不止如此，它们还是我们创造的，我们赋予它们一些特定的特性；也就是，它们应我们的要求而生的。我们在真实世界也会建造东西，但我们总是受限于及受阻于真实世界的本质。有些我想要的东西，因为原子核重力作用的关系，我就是无法获得。但是在数学实境里，因为那是想像的，我差不多可以真的得到我想要的。例如，如果你告诉我1+1=2，我不能改变它，但我可以单纯地梦想有一种新的仓鼠，当你把它和它自己加在一起，就会消失不见：1+1=0.也许0和1不在是聚落，而且也许这个‘加’不是将聚落堆到一起，但我仍然会有某种‘数系’。当然，这会产生不同的后果（像是所有的偶数都会等于零），但是就任其发展吧。

尤其是，如果我们觉得合适，我们还可以任意地美化或‘改善’我们的想像架构。例如，过了很长一段时间，数学家逐渐萌生一种想法，1,2,3等等这样的聚落，在某方面还颇不适当的。这个系统有让人很不舒服的不对称性存在，我们永远都可以增加石头，但是却不是永远都可以拿走石头。‘你无法从二拿走三’，就是真实世界的箴言，

但是我们数学家不喜欢人家告诉我们什么可以做，什么不可以做。所以我们加入一些新的仓鼠，好让这个体系更美好一些。具体地说，就是扩充我们聚落大小的符号，将零包含进来（空的聚落），然后我们可以对新的数字像是‘-3’定义为‘和三相加得到零的数字’。其他的负数也都类似如此定义。请注意，这里的哲理是————个数字就是这个数字做了什么。

更特别的是，我们可以将老式的减法行为，换成是比较新潮的概念：反向的加法。过去我们说‘从八拿走五’或‘八减五’，现在我们可以（如果我们希望这样做的话）把这个活动看成是‘八加负五’。这样做的优点是，我们只需进行一种运算：加法。我们把减法的概念从运算世界里拿掉，转到数字本身身上。因此，脱掉鞋子这件事，可以想成是穿上我的‘反——鞋子’。当然我的反——反——鞋子就会是我的鞋子。你是否看出了这个观点的迷人之处呢？

同样地，如果乘法是你感兴趣的东西（也就是说，复制石头堆），你也可能注意到它也让人不舒服地缺乏对称性。什么数字三倍之后为六？这还用问吗，当然是二。但

是什么数字三倍之后为七呢？没有任何一个石头堆像那样的。这多恼人呀！

当然我们不是真的在谈石头堆（或反——石头）。我们谈的是一个抽象的想像结构，而灵感是来自石头堆。所以如果我想要有个数字三倍之后为七，那我们可以就建造一个。我们甚至无需去工具间取得工具——我们只要‘把它带出来’就好了。我们甚至可以给它一个名字像是‘7/3’（这是一个埃及缩写符号的修正版，代表‘乘以三之后为七的数字’），以此内推。所有算数常用的‘规则’都只是这些美学选择的结果而已。所有那些常常出现在学生面前的冷酷、无聊的事实及公式，其真实面目都是这些新的生物彼此互动所产生的令人兴奋及动态的结果——由他们内在的本性所玩出来的模式。

以这样的方式，我们游戏、创造、试着更接近完全的美丽。十七世纪初期有个著名的例子，就是射影几何（projective geometry)的发明。这里的想法是拿掉平行性（parallelism)，来‘改良’欧几里得几何。先把这个决定的历史动机（与透视数学[mathematics of perspective]有

关）先摆在一边不谈，我们至少能欣赏到一项事实，就是一般而言二条直线会相交于单一的一个点，而平行线则打破了这个模式。以另一种方式来说，两个点决定一条线，但是两条线不必然决定一个点。

这项大胆的想法是，在传统的欧几里得平面上增加新的点。具体地说，我们在这个平面上每个方向无限远的地方创造一个新的点。因此，伸向那个方向的两条平行线现在都会在那个新的点上‘相会’。我们可以想像那个交会点是在那个方向无限远的地方。当然，由于每条线都是向两个相反的方向无限延伸的，那个新的点必然是位于两个方向上无限远的地方！也就是说，我们的直线现在是无限的回路！这个想法很前卫吧？

请注意，我们的确得到了我们要的：每一对直线都正好相会在一个点上了。如果它们原来就曾相交，那它们符合这个叙述；如果它们是平行的，现在它们会相交在无限远。（完整地说，我们应该也要再增加一条线，包含所有无限远的点。）现在，任两点决定且只决定一条线，而任两条线决定且只决定一个点。这样的环境多么美好呀！

对你来说，这会不会听起来像是精神病患的疯言疯语？我承认这需要一些了解。也许你反对这些新的点，因为它们不是真的存在‘那里’。但是欧几里得的平面又一开始就存在吗？

重点是这些都不是真实存在的事物，所以除了我们想要认定的规则和限制之外，并没有其他的规则和限制。这里的美学观很清楚，无论是从历史上或哲学上而言：如果一套模式既有趣又有吸引力，那就是好的模式（如果这表示你必须要为一个新构想绞尽脑汁，那就更好）。尽管去建构你想要的任何东西，只要不是讨人厌的无聊东西就好。当然这是品味问题，而品味会随着时间改变和进化的。这就来到艺术史的范畴了。身为一个数学家，好像跟聪明不是那么相关（虽然那绝对有很大的帮助）；而是要有美学上的感受力，以及具有精致的、有鉴赏力的品味。

尤其是，自相矛盾通常被视为是讨厌的。所以，至少我们的数学创造物必须有逻辑上的一致性。在延伸或是改良现有架构的时候，这一点尤其重要。我们当然是可以任意做我们想做的，但是通常我们在延伸扩张一个系统时，

不能让新的模式与旧的模式发生矛盾（例如与负数或者分数的计算产生矛盾）。偶尔，这会迫使我们做出不想做的决定，像是禁止以零做为除数的限制（如果‘1/0’这样的数字存在的话，将会和‘任何数字乘以零都是零’这个很好的模式产生矛盾）。无论如何，只要是符合一致性，你几乎可以做任何你想做的事。

因此，在数学的风景里充满了这些我们为了娱乐自己而建造出来（或是偶然发现）的有趣又可爱的架构。我们观察它们、留意它们的模式、尝试做出简洁又令人信服的叙述，来解释它们的行为。

至少，那是我在做的事。外面一定有人的方法和我相当不同——实务心态的人寻找的是真实世界的数学模型，好帮助他们做预测或是改善人类的某些现状（或至少改善他们公司的资产负债表）。然而，我不是那些人。使用数学，我唯一感兴趣的是用数学来度过美好时光，以及帮别人也做到这一点。对我的人生而言，除此之外我想像不出更有价值的目标。我们全部的人，出生到这个世界，到了时候都会死掉，这就是人生。在这段时间，让我们好好享

受我们的心智，以及应用我们的心智创造出来的奇妙又好玩的事物吧。我是不知道你的情况怎样，而我可是乐在其中呢。

我们再深入这个？林一些，好吗？现在，你必须感谢人们已经做了好一段时间的数学（过去三百年左右更是密集），而且我们已经有了许多惊人的发现。这里举一个我一直都非常喜爱的例子：你把最前面几个奇数相加，会得到什么结果？

1+3=4

1+3+5=9

1+3+5+7=16

1+3+5+7+9=25

对于新手来说，这可能看起来像是随机的一堆数字，但是这个序列：

4,9,16,25，。。。

可绝对不是随机的。事实上，这些正好是平方数。也就是说，这些正好是你要做完美的正方形时，所需要的石

头数目。

oo ooo oooo ooooo

oo ooo oooo ooooo

ooo oooo ooooo

oooo ooooo

ooooo

因此，平方数因为具有这种特别吸引人的特质，而从其他的数字中凸显了出来，这也是它们得到这个特殊名称的原因。这个名单当然会无限的延续下去，因为你可以做任何规模的正方形（这些事想像的石头，因此我们可以无限量供应）。

但这是多么惊人的发现呀！为什么把连续的奇数相加起来，总是得到平方数呢？让我们更进一步地探讨下去：

1+3+5+7+9+11+13=49

（这是7\*7）

1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100

（这是10\*10）

看来一直都成立喔！而且这完全不是我们能够控制

的。这是否为奇数具有的真正（令人惊讶而美妙）的特性，对此我们无法断言。虽然我们创造了这些事物（这本身就是一个严肃的哲学问题），但现在它们横冲直撞，做出了我们意料之外的事。这就是数学的‘科学怪人’的一面——我们有权定义我们的创造物，将我们选择的特征或特质灌注进去，但是对于可能随之而产生的行为，也就是因我们的选择而发展出来的结果，我们是没有发言权的。

在此，我无法强迫你对于这个发现感到好奇；你可能有兴趣，也可能没兴趣。但是至少我能告诉你为什么我会好奇。首先，‘奇数相加’和‘做平方数’（亦即，数字和自己相乘）看起来像是不同类的动作。这两个概念看起来并没有很大的关系。因此，这中间必定有什么东西是建反直觉的。我被这个关连的可能性所吸引——一种新的、预料之外的关系，可能使我的直觉变得更好，而且可能会对我思考这些事物的方式产生恒久的改变。我认为对我而言，这是真正的关键部分：我想要被改变。我想要从根基彻底地被影响。这也许是我做数学的最大原因。我未曾见过或做过任何事，能像数学有这么大的转变力量。我的心

智几乎每天都收到冲击。

另一件要注意的事情是，奇数的集合是无限的。这一直都是神奇且令人著迷的。如果我们的模式实际上到某个地方就无法持续下去了，我们要如何知道呢？检查了前面一百万个例子，无法证明什么——我们的模式可能在下一个例子就不成立了。事实上，关于整数就有数百个简单的问题，至今仍无解——我们就是无法知道模式是否能持续下去。

所以我很想知道你对我没这个问题的感想。也许这不是你的菜，可是我仍然希望你能体会我为何喜爱它。大部分是因为我爱它的抽象性、纯然的简单。这不是那些复杂的国会选区重划议题，或甚至是电子的碰撞问题。这是奇数，好吗？它脱俗而纯粹、放诸四海皆准的特质，深深地吸引我。这些不是毛茸茸、有味道、有血流、内脏的仓鼠；它们是我想像的快乐、自由、比空气还轻的想法。还有，它们真的会令人嚇一跳！

你了解我的意思吗？它们就是简单的嚇人。这些不是