Ejemplos de la utilidad de las derivadas en el cálculo de máximos y mínimos

Autor: Saulo Issac Gasca Garc

Ejemplo1

La función $fx=x^3-6x^2+9x+1$ describe el costo total asociado con la producción de cierto componente en una fábrica. Aquí, x representa la cantidad de unidades del componente producidas.

- **Objetivo**

La empresa desea optimizar su proceso de producción para minimizar los costos asociados con la fabricación de este componente. El costo total está modelado por la función f(x).

- **Puntos críticos**

Los puntos críticos de la función, obtenidos al resolver f'(x)=0 representan las cantidades de producción en las que el costo podría ser mínimo o máximo.

$$fx=x^3-6x^2+9x+1$$
$$f'x=3x^2-12x+9=0$$

Aplicando factorización:

$$3x-3x-3=0$$

Así tenemos como solución:

$$x_1=1,\ \ x_2=3$$

Estos valores se consideran como puntos críticos, ya que la pendiente en estos es igual a 0.

- **Optimización**

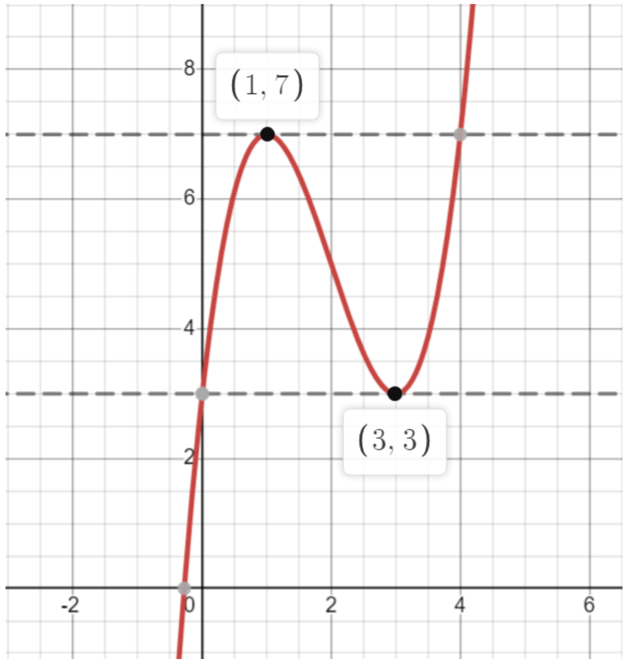
Al aplicar la prueba de la segunda derivada:

$$f'x=3x2-12x+9$$
$$f''x=6x-12$$

$$f''(x_1)=6(1)-12=-6 \quad \rightarrow \quad f''(x_1)<0$$

$$f''(x_2)=6(3)-12=6 \quad \rightarrow \quad f''(x_2)>0$$

Identificamos que hay un máximo local en $x_1=1$ y un mínimo local en $x_2=3$, y lo podemos comprobar al observar la imagen 14.



Nota. Estos valores de x indican las cantidades óptimas de producción para minimizar y maximizar el costo, respectivamente.

- **Conclusiones Ingenieriles**
- **Máximo local en** x_1=1

Si la empresa produce alrededor de 1 unidad del componente, logrará un máximo local en el costo de producción. Esto podría deberse a gastos adicionales asociados con pequeñas producciones.

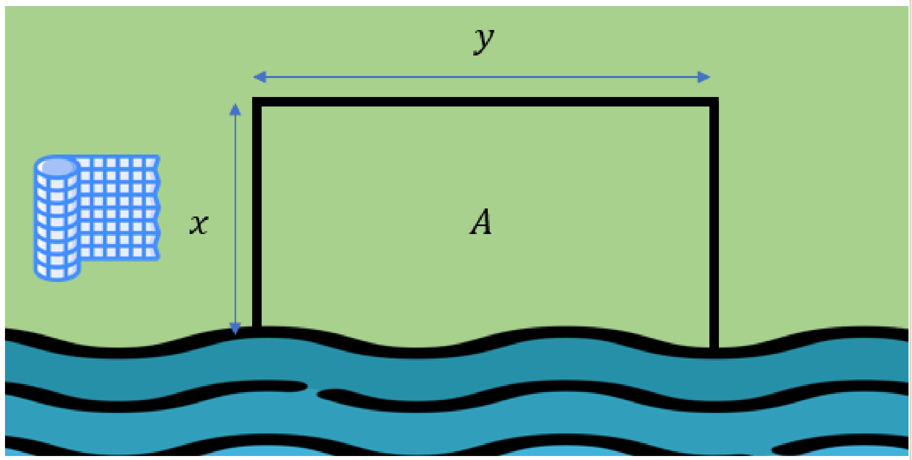
- **Mínimo local en** x_2=3

La producción óptima que minimiza los costos es aproximadamente 3 unidades del componente. Esto puede indicar economías de escala o eficiencias operativas asociadas con mayores volúmenes de producción.

Este análisis proporciona a la empresa información valiosa sobre las cantidades de producción que pueden conducir a la optimización de costos, lo que es esencial en la toma de decisiones para mejorar la eficiencia y rentabilidad en el proceso de fabricación.

Ejemplo 2

Un granjero dispone de 2400 metros de material y desea edificar una cerca alrededor de un campo rectangular que limita con un río recto. Se busca determinar las dimensiones ideales del campo para maximizar el área cercada, considerando que no se requiere construir la cerca a lo largo del río. ¿Cuáles serían las dimensiones óptimas del campo para lograr la mayor área posible?



Nota. Representación gráfica de cercado de terreno.

- **Planteamiento**

El granjero requiere que el área sea la máxima, por lo tanto, se optimizará la función que represente el área del rectángulo, A(*x*,*y*)=*xy*, donde *x* es la altura y *y* la base de éste.

Para evitar el uso de dos variables independientes en la derivada de la función A(*x*,*y*), utilizamos la condición del material disponible para tener sólo una variable independiente.

- **Procedimiento**

Considerando que sólo se cuenta con 2400 m de material, y un lado del terreno no requiere barda pues colinda con un río recto, se llega a la siguiente función.

$$Px,y=2x+y=2400 \quad \rightarrow \quad y=2400-2x$$

Sustituyendo la anterior igualdad en la función del área tenemos:

$$Ax=x2400-2x \quad \rightarrow \quad Ax=2400x-2x^2$$

- **Puntos críticos**

Los puntos críticos de la función, obtenidos al resolver A’(x)=0, representan el valor de x cuando el área es máxima o mínima.

$$Ax=2400x-2x^2$$
$$A'x=2400-4x=0$$

Despejando obtenemos como solución:

$$2400-4x=0 \quad \rightarrow \quad x_1=600$$

Este valor es un punto crítico, ya que la pendiente en este es igual a 0.

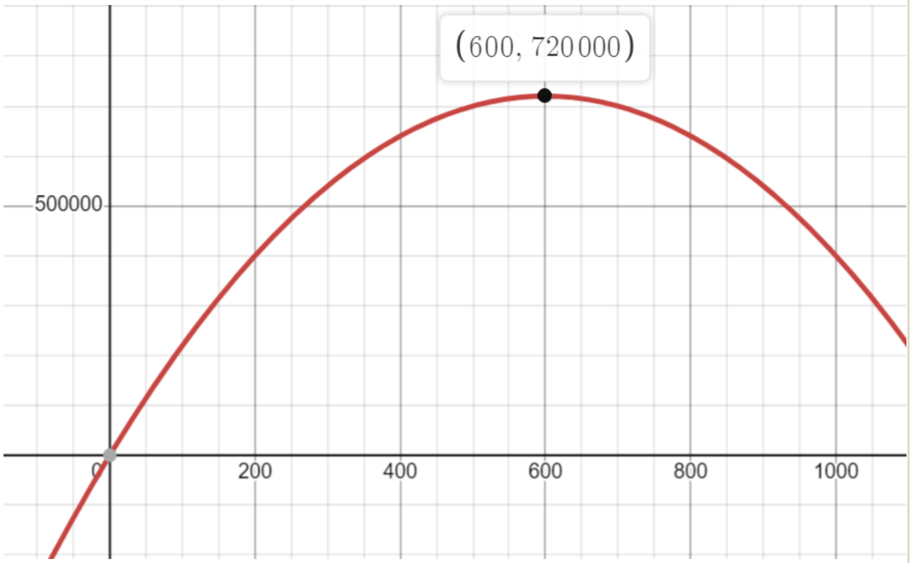
- **Optimización**

Al aplicar la prueba de la segunda derivada:

$$A'(x)=2400-4x$$
$$A''(x)=-4$$

$$A''(x_1)=-4 \quad \rightarrow \quad A''(x_1)<0$$

Identificamos que hay un máximo local en x_1=600, y lo podemos comprobar al observar la imagen 16.



	Nota. Gráfica del área del rectángulo en función del valor de x. • **Conclusión Ingenieril** • **Máximo local en** x_1=600 Si el granjero bardea su terreno en forma de rectángulo con las dimensiones x=600 *m* y *y*=1200 m obtendrá el área máxima para la que podría aprovechar los 2400 m de material que cuenta.

Referencias

Gómez Aguilar, J. F. y Razo Hernández, J. R. (enero - abril, 2014). Ley de enfriamiento de Newton de orden fraccionario. Investigación y Ciencia, 22(61). https://www.redalyc.org/pdf/674/67431579002.pdf

Guerrero Torres, G. (2019). Cálculo diferencial: un nuevo enfoque. Grupo Editorial Patria. Disponible en la base de datos elibrocatedra.