



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

MATEMATICAS AVANZADAS PARA LA
INGENIERIA

REPORTE TÉCNICO

PROFESOR

DAVID CORREA COYAC

GRUPO

4CM5

ALUMNOS

Hernández González David Alexis
González Lopez Edgar Emiliano
Lopez Perez Veronica Mía
Alí Daneil Navarro Ramírez

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



El procesamiento digital de imágenes es una herramienta fundamental dentro de la ingeniería moderna, ya que permite analizar, modificar y mejorar señales bidimensionales para diversas aplicaciones como visión por computadora, análisis médico, telecomunicaciones y reconocimiento de patrones. Una imagen digital puede interpretarse como una señal bidimensional cuya información se encuentra distribuida en el dominio espacial.

Una de las herramientas matemáticas más importantes para el análisis de señales es la Transformada de Fourier, la cual permite representar una señal en el dominio de la frecuencia. En el caso de las imágenes digitales, la Transformada de Fourier bidimensional (FFT2) permite identificar la contribución de las diferentes frecuencias espaciales que conforman una imagen, facilitando la aplicación de técnicas de filtrado.

En este proyecto se desarrolla una herramienta computacional que implementa la Transformada de Fourier 2D para realizar el filtrado de imágenes en el dominio de la frecuencia mediante filtros pasa-bajas y pasa-altas. El objetivo es analizar visual y cuantitativamente el efecto de dichos filtros sobre una imagen digital, así como comprender la relación entre las frecuencias espaciales y las características visuales de la imagen.

2. Objetivos

2.1 Objetivo general

Implementar una aplicación computacional que utilice la Transformada de Fourier 2D para el filtrado de imágenes digitales en el dominio de la frecuencia.

2.2 Objetivos específicos

- Convertir una imagen digital a escala de grises y normalizar sus valores.
- Aplicar la Transformada de Fourier 2D e inversa mediante librerías computacionales.
- Diseñar e implementar filtros pasa-bajas y pasa-altas en el dominio de la frecuencia.
- Analizar visualmente el efecto del filtrado sobre la imagen.
- Evaluar cuantitativamente los resultados mediante el error cuadrático medio (MSE).

3. Marco teórico

3.1 Imagen digital

Una imagen digital puede representarse como una matriz bidimensional de valores de intensidad, donde cada elemento corresponde a un píxel. En una imagen en escala de grises, los valores de intensidad representan el nivel de luminancia de cada píxel. Para facilitar el procesamiento matemático, es común normalizar dichos valores a un rango entre 0 y 1.

3.2 Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier permite expresar una señal como una suma de funciones sinusoidales de diferentes frecuencias. En el caso bidimensional, la Transformada de Fourier de una imagen $f(x, y)$ se define como:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Esta representación permite analizar la distribución de las frecuencias espaciales presentes en la imagen, donde las bajas frecuencias están asociadas a regiones suaves y las altas frecuencias corresponden a bordes y detalles.

3.3 FFT2 e IFFT2

La Transformada Rápida de Fourier (FFT) es una versión computacionalmente eficiente de la Transformada de Fourier. En este proyecto se utiliza la FFT2 para obtener el espectro de frecuencia de la imagen y la IFFT2 para reconstruir la imagen filtrada. Además, se emplea la operación fftshift para centrar la frecuencia cero en el centro del espectro, facilitando el diseño de filtros.

3.4 Filtrado en el dominio de la frecuencia

El filtrado en el dominio de la frecuencia consiste en modificar el espectro de una señal mediante una máscara. En este proyecto se implementan dos tipos de filtros:

- **Filtro pasa-bajas:** permite el paso de las bajas frecuencias y elimina las altas, produciendo un efecto de suavizado.
- **Filtro pasa-altas:** permite el paso de las altas frecuencias y elimina las bajas, resaltando bordes y detalles.

Ambos filtros se implementan mediante máscaras ideales circulares aplicadas directamente sobre el espectro de la imagen.

3.5 Métrica de evaluación (MSE)

El error cuadrático medio (MSE) se utiliza para evaluar la diferencia entre la imagen original y la imagen reconstruida:

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{x,y} (f(x, y) - \hat{f}(x, y))^2$$

Un valor menor de MSE indica mayor similitud entre ambas imágenes.

4. Metodología

El proyecto fue desarrollado en el lenguaje de programación Python utilizando las librerías NumPy, OpenCV y Matplotlib. En primer lugar, la imagen de entrada se convirtió a escala de grises y se normalizó al rango [0,1]. Posteriormente, se calculó la Transformada de Fourier 2D de la imagen, centrando el espectro para facilitar el filtrado.

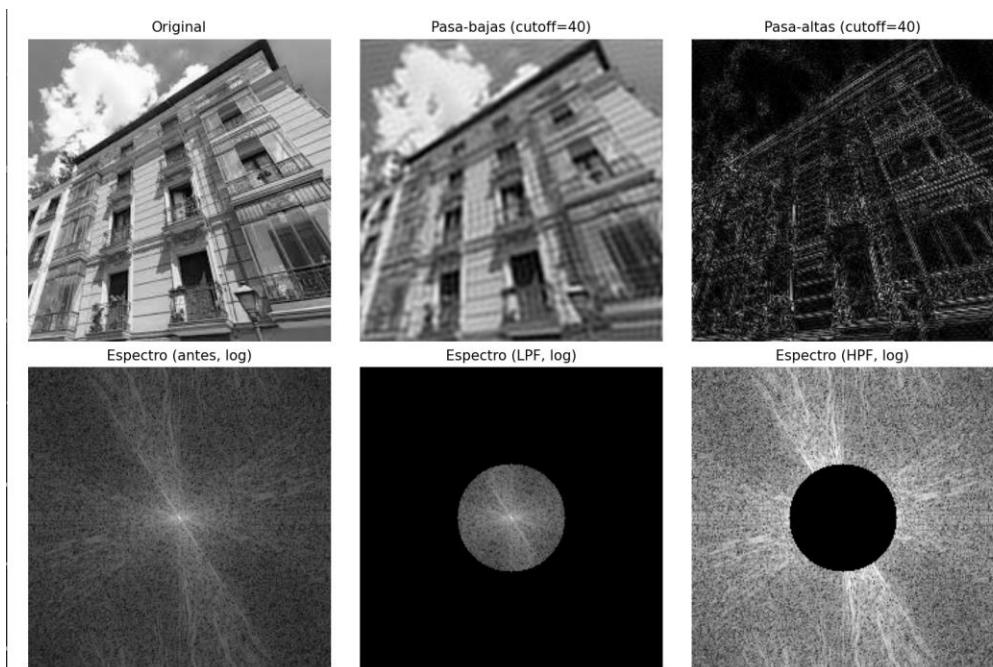
Se diseñaron dos máscaras de filtrado: una pasa-bajas y una pasa-altas, ambas de tipo ideal circular. Dichas máscaras se aplicaron al espectro de la imagen mediante multiplicación punto a punto. Finalmente, se utilizó la Transformada Inversa de Fourier para reconstruir las imágenes filtradas en el dominio espacial.

Los resultados se visualizaron mediante gráficos que muestran la imagen original, las imágenes filtradas y los espectros de Fourier antes y después del filtrado. Además, se calculó el MSE para evaluar cuantitativamente el efecto del filtrado.

5. Resultados

Los resultados obtenidos muestran claramente el efecto de los filtros implementados. El filtro pasa-bajas produce un suavizado de la imagen, eliminando detalles finos y reduciendo la presencia de bordes. Por otro lado, el filtro pasa-altas resalta las estructuras de alta frecuencia, enfatizando bordes y contornos.

El análisis del espectro de Fourier evidencia que la mayor parte de la energía de la imagen se concentra en las bajas frecuencias, mientras que las altas frecuencias contienen información asociada a cambios abruptos de intensidad. Los valores de MSE obtenidos reflejan que el filtrado pasa-bajas conserva mayor similitud con la imagen original en comparación con el filtrado pasa-altas.



6. Discusión de resultados

Los resultados obtenidos concuerdan con la teoría del procesamiento en el dominio de la frecuencia. La eliminación de altas frecuencias mediante el filtro pasa-bajas reduce el ruido y los detalles, mientras que el filtro pasa-altas elimina información global de la imagen y resalta únicamente las variaciones bruscas. El uso del MSE permite cuantificar estas diferencias y complementar el análisis visual.

7. Conclusiones

En este proyecto se logró implementar exitosamente una herramienta computacional para el filtrado de imágenes en el dominio de la frecuencia utilizando la Transformada de Fourier 2D. Los resultados permitieron comprender la relación entre las componentes de frecuencia y las características visuales de una imagen digital. Asimismo, se comprobó que los filtros pasa-bajas y pasa-altas generan efectos claramente diferenciados, los cuales pueden ser evaluados tanto de forma visual como cuantitativa mediante el error cuadrático medio.

8. Referencias

- Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. *Digital Image Processing*. Pearson.
- Oppenheim, A. V., & Willsky, A. S. *Signals and Systems*. Prentice Hall.
- NumPy Documentation – FFT Module.