Question 2

Donnez toutes les étapes de l'algorithme de Floyd pour calculer le plus court chemin entre toutes les paires de noeuds du graphe de la figure 1. Donnez la matrice obtenue à chaque itération.

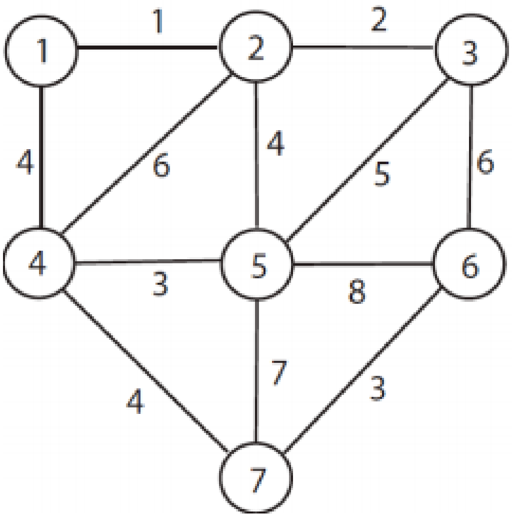

Figure 1: Graphe

La matrice D_0 qui suit est la matrice d'adjacence du graphe précédent:

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & 5 & 6 & \infty \\ 4 & 6 & \infty & 0 & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & 8 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour la première itération de l'algorithme de Floyd, nous savons que la diagonale de 0, la colonne 1 et la ligne 1 seront semblables à celles de la matrice D_0. Ensuite, pour construire le reste de la matrice nous utilisons la formule:

$$D_{\text{k}}[i,j] = Min(D_{\text{k-1}}[i.j].D_{\text{k-1}}[i,k] + D_{\text{k-1}}[k,j])$$

Ce qui donne la matrice suivante, où les éléments [2,4] et [4,2] ont été modifiés:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 2 & \boxed{5} & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & 5 & 6 & \infty \\ 4 & \boxed{5} & \infty & 0 & 3 & \infty & 4 \\ \infty & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & 8 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Puis, on répète jusqu'à ce qu'on est parcouru les 7 lignes/colonnes, ce qui donne les résultats suivants (tous les éléments sous-lignés ont été modifiés par rapport à la matrice précédente):

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \boxed{3} & 4 & \boxed{5} & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & \infty & \infty \\ \boxed{3} & 2 & 0 & \boxed{7} & 5 & 6 & \infty \\ 4 & 5 & \boxed{7} & 0 & 3 & \infty & 4 \\ \boxed{5} & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & 8 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & \boxed{9} & \infty \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & \boxed{8} & \infty \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 5 & 6 & \infty \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 3 & \boxed{13} & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ \boxed{9} & \boxed{8} & 6 & \boxed{13} & 8 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 & \boxed{8} \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 8 & \boxed{9} \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 5 & 6 & \boxed{11} \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 3 & 13 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 6 & 13 & 8 & 0 & 3 \\ \boxed{8} & \boxed{9} & \boxed{11} & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 5 & 6 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 3 & \boxed{11} & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 6 & \boxed{11} & 8 & 0 & 3 \\ 8 & 9 & 11 & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 5 & 6 & \boxed{9} \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 3 & 11 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 6 & 11 & 8 & 0 & 3 \\ 8 & 9 & \boxed{9} & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 5 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 3 & \boxed{7} & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 6 & \boxed{7} & 8 & 0 & 3 \\ 8 & 9 & 9 & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice résultante de l'algorithme de Floyd est donc:

$$D_{\text{resultante}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 7 & 5 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 0 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 8 & 0 & 3 \\ 8 & 9 & 9 & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$