一位数学家的叹息

如何让孩子好奇、想学习，

走进数学的美丽世界

作者简介

Paul Lockhart

保罗∙拉克哈特 博士

他曾经在美国的布朗大学、加州大学圣塔克鲁兹分校担任数学教授。从2000年开始，他自愿到纽约布鲁克林的圣安学校（St. Ann’s School）教导K-12（从幼稚园到十二年级）的数学课。他是一位杰出的数学家，发愿来教小孩子数学，希望能呈现给孩子们数学的美感，和充满想像力的一面，他非常批判“死记硬背”，“省略思考过程”的教学方法。

本书是他的第一本书，书一出版即在数学教育圈子造成轰动。除了本书之外，他另著有新书《Measurement》。

译者简介

高翠霜

台湾大学经济系毕业，美国纽约州立大学石溪分校经济硕士，曾任职经建会、经济部国营会、台湾综合研究院、行政院副院长室、行政院胡腾正政务委员会办公室。译有《Career关键14年》（天下文化）、《绩效评估》（天下文化）、《大改变》（先觉）、《新野蛮人宣言》（商周）、《通膨、美元、货币的一课经济学》、《赢家的诅咒》、《常识经济学》、《了解总体经济的第一本书》（以上经济新潮社出版）等书。

（出版缘起）

自由学习，让人生更美好

经济新潮社编辑部

经济新潮社成立至今已经十二个年头。本着“以人为本位，在商业性、全球化的世界中生活”的宗旨，我们出版了许多经营管理、经济趋势相关的书籍。

然而，近年来台湾的变化很大。

社会的既有制度规范，与人们的需求与期望产生落差：民间自主力量的崛起，加上网路科技的进步，媒体、文化、消费的生态已大不相同了；而企业界大多在转型的压力下挣扎，暴露出从基础能力到尖端创新的不足。

金融海啸的影响所及，也暴露出资本主义的缺陷。人们开始更关心工作与生活的意义、他人的处境、或是制度的合理性。

有些事，应该要超越商业、实用性的思考。

我们成立“自由学习”这个书系，是希望回到原点——在商业、实用之外，学习应该是自主的、自由的、阅读可以是愉悦的、无目的性的、跨界的。不论我们生活在何种文化，从事何种领域的工作，我们都拥有自由，透过书，可以看到不同领域的东西、理解他人、反省人与人的关系；也可以反思做人的根本、作育下一代的基础；也获得再生的能量，更新自己的想法。

就从一些基本的东西开始吧。找回人的本质、生存的意义，或是享受纯粹的知识乐趣或阅读快感，应该是比商业更重要的事。透过自由的学习、跨界的思考，让我们的人生更圆满，迈向一个互相理解、共生的社会。也许长路迢迢，但是希望能在往后的出版过程中实践。

如果你要造船，不要招揽人来搬木材，不要指派人任务和工作，而是要教他们去渴望那无边无际广袤的大海。

——Antoine de Saint-Exupery，《小王子》作者

**前言**

齐斯∙德福林（Keith Devlin）

史丹佛大学教授

2007年下半年，在我的一场演讲会上，有个听众交给我一份25页的打字文稿，标题是《一个数学家的叹息》（A Mathematician’s Lament），说我可能会喜欢这篇文章。这篇文章是一位数学教师保罗∙拉克哈特（Paul Lockhart）在2002年所写的，从那时起，它就在数学教育的小圈子里秘密流传，但是从未正式发表过。这位听众虽然低估了我的反应——我非常地喜欢这篇文章。这位保罗∙拉克哈特，不论他是何方神圣，我觉得他的文字应该有更广大的读者，因此，我做了一件以前从未做过，未来也可能不会再做的事：找寻这篇文章的作者——这有点难，因为文章里没有联络资讯——并且得到他的同意之后，我在“美国数学协会”（Mathematical Association of America）的杂志网址MAA Online([www.maa.org](http://www.maa.org))我的每月专栏“德福林观点”（Devlin’s Angle）当中，以该文的原貌转载全文。这是能让这篇文章在数学界及数学教育圈子曝光，我所知道最快而且最有效的方法。

2008年3月，《一个数学家的叹息》在我的专栏中刊出时，介绍文我是这样写的：

坦白说，这是对于当前K-12（从幼稚园到十二年级）的数学教育，我所见过写得最好的评论之一。

当时我期待会有热烈的回应。文章刊出后，引来的是燎原大火。保罗的文字在全世界激起了极大的共鸣。除了许多人写email来表达赞赏之意，还有蜂拥而至的请求，要求授权转载以及翻译——碍于协议，我没有刊登保罗的联络方式，所以很多要求是冲着我而来的。（你手上的这本书，也是因此而产生的。）

保罗所说之事，许多数学家及数学老师也曾经说过。对于数学教育理念不同，因而反对保罗观点的人，保罗所提出的观点也不是新鲜事。不同的是，保罗文字中的说服力以及他所流露出的强烈热情。这不只是一篇好文章；这是伟大的作品，真正的发自内心。

毫无疑问，《一个数学家的叹息》一文以及因而衍生出的这本书，都是表达意见的作品。保罗对于应该如何教授数学有很强烈的意见，而且强力辩护他所主张的教法，及反对现今学校数学教育的现状。然而，除了他个人深具魅力的写作风格之外，更特别的一点是，他对于艰难又备受争议的数学教育课题，提出了看法，这是很少人能够想得出来的。保罗的经历比较少见，他是个成功的专业数学家，在大学里教书，后来发现他的真正使命在K-12教育，因而投身其中，至今多年。

这本书，在我看来，和它的原稿一样，对于每一位要从事数学教育的人、每一位学龄孩子的家长、每一位负责数学教学的学校或政府官员而言，都应该是必读之作。你可能不是完全同意保罗的说法。你可能认为他主张的教学方法不是每位教师都能够成功运用的。但是你应该读一读并想一想他的说法。这本书已经是数学教育世界里的显著地标，不能也不应该被忽略。在此我并不打算告诉你我认为你该做何回应。就像保罗自己也会同意的，这应该是读者的事。但我要告诉你的是，我会爱死了保罗∙拉克哈特来当我的数学老师。

（数学家齐斯∙德福林为2004年国际毕达哥拉斯奖、2007年卡尔∙沙根科普奖得主。史丹佛大学人文科学与先端科技研究中心{H-STAR}共同创办人及资深研究员，同时也是国家公共广播电台[Nnational Public Radio]周末版的“数学人”[The Math Guy]专栏作者。）

[推荐序]

大破大立

——难得一见的数学教育好书

洪万生

台湾师大数学系退休教授

这本书《一位数学家的叹息》应该是我所见过的数学教育宣言中最基进的（radical）一篇了。作者保罗∙拉克哈特（Paul Lockhart）是一位成功的专业数学家，公元2000年，他毅然转入纽约市一所涵盖K-12年级的中小学作教，身体力行他认为有意义的数学教学活动。本书即是他的现身说法，因此，他对于美国目前中小学数学教育的现实之沉重但真诚的叹息，似乎没有几个有识之士敢视而不见。

事实上，本书（分上、下两篇）所呈现的愿景，乃是中小学数学教育的一种乌托邦。通常我们面对乌托邦，似乎总是看看就好，大可不必认真。然而，我仔细阅读（英文原文和中译文）之后，对于邀约写序，多少有些犹豫与挣扎。对照我自己的数学经验，我将如何推荐本书呢？我自己曾在台湾师大数学系任教将近四十年，主要授课如数学史都涉及未来与现职的中学老师之专业发展，而且也曾指导过几十位在职老师班的硕士生，所以，我对于（台湾）数学教育现实的兴革，当然也有相当清晰的理想与愿景。不过，经历过那么多的数学教育改革争议之后，我觉得务实地训练与提升教师的数学素养，恐怕是最值得把握的一条可行进路。

话说回来，作者的愿景所引伸出来的策略，也并非完全不可行？譬如说吧，在本书结束时，作者语重心长地鼓励老师“需要在数学实在中悠游。你的教学应该是从你自己在于丛林中的体验很自然地涌出，而不是出自那些在紧闭窗户车厢中的假游客观点。”因此，“丢掉那些愚蠢的课程大纲和教科书吧！”因为“如果你没有兴趣探索你自己个人的想像宇宙，没有兴趣去发现和尝试了解你的发现，那么你干嘛称自己为数学教师？”

对许多数学老师来说，要是丢掉课程大纲与教科书，大概会有一起丢掉洗澡水与婴儿的制式（conventional）焦虑感，尽管有一些老师平常教学时，根本不太理会课程大纲与教科书内容，而只是使用自己或同仁共同编辑的讲义。然而，不管你是否赞同拉克哈特的主张，也不管他的主张是否能够付诸实现，本书是老师、家长与学生都不容错过的金玉良言，值得我们咀嚼再三。底下，我要稍加说明我大力推荐本书的三个理由。

本书上篇主题是“悲歌”，依序有《数学与文化》、《学校里的数学》、《数学课程》、《中学几何：邪恶的工具》以及《“标准“数学课程》等五节。下篇主题是：“鼓舞”，但不分节论述。上篇文字曾由齐斯∙德福林（Keith Devlin）安排，在MAA线上（MAA Online）每月专栏“德福林观点”全文披露（2008年3月），获得大大超乎预期的回应。在上篇一开始，作者拉克哈特利用虚构的音乐与绘画之学习梦境，说明相关语言或工具的吹毛求疵，让这些艺术课程之学习，变得既愚蠢又无趣，最终摧毁了孩子们对于创作模式那种天生的好奇心。或许上述梦魇并非真实，但是，“类比”到数学教育现场，却是千真万确。而拉克哈特的立论，是一般人容易忽略的数学知识活动特性：数学是一门艺术！至于它和音乐和绘画的差别，只在于我们的文化并不认同它是一门艺术。拉克哈特进一步指出：

事实上，没有什么像数学那样梦幻及诗意，那样基进、具破坏力和带有奇幻色彩。我们觉得天文学或物理学很震撼人心，在这一点上，数学完全一样（在天文学发现黑洞之前，数学家老早就有黑洞的构想了），而且数学比诗、美术、或音乐容许更多的表现自由，后者高度依赖这个世界的物理性质。数学是最纯粹的艺术，同时也最容易受到误解。

这种主张呼应了英国数学家哈帝（G.H.Hardy）之观点：数学家是理念模式（patterns of ideas）的创造者。在他的《一个数学家的辩白》（A Mathematician’s Apology）中，哈帝藉此宣扬他的柏拉图主义（Platonism）。不过，拉克哈特欲将柏拉图的理念（ideas）拉回到人类玩游戏的层次：“我纯粹就是在玩。这就是数学——想知道、游戏、用自己的想像力来娱乐自己。”事实上，在游戏的情境中，人们会基于天生的好奇，而开始探索。而这无非是人类学习活动的最重要本质所在。反过来，如果数学学习只是要求学生死背公式，然后在“习题”中反复“套用”，那么，“兴奋之情、乐趣、甚至创造的过程会有的痛苦与挫折，全部消磨殆尽了。再也没有困难了。问题在提出来时也同时被解答了——学生没事可做。”对于这种强调精准却无灵魂地操弄符号的文化及其价值观，拉克哈特利用简单例证戳破它的虚幻，这是我大力推荐本书的第一个理由。

在《学校里的数学》这一节中，拉克哈特指出教改迷思，在于它企图“要让数学变有趣”，以及“与孩子们的生活产生关联”。针对这两点，他的批判非常犀利：“你不需要让数学有趣——它本来就远超过你了解的有趣！而他的骄傲就在与我们的生活完全无关。这就是为什么它是如此有趣！”虽然为了达到“有趣”与“关联”的目的，教科书的编写难免“牵强而做作”。譬如，为了帮助学生记忆圆面积和圆周公式，拉克哈特认为：与其发明一套圆周先生（Mr.C）和面积太太（Mrs.A）的故事，不如叙说阿基米德甚至刘徽有关圆周率的探索史实，说不定更能够触动学生的好奇心灵。这种强调发生认识论（genetic epistemology）的历史关怀，也与他批判数学课程的缺乏历史感互相呼应。

拉克哈特对于数学课程的僵化之批判，还扩及它所连结的“阶梯迷思”，他认为这种一个主题接一个主题的进阶安排，除了淘汰“失败的”学生之外，根本没有（其它）目标可言。因此，学校里的数学教育所依循的，“是一套没有历史观点，没有主题连贯性的数学课程，支离破碎地收集了分类的主题和技巧，依解题程序的难易程度凑合在一起”。相反地，“数学结构，不论是否具有实用性，都是在问题背景之内发明及发展出来的，然后从那个背景衍生出它们的意义”。

或许有人说，中学的几何课程可以满足此一智性需求，不过，拉克哈特却将它称为“邪恶的工具”。作者在《中学几何：邪恶的工具》这节中，指出数学证明的意义在地“说明，而且应该说明得清楚、巧妙且直截了当”。同时，只有当你想像的物件之行为违反了直觉，或者有矛盾出现时，严谨的证明才有其必要，而这当然也符合历史真实。基于此，它严厉批判“两栏式证明”（two-column proof）既沉闷又“没有灵魂”，学生只是被训练去模仿，而不是去想出论证！

在作者深刻批判学校数学、课程纲要以及几何证明之后，他还揭露了一个目前通行的“标准数学课程”之真相，这个戳破学校数学（school mathematics）神话的深刻反思，是我大力推荐本书的第二个理由。

在上篇解构性的“大破”之后，拉克哈特在本书下篇当中，为我们贡献了令人鼓舞的“大立”，这是我在力推荐本书的第三个理由。在本篇中，拉克哈特想像了一个数学实在（mathematical reality），其中“充满了我们为了娱乐自己而构建出来（或是偶然发现）的有趣又可爱的架构。我们观察它们、留意它们的模式、尝试做出简洁又令人信服的叙述，来解释它们的行为”。至于如何做数学？拉克哈特利用实例演示，启发我们“与模式游戏、注意观察事物、做出猜测、寻找正反例、被激发去发明和探索、制作出论证并分析论证，然后提出新的问题”。此外，他还特别提醒：小孩子都知道学习和游戏是同一回事。可惜，成年人已然忘却。因此，他最后给读者的实用忠告是：玩游戏就对了！做数学不需要证照。数学实在是你的，往后的人生你都可以悠游其中。

总之，本书作者分享了他自己基于好奇，探索数学知识活动被忽略面向的深刻体会，其中他认为数学如同音乐、绘画及诗歌一样，也是一门艺术。同时，学习与游戏是同一回事。因此，在游戏的情境中，基于人类开生的好奇心而探索模式，才是学习数学的正道。这也部分解释了何以他那么重视数学史的殷鉴，因为数学都是从历史脉络（context）产生，并因而获得意义。

对于老师或甚至家长来说，如果你觉得本书的主张太过基进，不妨参考作者的玩数学比喻，那么，你对数学学习一定会有全新的体会。根据宠物书籍的说明，离开幼儿阶段还喜欢游戏的物种，只有成年人和成犬而已。人类幼童利用游戏来学习包括数学在内的各种事物。如今，我们身为成年人，甚至有幸带领小孩子学习，为什么不玩下去呢？

[推荐序]

数学差，不是你的错

——别让学校扼杀了创意！

郑国威

PanSci泛科学网站总编辑

先说个我自己的真实故事吧。

我小学的时候在学校功课排名前列，主要的原因是因为我就读的学校规模非常小，一个年级才两个班，竞争不激烈，另一个原因是我的确有点小聪明，而且蛮喜欢念书。那年头，学业功课好，加上比较听老师的话，很容易就获得其它课外表现的机会，代表班级或学校去外头参加比赛，也因此当了好几年的模范生，拿了县长奖毕业。嚣张的咧。数学？对学过珠心算的我太简单了！

但一上了国中，全都变了。我依旧很用功，大部分的科目考试成绩不是满分就是逼近满分，但唯有数学，我连及格的一半都拿不到。“数学”，光是看到这两个字就足以让我产生头昏想吐的感觉，甚至还更严重些，会紧张到冒汗、肚子痛。老师在黑板上用大大的三角尺跟大圆规画的图依旧精美，板书我能抄的都抄了，但我就是没办法理解这些数学跟图形的逻辑。我慌了。

于是我开始篡改成绩单、篡改考卷分数，或是跟大雄一样，总是以考卷没带回家或是丢了为借口，不让父母签名。虽然现在回想起来真是很傻，但当时的我真的快被数学逼疯了，每天提心吊胆。

升上国二，状况依旧没变，但班导师换成了另一位在学校号称王牌的数学老师。一天晚上，全家人都在客厅看电视的时候，电话响起，我坐在接起电话的父亲对面，听到他对话筒说“喔！老师好！”的时候，我的眼泪无法克制地决堤了。

好消息是，后来在新任班导师的细心教导之下，我的数学解题能力提升了很多，应该说，他让我学会用我能理解的方式把答案交出来。我心知肚明，我虽然同样考90分、100分，但跟班上数学真的好的同学比起来，我的程度还是很差。我顺利考上第一志愿的高中，但我完全没有跟父母商量，就决定去念文组。因为那种根深蒂固对数学的恐惧，始终没有离去，高中的数学对我来说更是百倍狰狞的恶魔。

于我是大学念外语、研究所念传播，但也避开做量化研究。工作之后，做各式各样的计划，只要跟数学、算钱、预算有关，我就推掉。我生活节约，不想花钱，因为我不想算数学。但如果我花钱，我也不太在乎多少钱，有没有打折，也不记录开支，因为我不想算数学。我也不做任何投资理财，一切都交给家人处理。

我不知道打开这本书的你是谁。是同样害怕数学的学生，还是正在让学生害怕数学的老师，抑或是担忧孩子数学成绩，正在物色补习班或家教老师的父母亲。如果你都不属于这三者，而是一个非常喜欢数学的人，那么我反而要问：怎么可能？

这本书的英文原名是“一位数学家的叹息”（A Mathematician’s Lament），本来也不是一本书，而是一篇2002年起开始在美国数学老师社群中流传的文章。我看了前五页，就觉得受震撼。而这种震撼，是一种“总算有人了解我的感觉”加上“曾经的恐惧跟伤疤又被碰触”的综合感受。每多读一段，就起觉得明朗，了解自己为何当初会那么畏惧数学。一口气看完全书，仿佛是做了一次心理疗程，把这段影响我人生选择至巨的数学梦魇给重新诠释了，原来数学差，并不是我的错。

作者将数学与绘画、音乐相比，突显出数学教育之僵硬跟死板。原来问题就是出在我们看待这门学科的角度完全错误，将数学当作其它理科的基础，要求绝对的精准跟正确，按照既定的公式，强调快速（为了考试）、强调术语（为了显得专业）、强调一切大部分人在日常生活中根本使用不到的东西（为了培养数学家……但至底为什么每个人都要被培养成数学家呢？）

是什么让这样的教学结构如此稳固？是教科书跟参考书出版社、实习班产生、还是学校教育本身？看完这本书，我再次确认肯∙罗宾森爵士（Sir Ken Robinson）2006年在TED大会上的演说的确一点没错：“学校扼杀了创意”，而且是刻意为之。

因为当代的教育制度继承自工业革命时期，所以教育的目的就是为了创造工业需要的人才，到位现在也没有改变。大量产出工具需求的一致性劳动力是学校教育的目标，因此教学方式必须要有效率、必须要全国一致。美其名是公平，实际上是奴役。如今结合了教科书业者、补习班业者，成了庞大的教育控制复合体。

数学教育特别严重。数学本该是供人无限想像空间的学科，因为不管思考的数学题目多么天马行空，多么不切实际，都无所谓，没有任何现实会受到伤害，除了成绩单。因为害怕错误、对分数镏铢必较，有太多像我一样的学生用背诵的方式学数学，靠着不断解参考书跟考卷上的题目来磨练自己动笔的速度，但从来没有体会过数学的乐趣，连想都没想过数学会是有趣的。

大多数看过这本书的国外读者都给予很高的评价，或许因为作者揭开了国王新衣的真相，但作者除了对数学教育抛出锐利无比的批判，也在书的第二部分尝试用他觉得真正对学生有益处的教学方式与每一位读者互动。虽然作者只给了几个案例，便我看见了他想要带领学生进入的数学奇妙世界是什么样子，而我也好希望在我国中或是更小的时候，就能够看见这个世界。如果你是学生，希望这本书可以让你重拾对自己的信心。如果你是老师，请审视自己到底是在教学还是在扼杀学生。如果你是家长，请理解你的孩子正在遭受折磨，而那本不该发生，也该是他的错。