1

数的开方与实数

1.1 方根的意义

我们来看这样一个问题:

什么数的平方等于 25? 这个问题就是要求平方后等于 25 的这样一个数. 我们把这个数叫做 25 的**二次方根**, 也叫做 25 的**平方根**.

因为 $5^2 = 25$,$(-5)^2 = 25$, 所以 5 和 -5 都是 25 的平方根. 同样,$(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$,$(-\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$, 所以 $\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{2}{3}$ 都是 $\frac{4}{9}$ 的平方根;$(0.6)^2 = 0.36$,$(-0.6)^2 = 0.36$, 所以 0.6 和 -0.6 都是 0.36 的平方根.

一般地说, 如果一个数的平方等于 a, 那末这个数就叫做 a 的**平方根**.

我们再看:$4^3 = 64$, 我们就说 4 是 64 的**三次方根**, 也叫

做 64 的**立方根**. 又如,$(-3)^3=-27$, 所以 -3 是 -27 的立方根;$(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$, 所以 $\frac{2}{3}$ 是 $\frac{8}{27}$ 的立方根.

一般地说, 如果一个数的立方等于 a, 那末这个数就叫做 a 的**立方根**.

同样, 因为 $2^4=16$,$(-2)^4=16$, 所以 2 和 -2 是 16 的**四次方根**.$(-3)^5=-243$, 所以 -3 是 -243 的 五次方根.

一般地说, 如果一个数 x 的 n 次方等于 a, 就是 $x^n=a$, 我们就说 x 是 a 的 n **次方根**.

求一个数的方根的运算叫做**开方**. 求 a 的平方根的运算叫做把 a **开平方**; 求 a 的立方根的运算叫做把 a **开立方**. 一般地说, 求 a 的 n 次方根的运算叫做把 a **开** n **次方**. 这里,a 叫做**被开方数**,n 叫做**开方的次数**. 例如:

把 25 开平方, 被开方数是 25, 开方的次数是 2; 把 64 开立方, 被开方数是 64, 开方的次数是 3.

[注意] 开方是一种运算, 方根是开方运算的结果; 正象加、减、乘、除、乘方是运算, 和、差、积、商、幂是运算结果一样.

根据方根的意义, 我们可以知道, 乘方和开方互为逆运算(就是说开方是乘方的逆运算, 乘方是开方的逆运算), 所以我们可以利用乘方来检验开方的结果是不是正确, 或用观察的方法求某些简单的数的方根.

例 1 检验下列各题:

(1) 0.2 是不是 0.008 的立方根?

(2) $\frac{3}{5}$ 和 $-\frac{3}{5}$ 是不是 $\frac{9}{25}$ 的平方根?

(3) 3 和 -3 是不是 -27 的立方根?

[解] (1) $\because \quad (0.2)^3=0.008$,

$\therefore \quad 0.2$ 是 0.008 的立方根.

(2) $\because \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}, \left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$,

$\therefore$ $\frac{3}{5}$ 和 $-\frac{3}{5}$ 都是 $\frac{9}{25}$ 的平方根.

(3) $\because$ $(-3)^3=-27$, 而 $3^3=27$,

$\therefore$ -3 是 -27 的立方根,

而 3 不是 -27 的立方根.

例 2 求下列各数的平方根:

(1) 121; (2) $\frac{25}{64}$.

[解] (1) $\because$ $(\pm 11)^2=121$,

$\therefore$ 121 有两个平方根 11 和 -11.

(2) $\because$ $\left(\pm\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$,

$\therefore$ $\frac{25}{64}$ 有两个平方根 $\frac{5}{8}$ 和 $-\frac{5}{8}$.

习题 1.1

回答下列各问题:

1. 7 和 -7 是不是 49 的平方根?
2. $\frac{1}{3}$ 是不是 $\frac{1}{27}$ 的立方根?
3. 2 和 -2 是不是 8 的立方根?
4. $\frac{1}{9}$ 和 $-\frac{1}{9}$ 是不是 $\frac{1}{81}$ 的平方根? 9 是不是 $\frac{1}{81}$ 的平方根?
5. 0.3 和 -0.3 是不是 0.0081 的四次方根?
6. $-\frac{3}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 是不是 $-\frac{27}{64}$ 的立方根? $-\frac{1}{4}$ 是不是 $-\frac{1}{64}$ 的立方根?
7. $\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{2}{3}$ 是不是 $-\frac{1}{32}$ 的四次方根?
8. $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 是不是 $-\frac{1}{32}$ 的五次方根?
9. 平方后等于 64 的数, 共有哪几个? 64 的平方根共有哪几个?

10. 平方后等于 $\frac{16}{169}$ 的数有哪几个? $\frac{16}{169}$ 的平方根有哪几个?

1.2 方根的性质

在上一节里, 我们看到,5 和 -5 都是 25 的平方根,2 和 -2 都是 16 的四次方根;4 是 64 的立方根,-3 是 -243 的五次方根. 从开方次数来看, 开平方, 它的开方次数是 2, 开四次方, 它的开方次数是 4,2 和 4 都是偶数, 所以说, 平方根, 四次方根都是偶次方根. 开立方, 它的开方次数是 3, 开五次方, 它的开方次数是 5,3 和 5 都是奇数, 所以说, 立方根和五次方根都是奇次方根. 下面就分奇次方根和偶次方根来研究方根的性质.

1. 奇次方根的性质

我们来看下面的例子:

(1) $2^5 = 32$,2 就是 32 的 5 次方根; 任何不等于 2 的数, 它的 5 次方都不等于 32; 所以,32 的 5 次方根只有一个数 2. 又如,$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$,$\frac{1}{3}$ 就是 $\frac{1}{27}$ 的 3 次方根; 任何不等于 $\frac{1}{3}$ 的数, 它的 3 次方都不等于 $\frac{1}{27}$; 所以,$\frac{1}{27}$ 的 3 次方根只有一个数 $\frac{1}{3}$. 不仅如此, 我们还可以看到,32 是正数, 它的 5 次方根 2 也是正数; 同样, 正数 $\frac{1}{27}$ 的 3 次方根 $\frac{1}{3}$ 也是正数. 这就是说, 正数的奇次方根是一个正数.

(2) $(-0.3)^3 = -0.027$,-0.3 是 -0.027 的 3 次方根; 任何不等于 -0.3 的数, 它的 3 次方都不等于 -0.027; 所以,-0.027 的 3 次方根只有一个数 -0.3. 又如,$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{32}$,$-\frac{1}{2}$ 是

$-\frac{1}{32}$i 的 5 次方根; 任何不等于 $-\frac{1}{2}$ 的数, 它的 5 次方都不等于 $-\frac{1}{32}$; 所以,$-\frac{1}{32}$ 的 5 次方根只有一个数 $-\frac{1}{2}$. 同样我们还可以看到,-0.027 是负数, 而 -0.3 也是负数;$-\frac{1}{32}$ 是负数, 而 $-\frac{1}{2}$ 也是负数. 这就是说, 负数的奇次方根是一个负数.

(3) 因为零的任意次幂都等于零, 所以零的奇次方根仍旧是零.

综合上面的例子, 我们可以得出奇次方根的性质如下:

> 正数的奇次方根只有一个, 并且是一个正数; 负数的奇次方根也只有一个, 并且是一个负数; 零的奇次方根仍旧是零.

2. 偶次方根的性质

我们再来看下面几个例子:

(1) $7^2=49, (-7)^2=49$,7 和 -7 都是 49 的平方根; 任何绝对值不等于 7 的数, 它的平方都不等于 49; 我们还知道,49 是一个正数,7 和 -7 虽然一个是正数, 一个是负数, 但是它们的绝对值是相同的, 它们是两个互为相反的数. 所以,49 的平方根有两个, 并且只有两个互为相反的数 7 和 -7.

又如,$(0.2)^4=0.0016, (-0.2)^4=0,0016$,$0.2$ 和 -0.2 都是 0.0016 的四次方根; 任何绝对值不等于 0.2 的数, 它的四次方都不等于 0.0016; 同样, 我们还知道,0.2 和 -0.2 是两个互为相反的数. 所以,0.0016 的四次方根也有两个, 并且只有两个互为相反的数 0.2 和 -0.2.

这就是说, 正数的偶次方根是两个相反的数.

(2) 因为正数的平方是正数, 负数的平方还是正数, 零的

平方也是零, 所以没有一个数的平方等于负数因此负数没有平方根.

(3) 因为零的任意次幂都等于零, 所以零的偶次方根仍旧是零.

综合上面的例子, 我们可以得出偶次方根的性质如下:

> 正数的偶次方根是两个相反的数; 负数的偶次方根没有意义; 零的偶次方根仍旧是零.

[注意] 关于零的方根, 我们综合起来说: 零的任何次方根仍旧是零.

1.3 方根的记法

前面我们已经学过方根的意义, 懂得了什么叫做方根, 为了书写简便, 我们需要用一个符号来表示它.

从上一节方根的性质里, 我们知道, 一个数的奇次方根只有一个, 所以当 n 是奇数的时候,a 的 n 次方根可以用一个符号 $\sqrt[n]{a}$ 来表示 (这里 n 是奇数). 符号“$\sqrt{\ }$”叫做**根号**, 这里 a 是**被开方数**,n 是**根指数**. 例如,

8 的立方根用符号 $\sqrt[3]{8}$ 表示;-32 的五次方根用符号 $\sqrt[5]{-32}$ 表示;$-\dfrac{1}{27}$ 的立方根用符号 $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}$ 表示.

因为正数的偶次方根有两个, 它们是两个相反的数, 所以当 n 是偶数时, 正数 a 的偶次方根就需要用两个符号来表示, 通常用符号 $\sqrt[n]{a}$ 来表示正的一个, 而用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 来表示负的一个 (这里 a 是正数,n 是偶数). 例如,

16 的四次方根有两个:$+2$ 和 -2, 我们用 $\sqrt[4]{16}$ 来表示正的一个, 就是 $+2$, 而用 $-\sqrt[4]{16}$ 来表示负的一个, 就是 -2.

$\frac{1}{81}$ 的四次方根有两个:$+\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$, 我们用 $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ 表示正的一个, 就是 $+\frac{1}{3}$, 而用 $-\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ 表示负的一个, 就是 $-\frac{1}{3}$.

表示正数的偶次方根, 为了简便起见, 有时可以把它的两个方根合并写在一起, 用符号 $\pm\sqrt[n]{a}$ 来表示 (这里,n 是偶数,a 是正数). 例如, 上面两个例子里,16 的四次方根可以用符号 $\pm\sqrt[4]{16}$ 来表示;$\frac{1}{81}$ 的四次方根可以用符号 $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ 来表示.

用符号表示平方根的时候, 通常把根指数 2 省略不写. 例如,9 的平方根有两个, 一个是 $\sqrt{9}$, 就是 $+3$, 另一个是 $-\sqrt{9}$, 就是 -3, 而不写成 $\sqrt[2]{9}$ 和 $-\sqrt[2]{9}$. 如果合并起来写, 就写成 $\pm\sqrt{9}$, 而不必写成 $\pm\sqrt[2]{9}$, 同样,36 的两个平方根可以合并写成 $\pm\sqrt{36}$, 而不必写成 $\pm\sqrt[2]{36}$.

[注意] 用根号来表示方根的时候, 书写必须清楚, 根指数要用小一点的字体写在根号的左上角, 如果写成“$n\sqrt{a}$”的形式, 那就错误地变成 n 和 $\sqrt{a}$ 的乘积了.

习 题 1.3

1. 下面的一些方根里, 哪些有意义? 哪些没有意义? 有意义的要求出方根的值, 没有意义的要说明为什么没有意义.

(1) 27 的立方根; (2) -27 的立方根;

(3) $\frac{1}{4}$ 的平方根; (4) -4 的平方根;

(5) 0.0001 的四次方根; (6) 0 的四次方根;

(7) -1 的四次方根; (8) 32 的五次方根;

(9) $-\frac{1}{8}$ 的立方根; (10) -0.0016 的四次方根.

2. 用方根的符号表示下列各题:

(1) 36 的平方根; (2) 100 的平方根;

(3) -64 的立方根; (4) $-\frac{8}{27}$ 的立方根;

(5) -32 的五次方根.

1.4 算术根

在研究方根的性质时, 我们已经知道, 正数的偶次方根是两个相反的数, 并且用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示正的一个方根, 而负的一个方根则用 $-\sqrt[n]{a}$ 来表示. 为了区别这两个方根, 我们规定:

正数的正的方根, 叫做**算术根**.

零的任何次方根都是零, 通常我们也把它叫做算术根, 就是说, 我们规定**零的算术根是零**. 这样规定以后, 当 a 是正数或者零的时候, 符号 $\sqrt[n]{a}$ 所表示的方根都是算术根.

例如,4 的平方根有两个:$\sqrt{4}$ 和 $-\sqrt{4}$ 就是 $+2$ 和 -2, 而 $+2$ 叫做 4 的算术平方根,81 的四次方根有两个:$\sqrt[4]{81}$ 和 $-\sqrt[4]{81}$, 就是 $+3$ 和 -3, 而 $+3$ 是 81 的四次算术根.

从算术根的意义可以看出, 如果方根满足下列两个条件的, 就是算术根: 一个条件是被开方数是正数 (或者是零), 另一个条件是方根的值是正的 (或者是零). 象前面所举的例子中, 被开方数 4 是正数, 取正的一个方根 2, 所以 2 是 4 的算术平方根, 同样, 我们知道, 正数的奇次方根是一个正数, 显然, 被开方数是正的, 方根的值也是正的, 它也满足算术根的两个条件, 所以也叫做算术根. 例如,$\sqrt[3]{8}=2$, 被开方数 8 是正数, 方根的值也是正数, 所以 2 是 8 的算术立方根. 同样,3 是 27 的算术立方根,$\frac{1}{2}$ 也是 $\frac{1}{8}$ 的算术立方根.

但是,-2 不是 -8 的算术立方根,-3 也不是 -27 的算术立方根, 因为被开方数都不是正数, 并且方根的值也都不是正数.

例 1 求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{125}$;　　(2) $\sqrt[3]{-1}$;　　(3) $\sqrt[4]{81}$;

(4) $\sqrt{(-5)^2}$;　　(5) $\sqrt{(-3.4)^2}$;　　(6) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$.

[解] (1) $\because \quad 5^3=125, \qquad \therefore \quad \sqrt[3]{125}=5$.

(2) $\because \quad (-1)^3=-1, \qquad \therefore \quad \sqrt[3]{-1}=-1$.

(3) $\because \quad 3^4=81, (-3)^4=-81$, 而 $\sqrt[4]{81}$ 表示 4 次幂是 81 的两个数中正的一个,

$$\therefore \quad \sqrt[4]{81}=3.$$

(4) $\because \quad \sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}$, 而 $\sqrt{25}$ 表示平方是 25 的两个数中正的一个 (或者叫做 25 的算术平方根), $\therefore$

(5) $\because \quad \sqrt{(-3.4)^2}=\sqrt{3.4^2}=\sqrt{11.56}$, 而 $\sqrt{11.56}$ 表示平方是 11.56 的两个数中正的一个,

$$\therefore \quad \sqrt{(-5)^2}=5.$$

(6) $\because \quad \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}}$, 而 $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 表示平方是 $\frac{4}{9}$ 的两个数中正的一个 (或者叫做 $\frac{4}{9}$ 的算术平方根),

$$\therefore \quad \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}.$$

例 2 (1) $\sqrt{6^2}$ 是不是等于 6?

(2) $\sqrt{(-6)^2}$ 是不是等于 -6?

[解] (1) $\because \quad \sqrt{6^2}=\sqrt{36}$, 而 $\sqrt{36}$ 表示 36 的算术平方根 6,

$$\therefore \quad \sqrt{6^2}=6.$$

(2) $\because \quad \sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}$, 而 $\sqrt{36}$ 表示 36 的算术平方根 6,

$$\therefore \quad \sqrt{(-6)^2}\neq -6, \quad 而 \quad \sqrt{(-6)^2}=6.$$

从这个例子可以得到启发: 当 a 是正数的时候,$\sqrt{a^2}=a$; 当 a 是负数的时候,$\sqrt{a^2}$ 不等于 a, 而等于 a 的相反的数 $-a$; 当 $a=0$ 的时候,$\sqrt{a^2}=\sqrt{0}=0$.

例如上题中的 (1),$a=6$, 是正数, 所以 $\sqrt{a^2}=a$, 就是 $\sqrt{6^2}=6$. 但是在 (2) 中,$a=-6$, 是负数, 所以 $\sqrt{a^2}\neq a$, 而 $\sqrt{a^2}=-a$, 就是 $\sqrt{(-6)^2}=-(-6)=6$.

在代数第一册里学有理数的绝对值时, 已经知道, 正数的绝对值就是它本身; 负数的绝对值是和它相反的数; 零的绝对值是零. 如果用数学式子来写, 就是

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{当}a>0\text{的时候}), \\ 0 & (\text{当}a=0\text{的时候}), \\ -a & (\text{当}a<0\text{的时候}). \end{cases}$$

如果跟这里所讲的 $\sqrt{a^2}$ 的情况相对比, 可以看出它们的结果是一样的. 因此, 我们可以得到:

$$\boxed{\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (\text{当}a>0\text{时}), \\ 0 & (\text{当}a=0\text{时}), \\ -a & (\text{当}a<0\text{时}). \end{cases}}$$

[注意] 这个结论要清楚地掌握, 以后经常要应用/

习 题 1.4

1. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{64}$;　　(2) $\sqrt[3]{-64}$;

(3) $\sqrt{81}$;　　(4) $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$;

(5) $\sqrt{0.36}$;　　(6) $\sqrt{1}$;

(7) $\sqrt[n]{1}$(n 是大于 1 的整数); (8) $\sqrt[n]{0}$(n 是大于 1 的整数);

(9) $\sqrt[2n+1]{-1}$(n 是任意正整数).

[提示: 先考虑当 n 是任意正整数时,$2n+1$ 是奇数还是偶数.]

2. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt{(2.54)^2}$;　　(2) $\sqrt{(-2.54)^2}$;

(3) $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2}$;　　(4) $\sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2}$.

1.5　完全平方数的开平方

我们来看下面这些等式:

$$25=5^2,\ \frac{9}{16}=\left(\frac{3}{4}\right)^2,0.04=(0.2)^3.$$

这里第一个等式就是说,25 这个数等于另一个数 5 的平方的结果. 同样,$\frac{9}{16}$ 和 0.04 分别是 $\frac{3}{4}$ 和 0.2 的平方的结果.

如果一个有理数 a 等于另一个有理数 b 的平方, 就是 $a=b^2$ 那末, 这个有理数 a 叫做**完全平方数**[①] . 例如,25,$\frac{9}{16}$,0.04 等都是完全平方数.

因为没有一个数的平方等于负数, 也就是说, 任何一个负数都不能等于另一个数的平方. 因此, 很明显, 负数都不可能是完全平方数.

一些简单的完全平方数, 我们可以用心算的方法求得它们的算术平方根.

例如:　$\sqrt{121}=11$;　$\sqrt{169}=13$;

$\sqrt{225}=15$;　$\sqrt{289}=17$;

$\sqrt{324}=18$;　$\sqrt{361}=19$.

由以上的例子看出, 被开方数越大, 它们的算术平方根也越大.

分数是由分子和分母 (都是整数) 所组成, 如果能够找到一个规律, 把分数的开平方转化成分子和分母的开平方, 就可以按照上面的方法计算了, 我们看到:

---

① 有的书上定义“自然数平方以后所得到的数叫做完全平方数”.

因为 $\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$, 所以 $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

但是 $4=\sqrt{16}, 5=\sqrt{25}$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}.$$

这就是说, 分子和分母都是正数的分数, 它的算术平方根就是用分子的算术平方根做分子, 分母的算术平方根做分母所组成的分数.

因此, 如果分数里的分子和分母都是完全平方数, 我们就可以用完全平方数的开平方方法求得它的算术平方根.

例 求下列各分数的算术平方根:

$$\frac{16}{49};\quad \frac{25}{144};\quad 2\frac{34}{81}.$$

[解]

$$\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}}=\frac{4}{7};$$

$$\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}}=\frac{5}{12};$$

$$\sqrt{2\frac{34}{81}}=\sqrt{\frac{196}{81}}=\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{81}}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}.$$

[说明] 如果被开方数是带分数, 先把它化成假分数, 然后开平方, 并将最后结果仍旧化成带分数.

习题 1.5

回答下列各问题: 求下列各数的算术平方根:

1. 81. 2. 400. 3. 256. 4. 3600. 5. 10000.

6. $\frac{49}{100}$. 7. $\frac{169}{289}$. 8. $\frac{225}{361}$. 9. $2\frac{46}{49}$. 10. $18\frac{1}{16}$.

1.6　开平方的一般方法

一些简单的完全平方数的开平方，我们可以从某数的平方结果试算出来，但是出较复杂一些的，就很不容易看出．下面我们来研究一个正数的开平方的方法．

1.　整数的开平方

我们来研究这样一个题目：求 529 的算术平方根．

第一步：首先确定 529 的算术平方根的位数．我们知道

$$
\begin{array}{ll}
1^2 = 1, & 9^2 = 81, \\
10^2 = 100, & 99^2 = 9801, \\
100^2 = 10000, & 999^2 = 998001, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

这里,1 和 9 都是一位数,1 是最小的一位数;9 是最大的一位数．同样,10 和 99 是二位数，一个最小，一个最大;100 和 999 是三位数，一个最小，一个最大,……．由此可见，一位数的平方是一位数或者两位数，两位数的平方是三位数或者四位数，三位数的平方是五位数或者六位数,……．反过来，也可以看到，一位数和二位数的平方根有一位整数，三位数和四位数的平方根有两位整数，五位数和六位数的平方根有三位整数,……．根据这个规律，我们可以把一个整数从右向左每隔两位用一个撇号分开，所分得的段数就是这个数的算术平方根的整数位数，例如把 529 撇成 529，它有两段，所以 529 的算术平方根是两位整数．

第二步：根据它的左边第一段里的数，确定算术平方根的第一位上的数．

因为 $2^2 = 4, 3^2 = 9$，而左边第一段里的数是 $5, 2^2 < 5 < 3^2$，所以 529 的算术平方根的十位数字只能是 2(如果是 3，3^2 大于 5，显然不可能)．

第三步: 确定 $\sqrt{529}$ 的个位数字, 假设个位数字是 a, 因为十位数是 2, 实际表示 $2\times10=20$, 所以就可以把这个算术平方根写成 $20+a$ 的形式, 就是

$$\sqrt{529}=20+a.$$

两边平方, 得

$$529=(20+a)^2.$$

就是

$$529=20^2+2\times20a+a^2.$$

两边都减去 20^2(就是 400), 得

$$129=2\times20a+a^2=(2\times20+a)\cdot a.$$

就是说, 所得的 129 应该等于 $(2\times20+a)\cdot a$. 从这个关系, 我们就可以求出这个平方根的个位数字 a.

如果把 $(2\times20+a)$ 看作近似于 2×20, 用 2×20(就是 40) 去试除 129, 得到 3.

要确定 a 的值是不是 3, 只要把 3 代入 $(2\times20+a)\cdot a$,–看它的值是不是等于 129 就可以了. 现在 $(2\times20+3)\cdot3=129$, 这就说明 a 的值的确是 3. 因此,$\sqrt{529}=23$.

上面所说的计算过程, 可以用下面的形式写出来:

$$\begin{array}{rrl}
 & 2\ \ 3 & \\
 & \sqrt{5'29} & \cdots\cdots(20+a)^2 \\
 & 4\ 00 & \cdots\cdots 20^2 \\
20\times20+a=40+3= & \overline{43\mid 1\ 29} & \cdots\cdots 2\times20a+a^2 \\
a=3 & \underline{\mid 1\ 29} & \cdots\cdots(2\times20+a)\cdot a=43\times3 \\
 & 0 &
\end{array}$$

在计算的时候, 上面这个书写形式可以简写成下面的形式;

$$
\begin{array}{r}
2\quad 3\\
\sqrt{5'29}\\
4\ 00\\
\hline
43\ |\ 1\ 29\\
|\ 1\ 29\\
\hline
0
\end{array}
$$

这里, 在根号上面对着第一段 5, 先写十位数字 2(实际表示 20), 把 $2^2=4$(实际表示 400) 写在 5 的下面,$5-4=1$(实际表示 100), 把被开方数的第二段 29 移下来得到 129. 在竖线的左边写上 2 的 2 倍 (实际表示 $2\times 20=40$), 用 40 去试除 129 得到试商 3, 在根号上面对着第二段 29 写上 3, 同时在竖线左边的 4 的右边写上 3, 得到 43. 用 43 乘以 3, 得到 129,$129-129=0$, 这就得到 $\sqrt{529}=23$.

例 1 求 $\sqrt{1444}$.

[解]

$$
\begin{array}{r}
3\quad 8\\
\sqrt{14'44}\\
9\\
\hline
68\ |\ 5\ 44\\
|\ 5\ 44\\
\hline
0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{1444}=38.$$

[说明] 在本题中, 先把 1414 从右向左每隔两位用撇号分开. 根据左边第一段里的数 14, 因为 $3^2=9$,$4^2=16$, 而 $3^2<14<4^2$, 所以 1444 的算术平方根的十位数字只能是 3. 从 14 中减去 3^2(就是 9), 余 5, 再把被开方数的第二段 44 移下来得到 544. 在竖线的左边写上 $3\times 2=6$(实际表示 60); 将 544 除以 60, 得到试商 9, 那末竖线左边照理应该写 69, 但是 $69\times 9=621$;

大于 544, 所以改用 8, 而 68×8 的积刚巧等于 544. 因此, 确定了 1444 的算术平方根的个位数字是 8.

四位数以上的整数的开平方, 也可以按照同样的方法来计算.

例 2 求 $\sqrt{84681}$.

[解] 把 84681 从右向左每隔两位用撇号分开, 得到三段, 计算的时候, 还是根据左边第一段先确定百位数字, 然后依次确定十位数字和个位数字.

$$
\begin{array}{rl}
 & \ 2\quad 9\quad 1 \\
 & \sqrt{8'46'81} \\
 & \ 4 \\ \hline
49 & |\ 4\ 46 \\
 & |\ 4\ 41 \\ \hline
581 & |\ 5\ 81 \\
 & |\ 5\ 81 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{84681} = 291.$$

[说明] 在本题第二步计算中,446 除以 40 得到试商 11, 但是这里只能是一位数, 所以改用 $9.49 \times 9 = 441,446 - 441 = 5$, 再把被开方数的第三段 81 移下来得到 581. 在确定个位数字的时候, 把 $29 \times 2 = 58$(实际表示 580) 写在竖线的左边, 按照第二步计算的同样方法来求得个位数字, 要特别注意, 不能只把 $9 \times 2 = 18$(实际表示 180) 写在竖线的左边, 进行计算.

例 3 求 $\sqrt{501264}$.

[解]

$$
\begin{array}{r}
7\quad 0\quad 8\\
\sqrt{50'12'64}\\
49\\
\hline
1408\ |\ 1\ 12\ 64\\
|\ 1\ 12\ 64\\
\hline
0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{501264}=708.$$

[说明] 在本题第一步计算中,50 减去 49, 余 1. 写下被开方数的下一段 12 得到 112. 用 140 去除 112, 不够商 1, 所以在算术平方根的第二位上写 0(就是十位数字等于 0), 再把被开方数的第三段 64 写下来, 得到 11264, 然后用 1400 去除 11264, 求得商 8.

例 4 求 $\sqrt{22146436}$.

[解]

$$
\begin{array}{r}
4\quad 7\quad 0\quad 6\\
\sqrt{22'14'64'36}\\
16\\
\hline
87\ |\ 6\ 14\\
|\ 6\ 09\\
\hline
9406\ |\ 5\ 64\ 36\\
|\ 5\ 64\ 36\\
\hline
0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{22146436}=4706.$$

[说明] 在本题第三步计算中, 用 940 去除 564, 不够商 1, 所以在算术平方根的第三位上写 0, 再把被开方数的第四段 36 写下来, 得到 56436. 然后用 9400 去除 56436, 求得商 6.

(1) 把被开方数从右向左每隔两位用撇号分开.

(2) 从左边第一段求得算术平方根的第一位数字.

(3) 从第一段减去这第一位数字的平方, 再把被开方数的第二段写下来, 作为第一个余数.

(4) 把所得的第一位数字乘以 20, 去除第一个余数, 所得的商的整数部分作为试商 (如果这个整数部分大于或者等于 10, 就改用 9 作试商. 如果第一个余数小于第一位数字乘以 20 的积, 则得试商 0).

(5) 把第一位数字的 20 倍加上试商的和, 乘以这个试商, 如果所得的积大于余数时, 就要把试商减 1 再试, 直到积小于或者等于余数为止, 这个试商就是算术平方根的第二位数字.

(6) 用同样的方法, 继续求算术根的其他各位数字.

整数开平方的一般方法

习 题 1.6 (1)

用直式开平方法求下列各式的值:

1. $\sqrt{676}$. 2. $\sqrt{1251}$. 3. $\sqrt{1849}$. 4. $\sqrt{2209}$.
5. $\sqrt{3364}$. 6. $\sqrt{3721}$. 7. $\sqrt{7396}$. 8. $\sqrt{9604}$.
9. $\sqrt{64009}$. 10. $\sqrt{256036}$. 11. $\sqrt{499849}$.
12. $\sqrt{64064016}$.

3. 小数的开平方

求小数的算术平方根, 也可以用整数开平方的一般方法来计算, 但是在用撇号分段的时候有所不同. 求纯小数的平方根, 分段时要从小数点起向右每隔两位用撤号分开, 如果小数点后的最后一段只有一位, 就添上一个零补成两位. 例如把 0.6257 撇成 $0.62'57$,0.801 撇成 $0.80'10$.

因为混小数有两部分, 小数点的左面是整数部分, 小数点的右面是小数部分, 所以求混小数的平方根, 分段时要从小

数点起向左把整数部分每隔两位用撇号分开，从小数点起向右把小数部分每隔两位也用撇号分开，例如把 175.2976 撇成 $1'75.29'76$.

不论求纯小数或者混小数的平方根，除了分段跟求整数平方根的分段不同外，其余的计算和求整数平方根里所讲的一样，但是要注意所得的平方根里的小数点的位置，就是说平方根的小数点要对准被开方数的小数点.

例 5 求 (1) $\sqrt{0.4624}$;　　(2) $\sqrt{0,000729}$.

[解] (1)

$$
\begin{array}{r|r}
 & 0.\ 6\ \ 8 \\
 & \sqrt{0.46'24} \\
 & 36 \\
\hline
128 & 10\ 24 \\
 & 10\ 24 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{0.4624} = 0.68.$$

(2)

$$
\begin{array}{r|r}
 & 0.\ 0\ \ 2\ \ 7 \\
 & \sqrt{0.00'07'29} \\
 & 4 \\
\hline
47 & 3\ 29 \\
 & 3\ 29 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{0.000729} = 0.027.$$

例 6 求 $\sqrt{170.0416}$

[解]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1\ \ 3.\ 0\ \ 4 \\
 & \sqrt{1'70.04'16} \\
 & 1 \\
\hline
23 & 70 \\
 & 69 \\
\hline
2604 & 1\,04\,16 \\
 & 1\,04\,16 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{170.0416} = 13.04.$$

习题 1.6 (2)

用直式开平方法求下列各式的值:

1. $\sqrt{0.3481}$.　2. $\sqrt{0.7569}$.　3. $\sqrt{0.1369}$.　4. $\sqrt{0.6084}$.
5. $\sqrt{0.000961}$.　6. $\sqrt{0.002401}$.　7. $\sqrt{0.003249}$.
8. $\sqrt{56.7009}$.　9. $\sqrt{16.6464}$.　10. $\sqrt{552.7201}$.

1.7　近似平方根

上两节里所讲的开平方, 由于被开方数都是完全平方数, 所以开方都能够开尽. 但是并不是所有被开方数都是完全平方数, 例如, 我们要求 2 的算术平方根, 开方就永远开不尽.

我们知道,$1^2 < 2$, 就是 $\sqrt{2} > 1$, 而 $2^2 > 2$, 就是 $\sqrt{2} < 2$, 所以看出 $\sqrt{2}$ 一定介于 1 和 2 之间, 就是 $1 < \sqrt{2} < 2$. 这就是说,1 接近于 $\sqrt{2}$ 但是小于 $\sqrt{2}$, 而 2 接近于 $\sqrt{2}$ 但是大于 $\sqrt{2}$. 在这种情况下, 我们说,1 是 $\sqrt{2}$ 的精确到 1 的**不足近似值**,2 是 $\sqrt{2}$ 的精确到 1 的**过剩近似值**.

[说明] 所谓精确到 1, 就是把数值计算精确到个位. 如果说精确到 0.1, 就是把数值计算精确到十分位. 余类推.

一个正数开平方, 如果只求出它的不足近似值或者过剩近似值, 那末这个求得的近似值, 叫做这个数的**近似平方根**.

求一个正整数或者正小数的近似算术平方根，我们仍旧可以用前面学过的开平方的一般方法算出精确到任意哪一位的近似值. 下面举例来说明.

例 1 求 $\sqrt{2}$(精确到 0.001).

[审题] 题中要求精确到 0.001，开方要计算到四位小数，再应用四舍五入法则，取三位小数.

[解]

$$
\begin{array}{rl}
 & 1.\ 4\quad 1\quad 4\quad 2 \\
 & \sqrt{2.00'00'00'00} \\
 & 1 \\ \hline
24 & |\ 1\ 00 \\
 & |\quad 96 \\ \hline
281 & |\ 4\ 00 \\
 & |\ 2\ 81 \\ \hline
2824 & |\ 1\ 19\ 00 \\
 & |\ 1\ 12\ 96 \\ \hline
28282 & |\ 6\ 04\ 00 \\
 & |\ 5\quad 65\quad 64 \\ \hline
 & \quad 38\quad 36
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{2} \approx 1.414.$$

[说明] 1. 这里，开方开到 1 后，没有开尽，添两个零成一段再开方，得 1.4，还开不尽，再添两个零成一段再开方，得 1.41，还开不尽，再添两个零成一段再开方，直到算出平方根到四位小数为止.

2. 因为万分位上是 2，它小于 5，根据四舍五入法则把它舍去即得 2 精确到 0.001 的近似乎方根 1.414.

3. 符号是近似符号，就是说这个值是近似值.

例 2 求 $\sqrt{10.3}$(精确到 0.01).

[审题] 题中要求精确到 0.01, 开方要计算到三位小数, 再应用四舍五入法则取二位小数.

[解]

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.\ \ 2\ \ \ 0\ \ \ 9 \\
 & \sqrt{10.30'00'00} \\
 & 9 \\
\hline
62 & 1\ 30 \\
 & 1\ 24 \\
\hline
6409 & 6\ 00\ 00 \\
 & 5\ 76\ 81 \\
\hline
 & 23\ \ \ 19
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{10.3} \approx 3.21.$$

[说明] 这里, 被开方数原来是 10.3. 因为小数点后只有一位, 所以先添一个零补成两位. 开到 3.2 后, 没有开尽, 再添两个零成一段再开方, 以下相同. 照题目要求,10.3 的算术平方根只要精确到 0.01, 但是千分位上的数开出来是 9, 所以根据四舍五入法则, 把百分位上的 0 改成 1, 取 $\sqrt{10.3} \approx 3.21$

求分数的近似算术平方根, 可把分数化成小数后再计算. 例如,

$$\sqrt{3\frac{2}{7}} \approx \sqrt{3.2857} \approx 1.81(\text{精确到 } 0.01).$$

习 题 1.7

求下列各数的近似算术平方根:

1. 15(精确到 0.01).
2. 95.3(精确到 0.01).
3. 5.57(精确到 0.01).
4. 36.85(精确到 0.01).
5. 157.1(精确到 0.01).
6. 0.0348(精确到 0.01).
7. 1866.2(精确到 0.1).
8. $3\frac{5}{8}$(精确到 0.001).

1.8　平方根表和它的用法

利用上面的开平方的方法, 我们可以求出一个正数的算术平方根或者近似算术平方根. 但是这样的计算比较麻烦, 为了迅速而正确地求出一个正数的算术平方根, 可利用平方根表来查得. 在《中学数学用表》(中小学通用教材数学编写组编, 人民教育出版社出版,1978 年 1 月第 1 版) 这本小册子里就附有平方根表, 下面就根据这个平方根表来讲它的用法,

根据《中学数学用表》中的平方根表所求出的平方根, 通常是近似根, 这个表中的平方根都是取四个数字. 就是说, 近似数从左面第一个不是零的数起到最末一位数止, 有四个数字, 而末位数是由四舍五入得出的.

在《中学数学用表》的平方根表 (第 5 页至 9 页) 中, 是把 1.00 到 99.9 的各个数的算术平方根编列成的. 下面举例来说明这个表的用法、

例 1 求 $\sqrt{1.65}$.

[解] 从《中学数学用表》第 5 页的表里最左边的标有“N”的这一直行中, 找出被开方数的前两位数 1.6, 从这个数横着向右看, 查到顶上第一横行里标有数字 5 的一行, 得到 1.285, 这就是 1.65 的近似算术平方根.

$$\therefore\quad \sqrt{1.65}\approx 1.285.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319	1.323	1.327	1.330	1.384	1.338	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356	1.360	1.364	1.367	1.371	1.375	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411	0	1	1	1	2	2	3	3	3

例 2 求 $\sqrt{16.5}$.

[解] 从第 7 页的表里最左边的标有“N”的这一直行中，找出被开方数的前面两位数 16，从这个数横着向右看，查到顶上第一横行里标有数字 5 的一行，得到 4.062，这就是 16.5 的近似算术平方根.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924	3.937	3.950	3.962	3.975	3.987	1	3	4	5	6	8	9	10	11
16	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050	4.062	4.074	4.087	4.099	4.111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17	4.123	4.135	4.147	4.159	4.171	4.183	4.195	4.207	4.219	4.231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18	4.243	4.254	4.266	4.278	4.290	4.301	4.313	4.324	4.336	4.347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19	4.359	4.370	4.382	4.393	4.405	4.416	4.427	4.438	4.450	4.461	1	2	3	5	6	7	8	9	10

从上面两个例子可以看出，查平方根表的时候，必须注意被开方数的小数点的位置. 例如，$\sqrt{1.65}$ 和 $\sqrt{16.5}$ 的查法就不同，因为 1.65 的整数部分只有一位数，而 16.5 的整数部分有两位数，所以在查平方根表时就要在两个不同的地方去查.

[说明] 在表的底下一行和顶上一行标有间样瘀“N”和 0 到 9 十个数字，它的作用只是为了在用到表的下半部分的数时查看方便，并且可以避免看错格子，造成错误.

我们在平方根表里，看到表的右边有九行小格子，这叫做**修正值**，是用来计算被开方数的第四个数字的. 也就是说，利用修正值，我们可以查出有四个数字的被开方数的平方根. 现在看下面的例子.

例 3 求 $\sqrt{15.73}$.

现在被开方数 15.73 有四个数字，但是按照上面两个例的那样查法，平方根表里只能查出三个数字，就是 15.7，那末第四个数字 3 怎样查呢？这就要利用修正值.

[解] 先按照上面例子中所讲方法查出 $\sqrt{15.7} \approx 3.962$(就是标有“15”的横行与顶上标有“7”的直行的交叉地方的数值). 再从标有“15”的横行向右看，查到表的右边的修正值这一部分里

顶上标有数字 3 的一行 (就是从表的最右边算起的第七行), 得到修正值是 4, 因此要在 3.962 的末位数上加上 4. 就是

$$3.962 + 0.004 = 3.966.$$

$$\therefore \quad \sqrt{15.73} \approx 3.966.$$

如果要查四位以上的数的算术平方根, 因为超出了中学数学用表可以查的范围, 所以先要把这个数根据四舍五入法则变为从第一个不是零的数字起只有四个数字的数, 再按上面方法查表.

例 4 求 $\sqrt{46.082}$.

[解] 按四舍五入法则,$46.082 \approx 46.08$.

$$\therefore \quad \sqrt{46.082} \approx \sqrt{46.08}.$$

先在第 8 页的表中查出 $\sqrt{46.0} \approx 6.782$, 再在修正值部分找到相应于 8 的修正值是 6, 所以

$$6.782 + 0.006 = 6.788.$$

$$\therefore \quad \sqrt{46.082} \approx 6.788.$$

习 题 1.8 (1)

利用平方根表, 求下列各数的近似算术平方根:

1. 2.76. 2. 5.89. 3. 8.57. 4. 1.08.
5. 18.9. 6. 37.4. 7. 45. 8. 50.5.
9. 2.087. 10. 8.640. 11. 17.58. 12. 42.06.
13. 66.66. 14. 90.17.

上面四个例子里的被开方数都是大于 1 小于 100 的数, 现在来介绍大于 100 和小于 1 的各数的算术平方根的查法.

利用平方根表求大于 100 或者小于 1 的数的算术平方根的方法是:

如果这个数大于 100, 因为不能直接从表里查出它的算术平方根, 所以先把它缩小 100 倍、10000 倍或者 1000000 倍、……(就是把小数点向左移动两位、四位或者六位、……), 变成表里查得到的数, 查出这个数的算术平方根后, 再把这个算

术平方根相应地扩大 10 倍、100 倍或者 1000 倍、……(就是相应地把小数点向右移动一位、两位或者三位、……), 这样就得到原来这个数的近似算术平方根.

如果这个数小于 1, 先把它扩大 100 倍、10000 倍或者 1000000 倍、……(就是把小数点向右移动两位, 四位或者六位、……), 变成表里查得到的数, 查出算术平方根后, 再把它相应地缩小 10 倍、100 倍或者 1000 倍、……(就是相应地把小数点向左移动一位、两位或者三位这样就得到原来这个数的近似算术平方根了.

下面举例来说明.

例 5 求 $\sqrt{739}$

[解] 因为表里不能直接查出 739 的平方根, 所以把 739 缩小 100 倍 (就是把小数点向左移动两位), 得到 7.39, 从第 6 页的表中查得 $\sqrt{7.39} \approx 2.718$. 然后把 2.718 扩大 10 倍, 就是把 2.718 的小数点向右移动一位, 得到 27.18.

$$\therefore \quad \sqrt{739} \approx 27.18.$$

为了便于掌握查平方根表的方法, 可以列成图表形式如下;

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\sqrt{739}} & = & \boxed{27.18} \\
\Big| & & \uparrow \\
\text{小数点向左} & & \text{小数点向右} \\
\text{移动两位} & & \text{移动一位} \\
\downarrow & \text{查表} & \Big| \\
\boxed{\sqrt{7.39}} & = & \boxed{2.718}
\end{array}$$

例 6 求 $\sqrt{8256}$,

[解] 把小数点向左移动两位 (就是把 8256 缩小 100 倍), 得到 82.56. 从第 9 页的表中, 先查出 $\sqrt{82.5} \approx 9.083$, 再查得相应于 6 的修正值是 3, 那末 $9.083 + 0.003 = 9.086$, 所以

$\sqrt{82.56} = 9.086$, 把 9.086 的小数点向右移动一位, 就得到 90.86.

$$\therefore \quad \sqrt{8256} \approx 90.86.$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\sqrt{8256}} & = & \boxed{90.86} \\ \Big| & & \uparrow \\ \text{小数点向左} & & \text{小数点向右} \\ \text{移动两位} & & \text{移动一位} \\ \downarrow & \text{查表} & \Big| \\ \boxed{\sqrt{82.56}} & = & \boxed{9.086} \end{array}$$

例 7 求 $\sqrt{0.0236}$.

[解] 把 0.0236 的小数点向右移动两位 (就是把 0.0236 扩大 100 倍), 得到 2.36. 从第 5 页的表中, 查出 $\sqrt{2.36} \approx 1.536$. 然后把 1.536 缩小 10 倍, 就是把 1.536 的小数点向左移动一位, 得到 0.1536.

$$\therefore \quad \sqrt{0.02356} \approx 0.1536.$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\sqrt{0.02356}} & = & \boxed{0.1536} \\ \Big| & & \uparrow \\ \text{小数点向右} & & \text{小数点向左} \\ \text{移动两位} & & \text{移动一位} \\ \downarrow & \text{查表} & \Big| \\ \boxed{\sqrt{2.36}} & = & \boxed{1.536} \end{array}$$

例 8 求 $\sqrt{0.004762}$.

[解] 把 0.004762 的小数点向右移动四位 (就是把 0.004762 扩大 10000 倍), 得到 47.62. 从第 8 页的表中, 查出 $\sqrt{47.62} \approx 6.899$. 相应于 2 的修正值是 1, 那末 $6.899 + 0.001 = 6.900$, 所以 $\sqrt{47.62} \approx 6.900$. 把 6.900 的小数点向左移动两位, 得 0.06900.

$$\therefore \quad \sqrt{0.004762} \approx 0.06900.$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{\sqrt{0.004762}} \arrow[dd, "\text{小数点向右移动两位}"'] & = & \boxed{0.06900} \\ & \text{查表} & \\ \boxed{\sqrt{47.6}} & = & \boxed{6.899} \arrow[uu, "\text{小数点向左移动一位}"'] \end{tikzcd}$$

[说明] 本题如果还是把小数点向右移动两位, 那末得到 0.4762, 这个数在表内还是查不到.

习 题 1.8 (2)

利用平方根表, 求下列各数的近似算术平方根;

1. 345.7.
2. 536.9.
3. 790.8.
4. 917.7.
5. 4853.
6. 2408.
7. 8063.
8. 74090.
9. 0.0433.
10. 0.07461.
11. 0.002819.
12. 0.5805.
13. 0.7483.
14. 0.0006705.

1.9 立方根表和它的用法

关于数的开立方的一般方法, 因为比较复杂, 并且应用也不大, 所以本书不作介绍. 现在只讲怎样利用立方根表来求一个数的立方根.

《中学数学用表》里, 从第 16 页到 22 页有立方根表, 它是把 0.100 到 99.9 的各个数的立方根编列成的. 跟平方根表一样, 表中所查出的立方根, 通常也是近似根, 立方根表的查法和平方根表的查法相类似, 只是被开方数扩大或者缩小时, 小数点移动的位数是不同的. 下面举例来说明这个表的用法.

例 1 求 $\sqrt[3]{0.214}$.

[解] 从第 16 页的表里最左边标有“N”的这一直行中，找出 0.21，横着向右查到顶上标有数字 4 的一行，得到 0.5981，这就是 0.214 的近似立方根.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{0.241} \approx 0.5981.$$

例 2 求 $\sqrt[3]{2.14}$.

[解] 从第 18 页的表里最左边标有“N”的这一直行中，找出 2.1，横着向右查到顶上标有数字 4 的一行，得到 1.289，这就是 2.14 的近似立方根.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{2.14} \approx 1.289.$$

例 3 求 $\sqrt[3]{21.4}$.

[解] 从第 20 页的表里标有“N”的这一行中，找出 21，横着向右查到顶上标有数字 4 的一行，得到 2.776，这就是 21.4 的近似立方根.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{21.4} \approx 2.776.$$

如果被开方数小于 0.10 或者大于 100，可以仿照求平方根的方法把被开方数经过扩大或者缩小后，由查表求得它的立方根.

利用立方根表求大于 100 或者小于 0.1 的数的算术立方根的方法是:

如果这个数大于 100，先把它缩小 1000 倍、1000000 倍、……(就是把小数点向左移动三位、六位、……)，变成表里查得到的数，查表得到算术立方根后，再把它相应地扩大 10 倍、100 倍、……(就是相应地把小数点向右移动一位、二位、……)，这样就得到所要求的算术立方根了.

如果这个数小于 0.1，先把它扩大 1000 倍、1000000 倍、……(就是把小数点向右移动三位、六位、……)，变成表里查得到的数，查表得到算术立方根后，再把它相应地缩小 10 倍、100

倍、……(就是相应地把小数点向左移动一位、二位、……)，这样就得到所要求的算术立方根了.

现在举例来说明，

例 4 求 $\sqrt[3]{4300}$.

[解] 因为表里不能直接查出 4300 的立方根，所以把 4300 缩小 1000 倍 (就是把小数点向左移动三位)，得到 4.30. 从第 19 页的表中，查到 $\sqrt[3]{4.30} \approx 1.626$，然后把 1.626 扩大 10 倍，就是把 1.626 的小数点向右移动一位，得到 16.26.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{4300} \approx 16.26.$$

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\sqrt[3]{4300}} & = & \boxed{16.26} \\
| & & \uparrow \\
\text{小数点向左} & & \text{小数点向右} \\
\text{移动三位} & & \text{移动一位} \\
\downarrow & \text{查表} & | \\
\boxed{\sqrt[3]{4.3}} & = & \boxed{1.626}
\end{array}$$

例 5 求 $\sqrt[3]{63740}$.

[解] 把小数点向左移动三位 (就是把 63740 缩小 1000 倍)，得到 63.74. 因为在立方根表里只能查三个数字的立方根 (没有修正值部分)，所以要先把 63.74 四舍五入变为三个数字，得到 63.7，就是 $\sqrt[3]{63.74} \approx \sqrt[3]{63.7}$.

从第 21 页的表中，查得 $\sqrt[3]{63.7} \approx 3.994$. 把 3.994 的小数点向右移动一位，得到 39.94.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{63740} \approx 39.94.$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\sqrt[3]{63740}} & = & \boxed{39.94} \\ \Big| & & \uparrow \\ \begin{array}{c}\text{小数点向左}\\ \text{移动三位}\end{array} & & \begin{array}{c}\text{小数点向右}\\ \text{移动一位}\end{array} \\ \downarrow & \text{查表} & \Big| \\ \boxed{\sqrt[3]{63.74}} & = & \boxed{3.994} \end{array}$$

例 6 求 $\sqrt[3]{0.000278}$.

[解] 把 0.000278 的小数点向右移动三位 (就是把 0.000278 扩大 1000 倍), 得到 0.278. 从第 16 页的表中查得 $\sqrt[3]{0.278} \approx 0.6527$. 然后把 0.6527 的小数点向左移动一位, 得到 0.06527.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{0.000278} \approx 0.06527.$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\sqrt[3]{0.000278}} & = & \boxed{0.06527} \\ \Big| & & \uparrow \\ \begin{array}{c}\text{小数点向右}\\ \text{移动三位}\end{array} & & \begin{array}{c}\text{小数点向左}\\ \text{移动一位}\end{array} \\ \downarrow & \text{查表} & \Big| \\ \boxed{\sqrt[3]{0.278}} & = & \boxed{0.6527} \end{array}$$

例 7 求 $\sqrt[3]{-521}$.

[解] 根据方根的性质, 我们知道, 负数的立方根是一个负数, 所以 $\sqrt[3]{-521} = -\sqrt[3]{521}$. 这样, 我们就可以利用立方根表先求出 521 的立方根, 再取它的相反的数就可以了.

把 521 的小数点向左移动三位, 得到 0.521, 从第 17 页的表中查得 $\sqrt[3]{0.521} \approx 0.8047$, 把 0.8047 的小数点向右移动一位, 得到 8.047, 那末 $\sqrt[3]{521} \approx 8.047$.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{-521} \approx -8.047.$$

$$\boxed{\sqrt[3]{-521}} \quad = \quad \boxed{-8.047}$$

$$\boxed{-\sqrt[3]{521}}$$

小数点向左移动三位 $\downarrow$ 查表 小数点向右移动一位 $\uparrow$

$$\boxed{-\sqrt[3]{0.521}} \quad = \quad \boxed{-0.8047}$$

习题 1.9

利用立方根表, 求下列各数的近似立方根:

1. 8.7. 2. 2.35. 3. 900. 4. 2750. 5. 69380.
6. 0.00483. 7. -70. 8. -742. 9. -0.042.
10. -0.08007.

1.10　无理数

1.　无理数的意义

到现在为止, 我们所学到的数, 还只限于有理数, 如果我们把整数看成是以 1 为分母的分数, 例如 $3=\dfrac{3}{1}$,$-3=\dfrac{-3}{1}$,$0=\dfrac{0}{1}$, 那末我们就可以把一切有理数都表示成 $\dfrac{m}{n}$ 的形式, 这里 m 是整数,n 是自然数. 反过来也就可以说, 这种形式的数都是有理数.

任何一个有理数, 都可以改用小数表示出来:

(1) 如果这个有理数是整数, 那末可以把它看成小数点后面是 0 的小数. 例如

$$0=0.0,3=3.0,-3=-3.0.$$

如果这个数是分母中只含有质因数 2、5 的分数，那末一定可以把它化成一个只含有有限个小数数位的小数. 例

$$\frac{1}{2}=1\div 2=0.5,\qquad -\frac{9}{20}=-9\div 20=0.45.$$

上面这类只有有限多个小数数位的小数，叫做有限小数.

(2) 如果这个数是分数，把它化成最简分数以后，分母中不含有质因数 2,5，或者含有质因数 2,5，但同时也含有其他质因数，那末这个分数一定可以化成无限循环小数. 例如，

$$\frac{1}{3}=0.33\cdots;\qquad \frac{7}{15}=0.466\cdots;\qquad \frac{23}{99}=0.2323\cdots.$$

反过来，任何一个有限小数 (包括小数部分为 0 的整数) 或者无限循环小数，也都可以把它化成 $\dfrac{m}{n}$ 的形式[①]. 例如

$$0.125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8};$$

$$0.6=\frac{6}{9}=\frac{2}{3};\qquad 0.16-\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}.$$

所以我们说，一切有限小数或者无限循环小数都是有理数.

但是在实际问题中，我们还会遇到不能用上面所说的这两种小数来表示的数. 例如，前面我们在计算 2 的算术平方根时，可以发现，开方的过程可以无限继续下去，得到的那个无限小数 $1.41421\cdots$ 就不是无限循环小数.

我们把这种无限不循环小数叫做**无理数**.

例如，$\sqrt{2}$ 是一个无理数，除此之外，象 $\sqrt{3}$,$\sqrt[3]{11}$,$2\sqrt{5}$,$-\sqrt[3]{6}$ 等也都是无理数. 圆周率 $\pi=3.14159\cdots$ 也是无理数.

[注意] 开方得到的数并不都是无理数，因为有些数是开得尽的数，例如 $\sqrt{4}=2$,$\sqrt[3]{27}=3$,$\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$,$\sqrt[3]{0.125}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2}=0.5$ 等等,

① 任何一个无限循环小数都可以化成分数. 今后在代数第三册里将要学到.

这些数都是有理数. 而无理数并不都是从开方得到的, 例如上面所说的圆周率 π. 也就是说, 开方开不尽的数都是无理数, 而无理数就不一定都是开方开不尽的数.

2. 无理数的近似值

上一节里讲过, 因为无理数是无限不循环小数, 所以用小数形式, 我们不可能把它全部写出来, 但是我们可以按照某种法则确定它的任何一个数位上的数字. 例如, 我们用开平方的方法就可以确定 $\sqrt{2}$ 的个位上的数字是 1, 十分位上的数字是 4, 百分位上的数字是 1, 千分位上的数字是 4, 等等.

在实际应用时, 我们可以根据需要取无理数精确到某一位的近似值 (不足近似值或者过剩近似值), 这样得出的近似值是有限小数. 例如,

(1) $\sqrt{2} = 1.41421\cdots$.

因此,$\sqrt{2}$ 的精确到 0.1,0.01,0.001,0.0001 的不足近似值和过剩近似值, 可以列表如下:

精确度	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\sqrt{2}$ 的不足近似值	1.4	1.41	1.414	1.4142
$\sqrt{2}$ 的过剩近似值	1.5	1.42	1.415	1.4143
两个近似值的差	0.1	0.01	0.001	0.0001

(2) $\pi = 3.14159263\cdots$.

因此,π 的精确到 0.01,0.001,0.0001 的不足近似值和过剩近似值, 可以列表如下:

精确度	0.01	0.001	0.0001
π 的不足近似值	3.14	3.141	3.1415
π 的过剩近似值	3.15	3.142	3.1416
两个近似值的差	0.01	0.001	0.0001

从上面两个表里，我们可以看到，同样精确度的过剩近似值和不足近似值的差，等于所取的小数最末一位的一个单位. 这祥，如果知道某一个无理数的不足近似值和过剩近似值中的任何一个，就可以得出另一个来.

例如，知道 $\sqrt{3}$ 精确到 0.01 的不足近似值是 1.73，那末 $\sqrt{3}$ 相应的过剩近似值就是 $1.73+0.01=1.74$；如果知道 $\sqrt{3}$ 精确到 0.001 的过剩近似值是 1.733，那末 $\sqrt{3}$ 相应的不足近似值就是 $1.733-0.001=1.732$.

一个无理数的准确值，永远介于它的不足近似值和过剩近似值之间，增加不足近似值和过剩近似值的小数位数，就可以提高近似值的精确度. 需要怎样精确度的近似值，这就要由实际问题的件质来决定，

习 题 1.10

1. 回答下列各题，并且说明理由：

   (1) 整数是有理数吗？有理数都是整数吗？为什么？

   (2) 小数是有理数吗？小数是无理数吗？为什么？

   (3) 无限小数都是无理数吗？无理数都是无限小数吗？为什么？

   (4) 带根号的数都是无理数吗？为什么？

2. 下列各数哪些是有理数？哪些是无理数？

   $3,1416$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{16}$; $-\sqrt{16}$; $-3\dfrac{21}{31}$;

   $0.3333\cdots$; 0.5714357143; $\sqrt{10}$; 2π.

3. (1) 求 $\pi=3.1415926535\cdots$ 精确到 0.01，0.0001，0.00001，0.00
   的不足近似值和过剩近似值；

   (2) 求 $\sqrt{5}$ 精确到 0.1，0.01，0.001，0.0001 的不足近似值和过剩近似值.

   [提示：先用开平方的方法计算 $\sqrt{5}$ 的值.]

4. (1) 已知 $\sqrt{2.71}$ 精确到 0.01 的不足近似值是 1.64, 求它的相应的过剩近似值;

(2) 已知 $\sqrt{22.146}$ 精确到 0.001 的过剩近似值是 4.706, 求它的相应的不足近似值.

1.11 实数

1. 实数的意义

上两节里学过了无理数, 这样, 我们又把数的概念扩展了, 就是说, 把数的范围从原来知道的有理数, 增添了一种新的数——无理数.

有理数和无理数总起来叫做**实数**.

我们把所学过的各种数, 用下面的表表示出来:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数 (正整数, 零, 负整数)}\\ \text{分数 (正分数, 负分数)}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{有限小数或者}\\ \text{无限循环小数}\end{array}\\ \text{无理数 (正无理数, 负无理数: 无限不循环小数)}\end{cases}$$

从这个表里, 我们可以看出, 实数都可以用有限小数或者无限小数表示; 其中用无限不循环小数表示的数就是无理数.

在代数第一册里, 我们知道, 具有相反方向的量, 可以分别用正有理数和负有理数来表示. 对于无理数, 同样也可以区分正无理数和负无理数. 因此, 对应于每一个正实数就有一个和它相反的负实数. 例如,5 和 -5 是两个相反的数,$\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 也是两个相反的数,π 和 $-\pi$ 也是两个相反的数. 一般的说, 如果 a 表示一个正实数,$-a$ 就表示一个负实数.a 和 $-a$ 互为相反的数.0 的相反数仍旧是 0.

2. 实数的绝对值

实数的绝对值的定义和有理数的一样: 一个正实数的绝对值就是它本身, 一个负实数的绝对值是和它相反的数, 零的绝对值是零. 例如,

$$|\sqrt{2}|=\sqrt{2},\quad |-\sqrt{2}|=\sqrt{2},$$
$$|\pi|=\pi,\quad |-\pi|=\pi,\quad |0|=0$$

等.

一般地说, 实数 a 的绝对值是:

$$|a|=\begin{cases} a\ (\text{当 } a>0 \text{ 时}),\\ 0\ (\text{当 } a=0 \text{ 时}),\\ -a\ (\text{当 } a<0 \text{ 时}).\end{cases}$$

3. 用数轴上的点表示实数

在有理数里, 我们已经学过, 所有有理数都可以用数轴上的点来表示. 但是, 数轴上所有的点并不都能用有理数来表示. 例如, 在数轴上, 从原点 O 起向右截取一线段 OM (图 4.1), 使它的长度等于每边长是一个单位的正方形的对角线的长. 根据勾股定理, 我们知道

$$OB^2=OA^2+AB^2,$$
$$\because\quad OA=AB=1,$$
$$\therefore\quad OB^2=2,$$

那末 $$OB=\sqrt{2}.$$

就是 OM 的长是 $\sqrt{2}$ 个单位, 所以点 M 就不能用有理数来表示. 当我们引进无理数之后, 数轴上的这种点, 就可以用无理数来表示.

由此可以看到, 数轴上的每一个点都可以用一个实数来表示它.

反过来, 每一个有理数都可以用数轴上的点来表示, 同;

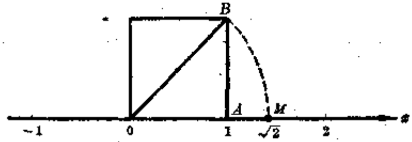

图 1.1

样, 每一个无理数也都可以用数轴上的点来表示. 这就是; 说, 每一个实数都可以用数轴上的点来表汞,

根据上面所说的, 归结起来说, 把数从有理数扩展到实数以后, 数轴上的每一个点, 都可以由唯一的一个实数来表示; 反过来, 每一个实数, 都可以用数轴上的唯一的一个点来表示. 换句话说, 实数和数轴上的点是一一 ■ 对应的,

由于每一个实数都可以用数轴上的唯…的一个点来表;

示, 所以实数的绝对值也可以说是: 实数 a 的绝对值 k |, 就是在数轴上表示 a 这个点和原点间的距离.

4. 实数的运算

把有理数扩展到实数以后, 在实数范围内四则运算总可实施, 它的运算结果还是实数. 在进行实数的四则运算时, 前面学过的有理数的运算规律也同样适用 > 特别要指出, 在有理数范围内, 正数的开方运算不趕都能实施, 而在实数范围内, 疋数的开方运算就都可以实施了, 我们知道, 任何正数、负数或零的偶次乘方都不能是负数 (或者叫做非负数 X 因此, 在实数范围内, 负数玔以冇奇次方根, 但是没有偶次方根, 例如,vi(《<o)、夕 1 等在实数范围内都是没有意义的.

在实数运算中如果遇到元理有时需要根据问题的要求, 用它的近似值代替, 然后进 # 计算.

例 例计算:

〔1) 精确到 o.oi);

(2) s/Txv^(精确到 0.01). ■

[解] [解] (1) \^5~+^^2,286 + 3.142^5.38;

(2) s/Y X V 2’ ^ 1.732 x 1,414^ 2 (45#

5. 实数大小的比较

和有理数的情形一样，实数在数轴上表示出来以后 t 我们仍旧可以利用数轴上的点的位置关系来规定怎样比较两-3-个实数的大小·

__b _ 设有两个实数 a 和 b,

A X 并且设数轴上的 2 点表示

^ ^ 5 一 2 实数 A 忍点表示实数 6

m 42 (图 4.2).

* 174*

利用 j, S 两点在数袖上不同的位置关系，我们规定实数的大小:

如果 A 点在 G 点的左边，戏们说 T U 小于 &, 写成 a<h \

如架乂点和 B 点蜇合，我们说 a 等于 b,’ 运 ma = h’

如果 j 点在〃点的右边，我们说,a 大千 b, 写成 o’>1k

从这个规定我们得到:

(1) 任何正实数都大于零，任何负实数都小于零，任何正实数都大于住何负实数,

(2) 两个正实数比较大小，先比较整数部分，如果对应数位上的数字都相同，那术这两个正实数相等；如果整数部分不同，那末整数大的正实数较大；如果整数部分相同，而小数第一位不同，那末小数第一位大的正实数较大；如果小数第一位也相同，就比较第二位小数，那末小数第二位大的正实数较大；以下依次类推.

(3) 两个负实数比较大小，看它们的绝对值，如果两个负

实数的绝对值相等, 那末这两个负实数相等; 如果两个负实数的绝对值不等, 那末绝对值大的负实数较小.

例 1 比较 4,7956 和 • 的大小. 一

[解] •/ V^ = 4.795S…,4,7956<4.7958…; 4.7956<\/23,

例 2 比较 ^ 和的大小.

[解] Y jr = 3.1415926“.,|^| = 3.1415929–,

11d

而 3.1415926*.. <3.1415929,

例 3 比较一 VI5 和一 f 的大小.

[解] 一 \/IO —— 3.162…, 一? ^ —— 3,166…;

o

而一 3,1.62…> 一 3.166…,

o

[说明] 在比较实数的大小时, 小数位数需要计算几位, 要看题目的具体情况而定. 例如在例 1 中,n/23 要取 ITO58 因为小数部分第一位、第二位、第三位和 4.7956 都相同, 如果不计算到小数第四位, 就无法比较大小. 又如例 2, 因为小数部分第一位到第六位都相同, 所以必须计算到第七位, 才能看出它们的大小. 例 4 中, 只要计算到小数部分第三位就可以了.

1. a> 有理数都是实数吗? 实数都是有理数吗? 为什么? 举例说

(2) 无理数都是实数吗? 实数都是无理数吗? 为什么? 举例说明‘’

2 求出下列等式里的实数而

a) 1 一 |; ⑶

(3) ∣工卜 (4) |x|=d 3–计算:

(1) V 诏一如 (楕确到 0.01);

(2) \Z7xvTc 精确到 0.01)4

^ 用不等式表示下列各组数的大小:

(1) 3.14159 和 3.1416; (2) 0_ 13762…和 0,13 沉 3 …;

[解法举例:3‘14159 <3.1416.]

(3) 5.368971... 和 5.36 七 (4) 1.5 和一 1.555 (5) 一 2.5353 一和一 2,5:^^56...;

03) \/远和 5^^ (7) –v/T 和一

(8) –V2 和一 1.262,

•5. 把和 ~\/了正确地在数轴上表示出来,

[f 示: 利用直角三角形, 根据勾段定理, 先正确地求出 J 和的线段长度来. 例如, 以 1 个单位长锨直角三角形的一条直 3 边,2 个单位长做釦边, 那来另一条直角边的长就表示 VT. 然后在数轴上从原点起向右截钗一段线段等亍这条直角边的长. 同样, 以 1 个单位和 2 个单位长的线段做直角边, 那末斜边的长就是 #.]

本章提要

1. 1 方根的性质
2. 被开方数 a 根指数》方根
3. ™ 是奇数只有一个 IE 数
4. ff >U w 是偶数有两个互为相反的数
5. a=0 竹是奇数或偶数
6. o<0 ft 是奇数只有一个负数
7. 《 是偶数没有意义
8. 2 算术平方根
9. a (当炫 >0 的时候), I–a (当 a<0 的时候)•
10. 3 数的开平方

11. (1) 利用逆运算关系 (适用于一些简单的完全平方
12. (2) 一般方法;
13. (3) 查平方根表法.
14. 4. 数的开立方查立方根表法.
15. 5. 实数
16. IT7
17. (1) 无理数的意义; 无理数的不足近似值和过剩近似
18. 值,
19. (2) 实数的分类
20. 实数
21. 右理数
22. 止: 有理数
23. 负有理数
24. 无理数 {
25. (3) 实数的绝对值
26. 正无理数负无理数
27. 正整数 (就娃自然数) 正分数 (包括正有限小数或者正无限循环小数)
28. 负整数
29. 负分数 (包括负有限小数或者负无限循环小数)
30. a (当 a>0 时),
31. \a \ 0 (当 a = 0 时),
32. 一 a (当 a<0 时)•
33. (4) 实数和数轴上的点的一一对应关系.

复习题四 A

1. 下列语句是正确的还是错误的? 为什么?

   (1) -5 的平方是 25; (2) -49 的平方根是 -7;

   (3) -1 的立方根是 -1; (4) $(-5)^2$ 的算术根是 -5.

2. 求下列各式的值:

   (1) $\sqrt{m^2}\left(m=-\dfrac{2}{3}\right)$; (2) $\sqrt{n^2}\left(n=\dfrac{3}{5}\right)$.

3. 利用开平方法求下列各数的近似算术平方根, 精确到 0.001. 并且写出它的不足近似值和过剩近似值:

   (1) $\sqrt{3.562}$; (2) $\sqrt{0.374}$.

4. 利用平方根表或者立方根表求下列各题的值:

   (1) $\sqrt{17.468}$; (2) $\sqrt{0.43592}$; (3) $\sqrt[3]{4359}$;

   (4) $\sqrt[3]{0.02807}$; (5) $\sqrt{4\dfrac{1}{4}}$; (6) $\sqrt[3]{4107\dfrac{1}{2}}$.

5. (1) 对于任意两个实数, 是不是都能够进行加、减、乘、除、乘方的运算?

   (2) 在实数范围里永远可以开奇次方吗? 在有理数范围里呢?

   (3) 在实数范围里永远可以开偶次方吗?

6. 在加、减、乘、除、乘方和开方六种运算中, 哪些运算在正有理数范围里都能实施? 哪些运算在有理数范围里都能实施? 有些什么例外? 哪些运算在实数范围里都能实施? 有些什么例外?

7. 一个正方形的面积是 125 平方厘米, 求它的边长 (精确到 0.01 厘米).

复习题四 B

1. (1) 设 $x^2=a$,a 是 x 的什么数? x 是 a 的什么数?

   (2) 设 $y^3=b$,b 是 y 的什么数? y 是 b 的什么数?

2. 查表求下列各式的值;

   (1) $3.472^2+5.089^2$;　　　　(2) $\sqrt{3.472^2+5.089^2}$.

3. 回答下列各个问题:

   (1) 如果 $a>0$, $b<0$, 那末 a,b 两数中哪一个?

   (2) 如果 $a<0$, $b<0$, 而且 $|a|>|b|$, 那末 a,b 两数中哪一个大?

   (3) 如果 $a<b$, 那末 $|a|$ 和 $|b|$ 中哪一个大? (要讨论)

   [提示: 就 $a>0$,$b<0$;$a<0$,$b<0$;$a<0$,$b>0$ 三种情况来讨论.]

4. 一个比例的两个外项分别是 $1\dfrac{2}{15}$ 和 $\dfrac{68}{375}$, 两个内项是相等的正数, 这两个内项各是多少?

   [提示: 根据比例的性质, 两个内项的乘积等于两个外项的乘积.]

5. 如果球的半径是 r, 那末球的体积用公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 来计算, 当球体积 $V=500$ 立方厘米时, 半径 r 是多少厘米? (π 取 3.14,r 精确到 0.01 厘米.)

6. 把一个长方形的长和宽分别扩大相同的倍数, 使面积扩大 40 倍, 求长和宽分别扩大的倍数.(精确到 0.1.) [提示: 设长方形的长和宽分别是 a 和 b, 扩大的倍数是 k, 列出方程再解.]

第四章 测验题

1. 比较下列各组里两个实数的大小:

   (1) $\sqrt{2}$ 和 1.414; (2) $-\pi$ 和 -3.1415926.

2. 计算:$\sqrt[3]{-1.45} \times (-1.45)^2 \div 4.35$.

3. 一个长方体的木箱, 它的底是正方形. 木箱的高是 125 米, 体积是 2.178 立方米, 求这木箱的底的每边的长.(精确到 0.01 米.)

   [提示: 长方体的体积等于底面积乘以高.]

4. 如果圆的半径是 r, 那末圆的面积用公式 $A = \pi r^2$ 来计算. 当圆面积 $A = 200$ 平方厘米时, 半径 r 是多少厘米? (π 取 3.14,r 精确到 0.01 厘米.)

5. 一艘轮船以每小时 16 海里的速度离开港口向东南方向航行; 另一艘轮船在同时同地以每小时 12 海里的速度向西南方向航行. 它们离开港口一小时半以后相距多远?