**P096 – P110**

**标准数学课程**

**低年级数学。**教化就此展开。学生要学会：数学不是你做的事，而是对你做的事。强调的重点是坐好不动，填写作业纸、遵照指示。孩子们必须熟悉一套综合的演算法，运用印度阿拉伯符号，但与他们真实的想望或好奇无关，只关心在几百年前对一般成年人而言都还太难的事。父母、老师和小孩本身，都要着重在乘法表。

**中年级数学。**教导学生将数学视为一套程序，就像是宗教仪式，是永恒的且铭刻于金石之上。颁发圣书，就是数学课本，然后学生学会称呼教会长老“他们”（“此处他们要什么？他们是否要我做除法？”）。做作的“应用题”在此时引入，让这些不需用脑的单调计算，看起来似乎有趣一些。测验学生一大堆不必要的专有名词，像是“整数”（whole number）及“真分数”（proper fraction），却对于做这样的区分完全不给理由。为代数一做好准备。

**代数一。**为了不浪费宝贵时间去思考数字及其模式，这门课程将焦点集中在运算时的符号和规则。从古代美索不达米亚楔形泥版的课题，到文艺复兴时期代数学家的高等技术，这一路走来每段阶梯的事迹，完全略过不提，代之以令人困惑的支离破碎、后现代式的重述，没有人物、图形、或主题。坚持所有的数字和表达都要用各式各样的标准格式，这对于例如恒等式和等式的意义，会造成额外的混淆。因为某些原因。学生必须要背记二次方程式的公式。

**几何。**这在课程当中是独立出来的，让希望投入有意义数学活动的学生燃起一丝希望，然后又希望破灭。介绍了一堆不方便又让人分心的符号，不遗余力地让简单的事物看起来很复杂。这门课的目标是将残余的数学自然直觉连根拔除，为代数二做准备。

**代数二。**这门课的主题是令人不知所以和不合理地使用坐标几何（coordinate geometry）。在坐标架构下介绍圆锥曲线，来逃避圆锥体及其截线的美学单纯性。学生要学习没来由地把二次方程式重写成各种标准格式。在代数二，还会介绍指数及对数方程式，尽管这并不属于代数，显然就只是因为必须找个地方塞这些主题。这门课选择这样的名称，是为了强化阶梯教学的神话。为什么把几何摆在代数一和代数二之间，至今仍是个谜。

**三角函数。**两个星期的课程内容，靠着反复耍弄定义，硬是拉成一个学期的课。真正有趣及美妙的现象，像三角形的边是由夹角决定的，将会和不相关的简写及过时的符号，占据同样的重要性，以避免学生对于这个主题的真义产生一点清晰的概念。学生要学习像是“SohCahToa” 9及“All Students Take Calculus” 10这类的记忆法，以取代对于方位和对称性的自然直觉感受。讨论三角测量，但不要提及三角函数的超越特性，或是这类测量具有的语言及哲学问题。必须用计算机，好让这些课题更为模糊。

**预修微积分。**一堆没有关联性的主题无意义的大杂烩。主要是来自浅薄的意图，想要一整套地介绍十九世纪晚期的解析法，然而这样的整合是既不必要也没有帮助。极限（limits）和连续（continuity）的技术性定义在此处出现，以混淆对于平滑变化的直觉概念。如课程名称所示，这是要让学生为将来学习微积分做准备的，对形状（shape）和运动（motion）的自然概念进行系统性地混淆的最后一个阶段，至此大功告成。

9 译注：一种计算sine，cosine，tangent的记忆法，可参考www.mathwoeds.com.

10 译注：一种计算三角函数的记忆法，可参考<http://en.wikipedia.org/wiki/All_Students_Takes_Calculus>

**微积分。**这个课程将探索关于运动的数学，用一堆不必要的公式来埋葬它是最好的办法。尽管在此是要介绍微分和积分，但将掠过牛顿和莱布尼兹（Leibniz）的简单而深刻的想法，代之以更复杂的以函数为主的方法，但那是为了对应各种分析危机而开发出来的，在这套课程中并不会真正应用到。当然这些都不会在课程中提到。在大学里，同样的东西会逐字地再上一遍。

\* \* \*

以上所述，一贴能永久瘫痪年轻心灵的完整处方——能有效对治好奇心。这就是他们对数学做的好事！

这门远古的艺术形式，蕴藏着让人屏息的内涵及让人心碎的美丽。人们将数学当作是创造力的反面事物而远离它，这是多么讽刺的是呀。他们错过了这门比任何书籍都古老、比任何诗都深刻、比任何抽象画都抽象的艺术形式。而这正是学校做得好事！无辜的老师对无辜的学生造成伤害，这是多么可悲的无间轮回。我们全部的人，原本可以享有多少的乐趣呀？

辛普利西奥：好的，我已经彻底沮丧了。再来呢？

萨尔维亚蒂：嗯，关于一个立方体当中的金字塔，我想我有一些点子可以试试......

下篇： 鼓舞

“数学教育”这毫无意义的悲剧持续上演着，只是每次变得更不住脚的顽固及腐败，但是我不想再多谈这些了，我已经厌倦了不断抱怨。这有什么意义呢？学校教育的目的从来不在培养学生的思考力和创造力。学校只是训练小孩表现，然后可以根据表现将这些小孩分门别类。数学在学校被毁灭，不应该是太意外的事。每一件事在学校里都被毁灭了呀！此外不用说也知道，当年你的数学课有多枯燥，无意义的浪费时间——你自己亲身的经历，还记得吧？

因此，我宁愿跟你多说一些数学真正是什么，以及为什么我这么热爱数学。就如同我前面说过的，最重要的，是要了解数学是一门艺术。数学是要做的，而你要做的是去探索一个非常特别及特定的地方——一个名为“数学宝境”的地方。这当然是一个想象出来的地方，一个充满简洁迷人构造的大地，里面有奇幻的想像的生物，从事着各种令人着迷、好奇探索的行为。我要让你有一个概念，关于数学宝境看起来像什么，感觉像什么以及为什么这么吸引我。但是，首先请听我说。这个地方是如此令人屏息的美丽与狂喜，使得我将绝大部分醒着的时间都花在那里了。我无时不思索着它，大部分的数学家也都是如此。我们喜欢那里，我们无法离开那里。

就此而言，当一个数学家倒是很像田野生物学家。想象一下，你在热带雨林的周围搭起帐篷，假设是在哥斯达黎加好了。每天清晨，你带着你的大砍刀进入雨林去探索去观察，一天又一天，你发现愈来愈爱这个地方的丰富性与奇观。假设你对某种特定类型的动物有兴趣，比方说是仓鼠好了。（我们先不要担心哥斯达黎加是否真的有仓鼠存在。）

而仓鼠，是有行为的，他们会做一些很棒很有趣的事：他们挖地洞、配对、跑来跑去，在空心的木材中做窝。可能你已经对某一个族群的哥斯达黎加仓鼠做了足够的研究，足以让你为它们做标签及命名。萝丝是黑白花色，喜欢钻地洞；山姆是棕色，喜欢徜徉在阳光下。重点是，你做观察、注意，然后变得好奇。

为什么有些仓鼠的行为和其他仓鼠不一样？什么样的特性是所有的仓鼠都具备的？可以把仓鼠做有意义及有趣的分类及分组吗？老仓鼠是如何创造出新仓鼠，而什么样的特征会遗传下去？简而言之，你有了关于仓鼠的题目——自然的，吸引人投入的仓鼠问题，你想要得到答案。

好了，我也有题目了。不过，并不是在哥斯达黎加，也不是关于仓鼠，但是感觉是一样的。有一个充满奇怪生物的雨林，这些生物的行为很有趣，而我想要了解他们。例如，在我最喜欢的数学雨林生物中，有一种绝妙的野兽:1,2,3,4,5,……

在这里，请别认为我是发神经了。我知道这些符号对你可能有过相当恐怖的经验，我都可以感到你的心脏收缩起来了。放松点，不会有事的，请相信我，我是专家。

首先，忘记那些符号——它们不重要。名字从来都不是重要的。名字从来都不是重要的。罗丝和山姆才不在乎你取的那些可笑的宠物名字，照样过自己的生活。这是非常重要的观念：我现在谈的是事物本身与事物的表征（representation）, 两者之间的差别。无论你用什么样的字眼或是什么样符号，都完全不重要。在数学上，唯一重要的是事物的本身，他们是如何运作的。

在人类开始会计数（没人确切知道始于何时）后的某个时代，人类跨出了非常大的一步，他们发现可以用事物来代表其他事物（例如用驯鹿的画来代表驯鹿，或是用一堆石头来代表一群人）。然后又在某个时点（同样的我们不知道确切时间），早期的人类开始有了数目的想法，譬如“三”（three-ness）。不是三颗果子或三天，而是抽象的三。经过了数千年，人类发展处各种语言的数目的表征——记号及代币、带有面值的钱币、象征性的运作体系等等。在数学上，这些都没有那么重要。依我看来（一个不切实际，做白日梦的数学家的看法），像是“432”这样的符号表征，不过就是想象中的有四百三十二颗石头的石头堆（就许多方面来说，我还比较喜欢石头堆的概念）。对我而言，重要的一步不在从石头到符号，二十从数量到物件（entity）——五和七的概念不是某种东西的数量，而是生命体（beings）,就像仓鼠，具有特性，会有行为。

例如,对于想我自己这样的代数学家来说，5+7=12这样的叙述，不只是说五个柠檬和七个柠檬，成为十二个柠檬（虽然该叙述的确有此含义）。它对我述说的是：大家所熟知被称为‘五’和‘七’的物件，喜欢进行一种活动（就是“加”）。当它们这样做的时候，会形成一个新的物件，我们称之为“十二”，而这就是这些生物做的事——不论他们叫什么名称或是谁给的名称。尤其，十二并不是“从一开始”或是“以二结尾”。十二本身不是开始，也不是结束，它就是自己。（一堆石头从何“开始”？）只有印度阿拉伯十进位将十二表征为12，是以1开始，以2结尾。你能明白我的意思么？

身为数学家，我们感兴趣的是数学物件的内在属性，而不是特定文化架构下的世俗特性。69这个符号倒过来看也是一样的，但是六十九这个数字，却不是如此。我希望你能看出这项从“简单就是美”的美学中自然产生的观点。对于十二实际时阿拉伯贸易商带到欧洲的符号体系，我为什么要在意？我在意的是我的仓鼠，不是他们的名字。

因此，让我们把1,2,3等等这些数字，想象成是会做出有趣行为的生物。当然它们的行为是由它们的本质决定的，而它们的本质是聚落的大小（sizes of collections）(这正是我们一开始遇到它们时的样子！)。让我们用想象的石头堆来讨论它们：

这样我们就可以对它们进行“野外”观察，不会被一些意外的人为符号分散注意或是误导。有一项行为是人类很早就注意到的，就是它们之中有些个（石头堆）可以排成两个相等的行列：

数字四、八及十四，具备这样的属性，而三、五及十一则没有。这并不是因为它们的名字使然——而是因为它们本身及它们的作为使然。因而在这些数字物件中有一项行为区别：有些会这样做（所谓的“偶数”），而有些则不会这样做（“奇数”）。

有个非常明显的原因，让我把偶数想成是雌的，而奇数想成是雄的。偶数（可排成两个相等行列者）具有温和平滑的个性，而奇数则总是有些头角突出。

由于将石头堆推到一起，是我们很自然会去做的事，因此很自然地，我们也会想知道加发对偶数和奇数的区别有什么影响。（就像是问仓鼠的斑点特征是否会遗传一样）。所以我把这些石头堆摆来弄去一番，结果我注意到一个有趣的模式：

偶数和偶数成为偶数

偶数和奇数成为奇数；

奇数和奇数成为偶数。

你看出原因了么？我尤其喜欢两个奇数配在一起的样子:

& =

奇妙的“负负得正”特性在此发扬光大。那些恼人的头角正好彼此填平了！而且我还注意到了，所有的奇数都是这样的，不是只有我选出来的奇数才可以。换言之，这是一项完全一般化的行为。因此这是一个很好的发现。不是使用两列来分类才这样特别。我们也可以探讨用三列，或四列，或十列，探究会有和结果。我们的仓鼠会做些什么？

至此，我知道这些都不是非常复杂，但我真正要你得到的是这种想象的物件的感觉，以及它们有趣的行为。了解这个主题的吸引力以及方法（尤其在现代）是很重要的。然而，哥斯达黎加仓鼠和数学物件例如数字或三角形之间，有个关键性的差异：仓鼠是真实的，它们是真实世界的一部分。数学的物件，即使最初的灵感是来自于现实的观点（例如石头堆、月亮的形状），仍然只是我们想象的事物。