的集合，则可以写出其子集的集合。但是要以这些子集作为一个新的集合 $P(V)$ 的元素，而且要在该集合上作集合运算的话，抽象水平就大大提高了。"某个集合是不是另一个集合的元素?"，这样的问题对数学来说是带有本质性的，但不能在"小世界"中提出来，因为其中的元素都是明显地能触摸到的物体。在较高的层次上，我们可以用另外一种方式问：两件东西放在一起作为集合中的一个元素，你能够理解吗?

应该说，在"小世界"的具体游戏结束后，$P(V)$ 这种集合的问题是回避不了的，但这里要有幅度较大

的抽象。这时可以举出这样的例子：平面上所有圆的集合 Φ，再把每个圆理解为其上所有点的集合。这样，"点"这个对象就不是个别、具体地去认识了。Φ 的元素不能一个个地罗列出来，但集合 Φ 是可以直观想象的。Φ 的子集及其运算也就自然而然地出现了。

还有一个例子，就是整数及其等价类。有理数域 Q 的形成，要先从整数环 Z 组成 $b \neq 0$ 的整数对 (a,b)，再通过定义等价关系 $\sim$：$(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow ad = bc$，形成等价类。从数过渡到数对并非易事。具体地讲，在"小世界"中就不可能做到。因为无法在其中组成全体有序对，有时要组成这一对，就要拆散另一对。而且像 (b,b) 这样两个元素相同的数对也无法具体组成。所以，偶对的集合要作一定程度的抽象，然后通过等价关系形成等价类，最后则考虑所有等价类的集合。等价类就是在特殊情况下的子集，要花大量功夫方能将其抽象化，每一个等价类由其一个元素完全确定。等价类可以通过其代表元素来理解，来运算，并用于实践。正是由于这个原因，它要比一般的子集更具体些。也由于等价类是相互不交的，所以等价类的集合要比所有子集的集合更易领会。总之，可以用以上那样的例子来介绍所有子集的集合，而不应突如其来地造出一个 $P(V)$。

集合概念中的抽象化层次

我认为,集合论的教学需要区分出各种层次。集合概念发展的最低层次就是“小世界”中的各种对象,元素可以一个个地罗列出来,最高层次就是完全公理化、形式化的集合论,其目的是欣赏一种形式。在最低与最高层次之间,则存在着许多层次。“小世界”后面,是画在纸上的集合。然后是思维类型的“小世界”,以及通过思维设计的集合,它们可进行具体的或思维的操作。更高级一点的是明确描述了元素的集合和那种易于想象的集合,例如平面上某种圆的集合,可用易于描述的运算法则来运算。一些纯形式的认知和推理内容,应限制在极简单的事实上,例如包含关系的传递性 $(A \subset B \wedge B \subset C) \rightarrow (A \subset C)$,以及单射的积仍是单射等等。而把一集合看作为某集合的一个元素,抽象性就很强,因为常常无法将它具体化。例如,关于集合 V 不可能与其子集的集合 $P(V)$ 有相同基数的证明本身很简单,但大学一年级的学生就很难弄懂。困难在于集合元素之间的关系只有在具体内容中才会产生具体化的直觉。

我不知道一些教科书的作者是否意识到集合概念抽象化层次的变化。他们常常将其尽可能地具体化,

这恰恰也是产生错误的原因之一。在函数问题上，就有不少运用具体化方法不太成功的例子。集合论中可以偶尔地运用文恩图，但过分了就会产生错误。我们不应将不适当的方法运用到不适当的课题中去。如果是由于太抽象而不能为学生所掌握的话，还不如干脆忍痛割爱将其舍去。

伪集合

词“集合”翻译成各国语言会产生非常显著的差异，了解了这一点，我们就可以理解各国在数学教学中引进集合时采用不同例子的原因了。在荷兰，“集合”的译名通常有“收集”的意思，所以几乎所有的荷兰课本都以集邮作为集合的开始。于是，按集邮者的习惯，每一种邮票只有一张样票，这一点连同对文恩图的误解造成了错误的集合概念之基础。在法语中，“集合”的译名有“一起”的含意，所以法国便无节制地使用文恩图，所谓“一起”就是用封闭曲线把东西圈到一起。在德语中，“集合”有“量”的意思，这就产生出“五磅糖的集合”这种例子。在美国与美元的“集合”是用一张 5 美元的钞票，再加上括号来表示。在英国，则有“1960 年某地日平均气温的集合”，在罗列出的一串数字中，有一些会是相同的。在美国、英国的

教材中，有重复元素的集合的例子很常见。每当教师讲授这类问题时，就会有人吹毛求疵地问：应当如何刻划“有重复元素的集合”？这是课堂教学中一个很平常的问题，但非常奇怪，教科书对此都默不作声。如果我们不把它看作集合，而按更重要的特征把它看作函数，即对三百六十五天，分别指派一个数：日平均气温，不是更恰当一些吗？

另一个问题是：可否有 $\{a, b, c\}$ 这样的表示方法？在较高层次的数学中，$\{a\}$ 很常见，$\{a, b\}$ 也很普遍，$\{a, b, c\}$ 就少见了。而且对 $\{a, b\}$，常常改说：D 是集合 $\{a, b\}$，这里已经定义了 $a \neq b$。在数学教材中，如果要表示一个方程的解的集合，例如 $x^2(x-1)=0$ 的解集，可以指出根 $x=0$ 是二重根，但用 $\{0, 0, 1\}$ 的形式表示则不行，因为它与 $\{0, 1\}$ 是一样的。我们为什么不用较高层次的好方法，即它的根是 $a_i (i=1, 2, \cdots, p)$，重数分别是 m_i 呢？为什么要去生造出一种中小学数学的特定用语，把每样东西都硬塞到集合论中去呢？

集合论中的演绎性质

集合论中要引入多少演绎性质？这需根据处理集合论的深度，以及在集合论的基础概念中加入多少种关系而定。从逻辑的角度看，集合论中的所有

关系可归结到“$\in$”关系，利用作工具，就可以定义“$\subset$”,“$\cup$”,“$\cap$”,“$\setminus$”等关系。对儿童来说，虽然可能还达不到演绎水平，但应能理解“如果 $a \in A$，那么 $a \in B$”这样的模式，它就是的一种描述，而要他们理解 $((A \subset B) \cap (B \subset C)) \rightarrow (A \subset C)$ 或分配律等的演绎证明则未必可能。有人说“$\subset$”的传递性证明实际上就是用集合语言来表达“$\rightarrow$”的传递性证明。事实上，我们并没有弄清楚究竟是集合论利用文恩图证明了逻辑的传递性，还是逻辑的传递性以及蕴含的抽象结论证明了集合论的传递性。我认为，集合代数的演绎体系不应当在中学里教。而数学家们总是希望以演绎体系来进行集合论的教学，否则就会于心不安。于是，他们的做法就是将所有演绎负担都倾注到数学中去，并将迫切需要考虑的问题都留给学生自己去解答。这里我还要指出一类在集合代数中显得很正规的问题，来说明这个专题上实在差劲的教学方法。

教算术的时候有这样的问题:“约翰有 5 颗小石子，他又得到了 3 颗，那么他一共有几颗小石子?”学生应当根据给定的条件自己去选择运算。正是这种选择能力才保证了算术的应用。而在集合论中，会出现这样的问题:“A 是成人的集合，B 是男人的集合，$A \cap B$ 是什么?”提这样的问题究竟有什么意义呢? 难道它不

就是在问:"约翰有 5 颗小石子,他又得到了 3 颗,5 加 3 等于多少"!

集合论的符号

我早就听到一些教师抱怨说,集合论的符号 $\in, \notin, \subset, \cup, \cap, \setminus$ 等等使得学生很难掌握。过去我总不太明白。当我研究了大量教科书后,就弄懂了其中的道理。像图 15-11 与图 15-12(1)、(2)那样的情况,文恩图和符号混用,是会让学生和教师无所适从的。但事实上这种情况是可以避免的。更严重的是下列情况:$\{x \in V | F(x)\}$,它居然未受到批评,所以我对此作了一些调查研究。

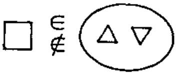


图 15-11

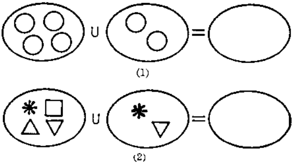


图 15-12

首先,第一部分 $x \in V$ 能不能省略?事实上,$x \in V$ 是指一条性质,如果记 $G(x) = F(x) \cap (x \in V)$,那么整个表达式可以改成 $\{x | G(x)\}$。但这样一来,问题就

发生了变化。如果 $G(x)$ 表示成性质 $x \notin x$,就得到了集合 $\{x|x \notin x\}$,这就是:不是它本身的元素的所有集合的集合。由此产生了著名的罗素(Russell)悖论。而如果采用 $\{x \in V|F(x)\}$ 的形式,则规定了须在给定集合 V 中按性质 $F(x)$ 选择元素。这样一来,悖论就避免了。其次,$\{x \in V|F(x)\}$ 中的第二部分 $F(x)$,应该使学生理解它指明什么性质。在一些简单的例子中,例如 $\{x \in R|x < 3\}$,是不会发生问题的,但要是例子复杂一点的话,就可能出现错误。

有人把"2 的幂的集合"记为 $\{x \in N|x = 2^n, n = 1, 2, \cdots\}$,把"7 的倍数的集合"记为 $\{x \in N|x = 7y, y \in N\}$,这是不正确的。因为,在括号中我们已经用到了未规定过的变量 n 或 y,对它们的限制未加说明。实际上,如果说"x 是 7 的倍数",意思是"存在一个 y,使得 $x = 7y$",而"x 是 2 的幂"意思是"存在一个 n,使得 $x = 2^n$",那么它们可以分别表示为 $\{x \in N|\bigvee_{y \in N} x = 7y\}$ 以及 $\{x \in N|\bigvee_{n \in N} x = 2^n\}$。要真正理解这些表达方式需要具备进一步的知识。我认为,一般的中学生达不到这种水平。有人则认为可以用 $\{2^n|n \in N\}$ 即 $\{7y|y \in N\}$ 来表示。但这种记号忽略了运用括号时的约定,这里的括号实际上是指明

函数值的集合，即函数 $\bigsqcup_{n\in N} 2^n$ 及 $\bigsqcup_{y\in N} 7y$ 的值域。有些书上出现了下列记号：

$$\{ax^2+bx+c|2ax+b\geqslant 0\},$$
$$\{f(x)\in A||f(x)|\in B\backslash A\},$$

这种方法使人们无法确定到底要对哪个变量作出规定。

有些教材可能已经认识到了这些问题，所以采用了语言的描述，而不用形式符号，例如 $\{x|x\text{是2的幂}\}$，$\{x|\text{可被7整除}\}$。

总之，要认真地考虑应用 $\{x\in V|F(x)\}$ 这种形式是否合适。应该知道，括号本身并没有运算的意思，是否运用括号要取决于形式化的深度。

函数、映射的直观解释

函数、映射概念的出现，要出正式的定义早得多，也自然得多。我们“能够”甚至“必须”运用实际中出现的函数概念，而不必先去生造或定义函数、映射。在学生接触了许多函数，已经能作出函数以后，再让他们去归结出什么是函数，这才是数学活动的范例。这种新的基础概念的创造，才能明显地表现出活动水平的提高。

自然的或很接近现实的函数例子比比皆是，例如，

折扣是总量的函数，重量是体积的函数，飞机、火车的行程是时间的函数，利息是时间的函数，光强度是光源距离的函数等等。

在传统的中小学数学中，函数与图象几乎是同义词，但有些课本却对图象避而不谈，有些则很晚才出现图象。事实上，以上那些例子都可以由自然问题引入，并通过图象表示而自然解决。我很强调图象的重要性，但这并不排除其他方面。从教学法观点上看，多方面的探索总比片面的要好。

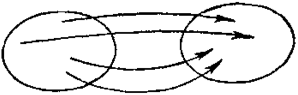


图 15-13

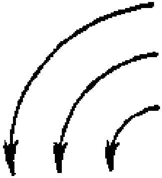


图 15-14

映射可以用一些箭头来加以具体化，例如图 15-13。它尤其能表示平面上的平移，同时还能说明向量的概念。平面上的旋转可以用曲线箭头表示（图 15-14），反射则应当用长度变化的直线箭头表示（图 15-15）。

如果有一组映射，例如要在一个图中表示变换群

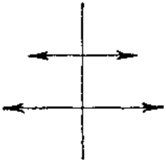


图 15-15

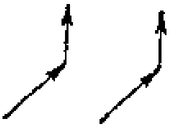


图 15-16

的元素，就会出现困难。在图 15-16 中，是能够看出哪些箭头表示了相同的映射，哪些表示了不同的映射。但若要表示著名的四元群，则会产生问题。四元群可以用置换群来表示；

$$\begin{array}{llll} e1=1, & e2=2, & e3=3, & e4=4, \\ a1=2, & a2=1, & a3=4, & a4=3, \\ b1=3, & b2=4, & b3=1, & b4=2, \\ c1=4, & c2=3, & c3=2, & c4=1, \end{array}$$

这里的 e,a,b,c 为作用于符号 $1,2,3,4$ 上的映射。若要采用更具体化的方法，可设 $1,2,3,4$ 为一个正方形的四个顶点（图 15-17）。现在，映射 a 是正方形关于垂直轴的反射，映射 b 是关于水平轴的反射，而映射 c 则是关于正方形中心的反射，e 是恒等映射。

有些研究教学法的人认为这还不够具体，可采用图 15-18 的表示。这就错了，因为它含有存在四个不同

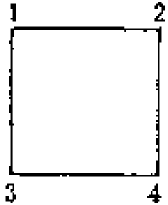


图 15-17

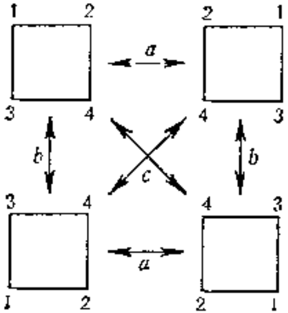


图 15-18

的正方形的意思,实际上,应该将一一对应组成一个群,映射应作用在同一个集合上。所以,应该只画一个正方形(图 15-19),同时指出,在 a 的作用下,点水平地互换;在的作用下,点垂直地互换;在 b 的作用下,点对角地互换。这也可以用箭头来表示(图 15-20)。

还有一种方法,用四块积木,其中两块三角形,两块圆形,并且各分红、蓝两色,作如下定义:

a:互换同样形状的积木;

b:互换同样颜色的积木;

c:互换不同形状、不同颜色的积木。

再加上恒等映射,也形成了一个抽象群.

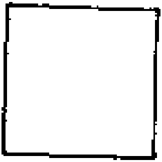


图 15-19

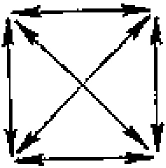


图 15-20

当积木有次序地对称排列时（图 15-21），颜色和形状的互换就变成了：

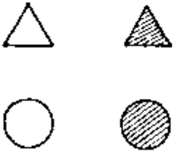


图 15-21

a:左与右互换；

b:上与下互换；

c:左与右、再上与下互换。

要在某一层次上解释函数 f 是什么时，只要说将某一对象指派给另一对象。但低于这一层次，就必须对这种指派加以具体化，以便理解。那么怎样将映射具体化呢？平面上的反射是很简单的：面对镜子照一照。再具体一点，可以取一张纸对折起来。要解释平移，可以从一叠纸上移动第一张。这样，映射 f 就描述为将对象 x 位移到 fx。这就是说，f 是一种位移法则，移动前和移动后的东西仍是同一个东西，应当具

体化的是这种变化。至于移动的是什么东西,那是无关紧要的。

还可以采取另外一种方式,取一个集合,例如取狮子、大象、骆驼。f 是循环地变形:将狮子变到大象,大象变到骆驼,骆驼变到狮子。在这个具体化的过程中,映射前、后的对象不同了,成了变形法则,它将一个对象 x 变到了另一个对象 fx。

为了避免混淆,我们应该清楚地认识到有两种具体的映射:

作为位移;	作为变形。

映射作用的集合分别是:

位置的集;	对象的集合。

法则 f 分别

将位置 x 上的对象 位移到位置 fx;	将对象 x 变形为 fx。

这里需要讲清楚的是,

位置上的对象;	对象的位置。

不起实质性的作用。在的作用下,对象的变化

不依赖它的性质, 只依赖它的位置;	不依赖它的位置, 只依赖它的性质。

这样就有了规定对象和位置的限制,例如

初始状态;	对象的指派。

而衡学生是否掌握了映射的概念,要看他们能否进行下列变化中的一种:

从对象抽象出位置;　　从位置抽象出对象。

也就是能否想象出

无对象的位置;　　无位置的对象。

发展心理学的理论认为,上述第二种方法要比第一种方法先学会。这也就是说,“石头”,“三角形”,“圆”等等要比“这里”,“那里”,“左”,“右”等等容易掌握。然而教师往往是从第一种方法开始教的。数学家则更熟悉和习惯于第一种方法,至少从几何上看是这样的。在较低层次上,学生至少应能学会从对象抽象出位置,从位置抽象出对象。进入到高一些的层次,学生就能作出比较广泛的抽象分析了,而教师则应完全掌握这种分析。

函数概念的定义

这里所说的“定义”并不是指形式主义的定义,而是指定义的过程,指定义函数概念的心理学准备和教学法准备,以及它的运算性的定义即实际应用概念的方法,所以,更确切一点说,是指函数的表达。

函数是莱布尼兹(Leibniz)提出来的,但当时的含意与现在的意义相去甚远。牛顿(Newton)、莱布尼

兹所用的是“量”，量 x,y,z 可以变化，但又不是独立变化的，而是存在着某种相互依赖的关系。如果 x 有增量 dx，则 y 便有一个 dy 的变化，而 dy 与 dx 的商则是一个新的量。但是那种依赖关系当时尚未清晰地加以说明过。

欧拉（Euler）和达朗贝尔（D'Alembert）在弦震动的研究中首先采用了函数记号。直到 19 世纪，教科书中才开始对函数概念作出系统的说明：函数是一个法则，对某个范围内的每一个数，依照该法则指派了另一个数，20 世纪中，人们又提出了函数是一种特殊的变换。而现在，几乎都认为“函数”与“变换”是同义词。

上述定义中的“法则”是什么呢？法则是一种指派。只要我们知道了 R 中的每个元素在中的对应元素，那么 R 到 S 的函数（指派）也就清楚了。所以，函数就是一个偶对的集合，其第一个元素取自于 R，第二个元素取自于 S，组成 (r,s)。而 (R,S) 的子集必定满足某种条件。还有另一种说法：R 到 S 的函数是 R 与 S 之间的一种特殊关系。因为一般说来，(R,S) 的子集恰被称为 R 与 S 之间的关系。通俗地讲，关系就是类似于“……比……大”这样的事情，例如为一对对象约翰和玛丽指派一项性质：约翰比玛丽大。当对象被限制在 R、S 这两个集合上时，逻辑意义上的关

系与集合论意义上的关系是一致的。因此,虽然逻辑理论和集合理论是有区别的,但偶对的逻辑关系也形成了集合论的关系。实际上,“关系”这个词是数学家从逻辑学家那里窃取来的。“法则”的意思就是逻辑关系,它只是将这种逻辑关系翻译成了集合论关系。如果把“法则”理解为具有这样或那样性质的一个逻辑关系的话,那么函数的集合论定义比最初的定义更精确一些。

有人会反对说,“法则”和“指派”都是含糊的概念,子集才是严谨的概念,而事实上,一个集合的某一个子集本身只有通过指派才能得到,也就是对给定集合的元素指派了“是”或“不是”这两个值,这种指派也就是二值函数。在数学基础研究中,子集的概念是集合论的一个基本难题。有人想用“关系”来定义“函数”的原因,可能是认为这样做更能满足现代数学扩展的要求。但这是一种自我迷惑。

我们怎样按教学法要求来描述函数概念呢?走哪一条路呢?让我们来看一些函数的例子。对函数“汽车的牌照号码”我们是否应该先形成所有的偶对(汽车,牌照号码)的集合,即先列出所有可能的汽车和所有可能的牌照号码,然后再确认出哪一个从属于哪一个呢?还是简单地说,对每一辆车指派一个号码,即

将指派称作函数:“……的牌照号码”? 又如“……的母亲”,“……的 3 倍”,“……的上界”等等,这些函数都说明了指派的直观结构。所以,采用从一般关系的概念引出函数定义的方法只会将简单的事情复杂化。

函数的构成应当从映射入手。在一般关系的范围中,它是一个不确定的,难以理解的运算。

最重要的是函数的关系的定义无论从内容还是从记号上来讲,都没有运算价值。当然,人们可以让学生进行反复的练习来记住它,但这是一种坏的教学法。有些教学内容本来缺乏应用价值,只是因为要练习,就在数学教学中加以展开了。而一旦展开之后,就把它视为传统,很难再抛弃。

关系应用到哪里?

不少教学法专家认为,关系概念比函数概念更基础、更一般。根据一些教学哲学,应当优先教更基础、更一般的内容。于是,他们就主张教师在教学中用关系来定义函数。当人们用数学工具去处理现实的时候,什么地方会出现“关系”呢? 在一些语族里,关系的意思就是“亲戚”这样,教科书作者就一头钻进了亲戚关系,去发掘家谱,而不去说明数学关系,结果远离了数学及其应用。

关系缺乏应用的原因是它具有类似于一览表那样的记录特征。父子关系只是一种记录,科学的内容则不是描述性的记录,而是联系,例如,打雷与闪电,抽烟与癌,父与子身高之间的联系。后者不是指父子关系,即“父、子”偶对的记录,而是偶对的两个性质之间的联系,一种情境的两个或几个方面之间的联系。这种联系不是用关系,而是要用相互关联的程度来描述。这里的意思不是记录下“是否”:某人“是否”是某人的儿子,而是通过计算父亲与儿子特定身高的比例,看有多少影响。对于抽烟与癌症的联系,就是通过计算抽烟(或不抽烟)人数与患癌症(或不患癌症)人数之间的比例,看有多少关联。由于“函数”适合于因果这样的结构,所以“相互关联”就适合于“随机”结构。我们的结论是,引入函数概念,可以不考虑关系。

有关函数的争论

函数可以看作为映射。如果映射的值域是数集或向量集合的话,就可以称之为函数。这里有一个问题:A 过到 B 的函数是否要定义在 A 的每一点上?在法国和比利时的教科书中,就有如下说法:A 到 B 的函数是一种关系,对 A 中的每一个元素,指派了 B 中“至多”一个元素。按照这种定义,A 到 B 的函数可能

是没有的，这种说法可能是为了满足教学的需要而编造出来的。函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}(x\in R)$ 的图象怎样作？学生可能会说：这样的函数不存在，但这并没有回答原来的问题。A 到 B 的函数 f 包含了三项内容：集合 A，集合 B，以及 (A,B) 的一个确定的部分。如果要提出一个函数，就必须找出这三项。我认为，上述问题应这样回答：集合 A 可以是 $R\backslash\{0\}$ 的任何一部分。为了避免误解，我们可以约定：有确定性质的函数是有最大定义域的函数。但集合 B 仍有一个含糊的地方：它可以是 $\{x\in R|x>0\}$ 与 R 之间的任意集合。我们也不妨约定：B 可以取最小的区域。在高一点的层次上，可以这么说：设 f 是函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}, x\in R$ 且使函数 f 有意义。

函数记号

函数的传统记号是 $f(x)$，$y=f(x)$，或 $F(x,y)=0$，人们常常搞不清楚哪个是哪个的函数。这些熟悉的记号与表达式得以长期保留，是因为数学家不肯丢掉旧鞋子，除非他们确认已经有了很合脚的新鞋子。可是，随着泛函分析、拓扑学等研究领域的发展，常常要涉及到函数的集合。如果设函数的集合为 A，那么

$f(x) \in A$ 所表示的是函数值属于 A，这种表示就错了。同样，$(y=f(x)) \in A)$，$(F(x,y)=0) \in A$ 也是错误的。我们所指的函数是 f，记号 $f \in A$ 才是正确的。函数 f 是将 $f(x)$ 指派给 x，例如，函数 log 将 log$x$ 指派给 x。但是，怎样来表示将 x^2-3x+2 指派给 x 的函数呢?

（1）$f(x)=x^2-3x+2$。

它并未明确说明。类似的方法有：

（2）$x \to x^2-3x+2$。

逻辑学家习惯使用：

（3）$(\lambda x)(x^2-3x+2)$，

它的缺点是要指出 λ 的含意。我则喜欢使用罗素的方法：

（4）$\breve{x}(x^2-3x+2)$。

由于 x 上面的符号太接近于符号 $\vee$，考虑到印刷上的原因，我建议改用 $\bigsqcup$[1]：

（5）$\bigsqcup_x(x^2-3x+2)$。

这里还可以很方便地写出函数定义域，记为

$$\bigsqcup_{3<x<4}(x^2-3x+2,$$

这一点在（1）、（2）两式中是做不到的。

---

[1] 印刷书上的符号为Ų

设 R 是向量空间，那么 $\bigsqcup_x (x+a)$ 就是关于向量 a 的平移，$\bigsqcup_a \bigsqcup_a (x+a)$ 是指把关于 a 的平移指派给向量 a 的映射。按（1）式，它应当形式化为：

设 T_a 定义为

$$\text{对} \quad x \in R, T_a x = x + a。$$

那么，T 就定义

$$\text{为对所有的 } a \in R, Ta = T_a。$$

按（2）式，它就应当定义为

$$a \to (x \to x + a)。$$

但它读起来很别扭。

又如，设 G 是一个群，则 $\bigsqcup_x axa^{-1}$ 是 G 上的一个内自同构，$\bigsqcup_x axa^{-1}$ 则是将 G 映射到其内自同构群内的一个重要的同态映射。

再替如，设 f 是一个实变函数，则 $\bigsqcup_x f(x-a)$ 指该函数向右位移距离 a，$\bigsqcup_f \bigsqcup_x f(x-a)$ 指任意的函数 f 向右位移距离 a，$\bigsqcup_l \bigsqcup_f f(x-a)$ 为将上述位移指派给 a 的映射。

改进函数的记号是一种迫切的需要，大家应当约定适当的记号以结束规在因使用括号而引起的混乱。我的提议能做到这一点。这种记号还具有运算性，可以避免非运算性的形式化东西，似应介绍到中学里去。

第十六章

几何的状况

长期以来，几何是数学的同义语。由于几何是一个完整的概念体系，其中各个问题严格地一个接着一个，并最终每个问题都来自于定义和公理，所以人们认为几何是真理，它是神圣不可侵犯的。但自帕施（*Pasch*）和希尔伯特（*Hilbert*）通过公理体系的研究揭示了传统几何中所存在的缺陷后，几何这种至高无上的地位便逐渐消失了。然而，帕施、希尔伯特所建立的公理系十分复杂，我们只能对它们做些基础性的研究，却不能用它做几何，更不能用它教几何。

几何不仅是演绎科学的一种范例，而且也是最古老的教学法的范例。历史上关于上课的最早记载是柏拉图（*Plato*）所报道的关于苏格拉底（*Socrates*）给门诺（*Meno*）的奴隶们所上的实验课。柏拉图的报道也许是捏造的，但是，说那堂课的内容是几何，却不是偶然的，就是在今天，几何也还是苏格拉底方法和“再创造”的最好材料，在这方面，只有概率论才能和它匹敌。

有人以为今天传统几何走上了没落的道路，甚至有人主张取消它，理由是它的演绎性还不够严格。但这是不对的，依我看原因在于没有像苏格拉底那样运用再创造的方法来教几何，而将几何演绎体系强加于人。想要以强化几何的演绎结构来拯救传统几何，那是注定要失败的。事实上，几何不单纯是演绎理论。

什么是几何

对此，不同的层次有不同的回答。从高层次上看，几何是数学的一部分，它是以公理系统的方式组织起来的；但从最低的基本层次上看，几何则是对空间的理解。为了生活得更好，我们就必须了解，探索，并征服我们所生存的空间。

因此，我们说几何是空间的科学，是现实的物理空间的科学。也许有人认为变化多端的现实世界不能成为高度抽象的数学体系的基础，认为数学是至高无上的演绎体系，它不能受现实世界任何非演绎细菌的侵犯与污染，否则它的发展将受到阻碍，这固然也是一种道理，在一定的范围内也是对的。但要知道，有更多的学生，他们学几何并不是为了要建立一个演绎体系，而是要了解我们生活的空间，其中的问题是许许多多的，例如：

为什么卷起来的纸不容易弯折?

影子是怎么形成的?

月球表面的明暗界线是哪类曲线?

为什么用许多全等的三角形可以复盖平面,而换成全等五角形一般地却不能?

万花筒的工作原理是什么?

是否每个平面内都包含一条水平直线(或铅直直线)?

为什么右旋螺线和左旋螺线在刚体运动下不能合同?

为什么镜子只改变左右而不改变上下,如果躺在镜子前会产生什么情况?等等。

请注意,我提的都不是实际应用的问题,这些问题也不是“谜语”,而是一些带原则性的重要问题,人们动点脑筋就能给出答案的。我提这些问题是要说明:密切联系实际问题去学习数学是何等重要,大多数人学数学并不是以数学为职业的,同实际生活无关的东西很快地被遗忘。因此必须结合日常生活实际,以了解物理空间为出发点去学习几何,它才不易被忘记,才会对人的生活产生影响。

我这里所说的从探索物理空间的性质出发去学习几何的观点绝不是新的,它在1741年出版的《几何原

本》(克莱罗著)(Clairaut,《Eléments de Géométrie》)这本精采书籍中便有了。荷兰自1920年以来,在塔蒂安娜·爱伦弗斯特(Tatiana Ehrenfest)的倡导下,这种以通过操作实践开始探索空间而不是从演绎论证开始学习几何的做法已经普及,它比帕施-希尔伯特的新发明更受欢迎。

为什么教几何

几何除了具有一般数学的共性以外,还有如下特性:

(1)几何经常被认为是一种思维训练,培养逻辑思维与形成演绎体系似乎是几何的特权。

(2)几何有实际应用,这不是从实用主义的观点出发,认为几何只要保留毕达哥拉斯(Pythagoras)定理与相似图形的少量定理,以及长度、面积、体积等少量公式,根本不需要传统的欧几里得(Euclid)逻辑体系;而是指通过几何可以更深入地掌握和理解物理空间。

因为作为演绎体系,也许还有比几何更合适的系统,但在认识现实世界与联系实际,使现实数学化方面,几何的作用是无法被代替的。数与形都是对现实世界的反映,通过计算能学思维,但借助眼睛、手等

各种感官来接触空间形状，是一种最好的引导机会，它更有利于发现与创造，也符合于教育家夸美纽斯（J.Comenius）的观点——打开学生的各种感觉器官。

此外，几何作为一个逻辑体系，也许是使儿童感受人类精神力量的一种最有力方法。教几何是理想与现实之间一场无可比拟的斗争，其中显示了人类卓越的智慧。当然这必须运用恰当，否则就可能适得其反，使儿童认为自己智力低下，而丧失信心。

具体材料

遵循历史发展的规律，人们在观察、思考现实世界的各种空间形式及其性质的过程中，形成了实验几何学。例如，将位置抽象成为一点，将运动路径抽象成为一线等等。因而，教几何的初始阶段应该使用具体材料，从某种意义上来说，是重复实验几何学中概念、性质的发现过程，但这并不是严格且进行反复试验的实验科学（像物理实验室所要求的），它实质上已经包含了一定程度的抽象意义，目的在于抓住其总体结构，而不拘泥于具体细节。譬如，画方石板铺成的人行道，就不需要画出石头的裂缝及缝中的沙子，我们需要的是从物理现实抽象形成的几何内容，从低层次的活动开始，为较高层次作准备。

供选择的具体活动可以是折纸、剪纸、粘贴、画图、油漆、测量、铺路以及拼接等。而用具体材料的目的是让学生通过手脑并用，促进思维活动，形成某个对象的发生式定义——如何把它做出来。它也许开始不很严密，但必须符合以后的形式化定义，而且作为逻辑形式的发展应该植根于具体材料之中。

具体材料的几何教学自然应从空间开始，实践证明，从人们实际接触的三维空间直接进入立体几何，可能更有利于空间想象力的培养。而传统的平面几何是丢弃了现实而抽象出来的二维空间，练习太多，过于片面，这也许反而束缚了学生的思维，相反，用描述的方法引进肉眼看来直观明显的东西，而不去强求证明，则更有利于几何思维的发展，实质上，这也为进一步建立严格逻辑推理的演绎体系打好了基础。

1. 狄那·范·希尔（Dina van Hiele）的实验

实验对象是中学一年级学生（七年级，12 岁），整个实验共分三个学期：

第一学期

（1） 从空间图形到平面图形

先从各种材料制成的立方体模型开始，这些模型可以是钢件结构型时，也可以是纸板粘贴成的，或者

是其他材料制成的。通过模型给学生介绍立方体的棱、顶点、面，立方体的棱数、顶点数及面数，进而掌握立方体是由正方形围成的，可由 6 个正方形围成一个立方体，同时可以通过两次折叠来介绍直角的概念。在结构立方体中系上带子，或在纸板立方体上画上线，就可以引入立方体的两类对角线（面上的和空间的），同时引出立方体的对角面，它是一个矩形，让学生考虑一个立方体有多少条对角线，多少个对角面，以及如何测量对角线时长度。接着让学生制作一个正四面体，从中介绍等边三角形，并在画有对角线的正方形图形中，寻找不同于等边三角形的另一类三角形——直角三角形。教师再给学生一个正八面体的展开图，让学生制作一个正八面体，还可以在中间附上一个正方形的对角面。

（2） 对称与反射

在黑板上画半只花瓶，让学生画出另一半，并用镜子加以检验。从这个具体的过程，让学生理解对称的含义，并系统地掌握平面上的对称图形，包括中心对称与轴对称图形，例如圆、菱形、筝形以及正六棱柱和正八棱锥，可以用 4 支等长的铅笔做成一个不是正方形的四边形，那就是菱形的模型，也可以用折纸或利用一个活动的绞链模型来加以演示，在此可以讨论菱

形时两条对称轴以及其他性质，也可以讨论如何寻找圆的对称中心？

讨论圆周长的测量方法，如何舍入以及估计它的精确性，通过圆的内接正六边形和外切正方形，可以估计出圆周长与圆的直径之比必然介于3和4之间，从而可以判定某些测量的错误。

以菱形作为作图的出发点，先作任意菱形，再逐步进展为给出一定条件再作菱形；也可应用筝形这一特殊图形，在此基础上系统地作各种平面图形的镜面反射像，同时让学生获得三角形的高和中线的概念。

（3） 角与量角器

用少量几节课介绍角，但不加定义，借助于手臂运动和时钟的例子，形象地描述角的概念，同时引入量角器，并讨论依赖于角的一些概念。

第二学期

第一课时 讨论图形的全等。教师讲授的第一个例子是教室里面的全等的椅子（传统的中学几何里只知道全等三角形），通过各种具体例子，使学生理解全等的描述性概念——“不可区分的对象”，并能辨别全等与面积相等不是一回事。由于人行道常用全等的方瓷砖铺设，因此可让学生通过对各种不同模式的人

行道的描绘与画图，去自然地发现平行线，当然它不一定是水平或铅直的直线。

第二课时　让学生模仿教师画出平行线，同时引导他们从带有对角线的正六边形（图 16-1）中找出菱形模式，并进一步观察立方体的空间直观图形。

第三课时　教师发给学生各类全等的纸板正多边形，作为瓷砖，要求学生考虑能否用全等的三角形、四边形、五边形、六边形、八边形等各类瓷砖去覆盖平面，如果可以，就画出铺设的方法（正五边形允许用量角器画）。

第四课时　教师发给学生不规则的纸板多边形，并提出同样的问题。

第五课时　让学生讨论全等的正五边形为何不能覆盖平面?

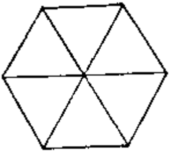


图 16-1

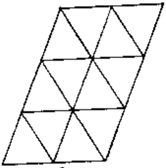


图 16-2

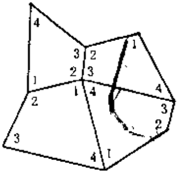


图 16-3

第六课时　用全等的三角形铺地可形成包含整条

直线的平行直线束（图 16-2），而用不规则的四边形铺地就不能形成整条的直线（图 16-3）。从以上构图中，学生可以发现各种类型的结构，三角形的内角和定理，四边形的内角和定理，也可知道为什么全等的正五边形不能覆盖平面。

第七课时　讨论用全等的三角形铺地所形成的大小不同的平行四边形、梯形以及放大变换。讨论能否用全等的六边形或非凸的四边形来覆盖平面？内角和超过 360° 的全等的多边形能否覆盖平面？是否有某一类全等的五边形能覆盖平面？

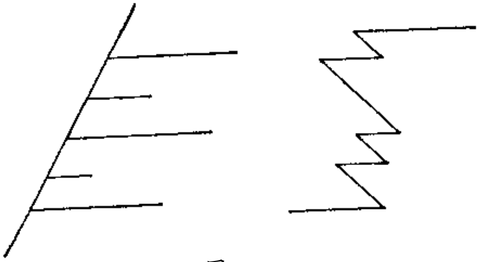


图 16-4

第八课时　得出多边形的内角和与覆盖平面（铺路）之间的逻辑联系，重新研究铺路的结构，从中发现“梯子”和“锯子”（图 16-4）。

第九课时　借用“梯子”和“锯子”这些工具，探讨平行线所形成的一些角之间的关系。

第十课时　讨论平行线广梯子”和“锯子”，以及三角形内角和之间各种关系的逻辑结构。

第十一到十七课时　讨论铺路中所产生的放大、旋转变换，瓷砖的系统计数，面积与相似及其系统化的定义。

第三学期

让学生重新观察立方体。立方体的对角面将立方体分成两个棱柱，要求学生制作棱柱模型。教师出示一个正四棱锥，以立方体的正方形面为底，以立方体棱的一半为高，提出下列问题：多少个这样的正四棱锥可以填满一个立方体？如何制作这些棱锥？它的侧棱有多长？并让学生制作这种棱锥。

讨论这些棱柱与棱锥的体积，再在立方体的每个面上都粘上一个这样的正四棱锥，构成十二菱面体，并讨论它的体积。

同时讨论正多面体与它们的组合图形。

2.　凡·阿尔巴达（P. J. van Albada）的课程

第一年（试验对象年龄为 12 岁）是入门课程。

接着是三年系统的几何教学,平面几何与立体几何结合在一起,但对明显的命题都不作证明。第五年以新的体系重复这些理论,这时不证明的命题的数量大大减少。然后以向量丛中的直线与平面作为非欧几里得平面几何的一个例子来进行研究,以便弄清欧几里得几何中哪些定理仍然成立,它们能否用一般性的方法加以证明,以及怎样证明。

在入门课程中,首先讨论对称性,接着讲画法几何中一些简单问题,并从透视的角度提出一连串的问题:某一张照片是从哪一个侧面拍摄的?当时太阳的高度是多少?三视图如果已经给定了两个投影,如何作出第三个?再讨论正多面体的投影以及它的结构,正多边形与砌瓷砖的问题,制作模型的问题,柱面与锥面上的最短直线,以及地图着色,相贯图形等问题。

在上述两个试验中都包含了用瓷砖铺地面的内容,这里涉及到一个重要概念,那就是妥帖(fitting)。

妥帖

空间含有的是物体,平面含有的是图形。图形是画出来的,而物体是造出来的;平面图形便于作逻辑分析,而空间物体则更加直观且利于创造性活动,总而言之,空间比平面更为具体。

但是也有例外，在平面上铺瓷砖也是很具体的，这种具体感的心理因素和在空间情况中的相同，那就是妥帖。这是一种运动感觉，心理学家能告诉你在青少年身上这种运动感觉强烈到何种程度，以及运动知觉和运动记忆有何等的重要性。

一个框架的各条棱互相妥帖地装配在一起。立方体内可以妥帖地置放棱柱和棱锥；它的对角面妥帖地嵌在它的内部；它六个面的六条对角线构成它内部一个正四面体的六条边；把它内部六个全等的棱锥翻出来就可得到一个十二菱面体。瓷砖地板上各块瓷砖妥帖地相配，把直线、平角、星形、平行线等形状显示了出来。

有没有哪个小孩会问：为什么物体能够这样妥帖相配？通常没有。这些奇妙的现象似乎没有给他们留下什么印象。但是，别急，孩子们会有能力将它们慢慢地琢磨出来的。要有耐心，这是教师的最大美德。总有一天，孩子们会提出为什么的问题来的，过早地对几何作系统的学习对他们只会有害而无益。“为什么”这个词对于几何的学习是最为关键的词，但不能过早地提它，而要等待时机成熟。物体妥帖相配的奇妙性为系统学习几何开辟了道路，为几何思维提供了素

材，学生在学习时各个阶段里都会回忆起这些素材而重新加以考察。

空间是安放物体的场所，而妥帖相配是其中最主要的思想。在仿射平面上就无所谓妥帖与否的问题，正因为如此，要学习仿射几何就需要有比较成熟的思维训练，所以仿射几何不可能作为几何的入门课程。

在凡·阿尔巴达与范·希尔的两种入门课程之间，有着很大的差别。在凡·阿尔巴达的课程中，有着大量的材料要求学生通过观察和操作去进行思考，它一开始就给出大量画法几何的内容，这就是它的一个很大特点。阿尔巴达把画法几何作为几何的入门课，而不是把它作为几何的后继课，我觉得这是一大发现，画法几何远比演绎平面几何容易，它能使学生运用眼睛和手去进行思维。

在范·希尔的课程中，它每一步都想通过观察——活动的操作把其中的演绎关系揭示出来。例如，通过三角形和四边形的操作活动，分别知道了三角形三个内角和的大小和四边形的四个内角和的大小以后，便提出以下问题：知道了三角形三个内角和大小后，能不能利用它去推导出四边形的四个内角和的大小？起初孩子们不懂所谓推导是指什么，经过十天，多数孩子懂得了它的意思，他们想起了梯子与锯

子的结构，并通过对这种结构的考察去证明平行线之间的夹角相等（图 16-5）。

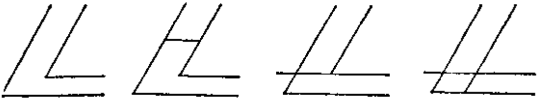


图 16-5

演绎

儿童用逻辑方法组织活动的能力有着一个持久但并不连续的发展过程。在最初阶段，他们通过手、眼以及各种感觉器官进行思维，经过一段时间的亲身体验，通过主动的反思、就会客观地描述这些低层次的活动，从而进入一个较高的层次。必须注意，这个高层次的达到，决不能借助算法或形式地灌输来强加给他们。

演绎必须始于定义，它是演绎推理链中的重要一环。但苏格拉底的教学理论不主张用定义来引入几何对象，因为除非你知道这一环如何安装在那个链中，否则你又怎么来锻造这个环？为此应该通过直观的方式先给他们一个笼统的印象，替如平行四边形，让他们自己观察并发现这种形状的大量性质，如对边平行且相等，对角相等，邻角和为 180°，对角线互相平分，

平行四边形有一个对称中心,平行四边形可以分成全等的三角形,以及可用全等的平行四边形来铺满平面等。为了进一步系统地组织这些性质,建立联系,可取性质之一作为定义,以其为源而推出其他。这一个学习定义的过程,经历了具体演绎推理形成的步骤,它不是强加的,而是由直观萌芽逐步发展的,因而就学会了演绎地组织一个对象性质的方法。

在实际的科学研究工作中,多数定义不是事先想好的,而是组织、推理的结果,学生应该有这个权利,让他们自己来发现,这样既直观、自然,又有相对性,可以充分体会定义的必要和作用,并且掌握等价的定义。好的几何教学就应如此,不仅对定义,而且对整个体系的建立也应该采用这样的策略——学习组织一个题材,也学习什么是组织,学习具体对象的概念化,也学习什么是概念化。重要的是要带领学生理解过程,让他们有机会组织并发现各神结构与休系,而不是"填鸭式"的"硬塞"。要知道,泄漏一个可以由学生自己发现的秘密,那是"坏的"教学法,甚至是罪恶。

欧几里得的演绎

苏格拉底对门诺的奴隶所做的是使用具体材料的低层次活动,但其中含有演绎的萌芽;范·希尔的课程

甚至揭示了逻辑组织的最初信号。我相信,许多优秀的教学法专家认为学习者的局部组织活动是必不可少的,并且偏爱它。其实,几何有着悠久的传统,用现代的标准去评价欧几里得的公理系是不公平的。作为一种综合性的工作,欧氏原本在古代数学中是绝无仅有的瑰宝,它的方法虽然并不统一,但也是其组成部分之一。早在欧几里得以前,人们似乎已经形成了一种习惯,要介绍一篇数学论文必须引用若干原理,这些原理就称之为公理、公设、假设、定义以及假定等等,这些陈述完全可以从论文中删去,因为它们是从其他地方引用的已知事实,也没有重新加以证明。

欧几里得在原本中插入了他创建的原理衷来介绍各部分数学,由此原本成了逻辑地组织各部分数学之和,而不是数学的逻辑组织。整体组织的可能性当时也许只是一种模糊的哲学观念,虽然不能低估亚里士多德(Aristotle)对此问题的贡献,但应该承认古代并未实现这个观念,即使是原本第五、六卷中欧多克斯(Eudoxus)关于量的理论,它在古代数学中最接近于现代公理系,但是作为实数的公理系还是不完备的,因为它只不过描述了量,而不是独立地创造了量。

要达到整体组织和现代风格的公理系统,要求编者比欧几里得更有主见。几何公理系的完备性观念可

能远远超过希腊的数学水平。其实,几何的现实是描述的,而不是由定义、公设等创造的。在任何特定的时刻,描述只是限于特定问题的本质特性,如果缺少了某个特性,那么求助于现实就能弥补它的不足。即使是严密的演绎,其基础也必须适应于现实而不能预先假定。用心理学观点看,随着欧氏原本的出现,情况发生了变化。古代像这种权威性的著作很容易被神化,欧几里得成了真理的宝藏,原本的组织成了正确而定形的组织。人们不对原本作创造性的批评,所有活动只限于评论,原本成了由确定的原理进行严密演绎的范例。以后用来教学的欧氏几何课本,也只是欧几里得演绎法的稀释物。如果要抱怨这个体系的逻辑,那么该抱怨的就不是局部组织的观念,而是它的意图,即这一系统(和欧几里得自已)想实现比局部组织为更多的东西。

转向线性代数

早在古希腊时代,几何就与代数发生了联系,甚至像圆锥曲线这类似乎是真正的几何,也起源于代数。到笛卡儿(*Descartes*)开始引进坐标,从而建立了解析几何,但真正几何的桂冠仍属于欧几里得的综合方法。几何越是无法与代数和分析的丰富内涵相比较,

就越是被人们所忽视，因而其弱点日益暴露，人们也日益倾向于依赖所谓的解析几何。希尔伯特的《几何基础》也不能扭转这个趋势，相反，它更清楚地揭示了欧几里得《几何原本》的缺陷，而且表明要填补这个缺陷是相当艰难的。再者，希尔伯特方法的最终结果不就是几何的坐标化与代数化吗？因此，希尔伯特的努力又有什么用呢？为什么不从一开始就将几何作为"解析几何"来引入呢？这种做法的一个最大优点，是代数的高度严密性可以自动渗透于几何。

转向线性代数的向量空间

自笛卡儿以来，在"解析几何"中，通过坐标系，可用三元数组表示空间一点，用线性方程表示空间一平面，用两个线性方程的联立表示一直线，用毕达哥拉斯（*Pythagoras*）定理表示两点间的距离，用三角函数表示角，这在微积分与力学中，是一种极为有用的方法。更简便的方法可以先验地用数组定义点，将它推广到 n 维空间，可用 n 元数组定义点，用线性方程定义平面和超平面。例如，两点 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ 的距离可定义为

$$\sqrt{\sum_i (\xi_i - \eta_i)^2},$$

于是一般就可用方程来定义几何图形与关系了。

如果进一步采用向量概念,使代数几何化,就可以创造出一种适用于几何的代数计算。向量作为一个几何对象,以 x 表示,它的坐标是 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$,则向量 x 就相应于一个 n 元有序数组

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),$$

数 α 与向量 x 之积为

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\cdots,\xi_n),$$

向量 x、y 之和为

$$(\xi_1,\cdots,\xi_n)+(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$
$$(y=(\eta_1,\cdots,\eta_n))$$

向量 x,y 之内积为

$$x\cdot y=\sum_i\xi_i\eta_i,$$

所有这些运算都具有相应的几何意义。

这种处理方法的弱点是必须依赖一个与几何无关的坐标系,从而必须相应讨论坐标变换,这是向量分析、张量分析发展之必然。随着几何逐步渗入分析,在讨论无限维的函数空间时,其元素也被看作为向量,但这种受到抽象代数影响的几何化分析,单用坐标方法显然是不够的,于是促使了源于几何的向量空间概

念，必须由解析方法转化为公理方法，这就诞生了线性代数。

实数域、复数域或任意域 K 上的向量空间 V，可定义为一个加法群，相应存在一个同态，并满足以下公理：

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)+c=a+b(+c)\\ a+b=b+a\\ a+0=0+a\\ a+(-a)=0\end{array}\right\}\text{对}a,b\in V$$

$$\left.\begin{array}{l}\nu(a+b)=\nu a+\nu b\\ (\alpha+\beta)c=\alpha c+\beta c\\ \alpha(\beta c)=(\alpha\beta)c\\ 1\cdot a=a\end{array}\right\}\text{对}a,b,c\in V,\ \alpha,\beta,\nu\in K$$

进一步可定义 V 的子集的线性相关、基概念与维数（也许说明只限于 2 维、3 维空间）、平行、线性流形、平面、半空间等等。这个向量空间实质上是仿射几何之基础，它的基本概念是结合性（关联性）与平行性，只有平行线段之比，而无距离概念。在建立了这个定义后，应该立即联系现实的几何模型，用 2 维、3 维向量空间中的平行四边形以及相似三角形的有关性质来解释这些抽象公理。

作为向量空间公理的第一个最重要的几何结论是

体积概念。在 n 维向量空间中,一个 n 个向量的函数,叫做行列式,对 n 个向量 $a_1,\cdots,a_n$,这个函数的值为

$$\textbf{det}(a_1,\cdots,a_n)。$$

它给出了由向量 $a_1,\cdots,a_n$ 所构成的超平行体的"有向"体积(在空间给以一定的赋范之后)。由此可见,行列式与体积的关系是非常基本的,但遗憾的是在行列式的教下中,很少有人提及引进行列式的几何意义——体积。为此,我想更周密地对体积的公理化定义作些思考。

应该定义一个向量的函数 F,使其满足体积的直观假定,特别它是"有向"体积,也可以取负值。以 3 维空间向量 a_1,a_2,a_3 构成的平行六面体为例,其体积是作为"基"的平行四边形面积与"高"的乘积,这个"高"在"基"的一侧为正,在另一侧为负。

当然,高不是仿射概念,但它是确定的。设 a_1,a_2 如构成"基平面"则高必为 a_3 的线性函数:假如以 γa_3 的代替 a_3,则高也乘以 γ;假如以 $a_3'+a_3''$ 代替 a_3,则对应的"高"也作同样变化。据此可得公设:

(1) F 关于每个变量是线性的。

如果向量 $a_1,\cdots,a_n$ 中有两个重合,那么这些向量所构成的超平行体就瓦解了,于是得公设:

（2）$F(a_1,\cdots,a_n)=0$，如果对某些 $i\neq j$，有 $a_i=a_j$。

由此推得:

$$\text{假如}\qquad \begin{aligned} &b_k=a_i+a_j,\text{对某些}i,j,\ i\neq j,\\ &b_k=a_k,\text{对}k\neq i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{则}\quad F(b_1,\cdots,b_n)&=F(a_1,\cdots,a_n)\\ &\quad+F(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n)\\ &=F(a_1,\cdots,a_n)\text{。}\end{aligned}$$

$$\text{同理,假如}\qquad \begin{aligned} &c_j=b_i-b_i,\text{对某些}i,j,\ j\neq i,\\ &c_k=b_k,\text{对}k\neq j, \end{aligned}$$

则 $$F(c_1,\cdots,c_n)=F(b_1,\cdots,b_n)\text{。}$$

另一方面,假如

$$\begin{aligned} &c_i=-a_j,c_j=a_i,\text{对某些}i,j,\ i\neq j,\\ &c_k=a_k,\text{对}k\neq i,j, \end{aligned}$$

则 $$\begin{aligned}&F(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n)\\ &=-F(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n)\end{aligned}$$

由此即得

（2'）F 是反称的。

对公设（1),（2）[或（1),（2'）]补充一个赋范规定:在选择了一个有序基 $e_1,\cdots,e_n$ 后,令:

（3）$F(e_1,\cdots,e_n)=1$。

用通常的方法可以证得,具有性质（1）~（3）的

函数存在且唯一,它就是行列式 det,它的几何意义就是有向体积。

n 维向量空间作为 n 维仿射几何的空间,可以定义到自身的线性映射,可以规定空间的定向,还可以引入重心概念,并建立凸性理论,这些都是仿射几何的内容。

为了引进初等几何中相等的概念以及线段和角的比较,必须在向量空间的公理基础上,建立内积的概念,它的含义和性质都可以通过 2 维、3 维的具体几何模型进行直观的解释。这个具有内积的向量空间是欧氏几何的基础,它有向量长度和距离的概念。由此还可以讨论线性子空间的正交和绝对体积,建立欧氏空间的定向,并在定向欧氏空间中定义向量积。

在向量空间内积的基础上可以定义角的余弦,于是通过反三角函数可得到角,再利用平面旋转变换或复数性质可导出三角函数的加法定理。这样处理角的概念,必须要求有较多的具体几何知识作为基础,并且需要介入超越函数(三角函数、反三角函数)。

如果要避免"超越"的途径,可以采取更为形式的纯代数方式来重新组织角的定义,先验地把它理解成某个抽象旋转群的元素,并由此得出有关结论。但这种做法只能为布尔巴基(Bourbaki)学派所推崇,虽

然它的异常清晰和严谨也许为数学家们所欢迎,但从教学的角度上看,这种脱离现实的几何、三角之基础而不管实际应用的做法,必然会损害学生的学习。

作为几何的线性代数

有一个大家熟悉的观点,就是由于线性代数的产生,几何就过时了,或者说几何与线性代数是相同的,这是一种荒谬的解释。前面我已详细揭示了有多少几何被包含在线性代数中,以及如何用它去促进线性代数的教学,虽然我没有说明线性代数有多么重要,但至少可以指出,它与线性微分方程和随机过程都是有关的。许多教科书作者不知道如何应用线性代数,于是他们就把几何作为牺牲品,而唯一适合于几何的任务,即作为促进学习的工具反倒被忽视了。

我曾参加过一次几何教学会议,结果惊奇的是,事实上很少谈到教几何,而谈得更多的是关于几何基础的教学,即有关整体的公理化组织,当然它是预先构想好的。只有少数人提倡要花精力去教几何,并且主张在任何几何基础的教学之前,应该有几何本身的教学。也许大多数人从未想到可以而且应当以不太复杂的方式来教几何。

无疑,线性代数是提供给几何体系的一个合适方

法，而不管这个体系可能受到怎样的限制。于是，这就是作为几何的线性代数所出现的通常形式。但事实上、只要线性代数像几何一样出现，它就会强加给学生，而当学生在线性代数中可以活动时（那还是个问题），它也与几何大相径庭。允许几何随着线性代数的方法扩展，即使这一点也在不断地削弱，老的三角形作图是相当无聊的，但所谓线性代数的几何问题比它还不如，而且也令人厌恶。

它的基本错误是要求几何从属于一个数学体系，而线性代数是唯一适合它的，这使人相信所教的线性代数是有用的。至于教多少几何以及以什么方式教只依赖于是否符合这个体系，这就意味着它必须从仿射几何开始，而最引人注目的空间性质——妥贴却被忽视了，更糟的是，这种僵化的方法没有机会让儿童去探索空间以及其中的物体，也没有机会去组织题材，发明定义和演绎推理。事实上不存在几何所能符合的有意义的体系。我们可以用线性代数来计算球与平面或两球之交，但要发现结果是否是圆，就必须知道现实空间中真实的球是怎样的。线性代数完全不适于发现全等三角形能否覆盖平面，以及全等五角形一般则不能，甚至也不适于证明这类事实。我们还可以列出更多的事实来说明线性代数在这一领域内是无多

大用处的。在线性代数所承认的几何中，最重要的部分就是两条不同的直线可以没有或有一个交点，两个圆可以没有或有一个、二个交点，也许在向量代数中还可以证明三角形三边的垂直平分线交于一点，但那是枯燥乏味的。向量空间中唯一可解决的几何课题是重心和凸性，但通常又因为不符合数学体系而不加考虑。

几何基础用线性代数来处理更合适，但学生应该先熟悉几何再发展基础，而且由线性代数所得出的几何基础很不自然，因为其中没有角的概念，要重新建立它也有很多麻烦。虽然，可以用“超越”的工具，而且每个证明都可以转化成解析方法，但是，在此之前还必须先掌握几何所需要的证明。

如果说所有试图将几何结合进代数的人都是因为他们恨几何，这是不公平的。与其相反，他们是想“拯救几何”而“拯救几何”就意味着必须将几何结合进一个适当的数学体系，不符合体系的东西就必须去掉。几何要在数学教学中维持一定的地位，它就必须是严密的，而体系的建造者只知道一种严密的水平，即体系的严密水平，每件事情在此水平之下他们就认为是伪造的，在此水平之上才是具有高度趣味的，几何也必须适应这个水平。

事实上,很难证明体系建造者的意图是否合理,因为这样的数学体系并不比传统的几何更稳固,要想根据体系进行推理而不联系现实,那就应该先从现实去推出这个体系。要把几何解释成线性代数,学生首先应该熟悉几何。

用公理系统"救几何"

几何公理学家们主张用几何基础——帕施、希尔伯特式的几何公理系统来"救几何"。实际上,线性代数也提出了一个严谨演绎的几何公理系统,但是线性代数必须以实数为前提,这就犯了几何的大忌。几何公理学家们的最终目标也是要达到几何的线性代数化,但是他们走的是从几何公理到线性代数的道路,即以几何公理作为构造的起点。

先由仿射公理得到向量运算,形成向量群,建立相应的自同态、再加上德沙格(*Desargues*)公理、帕普斯(*Pappus*)-帕斯卡(*Pascal*)公理,就形成域,进一步加上几何顺序公理、拓扑公理,就形成了实数域。实际上,应该在学生已熟悉了实数域,并掌握了大量实质性的几何知识之后,再经历前面所说的过程,那才是有意义的;否则,这样的教学是无效的。

因为,希尔伯特公理系统并无特殊性,和其他公理

系统一样,最终也是证明可以用实数域使几何坐标化和代数化,而公理系统本身给人的印象却是琐碎、复杂、容易忘记且难以理解,在这些公理系统中无法进行具体的工作,不能作出发现,连进行命题证明、逻辑的推理都困难,它的演绎结构也是肤浅的。创造欧氏几何公理系统不是为了欧氏几何的具体练习,而是为了研究超越几何,为了探索公理的相互关系、公理的独立性、公理的完备性,也就是研究几何的基础,而不是为了发现几何的事实。

教学中的几何公理系统

公理系统有实用价值,也有形式价值。几何情况下可以排除实用价值。在几何公理系统中,可向学生介绍严谨的表达方式和正确无误的演绎推理,同时,在公理化过程中还能学习如何割断本体论的联系,按照希尔伯特的传统表达方式,就是“我们设想……”因为公理系统的对象是不加定义的,它由同样不加定义的关系,通过隐含的方式来确定,因而可创造出各种不同于常规的几何——这是一个具有重大形式价值的观念。

公理系统能否教以及应该如何教,对此应该明确一点,它必须通过公理化的活动过程来学习,那就是

“与其让学生学习公理系统,还不如让学生学习‘公理化’”。要做到这点,那就不能仅仅提供学生一个预先构想好的公理系统,且随之作一些机械的操练。在公理系统中引出少量的推论,这是无济于事的。

正确做法应该是通过一些具体模型,给出几何的实质内容,建立起各个局部的组织,再从中找出共同的特性,加以抽象,建立联系,从而形成整体的组织,建立总的系统,再割断那些本体论的联系。只有在学生掌握丰富的几何内涵,熟悉具体的几何问题这种条件下,才有可能从本体论的联系中挣脱出来而形成整体结构,否则,他就无法理解单个公理的目的,无法理解公理系统内部的关系以及必须导出的那些推论的作用,而反会形成“公理系统只是使简单事情复杂化”这一错觉。

为此,必须这样构造公理系统,既能深入发掘几何的内在联系,但又不是使学生面对一个现成的体系,而是在各类模型中,让学生发现其共性,找到其共同的规律,再从中挑选某些特性,导出其他的推论。在这一系列的数学活动中,要求学生忘记以前知道的点及直线,必须限于以公理为基础,更重要的是应该引起学生的疑问,老的方法不行了,是否有新的看法。只有这样才能促使思维的发展,现代几何公理系统就是在

非欧几何取得胜利后，人们敢于怀疑欧氏几何的基础上才形成的。

总之，只有建立在现实基础上，以大量丰富的几何事实为后盾，在不断组织，不断比较，反复思考，反复探索的数学活动中，在学习公理化的过程中，才能真正掌握几何的公理系统。人们不可能组织一个未知的领域，对任何公理系统都一样。从教学法的观点上看，公理系统与传统的演绎之间有极大的差别，传统的演绎几何相应于前面所说的“局部组织”阶段，而几何的公理系统却具备“整体组织”的特征。在几何教学中，必须根据学生的学习层次来处理好这两个不同阶段的联系与区别。譬如，最初层次可限于直观组织现实空间的几何形状与现象，并形成概念与性质；到较高层次，可通过逻辑关系来组织这些概念和性质；再进一步的层次，那就可进入公理体系了。让学生对其间的关系、逻辑进行研究和探索，但绝对不能限死在预先构想的公理系统之中，否则必将导致几何的消亡。

局部组织——垂直平分线

三角形三边的垂直平分线交于一点，这是学生很容易发现的一个定理。通常作两边的垂直平分线交于一点，再看第三边的乘直平分线是否也通过该点，只

要根据线段的垂直平分线是到线段两端等距离的所有点的集合这一性质,即可得证。

在这简单的证明中包含着一系列的思想方法,也提供了丰富的教学法论点,这是局部组织的一个很好例子,值得引起注意。

第一,对轨迹概念中正逆命题,必要与充分条件,当且仅当等所反映出来的逻辑复杂性形成了最初的信服心理。

第一,通过线段相等的传递性,使普通的传递性概念初次显示出它的能动作用。

第三,命题本身是对称的,但必须通过不对称的方式来证明它。要学会“三直线共点”与“一直线通过另外两直线的交点”是相同的,这是重要的一步,它说明几何问题的形式是灵活多变的,在一定条件下可以相互转化,这是方法论范例的第一个例子,即使在数学的最高层次上也是有用的。

第四,定理本身是关于结合性质的(三直线通过同一点),而其证明却要通过度量性质的讨论,这就反映了几何性质内在深刻的本质联系,对此需作进一步分析。

第五,由此定理可导出三角形外接圆的作图,将逻

辑证明与构造性问题联系起来,导致生动、有趣的几何作图的研究。

为了将学习提高到一个更高的层次,还可以在这个定理的基础上,提出一连串的问题,例如,为什么线段的垂直平分线是到线段两端等距离的点的轨迹?为什么相等可以传递?为什么三角形两边的垂直平分线必定相交?为什么两直线至多交于一点?等等,对每一个问题的回答往往又包含着新问题的萌芽,这一连串问题可以组成一条无穷尽的链。

当然,这样的安排是遵循着一条探索的道路,引起学生疑问,让他们多问几个为什么,以便更深入地理解和解释现象。如果按照另一种构思哲学,将数学看作一个自我完善的个体,以公理化的方式来隐藏原始的定义,而割断它和现实的联系,于是数学就作为一个预先构想的现成体系提供给学生,那就以公理系统作为出发点了。

我们主张将数学作为一种活动的数学,必须由学生自己做出来,这就不能从数学整体的演绎系统着手。因为大多数学生只能组织和理解较短的演绎链,所以使他们学会局部地组织一个现实的数学领域,或组织数学本身的一部分,那是可行的,而且也是日常生活与职业所需要的。整体的演绎推理太复杂,过程

也太长,难以具体实施,而局部的组织可随着学生的层次而变,虽非彻底,但却可以达到一定的合理演绎抽象水平,它符合数学教学的需要。

局部组织——球极平面射影

球极平面射影将圆映射成圆(或直线),而且保持交角不变。

证明:如图 16-6,球 σ 切平面 ε 于南极 S,以北极 N 为射影中心,将球 σ 射影到平面 ε 上,将球 σ 上任意三点 P、Q、R 映射成平面 ε 上对应的三点 P'、Q'、R'。

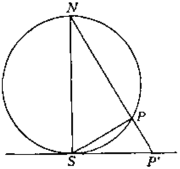


图 16-6

先证圆映射成圆:在直角三角形 NSP' 中,SP 是斜边上的高,

$$\therefore \quad \overline{NS^2}=\overline{NP}\cdot\overline{NP'}。$$

同理
$$\overline{NS^2}=\overline{NQ}\cdot\overline{NQ'},$$

得
$$\overline{NP}\cdot\overline{NP'}=\overline{NQ}\cdot\overline{NQ'}。$$

于是推出 P、Q、P'、Q' 在同一个圆 r 上。同理可知,Q、R、Q'、R' 也在同一个圆 p 上。

因为两圆 p、e 相交于 Q、Q' 两点,所以 p、r 必在同一球 σ 上,所以三对对应点共球(若 P'、Q'、R' 共线,则三对对应点在同一平面上,即圆变成直线)。

现设 c 是球 σ 上一圆,是它在平面 ε 上的像,在 c 上任选三点 P、Q、R,过 P、Q、R 及对应点 Q' 可决定一球 τ,由前证可知,τ 必包含对应点 P'、R'。球 τ 与 ε 交于一圆 c^*,则 Q' 必在 c^* 上。这对 c 的任何点 Q 都成立,所以 c 的像 c' 必包含于 c^* 内。反之,如果现在将球极平面射影反过来,显然有 $c^* = c'$,所以 c' 是一圆即证明了球极平面射影将圆映射成圆。

再证保持交角不变:过任一点 P 的两曲线的交角定义为两曲线在 P 点的两条切线的交角。设 σ 上过 P 点有两条曲线 k_1 和 k_2,在球极平面射影下的像是平面 ε 上过 P' 点的两曲线 k_1' 和 k_2'、必须证明在 P 点的交角和 k_1'、k_2' 在 P' 点的交角相等。

因为曲线 k_1、k_2 可以用在 P 点与 k_1、k_2 分别相切的任意一对曲线所代替,特别可将 k_1、k_2 取作过 S 点的圆,于是 k_1、k_2 就是交于 P 和 S 两点的两个圆。根据对称性,它们在 P 点的交角等于在 S 点的交角,在球极平面射影下,k_1、k_2 的像是交于 P' 点和 S 点的两个圆 k_1' 和 k_2'(P' 是 P 的对应点,S 对应于它自身)。同理可证,k_1' 和 k_2' 在 P 点的交角等于在 S 点的交角。又因 k_1、k_1' 在 S 点相切,k_2、k_2' 也在 S 点相切,所以 k_1、k_2 的交角与 k_1'、k_2' 的交角相同,也就是球极平面射影保持对应曲线的交角不变。

当然也可以用反演的方法或代数的方法来证明上述结果，但上述证明是很直观的一种简捷方法，不需要引进任何新的观点，却可导致新的见解。

在这一例中，仍有许多值得注意的问题。

首先，要考虑点和圆的特殊位置，如果 P 点重合于北极 N、那么它的像就将是平面上新创造的一个无限远点；如果 σ 上一个圆通过北极 N，那么它的像就将退化成为平面 ε 上的一条直线，它通过这个无限远点。这时，σ 上通过北极 N 的圆和它的像位于同一平面上。如果考虑 σ 上通过南极 S 的圆（不过 N），以类似的方法可证明它的像就是 ε 上通过 S 的圆。

对证明过程作进一步考虑，还可提出：为什么通过 N 与平面 ε 不平行的直线，必定会和球 σ 相交？为什么球 σ 在 N 点处的切线与平面 ε 平行？为什么 NS 垂直于平面？为什么球 τ 和平面 ε 交于一个圆？为什么交于两点的两圆的两交角相等？对后一个问题，可以通过关于对称平面的反射保持角的度量来加以证明。可是相应的又可以提出一连串问题：为什么反射使圆变成圆？使球变成球？甚至于为什么 $\overline{NS^2}=\overline{NP}\cdot\overline{NP'}$？如何从 $\overline{NP}\cdot\overline{NP'}=\overline{NQ}\cdot\overline{NQ'}$ 推出 P、Q、P'、Q' 共圆等等。学生在这个例子中，可以通过一系列问题组成的演绎链 7 去学会如何对局

部的几何情况进行合乎逻辑的推理组织工作。可以联系毕达哥拉斯定理,相似三角形以及有关圆和球的性质,然后总可以在某个地方终止,即限于某个范围,这在日常生活以及各种科学中也是常见且合乎情理的。相反,要是过于冗长且噜苏地将所有的问题全部塞进证明之中,那就会扼杀了几何。但是如果采用线性代数的途径或根据预先构想的几何公理系统,那就无法体会上述这样的局部组织,也失去了许多直观、生动、有趣的几何情境。

组织一个领域——定向概念

如果说局部组织往往是指某个独立的几何命题,那么在局部组织的基础上就可以进一步对某个概念有关的课题,或环绕着它而形成的一个方面进行系统的演绎推理。

一般而言,几何方法都比代数方法优越,但对此也应一分为二,常常在每个优点的另一侧面就是它的弱点,也就是说几何方法具有两面性。

就以作图与空间想象而言,这本是几何的一个长处,可借助于生动直观的形象来引导人们的思想过程,但常常由于图形或想象的错误,使人们的思维误入歧途。因此我们既要借助直观,但又必须在一定条

件下摆脱直观而形成抽象概念,或由几何图形转向代数形式,但这种转化是不容易达到的,常会失之于冗长而繁琐。

运用图形时,我们常常会遇到特殊与一般的矛盾。我们希望通过图形与想象获得一个一般的结论,但面对的和依据的又恰巧是某个特殊的图形,当你作出某个图形时,它本身就必然代表着特定的一个,是“这一个”而不是“那一个”。譬如,要导出有关三角形的一些性质,我们常常就作出一个锐角三角形,并从具体、直观的图形中,作出有关的结论。而这些结论,可能就不符合钝角三角形的情况,即作为一般三角形的命题,那是不成立的。因此必须处理好一般与特殊的辩证关系,要从特殊情况中探索一般的规律,但又不是以特殊来代替一般,而是在深入考虑各种特殊情况的区别、联系以后,再找出它们的共同规律。有时在作出一般的结论以后,还得进一步探索一些退化的情况,如某些点重合,或某些直线重合等,这时相应的性质或证明方法等都会发生改变,对此必须作全面的考察。

我们并不主张在中学几何教学中发展一个完美的、甚至以公理化为基础的定向理论,进行一大堆复杂的演绎推理,而是应该借助于直观,让学生在头脑里自然地形成有关定向的意识。参照历史发展的情

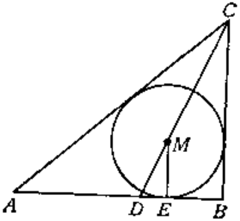


图 16-7


图 16-8

况，在几何的早期阶段，如欧几里得原本中，多数是借助于图形和逻辑推理的结合，隐含地引入直线上的定向。如图 16-7，三角形 ABC 中，角 C 的平分线交对边于 D，三角形 ABC 的内切圆切于 AB 于 E，D、E 两点在边上的位置怎样？由图可设 $AC > BC$，$\angle CAB < \angle CBA$，而 $\angle ACD = \angle BCD$，则 $\angle ADC > \angle BDC$。又因为 $\angle MED$ 是直角，则 $\angle MDE$ 必为锐角，$\angle MDE < \angle ADC$，即 $\angle CDE = \angle CDB$。所以 E 在线段 DB 上。可以知道这个条件是充分而又必要的。但这里未介绍任何公理、公设、定义；再如在平行线截割定理的讨论中，有时就通过图 16-8 的两个图形来说明，虽然定向不同，但从直观形象即可知道其

结论是等价的。至于平面和空间的定向，基本上没有涉及。

到帕施和希尔伯特时代，就有意识地讨论定向问题了。引进了“介于”概念和有关公理，但“介于”是个三元关系（点 B 介于点 A 与点 C 之间），虽然公理严谨，但用来证明推理却不很方便。

更适合于现代概念的是采用线性顺序，前后或左右，这是一个二元关系，具有传递性，即 A 在 B 之左，B 在 C 之左，则 A 在 C 之左。

定向概念可以在仿射平面内讨论。对每一条直线可以凭直观判定它可以有两个相反的定向，由此可建立射线及线段，并导出凸集概念，通过平行射影，可建立定向直线之间的内部联系。如图 16-9，直线 g 到 g' 的一个平行射影，如果直线上已确定一个定向：A 在 B 之左，B 在 C 之左，……则在直线 g' 上也有相应的一个定向：对应点 A' 在 B' 之左，B' 在 C' 之左，……换言之，平行射影保持直线的定向，这个假设就代替了复杂的帕施公理。

进一步仍借助直观可知，一直线分平面成两个部分，于是可确定平面的定向，它也有两个相反的定向，在此用代数方法可能容易为人所接受，那就像通常采用的以仿射平面内一对独立的有序向量来决定平面

的定向（逆时针或顺时针）相应地可以得出面积的正负，即利用体积函数概念，同时可以推出仿射映射保持定向，也保持面积符号。

空间被一平面分成两部分，空间的定向类似地由三个独立的有序向量来决定（右手系或左手系），也有两种相反的定向，相应地可以得出体积的正负，它们当然也是仿射映射下的不变性质。

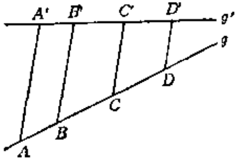


图 16-9

组织一个领域——循环定向

有向直线是以点的线性顺序为特征的，可是考虑过同一点的有向直线束，就需要另一种定向，那就是循环定向。正如通常在时钟表面上熟悉的那样，我们不能说 3 点钟在 9 点钟之前，或 3 点钟在 9 点钟之后，只能说 3 点钟，6 点钟，9 点钟的序列是正确的，当然 6 点钟，9 点钟，9 点钟的序列也是正确的。

一般情况下，n 个元素 $a_1,\cdots,a_n$ 的任意排列

$$a_{i_1},,\cdots,a_{i_p},a_{i_{p+1}},\cdots,a_{i_n}$$

和

$$a_{i_{p+1}},,\cdots,a_{i_n},a_{i_1},\cdots,a_{i_p}$$

称为循环等价，由此可以形成循环等价类。一个有限

集的循环定向就是在它元素的循环等价类中选定一个。例如，一个三元组 a、b、c 只容许两种循环定向，一是 abc（它与 bca, cab 循环等价）；二是 acb（它与 cba, bac 循环等价）。

一个任意集的循环定向就是它的每一个有限子集都有一个确定的循环定向，而且当有限子集有包含关系时，其循环定向必须相容，即符合自然的扩展和限定。譬如，为了确定任意集的循环定向，只要对任意集的所有三元子集选定循环定向，但这必须符合一个相容条件：

若 abd 和 bcd 符合循环定向，则 acd 和 abc 也符合循环定向。

一个循环定向集 Z 可以在某一个元素 u 处切开，使之转变为一个线性有序集 Z_u，这只要作如下规定：

定义 对所有元素 $x \neq u$，x 在 u 的左边。

定义 x 在 y 的左边，当且仅当 xyu 作符合 Z 的循环定向。

于是，循环定向的相容条件就转化为线性有序集中的传递性。集合的循环定向也可以通过集合中线性顺序的等价类来确定。还可以由循环定向集 Z 构成 Z 的 $n-$ 重覆盖以及 Z 的 $\infty-$ 重覆盖，它们也自然地分别扩展为循环定向集和线性有序集。

在定向平面上过同一点的直线束中，由平面的定向诱导出一个自然的循环定向，它符合上述相容条件，这同样可以方便地利用以向量作为工具的代数方法来验证。由此还可以借助直线束的双重覆盖导出射线束的循环定向，同样可检验出它符合相容条件。

容易看出线性映射保持面积符号，也保持直线束及射线束的循环定向。

类似地，可以由直线束或射线束的定向决定平面的定向，实质上平面的定向可以理解为仿射平面上的旋转，当然它也可以有左旋和右旋（即逆时针和顺时针）两种。由平面定向进面推出空间的定向，那就相当于现实世界中通常的螺旋运动，它也有右旋和左旋两种。

组织一个领域——角的概念

几何中有多种角的概念，应该让学生学会如何去分辨，掌握它们的关系，比较它们的异同，而不能像某些教学法专家那样，仅因为某些概念不符合预先构想的体系，而禁止讲授。

欧几里得（Euclid）的角有两种定义，一是将角看成是一对无序射线的倾斜关系，有邻角的区别，但没有零角、平角和大于平角的角；二是将角看成是平面

的一部分，于是一对无序射线就可以构成两个不同的角，也允许有平角以及大于平角的角，角可以像线段一样进行比较，还可以进行加减运算，也有角的全等概念，在这个运算过程中，实质上已经扩充了原始的角的概念，不再局限于小于平角，它可以超过两个直角甚至四个直角，这就造成了一些问题的复杂性。

三角中的角作为一个圆的中心角（通常取单位圆），它和圆弧互相对应，因而角存在一个自然的测度标准：那就是以弧来量。整个圆周以 $360°$ 或 2π 来量，所以角的测度是无测量单位的数，弧长可以超过 2π，但角通常作为以 2π 为模的数。实质上，三角中的角是有向平面内一对有序射线对的函数，它由单位圆上的孤来量，而弧的定向符合有向平面自然诱导出来的线束的循环定向，这样才有可能区分 $\frac{1}{2}\pi$ 的角和 $\frac{3}{2}\pi$ 的角。如果平面定向改变，则角也必须相应改变。因此，三角中的角的概念必须在加上一个人为因素——平面定向的条件下才能讨论，而且它在三维空间中也无法区别。联系日常生活实际，就可以体会到欧几里得对角的规定还是有一定道理的。在日常语言中，我们是不习惯采用数学家那种正、负或逆向、顺向等专门术语的。

解析几何中的角是一对有序直线的角，它是以 π 为模的数。对于直线 $a: y = ax$ 和 $b: y = bx$ 来说，如果假设直线 a 到 b 的角为 φ，则 $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{b-a}{1+ab}$，因为正切函数周期是 π，所以 φ 角以 π 为模，当 a、b 两直线的顺序交换时，$\mathrm{tg}\varphi$ 和 φ 都改变符号。

立体几何中还有另一种角的概念，那是一对无序直线的角，是只限于 0° 到 90° 之间的锐角。

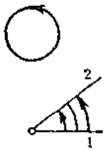
以上四种角的概念可概括、比较列表如下（见下页）。

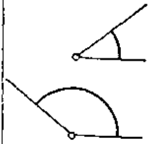
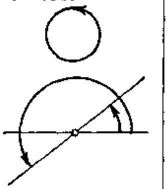
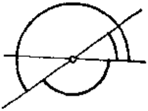
实际上还有另一种角的概念，被称为解析角。一方面它作为初等几何中角的扩充，用以测量旋转运动，真正说来，它应该属于运动学的范围；另一方面作为正弦、余弦这些以 2π 为周期的解析函数的变量，角可以容许在全体实数域内变化，即从 $-\infty$ 到 ∞。

在这中间，初等几何的角，三角中的角和解析角这三个概念是最为重要的，但它们的测量方法不同，初等几何的角用半圆量角器可唯一确定，三角中的角必须用全圆量角器，而且在考虑有序射线时，必须以第一边为起点，并且使量角器上 $0^\circ \to 90^\circ \to 180^\circ$ 的旋转方向符合平面的定向（通常是逆时针），至于解析角

只要通过任何一个能计算旋转的里程计之类的东西，记下它旋转了多少圈，或一圈的多少部分即可。

三　角	初等几何	解析几何	立体几何
定向平面内有序射线对的角 以 2π 为模	不定向平面内无序射线对的角 在 $0°\sim180°$ 之间	定向平面内有序直线的角 以 π 为模	不定向平面内无序直线的角 在 $0°\sim90°$ 之间



在平面或空间的运动和对称变换下，角度的变化情况如下：如果讨论非定向平面和空间，因为长度和角度在平面与空间的所有自同构下保持不变，而运动和对称变换都是自同构，所以角度在运动和对称变换下不变；

如果讨论定向平面和定向空间，由于它只容许比较小的自同构群，也就是只有运动变换才保持角度不变，面对称变换相应的行列式为负值，故不能保持平面与空间的定向，因而角度在对称变换下要改变符号。除非将反射理解为一个定向平面到相反定向平面上的一个映射（即用同构来代替自同构），这时角度

才保持不变，但这个映射就不是我们提到的定向平面变换到自身的自同构。遗憾的是，在教材纯粹、严谨的结构组织中，往往对这些逻辑上的困难避而不谈，对于作为活动的数学的痕迹一丝不留。

在初等几何的角所组成的集合中，加法是有限制的，因为它只允许 $0^\circ \sim 180^\circ$ 之间的角。但是以 180° 为模的角的系统的双重覆盖形成了以 360° 为模的角的系统，而对后一系统的无限覆盖可以适应于欧氏体系中角的无限制相加，当然欧氏体系中并不容许角的无限制相减。另外，如果在循环定向的射线束中取定一条射线，就可以在循环定向的射线束上定义函数，使之与角的集合相对应，于是角的集合也成为循环定向的加法群。加法保持定向，即如果 $\alpha\beta\gamma$ 符合循环定向，则 $(\alpha+\xi)(\beta+\xi)(\gamma+\xi)$ 也符合循环定向。但减法则将定向逆转，即 $(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)$ 就不符合循环定向。将这一循环定向的加法群在零角那儿切开，并组成 $\infty-$ 重覆盖，我们可再次得到一个有序加法群，它对加法保持定向，这实质上就构成了解析角的体系。这里可以像线段测量一样，直观地接受用实数域来测量角度，或更精确地可以推出解析角的体系组成一个戴德金（*Dedekind*）有序群，而这是与实数加法群同构的，

对于这三种角的概念可以这样理解,如果从三角中的角出发,则解析角的体系实质上可以由它的一个无限覆盖得到。因此,解析角体系的形成实际上是一个初等过程,并不依赖于极限、微分和积分。欧几里得不考虑负角,所以初等几何的角由无序射线对组成,也不需要平面的定向,从 $0° \sim 180°$ 之间的角开始,再向一个方向扩展,因而可以说,它只是解析角系统的一半。而在引进了有向平面、有序射线对以后,初等几何的角实质上就转化为三角中的角,再作一次无限覆盖就形成了解析角,在这个体系中,就不仅是加法可以无限制,减法也同样可以无限制地进行了。

初等几何的角、三角中的角以及解析角在实际数学教学中都是合适的,不必像某些强调系统化的数学家那样,只承认某一个面排除其他的。迪约多内(*Diendonné*)特别怀疑由射线束的循环定向而导出的解析角的概念,称之为是不相容的,超越的和可笑的。他认为解析角是运动学的概念,避开实数域就不能达到,所以它不是初等的,而是分析的。但强调以代数为主线的结构体系,而禁止一些几何的方法,也是不合理的。事实上,在平面定向以后,导出射线束的循环定向,再进一步形成它的无限覆盖,整个过程都是很自然的,应该认为这是初等的,而非分析的、或运动学

的。当然,这里涉及一个问题,那就是“初等”这个术语用于数学基础理论和在教学法意义下的理解是有区别的。从数学基础上来看,形成无限覆盖所需要的整数并不是初等的,相应的初等算术也不是初等的,但我想我们最好能找出在教学法意义下“初等”的含义是什么,如果要这样做,当然不能用教条主义的标准来决定什么是属于初等几何教学,或是属于更高级的几何教学。

前面关于定向和角的分析,实质上是数学背景。从教学上看,必须详细考察有关的学习过程,通过测量来具体形成以上三种角的概念是非常自然的,我们几乎应该同时引入,使学生一开始就知道在它们之间存在着差异,但可相互补充,不妨用绝对角、角和旋转角这些术语加以称呼以示区别,也可以用∡和∢之分别来表示绝对角和角,当然用第二个符号时,纸上要指出平面的转向。

在介绍“角”之前,应该通过时钟或其他器械中所熟悉的旋转意义,以最简单的方式将平面定向,再引入三角的角(即“角”)。根据数轴上线段的加法可以解释为一个平移,相应的射线束中的角的加法也可以解释为一个旋转,至于减法则可看作是某个反射。这样,就把角的运算理解为一个实际可以体验的功能过

程。当然不能在早期阶段就引入三角函数，但是也不必推迟太久，因为三角函数是力学中引进函数最漂亮的例子，它既可以结合图象，又可以在光学中找到应用，当然像加法定理这类复杂的三角公式，应该推迟到真正需要并且容易证明的时候再作处理。

“角”和“旋转角”有着密切的联系：因而必须强调前者在加、减法运算中是以周角 360° 为模以示区别。通过三角函数的图象，一点在单位圆上均匀移动，它在一条直径上的射影就生成了一个调和振动，它的振幅可以表示成角（或时间）的函数。通过直观图形的数学化，就能知道这一函数自变量的定义域正好作为圆的无限覆盖，而这也就是我们需要的“旋转角”的直观表示。旋转角有许多应用，可以描绘平面上一条封闭的定向曲线的运动，这可通过点的定位向量所经过的旋转角来反映（对空间曲面来说，缺少角这个工具，就很难理解）；也可以具体描述超过 180° 的绝对角的和。

对于三种角的概念，还应通过运算来加以比较、对照。如何进行加、减运算，它们有何区别？“角”可以进行 2 倍、3 倍以及 n 倍的运算，这正好类似于射线束或圆的 $2-$ 重、$3-$ 重和 $n-$ 重覆盖，与此相对的“旋转角”可以二等分、三等分或 n 等分，它的结果是唯一确

定的。可以讨论,角在运动与对称变换下的情况,也可以联系机械传动、速度变化等实际例子。总之,早期阶段角的概念的教学可以包含很多丰富的几何内容。

平面的定向当然也应该包括在这个早期阶段中,可是空间的定向就较难处理了。如果我们一开始便选择以向量代数实现几何代数化的道路,那就应当采用纯朴的非公理化方法而不是线性代数。当然它以正交基为基础,用向量方法来描述平面。由于学生早已熟悉了运动和反射,所以对以三角函数为系数的矩阵

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

表示不会有困难。从矩阵的乘法

$$D_\varphi D_\psi = D_{\varphi+\psi}$$

可很快导出三角函数的加法定理。

如果可能的话,我们能用更形式化的方法来处理平面定向的问题,那就是通过公理化的途径来构造线性代数。前面分析过,对于点、直线、长度、角度、面积等几何对象,都应该以更新的观点来加以考虑,它们是在由公理通过演绎到定理这一指导方针下建立的,是符合演绎结构体系的独立的本体论,即由仿射几何开始,转入有序向量对和三元向量组的体积函数的公理化定义,这里可以联系平面定向和空间定向问题。

当然这必须先考虑在什么时候对哪种类型的学生才能实现这一可能,以及循环定向的一些抽象概念和公式在中学水平是否可加以介绍。

更进一步从最美的抽象数学上考虑,可由一个绕原点的旋转群出发,通过纯形式的方式,将它转化为值为 1 的复数乘法群,或仍借用循环定向群(即绕原点的旋转群)的无限覆盖,构成戴德金有序群,然后建立起与之同构的加法群,我们称之为角,当然,它也同构于实数的加法群。这种做法,目的在于使学生从理论上将角理解为一个模糊的交换群的元素。实际上学生又可以在具体的表上读出角的正弦、余弦,知道角可以用数来测量。这在数学教学中将会造成理论脱离实际,因而对中学水平的学生是没有必要这么做的。

几何中的群——批判的分析

自本世纪初,克莱茵(F. Klein)提倡群以来,它最初对中学数学教学并没有造成实质性的影响。直到近年来,群才成了一种时髦的东西,但我们对于群或映射的教学法缺乏研究,应该说,引进运动群是一种最可取的做法,这个提议实际上已被采纳。

克莱茵所阐述的从高观点看初等数学,是从这样

一个高度来教初等数学的,那就是初等数学不再是具体直观的,这样就与中学数学产生了差距。克莱茵在他著名的爱尔兰根纲领中引进了一个过于狭隘的结构,即关于射影群的某个子群的代数不变量的理论。从凯莱(Cayley)测度到五圆坐标,即使是最低水平也和中学数学相距太远。他强调把重点放在几何的相互关系上,并通过不变量理论、转换原理和附加原理来加以阐述,但他几乎不容许在同一种几何内用到群,尤其像欧氏几何那样普通、平凡的内容。希尔伯特反对在中学几何中讨论群和变换,在某种意义下,正是由于希尔伯特的工作,才使欧几里得方法的生命延长了半个世纪。(但是希尔伯恃并非教条主义者,在他著作的附录中指出:存在一条完全不同的途径来介绍几何基础,那就是借助于群论。)

需要重新思考这个题材以及中学几何教学的方法。目前传统的教学方法还占优势,人们还没有认识到变换在几何教学中的重要性,在1958年还没有建立起系统的、以变换概念为基础的初等几何课程,主要问题在于人们对变换或映射缺乏正确理解。学生可能把变换简单地理解为将一个图形捡起来放到另一个地方。事实上,图形在平面中的“自由流动”和整个平面到其自身上的映射是两种完全不同的概念。如

果映射要组成群，那么就必须有一个基础集合，譬如说平面，于是每个映射都把平面一一映射到自身。从 Q_1 地方捡起一个正方形，放到 Q_2 地方，这是一个从 Q_1 到 Q_2 的映射 f。若 f 能与 Q_3 到 Q_4 的映射 g 复合成映射 gf，则须满足 $Q_2 = Q_3$。所以，一个群的基本特征就是可以无限制地进行复合运算。一个映射的集合，如果其中某些映射可以复合，而另一些映射不能复合，那么它就构成一个广群（或范畴）。例如前面所说的只限于正方形的映射，我们可以将它自然扩展到整个平面，而平面到其自身的所有映射构成群。那也就是说，这个广群可以由另外一个群通过限制来得到。

人们常常由于直观或方便，简单使用某些可动的模型来表明一个特殊图形的变换。譬如说以一个具体的正方形为基础，来表示整个抽象平面的映射。这里必须绝对清楚，变换究竟是在哪个基础集合上活动。为了便于理解，可用某个具体图形为例来加以说明，但这绝对不能代替整个集合的映射。要注意过于直观的例子常常会影响学生正确理解比较抽象的概念，但这类错误人们近来犯得很多。

有一个常见的例子，是说起立和坐下可作为一对逆运算，并且它们组成了一个变换群。在这个例子中，

什么是变换所涉及的基础集合?显然它应该是由人的两种状态——立和坐所组成。然而,映射“坐下”只对起立的状态下了定义,而映射“起立”也只对坐下的状态下了定义,即使认为映射“坐下”(或“起立”)保持坐(立)的状态不变,这两个映射也不是一一对应的。所以在两个元素 a(起立)和 b(坐下)的集合内,有一个二元运算,它满足 $a^2=a, b^2=b, ab=a, ba=b$,却不是一个群。

我们也可以举出一个图形到自身的映射群(它的基础集合就是图形本身,而不是整个平面),例如,一个正方形的八个变换(关于水平对称轴,垂直对称轴和两条对角线的反射,绕正方形中心作 $0°, 90°, 180°$ 和 $270°$ 的旋转),它们组成了一个变换群,而不必把映射扩展到全平面。由于图形本身的有限性,故学生对映射及变换群的理解比较容易。但事实上局限于有限图形的映射可以自然扩展到整个平面,甚至整个空间。从几何的最终目的来看,必须掌握这些全局的映射,因面对于这些限于特殊图形上的映射就不应过多强调,以免影响学生对整体映射的理解。但这种情况在传统几何教学中也曾有过,那就是学生对立体几何的洞察力会由于多年来平面几何概念的先入为主面受到严重阻碍。

群在中学数学教学中已经或正在成为一种时髦的东西，但教学通常还是由老一代人所支配，他们对新的形式并不是那么容易受影响的，更何况这些新的形式究竟是否合适，是否确实对中学数学教学具有促进作用，以及应该如何运用这些新形式等问题尚未解决，所以他们对群的处理还是非常慎重的。

有人主张可以在早期教育中，通过各种游戏的方式来学习有关群的知识。例如，通过三个元素的置换所构成的对称群来学习有关群的抽象结构，这是一种重要的游戏，但它毕竟处于一种低层次上，在人们的实验中，他们常常是用公式去套游戏，结果也只是得到了一系列的公式，实质上这是以形式化来代替数学化。比较而言，形式化要比数学化容易，但即使在低层次上，以形式化代替数学化实际上也是危险的。因为实验如果只停留在形式化阶段上，那么它与数学化就相差太悬殊了。

再如，可通过这类游戏来认识同构，但这必须通过仔细地组织有关材料来进行，现有的实验常常比较混乱，给儿童介绍的同构是建立在不完备基础上的，或只是以最具体明显的方式向儿童演示，接着利用群的表格将其形式化。事实上，唯一真正能使儿童接受同构的方式必须通过概念化，也就是说，应当概念化地

理解同构，而不应算法化地理解，因为算法化仅仅只是数学的开端。

有些实验为了要使学生从低层次上掌握群的概念，往往会形成错误的具体化。如图 16-10，有两个道路网络，其中虚线表示单行道，实线表示双行道。于是有箭头表示定向的虚线就代表一个 3 阶群的元素，而实线则代表另一个 2 阶群的元素。更精确地说，这些群的元素所起的作用相当于一个映射，它作用在六个点上，使每个点都按行驶的方向对应于另一个点。如果将两个生成运算任意组合，便会形成一个群，而组合后的元素对两个网络都是 6 阶的，只是其中一个是 $6-$ 循环群，而另一个则同构于三个元素的置换所构成的对称群。

但为何它是一个群呢？这个问题要留待形式化以后才能回答。我们现在至少可以知道由行驶方向所定义的映射是一一对应的，而且这些映射的任意组合也是一一对应的，所有这些一一映射组成的集合是一个由一一映时所生成的群 G。如果把这看作 6 个元素的集合变换到它自身的映射所组成的群，那么这种群的元素最多可达 6 个。而图 16-10(1)、(2) 所表示的群却只有 6 个元素，像这种群 G 我们称之为单可迁群，因为每个点正好由 G 的一个元素变成另一个点，所以

点的集合与群可以看作是等同时。另一种表达方式就是：如果一系列的生成运算作用于 A 点，其结果仍回到 A，那么同一运算序列也必使每个其他的点 X 也回到 X 本身，或者说，如果从点 A 开始沿着一条封闭道路运动，那么从任何点 X 出发的相应道路也是封闭时。这实际上就等价于：群 G 的某个元素如果保持 A 点不动，那么它也保持每个点不动，这就是所谓的单可迁性质。

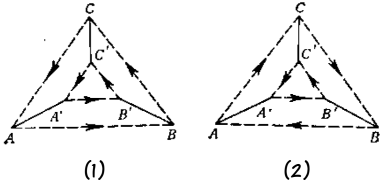


图 16-10

但是为什么会有这个结论呢？当然可以通过列举所有可能的情况来证实它是正确的，但这不是数学。实际上，通过直接观察可断言：图 16-10(1) 定义了一个自同构群（只包含旋转，而不包含反射），它又是一个交换群，因此图 16-10(1) 表示的群和它的自同构群

作为变换群来说是等同的。但是图 16-10(2) 的情况就不同了，它相应的群不是交换群，因此它的自同构群即使作为变换群也不会和 G 等同。而这一区别在两幅直观的道路网络图中学生很难辨认，故此容易产生误解。

对以上两个图形也可以通过另一套理论来加以解释，那就是把图形看作是“群的像”，再由图形的结构来讨论它的自同构。但在群论中，群的像只是作为一种解释的方法，而不是作为定义。另外如何来判定某一个图形确实构成一个群的像，也是一个困难的问题，就像前文想要通过单可迁群来理解群一样，这也是一个很难证实的问题。不管怎么说，我们的目标不该只是用群、域、基数这些高深的名词来点缀中学数学。如果只有将较高层次的数学变换成完全不同的东西，才能与低层次的数学联系在一起，那还不如删掉这些内容更好，我们不会为此丢掉什么。

还有人设计了某种机器，它可以实现某种二元运算。给出两个符号，机器就会产生第三个符号，要求学生去猜测机器所依据的群结构。例如，如果符号 Δ 屡次表现出单位元的作用 $(\Delta \cdot x = x)$，学生就应猜想出 Δ 是群中的单位元；如果一个符号和自身的乘积屡次生成符号 Δ，学生就应猜测出所有元素都有这一

性质；如果屡次发现乘积是可交换的，学生就应推断出运算对所有元素都是可交换的。

这类游戏确实有趣，能够起到一定的探索作用。可是对于学习群的概念来说，游戏能帮什么忙呢？当然二元运算是群的一个特性，借助游戏也许有利于学生去掌握二元运算，但这对任何类型的二元运算都可以进行，它只是一种低层次上组织数据结构的练习，可以用来训练学生进行归纳推理，从这一角度上说，它对学习过程有些作用；可从群的角度上看，学生并不知道什么是群，更不会直接感受到群的单位元或逆元的存在。因此，若要以这样的游戏来配合群知识的学习，那只能是在有了群的概念之后，作为一种巩固知识的手段，而不能把它作为一种知识的开端，更何况在群的概念之中，最实质性的东西也并非是二元运算。

群在数学中确实处于一个很重要的地位，因为任何结构的自同构，都以某种方式组成了群，那就是该结构的自同构群。而从结构的自同构中又可了解有关结构本身的很多特性，这就是群的原理。正是这个原理使得群普遍用于数学的各个方面，这是一个重要的原理，它的伟大就在于它简单，而如果说学生必须学习有关群的知识，那么这个原理就贯穿于所有知识之

中。归根结蒂,群的知识在数学中占有重要地位,我们必须教给学生,但绝不能为了追求庸俗的直观、易懂,而歪曲了群的本质,形成错误的概念,那不是我们所希望的。

什么是结构

具体例子:集合 M 及其元素和子集,加上基本的集合结构 $x \in M$ 或 $x \notin M$,作为度量空间的欧氏平面,具有线段全等关系的欧氏平面,具有共线关系的仿射平面,具有序关系的有序集,以及具有加法、乘法关系的代数域等等。

所谓结构 S,是指具有一个关系 R 或一个关系体系 ϕ 的集合 M。而结构 S 的一个自同构,是指 S 映到自身上的一个一一映射 f,满足下列性质:

对于 ϕ 中的任何关系 R,有

$$R(x,y,z,\cdots) \to R(fx,fy,fx,\cdots),$$

换句话说,要求映射 f 保持 ϕ 的每个关系 R 和它的否定——非 R,即 $x,y,z,\cdots$ 满足关系 R 的充要条件是 $fx,fy,fx,\cdots$ 满足关系 R。现在假设 S 是结构,G 是 S 的自同构集合,那么单位元显然属于 G,对于任意 f,它的逆也属于 G。而对于 f,g 而言,其复合 fg

也属于 G。这样，结构 S 的自同构就组成了群，而复合就是这个自同构群的运算。

通过某个结构的自同构群来引入群的方法，其最大优点就是它借助于概念化的途径而不是算法的途径，而这正是现代数学最显著的特点之一。

至于某个结构的自同构集合是否构成群？以及如何建立这个群？当然可以通过概念化的方法，但是对于中学生来说，不妨先介绍一个特殊的例子。假设集合 S 是平面上所有格点（以整数为坐标的点）的全体，平面上绕原点旋转 $0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3}{2}\pi$ 的四个旋转，关于水平轴的反射，以及使格点变成格点的各种平移，再如上前述三类元素的任意复合，它们的全体就构成了集合 S 的自同构群。学生常常会牢记这第一个特殊的例子，并且在它的基础上，逐步形成结构及其自同构群的一般概念。

我们认为以自同构群的形式来生成群，从而进入群论的领域，是一条较好的途径。因为它通过低层次的活动达到了目标，又为较高层次的活动作好了准备，这比用群的像或是作为二元运算的体系这种算法形式化的途径更为优越，因为这种算法形式化并非数学化或公理化。

当然，有些群可以作为一个具有二元运算的体系来引入，例如整数加群和正数乘群。但实质上，它们也可以通过自同构群的方法来实现。处理数学问题的方法应多样化，而不应定死在某个单一的方法上。有人认为映射太抽象，因此想尽量避开它，选择沿具体的途径走向算法的道路。如果说作为群的元素的映射太抽象，那么群论本身也最好回避，要是让群论变形、变性，这个代价就太大了。其实，在中学数学教学中，学习群论主要是为其他目的服务的，而它之所以能做到这一点，就是由于群是结构的自同构群。这是特别应该强调的特征。

全等群的教学法

在“集合与函数”那一章中，曾对群的教学法作了一个基本分析。现在在“几何”这一章中，又提到了群，这是因为群与几何教学是密切联系的。克莱因将群论渗透到传统的几何概念中，这是一个进步。但如何具体实现这一目标需要很好的研究。如果将群的元素具体化，或以单可迁表示来代替群，那么都会使群本身的几何具体化遭到破坏，使重点转移到形式化算法上，而模糊了对群的几何理解，更危险的是会将映射只看成是限于平面的一部分，甚至只限于一个有限

集。因此,即使对平面上最简单的全等群我们在教学上也应该注意上述问题。

波兰的一种做法是先教平面的反射,然后将旋转和平移看作是某些反射的乘积,其缺点在于反射常常通过图形来作说明,从而过于忽视了全局的观点,而它的优点在于从反射开始可以不依赖平行理论。德国的一种做法是从平移开始,用一张透明的方格薄膜材料在一个固定的平面上作移动,使学生能够理解这是整个平面的平移或旋转,避免理解成部分平面的平移或旋转。但多数人还是喜欢从反射开始讨论,因为它给人的印象似乎是某些东西确实经过了变换,其感觉要比平移与旋转更为强烈。荷兰也是以反射作为出发点的,而丹麦的课程则是从反射引出平面中的全等,以后又处理了相似和仿射变换。它虽没有提及群,却渗入了群论的思想。总的看来,以反射作为用变换群观点来处理几何的出发点,今天已为人们所普遍接受了。

几何的群论公理体系

最后我还想回到几何的公理化问题,我认为在几何的公理化方法中也应当渗透群论的观点,那就是应该建立几何的群论公理体系,它可简短地叙述如下:

设 R 只是度量为 ρ 的度量空间,R 的一个等距变换是 R 到自身上的一个映射 f,它保持度量,即

$$\rho(fa, fb) = \rho(a, b),\ a, b \in R。$$

三点组 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\{a_1', a_2', a_3'\}$ 如果满足

$$\rho(a_i, a_j) = \rho(a_i', a_j'),$$

那么它们就全等。

在任意维的欧氏空间中,下列结论都是正确的。

(1) 全等的三点组可以用全空间的等距变换互相映射。它在双曲空间和球空间内仍然成立,但在椭圆空间内则不一定正确。但下面的命题却成立:

(2) 足够小的全等三点组可以由全空间的等距变换互相映射。

这个性质足以让我们在一大类度量空间中去分辨出欧氏空间和非欧空间,更精确地说,设 R 是具有性质(2)的局部紧致连通的度量空间,则 R 实质上是一个欧氏空间或非欧空间。

这便是这些空间的极简单的群论特征,接着可定义直线、平面等,最后,欧氏几何可以通过一个单可迁群的存在来加以辨别。

当然以上理论尚未完备,但我认为作为中学的欧氏几何公理体系,应当向这个方向努力。

第十七章
微积分

微积分的开端

在本章，我不打算讨论微积分或函数展开的教学技巧，也不打算把微积分处理成“拓扑学”或“混合结构”的一部分，使它显得更适合于某种数学体系。与其他学科相比，微积分更不宜于被描写成为一种结构，以取得人们的欣赏。相反，它是一种想使用它的人们所迫切需要的工具，并且在需要时，它也能被有效地运用。要掌握它，不能光靠背诵开集或极限、微商或积分等定义，更重要的是要通过几何与数值的途径去感受这些概念。

是否真有必要详细告诉学生，他有着多种多样的途径去感受微积分的基本概念呢？大可不必，但翻阅各种教科书后，我开始怀疑许多作者自己是否曾感受过这些概念，或感受深到足以使他们能用自己的方式表达出来。他们中的一些人把微积分的应用搞得像一附录，我担心这些作为应用的例子那么迟才出现，在教学过程中恐怕是起不了作用的。有人以为用速度引

入微商概念就是密切联系了实际,其实并不尽然,这只是在透过一条狭缝看现实,至于这条缝是否比其他缝更宽些并不重要。那么透过许多缝是否好些呢?也达不到教育目的。我们应该沿着在算术教学中被证明为成功的,有着广阔前景的大道走下去,我们还会像过去那样贴近现实。

一个函数的微商或积分意味着什么,这依赖于所给函数本身的意义,而函数的意义是极为丰富的。

数值的途径

函数可以用数来描述,比如用一张表,由这张表可以构造出差分表,这对插值法是很有用的。同一函数的差分显然与网格的宽度有关,但这种依赖性可以消除,只要将差分除以网格宽度,得到的就是与网格宽度无关的差商,再令网格宽度趋于零,最终得到了微商。反过来的问题是如何由差商表倒推出原来的函数表,其方法是将差商乘以网格宽度;也可对原来的函数表作同样的处理,取极限后将得到该函数的积分表。

为了说明这些步骤,应选择一些适当的函数,比如对数函数、二次函数、正弦函数,去发现一些有趣的规律;也可选择一些源于某一具体问题的函数,在解决

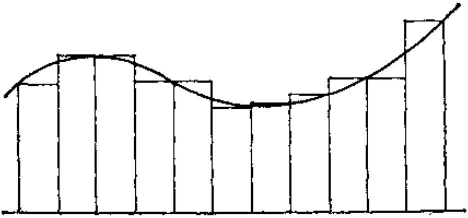
该问题时需要求微商或积分。当然,这种数值的途径必须是实在的而不是模拟的。为此,至少需要一台台式电子计算机。虽然大规模的造表工作是由计算机完成的,但这为学生练习编写程序提供了机会,并可补充介绍较复杂的插值法。

图象的途径

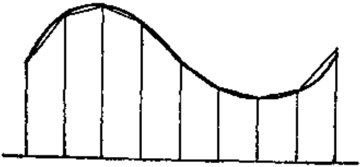
如果函数是用图象来描述的,那么微商和积分的几何意义就是斜率和(图象下方的)面积。在数值的途径中,这些概念只是模糊地显露出极限的意思;而在图象的途径中,它们给人的第一印象便是现成的对象,只有在这里,学生才被迫把它们分析和理解成极限——这是把直观事物数学化的一个典型例子。图象的斜率是指切线的斜率,而切线是割线的极限,换句话说,图象在某一点的斜率就是逼近那点的那些区间平均斜率的极限。由曲线围成的平面区域的面积是近似多边形面积的极限,它们是有向面积,位于 x 轴下方的部分,即负的函数值导致面积为负,并规定积分路线颠倒时,积分要变号。按照这一约定,即使 a、b、c 不满足关系式 $a<b<c$,公式

$$\int_a^b+\int_b^c=\int_a^c$$

也成立。近似多边形可选择阶梯形多边形或分段线性函数的图象（图 17-1）。



(1)



(2)

图 17-1

求导和求积是互逆的运算，这可从两方面来证明，一方面，对函数的积分求导得到的还是该函数；另一方面，对函数的微商求积得到的是该函数加上一个常数。两个证明学生都必须用心学习，因为它们对于微积分的许多应用是有典范意义的。

设 f 是所给的函数，$\int_a f(\xi)d\xi$ 在 x 和 $x+\Delta x$ 之间的增量就是 f 图象下从 x 到 $x+\Delta x$ 的面积，其值为 $\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi$，将它除以 Δx，得到的就是 f 在 x 和 $x+\Delta x$ 之间的近似值。当 Δx 趋于零时，这个近似值的极限就是 $f(x)$（图 17-2）。

反之，f 在 x 处的微商

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \\ \therefore \quad f'(x)\Delta x &\approx f(x+\Delta x)-f(x)。\end{aligned}$$

于是从 a 到 b 积分，$\int_a^b f'(a)dx = f(b) = f(a)$，如图 17-3。

对于严格单调的函数，像公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{和} \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}$$

都是很直观的。

前面我已说过，$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$ 是一个自然对数函数，对 ln $x=y$ 有 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$，因此对 $x=e^y$，有 $\frac{dx}{dy}=e^y$，即指数函数 e^x 的导函数仍为它本身。一般地，对指数函数 $x=a^y(a>0, a\neq 1)$，$y=\log_a x$，有

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\ln x}{\ln a}, \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x \ln a}, \\
\frac{dx}{dy} &= x \ln a = a^y \ln a。
\end{aligned}
$$

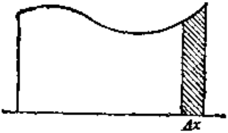


图 17-2

图 17-3

要对线性函数积分，只需看它的图象就行了，对 $y = cx, \int_a^b y dx$ 就是一个梯形的面积，其值为 $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)c$。特别地，

$$\int_0^x \xi d\xi = \frac{1}{2}x^2。$$

于是有 $\frac{dx^2}{dx} = 2x$, 当然它也可以从定义直接推得。由此，利用分部积分法、反函数的求导法则、复合函数的求导法则，可求解当 α 是有理数时函数 $\bigsqcup_x x^\alpha$ 的积分。若用到对数的话，还可求解 α 是实数时该函

数的积分。可是我还是愿意先让学生直观地理解当 $\alpha > -1$ 时，$F(x) = \int_0^x \xi^\alpha d\xi$ 总是一个固定的常数乘以 $x^{\alpha+1}$ 的形式：经过将 x 变到 ρx，将 y 变到 $\rho^\alpha y$ 这样一个线性映射后，函数 $y = x^\alpha$ 的图象没有改变，但 0 到 ρx 这一曲边梯形的面积是原来 0 到 x 曲边梯形面积的 $\rho^{\alpha+1}$ 倍，即 $F(\rho x) = \rho^{\alpha+1} F(x)$。特别地，令 $x = 1$，再用 x 代替 ρ，则有 $F(x) = F(1) x^{\alpha+1}$。

更广意义下的图象的途径

如果我们在比平面曲线更广的意义下考察函数的直观图象，那么微商和积分也有其几何意义，而且很有用。

在积分 $\int_0^a \xi^2 d\xi$ 中，ξ^2 也可看作是边长为 $|\xi|$ 的正方形的面积，则此积分就成了一个高及底面边长均为 a 的正四棱锥的体积。类似地，我们可以设想一种更一般的物体，它沿着 x 轴延伸，如图 17-4，若在点 x 处与 x 轴垂直的截面面积为 $f(x)$，则从定点 a 到动点 x 所夹这段物体的体积 $F(x)$ 就应当是 $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$，并且 $F'(x) = f(x)$。这一结论可用于许多场合，比如用于具有旋转对称性

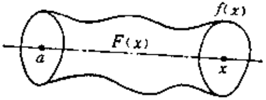


图 17-4

的物体上。设有一绕 x 轴旋转的旋转体,其轮廓线由函数 f 给出,则在点 x 处的垂直截面面积为 $\pi f^2(x)$,从 a 到 x 所夹这段旋转体的体积为 $\pi\int_a^x f^2(\xi)d\xi$。令 $f(x)=ax, a=0$, 我们得到的就是高为 x,底面半径为 ax 的圆锥体体积,其值为 $\frac{1}{3}\pi a^2x^3$。用同样的方法,可建立以 x 为半径的球的表面积 $S(x)$ 与体积 $V(x)$ 之间的联系:$V(x+\Delta x)-V(x)$ 就是以 x 为内半径,以 $x+\Delta x$ 为外半径的"球壳"的体积,将其除以"球壳"的厚度应近似等于该球的表面积,因此

$$\frac{dV(x)}{dx}=S(x)。$$

的确,$\dfrac{d(\frac{4}{3}\pi x^3)}{dx}=4\pi x^2$。

反之,设想这个球被分割为许多以 x 为内半径,$x+\Delta x$ 为外半径,厚度为 Δx 的"球壳",每个"球壳"体积近似于 $S(x)\cdot\Delta x$,将所有这些"球壳"的体积相加,并让 Δx 趋于零,则有

$$\int_0^x S(\xi)d\xi=V(x),$$

的确,
$$\int_0^x 4\pi\xi^2 d\xi=\frac{4}{3}\pi x^3。$$

像"在一定条件下,表面积函数可用求导的方法从

体积函数导出”这种事实可用很多例子来说明，但是，许多中学甚至大学的教科书根本就不提这种事实，可见纯形式化的非直观的微积分已经成了人们的习惯。

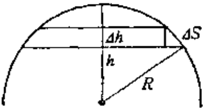


图 17-5

再举一个球冠表面积的例子，如图图 17-5，在球半径为 R 的球上，设 $K(h)$ 表示高为 h，面积为 $S(h)$ 的一个球冠，则两个球冠 $K(h+\Delta h)$ 和 $K(h)$ 之差可近似地看作一母线长为抓底面半径为 P 的圆台，于是

$$S(h+\Delta h)-S(h)\approx 2\pi\rho\Delta S,$$

由相似三角形对应边成比例得

$$\Delta S:\Delta h\approx R:\rho,$$

于是
$$\frac{S(h+\Delta h)-S(h)}{\Delta h}\approx 2\pi R,$$

因此，
$$\frac{dS}{dh}=2\pi R, S(h)=2\pi Rh。$$

对于一般旋转体的表面积计算也很直观。假设该旋转体是绕 x 轴旋转的，其轮廓线由函数 f 给出，那么旋转体上从 x 到 $x+\Delta x$ 这一薄片仍可近似看作是一母线长为 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，底面半径为 y 的圆台。

于是该薄片的表面积近似为 $2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$,求积分,即得该旋转体的表面积公式为

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2dx}。$$

以速度作为一条途径

如果函数描述的是两个物理量之间的关系,那么它的微商和积分就可能含有一点物理意义,比如我们最常提及的速度,它就是路程对时间的微商。但是,教科书几乎从来不提它的反问题,即如何从某辆汽车的速度图象上去求出它所经过的路程。速度对时间的导数是加速度,它表明速度的变化率。除位置移动外,在许多其他过程中速度也有意义,比如,液体流入或流出某容器的流速,通过导体的电流速度,人口增长的速度,放射性物质衰变的速度。

一个重要的例子就是机械功,它是力沿着路径的积分。设平面上某一质点 m 似受一力的作用,产生加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$,于是功转化为动能。如果质点在 t_0 到 t_1 这段时间内,速度从 v_0 变到 v_1,位置从 x_0 变到 x_1,那么它所累积的动能就是

$$\begin{aligned}\int_{x0}^{x1} m\frac{d^2x}{dt^2}dx &= \int_{x0}^{x1} m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt = \int_{x0}^{x1} \frac{1}{2}md\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)。\end{aligned}$$

此值即为动能的增量。若 $v_0 = 0$,则此值为 $\frac{1}{2}mv^2$,它是具有速度 v 的质点 m 所具有的动能,对此我们非常熟悉。

这个例子是相当典型的,而且与其他学科有着密切的联系,所有的中学微积分教学都不应丢弃它,我们不该把它留给物理教师,让他们用似是而非的证明去变出式子 $\frac{1}{2}mv^2$。

以密度作为一条途径

如果沿一直线(x 轴),有一连续分布的物质,其分布函数是已知的,则可求出该物质的密度。设在点 x 处,密度是 $f(x)$,则在 x 到 $x+\Delta x$ 这一小段上就分布着 $f(x)\Delta x$ 的这种物质,a 与 b 之间就分布着 $\int_a^b f(x)dx$ 的这种物质。我们可以把上述物质换成任何在 x 处密度为 $f(x)$ 的量。设 $F(x)$ 表示年龄不大于 x 的人口百分比,它可视为某一函数的积分函数,于是,$f(x)\Delta x$ 表示年龄在 x 到 $x+\Delta x$ 间的人口百

分比，那么，$F(x)$ 可作为任选一人其年龄不大于 x 的概率，$f(x)$ 就是年龄 x 的概率密度。一般遇到随机量时，我们常要考虑它的分布函数和频率函数，其中，前者是后者的积分。

用密度说明积分概念是最有趣的，尤其是在概率问题中，它所需的概率知识不过是一些常识，对此，我想通过下例来加以说明：

某人习惯在每天晚上六点至八点之间去某个餐馆用晚餐，每次总是在那儿停留四十五分钟，求任一时刻 t 他在那儿的概率。又假如另外有一个人，也有和他一样的习惯，那么他们在餐馆相遇的概率是多少？他们在一起的时间平均有多久？

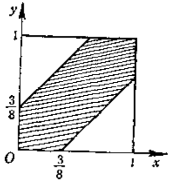


图 17-6

假设一个人是在 $(6+2x)$ 时刻到达的，而另一个人是在 $(6+2y)$ 时刻到达的，则图 17-6 中阴影部分就是他们相遇的 (x,y) 点对。因此，他们相遇的概率应是阴影部分面积与正方形面积之比，其值为 $1-\dfrac{25}{64}$。他们在一起的时间应该是 $(\dfrac{3}{4}-2|x-y|)$ 小时，其中

x、y 都是有约束条件的。要求他们在一起的时间平均有多久,还须对这个函数在阴影部分上积分,最终答案是 $\frac{63}{256}$ 小时。

以梯度作为一条途径

若已知沿 x 轴的温度变化函数是 f,那么 $\frac{df}{dx}$ 就称为温度梯度。它之所以重要在于它揭示了热传导速度的方向与温度梯度相反,大小与温度梯度成正比这一事实。设温度函数为 $f(x,t)$,在时刻 t,我们打破 x 到 $x+\Delta x$ 这一小段的热平衡,可以发现,在 x 处的流出速度为 $k\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$,在 $x+\Delta x$ 处的流入速度为 $k\times\frac{\partial f(x+\Delta x,t)}{\partial x}$。均衡后,小段内的流入速度为

$$k\frac{\partial f(x+\Delta x,t)}{\partial x}-k\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\approx k\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

所以,小段内每一点热量增加的速度为 $k\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$,它与 x 处温度上升的速度相等,这样就得到了著名的热传导方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=k\frac{\partial^2 \int}{\partial x^2}。$$

它也可用于其他扩散过程。

对于二维或三维函数其梯度定义为

$$\text{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right),$$

或者 $$\text{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right)。$$

梯度场是一个向量场,它在每一点上指出了函数增加最快的方向和大小。

因为 $$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = (\text{grad} F, dx),$$

即 grad$F$ 与 dx 的内积,所以

$$F(x) - F(x_0) = \int (\text{grad} F, dx),$$

其中积分路径是从 x_0 到 x。若我们将 grad$F$ 理解为力的场, 则 (gradF, dx) 就是力沿着路径 dx 所作的功,于是 $F(x) - F(x_0)$ 就是它沿着路径从 x_0 到 x 所作的功,或者说是 x_0 与 x 之间的势能差。

这是中学物理课程中的重要内容, 由于中学微积分只涉及一元函数,因此数学教师就欣然把这些原本属于数学的知识留给物理教师去讲。如果我们追求的是直观微积分而不是算法微积分的话,那么就完全可以冲破这种限制。事实上,梯度可以作为教学的目标,

而且是引起学生极大兴趣的出发点。为了直观起见，我们仅限于讨论二维的情况。

我们设想二元函数 F 刻划了平面上的一座山，F 表示这座山的等高线。在每一点上都有一个坡度最大的方向（称为坡度方向），这可以用一个向量来表示，向量的大小与坡度成正比，（在一座真的山上，水流是逆坡度方向的。）

先考虑比较简单的 F，即 F 是一个线性函数 F^*，这时起伏不平的山变成了一个倾斜的平面。等高线变成了一组平行线，各处的坡度都相等，坡度方向与等高线垂直。设 $F^*(x_1,x_2)=a_0+a_1x_1+a_2x_2$，则 $\Delta F^*=(a,\Delta x)$，其中 α 是向量 (a_1,a_2)，Δx 是向量 $(\Delta x_1,\Delta x_2)$，ΔF^* 是 F^* 沿着向量 Δx 方向的增量。若 Δx 与 α 垂直，则内积 ΔF^* 等于零，表明 Δx 方向是等高方向。因为 α 与 Δx 这个方向垂直，所以 α 的方向是 F^* 增加最快的方向。如果 Δx 是与 α 同向的单位向量，那么 $\Delta F^*=|\alpha|$，这表明 α 的大小就是 F^* 的最大增量，按照前面对梯度的定义，我们也可以说

$$\Delta F^*=(\mathsf{grad}F^*,\Delta x)。$$

对于任意的二元函数 F，在 $x_0=(x_{01},x_{02})$ 处我们可用一个线性函数 F^* 逼近它，则起伏的山峦在该处被它的切平面代替。在 x_0 处 $\mathsf{grad}F$ 和 $\mathsf{grad}F^*$ 相

等，可现在 F^* 是处处不同的，相应地，gradF^* 也处处不同。

将平面上从 x_0 到 x_1 的一段路径分割成许多小段，沿着这条路径的增量

$$\Delta F = (\text{grad}F, \Delta x),$$
$$\therefore\ F(x) - F(x_0) = \int (\text{grad}F, dx),$$

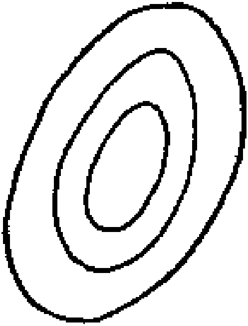


图 17-7

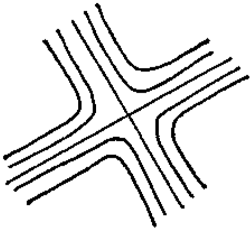


图 17-8

其中积分途径是从 x_0 到 x_1。

为了增加一些趣味性，我们还可以研究梯度为零的各种点，可以比较图 17-7 中最低或最高点附近的等

高线,可以研究图 17-8 中鞍点附近的情况。由此可介绍到关于区域内函数的极点、鞍点数的 Morse 理论。

以容量作为一条途径

与微积分概念有关的另一应用就是容量,它在物理学中有好几种称谓。一个导体的容量是指增加它的电势相应地需要充多少电荷,于是

$$C=\frac{de}{dV},$$

其中 V 是导体的电势,e 是充入的电荷,C 是电容,它可能依赖于 V。

$$\because \quad I=\frac{de}{dt},\therefore \quad \frac{dV}{dt}=\frac{dV}{de}\cdot\frac{de}{dt}=\frac{1}{C}I,$$

于是 $$V(t_1)-V(t_0)=\int_{t0}^{t1}\frac{1}{C}dt。$$

容童这一概念的直观背景是这样的:假设有一个容器,它的横截面大小各异,高度 x 处的截面而积是 $f(x)$,为使其液面从高度 x 上升到 $x+\Delta x$,必须注入多少液体?容量就是注入液体的量与液面上升的高度之比在 Δx 趋零时的极限,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx}{\Delta x}=f(x)。$$

同样地,热容量被定义为获取的热量与温度的增加之比的极限。单位物质的热容量就是常说的比热。

关于容量,有一个很有趣的例子,就是求增加速度所需作的功。设 v 表示速度,E 表示质点 m 的动能。于是 $E=\frac{1}{2}mv^2$,所以 $\frac{dE}{dv}=mv$。由于人们熟悉近似于常数的容量,因此很少有人意识到增加相同大小的速度所需作的功会不一样。

这里还必须提及出现对数微商的情况。若一根棒的长度 l 随温度 T 而变化,则膨胀系数 $\frac{1}{l}\frac{dl}{dT}$ 就是反映这种变化的一个量。类似地,弹性系数 $\frac{1}{l}\frac{dl}{d\sigma}$ 反映的是棒长 l 受拉力 σ 影响的程度。

经济领域中也有容量的概念,称为"弹性力",它反映了产品价值 P 与售价 S 之间的依赖关系。如果 $\frac{dS}{dP}$ 很大,则价值上的小变动就会导致售价的大调整,这种现象称为高弹。显然,生活中的主要必需品必须是低弹的。

以结构与联系作为一条途径

现在我们来比较两个在运动过程中互相依存的量在几何图象上的变化。我想到的第一个例子就是求正弦函数的导函数，当然，不是用该函数的图象，也不是用它的加法定理，而是直接从定义正弦的单位圆出发。如图 17-9 所示，P 是单位圆上距离 $(1,0)$ 点弧长为 s 的一点，其坐标为 $(\cos s, \sin s)$。若点 P 以始终与半径方向垂直的单位速度沿圆周运动，则 $\dfrac{d(\cos s, \sin s)}{ds}$ 是一个常数 ρ 乘以 $(-\sin s, \cos s)$，即

$$\frac{d\cos s}{ds} = -\rho \sin s, \frac{d\sin s}{ds} = -\rho \cos s,$$

其中常数 ρ 可以由 s 趋于零时计算得到，即 $\rho = \lim\limits_{s\to v} \dfrac{\sin s}{s}$，计算这个极限可以有很多种方法，答案是 $\rho = 1$。

第二个例子是在球极投影下弧长的变化情况。如图 17-10，当 Q 运动至 P 时，比例 $PQ : P'Q'$ 的极限是多少？在这一极限中，弧长 PQ 可以用线段长来代替，而 ΔPNQ 和 $\Delta Q'NP'$ 是一对相似三角形，因此 $PQ : Q'P' = NP : NQ'$、当 $Q \to P$ 时，这个比变成

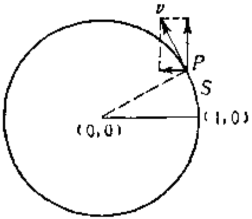


图 17-9

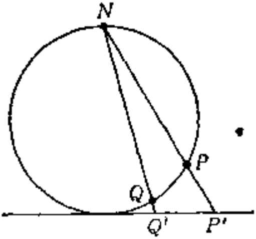


图 17-10

$NP:NP'$、设 PQ 弧长为 s，其在底平面上的投影曲线 $P'Q'$ 弧长为 s'，则

$$\frac{ds}{ds'}=\frac{NP}{NP'}。$$

对球上曲面面积 σ 和其在底平面上投影面积 σ'，有

$$\frac{ds}{ds'}=\left(\frac{NP}{NP'}\right)^2。$$

如果不在乎它的证明是否能被人理解的话，这些结论当然也能从更形式化的微积分中得到。但上述证明是很漂亮的，这又一次说明了用几何直观指导教学的重要性（想埋葬几何的人应记住这一点）。

我并不主张微积分教学走那种经典曲线概论的路子，我只是想表明，如果用现代观点思考，那么即使是一个看来已没有生气的老问题也会恢复活力的。

所谓的应用

从微积分教学与非数学的知识领域的结合来看，通常的做法是：首先在数学领域内定义微商和积分，然后至多指出微商和速度的关系，而所谓的应用将在以后的微分方程中出现。对此做法，我是坚决反对的，因为这种应用出现得太迟了。从初学微积分起就应该让学生体会到它与现实之间的密切联系，学基本概念更应在现实这个大背景下进行。当然，我这样说并不是要取消通常所安排的那些应用，相反，我是要拓宽和加深它们。

最简单的应用是用在自由落体运动、斜面上的质点运动和抛射运动上。然后是大量可导出指数函数的微分方程问题，最典型的就是考察一个以某种速度增长或减少的量，比如人口、放射性物质等，其增长或减少的速度与现存量近似成正比：$\Delta Q \approx \alpha Q \Delta t$，于是

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha Q,$$

其解为 $Q(t) = Q(0)e^{xt}$。对于人口增长的问题，α 为正的常数；对于放射性元素的衰变问题，α 为负的常数。

变量之间依赖关系复杂一些的有热传导问题。设传出的热量与温度差分别 ΔQ 与 $\Delta\theta$，则由 $\Delta\theta \approx$

$-k\Delta Q$, 和 $\Delta Q \approx \alpha\theta\Delta t$, 可推出 $\Delta\theta \approx \alpha k\theta\Delta t$, 取极限,得

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha k\theta,$$

其解为 $$\theta(t) = \theta(0)e^{-\alpha kt}。$$

气压与高度问题是一个经典例子, 要导出它的公式是复杂的。设截面积为 1 的空气柱在高度 x 处的气压为 $p(x)$, 因为空气的比重与压力成正比, 而从所降低的气压正是这一薄层内空气的重量, 所以 $\Delta p \approx -kp\Delta x$,取极限,得

$$\frac{dp}{dx} = -kp,$$

其解为 $p(x) = p(0)e^{-kx}$。将高度表示成气压的函数, 则有

$$x = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{p(0)}{p(x)}\right)。$$

另一个比较复杂的例子是挂在一滚筒上的驱动带的张力问题, 如图 17-11, 在压力的作用下, 从 A 到 B 的张力逐渐增大,所增加的量正好与皮带和滚筒之间的摩擦力大小相等。我们用角坐标表示滚筒上的点, 设在 φ 处皮带的张力为 $S(\varphi)$,因为从 φ 到 $\varphi + \Delta\varphi$ 皮带与滚筒的摩擦力与张力在法线方向上的分量成正比,于是

$$\Delta S \approx \mu S \sin \Delta\varphi,$$

则 $$\frac{dS}{d\varphi} = \mu S,$$

$$S(\varphi) = e^{\mu\varphi} S(0)。$$

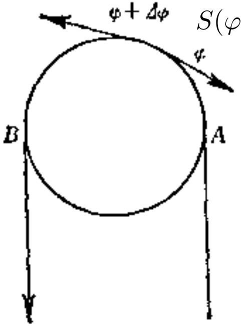


图 17-11

所以,滚筒上皮带张力的增加是以指数形式依赖于角 φ、而与滚筒的半径无关。

二阶微分方程是由振动问题产生的。一质点 m 有一维自由度,以弹簧将其与原点连接,该质点受到一个与其振幅 c 成正比的力的作用,除此之外,它还受到一个与其速度成正比的阻尼力(摩擦力)和一个周期性的外力 K 的作用。于是可导出一线性微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \rho\frac{dx}{dt} + \mu x = K,$$

左边是惯性力、阻尼力和弹性力之和,右边是周期性的外力。如果 $\rho = 0, K = 0$,则上述微分方程的解是 $x = e^{\pm i\sqrt{\frac{\mu}{m}}t}$,质点的振动周期为 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu}{m}}}$。

描述摆的小幅度摆动的微分方程与描述质点的振动方程差不多，只是现在 x 表示摆角，并且在方程中，角加速度和角速度都要乘以摆长 L。原来的 μx 现在被重力在切线方向的分量 $mg\sin x$ 所代替，因为是小幅度摆动，所以 $\sin x$ 可用 m 代替，于是微分方程变成了

$$m\Big(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\rho}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{g}{L}x\Big)=K。$$

当摆所作的是自由摆动时，可求得其摆动周期为 $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$，这是我们都很熟悉的结论。

在电流为 I 的电路中，电流经过电阻 R，电势下降 IR，经过自感线圈 L，电势下降 $L\cdot\dfrac{dI}{dt}$，经过电容 C，电势下降 $\dfrac{1}{C}\int_0^t Idt$，这些电势差的总和是由电动势 E 提供的，即

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int_0^t Idt=E,$$

或者说，
$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dE}{dt},$$

这又是一个二阶微分方程。

其实，一个二阶微分方程也能隐含在一个一阶微分方程组里。设二阶微分方程是

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx+c=0,$$

只要令 $x_1=x, x_2=\frac{dx}{dt}$,上述二阶微分方程就化成了一个一阶微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt} & =x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} & =-bx_1ax_2-c。\end{cases}$$

反之，若给出 x_1, x_2 之间的一个线性关系，则对该一阶微分方程组求一次导数，也能将其化为一个二阶微分方程。

一阶微分方程组

$$(*)\begin{cases}\frac{dx_1}{dt} & =a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13} \\ \frac{dx_2}{dt} & =a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}\end{cases}$$

可简写为 $$\frac{dx}{dt}=Ax+C。$$

方程组 $(*)$ 有一漂亮的几何解释，在平面上点处有一向量在整个平面上就可形成一个向量场，解微分方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + C$$

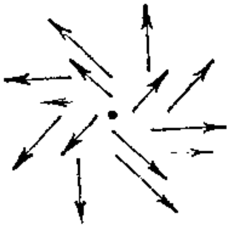


图 17-12

就是要寻找这样的曲线,便其上的每一点切线方向都与场的方向一致(图 17-12)。向量场按其零点的特性分类,这是一个诱人的问题。从代数的角度看,这一分类依赖于 A 的特征值。这是线性代数的一个重要的,甚至可能是最重要的应用例子。有的大学数学课程中有线性代数,但根本不提它在线性微分方程组方面的应用,这简直令人难以置信,但情况确实如此。

对方程组 $(*)$ 还有一些实际的解释。比如,有两种化学物质 x_1, x_2,其增长规律线性地依赖于 x_1, x_2 本身,即在也 Δt 时间内 x_i 产生出第一种物质 x_1 的量是 $a_{1i}x_i\Delta t$,产生出第二种物质 x_2 的量是 $a_{21i}x_i\Delta t$,这时方程组 $(*)$ 所描述的就是 x_1, x_2 的增长情况。自然,当系数为负时,它表明是消耗而不是增长。

一阶微分方程组 $(*)$ 的特例

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = -\alpha x_1 + \beta x_2 , \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = \alpha x_1 - \beta x_2 \end{cases}$$

有一个概率解释，它所描述的是一个随机过程：一个系统有两种可能的状态，时刻 t 它处于这两个状态的概率分别是 x_1 和 $x_2 (x_1 + x_2 = 1)$，它在时间间隔 Δt 内从状态 1 进入状态 2 的概率是 $\alpha \Delta t$，从状态 2 进入状态 1 的概率是 $\beta \Delta t$。这个微分方程组就描述了概率的变化情况。

另一种应用是研究有关悬链线的问题，它不适合中学教学，所以我们改用一个与悬链线问题类似的，简单的吊桥问题，它适合于中学数学教学。

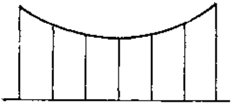


图 17-13

如图 17-13 有一钢丝绳吊桥，因为桥自身很重，所以钢丝绳的重量可以忽略。在力的平衡下，从 x_1 到 $x_1 + \Delta x_1$ 这一小段钢丝绳受到的力有张力 $-T(x_1)$，$-T(x_1 + \Delta x_1)$ 和重力 $-\mu g \Delta x_1 e_2$，其中 μ 是单位长度桥的质量，e_2 是与重力方向相反的基向量。由此得

$$\frac{dT}{dx_1} = \mu g e_2 ,$$

于是 $T=\mu g e x_1 e_2+a$，其中 a 是一个固定的向量 (a_1,a_2),张力 T 是一个数乘以切线方向上的向量,故

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{T_2}{T_1}=\frac{\mu g x_1+a_2}{a_1},$$

其解为 $x_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mu g}{a_1}x_1^2+\dfrac{a_2}{a_1}x_1+C$,它是一条抛物线,$x_1^2$ 的系数的物理意义与弹性系数有关。

量的阶

物理学家总是毫无顾忌地谈及量的阶，而数学家却总是小心翼翼地避开它。微积分教学中极少提及它，似乎只要让学生知道 x^3 比 x^2，e^x 比 x 的任何次幂增长得快就够了。其实，直观地理解量的阶是直观地理解微商和积分的必要前提。微商的定义表明：在 $x=x_0$ 处，函数 f 可以近似地用一个线性函数 f^* 来表示，当 $x\to x_0$ 时，其误差 $f(x)-f^*(x)$ 比 $x-x_0$ 更快地趋于零。这是因为当 $x\to x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ 趋于零，所以 $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\times(x-x_0)$ 比 $x-x_0$ 更快地趋于零。如果 $y=f(x)$ 二阶可导,则误差 $f(x)-f^*(x)$ 除以 $(x-x_0)^2$ 仍是有界的。对此学生不仅应该从式

子的推导中，而且也应该从函数图象和切线上来加以认识。上述问题还可继续推广：如果函数 f 在 x_0 处 k 阶可导，那么在 x_0 附近，函数 f 可以近似地用一个 k 次多项式 f^* 来表示，当 $x \to x_0$ 时，误差 $f(x)-f^*(x)$ 比 $(x-x_0)^k$ 更快地趋于零。在不久以前，几乎所有的大学微积分教材还不提这一重要的内容，而把注意力放在很复杂的“余项”上。

如果用上、下阶梯函数或分段线性函数近似地代替原来的光滑函数 f，那么积分的误差情况如何呢？对于前者，是以长度为 h 的小区间的左端点（或右端点）的函数值代替这一小区间上的函数值，由于在每一长度为 h 的小区间里函数的变化 Δf 至多与 h 同阶，因此，在每一小区间上函数 f 的积分近似值误差至多与 h^2 同阶，把所有小区间上的误差相加，总误差至多与 h 同阶；对于后者，是以连结长度为 h 的小区间的两端点函数值的弦代替这一小区间上的函数图象，由于每一弦总与该小区间内某一点的切线平行，由前面关于导数的讨论知道，误差 Δf 是比 h 高阶的无穷小，若 f 又是二阶可导，则误差 Δf 与 h^2 同阶，因此，每一小区间上积分的误差与 h^3 同阶，在整个积分区间上积分的总误差与 h^2 同阶。比较这两种结果，显然后者的近似程度更好些，于是自然产生了一个问

题:是否能用更高阶的多项式函数图象代替每一小区间上的函数图象以提高精确度呢?这一问题的深入研究产生了一个数学分支——插值理论。我们还可以思考一个类似的问题:如果用数值方法对一个用表格表示的函数求导,能否可用类似的方法提高精确度?

微分

在推导微分方程,比如高度与气压公式的时候,我们提到过高度从 x 上升到 $x+\Delta x$,而降低的气压恰是这一薄层内空气的重量 $kp\Delta x$,于是有

$$\Delta p \approx -kp\Delta x, \qquad (**)$$

这里用恒量 p 代表这一薄层内所有点的气压值是违背实际的,这对结论的科学性是否有影响?没有。这是因为薄层内气压的差值至多与 Δx 同阶,无论以 p 到 $p+\Delta x$ 之间的哪一个值代表薄层内的气压,Δp 的误差都与 $(\Delta x)^2$ 是同阶的,在 $(**)$ 的两边同时除以 Δx 得

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} \approx -kp,$$

其误差就与 Δx 同阶,当 $\Delta x \to 0$ 时,就得到了不存在误差的等式 $\dfrac{dp}{dx} = -kp$,其他问题也是如此。$(**)$ 也可记为

$$\Delta p=-kp\Delta x+\cdots$$

或
$$\Delta p=-kp\Delta x+o(\Delta x),$$

其中的省略号和 $o(\Delta x)$ 表示比 Δx 更快趋于零的量。按传统的记法就是 $dp=-kp\,dx$,然后我们说在 x 到 $x+dx$ 办这一无穷小区间中含有重量为 $-kp\,dx$ 的空气,这一方程表明它等于气压的变化 dp,最后,两边同时除以心,即得微分方程

$$\frac{dp}{dx}=-kp。$$

很多人正在深入讨论中学数学中是否要引入以及怎样引入微分,但这场讨论若不首先回答学微分的目的究竟是什么这一根本的问题,那是没有意义的。无用的知识很快会被忘却。如果 dx 和 dy 总是跟在被积函数后面出现,或者总是以 $\dfrac{dy}{dx}$ 这样一个整体出现,那么要让学生回答微分 dx 和 dy 各有什么含意,他就会觉得这个问题简直就像问"'log' 中 'l'、'o'、'g' 各有什么含意"一样无意义。其实观察一下链导法则和换元法则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx=\int_a^b f[\varphi(u)]\frac{dx}{du}du,$$

其中
$$x=\varphi(u),$$
就会发现微分记号是有用的。利用微分运算还可方便地解出形如
$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$$
这样的微分方程,解的过程是
$$f(x)dx=g(y)dy,$$
$$\int f(x)dx=\int g(y)dy,$$
令 $F(x)=\int_a^x f(\xi)d\xi, G(y)=\int_b^y g(\varsigma)d\varsigma$,于是就得到了关系 $F(x)=G(y)$。也可以不用微分而用换元法则方便地来解:
$$g(y)\frac{dy}{dx}=f(x),$$
$$\int g(y)dy=\int g(y)\frac{dy}{dx}dx=\int f(x)dx,$$
但这对于帮助学生理解其中的过程几乎没有好处,

在讨论微分的教学时,这种应用是从来不谈的。即便谈一点应用,也完全局限于微分的语言现象。那么,为什么对微分总在讨论呢? 让人苦恼的是在物理中人们津津乐道于无穷小路径、无穷小瞬间、无穷小功等,并把它们互除而忽略不计高阶的项。

我想关于这一点我已经讲得很清楚了,原因不在于物理。一旦用微积分把实际数据数学化,微分就产

生了。对于两个互相依存的变量 x, y, 不先说明微小变化 Δx 和相应的 Δy, 以及 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 收敛于 $\dfrac{dy}{dx}$, 就讲无穷小变化 dx, dy 和它们的商 $\dfrac{dy}{dx}$, 不先说 $\Delta p \approx -kp\Delta x$, 其中 p 取 x 到 $x+\Delta x$ 小段中某点上的值, 而直接说 $dp = -kp\,dx$。这是物理学家的表达方式, 我相信如果让数学家来解这种问题, 那么他一定会想到微分。物理教师也是这样教的, 如果他具有扎实的数学功底, 那他很清楚这样教是完全有道理的, 反之, 他会有点不踏实。然而, 在那些有能力把物理学家用的数学教给学生的数学家中, 仅有一部分人重视让学生熟悉这种数学, 而他们之中敢于教这种数学的人就更少了。中学数学受抽象的大学数学影响太深了, 而这些数学与人们的实际应用相距甚远。加强中学和大学微积分的多重联系可有很多种途径, 我们已谈及的所有那些途径都有将微分作为一种直观对象的思想。如果直观地教授多重联系的微积分, 那么就没有必要讨论是否要教微分了。因为在这样的土地上, 微分会像野草那样生长, 就如同我们不必用公理或其他方法去解释如何看几何图形一样, 也不必去解释什么是微分。我知道, 在尚未清晰地把一学科解剖成定义、假设、结论和

证明时，就要数学教师去教它是困难的，但他们可以向物理学家学习应该怎么做。

我认为，考虑悬链线上从 s 到 $s+\Delta s$ 一小段还是考虑从 s 到 $s+ds$ 一无限小段，以及是否将关系 $T(s+\Delta s)-T(s)\approx ug\Delta s\cdot e_2$ 写成方程 $T(s+ds)-T(s)=ug\,ds\cdot e_2$ 都是无关紧要的，然而比较而言第二种描述方法更好些。为了理解物理学家的语言，大学生应向数学家学习这种描述方法，并在中学阶段为接受这种方法作好准备。不应发生数学家教的数学是不能用的，而物理学家用的数学却是数学家不教的这种事情。

量与函数

上节提到的分歧根深蒂固，随着现代数学的发展，尤其是在集合论与数学语言发展的影响下，这一分歧显得越来越大。如果我们继续用纯而又纯的风格去教数学，而越来越不讲究启发（方）式的话，那么数学的使用者们会把他们认为学生需要的数学教给学生，而不管数学家们怎么说。

我早已说过原因是多方面的，不只是因为有人在用 ε,δ 与严格的极限定义，而有人在用无穷小与微分分歧早在函数概念上就表现出来了，并随着函数记号

的逐渐改进,分歧也越来越明显。也许读者已注意到我例子中所用的函数记号并不符合我前面介绍过的现代数学中的那种精神,不过请他放心,我不会收回我对现代函数概念的赞誉,我想说的是那种要把一切东西都挤入一个体系的教条主义做法是很危险的,这种做法会让我们失去很多客观上和教学上有价值的东西。

我所举的例子中出现了许多诸如 $\frac{dp}{dx}, \frac{ds}{ds'}, \frac{de}{dV}, \frac{dV}{de}$ 的微商记号,它们分别表示气压关于高度的导数,一孤长对另一弧长的导数,电量关于电势的导数和电势关于电量的导数,这是物理学家的数学和数学符号,用起来往往很方便。但在数学中,像 $\frac{dV}{de}$ 这种记号已经显得过时了,提倡用 V',表明 V 关于其自变量的导数,至于称自变量为什么字母无所谓。的确,在描述一个函数时,我们是不在乎 V 后面的括号内填什么字母的,但 $\frac{de}{dV}$ 和 $\frac{dV}{de}$ 是不允许同时出现的,V 不能一会儿代表一个函数,一会儿又代表一个自变量。

其实,例子中所出现的 V, e, p, x, s, s' 等都不是函数,而是量。它们相互之间有某种依赖关系。比如 V 依赖于 e,p 依赖于 x,s 依赖于 s',这种依赖关系也就

是函数依赖关系，只是没有明确表明，也没有用记号说明。

数学家之所以不同意物理学家的做法，是因为后者把量的方法与函数的方法这两种不同的东西混淆起来了。设 p,V,T 分别表示气体的压力、体积和温度，那么我们该怎样表示 p,V,T 之间的相互依赖关系呢？物理学家会写 $p(V)$ 和 $p(t)$，表示当 T 固定时，p 是 V 的函数；当 V 固定时，p 是 T 的函数。这是与函数记号的现代发展背道而驰的。在现代数学中，"p"是一个已定义的函数的特定记号，"p"后括号内填什么自变量记号是无关紧要的。

就其本身而言，物理学家的这种做法不会造成严重的冲突，一个人只要在传统的量表示法和新的函数表示法之中选定一个，并且不混用它们就行，但不幸的是物理学家们仍在前后不一地使用着传统的表示法，他们称 p 为压力，称 $p(V)$ 为当体积是 V 时的压力，称 $p(T)$ 是当温度为 T 时的压力。但如果体积作为温度的函数随温度的变化而变化，我们该用什么来表示压力呢？用 $p(V)$？$p(T)$？或是 $p(V(T))$？大凡搞过热力学的数学家只要想起这种混乱的事情就会不寒而栗。当然，在物理学家的脑子里有着一个实际问题，他明白自己所用记号的确切含义，就像一个几何

学家脑子里有一个形象,他能把图形的性质讲得比不联系现实的人更为真切。然而,用一个字母在同一场合里既表示一个量,又表示这个量对另一个量的依赖关系,这总不能认为是合理的事。因此,有人建议引入函数记号 ϕ 和 ψ,而把上面的问题记作 $p=\phi(V)$, $p=\psi(V)$,或更一般地记作 $p=\kappa(V,T)$。然而,不必将好的东西连同坏的东西一起丢掉,我们应该允许物理学家和我们自己用字母表示量,允许求一个量对另一个量的导数,允许使用微商记号。这样,若 x 和 t 表示路程与时间,则 $\dfrac{dx}{dt}$ 就表示速度。进一步,若路程对时间的依赖关系由 $x=f(t)$ 给出,则速度对时间的依赖关系由 $\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ 给出。除此之外,我们应该看到,用一个字母既表示量又表示一个函数的传统办法还有一个很大的好处,就是在算法上把一个函数归结为一个量,这在许多情况下是非常便利的。而上面所说的引入新的字母来表示一个量对另一个量的依赖关系,这种方法是过于精细且不实用的。有没有更便利的方法呢?

我想起一种办法,即用含 x 的式子把函数关系表示出来。例如,用 $x\to x^2$ 表示“……的平方”这个函

数。对此,我建议用 $\bigsqcup_a x^2$ 来代替。这里我们是否也能用类似的办法呢?若 x 与 t 是两个量,比如 x 是路程,t 是时间,则 $t \to x$ 表示 x 关于 t 的函数,也就是 $x = f(t)$。我将它记作 $\bigsqcup_t x$,这里 t 与 x 的关系没有明显地表达出来。于是,压力作为温度的函数就是 $\bigsqcup_T p$,作为体积的函数就是 $\bigsqcup_V p$,作为这两者的函数就是 $\bigsqcup_{(T,V)} p$。还有 $\bigsqcup_s \dfrac{dx}{dt} = (\bigsqcup_t x)'$,,。在尚未熟悉这种记法之前,我们会感到很不习惯,当然还可以改用其他更熟悉的方法。在时刻 t_0,路程 x 及速度 $\dfrac{dx}{dt}$ 的值可以按老办法分别记作 $x_{t=t_0}$ 与 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}$,按新办法则可记作 $(\bigsqcup_t x)(t_0) = x_{t=t_0}$,$(\bigsqcup_t x)'(t_0) = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}$。

我不认为这是最终的方法,应该说问题还没有解决,有能力、有兴趣的人们应该对这个问题作深入地研究。量的运算、微分与微商的记号和方法是行之有效的宝贵方法,我们没有权利要求物理学家抛弃好的旧鞋,而去穿挤脚的新鞋。相反,数学家们应该设法找出一套大家乐意接受的,又实际可行的形式体系来。

对于中学教学来说,不管情况如何复杂,我们都必须把最方便的工具教给学生。微分、几何量、物理量

及它们的微商是直观微积分的最有效工具。如果我们的教学不能利用它们，而只能从集合论出发搞纯粹主义，那么必定会给学生在理解上设下灾难性的障碍。

连续和收敛

从逻辑上看，连续和收敛是密切相关的，这是分析和形式化的结果，但从教学上看，却不宜一气呵成。应将这些概念间的关系作为学习进程的目标而不是作为其基础。无论是要证明数列、级数或甚至于函数的收敛性，我们都可以在尚未给出收敛的定义之前完成，对于一些具体的特殊数列甚至还能找出在误差允许范围内的极限。但证明连续性的情况就不同了，在给出连续的一般定义之前，最多只能说明一次或二次函数是连续的。连续性是一个一般的性质，因为由它可以推导出其他时一些性质来，例如推导出可积性等。

从我们的说明中我们几乎可以完全相信，依靠直观的连续概念可以学到相当多的微积分知识。那么较高水平的深奥理论能掌握吗？中学教连续有用吗？仔细看看就会知道，光是连续性与可导性是起不了大作用的，真正重要的是一致连续性与一致可导性。想要证明连续函数时可积性，关键在于证明：当自变量发

生很小的变化时，函数值也一致地发生很小的变化。由此就可以推断出：当分割的间隔趋于零时，阶梯多边形的面积和曲线下方的面积之差可以任意地小。我们知道，利用海涅-波莱尔（Heine-Borel）定理或波尔察诺-维尔斯特拉斯（Bolzano-Weierstrass）定理可以证明：在有界闭区间上连续的函数必定是一致连续的。但是，谁敢在中学里去证明或只是提及这一定理呢？实际上，若仅是为了证明连续函数的可积性而安排连续概念的话，那么老实说，这一目的是达不到的。所以只需干脆地给出一致连续的概念就行了，事实上一致连续的概念比连续概念更容易阐述。

可导性的情况也类似，重要的是一致可导性。一致可导的意思是：当 h 足够小时，

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|$$

的值关于 x 可以一致地变得任意小。这也就是说：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在着 $\delta>0$，使当 $|h|<\delta$ 时，上式的值小于 ε。换一种说法，也就是：当 x_1，x_2 趋于 x 时，

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

一致地收敛于 $f'(x)$。这个结论在我们用差商代替微

商时经常用到,例如,用于证明导函数的积分和原函数最多相差一个常数,或用于讨论量的阶。

当然,一致可导性可由导函数 f' 的连续性推出,但这也要用海涅 -波莱尔定理证明的,因此,与其假定 f' 的连续性,还不如直接假定函数 f 的一致可导性。在这方面,就是大学的微积分教学也没有处理好,不过这里我就不予讨论了。

如果出于某些原因,在中学里一定要教连续或一致连续的话,那么最简单的教法就是把 $\varepsilon-\delta$ 定义一古脑儿地灌输给学生。如果这样教的话,即使是大学生也难真正掌握。很遗憾,至今没有对连续概念教学的新建议,尤其是缺少对教学情形所作的逻辑分析。学习连续概念的难点在于量词和各种量词间的顺序,为了说明这一点,我必须提前运用第十九章逻辑中的一些内容。

对"连续"的直观解释是:x 的微小变化引起 $f(x)$ 的微小变化,或者说 x 变化一点点,则对应的 $f(x)$ 也变化一点点。显然,诸如小、大、一点点、很多、短、长这些词都有那么点意思,但都不明确。在"连续"的定义中,第二个"微小"和第一个"微小"就有"任意"和"存在"的区别。为了更确切地使用这些量词,首先要让学生对它们作逻辑上的分析。

把直观的“连续”概念译成数学的逻辑语言，学生会遇到两种困难：一是要译出隐含着的量词；二是要将各种量词排序。经验丰富的教师会将这两种困难分开，逐个解决。他们让学生先接触量词，尤其是非算法式的量词及这些量词的否定量词，再学习寻找隐含着的量词，最后去掌握量词的序。这是一个漫长的过程，我们不能等到积下很多困难时才开始重视。

为了要形成一个较确切的连续性定义，学生必须先学会把日常语言形式化。必须熟悉“每一个”、“所有”、“处处”、“总是”、“某一个”、“一些”、“某处”、“有时”等量词，对非限定的不定冠词“一个”要能够区别它是代表“所有”还是代表“某一”。接着学习寻找隐含着的量词，先从不考虑序的简单训练开始，例如在“慢工出细活”中要求能从“慢”字中看到隐含着量词“存在”（“存在一段时间，之后才能出细活）；在“最隐蔽的秘密也将暴露在光天化日之下”中要求能从“最”字中体会出“所有”这个量词（所有的秘密都将暴露在光天化日之下）；在“许多猎犬一会儿就把那只野兔抓住了”中要求能从“许多两字中体会出“存在”（存在一大群猎犬致使那只野兔无法逃脱）。

在这些例子中只含一个量词，之后，可进入几个量词同时出现的训练阶段。这时要让学生认识到量词序

的重要性。比如“总是有人在这儿的”和“有人总是在这儿的”用的字虽完全一样,但由于字的排序不同,就构成了两句含意完全不同的句子。学生要能写出这种句子的否定句。隐含两个或更多的基本量词的句子在中学数学中是不常见的,例如,“$\sqrt{2}$ 是无理数”(不存在非零整数 p, q,使得 $p^2 = 2q^2$),“x 能被 5 整除”(存在一个整数 y,使得 $x = 5y$)。我曾指出过,即使是中学水平以上的人,有时也不能分辨出这些结构中的量词,而这离连续性定义的复杂程度还差得远呢。

再后,进入再难些的翻译训练,例如,“对很大的自变量,函数 f 是正的”,显然,“很大”隐含着一个量词,但它是什么?抑或不止一个?这句话说的是哪种函数?是像函数 $\bigsqcup_x x^2$,还是像正弦函数?是对所有很大的 x 都成立,还是对它们中的一部分成立?应该把它说得更明确些:

“对所有很大的自变量,函数 f 是正的。”或者“对某些任意大的自变量,函数 f 是正的。”对前者,可译成

“存在一个 a,使得对所有大于 a 的 b,都有 $f(b) > 0$。”

对后者,可译成

“对每一个 a, 存在一个大于 a 的 b, 使得 $f(b) > 0$。”

再增加量词:

“对所有很大的自变量, 函数 f 很大。”和“对某些很大的自变量,函数 f 很大。”

对前者,可说成

“f 越过所有的界限。”

比如函数 $\bigsqcup_x x^2$。对后者,可说成

“f 变得越来越大。”

比如函数 $\bigsqcup_x x\,\textsf{sin}\,x$ 与前组句子相比,后组句子是在句子的开头加上一个量词“对每一个 M”, 并把“函数 f 的值是正的”换成“函数 f 的值大于 M”。于是就成了

“对每一个 M,存在一个 a,对所有大于 a 的 b,都有 $f(b) > M$。”和

“对每一个 M 和每一个 a, 存在一个大于 a 的 b,使得 $f(b) > M$。”

对于这些句子学生也要学会写出否定句。

以上各种练习都是为分析连续性概念作准备的。至于例子的取材, 应不局限于数学领域, 生活中的很多语句都隐含着量词及其关系, 都可以为我们所用。例如,“经过广泛的挑选, 许多人都能找到他们所要的

东西”,“你能在一段时间内蒙骗住所有的人,也能永远蒙骗住某些人,但你不可能永远蒙骗住所有的人”等。

有一句话意思是很小的事能产生很大的影响,对这句话有两种理解:一是“存在着任意大的影响,它是由很小的起因造成的。”二是“存在着超过某一界限的影响它是由很小的起因造成的。”如果我们用变量 x 代表起因的大小,用变量 y 代表产生影响的大小,用函数 f 代表 x 和 y 之间的对应关系,那么上述语句译成数学语言就成了“x 的一个微小变化能对应 y 的一个任意大的变化”和“x 的一个微小变化能对应 y 的一个大于某一给定正数 ε 的变化。”如果 f 是连续的,即“对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 当 x 的变化小于 δ 时,对应的 y 的变化就小于 ε”,那么前一语句显然不成立,后一语句也不成立,且对任何一个正数 ε 都不能成立,这里 x 的“微小变化”应理解为任意小,即小于任意的正数 δ。于是,与这两句语句对应的是:“存在一个正数 ε,使对任何 $\delta > 0$,存在 x 的一些变化,其量小于 δ 和它对应的 y 的变化值大于或等于 ε。”这正是连续的反面——不连续的定义。当然,在此之前学生应该已会对量词表示否定了。在介绍“不连续”概念时,要尽量借助函数图象,如寄信所付邮资的

函数图象等。当学生熟悉了量词符号后,要尽量让他们多使用,尤其是要能准确地表示量词的否定。

上述内容有不少是属于逻辑学科的,比如逻辑上的分析以及对“连续”概念的形式化。中学数学对“连续”的形式化应达到怎样一个程度呢?如果学生已有良好的逻辑基础,那么可以较多地使用逻辑符号。反之,则要较多地甚至完全依靠直观。但无论怎样,都应从直观的“连续”概念出发,并尽可能地继续利用直观,即使是在给出了“连续”概念的形式定义之后也应如此,这将有助于学生了解各种各样的形式化。

在小标题中,我还提到了收敛。前面我已指出,中学微积分中的收敛多从计算入手,要说明数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a,只要通过 $|a_n-a|$ 很小来说明,几乎没有必要去一般定义什么是数列的极限。但是,一旦在一定程度上把“连续”概念形式化以后,“极限”概念也可用同样的逻辑结构加以定义:

“对每一个 $\varepsilon>0$,存在一个 N,使对所有大于或等于 N 的 n,都小于 ε。”

表示 f 在 x_0 处连续还有一种借助于极限概念的形式化方法,即

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$,

或者说,对任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$,数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x_0)$,则称 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续。可以证明,用极限定义连续与用语言定义连续是等价的。

中学微积分的发展——关于微积分的基础

中学微积分如何教,教到怎样一个深度,才能使它形成一个知识体系呢?我们先来看一个例子,计算 $\int_a^b \frac{1}{x}dx(b>a>0)$,在前面第十四章中,我们曾用这个积分在微积分学习未正式开始之前引入了对数函数。当时,我们把一条垂直于 x 轴的固定直线与另一条也垂直于 x 轴的活动直线间的曲边梯形面积定义为一个对数函数。其实,这里我们已经作了三条假设:

(1)以 $x=a,x=b,y=f(x)$(这里是 $y=\frac{1}{x}$)和 x 轴所围成的曲边梯形的面积存在。

(2)这种面积与以前所教的面积一样,具有可加性。

(3)在特殊的仿射变换下(在一个轴的方向上乘以 ρ,在另一个轴的方向上乘以 ρ^{-1}),这种面积与平行四边形在这种变换下的面积一样,具有不变性。

现在,在微积分中引入近似多边形,于是,上述三条假设就成了:

（1'）所研究的该曲边梯形的面积存在。

（2'）近似多边形的面积收敛于该曲边梯形的面积。

这里，以前的三条假设变成了两条，这是因为从（2'）能证得（2）和（3）。从直观上看，（2'）是很显然的，不过结合下述的（2"）和（3"）并由该被积函数的（一致）连续性，可以这样证明：

$$\because \quad f_\varepsilon(x)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f_\varepsilon(x)+\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \int_a^b f_a(x)dx-\varepsilon(b-a) &\leqslant \int_a^b f(x)dx \\ &\leqslant \int_a^b f_\varepsilon(x)dx+\varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

于是，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)dx=\int_a^b f(x)dx。$$

这样，假设又变成：

（1"）所研究的该曲边梯形面积存在。

（2"）可以用一个阶梯函数或者一个分段线性函数来逼近连续函数 f，其逼近程度可以达到任意小的正数 ε。

（3"）如果对一切 $x\in[a,b]$，都有 $g(x)\leqslant f(x)$，则 $\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)dx$。

直到现在，我们都假设所给函数的积分是存在的。

由此可引出积分值、积分性质，并将积分视为一个极限。那么在教学中，我们是对它加以证明，还是待学完后仍作假设呢？翻阅一下大学微积分教材就会发现，它们用的是一种全新的方法，即用一列较低的阶梯矩形和一列较高的阶梯矩形从两头来逼近该曲边梯形，分别计算较低的阶梯矩形面积之和与较高的阶梯矩形面积之和，得到一个下和与一个上和。随着分割的间隔缩小，可获得一系列的阶梯矩形，这样，可得到一列下和与一列上和，这列下和有一个最小的上界，这列上和有一个最大的下界。由于 f 在 $[a,b]$ 上是连续的，所以它在 $[a,b]$ 上是一致连续的。于是，上述的最小上界与最大下界相等，这个公共的值就定义为 f 在 $[a,b]$ 上的积分值。像这样巧妙的构思不是学生所能想到的，因此，我认为在中学里严格证明连续函数的可积性是不明智的。

与此类似的还有牛顿-莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式，如果已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)=F'(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。我们曾在本章一开始由函数 F 的一致可导给出了这一公式的直观证明，当然，它成立是有条件的，即 F 的导数 f 是连续的。我曾指出过，“正确的”可导概念是一致可导，这是最常用的。但是，连续可导和一致可导之间的等价

关系不容易证明,它无论如何也不能成为中学的教学内容。但有一种解决办法,设 $f(x)=F'(x)$,且 f 是连续的。若允许假设存在,就不难证明 $G'(x)=f(x)$,于是得这样唯一留待证明的是 F 和 G 之差为一个常数,即证明当函数 H 的导数为零时,H 是常数,而这可用中值定理证明。若用我多次提倡的原理,即把连续理解为一致连续,把可导理解为一致可导,那就简单多了。若 H 在 $[a,b]$ 上是这个意义下可导的,其导数为零,则对每一个 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,对所有满足 $0<h<\delta$ 的 h,和所有在区间 $[a,b-h]$ 中的 x,有

$$\left|\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\right|<\varepsilon。$$

选择适当的 n,使 $h=\dfrac{b-a}{n}<\delta$,并用分点 x_i 把区间分为 n 个相等的部分,其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,得

$$\left|\frac{H(x_{i+1})-H(x_i)}{h}\right|<\varepsilon,\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$|H(x_{i+1})-H(x_i)|<h\varepsilon \quad =\frac{1}{n}(b-a)\varepsilon,$$
$$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

相加得

$$|H(b)-H(a)|<\sum_i|H(x_{i+1})-H(x_i)|<(b-a)\varepsilon,$$

它对任意小的 ε 都成立，于是 $H(b)=H(a)$。而它又对所有的小区间端点都成立，于是证得 H 为常数。

总之，如果中学微积分一定要超出直观的范围，从整体上去组织内容，那么至少要不加证明地承认可将连续视为一致连续，将可导视为一致可导。如果这样的话，连续函数的可积性、导数与积分之间的相互关系就可毫无困难地引入了。如果要将连续概念形式化，就必须在一个符号逻辑范围内好好地进行。

中学微积分的发展——关于三角函数

我们在讨论对数函数时，由它的导数给出了它的定义，接着利用反函数的求导法则得到了指数函数的导数，最后利用复合函数的求导法则解决了幂函数的导数，这与微积分体系结合得很好。但三角函数的情况就不同了，我们以前都是用几何语言定义正弦函数和余弦函数的，某角的正弦值和余弦值是用图形给出的，而角的大小则是用量角器度量的，这就很难恰当地将它们嵌入微积分体系。当然，如果将三角代数化，即引入一个函数 ω，它是一个从模为 1 的复数乘法群（或绕原点的旋转群）到以 2π 为模的实数加法群上的同态映射，就可使三角与微积分联系起来。

也许有人会问：为什么要以 2π 为模？或者更进一

步问:什么是 2π 呢?直到现在 2π 还是用来表示一个周角的大小,即 $360°$。以 2π 为模是因为,在度量一个角的时候,用该角在单位圆上截得的相应弧长来度量很方便,而单位圆的周长是 2π,你马上会发现用弧长和度量角与微积分有关。到目前为止,我们只是从几何中知道什么是弧长,而不管如何形式地定义弧长。有一点可以肯定,当弧长趋于零时,弦长与弧长之比趋于 1,于是在单位圆(图 17-14)中有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1,$$

$$\therefore\quad \left.\frac{d(\sin x)}{dx}\right|_{x=0}=1。$$

用单位圆弧长度量角可使正弦函数在 $x=0$ 处的导数值为 1,这是微积分中用单位圆弧长度量角的一个重要原因。

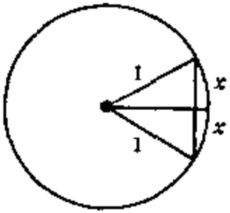


图 17-14

函数 ϖ 的反函数 f 的表达式是 $f(t)=\cos t+i\sin t$,它是从实数加法群(不限于以 2π 为模)到模为 1 的复数乘法群上的同态映射。于是实数可以理解为“旋转”的角度。那么,f 是否满

足：角度从 $t_0=0$ 转到 $t_1=t$，对应单位圆上从 $f(0)$ 到 $f(t)$ 的弧长恰好是 t 呢？要知道迄今为止，我们一直默认着一个必要的条件，即弦长与弧长之比趋于 1。

为了解决这个疑问，首先要知道什么是曲线的弧长。一种方法就是将它定义为当内接折线所有边长都趋于零时的该内接折线长度的极限。如果平面曲线的方程是 $x_1=f_1(t), x_2=f_2(t)$，那么，从 t_0 到 t_1 的弧长就是 $\int_{t0}^{t1}\sqrt{f_1'^2(t)+f_2'^2(t)}dt$。现在将 $f_1(t)=\cos t$, , $f_2(t)=\sin t, t_0=0, t_1=t$ 代入弧长公式，可求得弧长是 t，这就是说，f 的确满足我们的要求。

现在，尽管我们还没有用算法形式表示三角函数，但它们已完全脱离了几何这一出发点。上述的同态映射 f 所扮演的角色犹如一个指数函数，只是当自变量为实数时，它取（单位圆上的）复数值。于是我们把它与熟知的函数 $y=e^t$ 联系起来，$y=e^t$ 的展开式是 $e^t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$，且当 t 为复数时也成立。而同态性质也可拓广到复变量，因此函数是从复数的加法群到非零复数的乘法群内的一个映射。如果在

$$e^{t+\bar{t}}=e^te^{\bar{t}}=|e^t|^2$$

中，t 取纯虚数值，则 $t+\bar{t}=0$，从而得到 $|e^t|^2$。这就是说：虚轴被映射到单位圆。于是

$$g(t) = e^{it}$$
就定义了一个从实数的加法群到模为 1 的复数乘法群内的映射。这种同态是由一个实数加法群的保序自同构确定的。函数 $f(t) = \cos t + \sin t$ 正是这样一个同态。在 $t = 0$ 处,f 和 g 有相同的导数 i,所以 f 与 g 相等,即
$$e^{it} = \cos t + i \sin t。$$
有了这个公式后,我们就可以用无穷级数来表示正弦函数和余弦函数了。

以上我们只是粗略地介绍了一种将三角学与微积分联系起来的方法,它能加深学生对角概念的理解,而且所涉及的知识和方法似乎也比现行教学中的许多东西更有价值。

中学微积分的发展——体系之外的知识

前面我提出了许多对中学教学既有意义,又有教育价值,而且能够从整体上加以组织的微积分专题,并简要介绍了如何才能使它得以实现。当然,是否应该这样做取决于微积分这门课实际的教育目的。现在,我想谈谈那些无法归入任何体系,但却可以在中学内教的专题,比如我在本章“更广意义下的图象的途径”一节中所谈及的所有专题:借助截面面积的积

分求体积（尤其是旋转体的体积）；表面积作为体积的微商；旋转体的表面积等。当时，体积和曲面面积都是在未加定义的情况下就开始计算的，或者说，这些关于面积、体积的求法都是在面积这个模糊概念的基础上进行的。这样做虽说不很严谨，但毕竟是一条有效的学习途径。想当初，阿基米德（Archimedes）也是在未给出面积严格定义的情况下计算出天体表面积的，为什么我们的中学生不能像他那样去做呢？其实，这就是数学的局部组织化。除了这些例子外，我还举过速度、密度、梯度等例子，它们也有类似的问题。还有一些概念，例如运动、力、压力、张力、振动、电流、悬链线等，我们根本就无法把它们归入任何数学体系，即使是将它们归入物理体系，也是一项还无人敢问津的艰巨工作。比如悬链线，它是由一根极细的绳子两端固定所形成的曲线，这根细绳要有弹性，但不能伸长，该怎么定义它呢？所以一切从公理出发是行不通的。不久前，有人试图用提高严谨性来改进微积分教学。但我认为，要改进中学微积分教学只有一个办法，那就是尽量把它和现实联系起来，如果抽象的内容不联系实际的话，在学生眼里，它只能是一堆散乱而毫无价值的东西。

第十八章

概率和统计

我认为概率是应用数学的一个典型,不管对应用如何理解,要成为数学,它就必须紧密联系现实并自身充满联系。有许多人不同意这一观点,他们甚至害怕现实会对数学构成威胁,我面前就有一本给朝气蓬勃的 14 ~ 16 岁学生写的“绝对纯洁”的教科书。该书作者说:概率教科书都喜欢用非数学的东西,比如钉板、骰子,轮盘赌、顾客的到达、掷硬币、赌博、偶发事件、无法区别的物品,等等。许多学概率的学生是被这些东西和措辞(如怎样去赌博)吸引住的,而另外一些学生则被这些东西弄糊涂了。有时,这些东西不仅出现在例子和问题中,还出现在定理和证明中。当然,这样做并非一无是处(它增添了概率论的魅力),这些东西可以容易地用来充当描述数学对象的语言,比如借用这些名称来命名特殊的有限概率空间(或更一般的概率空间)。然而,对初学者来说,把概率的数学理论和现实世界明确地区分开来也许才有利。比如,对“掷一枚匀称的骰子”这句话,就应该清楚地

表明是想要描述一项现实世界中的活动,还是想要描述一个特殊的有限概率空间。我曾花了很多笔墨去说明学生应该学会区分数学和现实,它将有助于学生更好地理解数学与现实。但是,教师不该把它们分割开来教给学生;应等到数学和现实在学生头脑中有了较强的联系,不会因分割而使任何一方受损的时候,让学生自己去学习分割。总之,像上述引文中那种在学习刚开始就将它们截然分开的做法是错误的,毫无疑问,初学者不应学习一种在现实中不起作用的孤立的数学。这些原则已在算术教学中得以充分证实,对概率的教学也同样适合。上述的那位教科书作者说:有些人会被联系现实弄糊涂,但是请问:对为什么除数不能为零、为什么乘法是从右边开始而除法是从左边开始、为什么不是所有的函数均为线性的、为什么 $a^m a^n = a^{m+n}$ 而 $(a \cdot b)^n = a^n b^n$ 有些人也弄不清楚,而我们却在教呢?几乎不容怀疑,如果学生学的是人为的孤立的数学,他们就不会喜爱充满联系的数学,因为他们无法借助形式规则来掌握它,而它却要求他们能通过自己的活动来理解,迁就于那些一联系现实就弄不清的人的教学是糟糕的教学,而更糟的教学是让其他人也陪着去迁就的教学。

老实说,我相信,促使教师去写,去教脱离现实的

概率演算的根源,既不是数学与现实要分离的原则,也不是要顾及一部分学生的特殊困难,而是他们错误地理解数学的严谨性,害怕一旦离开纯形式体系的道路就会犯错误。大多数数学家在他们的教学生涯中都曾有过这样的苦恼。在这方面,上述那位教科书作者是说对了,在许多概率教科书中,非数学的东西只不过是披在纯数学身上的一块遮羞布,在用现实的东西引起一些兴趣之后,作者马上进入了数学形式体系的安全区,而把现实赶到例子和问题这一隔离区里,以免危及数学。而他做得更彻底,一开始就让数学和现实截然分开,令现实不得以任何伪装出现在数学之中。但这就产生了一个问题,即既然数学有那么多有趣的领域,为什么还要教概率呢?

应该指出,概率所需的形式化的数学极少。只要你懂得分数,就可学习相当深的概率。再加上一点代数,就能在一般意义下形成概率的一些原理。相当长的一段时间内可以不用实数和微积分的理论,而一旦你能够用一点这种理论,那你就能领会概率中相当深的概念,至于更深的概念还从来没在中学里教过。若将概率公理化,那它是数学中迄今为止最简单的公理体系。应用概率于现实就像应用算术那样直接,不必借助于深奥的物理理论,只要用模型的方法就可以了,

这是人人都一学就会的。用如此简单的数学就能得到概率中如此丰富的结果，这是学生喜欢数学，喜欢概率的一个重要原因。数学家在向人们解释什么是数学的时候，也经常列举概率中的有趣例子。这里就有两个有趣的问题，据说是骑士德·梅雷（*de Méré*）向帕斯卡（*Pascal*）提出的：

德·梅雷喜欢赌博，他根据以往的经验，发现将一枚骰子接连掷四次，至少出现一个6这件事发生的可能性是比较大的。于是他认为，将一对骰子接连掷二十四次，至少出现一对6这件事所发生的可能性也是比较大的。可是，实际情形并不如此，他向他的朋友帕斯卡抱怨说：颠倒黑白的数学欺骗了他。

帕斯卡回答说：掷一枚骰子出现一个6的概率是 $\frac{1}{6}$，不出现6的概率是 $\frac{5}{6}$，掷四次均未出现6的概率是 $\left(\frac{5}{6}\right)^4$，掷四次至少出现一个6的概率是 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.516$，比 0.5 略大一点。类似地，掷一对骰子不出现一对6的概率是 $\frac{35}{36}$，掷二十四次至少出现一对6的概率是 $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491$，比 0.5 小。从

数学的法则和正确的推理来看，德·梅雷是要输钱的。所有诅咒数学的人都将受到惩罚！

德·梅雷的另一个问题是：A、B 两人约定对弈，两人取胜的机会相等。每赢一盘棋，胜方得 1 分，积分先达到 5 分者为最终胜利者。正当他们玩得高兴时，突然发生了意外，对弈不得不中止，这时 A 的积分为 4 分，B 为 3 分。问 A 获胜与 B 获胜的机会之比是多少？有人说是 $4:3$，也有人说是 $(5-3):(5-4)$，谁说得对呢？帕斯卡回答说：都不对。假设继续进行两盘比赛，那将会有四种可能的结果：

A 赢，　A 赢；

A 赢，　B 赢；

B 赢，　A 赢；

B 赢，　B 赢。

这四种可能中有三种将导致 A 先达到 5 分，只有一种将导致 B 最终获胜，因此，A 获胜与 B 获胜的机会之比是 $3:1$。

向受过普通教育的人解释什么是数学的例子还有很多，我之所以选择了这两个，一是因为它们和现实的关系很密切，不抽象；二是因为它们指出了数学教学中存在的一个大问题。德·梅雷当然是一个有文化的人，他无疑学过数学，但在他必须运用数学的时候

却立刻陷入了困境,他不会应用。在第一个问题中,他用了他所知道的比例运算法则 $(6:4=36:24)$;在第二个问题中,他看到三个数据要在两个人中分配,就推测一定是 $4:3$ 或 $(5-3):(5-4)$。可怜的德·梅雷,若是他根本没有学过数学也许会赌得更好些,如果那样的话,他就可以运用出于不得已而自己创造的数学了。

德·梅雷不只是一个历史人物,今天,学过数学而不会应用的可怜的当代德·梅雷还在不断涌现。

从数学和教育的角度看,要解决德·梅雷的问题最要紧的是什么呢?不是获得答案所需的现成的数学,而是为了得出答案而必须重新发现或再创造的数学。的确,在历史上,这两个问题是由帕斯卡解决的,但历史不是一顶旧帽子①。每个人都有他自己的历史,都会遇到这种新的,从未听说过的,也未曾解决过的问题。最漂亮的概率演绎体系也无法保证学生学了之后就能应用,不是吗?有些学过概率的人也会和常人一样认为两个人的生日是同一天的概率比任选一人的生日是七月十二日的概率要小,或者认为五十个人的集体中有两人的生日是同一天是不大可能的,甚至经

① 作者意思是我们应当以历史为鉴,而不应将历史视作一顶旧帽子,一扔了之。

验丰富的概率统计专家在估计概率的时候也可能出错，例如，当初孟德尔（Mendel）用豌豆做基因实验时，就曾受到概率统计专家们的指责，此外还有一些类似的似是而非的问题。这些事例告诉我们，在应用概率的时候一不小心就会出错。如此说来干脆就把概率和现实截然分开，丢掉那些现实的东西，问题不就解决了吗？但人们越来越需要应用概率。如果我们不理睬应用时的这些麻烦，那么概率教学的目的又是什么呢？

就连专家们也会出错，可见学概率是不容易的。但这并不意味着我们无法将困难的知识变为容易接受的知识。数学本身不就是一种使事物变得简明的艺术吗？为此，我们要发展数学的一般思维模式，并把它们用公理的方法组织起来。在这方面，我们的工作还做得不够好。这些模式中的绝大部分我们只是在无意识地运用，并没有彻底地认识它们。这些思维模式在对现实情境的数学化中也存在，然而却从未有人想过如何将它们公理化和形式化。这些模式我们也称之为战术与战略。看来想不提及应用，便把它们归入纯数学范围是无益的。只有在重新发现、模仿、运用、并向别人解释和自己的尝试中，才能掌握它们。当然，提醒人们注意某些隐晦的细节可以避免错误的发生，但

在提出注意事项之前让他们先尝试一下错误，效果会更好。

目前，教师总是试图通过让学生记住法则来避免出错。数理统计是关于如何应用概率的理论，它研究如何用样本去估计概率。令人惊异的是，这一可让思维自由驰骋的数学领域却被处理成一个尽是僵死法则的体系，供自然科学和社会科学学生使用的数理统计教科书多数带有这种菜谱式的特征。不管学生是否理解，就把方法和公式往学生的脑袋里装，好在脑袋比胃能容纳更多的东西。搞错了的菜谱很少会重复使用。可被误用的，不相干的数学，除了要给出一个令人不满的分数作为回报以外，多半还会使学生毕业后不会再去应用数学。

我提到的有些数学应用往往是很肤浅的，在社会科学、心理学和教育学中，认为把有关的数据资料收集起来，再用数学方法处理一下就是应用，有这种看法的人极为普遍。这些学科的一些实验在设计时，不考虑所列的参数是否有关，也不考虑是否还遗漏了更重要的参数。比如，有人曾做过一项实验，目的是要找出在解文字题中起作用的因素（如关键词，单位换算，数的运算等），经别人建议，他又加进了“重复”因素，即重复地解相同运算的问题。最后，经统计学的

因素分析才得知,重复因素是其中起主要作用的最重要的因素。如果当初他没有考虑这个因素,那么尽管他使用的是科学的因素分析方法,也只能得出错误的结论。

这里,我们已大致描绘了两种教学流派:一是视概率为一种与现实完全没有联系的抽象体系;二是视其为留待填入数据的关于计算模型的体系。从表面上看,这两种流派是对立的,而却以最自然的方式互相补充。如果把应用当作抽象理论的附加物来教,那么除了采用菜谱式的体系外就别无选择。这两种流派甚至能够不可思议地出现在一本教科书里,即理论和问题交替出现——问题用来说明实际运用,理论使人问心无愧。有本事的教师会跳过理论,通过解例题来演示数学方法的运用。

我曾多次指出,学习数学化对于学生很重要。可惜,即使是基本上同意我的人,当涉及概率时也仅仅是口头上响应,并无实际行动,更不必提那些将概率置于集合论与测度论背景下的人了。其实,教概率是我们向学生说明如何数学化,如何应用数学的最好机会,而且恐怕还是算术之后的最后一次机会了。我喜欢概率,也为大学新生上过概率课,但我极其反对在中学里教概率,因为我担心它会被糟蹋了,就像许多

已做过的试验所表明的那样。我知道,许多概率学家和统计学家也同意我的看法。

下面,我想谈一点我自己教概率的体会。虽然这是从大学教学中得来的,但或许对大学前教育也有用。

我认为,大学教概率的目的是要让学生体会数学的广泛应用性,要使学生的应用能力有显著提高。因此,上这门课时,我从来不从概率的定义讲起,这就像我们教几何时不必从解释什么是“点”开始一样。因为,所有的概率问题都可化为赌博问题,所以,我总是从举几个概率的例子开始,但我现在觉得即使这样也不好,这是我在参加了一个初等数学教育周末讨论会后意识到的。当时我们讨论的内容是如何为10~11岁的小学生设计一堂课的教案,课题是“赌赛马”。所谓赌赛马就是让参加赌博的人先填好一张赛马成绩预测表,该表上有十三条横格对应着十三场比赛,有三条竖格对应着赢、输和平局,然后,按照一种固定的模式,在全猜对、只猜错一个、猜错两个的人中分发赌金。欧洲的小学生对赛马赌金计算是很熟悉的。

这节课自然是由教师问学生什么是赌赛马开始。下一个问题是什么呢?有人提议可以问“某人随机地填表却完全正确的概率(或机会)是多大?”但这不好。经过一段不太成功的努力,最后我们决定完全放

弃使用“概率”“机会”“随机”这些词汇，让教师要求每个学生画一张赛马成绩预测表，并填写表格，填好后与教师事先填好的那张对照，完全一致的为中奖者。当然，很可能是没有一个学生中奖，于是教师就问：“如果我们班有一百名学生，那么在我们中间是否有可能有一人中奖？如果有一千名学生，一万名学生，情况又如何呢？”由于这一年龄的学生对赌赛马很有经验，因此他们会一直等到教师说一百万名时才回答有。下一步，数学味要更浓一些，应讨论只有一场比赛、二场比赛、三场比赛……的赌赛马问题。最后，要学生发现十三场比赛结果全部猜中的概率的含义是什么。

这次讨论会对我的启发很大。如果明年我还教概率的话、我会仿效这一做法，从德·梅雷提出的第一个问题开始，或索性从引出这个问题的经历开始。我将首先问学生：“必须将一枚骰子掷多少次，才能使至少出现一个6这件事有百分之五十的可能性发生？”我以前也曾问过这个问题，但那是在第一节课结束时问的，学生常常回答说是三次。若是明年学生还这样回答的话，我就和他们一起做试验，将一枚骰子掷三次，记下出现的三个数字，然后重复数次，记下相应的数据。从这些数组中挑出至少有一个6出现的数组，试

验结果将否定学生原先的猜想,这种数组只在总数中占很小的比例。之后,我将问学生是否还要继续这个试验,等学生确信掷三次是不够的,不必继续试验之后,我们将开始计算掷一次、二次、三次……至少出现一个 6 的概率,于是得到表达式

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\cdots$$

其间,为了使计算简便,要用到逆事件的概率公式,我将先让学生熟悉如何将一个语句改为等价的否定句。如将语句“至少出现一个 6”改为它的等价否定句“不是没有一个 6 出现”。众所周知,在概率中,这种转化等价语句的技能是很重要的。有了这些准备知识以后,德·梅雷的那个掷一对骰子的问题就变得很简单了。

之后,我通常要问一个问题:这里的必须掷四次能否改为同时掷四枚骰子?如果可以的话,那么至少出现一个 6 的含义又是什么?传统课程往往忽视表明一个事实,即概率中的同一个问题常常可以化为多个实质相同但外貌不同的问题。为了使学生了解概率的运用,应多让学生练习如何识别问题的实质,这种识别能力不是从形式定义中可以学来的,而只有通过实践才能获得。你不妨做一个试验,随意找一个人,问

他:“随机挑选一个人,他的生日正好是六月一日的概率,和随机挑选两个人,他们的生日正好是同一天的概率,这两个概率哪个大?”如果他的数学经验不多,那么他会说后一个概率要小一些,但奇怪的是如果你再追问他:“掷一枚骰子出现 6 的概率和掷一对骰子出现一对相同数的概率,这两个概率哪个大?”他却会脱口而出:“一样大。”要使他明白如果不考虑数字上的差别,这两个问题是同构的,你还得费些口舌才行。

简单的组合论是初等概率的主干,这一点在我们的概率教学中不应忘记。在简单的组合问题中出大错是很普遍的现象。组合问题的一个特点就是所用到的数学极简单。因为这种问题通常都不是用数学语句描述的,所以要做的最基本的事情就是把问题数学化,而这恰恰是我们以及国外中学在以往教学中极不重视的。困难主要在于一个同构的数学问题可以有那么多不同的外貌。

从两个基数分别为 m、n 的有限子集 A、B 中取出两个元素构成有序对 (a,b),这神有序对当然共有 $m\cdot n$ 对。若 A 与 B 不交,则它们的并集含有 $m+n$ 个元素。这是极为简单的。但如果构造和辨认集合的积和并没有系统地学过,那么上述两个结论只不过是无用的抽象理论罢了。例如,有三间客房,每间客房

有两张床位。现安排三对已婚夫妇去住,要求丈夫和妻子住一间房,两人各睡一张床。问有多少种安排床位的方法。学生们会马上说:首先,将三对夫妇安排在三间客房有 $3! = 6$ 种方法,然后,安排住在第一间客房夫妇的床位又有两种方法,第二、三间的床位也各有两种安排方法,所以总共有 $6+2+2+2=12$ 种方法,答案是 12 种方法。如果这是大学生给出的解答,那么这多少甚至相当程度上要归咎于中学数学教学。我要声明,如果新数学如同我在大量教科书中所看到的那样,那么我对它在这方面的改进并不抱太大希望。在学习简单的组合论方法中所产生的教育问题,并不能通过教集合论来解决,而应让学生去解决组合论方法起主要作用的复杂问题。这种问题在概率中随处可见,在其他领域中也大量存在。

我在讲大学一年级的概率课时,把各种组合问题系统地、逻辑地联系在一起。我从著名的哥尔登(Galton)钉板问题开始,这是一块标有数码的等边直角三角形钉板,最上方的 0 行有一个钉 0,下一行(1 行)从左至右有两个钉 0,1,再下一行(2 行)从左至右有三个钉 0,1,2,依此类推将几个球从最上方的那个钉处落下,经过反弹,它们以相等的概率到达第一行的两个钉处,又遭反弹,转向第二行的钉子。于

是，在钉子的反弹作用下，球沿着“之”字形路线在钉子的缝隙间穿行，直至到达底部的那一行。我没有用钉板进行演示，但学生们凭常识都能理解大多数球最终将落在中央，只有极少数球会落在两边。接着，我粗略地绘出球的分布曲线，说明以后将对它作更详细的讨论。

为了从数学上去发现球的分布状况，我们想象球在下落过程中，每遇到一个钉子便自动地分为两个与原球完全相同的新球，新球又继续往下落，遇到钉子又一分为二，如此一直继续下去。记下经过每一个钉子的球的个数，得到的恰是帕斯卡三角形。我们把经过第 n 行第 k 个钉子的球的个数记为 $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$，则帕斯卡三角形就可以由 $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$ 来递归定义，当然，其中的 n 和 k 还要满足一些约束条件。于是可很容易推出

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad 和 \quad \sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = 2^n。$$

前面提到了“之”字形路线，其实长度为 n 的“之”字形路线相当于球在下落过程中作了 n 次左或右的选择，或者说相当于一个从集合 $\{1, 2, \cdots n\}$ 到集合

$\{$左$,$右$\}$ 上的映射 Φ, n 次选择中有 k 次选了右, 则 "之"字形路线必在第 n 行第 k 个钉子处中止,即

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \text{“右”有}k\text{个原像的,从}\{1,2,\cdots,n\}\text{到}\{\text{左},\text{右}\}\text{的映射个数。}$$

如果"右"的原像集给定的话,那么这条"之"字形路线也就完全确定了,于是

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \text{从}\{1,2,\cdots,n\}\text{取出}k\text{个元素所构成的子集个数。}$$

通常,我们称这样的子集为"从 n 个元素中取出 k 个的组合",如果这种取法与顺序是无关的,那么数学上可称之为"从 n 个元素中取出 k 个构成一个子集";如果是与顺序有关的,则称之为"从 n 个元素中无重复地选取 k 个元素构成一个子列,即作从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 到所给 n 个元素集合上的一个一一映射"。显然,这种映射的个数是从 n 个元素中取出 k 个的子集个数的 $k!$ 倍。我认为,用子集和子列,即借助集合和映射的语言来区分排列与组合这两个概念是有益的。可以说,组合是中学数学中运用映射最合适的课题。

学完组合转入概率, 首先遇到的重要概念就是独立事件、不独立事件和条件概率。依我的经验, 如

果不从公理的途径而用大量的例子加以说明，这几个概念学生还是比较容易接受的。我是这样介绍独立与不独立事件的：假设有一个装有从 1 到 1000 这一千个数字的口袋，已知从中抽取的数能被 4 整除，那么这对抽取的数也能被 10 整除的概率有多大影响？即在 $x \in B$（这里集合 B 是 4 的倍数所组成的集合）的条件下，对 $x \in A$（这里集合 A 是 10 的倍数所组成的集合）有多大影响？如果没有影响，即 $P(x \in A|x \in B) = P(x \in A)$，则 A 就定义为与 B 独立。否则，计算条件概率的公式为

$$P(x \in A|x \in B) = \frac{P(x \in A \cap B)}{P(x \in B)}。$$

现在，判别 A 和 B 是否独立就变为考察等式 $P(x \in A \cap B) = P(x \in A) \cdot P(x \in B)$ 是否成立了。这个判别法则在 $P(x \in B)$ 的况下也是适用的，而且它表明 A 与 B 之间的独立关系是对称的。

这不过是介绍这些概念的途径之一。依我的经验，了解独立性和条件概率之间的密切联系有助于加快学生对它们的理解。那些喜欢追求体系的人总是把它们割裂开来，并以不独立为出发点，我却愿一如既往地强调广泛的联系。然而我也承认，我在这个课程中

没有用很复杂的例子去分析条件概率,而是反复提及独立性。

从已知 A 和 B 是独立的,我们还可以得到 $P(x \in \overline{A} \cap B) = P(x \in \overline{A}) \cdot P(x \in B)$ 等,即 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都是独立的。设 $P(x \in A) = \alpha, P(x \in B) = \beta$,若用表格表示 $P(x \in A \cap B)$、$P(x \in \overline{A} \cap B)$ 等的话,就是

	A	$\overline{A}$
B	$\alpha\beta$	$(1-\alpha)\beta$
$\overline{B}$	$\alpha(1-\beta)$	$(1-\alpha)(1-\beta)$

这张表可以用(下雨,预报下雨)对应值(是,是),(是,否),(否,是),(否,否)来说明。我们当然希望概率都集中在主对角线上,而右上角和左下角的数字为零,这样,就可完全信赖天气预报了,这是下雨和预报下雨完全不独立的情形。事实上,这很难实现。我们通常只能要求这两个数字充分地小,非常接近于零。另一个极端是下雨和预报下雨完全独立的情形,这时,天气预报就完全失去了作用,不管是否预报下雨,下雨的概率都是一样的。

学生在遇到判断天气和天气预报之间,父、子身高之间是否独立的问题时,常会通过收集、整理数据,给出最终判断。但遇到简单的问题,如掷一对骰子,两个

骰子的读数之间是否独立的问题，却往往只凭直觉，跳过分析阶段，直接进入综合阶段，在还没有经过很好分析的情况下就直接认为它们是独立的，并使用起概率乘法规则 $P(x \in A \cap B) = P(x \in A) \cdot P(x \in B)$。虽然，这样做常常很有效，也只有那些刻意追求体系的人会反对这样做，但教师不应让学生停留在这个仅依赖于本能的水平上，而要引导他们作更为深入的思考。比如再把这个问题改成两枚骰子是由一根长线或一根短线相牵连的情形，这时，学生就不得不通过观察概率来看使用概率乘法规则是否合理了。

如果我们打算将概率以某种方法同现实联系起来，那么就必须明白地指出独立性的巨大作用。为此，学生必须知道什么是独立性，当然，这不能在一个公理体系下进行，也不能依靠数学化的系统来阐述，而应尽可能地联系现实，否则就会造成很多困难。

有一个问题每届学生的解答总不能使我满意，这个问题是这样的：一个口袋中装有四个数 1，2，3，4，随机地逐个取出，按取出的先后次序排列，若有一个数字在正确的顺序位置上就奖 1 分，比如，取出的次序是 3214，因为 2 和 4 是在正确的顺序位置上，所以奖 2 分。求这样奖励的数学期望是多少？我发现，学生总是先列出 1，2，3，4 这四个数的所有排列，标明每种

排列可得的奖分,然后求得奖分的总和是 24 分,再用公式计算得数学期望是1 分,这一答案是出乎他们意料的。有没有更简便的解法呢? 当然有! 在二十四种排列中,1 排在第一位 $(x_1=1)$ 有六次,同样 2 排在第二位 $(x_2=2)$、3 排在第三位 $(x_3=3)$、4 排在第四位 $(x_4=4)$ 均有六次。以前我还证明过随机变量之和的数学期望公式

$$E\left(\sum_1^n x_i\right)=\sum_1^n E(x_i)。$$

在证明时,强调过无论随机变量之间是否独立,该公式都成立。但没有一个学生想到把它用于四个虽不独立却等可能地取 1,2,3,4 值的变量 x_1,x_2,x_3,x_4 上,也没有人想到用

$$奖分\ y_i=\begin{cases}0, & 当 x_i\neq i;\\ 1, & 当 x_i=i\end{cases}$$

来计算所求的 $E(y_1+y_2+y_3+y_4)$。

在我把学生的注意力引向这个一般定理时,学生反对说,这里的随机变量之间是不独立的。我让他们回忆这个定理的条件和证明,他们总算是同意用了,可内心的疑虑并未完全消除。大多数学生仍不相信逻辑告诉他们的事实——这些只是大脑的推理,与心无关(帕斯卡的著名格言)。

经验告诉我问题出在教学上，我不该从一般的定理出发，而应从一、二个具体例子着手，用例子中的特殊情况来验证定理，然后再加以一般证明。归结一下所有的排列，显然1排在第一位，2排在第二位，3排在第三位，4排在第四位均有六次。把这稍加一般化，就是完整的证明了。在这个例子中，独立性显然是无关紧要的，一般证明中的字母和公式只会掩盖这一事实。现在我采取了新方法，并取得了完全成功。例子比一般证明更能说服人，只有领会具体例子的人才会理解一般证明。学习一般证明根本不能保证定理的应用，相反，过早地学习定理的一般证明只会使学生连最简单的应用也搞不清楚。

当然，对方差用加法法则需要假设随机变量相互独立，对此，前面的例子可以用来加以说明。对方差加法法则的处理，我的做法和统计学家们的有点不同，我强调根方差（方差的平方根），讲根方差按毕达哥拉斯（Pythagoras）式相加，即

$$\begin{aligned} D\Big(\sum_{1}^{n} x_i\Big) &= \sqrt{n}D(x), \\ D\Big(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i\Big) &= \frac{1}{\sqrt{n}}D(x)。 \end{aligned}$$

这个公式不仅漂亮，而且恰好准确地刻划了根方

差的特点,人们称之为 $\sqrt{n}$ －定律。其实,强调方差只不过是统计学家的一种癖好。在自然科学方面的应用中,根方差才是有用的概念。

在自然界中无论概率用于何处 $\sqrt{n}$ －定律都是很有用的。可是,有些教科书作者从未注意到这一点。我认为,学生在数学课上就必须学习和领会它,不必等到将来他们念理论物理或实验物理时才学。许多数学家不同意我的看法,他们说数学期望和根方差只不过是一个分布的两个参数,应该尽快地进入傅里叶(Fourier)变换或者一些特殊的分布这种高一级的领域。在统计或科学中运用过概率的人恐怕都知道,在很多情况下,仅这两个参数就蕴含了一切有用的,有时甚至常常是一切有关的信息。我们用这两个简单的工具能做很多事。

毫无疑问,在有限根方差条件下的大数定律是较为先进的概率基础知识,它的证明很容易,这再次说明了数学期望和根方差的重要性。大数定律是通向统计推断原理的最佳出发点,比更有用的,但也更复杂的中心极限定理要好。因为只有在学生理解了它以后,才适合教正态分布和中心极限定理,当然,它们的证明可以略去不教。为了解释中心极限定理,我想回到哥尔登钉板的问题上去。它反映了 n 个独立的,且

与总体 x 同分布的随机变量 x_i 的和的情况，其中 x_i 取值 0 或 1 的概率都是 $\frac{1}{2}$。从哥尔登钉板上球的最终排列表明，变量 $\sum x_i$ 应该减去它的数学期望 $\frac{n}{2}$，即钉板底线的中点应作为尺度的原点。为了使其收敛，很自然地要将 $\sum x_i-\frac{n}{2}$ 除以 $\sum x_i$ 的根方差 $\frac{1}{2}\sqrt{n}$，即尺度缩减的因子。那么，变量 $\dfrac{\left(\sum x_i-\frac{n}{2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$ 的分布是收敛于正态分布的，就像哥尔登钉板图片上所画的正态曲线。然后，我也许要告诉学生，正态律不仅适用于哥尔登钉板问题，而且还适用于大量随机变量的和。

如果时间允许的活，我还想给学生讲一些对策论（博弈论）和随机过程。它们也适合放入中学概率课中去。这两个领域有着取之不尽的漂亮例子。下面我想举一个对策论中的例子：

A 写下 1，2，3，4，5 五个数字中的一个，让 B 来猜。假设 A 写下的是 i，B 又恰好猜中 i，那么 B 就赢 i 分；如果 B 没有猜中，则 B 得 0 分。A 和 B 应采取什么策略呢？

显然，如果 A 写了很多次 5，那么他就可能输掉很多 5 分；如果他不写 5，而 B 又注意到了这一点，那么 B 就不会猜 5，而只猜 1，2，3，4，以增加获胜的机会。概率中这种进退两难的问题早在 18 世纪初就为人们所熟知了，最后是用冯·诺依曼（von Neumann）所发现的极大极小原理来解决的：A 能够做到让 B 得分的数学期望的最大值达到最小。用下面的例子来解释这一原理会更简单些。

随机过程的原理都可以用简单的游戏来解释。教随机过程有一个好处，就是为以后练习矩阵运算创造了良好的机会。

概率与其应用联系之紧密已到了要专门用一种理论来述说如何应用的地步了，这一理论就是数理统计。要不要在大学一年级或中学的概率课中讲统计呢？由于统计推断原理容易用一些漂亮而简单的例子来加以说明，而这些例子又不需要概率中的复杂技巧，符号检验或双重二分法就足以解释两种假设模式并作深入分析。因此，把统计推断原理与正态分布联系起来是完全没有必要的，甚至会把人引入歧途。

如果想用复杂些的例子，那么可选下面这个例子：

现有两种缸，一种装着 $\frac{3}{4}$ 的白球和 $\frac{1}{4}$ 的黑球，另一

种装着 $\frac{1}{4}$ 的白球和 $\frac{3}{4}$ 的黑球。这两种缸从外表上看是一模一样的，我们把前一种缸称为白缸，后一种称为黑缸。我面前放着一只缸，要猜一猜它是哪种缸？

当然，我可以从缸中取十次球（取后放回）看看球的颜色。显然若取出了许多白球，我就可以推断那是一只白缸；若取出了许多黑球，那就可以推断那是一只黑缸。但这“许多”究竟是多少呢？从白缸中取十次球，取出 x 只白球的概率是

x=0,1,2	3	4	5	6
0.000	0.003	0.016	0.050	0.146

x=7	8	9	10
0.250	0.286	0.188	0.056

假如我在取出的十只球中发现有七只或更多的白球，于是断定那只缸就是白缸，或发现只有六只或少于六只白球，就断定那只缸是黑缸，那么，我称黑缸为黑缸的概率是 99.7%，称黑缸为白缸的概率是 0.3%，称白缸为黑缸的概率是 22%，称白缸为白缸的概率是 78%。

我究竟采取哪一个策略取决于选择这一策略的后果。例如，假设我付一百美元得到一只缸，若它是一只白缸，我可以出售，并获利十美元；若它是一只黑缸，我将输光本钱。另外，假设每取一只球要付十美分。

按照上述那个策略，如果它是一只黑缸，那么我输掉一百美元的概率是 0.3%，可能损失三十美分外加取球时付掉的钱；如果它是一只白缸，那么我赚十美元的概率是 78%，可能获利 7.80 美元再扣去取球时付掉的钱。最终，我面对的是要么可望获利 6.80 美元，要么可能损失 1.30 美元。我的决策将取决于赌场定下的幸运缸（白缸）和倒霉缸（黑缸）的出售比率。

这些例子可以作许多变化。然而，我不赞成教大学新生或高中生任何数理统计的技巧。我所看到的包含统计的教科书就像是为训练未来统计学家而编的，人们经常以为学了一些统计后就能成为统计学家了，这实在是对数学的很大误会。如果我们给将来不准备当统计学家的人上统计课，那么我们应该培养他们评判的智能，而不应错误地把他们引到高级的技巧上去，这是数学教学的普遍原则。我简直无法理解那些教高中学生很多统计技巧的人的想法，我认为他们的想法对教有意义的数学是不利的。尽管我在教学中，必要时总是尽可能多地使用集合论的概念和术语。但我在教概率时，总是用装有彩票或彩球的缸把概率具体化，所有的概率问题都可以改写成一个关于缸的问题。在我的课程中，我没有讨论概率公理，因为那样的

话，会把许多逻辑的深奥理论引入课堂，效果如何令人怀疑。

概率进入中学课程已成定局，这一联系着现实与数学的花朵该如何栽培呢？如果我们把它当作一门高年级的课，而且每周花两小时去教的话，那必将断送它的性命。我完全同意恩格尔（A. Engel）的主意，即在学生刚刚了解分数以后，就把概率渗透到所有的数学中去。这样做，不仅可为以后的概率教学带来方便，而且能使学生学的数学更加接近于现实。这样安排的概率不是一门充斥着定理和公式的枯燥学问，它充满着大量的具体问题，这时，概率被学生当作生活的一部分来体验。我相信，早期集中体验过概率概念的学生，在更高的水平上能更好地体验与吸收远离现实的数学化。描述性统计也是很有用的，但为什么多年来它一直未能进入课程，这仍是教育界的一个谜，直到今天，许多所谓有文化的人还不会看统计图，这简直让人难以置信。

第十九章
逻辑

什么是逻辑

为什么是狗摇狗尾巴？因为狗太重，尾巴摇不动狗。

一只猫有四条腿，没有一只猫有五条腿，因此，一只猫有九条腿。

三个男孩 + 两个女孩 = 五个小孩 = 两个男孩 + 三个女孩。

听了上述几句话，大概没人会否认它们多少与逻辑有关吧，或许我们还会惊呼："这是不合逻辑的"，并用逻辑的方法指出其"不合理性"。不过，这些例子与我们数学课本中所说的逻辑关系不大。注意，我没有引用

没有一个皇帝是烟囱工人，

所有的烟囱工人都会带来好运，

因此没有一个皇帝会带来好运

这样的例子，这种例子与自古以来的逻辑课本的内容多少有些关系，但它们是为了给传统逻辑的存在提供

正当理由而人为地编造出来的。为顺利通过逻辑考试而必做的这些问题恰好表明:一门学科若脱离了其他学科与现实,就会产生可怕的后果。形式逻辑在上世纪发生了巨大的变化,但是用作说明的那些例子并没有多大改进,其原因有很多。

逻辑与思维有关,如果我们把思维作为我们思维的对象,那就是在研究逻辑。当然,这是一种传统的提法,而形式逻辑学家认为逻辑是一门形式体系的学科。但我们还是想按通常的理解去理解逻辑,其实,即使是形式逻辑学家,在他走出他的研究室之后,也是按通常的理解去行事的。

程式化和形式化

思维的外显表达就是语言,在某种程度上,思维本身也就是一种“自言自语”。然而,我们不打算像许多形式主义者和行为主义者那样借助语言表达来研究思想。其实,同样的思想可以用同一种语言或不同种语言的多种方式来表达。当然,思想与思想的语言表达之间有着紧密的联系。如果我们把思维作为我们思维的对象,那我们就是在运用逻辑,于是不可避免地就要考虑我们思维的语言表达问题,并最终把我们对思维的思想用语言表达出来。不过,我们可以强调前

者，或者强调后者。有时，我们不拘泥于数学语言的推导，通过分析概念和证明，去发现它们的逻辑结构和隐藏着的思维模式，例如，我们对有关垂直平分线的证明所作的分析。有时，我们又通过多半是语言方面的推导来分析语言结构，例如，分析名词“群”的各种形容词。这两种活动都属于逻辑范畴，但有必要弄清它们之间的区别，尤其是出于教学上的考虑。当思维仅仅是思维的对象时，我把它称为“程式化”；当语言的明确表达带有一种数学特点，尤其是在追求一种数学上无可挑剔的语言时，我把它称为“形式化”。

我很想明确地区分程式化和形式化，但从我所作的解释中大家会清楚地看到要彻底把这两者分开处理是不可能的。当语言表达是一种工具，而不是一种结果时，这里面就有程式化的活动；当用数学手段来数学地分析一种语言时，这里面就有形式化的活动。若联系教学，这就意味着：逻辑未必是符号的逻辑，而使用语言符号也未必表明是在学习逻辑。

逻辑的模式

今天，经过对思维过程的分析，经过将思维过程分解成基本成分而积累起的大量逻辑模式[1]应该被认

[1] 我称程式化后得到的形式为模式而不是程式。

作是什么呢？传统逻辑背离日常思维的简单事例，受某些语言偏向的影响，人们在传统逻辑中发现了一些模式。现在的逻辑深受为表达数学思想而发展起来的更抽象的语言影响，因此，它所分析的往往不是实际的思维而是理想化了的思维。当然这并不奇怪，因为数学一直是（被）用来将现实模型理想化的。但是，如果像我们所希望的那样，在教学中运用由这种分析得来的结果，那就有必要提出这样的疑问：通过分析这种理想化了的思维过程，我们所了解到的东西是否有助于激发和推进学生的实际思维过程？从思维实验中我们可以调查到那种理想化了的思维过程可以模仿到怎样的程度。如果对思维过程的复杂分析和综合的产物背离了实际的思维过程，那么它们显然是毫无教学价值的。如果积极思考的头脑对那些未受逻辑学家注意的思维模式更觉运用自如，那么逻辑学家的程式化活动即便没有坏处，也毫无教学效果。当然，这并不是说逻辑学家们的工作是徒劳的，因为，即使人类不按照这些模式思考，我们还可以把这些模式教给机器。就在上世纪，我们找到了一种可用机器处理的数学表达形式，它当然不是用来教人类的最好形式，相反，这样做会很不合适。比如，给人和给计算机各编一个去加油站的程序，这两个程序就会差别很大。如果

我们教的是学生而不是计算机,那只有从我们的学生是人而不是机器这一事实出发,我们才会取得成功。我们已指出过:人们长期认为把一个领域研究的基本结果教给学生是最为明智的做法,然而,现在许多人则相信:这些基本结果的重要性取决于是否是学生自己发现它们的。

对由分析而发现的逻辑模式,我们必须提两个问题:这些模式充分吗?如果充分,是否有用?也许还可以提出其他的问题,但那些都不是主要的。是模式就该运用,为此,我们应该了解,教授和学习模式,并了解如何教程式化。

假如一种数学思路是正确的,它与用来检查其正确性的那些模式也无矛盾,则我们称这些思维模式是充分的。对形式逻辑的模式我们只能期望这么多,要想用它们来填补没有完成的思路,来解决一个面临着的数学问题,或发现一些引人思考的问题,那是不行的。我们可以用形式逻辑的模式去考察一个定义是否按规则构造,但不能期望用它去决定哪些定义最适合组织某一领域,一些非常简单的数学事实,也许可用一种随意的顺序由形式逻辑的棋式来加以分析或证明,但这样做不会获得整体上的组织。

到目前为止,我们的研究还没有跳出基本逻辑模

式这一领域，这些模式是容易被形式化的，而且，数理逻辑的主要倾向无疑也就是形式化。但是，实际使用着的逻辑模式并不是形式逻辑分离出来的这些基本逻辑模式，而是逻辑经验的大杂烩，它们是较难形式化的。其综合的面越广，则其逻辑战术的成分越少而逻辑战略的成分越多。我不敢宣称我们未来仍难以将逻辑战略形式化，然而，想用目前人们所熟知的已经形式化了的逻辑模式去处理基本逻辑模式却是要受限制的，人们甚至普遍认为这些东西已经是由最为深入的分析所得到的最终结果了。

处于低水平上的战略在高水平上只能算作战术，比如，在"命题逻辑"和"初等代数"尚未分别组成一个领域之前，像"在证明结论之前，先假设它是错误的"或者"设未知量为 x"这些建议都是战略。但是，一旦这两个领域组织好了，它们就沦为战术了。下面是几个高水平上的战略例子，可帮助我们理解有关战略和战术取决于水平的观点，从中我们还可以看到形式化在这方面所取得的进展很小。

我们先来看整数 n_1, n_2 的最大公因数 d 的存在性证明。自古以来，人们就知道用欧几里得（Euclid）算法可以解决这个问题：

$$n_1 = q_1 n_2 + n_3,$$
$$n_2 = q_2 n_3 + n_4,$$
$$n_3 = q_3 n_4 + n_5,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot$$

最后那个非零余数就是最大公因数,同时还可得到最大公因数 $d = x_1 n_1 + x_2 n_2$。受 d 的表达式启发,我们也可以构作以 n_1, n_2 为生成元的整数加群 H 来解决这个问题,d 就是这个群的最小正数。于是,原问题就转化为在 H 中寻找最小正数 d 这样一个具有一般战略意义的问题。由于生成元是 n_1, n_2,因此 d 的表达式是 $x_1 n_1 + x_2 n_2$,显然 n_1, n_2 的所有公因数都是 d 的因数。现在还需证明 d 本身也是 n_1, n_2 的公因数。奇怪的是,改证 d 是 H 的所有元素的因数——又是一个典型问题,反而简单。我们在 H 中任取一元素 y,除以 d,得余数 r,即

$$y = qd + r。$$

因为 $y \in H, d \in H, qd \in h$,所以 $r = y - qd \in H$,r 作为余数应该小于 d,但这是不可能的,因此 $r = 0$。当然,我们也可以改用更好的办法:若不是每一个 $y \in H$ 都能被 d 整除,则必然有属于 H 且不能被 d 整除的最小正数 k,于是 $k - d \in H$,它也不能被 d 整除,且 $k - d < k$,又因为 d 是 H 中的最小正数,所以

$k \geqslant d$,于是 $k-d$ 是 H 中比 k 更小的不能被 d 整除的正数。

三种有着广泛适用性的战略在上述证明中发挥了作用。但请注意,它们抛弃了算术中很重要的欧几里得算法,最后甚至还抛弃了带余除法这一证明工具,这是严重的倒退。毫无疑问,在教学中,以上的两种证明方法都该给出,先是构造性的方法,再是概念性的方法。

今天,查恩(Zorn)引理可能已被归入战术之列了,但它的运用需要战略思想。例如,要证明"群 E 的某些子群按集合的包含关系是全序的,那么,这些子群的并集也是一个群",一种证明是:设 Ω 是以这些子群为元素的集合,$a, b \in \bigcup_{F \in \Omega} F$,则存在 $G, H \in \Omega$ 使 $a \in G, b \in H$。因为 Ω 是有序的,所以 $G \subset H$ 或 $H \subset G$。假设 $G \subset H$,于是 $a, b \in H$,则 $a^{-1} b \in \bigcup_{F \in \Omega} F$,这就证明了这些子群的并集仍是一个群。能熟练运用查恩引理的人都上百次地用过这一推理方法。等到将来某一天人们把这一方法形式化了,那么要掌握它也就不很难了。

这种运用战略的例子还很多,比如最小数原理的运用,由两个结构的逻辑依赖性导出这些结构的某些自同构性质,公理化等等。从中可以看出我们对一些

基本思维模式所作的分析还不够，只有那些瞎子或持有偏见的人能让这种状况继续下去。这些基本模式从狭义上讲是可以满足我们需要的，但如果按照只有在实践中被检验为有用才算有用的标准衡量，那么它们就满足不了我们的需要。这些基本模式虽然有用，后面我会谈到它们在教学中的意义，但它们的确不能满足我们的需要，我们总不能要求教师去教一门未经逻辑学家们明确阐述，而使用者基本上还处于无意识活动状态的这样的逻辑吧，这即使是要求教科书作者的话，也是行不通的。我想做而且也愿意做的是引起大家对这些问题的重视——我们使用的是什么战略？我们自己能否意识到它们并指导我们的教学，甚至我们能否把它们形式化，以便让别人也掌握并改善它们的教学。

程式化

如前所述，从教学上看，程式化，即制造模式，比模式更为重要。可惜我们没有有意识地去了解我们大多数的模式，看来这对教学是不利的，其实这也有有利的一面，因为我们自己没有有意识地去了解，所以我们就不能将模式作为现成的东西有意识地去教给学生，模式只能隐含在我们的程式化中，可以明确教

授的只有程式化，而不是模式。不过，这也有一定的分寸，它说明了为什么探究式教学是有效的——因为教师自己不很了解模式，所以学生只得把注意力集中在教师如何建立模式上，但超出这一分寸，就会不利了。一种思维模式可以形式化到纯粹机械的地步，学生只要感受过这一战略就能运用，我将举例说明这一点。自古以来，逻辑就作为程式化或形式化的训练出现在数学教学中，每个教师时而都会教一点逻辑，也或多或少可以系统地去教它。但不管怎样，只有抓住逻辑分析的机会，即分析思维情景的机会，才是讲解逻辑概念最好的教学途径，如同前面指出的那样，日常生活中的思维情景太简单了，用来训练数学化很不合适，还是复杂一些的思维情景合适些，因为它们显示出更多可数学化的特征。

像“充分必要”和传递性这些逻辑概念，在形式化之后要通过多方面的运用才能发展成为战术。尽管对在更高水平上运用它们的教师来说，它们早就是战术了。但教师并不因此而有权力把这些模式强加给学生，相反，学生应该先努力获得这些思维模式，并最后根据需要将其形式化。许多模式在很长一段时间内，甚至永远都将保持未形式化的状态。

我还想举一个例子，这是现在很流行的一种猜谜

活动。一名骑士因故被捕,后来又被国王有条件地宽恕了,国王把他带到两扇门之前,要他挑选开哪一扇门,其中一扇门里关的是吃人的老虎,另一扇里藏着一位愿与他缔结良缘的公主,每扇门都由一个士兵把守,他们知道自己看守的是什么,一个士兵不会说谎,另一个则只会说谎,而且彼此都知道对方的品行,当然,骑士是不知道谁讲真话的。国王允许他问一个士兵一个答复为“是”或“否”的问题,去发现他该开的门。他该问什么呢?

这个问题可以简化。随便叫来一个士兵,不管他是不会说谎还是只会说谎的,骑士问他:“如果我问你公主是否在你这扇门的后面,你将回答我什么?”如果那个士兵是个说谎者而且那扇门的后面是公主(或老虎),那么他对公主是否在自己那扇门的后面这一问题的回答应是“否”(“是”),但非要回答骑士的那个问题的话,他就不得不说“是”(“否”),说谎者最终说的便是真话,这多亏了双重否定。把这个例子形式化就相当于:有一个黑盒,它可能是一只输入、输出相符的盒子,也可能是一只输入 P 而输出非 P 的盒子,不管它是怎样的盒子,只要把一次输入后所得的结果再输入一次,这个盒子所反映的就是最初的信息,结果将是 P 或非非 P,它们是等价的。

自古以来，学校教学中最知名的那些思维模式是由几何所提供的。几何的推理由定义、定理、假设、陈述和证明组成。在作图中，则还需添加一些别的环节。正因为如此，几何自古以来就成了灌输模式的典型。尽管这些模式在数学中是重要的，也是典范，但是，它们对那些未感受到有程式化的需要，从而也不理解其必要性的学生来说是毫无价值的，而且，在学生还未掌握具体内容，或还未觉察到需要把具体内容组织起来时，就把组织过的模式强加给他们，那是不会有效果的。传统的教学往往走得更远：为了形式化，而去定义什么是定义、定理、假设、陈述、证明及作图。

间接证明

有一种思维模式我想讨论得详细些，这就是间接证明。在几何教学中，间接证明和换质位法一起是传统的逻辑内容，这一点可能显得有些奇怪。如果我们从逻辑上去考察一下中学几何的基本特征，也许会提出在中学阶段可以不引入间接证明的设想。翻看一下教科书，我们的这一设想就会得到进一步证实，因为常常有一些证明看上去像间接证明而实际上却不是，请看下面一例。

求证：通过不在一直线上的三点 A、B、C 至多有一个平平面。

证假设有两个这样的平面 α 和 β，根据公理：如果两个平面有两个不同的公共点 P 和 Q，那么它们就有一条公共直线 PQ。可得直线 AC、BC、CA 都既在平面 α 内也在平面 β 内。现在任取 α 内不在这些直线上的一点 D，则直线中至少有一条分别与不平行，不妨设 DA 和 BC 交于与 D 不同的一点 E，于是 E 在 BC 上，因此，E 在平面 β 上，A、AE 也在平面 β 上。因为 D 在 AE 上，所以 D 也在平面 β 上，这就意味着 α 上的每一点都在 β 上，同理也可证得 β 上的每一点在 α 上，所以 α 和 β 重合。

这是间接证明吗？当然不是，但它通常是被当作一个间接证明而提出的。它以"假设 α 和 β 是经过 A、B、C 的两个不同的平面"，开始，所以把它当作间接证明是很自然的。但实际上在整个证明过程中，$\alpha \neq \beta$ 这一假设根本没有用过。我们可以在任何一个证明的开始加上一个"要证的结果是错误的"假设而不用它，这样做并不能使这个证明变成间接证明。

又如，在证明平面上某两条直线平行时，有人假设它们是不平行的，并由此引出一个矛盾。这是不是间接证明呢？也不是。因为，平行概念是以否定语句定

义的,即定义为不相交的直线,而证明某事不发生的直接方法就是假设它发生,所以我不认为这是一个真正的间接证明。同样,通过假设 $\sqrt{2}$ 能表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式去证明 $\sqrt{2}$ 是无理数,也不是真正的间接证明。

从"若 P 不在线段 AB 的垂直平分线上,则 $PA \neq PB$"去推出"若 $PA = PB$,则 P 在线段 AB 的垂直平分线上",这也不是间接证明。它是用换质位法(若 $p \to q$,则 $\neg p \to \neg q$ 把一个陈述换成了另一个陈述。尽管这条原理是间接证明方法的基础。但它本身并不是一个间接证明。$p \to q$ 告诉我们,无论在什么情况下,p 真总包含着 q 真,于是很显然就有 p 假包含着 q 假。当然,就像世上所有的简单事物都可复杂化一样,这一简单事实也可用一长串的推理复杂化:已知 $p \to q$,假设 $\neg q$,要证 $\neg p$。假设 $\neg p \neg p$,即 p,由已知 $p \to q$ 得 q 真,这与 $\neg q$ 矛盾,于是有 $\neg p$。可见,为了模仿间接证明,我们许多话都浪费在比间接证明更为基础的东西上了。也真奇怪,教科书在处理间接证明时总是忘记提及换质位法模式。

对于间接证明,有一本教科书是这样解释的:在间接证明中,人们从列举与结论有关的所有可能的情况开始,然后逐个地加以检查。根据该书作者的观

点,如果要证明一个关于三角形的定理,可按锐角三角形、直角三角形、钝角三角形逐个地加以验证,这种证明方法就是一个问接证明。但是,尽管分情况证明中可能隐藏着一个间接证明,这仍然不是间接证明。在间接证明中,要作一个假设,即假设结论是错的,间接证明的逻辑基础是换质位法,即 $p \to q$ 和 $\neg p \to \neg q$ 等价,而上面摘引的方法其逻辑基础其实是 $[(p \bigvee q) \to r]$ 和 $[(p \to r) \bigwedge (q \to r)]$ 等价。

如果要证明某件事,先假设它是正确的,这样的证明也不是间接证明,而且是不允许的,道理很明显,因为如果这样的话,我就可以证明 $1 = 2$,只要先假设它是正确的,然后等式两边都乘以 0,得到 $0 = 0$ 这一正确结论。或许有人会说:"停,你不可以两边乘以 0!"不,只是不允许除以 0。的确,两边乘以 0 这一步是不可逆的。如果我们从欲证的结论 p 出发,逐步用 p 的等价命题 q、r、w 代替,即 $p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r, r \leftrightarrow s$,而 w 真是显然的事实,那么是可以得到 p 为真的,但事实上这样做是杀鸡用牛刀了。已知 s 是真的,要证明 p 真,只要有 $s \to r, r \to q, q \to p$ 就足够了。

什么才是真正的间接证明呢?回答它比回答什么是证明更困难,它只有在一个完全形式化的证明理论中才能得到透彻的解释,而且,与人们的期望相反,它

的表述极为形式化。因此,我们还是小心谨慎,凭自己的直觉去理解它为好。分情况的证明中可能会隐含间接证明,而纯粹的存在性证明则是名副其实的间接证明。比如,欲证存在具有性质 $F(x)$ 的 x,可先假设不存在这样的 x,即 $\neg\bigvee_x F(x)$,或者说 $\bigwedge_x \neg F(x)$,再从"对每一个 x, $F(x)$ 是假的"推出一个矛盾,最终得到存在这样的 x。连续函数的介值定理就是用这种存在性方法证明的。

由于在初等几何中没有货真价实的存在性证明。因此,教科书作者过去总是想方设法编造一些这种例子。我不知道他们自己对此是否满意,但有些定理明明已被直接证明了,却还要构造它的间接证明。要在教科书中寻找间接证明是很容易的,我们只要翻一下书页,在那些虚线非常靠近实线的图象附近就有间接证明,此处课文会说上几段类似"让我们假设那条不经过 P 的直线……"的话,同时,作者为了把这一假设直观化,就在图中画上一条错误的直线。这种表达间接证明的方法是否适合正处于逻辑和直觉交错迷乱阶段的学生值得商榷。

鉴于上述原因,初等几何可以完全排除间接证明,但几何教学是否也要排除间接证明呢?你只要尝试一下就会发现这是办不到的。间接证明就像希腊神话中

的多头蛇，砍掉一个脑袋就会长出七个新脑袋，它的作用完全不同于教科书所说的那样，它是学习者自由思维活动的一种表达方式，也是一种非常普遍的思维活动（“彼得不在家，因为否则门就不会锁着”）。小孩子在考虑问题时会自然地这样推理：“……如果不是这样，那么就会……“。

间接证明是最好的启发手段，让我们来看一个例子：在平面上画一张格子网，每个网眼的顶点都是格点（即坐标为整数的点）。现在问：绕平面上的哪些点旋转可以使网不变？答案很明显，它们是各个网眼的顶点及其每条边的中点以及各网眼的中心。但是，怎样来证明这个答案已齐全了呢？有人会这样本能地思考：假如 AB 边上的一点 P 离 A 近而离 B 远，则 A 以外的一切格点到 P 点的距离都大于 $\overline{AP}$。从而绕 P 旋转时，A 不可能变到别的格点。假如 P 在网眼 $ABCD$ 内，但不在的垂直平分线上，则……。这样就会得到证明。当然，在写出证明时，我们可以把这种拐弯抹角的东西抛掉，只用直接法证明，而把间接证明留在草稿上。一本几何教科书如果完全不出现间接证明，那是一本很好的书，若教师想告诉学生什么是间接证明，那最好不要编造例子，而要在学生无意识地这样思考时，当即抓住时机，指出他所进行的思

维活动就是间接证明。为了使几何不受任何责难,有人先按一种合适的方式把每个间接证明都改成直接证明,然后,为了让学生至少见识过一个间接证明而去构造一些毫无生气的间接证明,这种做法是不理智的。在给出间接证明之前,学生应该对它已积累了一定的经验。

程式化与形式化之间

我刚才举的这些例子都是思维模式,语言在其中不是重要角色。以前所举的一些例子,例如“画家中最伟大的诗人,诗人中最伟大的画家”,或关于张先生与李先生的谈话,则强调语言的成分,这时逻辑特征被隐藏在语言表达之中,这些例子所用的语言还完全不是数学语言。要理解这种语言,恐怕需要从数学上将它形式化。只有这样,才能弄清楚哪里隐藏着限定,以及推理的过程是什么。我们确实能够将日常数学语言所叙述的东西形式化到一个更高的层次,这项工作有时很有用。当然,从非数学的语言到完全形式化的语言要经过一条漫长的道路。

必须强调的是,脱离要作形式化的具体内容来教形式化是没有意义的,这一原理对一切形式体系都适合,但逻辑的形式体系在这方面尤其要注意。尽管有

人想通过教学把学生训练成能解形式化难题的高手，从学生的耐心和热情来看，这种教学也是成功的，但我认为这种数学是所能想象出的、最无聊的数学，甚至这种愚蠢的活动恐怕根本就称不上是数学活动，对此计算机可以比学生做得更好。我在前面谈及那些传统逻辑的骇人问题时，还应加上一句：这些旧的记载正面临着新逻辑的问题的尖锐挑战。

我认为逻辑若不是为了逻辑的话，那它是有用的，把逻辑作为其自身的一个目标那是逻辑学家的事。学生必须学会从证明和定理中发现逻辑模式，并在他自己进行形式化的时候运用这些模式，但最重要的是他必须学会在非数学语言的情形下利用逻辑。

传统上，逻辑一直是三段论的艺术，在很长的一段历史时期内几乎无人清醒地认识到仅有二段论是无法走远的这样的事实。然而，三段论仅仅适合于对主谓结构的形式化，就连如下的推理：

一匹马是一个动物，

于是一匹马的头是一只动物的头。

它也做不出来，对这个推理的叙述要使用多变元的函数与谓词。

逻辑自古以来就与几何结合了，虽然三段论的作用在几何中也很有限，但无人对这一结合表示疑问，

也无人去改变逻辑而使它适合几何。直到本世纪60年代初,几何的教科书和教师用书对几何是逻辑的训练场所这一观点仍丝毫未表示过怀疑,而代数教科书则从来不谈逻辑,学生学代数只需接受一个很有用的规则体系,按预先指定好的方向转化已知条件就行了,但几何没有这种可循的模式。代数中的一些陷阱(如除以零、不等式两边乘以同一个负数等)不是用逻辑分析消除的,而是用那些附加规定填平的。

在传统的学校教学中,代数这个词可以翻译成“完成模式的指导”,或说得更严重些,就是填空,学生把课本内容牢记心头后,他所要做的就是按照课本内容填空,结果就像你无意中听见一个人在打电话:“是……是……不……是……三个…不……”敏感的人也许还可以从他的表情、语调的变化中觉察出电话那一头的人在说些什么。每年,当我翻阅文法学校的期末考试卷时,我总不由地会佩服那些老师,他们知道学生在填空时脑子里已记住了哪些东西。考卷中有好几处,甚至很多是填空,这真是代数的一大祸害,对学生的理解丝毫没有益处。几何中虽然也有填空,但不像代数中做得那么机械,那么彻底,这是人们认为几何比代数更适合作逻辑训练场所的理由之一。

看一下学生在解一个代数问题时头脑里是怎么想

的，会给我们提供大量的信息。例如，对于“求证办 $3x^2+12x$ 有一个最小值，并指出 x 取何值时恰达到该最小值”有一个学生这样解：

“表达式 $3x^2+12x$ 是一个二次函数，如果提出公因子 *3*，表达式不变，括号内是 x^2+4x 它与 $(x+2)^2$ 不相等，因为我们加了 4。为了使其相等，必须减 4，(-4) 必须乘以 3，于是我们得到 $3(x+2)^2-12$，它与 $3x^2+12x$ 相等。因为平方项大于或等于 0，所以这个表达式有最小值 -12。平方项要乘以 3，因此它至少是 0，即当 $x=-21$ 时，$3(-2+2)^2-12=-12$。由于平方项的值总为正，$\times 3$ 后也总为正，因此，最小值是 -12。“

我们从中可以看出，学生解题时并不靠逻辑来推论，而是根据计算的规则行事——这是代数中的一种自然方法。形式已被灌输给了学生，这说明形式化不是在学习进程的最后阶段，而是在学生尚未掌握需要加以形式化的具体材料之前，就往往过早地开始了。

这种做法在几何教学中并不容易。如果把逻辑看作是程式化，那么几何比代数更接近逻辑。代数传统上比几何更形式化。几何中，我们注重思维模式；代数中，我们却注重掌握语言，这就是今天人们试图把几何代数化，试图像掌握代数那样通过语言的途径去掌

握几何的原因。但是,这种偷懒的做法在学生有了数学是一种无意义语言的感受之后又必须去运用数学时,将会显出后果。

只要几何继续倾向于程式化,代数继续倾向于形式化,同时,形式化又没有成为一种有价值的数学活动,那么,几何和逻辑之间的紧密联系就可以理解。随着符号逻辑的发展,承认代数的逻辑地位也更加迫切了。不过,我们现在所举的例子中,程式化的大都取自于几何,形式化的大都取自于代数,对此,读者想必不会见怪的。

命题领域的形式化

给出方程 $x^2-3x+2=0$,学生都会说解是 $x=1$ 和 $x=2$。当然,这个"和"字一般是只说不写的。要求严格的教师会指出:"$x=1$ 和 $x=2$ 是不相容的。"受过良好训练的学生会解释说:"我的意思是 $x=1$ 或 $x=2$。"最后教师告诫学生:"如果你的意思是'或者',那么就把它写下来。"

我倒要问这位教师:既然早在几十年前我们就已发明了记号"$\vee$",那你为什么还要让学生写"或者"呢?你总不会让学生去写"左括号 a 加 b 右括号的平方根"吧?再说,只要你明白这个答案的含意,那么

“$x+1$ 和 $x=2$”也应算正确的答案。有些几何教师总把语文教师的任务当作自己的责任,要求提问或回答都得用完整的句子。可在代数中到处都有不完整的句子,如果教师写下 $x^2-3x+2=0$,学生就知道是要他找出满足这一方程的 x。如果给出的方程是“$x^2-3ax+2a^2=0$”,学生会毫不犹豫地计算 x 而不是 a。学生回答“$x=1$ 和 $x=2$”并没错,它的意思是“$x=1$ 是一个解,而 $x=2$ 也是一个解”。我们知道

$$[(x=1)\to(x^2-3x+2=0)]$$
$$\bigwedge[(x=2)\to(x^2-3x+2=0)]$$

等价于

$$[(x=1)\bigvee(x=2)]\to(x^2-3x+2=0)。$$

所以,如果教师有什么要问的话,应该问:“没有别的解了吗?”即

$$(x^2-3x+2=0)\xrightarrow{?}[(x=1)\bigvee(x+2)]。$$

前面我解释了逻辑符号的作用,我并没要求所有的代数计算都要用逻辑和集合论的符号来表示,但至少我们应该明确地表明由什么到什么,所用的量词是存在性量同,还是全称量词,还是疑问量词?虽说不必详细地指出每一步所用到的逻辑规则或数学公理、定理,不必每一步都重复所有的条件,也不必用括号把解方程的过程写成集合之间的一长串等式,但是,像

上述有关“和”、“或者”这种讨论若使用逻辑符号就会变得更简单、可行了。

在传统的代数教学中，解方程所依据的模式是逐步用等价方程代替的。这是教师为防止学生出错而发明的人为方法，它只适用于很简单的方程，即便如此，有时还可能很复杂。自然的方法是从所给方程出发，比如 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+9}$，逐步将其转化为一个直接可解的方程：$(3x+28)x=0$。在这一过程中，所出现的一系列方程不等价，所导出的方程只是用作一个临时的必要条件。于是 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+9}\to(3x+28)x=0$。然后要验根，把解得的值代入 x，检验它们是否适合原方程，哪些是适合的，即检验哪些值能使上述箭头反向也成立。

的确，在解数值的二次方程时，验根步骤可以省去，因为这种方程的所有根都可以用一个公式表示。但这是一种特殊情况，如果所要解的方程是来自于实际问题的，即是对现实情况进行数学化后得到的，那么验根就是一个最自然的步骤了。在这种情形下，我们往往不能肯定是否遗漏了一些条件，从数学中求出的解因没有物理意义自然会舍去，这只说明我们对这

个问题的数学描述还不够完全。在解这类问题时，学生当然应该习惯于仔细检查从数学中得出的答案。

如果方程是逐步通过等价方程来解的，那么中间步骤的说明也许可以省略，但无论在什么情况下，都应该指出，什么是要学生求的未知数，为什么未知数永远是 x? 解答中也应该明确说明什么是解? 如果解不止一个的话，还应该讲明：究竟是“和”还是“或者”?

如果方程不是用这种等价方程替换的严格方法来解的，那么我们要做的事就多了，必须明确指出由什么到什么，一个方程是化为两个联立方程还是化为两个独立方程等等，这些都可以用逻辑符号简明扼要地予以说明。

下面，我想给出几个使用逻辑符号表达数学的例子。只要我们联系实际背景谈逻辑，命题就不会是毫无意义的符号堆，相反，它们表达着某一内容，还可以用真值表形式地刻划它们。大家都知道真值表，其中 0 表示假，1 表示真：

p	q	$\neg p$	$p\bigvee q$	$p\bigwedge q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

从真值表上我们可以比较命题的分、合等一些抽象的组合，但真值表的一个更基本、自然的实际用途是观察某些特殊命题之间的关系。比如大家知道，几何中那些具有多个条件和结论的定理，可用多种方法去改变其条件与结论。设是 $ABCD$ 一个四边形，考虑以下四个命题：

p: $AB \| CD$, r: $AB = CD$,

q: $AB \| CD$, s: $AD = BC$,

则有 $(p \bigwedge q) \leftrightarrow (r \bigwedge s)$, $(p \bigwedge r) \leftrightarrow (q \bigwedge s)$。

但当 p 和 s 都为假时，$q \bigwedge r$ 却可以为真。p、q、r、s 真假排列的所有可能为

p	1	1	0	1	0	0	0	0
q	1	0	1	0	1	0	0	0
r	1	0	1	0	0	1	0	0
s	1	1	0	0	0	0	1	0

当然，在形式化时，我们也可以不用命题 p、q、r、s，而用相应的满足条件 p、q、r、s 的四边形集合 P、Q、R、S 代替，但这时要用到这些集合的并、交和它们的补集之间的相等、包含、不包含这些关系，这样做也完全合理。然而尽管这两种方法是等价的，有时是用逻辑形式好，有时却用集合论形式更好。

我不同意把逻辑与其包含的实际背景截然分开。

首先我要声明，我从未听说过这样的教学取得过成功，我怀疑人们是否研究甚至注意过这方面的教学专题。这个专题就是日常语言的逻辑习惯和符号逻辑之间存在很大的差别。大家知道，数学家对“或者”的理解比日常语言中人们对它的理解要简洁得多，而且早在符号逻辑之前他们就这样理解了。在数学中，“或者”意指兼收并蓄，没有排他的意思。大家也知道，即使 V 是空的，数学家仍可将命题“V 的所有元素 x 有性质 $F(x)$”看作是真的。但是，在日常语言中，如果我们对违背人们常识的东西予以肯定，那是要被判为错误的（“$8+4=11$ 或者 12”就被认为是错的，尽管从逻辑形式上说它是正确的）。

蕴含

蕴含“如果……那么……”是逻辑知识的要点，通常用一个箭头“$\rightarrow$”表示它。由两个命题 p、q，我们可以复合出命题 $p\vee q$、$p\wedge q$、$\neg p\vee q$、$\neg(p\vee q)$ 等等，这里“$\vee$”（或者）、“$\wedge$”（并且）的意义是很明确的，但什么是 $p\rightarrow q$ 呢？我们一般将它连同 p 和 q 一起理解为一个命题。比如，“p= 当天下雨”，“q= 地是湿的”时，$p\rightarrow q$ 就不难理解，它是一句很明白的话“如果天下雨，那么地是湿的”。当“p= 天下雨”，而

"$q=(2\times 2=4)$"时,$p\to q$ 就不好理解了。这句话看上去没有什么实在意义。同样当"$q=(2\times 2=5)$",而"$q=(2\times 2=4)$"或"$q=(2\times 2=6)$"时,也是如此。在日常语言中,甚至在数学的日常语言中,我们一直把"如果……那么……"这种句型理解为"如果我知道这个,我就能推出那个也是成立的",而不是理解为"或者"的组合或"并且"的组合。但这种理解对形式化的要求来说是模糊的。另外,数学中的许多概念,比如,$A\subset B$ 的概念、紧致的概念等等,就是用这种句型定义的,所以,搞清"如果……那么……"句子与"或者"或"并且"句子间的等价关系是很有必要的。

如何理解"$\to$"呢?这只能借助于"$\to$"的真值表从形式上去回答。不考虑 p、q 的具体内容,把 $p\to q$ 理解为 p 和 q 的一个函数,这的确是十分形式化的观点。如果抛弃 p、q 的具体内容,那么剩下的只有它们的真值,"$\vee$"和"$\wedge$"可用 $p\vee q$ 和 $p\wedge q$ 的真值表得到令人满意的解释,我们何不同样地去解释"$\to$"呢?人们已经承认当且仅当 p 真而 q 假时,$p\to q$ 为假,即 $p\to q$ 与 $\neg p\vee q$ 等价,这是很合理的,尽管这样做会把一些很奇怪的推理认为是正确的,如

如果地球是一颗行星,那么 $2\times 2=4$,

如果太阳是一颗行星,那么 $2\times 2=4$,

如果太阳是一颗行星,那么 $3 \times 2 = 5$。

有人会说:这也不错嘛。但是,如果把 $p \to q$ 就理解为 $\neg p \vee q$,那么因为条件和结论都是早就决定了真假的独立命题,所以它不会告诉我们什么新东西。若是 p 和 q 本身都依赖于变量,则情况就有点不同了。集合和命题之间有一种大家都很熟悉的关系,集合 V 上一个关于变量 x 的命题 $p_v : x \in V$,当且仅当 $x \in V$ 时为真。令 U 为一个固定的全集,x 在 U 中变化,则容易看出,$\cap$、$\cup$、$\backslash$ 和 $\wedge$、$\vee$、$\neg$ 互相对应,即

$$(p_a \wedge p_b) \leftrightarrow p_{A \cap B}, (p_a \vee p_b) \leftrightarrow p_{A \cup B}, (\neg p_a) \leftrightarrow p_{U \backslash A}。$$

那么,"$\to$"与什么对应呢? $p_a \to p_b$ 或者 $(x \in A) \to (x \in B)$ 也要对应一个集合,这个集合由使该命题为真的所有 x 组成。因为无论是前提为假还是结论为真,都认为该蕴含是真的,所以这个集合中的 x 应是 $x \notin A$ 且 $x \in B$,即这个集合是 $U \backslash (A \backslash B)$。于是

$$(p_A \to p_B) \leftrightarrow p_{U \backslash (A \backslash B)}。$$

可是,对于 $(x \in A) \to (x \in B)$,人们往往不会想到 x 要满足 $U \backslash (A \backslash B)$ 这样古怪的条件,只会想到满足条件

$$\bigwedge_x [(x \in A) \to (x \in B)],$$

于是,导出 A 和 B 间的一个关系:$A \subset B$,它与

$(x \in A) \to (x \in B)$ 的联系比 $U \backslash (A \backslash B)$ 更自然。对 $\vee$、$\wedge$、$\neg$ 作类似的解释,就有

$$\bigwedge_x [(x \in A) \wedge (x \in B)] \leftrightarrow A \cap B = U,$$
$$\bigwedge_x [(x \in A) \vee (x \in B)] \leftrightarrow A \cup B = U,$$
$$\bigwedge_x \neg(x \in A) \leftrightarrow A = \varnothing,$$
$$\bigwedge_x [(x \in A) \wedge (x \in B)] \leftrightarrow A \subset B。$$

类似地,还有

$$\bigvee_x [(x \in A) \wedge (x \in B)] \leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing,$$
$$\bigwedge_x [(x \in A) \vee (x \in B)] \leftrightarrow A \cup B = \varnothing,$$
$$\bigwedge \neg_x (x \in A) \leftrightarrow A \neq U,$$
$$\bigvee_x [(x \in A) \to (x \in B)] \leftrightarrow A \backslash B \neq U。$$

带有 $\vee$、$\wedge$、$\neg$、$\to$ 性质的集合则是:

$$\{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\} = A \cap B,$$
$$\{x | (x \in A) \vee (x \in B)\} = A \cup B,$$
$$\{x | \neg(x \in A) = U \backslash A,$$
$$\{x | (x \in A) \to (x \in B)\} = U \backslash (A \backslash B)。$$

从逻辑上说,这些是正确的,并具有一种对称美;但从心理学上说,是完全错误的。要把"$\to$"像 $\vee$、$\wedge$、$\neg$ 一样用集合,而不用集合间的关系来表示,实在令人难以习惯,其原因就在于"如果……那么……"具有那种无法避免的非静态的操作性质。比较下列两个句子:

一匹马是一只动物，所以一匹马的头是一只动物的头。

令 $x=3$，则 $2x=6$。

“所以”、“则”都不记作“$\rightarrow$”，而记作“$\vdash$”。$p \vdash q$ 的意思是：如果假设 p 为真，则 q 就为真，或者说，q 可以从 p 推出。显然，有 $p \vdash q$ 则有 $p \rightarrow q$；但 $p \rightarrow q$ 除含有 $p \vdash q$ 的意思外，即使 p 为假，也仍有意义，并称这时 $p \rightarrow q$ 为真，这时 $p \vdash q$ 当然没什么意义，而 $p \rightarrow q$ 却不仅有意义，还很有用。比如

$$(A \subset B) \leftrightarrow \bigwedge_x [(x \in A) \rightarrow (x \in B)],$$

若 A 是空集，则 $x \in A$ 总为假，于是 $(x \in A) \rightarrow (x \in B)$ 总为真，$A \subset B$ 也就总为真，即空集是任何集合的子集，这是一个很有用的结论，只要我们一承认空集就得马上承认它。现代逻辑学家认为，“所有会飞的象都会下蛋”虽然实际意义不大，却是对的。当然，不承认空集的人不会同意这种看法。只要世上有一只会飞的象，这一命题的正确性就不是无关紧要了，我们要检验那些会飞的象会不会下蛋，但只要会飞的象这个集合是空集，我们就可以随心所欲地给这些象加上各种各样的性质。

“水温是 20°C”的意思是：如果将一只温度计插入水中，过一会儿，温度计的读数就会指向 20。对此，你

如果指责说:“即使没人将温度计插入水中,那温度也是 20°C”。这种指责当然没必要了,日常语言有它自己合理的评判标准,日常语言中的命题不能用真值代替,而且,命题间的关系也不能由真值表读出。这些事情如果在一个形式化程度很高的人造语言体系中进行,那就要容易得多了。

形式逻辑和日常语言对蕴含的用法差异之大,致使人们甚至在数学活动的高层次上运用蕴含也常出错。从句中有关蕴含的错误是很常见的,比如,将“如果 $x^2+ax+b=0$,可推出 $x=1$ 或 $x=2$,则且 $a=-3$,且 $b=2$”译成逻辑语言

$$\begin{aligned}\bigwedge_{a,b}[\bigwedge_x\{(x^2+ax+b) &\rightarrow [(x=1)\vee(x=2)\}] \\ &\rightarrow [(a=-3)\wedge(b=2)],\end{aligned}$$

就明显是错的。因为,像

$$x^2+1=0\rightarrow[(x=1)\bigvee(x=2)]$$

在实数域内正确,可是其中 $a=0,b=1$ 与上述逻辑式不符合[1]已经说过使用括号来表示满足某条件的 x 的集合会出错,从句中的蕴含也是如此。在一种非形式化的语言中随意运用“满足某条件的所有 x 的集合”是无碍的,但在一种形式化的语言中,它就与该

[1] 参见 H. Freudenthal 的 Language of Logic, Amsterdam, Elsevier, 1906, 第 52-53 页。

语言所声称的严谨性不相称了。在未掌握某种形式化的语言之前,就要用它去表达一切,那仅仅是在卖弄知识。对于这个问题,我说得比较详细,因为许多教科书作者似乎并未认识到他们将面临的困难有多大,以及一个人在开始教这门课以前必须多么谨慎地去思考一些东西。像用蕴含这样的符号来表达这种东西,只在与日常语言背离不太远的,非常简单的背景下才起作用,但在这样的背景下,硬是以无意义的方式将逻辑形式体系与其具体内容分开是没有什么意思的。这不是说我们不能把它教给学生,而是因为一种仅有形式而不与任何内容相联系的形式技巧对学生来说只能是一种僵化的知识,没人知道为什么要教这种技巧。我不反对让学生熟悉 $p \to q$ 的真值表,熟悉 $p \to q$ 和 $\neg p \vee q$ 的逻辑等价,但却不认为它们在学生心理上是等价的。想必我们还记得自己当初学习时的情景。比如,用 $x \in A \to x \in B$ 定义 $A \subset B$ 是很好的,但何必改成 $\neg(x \in A) \vee (x \in B)$ 呢? 虽然用

$$(A\text{的余集}) \cup B = \text{全集}$$

来解释很规范,但明智吗?

形式化——数学语言的结构

在“数的概念”一章中，我详细讨论了代数语言的句法，因为，即使有一点点类似“代数语言的句法是极难理解的”想法，对代数教学也是有害的。我不是说要教这种句法，更不是说教代数要从教它的句法开始，但教师应该有意识地掌握它。对于描述公式的数学语言句法，情况也差不多。在所有的形式化工作中，我们在数学语言的句法方面所取得的成绩最令人不满。我多次研究过日常语言、数学语言和形式化语言这三者的关系。我认为，如果教学中不先弄清这些关系，那么，零碎的形式化语言就毫无用处。

我曾多次指出日常语言，数学公式语言和形式化语言之间的不同点，还就“群”、“交换群”、“伽罗瓦（Galois）群”的定义作了仔细的分析。虽然，这种微妙的差别是可以灌输给学生的，学生掌握它也不困难，但是这种学习不会产生知识的其他迁移。要想让学生学习形式化（我相信，形式化将是未来数学家们的一种重要活动），就应该提出一些迫切需要形式化的问题，让学生亲身经历它们的形式化过程，而不是让他们去面对问题的最终结果。另外，有意识地熟练使用一种语言必将对一般语言教育产生实质性的影响。

括号是代数公式语言的一个基本符号，很少有人认清它的本质。在代数教科书中，括号有“去”和“添”的用法，但人们对括号在形式化中还承担一些建立结构的任务却缺乏认识，在表示某种约束时，最爱随便用括号“满足某某条件的 x 的集合”，我曾说过，日常语言中的句法结构、词尾变化、介词、连接词、从句、标点符号等都有很多别的含义，句法结构常须由句子的含义而定，在“成熟的苹果和梨”中，是句子的含义而不是句法结构显示出它有不同的添括号方法。数学中不允许我们省略括号，要求我们相信内容会告诉我们括号应该在哪里，数学要求用比日常语言更明确的形式。

日常语言与数学语言对变量的称呼也完全不同。日常语言中，“石头”作为一个普通名词，它代表世界上的所有石头，若要加以区别的话，须在前面添上“这块”或“那块”。最早的几何教学也是用“这个点”、“那个点”、“这个圆”、“那条线”等来阐述的。以后，发明了用字母表示点，并由此产生了直线、平行四边形、圆的字母表示法。代数仿效几何的做法，也相应地用字母或符号表示未知量和未知量的幂。虽然，在日常语言中，变景“石头”只能代表石头，“老鼠”只能代表老鼠，但是，在数学中，用什么字母代表变量是无所谓的。变

量 a、b、c、$\cdots$、x、y、z、$\cdots$、A、B、C、$\cdots$、α、β、$\gamma\cdots$ 都有广泛的用途,仅偶尔要受到限制,例如,变量“$+$”仅用于表示加法,“$<$”总表示一种序关系。

在表示变量的约束关系上,这两种语言的处理方式更是大相径庭。“在一个三角形中,内角之和是 180°”和“作一个三角形”这两句话中都有“一个三角形" 但前者指的是所有的三角形,而后者指的则是某个三角形。日常语言的这种麻烦即使使用数词也避免不了。数学中,显化约束关系的种类正越来越成为一种习惯,已知的约束方式有:

$\bigwedge_x F(x)$,全称量词:对所有的 x,都有 $F(x)$,

$\bigvee_x F(x)$,存在量词:存在一个 x,有 $F(x)$,

$\{x|F(x)\}$,由约束形成的集合:有性质 $F(x)$ 的所有 x 组成的集合[1],

$U_x F(x)$,由约束形成的函数:$F(x)$ 是 x 的一个函数,

$\downarrow_x F(x)$,冠词约束:有 $F(x)$ 的那个 x,

$?_x F(x)$,疑问词约束:要求出有 $F(x)$ 的那个 x。

不属于数学,也不可形式化的是指示约束:这(那)个 x。

[1] 我建议用符号 $\uparrow$ 个代替括号。

把形式符号翻译成日常语言会遇到隔行对照翻译法通常会产生的一些问题,我就以“$\neg$”、“$\rightarrow$”、“$\vee$”、“$\wedge$”为例来说明这一点吧。

好像还没有哪种语言只需在句首简单加上一个否定词,就可变成否定句的,把“$\cdots$”读作“……是错的”也不行,因为那就等于承认所有命题都有真值。

“$\rightarrow$”也很难翻译。在我所熟悉的几种语言中,它都表示关联“如果……那么……”的意思,有人把它读作“推出”也有人把它看成是有侧重的句子,表示什么“跟着”什么。

如果 $F(x)$ 表示“x 是一只会飞的象”, 那么把 $\bigvee_x F(x)$ 隔行对照翻译过来就是“存在一个而这个 x 是一只会飞的象”, 与“有会飞的象”相比, 它显得累赘了。

隔行对照翻译法最感棘手的是全称量词。让我们考虑一下命题“人总是要死的”。以 H 表示人类的集合, 以谓词 M 表示“是要死的”, 则 $M(x)$ 可读作“x 是要死的”,现在原命题可写成

$\bigwedge_{x\in H} M(x)$,“对人类集合 H 中的所有 x, x 是要死的”,

或者

$\bigwedge_x[(x\in H)\rightarrow M(x)]$,“对所有 x, 如果 x 属于人

类集合 H,那么 x 是要死的"。
显然,后两句都比原先的"人总是要死的"累赘。如果要将形式化了的语言列入教学内容,那么这种翻译是必不可少的、有用的练习。若用 J 表示集合"是要死的"来代替上述谓词 M, 则上述命题还可以复杂化,变成

$$\bigwedge_{x\in H} x \in J,$$

或 $$\bigwedge_x [(x \in H) \to (x \in J)],$$

或 $$H \subset J。$$

对于 $\bigwedge_x F(x)$, 我们通常把它读作或听人读作半形式化的句子:"对所有的 $x, F(x)$。"我不喜欢用不发音的逗号这种非算法的东西把两个数学句子分开。也有人把它读作:"对所有的 x 有 $F(x)$ 成立。"但其中的"成立"又高级了一点, 我想还是读作"对所有的 x 都有 $F(x)$"比较合适。

我们已经注意到日常语言中约束手段的使用很活跃, 表示同一种约束可以有许多手段, 同一手段又常用来表示不同的约束。尽管现在教科书越来越多地采用符号式编写,但有关数学公式的内容通常还是用日常语言编写的,人们试图利用日常语言的复杂性将约束关系简明化,不是简单地说"$f(x)$ 为零"而说"对所有的 $f(x)$ 为零", 或者"$f(x)$ 总是为零", 或者"$f(x)$

全都为零”。假如要强调存在性约束,我们就说“对适当的 $x, f(x)$ 为零”或者“对某个 $x, f(x)$ 为零”,或者“$f(x)$ 有时为零”前面,我谈过如何将连续概念的一种朴素定义“如果 x 变化一点点,则 $f(x)$ 也变化一点点”逐步形式化到较高的严谨水平上,这里,第一个“一点点”是“充分地小”含有一个存在量词,第二个“一点点”是“任意地小”,含有一个全称量词,当然,还要注意量词的序。所有这些都不是在形式的准则下进行的,因为这个朴素的连续性定义虽然不够精确,但能与精确定义建立正确的联系。如果我们最终将连续性定义彻底形式化了,那么我们对量词和量词的序也就不存在任何疑惑了。

在定义连续的过程中,我们用了三种语言:日常语言、一种适应数学需要的日常语言的变形、完全形式化的语言。学生必须学会和掌握将一种语言翻译为另一种语言,但是隔行对照翻译法的用处极其有限,要把一段文字从形式化程度较低的语言翻译成形式化程度较高的语言,必须先理解这段文字;反之,则至少要很好地掌握形式化程度较低的语言,以保证译文通顺。在过去的几十年中,半形式化的日常语言有了很大发展,现在,大多数数学工作者已经很好地掌握了它,大学生也能学得很轻松。当然,教师要清楚这些学

生还不熟悉这种语言，要耐心地教，要给学生练习的机会。但要举握完全形式化的语言就不同了，除逻辑学家外，我想恐怕不会有相当多的数学工作者真正熟悉这种语言的，至少可以说，他们（也包括我自己）缺少这方面的训练。我们可能在黑板上见过类似

$\exists$ 群 G，它满足 $\forall$ 真子群 $H \subset G$，……

的写法，存在量词后面跟的不是数学变量而是一个普通名词，并接着说"满足……"，这种写法已成了某些数学工作者的习惯。对没有明确指出量词的日常语言或半形式化的日常语言，用隔行对照法翻译成完全形式化的语言，那出错就更多了。比如，将"所有由正数组成的数列的集合"翻译成 $\{\{a_n\}|a_n > 0\}$；将"正系数多项式的集合"翻译成 $\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n|a_i>0, i=0,1,\cdots,n\}$ 等。在日常语言中，对其表达方式的限制可以有较大的自由，但在形式化的语言中，我们就必须按照这神语言的精神去做。中学的逻辑教学也存在这个问题，而且更严重。逻辑的运用常常是华而不实，只是为了让别人和他自己相信他已处于很高的知识水平，而一旦需要运用实质性的量词，便只好作罢，或者索性回到安全的日常语言中去。如果我们允许让

$\bigwedge_{a,b,c}[(a+b)c=ac+bc]$ 与 $\{x \in N|x$能被 7 整除$\}$

一起出现,那么,所有代数公式中的全称量词都要明确岂不成了一句空话? 不会到处都提倡使用完全形式化的语言,我敢预言,形式化的语言会继续发展,但适应数学的日常语言的变形也必将随之日趋成熟。在强调细节时,形式化的语言占优势,但在强调整体理解时,改造过的日常语言则更有效。

训练学生把注意力放在形式化上,而不是放在形式体系上,这并不容易。主要是因为学生不容易掌握量词以及量词之间的约束方式。像“有人”、“没有人”、“有时”、“总是”、“某处”、“处处”这些词所隐含的量词以及它们的约束方式都很清楚,但像“一点点”、“多”、“小”、“大”这些词所隐含的是什么量词,以及量词间排的序又怎样,就得花力气去发现了。

在表示“对所有的 x 都有 $F(x)$”时,我将它记作

$F(a) \wedge F(b) \wedge F(c) \wedge \cdots$,或者简写为 $\bigwedge_x (F(x))$
在表示“存在一个 x 有 $F(x)$”时,我将它记作

$F(a) \vee F(b) \vee F(c) \vee \cdots$,或者简写为 $\bigvee_x (F(x))$
但逻辑学家是反对这样写的。他们认为,这种无限的表达式无法恰当定义,并同从有限和不加解释地过渡到无限和这种危险做法是完全一样的。但实际上这种类比是不相干的。我的这种记法仅与儿童在停止数数

时说“等等”相仿，或者与 $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ 中的省略号所表达的意思类似。如果命题逻辑已经建立在公理化的基础上了，而且在有限并和交之后，人们对无限并和交的处理就好像它们也有意义一样，那么这种指责是对的。但我们并不是在一个公理系中这样做的，我们用的是开放的，可作修改和补充的语言。如果要我向不懂数学的人解释公式 $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$，那么我会演示给他看 $1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16$，然后写上“等等”，我希望他看到这“等等”时能知道该怎样继续下去。教逻辑也是这样，为了解释“对所有的 x 都有 $F(x)$”的含意，我告诉他 $F(x)$ 对 a、对 b、对 c 等等都成立。在教学中，这些做法都是极其自然的，但偏不允许写下来或是印在课本里。其实，要讲清“不是所有的”与“有些不是”，“没有”与“所有的都不是”是一样的，要让学生运用量词并观察它们的规则，不联系具体的背景怎么可能呢？有哪一位逻辑学家能只从公理的角度去理解 $\bigwedge_x$ 和 $\bigvee_x$，而不受导出这些符号的直观经验的任何影响？即便有这样的逻辑学家，但硬要把学生的心理状态也设想成这样就完全没有道理了。引入 $\bigwedge_x$ 时，我强调从 $F(a) \wedge F(b) \wedge F(c) \wedge \cdots$ 出

发;引入 $\bigvee_x$ 时,强调从 $F(a)\vee F(b)\vee F(c)\vee\cdots$ 出发,这不仅有助于学生理解 $\wedge$ 和 $\vee$ 的规则,也为学生在运用交和并的过程中感受其简洁、合理性提供了一次机会。比如,从 $\neg\bigwedge_x F(x)$ 到 $\neg(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c)\wedge\cdots$ 到 $\neg(F(a)\vee F(b)\vee F(c)\vee\cdots$ 到 $\bigvee_x F(x)$。另外,对 $\bigwedge_x F(x)$ 和 $\bigvee_x F(x)$,我建议用 $\forall_x F(x)$ 和 $\exists_x F(x)$,这样做既自然又合理。

记号 $\wedge$ 和 $\vee$ 后的 x 常常还要受一定的限制,比如

$\bigwedge_{x\in V} F(x)$,对 V 中所有的 x 都有 $F(x)$,

和 $\bigvee_{x\in V} F(x)$,V 中存在一个 x 都有 $F(x)$。

知道如何用不受限制的自由变量 x 来表达它们很重要,第二句中,“$x\in V$”是 x 除有 $F(x)$ 之外的又一附加条件;第一句中,只要求已满足 $x\in V$ 的那些 x 有 $F(x)$。所以,它们又可记作

$$\bigwedge_x[(x\in V)\to F(x)],$$

和

$$\bigvee_x[(x\in V)\wedge F(x)]。$$

这里,括号中一个是“$\to$”,一个是“$\wedge$”,细心的学生对此常有疑问。虽然理由已经说得很清楚了,但是教学中还是不让它们一起出现为好。为此,应把前者改写为 $\bigwedge_x[\neg(x\in V)\vee F(x)]$,即 $\bigwedge_x[(x\in V)\vee F(x)]$。它的否定是 $\bigwedge_x\neg[(x\in V)\vee F(x)]$,或者 $\bigvee_x[(x\in V)\wedge F(x)]$。把 $x\in V$ 写回到下标,就是 $\bigvee_{x\in V}\neg F(x)$,

这就说明 $\bigwedge_{x\in V} F(x)$ 的否定是 $\bigvee_{x\in V} \neg F(x)$。类似地，可以猜想出 $\bigvee_{x\in V} F(x)$ 的否定是 $\bigwedge_{x\in V} \neg F(x)$，经验证,也确实如此。

量词的含义直到出现几种量词互换时，才能被鉴别出来,这一点我们在分析连续性概念的时候就有体会了。要研究量词就必须练习量词串。我在自己的《逻辑语言》一书中介绍了大量可供练习的例子。请看关系 K,xKy 读作"x 是 y 的一个孩子。"

$\bigvee_x \bigvee_y xKy$:某人是一个孩子，

$\bigvee_y \bigvee_x xKy$:有个人有一个孩子，

$\bigvee_x \bigwedge_y xKy$:某人是每个人的孩子，

$\bigvee_y \bigwedge_x xKy$:某人以每个人为他的孩子，

$\bigwedge_x \bigvee_y xKy$:每个人都是某人的孩子，

$\bigwedge_y \bigvee_x xKy$:每个人有一个孩子，

$\bigwedge_x \bigwedge_y xKy$:每个人是每个人的孩子，

$\bigwedge_y \bigwedge_x xKy$:每个人以每个人为孩子。

再看一例：

$G(x,t)$ 表示:我在时刻 t 抓住东西 x，

$S(x,t)$ 表示:我在时刻 t 看见东西 x，

$t < t'$ 表示:时刻 t 先于时刻 t'。

翻译下面一段话：

我总是看见一些东西，

有时我什么也没看见,

有朝一日所有东西都会被我看见,

只要我看见什么,我就立刻抓住它,

除非我以前看见过那样东西, 否则我就没有抓住它。

答案是:

$\bigwedge_t \bigwedge_x S(x,t)$

$\bigwedge_t \neg \bigwedge_x S(x,t)$,等价于 $\bigwedge_t \bigwedge_x \neg S(x,t)$,

$\bigwedge_t \bigwedge_x S(x,t)$,

$\bigwedge_t \bigwedge_x [S(x,t) \to G(x,t)]$,

$\bigwedge_t \bigwedge_x \{\neg G(x,t) \vee \bigvee_{t'} [(t' < t) \wedge S(x,t')]\}$,

或者写成

$\bigwedge_t \bigwedge_x \{G(x,t) \to \bigvee_{t'} [(t' < t) \wedge S(x,t')]\}$。

这些看来都是毫无意义的编造,但那些曾花大力气去掌握连续性概念的人都会同意这和数学有关。要想得出连续性的精确定义就必须在带有隐含量词命题的形式化上多加训练。以往,人们总认为不等式是造成学习连续性概念的困难所在,其实,这可通过训练解不等式来解决。我国学生从开始学代数起就训练解不等式了,但大学生学习连续概念时仍然常常感到困难。所以,问题的关键并不在此,而在于那些量词。连续性是现代数学尤其是微积分不可缺少的复杂的

逻辑结构之一，中学数学中是否要引入，以及该到什么深度，我们已在前面作了探讨，但大学数学系的学生却是越早接触量词越好。

几年前我曾考虑过一个问题，中学数学怎样处理量词才能避免量词累积成堆？结果却使我感到惊讶。原来，中学数学早就知道这些危险的量词堆，而且奇怪的是，量词堆是在一向被认为从逻辑上说比几何简单的代数中。我从一本问题集中选了一个例子，类似的例子在我们的教科书中也有。这个例子就是：

（a） 如果 $-x^2+ax+b$ 对一切 x 都为负，那么 a 和 b 必须满足什么条件？

（b） 如果 a 的值满足上述条件，那么 b 必须满足什么条件？

（b）形式化后，就是 $?_b \bigvee_a \bigwedge_x(-x^2+ax+a+b<0)$。可以看到，尽管这里也出现了量词 $\bigwedge_x$ 和 $\bigvee_a$，但和连续性概念中的量词相比，在难度上有很大的差别。这里的 $\bigwedge_x$ 好比是一只纸老虎，由于 $\bigwedge_x(-x^2+ax+a+b<0)$ 与 $a^2+4(a+b)<0$ 等价，于是，问题可转化为 $?_b \bigvee_a \bigwedge_x[a^2+4(a+b)<0]$。$\bigvee_a$ 样也是一只纸老虎，利用判别式，可将问题转化为 $?_b(16-16b>0)$。这个例子中的量词其实是算法量词，即我们利用算法就可把命题 $\bigwedge_x F(x)$ 化成一个没

有量词 $\bigwedge_x$ 的命题。但对连续性概念，我们就无法做到这一点，我们不知道用什么算法可把其中的量词全部去掉，对于这种非算法量词初学者不容易理解，而类似上述含有算法量词的难题看似有好几个量词，有一定的逻辑难度，实际上却是吓唬人的东西，这种练习可以很容易地加以简化，练习它们没有好处恐怕还有坏处。学生在解数学问题时所遇到的困难.尤其是在中学向大学过渡时期以及直接应用学校数学时所遇到的困难，会不会就是由于训练这些并没有真正逻辑深度的练习而造成的呢？会不会正是这些含有算法量词的长期练习阻碍了学生对非算法量词的理解呢？我担心答案恐怕都是"是的"。这种练习对学生和教师都会产生某种障碍，而且对教师的影响更严重，因为青年人还有希望冲破这种障碍。

教师培训的一条原则就是要让教师知道得比他输出的更多，这个"更多"不仅仅指教学内容，也包括同一内容的不同形式，即对教学内容及其逻辑形式都要了如指掌。要达到这一目标，他应该具备了解教学内容的逻辑深度的能力，如果逻辑不仅是间接证明、定理的转化、等价性等等，那么逻辑就能帮他具备这种能力。数学教师不仅要教逻辑，更要用逻辑，并使学生明白他们自己正在使用着的逻辑。除此之外，教师对

自己所选择的展示教学内容的方法也要了如指掌，对此也用得上逻辑分析，倒不是因为知识的逻辑结构决定着教学方法，而是因为通过逻辑分析，我们可以发现理解的层次以及层次间的逻辑联系。对此范·希尔夫妇的分析已经告诉我们可以从数学中学到很多东西。他们指出：每一个新的层次都要在前一层次的基础上才能达到。

附录

皮亚杰及其学派关于数学概念发展的研究

编译者注：

本附录是原书著者对皮亚杰（*Piaget*）一些工作的评论。我们为力求忠实于原意，对这部分内容不搞编译而照原文翻译，并特请周克希先生对译稿做了校订和修改，谨此志谢。

在前面一些章节中，我对皮亚杰工作提出的比较概括性的批评需要有更详细一些的论据。这里我想先要强调的是，他的工作中有着丰富的思想，虽不能说他是天才，但他是有独创性的，尽管有时难免聪明过度。

有些教学法专家和教科书作者滥用皮亚杰的名字，来为自己的工作加上一道神圣的光圈。这不能归罪于皮亚杰。相反，数学家们从未对皮亚杰的工作作过响亮的批评，这才是一个不可饶恕的过错。本来皮亚杰是能够从他们的批评中得到教益的，也许他还会

愿意听取批评的。无论如何这种批评只会使皮亚杰工作的真正重要性何在显得更加明朗。

数学家们的批评不应限于皮亚杰工作中那些纯数学（或可说是伪数学）方面，数学家应能指出，在皮亚杰的问题中哪些是合适的，哪些是歪曲的，而且只要使用点滴常识，他们就能最好地揭露皮亚杰的实验和解释中的众多谬误。

我这里的分析将限于皮亚杰及其同事的四本著作[①]。皮亚杰的工作还有大量的后继文献，其中有许多含有同样类型的错误，还有一些错误甚至是相当严重的，但我在这里不能涉及了。

在读皮亚杰的著作时，数学家们会被许多细节弄糊涂的，尤其是他有借用数学术语的习惯，并以相去甚远的意思来应用。如果一个数学家谈到拓扑空间、射影空间、欧氏空间时，他所指的是一些有着完善定义的概念。"拓扑方法"、"射影方法"、"欧氏方法"等可

---

① N：J. Piaget & Alina Szeminska，La dunombreChezrenfant，Neuchâtel-Paris 1941。
G：J. Piaget，Bärbel Inhelder & Alina Szemingka，La géométric spontanée de l'enfant，Paris 1948。
E：J. Piaget & Bärbel Inhelder，La représantation de l'espace chez l'enfant，Paris 1948。
L：J. Piaget & Bärbel Inhelder，La génèse des structures logiques élementaires，Neuchâtel 1959。

能是含糊的术语，但是不会产生误解，而且如果需要的话，就可以给出精确一些的阐述。例如，通过群论的观点加以阐述。如果说，皮亚杰以更加含糊的方式使用这些术语，而且经常与数学上的本意相差很大，那么这是很难责怪他的。但是如果教学法专家和教科书编写者在谈到皮亚杰时而不指出皮亚杰所说的概念并不与相应的数学概念一致，那么他们就有分担制造混乱的责任了。皮亚杰对基数、序数、映射、变换群等等数学概念的误解，其后果是很坏的。因为所有这些误解都从各个方面对他的实验方法施加了决定性的影响。其中最糟糕的是一些由于无知而产生的大错，例如他竟然以为：一个圆柱体的直径折半而高度增大一倍时，其体积不变！

皮亚杰对于数学的见解

正如前面已经说过的那样，我并不想讨论那些细节。我想说明的是皮亚杰对整个数学的见解。一般说来，在皮亚杰的任何一本著作中，随处都可以见到带有某些数学色彩的讨论，但 E[1]是其中最突出的一本，这不仅是由于它的规格要比其他著作高，而且也因为

[1] 以 E 为标记的那本书，后文中的四个正体大写字母 N，G，E，L 皆属此意。

它在最后一章里集中讨论了许多数学内容。在读他的其他著作时,人们往往会跳过那些几乎没法读懂的有关数学的讨论内容,而在读到 E 的最后一章时,却无法回避这些集中的数学内容。我从这一章中摘选了一节内容,以便读者了解它的本来面目。我的译文可能不那么流畅,因为我不是一名专业翻译家——一旦当了专业翻译家,那就往往得翻译一些他本人根本不懂的东西了。下述段落摘自 E 的第 566 页到 570 页,其内容是皮亚杰所谓的构成欧氏空间的八种亚逻辑(infralogical)运算。

i 元素的加法和减法

我们取定一个(一维或多维的)物体,它相对于其他物体就占据了一个位置①,因此它确定了一个图形。该图形可以解释为物体的形状或是它的位置,这就是说,它可以解释为一个"空间的图形"或是位置体系中的一个有界部分。这种位置无非就是下面的运算 ii 所要讨论的物体相互之间的某种联系②;从心理学角度讲,运算 i 所要考虑的毕竟只是物体的形状而不是它的位置。因此,颠倒运算次序是不起作用的。将所考

① 译自法语 emplacement。

② 法语,rapports,我不将它译成"关系",因为"关系"一词将用于更专业性的地方。

虑的物体的各个部分合并或分离，就构成了运算 i 的内容：$A+A'=B,B+B'=C$，等等，它保证了对于该物体本身的位置和形状而言的整体守恒。

ii　位置和位移

现在，让我们考虑若干个离散的物体，并将它们按照任意一种排列方式，或是沿着一条直线顺序排列起来。这样就得到了 $A\to B\to C$，等等。我们说，这些物体相互之间"排好了位置"。但是，在构成欧氏空间的运算体系中，逆运算并不仅仅指把序列逆向转换成 $C\to B\to A$；所谓逆运算是指位置的改变，也就是位移，它可以颠倒整个序列，也可以只颠倒其中一个元素与另外一个或几个元素之间的位置，例如颠倒 $B\to C$ 成为 $A\to C\to B$。正如我们已经在别处详细说明过的那样，这种位移不仅引进了两种同类型相关运算之间的区分，而且也引进了元素顺序与位置顺序之间的区分。具体到底是哪一种情况，要视所考察的是这些运动所能改变的固定位置，还是可移动物体及其可能的位移而定。位移的概念在它被纳入通常称

作为"位移群"[1]的六参数度量群的范畴之前，只能停留在这些定性（内包）概念的水平上。

iii 基点的互反性[2]

现在让我们假设两个相邻的图形（由物体的形状或是它们的位置构成），以 A_1 为基点出发，按照类型 i 相加。于是，譬如说就得到了 $A_1 + A_1' = B_1$ 和 $B_1 + B_1' = C$。而以 A' 或 B_1' 为基点出发，并称之为 A_2，也能得到同样的和：C。因此，$A_2 + A_2' + B_2 = C$。这种运算 iii 连同高维的网格 iv 一起，建立了坐标系的互反性，其中 A_1 或 A_2 或 A_2' 看作为所讨论的每个坐标系的"原点"。

iv 区间和距离的嵌套[3]

---

① 法语 *groupe des déplacements*——这样看来，第一类运算是分离和合并，第二类是空间图形或部分空间的位移，例如直线上两段的换位。但是，在 *groupe des déplacements* 中，*déplacements* 并不是指一个图形的位移，而是指整个空间的运动。我不将它译成"运动群"是为了表明皮亚杰为何得出这种结论的。在皮亚杰的工作中，从未真正弄懂过变换群。位移不一定构成一个群，而皮亚杰考虑的那些位移甚至无法拓广到构成一个群。因此是与运动群毫不相干的。

② 我无法找到更适当的词来翻译"*réciprocité*"。根据法语数学词汇，这个词是错的。作者是指类似于等价性那样的意思。

③ 这个小标题可能有错。应该用 *relations symuietrique*（对称关系）替代 *emboîtements*（嵌套）；*emboîtements* 可能是指第 551 页上的一个类似的情况。这个词用在那里是有意义的。看来在作校对时这个错误给疏忽了。

位于一条直线上的两个点之间的区间间隔就是距离。距离的守恒是由下列事实保证的：直线和直线上的点虽然可以借助某个运动的物体实现转移，但却都从属于固定的位置。X 与 Y 之间由位移构成的关系是一种非对称关系①。距离则构成了相应的对称的区间关系；它是对称的，因为从 X 到 Y 与从 Y 到 X 的距离是相同的，即 $X \leftrightarrow Y = Y \leftrightarrow X$。

v　元素的双重单值②乘法

元素的线性序 $A_1 + A_1' = B_1, B_1 + B_1 = C$ 等等，与另一序列 $A_2 + A_2' + B_2$ 等等相乘，构成面。两者与第三个序列相乘，产生了体积。

vi　位置和位移关系的双重单值乘法

这些乘法就是上述的运算，不过现在它们是通过一些恰好构成一个坐标系的非对称关系（位置和位移的序）来表示的。这样的一个坐标系，实际上就是

① 在古典哲学词汇里，“关系”是一种容许进行比较的性质；“大”和“小”是关系，两点间的距离也是关系。用这个词时，仍受到了这种影响，但其中也有更“现代”的含义，例如，可以说两个城市由一条铁路建立起关系，这个关系是非对称的，因为从 X 到 Y 与从 Y 到 X 是不一样的，但是它们的距离是相等的，这就是“距离的守恒”。

② 法语：*bi-univoque*。我没有将它译成“一对一”，否则我就不知道怎样翻译 vii 中的 *co-univoque* 了。

作为那些基点（亦即那些被认为固定不动的物体）的函数的一个有序位置的网格[1]。在这个网格中，所有的位置都同时按二维或三维的方式进行排序。当其中的一个有序序列构成坐标系的一条轴时，另一有序序列就沿另一维构成了第二条轴，有序位置之间的这种区间间隔构成了运算 iv 下的不变距离。正如我们在第十二章到第十四章中所说明的那样，这种坐标系本来无需度量[2]。要弄明白这一点，只要比我们在第三章中的做法更明显地分析运算 vi 的结构就可以了。我们将每点按二维方式从 0 出发进行排序，得到一个位置的集合，每个位置在下面表中以黑点表示，彼此间则用虚线连接，并设如 a_1；a_1' 和 b_1'[3]或如 a_2；a_2' 和 b_2' 是联系它们的关系（即续线）。这些关系根据它们是用顺序来表示还是用距离来表示，可以分别地看作非对称或对称的，于是得到了右图。

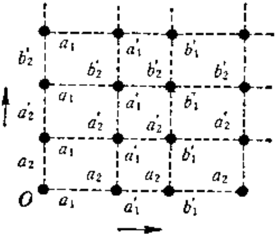
---

① 这儿的翻译不可靠。由于语法上的不一致（单、复数结构），原文无法确切地译出。网格或者位置是否有序这一点都弄不清楚，尽管两者都难以理解。

② 这里作者所指的意思在后文多少就比较清楚了，但在第十三到第十四章中，甚至还没有提到过这些内容。在那几章里，向被试者所提的问题不用到度量也能解答，那甚至还是最简便的解法。可能作者是想说：在第十二到第十四章中我们并不研究这种坐标系是否已经被看作是一个度量体系。

③ 最好用逗号代替分号。

可以看出，无论是位置关系还是距离关系，序列 $a_1 + a'_1 = b_1$，$b_1 + b'_1 = c_1$ 等等与 $a_2+a'_2 = b_2, b_2+b'_2 = c_2$ 等等，其中的每个序列仍然是内包的。因为在相继的 a，a' 和 b' 之间既没有一个共同的单位，又没有一种确定的联系①，但通过（相对于每一维的）双重单值对应，我们可以看出这些区间 a_1；a'_1 和 b'_1 或 a_2；a'_2 和 b'_2 都是恒同的——黑点所在的平行性显然保证了这种定性的相等②。



于是，这种位置关系的乘法表精确地说明了水平 IIIB 的儿童（第十三章至第十四章）是如何构造他们的参照系的。从距离的观点来看，由于缺少度量，这些被试者除了得出平行线之间的区间相等③的结论外，

① 法语 rapport，见前注。

② “恒同（identical）”和“相等（equal）”作同义词用。如果说到一些区间彼此“恒同”那可并不是同义反复；作者是指图中的事先用同样符号标出的那些区间是相等的。另一方面，用不同符号标出的区间之间则没有一定的量的关系：“关系仍是内包的”。

③ （原注）垂直方向的联系并不是这一理论的必要环节。但它

只能再得出 $a_1 < b_1$ 或 $a_1' < b_1$（如果 $a_1 + a_1' = b_1$）的结论。但是容易看出，测度的引入（即建立 a' 或 b 在度量上与 a 的联系）就足以把这样一个网格变换成数学坐标系①了。

vii 元素的多重单值乘法

与适合于前面的两个体系的双重单值对应不同的是，多重单值对应乘法在二维情况下，形成了三角形的概念，而在三维的情 a 下则形成了四面体的概念

viii 关系的多重单值乘法

这一组模式，是由两个渐进值②的非对称联系③生成的一个递增的对称区间，即如下图所示：

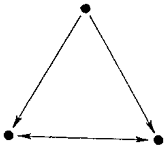
正如第十二章中所说明的那样，这个运算体系引出了一个如何在测度引入前对角进行定性估计的问题。

在二维情况下是由对应方向的极大对立原则给出的——现作者注：根据作者的意思，在这一水平上的儿童不可能对不同方向上的区间作比较，尽管他们能通过比较不同方向上的区间得出垂直的概念。

① 正如注 10 中所纠正的那样，这儿的说法也是错误的。作者让被试者以坐标系为工具，将地形纳入一个矩形框架，以设计他们的地图；他们根本没有考虑到儿童是否能通过比较长度的办法进行下去。因为按照作者的说法，这种能力是属于“图式化”的较高水平。

② “递增（*increasing*）”和“渐进（*progressive*）”是指按透视法的观点，从观察者的方向看上去，距离是增大的。

③ 法语 *rapports*。



这些就是我们在欧氏空间的亚逻辑构造中看到过的八组运算，显然，它们从形式上重现了第三章中用拓扑和射影概念描述的八个体系，虽然从每一个整体的体系化开始①，有一个新的意义，即当加上限定的说明时，它可使各种拓扑联系一体化了。“八”这个数意味着什么？它为什么不多不少正好是八？首先，这跟亚逻辑运算和逻辑运算之间的对应有关：合并，建立关系，以及按照相邻关系或空间位置的差异进行的乘法，或一般地讲，依据相似性和质的差异进行的乘法。虽然这些集合构造的意义从关系的观点来看可能迥然不同，但从分组的观点来看却是可以归结为同一回事的②。这就是我们为什么要重提前面在逻辑运算的范围里③描述过的八组形式的原因；从运算思想的

① 我不懂这里的原文。
② 这段译文很不可靠。
③ （原注）参见《逻辑符号的”群组”和思想的可逆性》（1942）中的“类，关系与数”。

功能一致性观点看，这种吻合是相当有趣的。在这一思维过程中，“八”这个数毋宁说是下述组合的一个任意的代表——这些组合正是根据定性的内包联系所可能有的全部组合：把元素或类（i）以及关系（ii）的简单序列相加；按各种可能的方向把它们相加，从而得出类和元素体系（iii）的互反性，并构造对称关系（iv），以及将它们相乘，亦即以类或元素（V）或关系（vi）的双重单值对应为工具，或以类和元素（vii）或关系（viii）的多重单值对应为工具，把两个或多个可相加序列结合进二维或多维的网格中去。由于从非对称和对称的对立导致的双重单值对应和多重单值对应的本质区别，我们最终得到了如下的组合：

$$2(\text{元素或关系}) \quad \times 2(\text{非对称或对称}) \quad \times 2(\text{加法或乘法}) = 8。$$

以上就是皮亚杰的主要思想。我们不妨把这个体系弄得更清楚一些：

（1）元素（集合）－关系，

（2）非对称－对称，

（3）加法－乘法。

我们把 0、1 两个数字分别排列在从右边算起的第一、第二和第三位上来表示上述（1）、（2）、（3），于是就有：

000　（i）　元素，非对称，加法：这是指区间的加法，但这种加法毕竟是可以在对称的意义上加以解释的。

001　（ii）　关系，非对称，加法：线性位移，虽然从未提及关系的加法，i 与 ii 之间的区别不是“加法下的元素关系”之别，而是“位置 –位移”之别。

010　（iii）　元素，对称，加法：有不同原点的线性参照系的等价性，亦称互反性。

011　（iv）　关系，对称，加法：距离概念。

100　（v）　元素，非对称，乘法。

101　（vi）　关系，非对称，乘法：都是坐标系的构造，不过 v、vi 之间并没有明显的差异，也就是说，既没有 i 和 ii 的位置与位移之间的那种差异，也没有 000 和 001 的元素和关系之间的那种差异。

110　（vi）　元素，对称，乘法。

111　（vii）　关系，对称，乘法。

按照这个模式，偶对“非对称-对称”是通过偶对“双重单值对应-多重单值对应”（平行射影-中心射影）反映出来的。作者特别强调了这一点，因为其他任何人都可能会反其道而行之（如果他真来考虑这个问题的话）。而前文中的两个图形清楚地表明了作者的原意也是正好跟现在的相反的。

作了这样的简短分析之后，上述摘录的本来面目已经非常清楚，无需再加任何评论了。不过，倘若我们问一句：这些思想是否对皮亚杰的工作有决定性的影响？这个问题还是颇为自然的。影响肯定是有的，但我怀疑是否有决定性的影响，至少我在E中就有这样的感受。E中的心理学实验集中在有关现象学领域（而不是现象的语言描述）确实能加以检验的陈述上。但即使在E中，仍然有不少借助于语言表述的痕迹，尤其是在第十四章里提到的，通过一种暗示性的实验设计，让被试者得以按照皮亚杰的关系间乘法的理论，亦即以笛卡儿（*Descartes*）坐标系为工具，重新构造起一种景观。把这些过错看得很严重固然没有必要，但倘若有人为了证实某一种教学法理论，对我们大谈其皮亚杰如何以心理学为出发点，利用笛卡儿坐标证明了欧氏几何云云，那就确实是大错特错了。

语言在皮亚杰实验中的作用

皮亚杰实验中的语言因素颇值得注意，即使是在儿童自己动手的实验中，实验的描述看起来也像是问答游戏。任何研究皮亚杰的人自然要问：被试者是否理解实验者所提的问题？或者问：儿童是否知道回答这些没有前因后果的问题到底是什么意思？在某些情况下，甚至实验者是否理解儿童的回答看上去也很令人怀疑。

有好几次，皮亚杰及其同事想必已经注意到了被试者是否理解所提问题这一点。实际上，有几次他们已提出了如下问题（N，第 12 页）：

> 事实上，人们有时可以问自己，他究竟是否弄懂了问题的含意：他是真的已经明白问题所指的是总量呢，还是仅仅以为问的就是杯子的个数有什么变化，或是杯子的高度或宽度有什么变化。然而，问题恰恰是要知道儿童能否把觉察到的种种联系[1]协调起来，从而把数量看成一个整体的对象。因而，不仅对概念本身的误解，而且语言上的误解都可能造成把上述各种联系中的某一种孤

---

[1] 法语 rapports。

> 立起来的后果，正如上文刚刚提到过的那些儿童的情况一样。①

你也许会想，作者大概是要设法排除第二种可能性的，但是实际上并不是这么回事。能有机会说明被试者之所以没有弄懂问题，主要是由于对概念不理解，而不是语言上有什么误解，这就已经完全使他们感到满意了。他们继续往下分析时，已经俨然把这番解释看作无懈可击了。在另外几处，关于被试者是否理解实验者所提出的基本问题的讨论，在真正展开以前就被同样粗暴的方式终止了。在 N 的第 55 页至 66 页中，有一个奇怪的情况：

> 但是我们不能提出反对，说什么这是由语言上的误解造成的：即使儿童承认当一堆瓶子和一堆杯子集拢在一起时，总数并没有改变，他也会回答：'这样更多了'②，他的意思只是说，集合的形状变化了，所占的空间增大了。而正是由于存在这种反对意见，以及很难消除由词引起的语言误解，我们才在这两章中添加了各种情况和例子。对新的事

① 法语原文中错误迭出。
② 译文可疑。

> 实调查研究越多，我们在这两种解释之间的选择也就越多[①]。

但如果观察本身有一贯的误差，那么即使对大量的观察数据取平均值，也还是会与正确的结论相差很远。事实上，在许多情况中，显然是问题未得到理解；有时甚至连儿童也是明确地这么说的。此外，由于一整套步骤的方向从一开始就是错误的，所以不妨说它们的难以理解是“先验的”。

作者已经或者至少应该认识到了用适当的语言描述他们所要提的问题的重要性，因为根据被试者的年龄或程度，问题多半采用了不同的措词。对于年龄很小的儿童，措词比较含混，有时甚至用的是“婴儿语言”；年龄稍大一些，问题阐述的精确性也增加一些，所以儿童的回答也会有所改进，这当然是并不奇怪的。但我们从中真正观察到的，并不是概念本身的发展，而是交流思想的技巧。当然，这一批评并不意味着其中全然没有概念的发展，而是说它并没有从诸多的干扰因素中真正被分离出来。

N 的出发点是：考察儿童是否懂得，以及在怎么样的程度上懂得：将一个容器中的液体倒入另一个

① 原文难以理解。

或几个容器中，并不影响液体的量。对被试者提出的问题是：倒动以后，容器里的液体是比原来多了，还是少了，还是跟原来一样。按照作者的意图，问的是液体的量，而不是容器的个数或者液面的高度。但是这一点并未包括在提供给儿童的信息中[1]。实验者的问题有时甚至会使人误解，其中主要是由于语言的缘故：英语中的“这个（容器里）多了吗?”和“这些（容器里）多了吗?”译成法语，都是同一句话“y en a-t-il plus?”还有比这更棘手的情况。就我本人的经验而言，我讲不出某个年龄段的儿童是否知道某些词汇。我只知道，讲法语的儿童的词汇量要比讲荷兰语或德语的儿童少。我要指出的是，最初步的要求应是在进行这种实验以前先弄清楚字典上的实质意义，而这一点完全被忽视了。我们明显地看到的恰恰是幼小儿童不懂 plus 和 moins（更多和更少），或者至少是不懂这两个词在实验的规定情景中的含意。实际上，他们用 beaucoup（许多）代替了 plus（更多），用 peu（一点点）代替了 moins（更少）；有时候，就连实验者自己也这么说［有些儿童懂得“plus

[1] 很难解释为什么要通过例外的情况来提供这个信息。例如，在 N,11 中对卡克很明确地解释说“较少”是指液体的量而不是指容器的个数。所以，他回答得比其他人好就不足为奇了。

grand”,“moins grand”(“比……大”,“不如……大”)中 plus 和 moins 的意思,但这两个词如果不加上表示数量的补足语的话,看来他们就不懂了][1]。

“相等”这个词的情况更糟。在与被试者交谈时,即使是对年龄大一些的儿童,实验者也不用 autant que(同样多)这个词,可能是觉得这样措词过于文绉绉的缘故吧。他们总是说 lamême chose(一样)。所以他们问儿童的是“Ya-t-il la même chose dans les deux verres?”(两个杯子里有的是一样的么?)(N,10),“est_ce qu'il y a la même chose de perles?”(有一样的一些珠子么?)(N,34),“y a-t-il la même chose d'oeufs et de coquetiers?”(有一样的一些蛋和蛋杯么?)(N,61),“c'est encore la même chose?”(还是一样么?)(N,64)。对于“它们一样吗?”这个问题,成人会反问道:“你的意思是什么?是指形状一样,重量一样,还是个数一样?”儿童则显然不敢这样问;即使心存疑问,他们也认为无论如何是必须回答的,虽然有

---

[1] 但是,存在着很奇怪的不一致的情形。N 的第一,二、四章中,被试者除了在作比较的情况外,都不懂 plus(更多)和 moins(更少)的意思。但是在第三章中,同样年龄的儿童却又很熟悉这些词——虽说他们对作比较的情形也较生疏。这是什么原因呢?是因为第二组的儿童进行过使用 plus,moins 的训练呢,还是因为实验者不同,致使编写原则也不一致了呢?

时也会说“我不知道”（N，85）。然而，这根本没有能促使实验者去解释“一样”在特定情况下的含义。要是他真这么做了，就等于是摊牌了，不正是这样吗？将一些硬币或豆子放在桌上，形成某个构图，再要求儿童摆一个“一样的”。儿童会把这理解为“一样的图形”，而没有人会向他们解释实际意义是什么（N，80起）。要他们用火柴梗按照由硬币摆成的图形摆一个一样的图形；如果他们说摆不了，实验者也不向他们作任何解释（N，85）。实验者总是假设被试者在每种情况下都是在实验者所指的意义上理解了“一样”的意思。对于年龄大一些的儿童，他们取得成功的机会多一些，于是实验者就认为这证明了“相等的数”，“相等的量”，“相等的容量”，“相等的形状”等概念在这样或那样的方式下发展起来了。实际上他们所观察到的结果仅仅是不同年龄的儿童是怎样适应成人的含糊不清的表达方式而已。

语言交流问题在（N，202）开始且在 L 中又有所推广的系列实验中表现得更为突出。实验者给儿童看一些木制的珠子，其中大部分是棕色的，还有几颗是白色的。然后问这些被试者是木珠子多还是棕色珠子多。年龄很小的儿童通常会回答：“棕色珠子多。”这个实验以许多种变化形式作了重复（L，104起）：给被试

者看 20 张彩色图片，其中 16 张上有花；有花的图片中，有 8 张是报春花，其中又有 4 张是黄色的。问题是这样提的："花比报春花多吗？黄色的报春花比报春花多吗？"在一个类似的实验里，则用动物替代了花。根据这些实验结果，皮亚杰下结论说儿童并不掌握包含关系。其实，由于这个实验兼有两重困难：首先是包含关系；其次是两个相交集合的数值比较。所以，这个结论无论如何是错误的。事实上，典型的问题应该是："你用棕色珠子或是用木珠子来串成链子，哪一种能串得更长一点？"考察的首要问题应该是确定对两个不能同时形成的集合进行比较是不是太难了。但这还不是主要之点，根本问题还是语言上的误解。

如果问一个大人，是棕色珠子多，还是木珠子多（棕色珠子都是木珠子），他就会反问："你是不是指其他的那些木珠子？"同样，有关花的问题，他会问："你是不是指报春花比其他的花多？黄花比其他颜色的花多？"这种将木珠子与棕色珠子，花与报春花相提并论的做法，在日常语言中是被看作明显的错误的——虽然它们有时被用来开玩笑，或是用来表示一种贬意，诸如"狗尾巴比狗长"或是"人与黑人"等等。实验者利用这些错误的句法结构对儿童耍把戏。但是，如果儿童竟然也敢这么随意乱说，例如他们也说"花与报春

花”的话，作者就会评论说：照孩子们这么说法，“似乎报春花不是花了”（L，130）。为什么不能允许儿童也犯一犯他们看到的大人犯过的语言“错误”呢？为什么不能在实验者提出错误的问题之后，也让儿童有权思考“似乎报春花不是花”，然后再按实验者是指“其他的花”这个问题的情况来回答这个问题呢？从这些实验完全看不出它们是在测试对包含关系是否掌握，实际上还不如说它们是在对语言行为进行测试。G·A·科恩斯坦姆（Kohnstamm）[①]所作的实验证明了，在一次简单的语言训练之后，大部分被试者的回答是符合要求的。其他的实验[②]也表明，一般的语言练习就足以使儿童对皮亚杰式的问题的反应得到改进。

皮亚杰用来说明小年龄儿童不懂得包含概念的另一个实验过程是这样的（L，65 起）：例如，向被试者出示蓝色圆形，蓝色方形和红色方形。如果：“问全部的圆形都是蓝的吗？”“全部的方形都是红的吗？”小年龄儿童一般都作了“错误回答”。至于这些儿童之所以作出“错误回答”的原因，皮亚杰解释说是他们并不懂得词“全部”在句子中的地位决定了句子的意思。

---

① 见 *Acta Psyohologica* 21（1963）313 页。

② 见 I. E. Sigel，Annemarie Roeper and F.H.Hopper：*British Journay of Educational Psychology* 36（1966）301 页至 311 页。

实际上，在语言上尚无技巧的儿童怎么能寻找到途径去通过下列一大片问题丛林呢："全部的圆形都是蓝的吗?""全部蓝色的都是圆形吗?""圆的全部是蓝的吗?""蓝的全部是圆的吗?""这些全部是红的吗?""全部这些都是红的吗?"这些问题可能对成人来说也是挺难回答的（见 L,105）。在他们的漂亮的分析中（L,73 ~ 78）作者已差不多要得出：儿童面对的所有困难是与"全部"一词的所处地位有关的语言困难的结论了，只是到了最后一刻才出人意料地宣称，所有困难是未掌握包含关系。

然而，这些回答说明了一直被皮亚杰及其同事忽略了的另一方面。我的意思是指儿童还不懂什么叫形式化的答案。如果我走进一间会议室，问："全部椅子都坐满了吗?"而某人回答："没有，你可以坐在长条凳上。"这就是一种回答，但不是对形式化问题的回答，而是对一个延伸出去的问题："我可以坐在哪里?"的回答。这就是皮亚杰的被试回答问题的方式。他们习惯于从童义上面不是从形式上回答问题，因为他们并不知道这些问题所要适应的是像书籍这样一种供出版的体系。他们压根儿不会想到这一层，因为他们还没有碰到过要应付"你是否不再打你妻子了"之类问题的情况。

与“全部”这个词相类似的一大堆问题是关于“一些”的问题（L，79 起，尤其是 97 至 98 页）。儿童必须竭尽全力去澄清其中的含糊概念。有人对你说：“给我一些郁金香”[1]，则你如果给他一枝郁金香，或是把全部郁金香都给他，那都是不对的。而对儿童提出的问题是：“全部的郁金香都是花吗？”“一些郁金香是花吗？一些花是郁金香吗？”“全部的花都是郁金香吗？”“全部的郁金香是一些花吗？”

单元素集和空集

皮亚杰声称，幼小儿童还没有认识到单元素集也是集合，这可能是对的，因为这些儿童还没有任何形式化的集合的概念。但有趣的是皮亚杰用实验（L，124）证明了它：

> 我们用的是一套有三个或六个三角形的卡片。被试者必须猜出哪一张背面打了一个叉。根据下面的特征可以辨认出这张卡片：它在色彩上是唯一的（例如，三张卡片中有两张是黄三角形，一张是蓝三角形）……

[1] *Quelques tulipes*（一些郁金香）——法语中不存在两个不同的词分别对应于英语中的 some 和 a few。

注意，并没有告诉儿童这张卡片就正面来说也是唯一的。这就出现了这样的结果：年龄大一些的儿童的得分要比年龄小的儿童差，即五至七岁的儿童有50%做对了，七至九岁的有75%做对了，十至十二岁的却只有33%做对了。作者以下列论据解释了这种“倒挂”现象：

> 被试者人为地将一个对他来说过于简单的问题弄得复杂了。

对此已无须评论了。事实上，这个实验与单元素集并不相干。

有关空集也是如此，我从（L,149）摘录如下：

> 实验采用最自然的正方形，圆形，三角形卡片，有一些上面画有树、水果、房子等等图画，另一些上面没有图画。由于要分类，先是任意分，而后是一分为二，我们就容易看到被试者的反应，他是否会因为某些卡片上没有图画而感到困惑，或者是否会把自己的注意力转移到特征很明显的例如形状一样的全部元素上去。

在分类时，被试者忽视了空白卡片的集合：

“……儿童不肯构造空集。”

按照皮亚杰的意思，空白卡片的集合就是空集。看了我们前面引用的 E 中的内容以后，这些已经不会再令人震惊了。

实验的设计

大部分的实验要求过高。他们给儿童的不是一项简单的任务，而是几项任务的组合。像儿童能否在两个集合之间建立一一对应关系这类简单任务，并不是孤立地提出的，而是在非常复杂的背景下出现的；在倾倒液体的实验过程中，对几个儿童所提的问题都仅仅是要他们说出长颈瓶中液面的变化情况（他们都答对了），并不要求他们系统地考察这种情况，实验者对儿童的态度则是一味在语言上找他们的岔子。

有好几次还出现这种情形：一项实验的一般说明和对一个个被试者的实施情况之间互相并不一致（N，53）。关于实验的讨论有时牵涉到其他的被试者，而不是实验过程（N，162：蒂斯并不存在）；有时讨论到其他事实，而不是以前已经报告过的事实（N，162：狄特）儿童的回答常常被理解错了，突出的例子如下

（G,101）：两个类似的布娃娃放置在不同高度，问儿童是A到B远还是B到A远[1]。被试者答道：

> 距离不一样。因为下面的小人看到上面小人的脚，而上面的小人看到下面小人的眼睛……对下面的小人来说要远一些，因为它比较高。

可惜的是，在开始那两句说得挺好的评述之后，儿童接下去将上、下弄颠倒了。而更令人遗憾的则是实验者并没有懂得那两句评述。

我最后引述一个更基本的观点. 在（E,537）中，我们看到：

> ……年龄很小的被试者在实际进行这些活动以前，是无法设身处地地想象这些活动的结果的（甚至是最简单的活动）。

的确，这是一条重要的原理。它在E中比别处出现得更经常。然而，在与被试者的谈话中，实验者更多的是停留在思想实验上。这不仅诱发了儿童的错误，而且还有更糟的影响，会导致实验者让儿童去参加一些无法以预期的方式进行的实验，或者参加一些一经实际操作其结果便会令实验者大吃一惊的实验。

[1] 按照皮亚杰的观点，年龄很小的儿童是不明白距离的对称性的。

MATHEMATICS AS

AN EDUCATIONAL TASK

HANS FREUDENTHAL

作为教育任务的数学

〔荷兰〕 弗赖登塔尔 著

陈昌平 唐瑞芬 等编译

上海教育出版社出版发行

（上海永福路 123 号）

（邮政编码：200031）

各地新华书店经销　　上海市印刷四厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 13.75 插页 4 字数 332,000

1995 年 3 月第 1 版　　1999 年 2 月第 2 次印刷

印数 2,001－4,020 本

ISBN 7-5320-2983-2/G・2913 定价：16.50 元

中小学数学教学论著译丛

作为教育任务的数学

[荷兰] 弗赖登塔尔 著

陈昌平 唐瑞芬等 编译

上海教育出版社