P29

上篇 悲歌

P31

一个音乐家满身大汗地从噩梦中惊醒。梦中，他发现自己置身于一个奇特的社会，那里的音乐教育是强迫性的。“我们是要帮助学生，让他们在这个愈来愈多声音的世界上，变得更有竞争力。”教育学家、学校体系以及政府，一起主导这个重要计划。研究计划的进行、委员会的组成、决策的形成——这些都没有听取任何一位现职音乐家或作曲家的意见，也没让他们参与。

由于音乐家通常把他们的构思，以乐谱的形式呈现出来，想当然尔，那些奇怪的黑色豆芽菜和线条就是“音乐的语言”。所以，要让学生们拥有某种程度的音乐能力，当然他们得要相当精通这种语言；如果一个小孩对于音符和音乐理论没有扎实的基本功，要他唱歌或演奏乐器，将是很可笑的事。演奏或是聆听音乐（更不要说创作乐曲），被认为是相当高深的课题，通常要等到大学或甚至研究所，才会教他们这些。

而在小学和中学阶段，学校的任务就是训练学生使用这个语言——根据一套固定的规则绕着符号打转：“音乐课就是我们拿出五线谱纸，老师在黑板上写下一些音符，然后我们抄写下来，或是转换成其他调。我们必须确定谱号和调号的正确性，而我们的老师对于四分音符是否涂满，要求非常严格。有一次我在半音阶（chromatic scale）的测验题中答对了，老师却没给我分数，说我把音符的符干摆错了方向”。

以教育工作者的智慧，他们很快就发现，即使很小的孩子，也可以给予这类的音乐指导。事实上，如果一个三年级的小孩无法完全记住五度循环（circle of fifths），就会被认为是很羞愧的事。“我得给我的小孩请个音乐教师了，他就是没法专心做他的音乐作业。他说那很无趣。他就是坐在那里望着窗外，自己哼着曲调，编一些愚蠢的曲子。”

较高年级的学生，压力就真的来了。毕竟，他们必须为标准化的测验和大学入学考试做准备。学生必须修习音阶（scales）和调式（modes）、拍子（meter）、和声（harmony）、对位（counterpoint）等课程。“他们得学习一大堆东西，但是等到大学他们终于听到这些东西，他们将会很感激在高中所做的这些努力。”当然，后来真的主修音乐的学生并不多，所以只有少数人得以聆听到黑色豆芽菜所代表的声音。然而，让社会上每个人都知道什么是转调（modulation）、什么是赋格（fugal passage）是很重要的，无论他们有没有亲耳听过。“告诉你实话吧，大部分的学生就是不擅长音乐。他们觉得上课很无聊，他们的技能不佳，他们的作业写的乱七八糟，难以辨认。而且大多数的学生，都不关心在现今世界上，音乐是多么的重要；他们希望音乐课愈少愈好，而且能赶快上完。我猜人就只有两种：音乐人和非音乐人。我碰到过一个小孩，她真是太优秀了！她的作业无懈可击——每个音符都在正确的位置上，完美级了，既清楚又一致，真是美丽呀。她将来一定会成为伟大的音乐家。”

这位音乐家一身冷汗地从梦中醒来，庆幸那只是一场疯狂的梦境。他对自己说：“当然，没有哪个社会会将这么美妙又有意义的艺术形式，分解到这么不需动脑又支离破碎；也没有哪个文化会这么残酷地剥夺孩子们这种展现人类情感的自然手段。这真是荒谬呀！”

与此同时，这个城市的另一端，一位画家也从类似的梦魇中惊醒过来......我很惊讶的发现自己置身在一个普通的教室里——没有画架，没有颜料管。“喔！我们要到高中才真正开始作画。”学生们告诉我。“在七年级，我们大部分都是学习颜色和画图器具。”他们拿给我一张工作表。其中一面是一格一格的颜色样本，每种颜色旁边都有空格，要他们填上颜色的名称。其中一位学生说道，“我喜欢画画，他们告诉我怎么做，我就照着做，很简单的！”

下课后,我和老师谈了一下，我问刀：“这样看来，你的学生没有真正的动手画画啰？”老师回答我，“嗯，下一学年他们会上‘数字绘画先修课程',为高中主要的‘数字绘画课程'做好准备.因此,将来他们可以把在这里所学的,应用到真实生活中的画画情境——刷子沾上涂料、刷涂等这类事项。当然我们会按照学生的能力为他们做规划。真正优秀的画家——彻底熟悉色彩及刷具的——他们可以稍微快一点进行真正的画画，其中有些人甚至可以去上大学学分的进阶课程。但是大部分情形，我们只是尝试给这些孩子绘画的良好根基，因此当他们离开学校进入真实世界，为他们的厨房粉刷时，就不会弄得一团糟了。”

“嗯，你所说的那些高中课程......”

“你是说数字绘画课吗？我们看到修课的人数近年来增加了不少。我认为大部分是因为父母希望他们的孩子能够进入好的大学。高中成绩单上有进阶数字绘画课是很吃香的。”

“为什么大学会在意学生能否在标明数字的区块上涂色呢？”

“喔，你知道的，这代表学生有逻辑性思考的清楚脑袋。当然，如果学生打算主修视觉科学的科系，例如时尚或是室内装潢，那么在高中就拿到绘画学分，会是很好的安排。”

“原来如此。那么学生们什么时候才会开始在空白的画布上自由作画呢？”

“你说的话真像我的一位大学老师！他们总是说些表达自我、感情这一类的东西——完全是脱离现实的抽象东西。我自己拥有绘画学位，但是我从未真正的在空白的画布上作画。我用的是学校当局提供的数字绘画工具。”

\* \* \*

可悲的是，我们数学教育目前的制度正好就是这样的噩梦。事实上，如果我必须设计一套制度来“摧毁”孩子们对于“创造模式”与生俱来的好奇心，我不可能比现行的制度做的更好——我就是无法想象出构成当前数学教育的这种毫无意义、压迫心灵的方法。

大家都知道这个制度有问题。政治家说“我们需要更高的标准”；学校则说“我们需要更多经费和设备”；教育家有一套说法。而教师们又有另一套说法。他们通通都错了。唯一了解问题所在的是那些最常被责备，但是又最被忽略的人——学生。他们说“数学课愚蠢又无趣”，他们说对了。

P37数学与文化

首先我们要了解，数学是一门艺术。数学和其它类型的艺术如音乐和绘画的差别只在于，我们的文化不认同数学是一门艺术。每个人都了解，诗人、画家、音乐家创造出艺术作品，以文字、图像及声音来表达自我。事实上，我们社会对创造性的表达是相当大方的，建筑师、厨师、甚至电视导播都被认为是职业上的艺术家。那么，为何数学家不是呢？

这个问题，有一部分原因出在，没有人知道数学家到底在做些什么。社会上的普遍认知似乎是，数学家和科学是有关联的——也许是因为数学家提供给科学家一些公式和定理，或者协助将一大堆数字输入电脑。如果这个世界必须要分成“诗意梦想家”和“理性思考家”两部分，毫无疑问，绝大多数人会把数学家放在后面那一类。

然而，事实上，没有什么像数学那样梦幻及诗意，那样基进、具破坏力和带有奇幻色彩。我们觉得天文学或物理学很震撼人心，在这一点上，数学完全一样（在天文学家发现黑洞之前，数学家老早就有黑洞的构想了），而且数学还比诗、美术或音乐容许更多的表达自由，后者高度依赖这个世界的物理特质。数学是最纯粹的艺术，同时也最容易受到误解。

因此让我试着解释数学是什么，以及数学家做些什么。我以哈帝（G.H.Hardy，英国数学家，1877—1947）绝佳的叙述作为开场：

一位数学家，就像一位画家或诗人，是模式（pattern）的创造者。如果他的模式比画家或诗人的模式能留存得更久，那是因为这些模式是用理念（ideas）创造出来的。

所有数学家的工作是做出理念的模式（making patterns of ideas）。什么样的模式？什么样的理念？是关于犀牛的理念吗？不是的，那些留给生物学家吧。是关于语言和文化的理念吗？不通常不是这些对大部分数学家的审美观而言，都太复杂了。如果数学有一个统一的美学原则的话，那将是：简单就是美（simple is beautiful）。数学家喜欢思考最简单的可能性，而这种最简单的可能性是想像的，不见的是现实存在的。

例如，如果现在我在思考形状——这是我常常做的——我可能会想象在长方形中有一个三角形：

我想知道，这个三角形占据了长方形多少的空间？三份之二吗？重要的是要了解，我现在探讨的不是长方形内有三角形的这幅画。我探讨的，也不是一座组成桥梁上梁柱架构的那些金属三角形。在此，并没有那些深谋远虑的实用目的存在。我纯粹就是在玩。这就是数学——想知道（wondering）、游戏（playing）、用自己的想象力来娱乐（amusing）自己。首先，三角形在长方形中占据了多少空间，甚至没有任何真实、实体上的目的。即使是最谨慎小心制造出来的实体三角形，仍然是不断震动的原子所组成的；它的形状每分钟都在改变。也就是说，除非你要探讨“近似”（approximate）的度量。好了，这里就会牵扯到数学的“美学”了。因为那样就不单纯了，它成为一个仰赖真实世界各式各样细节的丑陋问题了。那些留给科学家去解决吧。数学提出的问题是，在一个想象的长方形中那一个想象的三角形。它的形状边缘很完美，因为我要它们很完美——这就是我喜欢思考的问题类型。这就是数学的一个主要特征：你想要它是什么样，它就是什么样。你有无限多的选项；没有真实世界来挡路。

另一个方面，一旦你做了选择（例如，我可能选择我的三角形是对称的，或不是对称的），然后，你这个新创造就会自行发展下去，不管你是否喜欢它的后续发展。这就是创造想象的模式时有趣的地方：它们会回应！这个三角形在长方形中占据了某个空间比例，而我完全无法控制这个比利为何。这个数字就摆在那里，可能是三分之二，可能不是，但可不是我说了就算。我必须找出这个数字。

因此，我们可以玩玩看，想象一下我们要什么，然后做出模式，再对这套模式提出问题。但是我们要如何解答这些问题呢？这一点都不像科学，我没办法用试管、设备或是任何东西做实验来告诉我，我想象出来的虚拟物的真相。能得知我们想象物的真相的唯一方法，就是运用我们的想象力，然而。这是件艰苦的差事。

在这个例子中，我的确看到了简单又美妙的地方：

如果我把长方形像上面那样切成两个部分，我可以看到这两个部分都被三角形的斜边斜切成一半，所以三角形里面和外面的空间是相等的。也就是说，这个三角形一定是正好占了长方形的一半！

这就是数学的外貌和感觉。数学家的艺术就像这样：对于我们想像的创造物提出简单而直接的问题，然后制作出令人满意又美丽的解释。没有其他事务能达到如此纯粹的概念世界；令人着迷、充满趣味，而且不花半毛钱！

你也许要问了，我的这个想法又是从何而来的？我怎么知道要画那条辅助线？那我要问你了，画家又是怎么知道要在哪里画上一笔？灵感、经验、尝试错误、运气。这就是艺术，创造出那些思想的美丽小诗，创造出那些纯粹理性的诗篇。这个艺术形态有着某种东西，能做如此神奇的转变。三角形和长方形之间的关系原本是个谜，然后那条小小的辅助线让谜底浮现出来。我本来看不出来的，突然间我就看见了。然而，我能够从“无”当中创造出全然简单的美丽，并且在这个过程当中改变了我自己。这不正是艺术吗？

这就是为什么看到现在学校里的数学教育会让人如此痛心。这么丰富且迷人的想象力探索过程，却一直遭到贬抑，沦落成一套要硬背死记、毫无生气的“事实”（facts），以及必须遵循的演算程序。关于“形状”的一个简单而自然的问题，一个富创造性和收获的发明与发现的过程，却被取代为：三角形面积公式：A=½ b h

“三角形面积等于底乘以高的一半”，学生被要求要死背这个公式，然后在“习题”中反复“应用”。兴奋之情、乐趣、甚至创造的过程会有的痛苦与挫折，全都消磨殆尽了。再也没有任何“困难”了。问题在提出来时也同时被解答了——学生没事可做。

现在，让我说清楚我到底在反对什么。不是公式，也不是背记一些有趣的事实。在某种情境下，这是可以的，就像学习字汇必须要记忆一样——这可以帮助我们创造更丰富、更微妙的艺术作品。但是，三角形是长方形面积的一半，这个“事实”并不重要。重要的是，以辅助线来切割的这个巧妙构思，以及这个构思可能激发出其他美妙的构思，进而引导出在其他问题上的创造性突破——光是事实的陈述绝不可能给你这些的。

拿掉了创造性的过程。只留下过程的结果，保证没有人能真正全心全意投入这个科目。这就像是“说”米开朗基罗创造了美丽的雕塑却不让我“看”它。我要如何受到激发而产生灵感？（当然实际上还更糟——至少我还知道有一个雕塑艺术存在，只是不让我去欣赏它。）

由于将焦点集中在“什么”，排除掉“为什么”，数学被降格为一个空壳子。数学不是在“真相”里，而是在说明、论证之中。论证的本身赋予真相一个情境，并确认到底我们在谈论什么、其意义何在。数学是说明的艺术（the art of explanation）。如果你不让学生有机会参与这项活动——提出自己的问题、自己猜测与发现、尝试错误、经历创造性的挫折、产生灵感、拼凑出他们的解释和证明——你就是不让他们学习数学。所以，我不是在抱怨我们数学课堂上出现的事实与公式，我抱怨的是我们的数学课里没有数学。

\* \* \*

如果你的美术老师告诉你，绘画就是在标了数字的区块上涂上颜色，你会知道这是不对的。我们的文化让你了解这些——我们有博物馆、画廊，你自己家里也有挂画。我们的社会非常了解绘画是媒介，人类借由绘画来表达、展现自我。同样的，如果你的科学老师说，天文学是根据人们的出生日期来预测人们未来行为的一门学科，你会知道这个老师有问题——科学深入我们的文化，几乎每个人都知道原子、星系、以及一些自然定律。但是如果你的数学老师给你一个印象，不管是明白说出来或是大家默认的，让你觉得数学是公式、定义、以及背记一堆演算法，谁来帮你矫正这个印象呢？

文化是自我复制繁衍的怪物：学生从他们老师那里学习数学，而老师又是从他们的老师那里学习数学，所以对于数学的欠缺了解与欣赏，会在我们的文化中无止境的复制下去。更糟的是，这种“伪数学”以及这种强调精准却无灵魂地操弄符号，它们的延续，创造了自己的文化和自己的一套价值观。那些已经精熟这一套的人，从他们的成功当中衍生出了极大的自负。他们最听不进去的就是，数学其实是原始的创造力和美学的感受力。许多数学研究生在被人说“数学很强”说了十年之后，才发现自己其实没有真正的数学天分，只是很会遵循指示而已，他们感到伤心、失败。数学不是遵循指示，而是要创造出新的方向。

到现在我还没提到学校里缺乏数学评论这件事呢。学校里的数学教育，不让学生窥见数学的秘密，亦即数学和任何文学作品一样，都是人类为了自己娱乐所创造出来的；数学作品需要评论性的评价；任何人都可以拥有对数学的审美品味，并发展出对数学的审美观。数学和诗一样，我们可以质疑它是否符合我们的美学原则：这项数学论证扎实吗？它有道理吗？它简单而优美吗？它能否让我更接近事实的核心？当然，在学校里没有对数学进行任何评论——因为根本就没有艺术作品可供评论！

为什么我们不让我们的孩子学习如何做数学呢？难道是我们认为数学太难了，不信任孩子的能力？我们似乎觉得他们有能力谈拿破仑，并得出自己的结论，为什么对三角形就不能呢？我认为这只是我们的文化不了解数学。我们得到的印象是，数学是很冷酷而且高度技术性的东西，不可能有人搞得懂——如果这个世上真的有自我实现的预言，这就是一例。

我们的文化如果只是对数学无知，这已经够糟了，但更糟的是，人们真的以为他们了解数学——普遍地误以为数学对人类社会具有实用价值！这就已经构成数学和其他艺术之间的极大差异。数学被我们的文化看作是科学和技术的一种工具。大家都知道诗和音乐是纯欣赏，能提升人类的心灵，让我们的生命更高尚（因此在公立学校的课程安排中几乎都被拿掉了），但是数学则不然，数学是很“重要的”。

辛普利西奥：你的意思真的是说数学对社会没有用，或没有使用价值

吗？

萨尔维亚蒂：当然不是。我只是说一件事物如果有实际上的用途，并不表示它的本质就是如此。音乐

1 译注：此处的人物对话系模拟伽利略的《两种世界体系的对话》。1632年，伽利略出版了《两种世界体系的对话》，这是一本以对话形式论辩的书，书中内容以三个人物的对话展开——辛普利西奥（Simplicio，主张地球为中心说的亚里士多德学派支持者），萨尔维亚蒂（Salviati，主张太阳为中心说的哥白尼学派支持者）和萨格莱多（Sagredo，在这场辩论中持中立态度的博学智者）。但最后一位并未出现在此对话中。

可以让人上战场，但这不是人们作曲的目的。米开朗基罗为天花板做装饰，我相信他心中其实有更崇高的目的。

辛普利西奥：但是我们不需要人们学习数学的实用结果吗？难道我们不需要会计师、木匠之类的人吗？

萨尔维亚蒂：有多少人真正使用这些在学校里学的“实用的数学”呢？你认为外面的木匠有使用三角函数吗？有多少成年人还记得分数的除法，或是如何解二次方程式呢？很显然，目前的实务训练课程根本就没用，因为：它不但是让人难以忍受地无趣，也根本没有人会去用它。因此，人们为什么会认为它很重要？让所有的人都“隐约”记得代数公式和几何图形，却“清楚”记得对它们的憎恨，我实在看不出这样的教育对社会有什么好处。然而，如果展现给人们看美妙的事物，让他们有机会享受当一个有创造力、有弹性、心胸开放的思想家——这是真正的数学教育可能提供的东西，这可能还有点好处。

辛普利西奥：但是人们日常生活至少要会算账，不是吗？

萨尔维亚蒂：我敢说大多数人在日常计算时都是使用计算机。为什么不用计算机呢？肯定是容易多了，而且更可靠吧。但是我的重点不只是说目前的制度非常糟糕，而是这个制度错失掉如此美好的东西！数学应该被当做艺术来教的。这些世俗上认为“有用”的特点，是不重要的副产品，会自然而然地跟着产生。贝多芬能够轻易地写出响亮的广告配乐，但是他当初学习音乐的冬季是为了创造美好的事物。

辛普利西奥：但不是每个人都是当艺术家的料。那些没有“数学天分”的孩子怎么办？他们要如何融入你的计划呢？

萨尔维亚蒂：如果每个人都能接触到数学的原始面貌，沉浸在它所带来的挑战性乐趣及惊奇之中，我认为我们会看到学生对数学的态度有极大的转变，同时我们对“数学很强”这个观念的定义，也会有极大的转变。我们已经失去了许多有潜能的天才数学家——那些抗拒看起来没有意义又死板科目的有创造力又聪明的学生。他们因为太聪明了，不会浪费时间在这种无聊傻事上。

辛普利西奥：但是你难道不认为如果把数学课变得比较像是艺术课，会让大部分的孩子学不到东西吗？

萨尔维亚蒂：他们现在就学不到东西了呀！根本不要有数学课都强过现在这样，至少有些人还能有机会靠自己去发现一些美好的东西。

辛普利西奥：那么你是要把数学课从学校的课程中拿掉吗？

萨尔维亚蒂：数学课早就被拿掉了！唯一的问题是要怎么处理剩下的这副死气沉沉的空壳子。当然，与其取消掉这门课程，我比较想要用生气勃勃、有趣味的数学课来取代。

辛普利西奥：但是有多少数学老师具备足够的知识，可以用那种方式来教学呢？

萨尔维亚蒂：很少。但那只是冰山一角......