REPUBLIQUE DU BENIN
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE NATIONALE DES SCIENCES, TECHNOLOGIES, INGENIERIE ET MATHEMATIQUES
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE NATITINGOU

Domaine : Sciences de l'education et de la formation

Mention : Sciences exactes

Spécialité : CAPES/Mathématique & Informatique

COURS

CALCUL DIFFÉRENTIEL

par :

Dr KOUDJO Ferdinand H
Institut de Mathématiques et des Sciences Physiques
Adresse mail : ferdinand.koudjo@imsp-uac.org

Superviseur :

Joël TOSSA, Professeur Titulaire du CAMES
Institut de Mathématiques et des Sciences Physiques
Adresse mail : joel.tossa@imsp-uac.org

2023-2024 ...

Syllabus du cours

Le calcul différentiel généralise les outils de l'analyse « élémentaire » à des espaces vectoriels normés (ou d'autres types d'espaces) avec des fonctions de plusieurs variables. Les fonctions de plusieurs variables interviennent dans beaucoup de domaines. En physique, on est souvent amené à étudier la température, la pression ou la densité volumique en fonction de la position dans l'espace (3 dimensions), de la position et de la vitesse (par exemple quelle est la densité de particules qui se trouvent à cet endroit et qui vont dans telle ou telle direction, ce qui fait 6 dimensions), on peut également s'intéresser à la dépendance par rapport au temps (une dimension supplémentaire). Enfin la quantité étudiée peut dépendre de la position de N objets, auquel cas on doit travailler avec 3N dimensions.
Les questions d'optimisation en économie sont d'autres exemples d'utilisation de fonctions de plusieurs variables et d'application des résultats du calcul différentiel. Voici quelques exemples :

(1) Le solde obtenu par intérêt simple après un versement unique :

$$S(M,i,t) = M(1+it)\,;$$

où M désigne le montant versé, i le taux d'intérêt annuel et t la durée de l'épargne en année. Noter que l'intérêt simple se traduit par le fait que *l'intérêt produit au cours d'une période n'est pas capitalisé pour la période suivante*.

(2) Le solde obtenu par intérêt composé après un versement unique :

$$S(M,i,t,n) = M(1+\frac{i}{n})^{nt}\,;$$

où M désigne le montant versé, i le taux d'intérêt annuel, t la durée de l'épargne en année, n nombre de fois que l'intérêt se calcule dans l'année. *Dans ce cas l'intérêt produit lors d'une période est capitalisé pour la période suivante.*

(3) La fonction de Cobb-Douglas définie par $f(x,y) = kx^{\alpha}y^{1-\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$, utilisée par les économistes pour décrire le nombre d'unités $f(x,y)$ produits à partir de x unités de travail et y unités de biens.

Ce cours est fait en restant dans un cadre visant juste la généralisation des notions classiques du calcul différentiel sur $\mathbb{R}$ et n'abordera pas le cadre des espaces généraux, comme les espaces de Fréchet ou encore les variété différentielles. Nous rappellerons la notion de sous-variété de $\mathbb{R}^n$ comme une application du théroème d'inversion locale et celui des fonctions implicites.
Les différents chapitres qui constituent ce cours sont :
Chapitre 1 : Préliminaires au calcul différentiel

1. Normes et espaces vectoriels normés
2. Applications continues
3. Applications linéaires continues
4. Applications multilinéaires continues
5. Séries dans un espace vectoriel normé

Chapitre 2 : Notion de différentielle pour une fonction entre deux espaces normés.

1. Fonction différentiable sur un ouvert. Différentielle.

2. Dérivée selon un vecteur (ou dérivée directionnelle).
3. Opérations sur les différentielles (différentielle d'une composition, etc)
4. Dérivées partielles - Matrice Jacobienne - Opérateurs différentiels classiques (Gradient, divergence, rotationnel)

Chapitre 3 : Quatre grands théorèmes du calcul différentiel

1. Le théorème du point fixe
2. Le théorème des accroissements finis et applications (fonction localement Lipschitzienne, etc).
3. Le théorème d'inversion locale
4. Le théorème des fonctions implicites. Applications (Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$)

Chapitre Différentielles d'ordre supérieur

1. Formule de Taylor-Young
2. Points critiques d'une fonction
3. Extrema liés

Description : En raison du délai très limité, le cours sera donné sous forme magistral avec des exemples et des exercices qui seront parfois corrigés pendant la séance. Les feuilles d'exercices en application du cours sont distribuées ; elles doivent permettre à l'étudiant de vérifier qu'il a compris le cours et l'amener à utiliser les résultats connus pour résoudre des problèmes mathématiques.

Travail attendu : Il est attendu qu'avant chaque cours, que l'étudiant assimile le contenu du cours précédent et tente de résoudre certains exercices proposés lors des séances de TD.

Modalités de contrôle des connaissances : Le contrôle de connaissance se fera en respectant les textes qui organisent la formation

Prérequis : Les fonctions de plusieurs variables, la topologie générale.

Compétences acquises : Connaissance approfondie de la dérivation de fonctions en dimension arbitraire. Comprendre le concept et savoir calculer la différentielle d'une fonction. Connaître le lien entre la différentielle et la dérivée directionnelle. En dimension finie, connaître le lien entre la différentielle et les dérivées partielles, le vecteur gradient et la matrice Jacobienne. Comprendre les rôles joués par la différentielle et la différentielle seconde dans des problèmes mathématiques divers (approximation affine et approximation quadratique d'une fonction autour d'un point de référence, problèmes d'optimisation, étude de la convexité, etc)

Références bibliographiques et ressources numériques

1. George COMTE, Calcul différentiel et équations différentielles, Cours de Licence Mathématiques
2. Bruno AEBISCHER, Fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique, Vuibert 2011

Table des matières

1 Préliminaires au calcul différentiel

1.1 Normes et espaces vectoriels normés

On considère E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels munis respectivement de la norme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Bien souvent, ce seront des espaces de dimension FINIE de la forme $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^p$, munis d'une norme quelconque

$$\|x\|_k = \left(\sum_{j=1}^{n \text{ (ou } p)} |x_j|^k \right)^{1/k} \quad \text{pour } x \in E(\text{ ou } F) \text{ avec } k \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k < \infty$$

$$\text{ou bien } \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n \text{ (ou } p)} |x_j| \text{ pour } x \in E(\text{ ou } F) \text{ avec } k = \infty$$

La plupart du temps on considérera la norme euclidienne ($k = 2$) ou bien lorsque l'on sera dans le cas général et que les espaces E et F seront égaux, on notera simplement la norme $\|.\|$.

Rappel 1 : Norme

Nous rappelons qu'une norme sur un espace vectoriel est une application $\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$

telle que

1. Pour tout $x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
2. Pour tout $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
3. Pour tout $(x, y) \in E \times E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La donnée du couple $(E, \|\|)$ s'appelle un espace vectoriel normé.

Rappel 2 : .

Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E si et seulement s'il existe $a \in E$, tel que $\|x_n - a\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E si et seulement si
   i) $\left\|x_p - x_q\right\| \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   ii) pour tout ϵ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tous $pq \geq N, \|x_p - x_q\| \leq \epsilon$
3. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E ssi il existe $M > 0, \|x_n\| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ATTENTION : on a toujours (1.) $\Rightarrow$ (2.) $\Rightarrow$ (3.) mais les réciproques sont FAUSSES en général.

Définition 1.1

Espace de Banach. On dit que E est un espace de Banach si toute suite de Cauchy de E *converge dans* E *(autrement dit, on a (2.)* $\Rightarrow$ *(1.) dans les espaces de Banach).*

Exemple 1

Les espaces de Banach de référence sont

1. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ *et de manière générale tout espace vectoriel de dimension finie, ainsi que tout sous-espace fermé d'un espace de Banach.*
2. $\mathscr{C}(X,E) = \{f : X \to E$ *continue* $\}$ *muni de la norme uniforme (norme du sup) définie par* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$

1.1 Applications continues

Définition 1.2: Application continue

Soit $A \subset E$ *et* $f : A \to F$. *On dit que* f *est continue en* $a \in A$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$, *tel que pour tout* $x \in A$

$$\|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Définition 1.3: Application k-lipschitzienne

. On dit que $f : A \to F$ *est* k*-lipschitzienne si pour tout* $(x,y) \in A^2$, *on a*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

Remarque 1.4

On voit assez facilement que toute fonction lipschitzienne est continue sur son domaine de définition.

Proposition 1.5 *Toute fonction construite à partir de fonctions continues par combinaison linéaire, multiplication, quotient (par exemple* $\mathbf{f/g}$ *mais alors il faut que le dénominateur ne soit pas nul) ou composition est encore continue.*

1.2 Applications linéaires continues

Rappel 3 Application linéaire continue. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $u : E \to F$ linéaire, u est continue si et seulement s'il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E, ||u(x)||_F \leq k||x||_E$.

On note $\mathscr{L}(E;F)$, l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F, c'est un espace vectoriel normé. Et pour $u \in \mathscr{L}(E;F)$ on pose

$$\begin{aligned} ||||u|||| &= \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{||u(x)||}{||x||} \\ &= \sup_{\substack{x\in E\\ ||x||\leq 1}} ||u(x)|| \\ &= \sup_{\substack{x\in E\\ ||x||= 1}} ||u(x)|| \\ &= \inf\{k > 0, \text{ pour tout } x \in E, ||u(x)|| \leq k||x||\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ceci définit une norme sur $\mathscr{L}(E;F)$. On peut prouver (pas fait ici) que si F est un espace de Banach, alors $\mathscr{L}(E;F)$ aussi.

Remarque 1.6

Cas particulier important. Si la dimension de E est FINIE et si $u : E \to F$ est linéaire, alors u est CONTINUE !

1.3 Applications multilinéaires continues

Pour simplifier, on se limitera au cas bilinéaire, mais le passage aux cas multilinéaire n'est pas difficile.

Définition 1.7: Application Bilinéaire

Soit $\varphi : E \times F \to G$, où E, F et G sont des espaces vectoriels normés. On dit que φ est bilinéaire si pour tout $x \in E, \varphi(x,) : .F \to G$ est linéaire et si pour tout $y \in F, \varphi(.,y) : E \to G$ est également linéaire.

Nous avons alors le résultat suivant.

Rappel 4 : Si φ est bilinéaire, nous avons les équivalences suivantes :

a. φ est continue

b. il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F, ||\varphi(x,y)|| \leq k||x||||y||$.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}|||\varphi||| &= \sup_{\substack{(x,y)\in E\times F\\ x,y\neq 0}} \frac{\|\varphi(x,y)\|}{\|x\|.\|y\|}\\ &= \inf\{k>0,\ \text{pour tout } x\in E,\ \text{pour tout } y\in F, \|\varphi(x,y)\|\leq k\|x\|.\|y\|\}\end{aligned}$$

N.B. : Et donc, si φ est bilinéaire continue alors $\|\varphi(x,y)\| \leq |||\varphi|||\|x\|\|y\|$.

Remarque 1.8: Cas particulier important

Si les dimensions de E et F sont finies, alors toute application bilinéaire de $E\times F \to G$ est continue.

1.4 Séries dans un espace vectoriel normé

Rappel : Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

1 $\sum x_n$ converge dans E si et seulement si

$$\text{-il existe } S\in E \text{ tel que } S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$$

$$\text{-ou encore il existe } S\in E \text{ tel que } \left\| S - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note alors $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

2 Si E est une espace de Banach, on a alors

$$\sum x_n \text{ converge dans } E \Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy } \Leftrightarrow \left\| \sum_{k=p}^{q} x_k \right\| \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow}.$$

3 On a les équivalences suivantes

$\sum x_n$ converge normalement dans $E \Leftrightarrow \sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow$ il existe $M\geq 0$, pour tout $n\in N$, $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \leq M$.

4 Si E est un espace de Banach, on a l'implication suivante

$\sum x_n$ converge normalement dans $E \Rightarrow \sum x_n$ converge dans E.

2 Différentiabilité

Ce chapitre est consacré à la notion de différentiabilité et aux théorèmes fondamentaux qui lui sont attachés.

2.1 INTRODUCTION

2.1.1 Fonctions différentiables, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On suppose que U est un ouvert non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, et l'on considère une fonction

$$f : U \to F$$

où F est un autre espace vectoriel normé. Le fait que U soit ouvert permettra de considérer les valeurs de f au voisinage de tout point de U. Si cela n'était pas le cas, il faudrait restreindre la définition qui suit aux points intérieurs à U. On rappelle que $\mathcal{L}(E;F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Définition 2.1

La fonction f est différentiable en un point $x \in U$ s'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E;F)$ tel que

$$\lim_{h \to 0_E, h \neq 0_E} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \ell(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0 \tag{2.1}$$

Autrement dit, f est différentiable en x s'il existe une application linéaire continue $\ell \in \mathcal{L}(E;F)$, $R > 0$ et une application $\varepsilon : B(0_E;R) \to \mathbb{R}^+$ tendant vers 0 en 0_E telles que pour tout $h \in B(0_E;R)$,

$$\|f(x+h) - f(x) - \ell(h)\|_F = \varepsilon(h)\|h\|_E$$

Proposition 2.2
Une fonction $f : U \to F$ différentiable en un point $x \in U$ (au sens de la définition 2.1) est nécessairement continue au point x.

Preuve 1 *En introduisant la fonction ε comme ci-dessus, on a par l'inégalité triangulaire*

$$\|f(x+h) - f(x)\|_F \leq \varepsilon(h)\|h\|_E + \|\ell(h)\|_F$$

où le membre de droite tend vers 0 lorsque h tend vers 0_E grâce à l'équation (2.1) et à la continuité de ℓ en 0_E.

Remarque 2.3

Par un argument analogue, on obtient la continuité de ℓ si l'on a celle de f. En effet, si f est continue en x et s'il existe ℓ (a priori seulement) linéaire telle que l'on ait (2.1), alors cette application est nécessairement continue, car par l'inégalité triangulaire

$$\|\ell(h)\|_F \leq \varepsilon(h)\|h\|_E + \|f(x+h) - f(x)\|$$

tend vers 0 lorsque h tend vers 0_E.(On rappelle que la continuité d'une application linéaire équivaut à sa continuité en 0.)

Notation : Bien sûr, l'application ℓ dans la définition 1.1 dépend du point x. Il faut donc adopter une notation faisant apparaître x. Afin de bien voir la différentielle d'une fonction (dans la définition ci-après) comme une nouvelle fonction, nous choisissons de noter $\ell = \mathrm{d}f(x)$. La difficulté tient ici au fait que $\mathrm{d}f(x)$ est elle-même une application. Cependant, comme elle est linéaire, nous noterons simplement (pour éviter la juxtaposition de parenthèses) $\mathrm{d}f(x)\cdot h$ la valeur prise par cette application sur le vecteur $h \in E$. Ainsi, l'équation(2.1) se réécrit

$$\lim_{h \longrightarrow 0_E} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f(x)\cdot h\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

L'application linéaire $\mathrm{d}f(x)$ est appelée différentielle de f au point x.

Définition 2.4

On dit que la fonction f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point $x \in U$. Dans ce cas, on appelle différentielle de f la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f: & U & \to & \mathcal{L}(E;F) \\ & x & \mapsto & \mathrm{d}f(x) \end{array}$$

Si de plus $\mathrm{d}f$ est continue, on dit que f est continûment différentiable, ou de façon équivalente que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 2.5

Une erreur fréquente est de confondre $\mathrm{d}f$ et sa valeur en x, $\mathrm{d}f(x)$. En particulier, la continuité de $\mathrm{d}f$ n'a rien à voir avec la continuité de $\mathrm{d}f(x)$, cette dernière étant par définition linéaire continue. (Notons au passage que $\mathrm{d}f$ n'a aucune raison d'être linéaire en général.) Ainsi, une fonction différentiable n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$: un contre-exemple classique est la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

qui est dérivable y compris en 0 (de dérivée nulle) mais dont la dérivée n'a pas de limite en 0 . Or on va voir ci-après que les notions de dérivabilité et de différentiabilité coïncident pour les fonctions d'une variable réelle.

2.1.2 Premiers exemples de fonctions différentiables

- √ Toute application constante est continûment différentiable, de différentielle nulle. En effet, pour une fonction constante f, on a pour tout $(x,h) \in U \times E$ (avec $\|h\|$ assez petit pour que $x+h \in U$), $f(x+h) - f(x) = 0$.
- √ Toute application linéaire continue ℓ est continûment différentiable, et sa différentielle est constante, égale à ℓ en tout point :

$$\mathbf{d}\ell(x) \cdot h = \ell(h) \quad \text{quels que soient } x \text{ et } h \in E$$

En effet, par linéarité de ℓ, on a pour tout $(x,h) \in E \times E$,

$$\ell(x+h) - \ell(x) - \ell(h) = 0$$

- √ Plus généralement, toute application multi-linéaire continue est continûment différentiable. Si $\phi \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ alors sa différentielle est donnée par

$$\mathbf{d}\phi(x_1, \ldots, x_n) \cdot (h_1, \ldots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \phi\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n\right) \tag{1.2}$$

Dans cette écriture légèrement abusive, le premier terme de la somme est évidemment $\phi(h_1, x_2, \ldots, x_n)$ et le dernier $\phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n)$.
Le cas $n = 1$ est celui des applications linéaires continues ! Voyons le cas $n = 2$. Pour une application ϕ bilinéaire :

$$\phi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \phi(x_1, x_2) - \phi(h_1, x_2) - \phi(x_1, h_2) = \phi(h_1, h_2)$$

Si de plus ϕ est continue, il existe $C > 0$ tel que

$$\left\|\phi(h_1, h_2)\right\|_F \leq C \|h_1\|_{E_1} \|h_2\|_{E_2} \leq \frac{C}{2} \|(h_1, h_2)\|_E^2$$

(On a utilisé ici l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, se déduisant de l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.) On en déduit que

$$\frac{\left\|\phi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \phi(x_1, x_2) - \phi(h_1, x_2) - \phi(x_1, h_2)\right\|_F}{\|(h_1, h_2)\|_E}$$

tend vers 0 lorsque (h_1, h_2) tend vers $\left(0_{E_1}, 0_{E_2}\right)$. De plus, la différentielle de ϕ,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi : \quad & E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F) \\ & (x_1, x_2) \mapsto \mathrm{d}\phi(x_1, x_2) : (h_1, h_2) \mapsto \phi(h_1, x_2) + \phi(x_1, h_2) \end{aligned}$$

est continue : c'est même une application linéaire continue, de norme inférieure ou égale à $2\|\phi\|$.
Le cas général se traite par récurrence sur n. Admettons le résultat pour les applications n-linéaires, et considérons une application $(n+1)$-linéaire ϕ. Alors

$$\begin{aligned} &\phi(x_1 + h_1, ., x_{n+1} + h_{n+1}) - \phi(x_1, ., x_{n+1}) - \sum_{j=1}^{n+1} \phi\left(x_1, ., x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ., x_{n+1}\right) = \\ &\phi(x_1 + h_1, ., x_n + h_n, x_{n+1} + h_{n+1}) - \phi(x_1 + h_1, ., x_n + h_n, x_{n+1}) - \phi(x_1, ., x_n, h_{n+1}) \\ &+ \phi(x_1 + h_1, ., x_n + h_n, x_{n+1}) - \phi(x_1, ., x_{n+1}) - \sum_{j=1}^{n} \phi\left(x_1, ., x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ., x_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Lorsqu'on divise cette égalité par $\|(h_1, \ldots, h_n, h_{n+1})\|_{E_1 \times \cdots \times E_{n+1}}$, qui par définition est supérieur à $\|(h_1, \ldots, h_n)\|_{E_1 \times \cdots \times E_n}$, la deuxième ligne du membre de droite tend clairement vers 0 , grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée à l'application n-linéaire $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. La première ligne se réduit par multi-linéarité à :

$$\phi(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n, h_{n+1}) - \phi(x_1, \ldots, x_n, h_{n+1})$$

Or l'application

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_n & \to & \mathcal{L}(E_{n+1}; F) \\ (y_1, \ldots, y_n) & \mapsto & \mapsto (y_1, \ldots, y_n, \cdot) \end{array}$$

(où $\phi(y_1, \ldots, y_n, \cdot)$ désigne l'application linéaire $h_{n+1} \mapsto \phi(y_1, \ldots, y_n, h_{n+1})$) est n-linéaire continue (de norme inférieure ou égale à celle de ϕ). Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\max\limits_{j \in \{1, \cdots, n\}} \left\|h_j\right\|_{E_j} \leq \eta$ entraîne

$$\left\|\phi(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n, h_{n+1}) - \phi(x_1, \ldots, x_n, h_{n+1})\right\|_F \leq \varepsilon \|h_{n+1}\|_{E_{n+1}}$$

Finalement, on conclut par l'inégalité triangulaire que le rapport

$$\frac{1}{\|(h_1, \ldots, h_{n+1})\|_E} \|\phi(x_1 + h_1, \ldots, x_{n+1} + h_{n+1}) - \phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) - \sum_{j=1}^{n+1} \phi\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}\right)\|_F$$

tend bien vers 0 lorsque $(h_1, \ldots, h_{n+1})$ tend vers $\left(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_{n+1}}\right)$.

√ Une fonction d'une variable réelle est différentiable si et seulement si elle est dérivable : la différentielle d'une fonction dérivable $g : U \subset \mathbb{R} \to F$ est donnée par

$$\mathrm{d}g(t) \cdot k = k g'(t) \quad \text{quels que soient } t \in U \text{ et } k \in \mathbb{R}$$

(Notons que $k \in \mathbb{R}$ est un scalaire et $g'(t) \in F$ est un vecteur en général, c'est pourquoi on les a écrits dans cet ordre.) En effet, rappelons que g est dérivable en t si le taux d'accroissement $(g(t+k)-g(t))/k$ a une limite lorsque k tend vers 0 , et la dérivée de g en t est alors définie par

$$g'(t)=\lim_{k\to 0}\frac{g(t+k)-g(t)}{k}$$

Si tel est le cas

$$\frac{\left\|g(t+k)-g(t)-kg'(t)\right\|_F}{|k|}=\left\|\frac{g(t+k)-g(t)}{k}-g'(t)\right\|_F$$

tend vers 0 lorsque k tend vers 0 , ce qui montre que g est différentiable en t avec $\mathbf{d}g(t)\cdot k=kg'(t)$. Réciproquement, si g est différentiable en t alors (par linéarité de $\mathbf{d}g(t)$)

$$\left\|\frac{g(t+k)-g(t)}{k}-\mathbf{d}g(t)\cdot 1\right\|_F=\frac{\|g(t+k)-g(t)-\mathbf{d}g(t)\cdot k\|_F}{|k|}$$

tend vers 0 lorsque k tend vers 0 , ce qui montre que g est dérivable en t avec $g'(t)=\mathbf{d}g(t)\cdot 1$.

√ Quel que soit l'espace de Banach E, si $f:U\subset E\to F$ est différentiable, alors quels que soient $x\in U$ et $h\in E$, la fonction

$$g:t\mapsto g(t):=f(x+th)$$

est dérivable en $t=0$, et $g'(0)=\mathbf{d}f(x)\cdot h$. On dit que c'est la dérivée de f dans la direction h (si h est non nul). Cela fournit une interprétation très importante de la différentiabilité : une condition nécessaire pour qu'une fonction soit différentiable est qu'elle soit dérivable dans toutes les directions ; attention cependant, cette condition n'est pas suffisante, elle correspond «seulement »à ce que l'on appelle la Gâteaux-différentiabilité.

√ Fonctions à valeurs dans un espace produit : une fonction

$$\begin{aligned} f:\quad & U\to F=F_1\times\cdots\times F_n \\ & x\mapsto f(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x)) \end{aligned}$$

est différentiable (en x) si et seulement si les fonctions $f_1,\ldots,f_n$ le sont. Si c'est le cas, sa différentielle est donnée par

$$\mathbf{d}f(x)\cdot h=(\mathbf{d}f_1(x)\cdot h,\ldots,\mathbf{d}f_n(x)\cdot h)$$

(La vérification découle directement de la définition.)

√ Fonctions définies sur un espace produit : la situation est plus subtile. Si

$$\begin{aligned} f:\quad & U\subset E_1\times\cdots\times E_n\to \quad F \\ & x=(x_1,\ldots,x_n)\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est différentiable, alors les applications partielles

$$x_i\mapsto f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

sont différentiables, et si l'on note $\mathbf{d}_i f(x_1,\ldots,x_n)$ leurs différentielles en x_i, on a

$$\mathrm{d}f(x_1,\ldots,x_n)\cdot(h_1,\ldots,h_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}_i f(x_1,\ldots,x_n)\cdot h_i \tag{1.3}$$

En effet, la définition de la différentiabilité de f implique que

$$\frac{\left\| f(x_1,\ldots,x_i+h_i,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)-\mathrm{d}f(x)\cdot(0,\ldots,h_i,\ldots,0)\right\|_F}{\|h_i\|_{E_i}}$$

tend vers 0 lorsque h_i tend vers 0 , d'où la différentiabilité de la i-ème application partielle et la valeur de sa différentielle au point x_i appliquée au vecteur h_i :

$$\mathrm{d}_i f(x_1,\ldots,x_n)\cdot(h_i)=\mathrm{d}f(x)\cdot(0,\ldots,h_i,\ldots,0)$$

On en déduit la formule (1.3) par linéarité de $\mathrm{d}f(x)$. Mais attention, la différentiabilité des applications partielles n'implique pas nécessairement la différentiabilité de f. On verra plus loin une condition suffisante pour que f soit différentiable, à savoir que les applications partielles soient continûment différentiables.

2.1.3 Premières propriétés de la différentielle

Proposition 2.6 *Si $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset E \to F$ sont différentiables respectivement sur des ouverts U et V d'un même espace E, alors leur somme $f+g$ est différentiable sur $U \cap V$ et*

$$\mathrm{d}(f+g)=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in U \cap V$ et pour tout $h \in E$,

$$\mathrm{d}(f+g)(x)\cdot h=\mathrm{d}f(x)\cdot h+\mathrm{d}g(x)\cdot h$$

De plus, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est différentiable et

$$\mathrm{d}(\lambda f)=\lambda\mathrm{d}f$$

La démonstration découle directement de la définition (et de l'inégalité triangulaire pour ce qui est de la somme). Cette proposition signifie que

- l'ensemble des fonctions différentiables sur U et à valeurs dans F est un espace vectoriel,
- la différentiation d est une application linéaire de cet espace vectoriel dans l'ensemble des fonctions de U dans $\mathcal{L}(E;F)$.

Le résultat suivant est moins évident à démontrer, mais il est extrêmement important : on le désigne souvent par règle de dérivation des fonctions composées (chain rule en anglais). Dans l'énoncé, V est un ouvert de F et G est un espace de Banach.

Théorème 2.1

Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable en un point $x \in U$ et si $g : V \subset F \to G$ est différentiable en $f(x) \in V$, alors la fonction composée $g \circ f : U \subset E \to G$ est différentiable en x et $\mathbf{d}(g \circ f)(x) \cdot h = \mathbf{d}g(f(x)) \cdot (\mathbf{d}f(x) \cdot h)$ quels que soient $x \in U$ et $h \in E$.
Autrement dit,

$$\mathbf{d}(g \circ f)(x) = \mathbf{d}g(f(x)) \circ \mathbf{d}f(x) \quad \text{quel que soit } x \in U \tag{1.4}$$

Preuve 2 . *Exercice*

Les exemples donnés au paragraphe précédent et les propriétés énoncées dans la proposition et le théorème ci-dessus permettent de calculer de nombreuses différentielles. Une démarche générale pour montrer qu'une fonction est différentiable consiste à :
1) supposer que sa différentielle existe et calculer un candidat pour cette différentielle ;
2) vérifier que la fonction est différentiable en injectant ce candidat dans la définition.

Voyons un exemple de calcul (étape 1, l'étape 2). Soient X et Y des $\mathbb{R}$-espaces de Banach. Considérons l'espace $E := \mathcal{L}(X;Y)$ et l'ensemble $U = \mathbf{Isom}(X;Y) \subset E$ des isomorphismes de X sur Y. (On rappelle que U est ouvert.) Soit alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & U & \to & F := \mathcal{L}(Y;X) \\ & u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : E \times F & \to & \mathcal{L}(X;X) \\ (u,v) & \mapsto & v \circ u \end{array}$$

est bilinéaire continue, et l'on a par définition $\phi(u, f(u)) = \mathbf{Id}_X$ (l'application identité sur X). Par suite, en supposant a priori que f est différentiable, on a pour tout $u \in U$ et $h \in E$,

$$\phi(h, f(u)) + \phi(u,\ \mathbf{d}f(u) \cdot h) = 0$$

Autrement dit, $u^{-1} \circ h = -(\mathbf{d}f(u) \cdot h) \circ u$, d'où $\mathbf{d}f(u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$.

2.1.4 Différentielles en dimension finie

On suppose dans ce paragraphe que $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

▶ **Notations.** Pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^p$, resp. $y \in \mathbb{R}^q$, on notera $(x_1, \ldots, x_p)$, resp. $(y_1, \ldots, y_q)$ ses composantes. (Attention à ne pas confondre avec les n-uplets de vecteurs considérés au paragraphe 2.1.2.) La «matrice du vecteur» x, resp. y, sera notée X, resp. Y. Ce sont les matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$$

On désigne par $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$: par définition, le vecteur $\mathbf{e}_i$ (pour $i \in \{1, \ldots, p\}$) a toutes ses composantes nulles sauf la i-ème qui vaut 1 .

a) Dérivées partielles

Pour tout $x \in U$ de composantes $\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, l'ensemble $V_i(x) := \Big\{t \in \mathbb{R}; \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_p\right) \in$
est un voisinage ouvert de x_i.

$$\begin{aligned} g_i : \quad & V_i(x) \to F \\ & t \mapsto f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_p\right) = f\left(x + (t - x_i)\, \mathbf{e}_i\right) \end{aligned}$$

est dérivable en x_i et $g_i'(x_i) = \mathbf{d}f(x) \cdot \mathbf{e}_i$ (dérivée de f dans la direction $\mathbf{e}_i$ au point x). Il est d'usage de noter cette dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \text{ou } \partial_{x_i} f(x), \quad \text{voire simplement } \partial_i f(x)$$

On appelle dérivées partielles de f les fonctions

$$\begin{array}{rccc} \partial_i f : & U & \to & F \\ & x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

pour $i \in \{1, \ldots, p\}$. Par linéarité de $\mathbf{d}f(x)$, on voit que pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, de composantes $\left(h_1, \ldots, h_p\right)$,

$$\mathbf{d}f(x) \cdot h = \mathbf{d}f(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} h_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} h_i \; \mathbf{d}f(x) \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Remarque 2.7

Quel que soit $i \in \{1, \ldots, p\}$, l'application $h \in \mathbb{R}^p \mapsto h_i \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$). Si on la note $\mathbf{d}x_i$, la différentielle de f au point x s'écrit

$$\mathbf{d}f(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\mathbf{d}x_i$$

Attention, comme on l'a déjà signalé à propos des différentielles partielles, dont les dérivées partielles sont un cas particulier (avec $E_i = \mathbb{R}$ quel que soit i), la seule existence de dérivées partielles n'est pas suffisante en général pour qu'une fonction soit différentiable. Plus précisément, on a la caractérisation suivante.

Théorème 2.2

Une application $f : U \subset \mathbb{R}^p \to F = \mathbb{R}^q$ est continûment différentiable si et seulement si ses p dérivées partielles existent et sont continues sur U.

b) Matrice jacobienne Si une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, de composantes $\left(f_1, \ldots, f_q\right)$, est différentiable au point x, on définit sa matrice jacobienne au point x comme la matrice de l'application linéaire $\mathbf{d}f(x)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Elle est donnée par

$$\mathbf{D}f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_p f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_q(x) & \cdots & \partial_p f_q(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$$

Autrement dit, le coefficient de la matrice jacobienne de f d'indice $i \in \{1, \cdots, q\}$ en ligne et $j \in \{1, \cdots, p\}$ en colonne est

$$(\mathbf{D}f(x))_{i,j} = \partial_j f_i(x)$$

En particulier, si $q = 1, \mathbf{D}f(x)$ est une matrice ligne. De façon générale, les lignes de $\mathbf{D}f(x)$ sont les $\mathbf{D}f_i(x)$.

▶ **Opérateur «nabla» :** On note $\nabla f(x)$ (qui se lit «nabla f de xˇ) la matrice transposée de $\mathbf{D}f(x)$, de sorte que :

$$(\nabla f(x))_{i,j} = \partial_i f_j(x)$$

Cette notation est souvent utilisée lorsque $q = 1$, auquel cas $\nabla f(x)$ est une matrice colonne, que l'on identifie à un vecteur de $\mathbb{R}^p$ appelé gradient de f au point x.

c) Opérateurs différentiels classiques Comme on vient de le voir, pour une fonction différentiable à valeurs scalaires, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, le gradient est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\,\varphi : U \subset \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^p \\ x &\mapsto (\mathbf{grad}\,\varphi)(x) := \left(\partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_p\varphi(x)\right)^{\mathbf{t}} \end{aligned}$$

On écrit indifféremment $\mathbf{grad}\,\varphi$ ou $\nabla\varphi$.

Par ailleurs, pour une fonction différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ (noter l'égalité des dimensions au départ et à l'arrivée), de composantes $\left(f_1, \ldots, f_p\right)$, on définit la divergence par

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,f : U \subset \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\mathbf{div}\,f)(x) := \mathbf{tr}(\mathrm{D}f(x)) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i f_i(x) \end{aligned}$$

Il est parfois commode d'écrire $\mathbf{div}\,f = \nabla \cdot f$, où ∇ est l'opérateur nabla défini ci-dessus, dont les «composantes » sont les dérivées partielles ∂_i, la notation $\cdot$ se rapportant ici au produit scalaire canonique **sur** $\mathbb{R}^p$, défini par

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$$

Lorsque $p = 3$, on définit aussi le rotationnel de f

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,f : \quad U \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto (\mathbf{rot}\,f)(x) \end{aligned}$$

par

$$(\mathbf{rot}\,f)(x) := (\partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x), \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x), \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x))^{\mathbf{t}}$$

Si $\times$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, il est parfois commode de voir le rotationnel comme $\mathbf{rot}\,f = \nabla \times f$.

2.2 THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Nous arrivons maintenant à l'un des résultats fondamentaux du calcul différentiel.
Pour une fonction de variable réelle et à valeurs réelles, on connaît la formule des accroissements finis (conséquence du théorème de Rolle, voir l'appendice) : si $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I, alors pour tout $(x, y) \in I \times I$ (avec $x < y$), il existe $t \in]x, y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = f'(t)(x - y)$$

Par suite, si $\left|f'\right|$ est majorée par une constante $k > 0$ sur l'intervallle I, on a l'inégalité des accroissement finis :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{quel que soit } (x, y) \in I \times I$$

Mais pour une fonction f à valeurs dans un espace autre que $\mathbb{R}$, il n'y a pas de formule des accroissements finis : par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ est dérivable, et sa dérivée $x \mapsto ie^{ix}$ ne s'annule pas, bien qu'il existe des points (nombreux) x et y distincts où $f(x) = f(y)$. En revanche, l'inégalité des accroissements finis reste vraie comme on va le voir.

2.2.1 Cas des fonctions d'une variable réelle

Théorème 2.3

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\left\| f'(t) \right\|_F \leq k \quad \textit{quel que soit } t \in I$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k|x - y| \quad \textit{quel que soit } (x, y) \in I \times I \tag{1.5}$$

Preuve 3 . *Exercice*

Remarque 2.8

Le résultat s'applique même pour x et y au bord de l'intervalle I, à condition que f soit continue sur l'intervalle fermé $\bar{I}$ et qu'on ait une estimation de f' sur l'intervalle ouvert I. En effet, dans la démonstration, l'ensemble $\mathcal{O}$ reste un ouvert dont la borne inférieure, s'il est non vide, appartient à l'intervalle ouvert $]x, y[$.

La même méthode de démonstration permet de montrer le résultat plus général suivant.

Théorème 2.4

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace de Banach F. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\left\| f'(t) \right\|_F \leq \varphi'(t) \quad \textit{quel que soit } t \in I$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \quad \textit{quel que soit } (x, y) \in I \times I \tag{1.7}$$

2.2.2 Cas général

Comme précédemment, E et F désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés.

Théorème 2.5

Soit $f : U \subset E \to F$ une fonction différentiable sur un ouvert convexe U. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $|||df(u)||| \leq k$ quel que soit $u \in U$. Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E \quad \text{quel que soit } (x,y) \in U \times U \tag{1.8}$$

Preuve 4 *Fixons $(x,y) \in U \times U$. La convexité de U assure que le segment d'extrémités x et y est inclus dans U (au besoin voir la définition 3.7 p. 80), et d'après les hypothèses sur f, la fonction d'une variable réelle*

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to F \\ t &\mapsto f(x + t(y - x)) \end{aligned}$$

est dérivable, de dérivée

$$g'(t) = df(x + t(y - x)) \cdot (y - x)$$

satisfaisant la majoration $\left\|g'(t)\right\|_F \leq k\|y - x\|_E$ pour tout $t \in [0,1]$. D'après le théorème 2.3 , on en déduit

$$\|f(y) - f(x)\|_F = \|g(1) - g(0)\|_F \leq k\|y - x\|_E$$

Remarque 2.9

La démonstration donne en fait l'inégalité plus fine

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \sup_{t\in[0,1]} |||df(x + t(y - x))||| \|y - x\|_E$$

2.2.3 Premières applications

Le théorème des accroissements finis a de nombreuses applications. Nous nous limiterons ici aux applications fondamentales que sont

— la caractérisation des fonctions de différentielle nulle sur les ouverts connexes,
— la caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un produit cartésien.

Rappelons d'abord la notion de connexité.

Définition 2.10

Un sous-ensemble d'un espace topologique (par exemple un espace de Banach) est connexe s'il n'admet pas de sous-ensemble à la fois ouvert et fermé autre que l'ensemble vide et lui-même.

Théorème 2.6

Soit $f : U \subset E \to F$ une fonction différentiable sur un ouvert connexe U, telle que $\mathrm{d}f(x) \equiv 0$ pour tout $x \in U$. Alors f est constante.

Preuve 5 *Quel que soit $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre x et de rayon $r, B(x;r)$ soit incluse dans U. Cette boule est convexe (cela se vérifie grâce à l'inégalité triangulaire), et puisque $\mathrm{d}f \equiv 0$, le théorème des accroissements finis montre que $f(y) = f(x)$ quel que soit $y \in B(x;r)$: cela signifie que f est localement constante. Comme U est connexe, cela implique que f est constante. En effet, fixons $x \in U$. L'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\}) \subset U$ est non vide puisqu'il contient x, et fermé par continuité de f (le singleton $\{f(x)\}$ étant fermé). D'après ce qui précède, cet ensemble est aussi ouvert. Puisque U est connexe, on a donc $f^{-1}(\{f(x)\}) = U$. Autrement dit, $f(y) = f(x)$ pour tout $y \in U$.*

Théorème 2.7

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés, et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Une fonction

$$\begin{array}{rll} f: & U \subset E & \to F \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto f(x) \end{array}$$

est continûment différentiable si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, l'application partielle

$$y_i \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

est différentiable en $y_i = x_i$ et sa différentielle définit une fonction (appelée différentielle partielle) continue de U dans $\mathcal{L}(E_i;F)$.

Preuve 6 . *Exercice*

2.2.4 THÉORÈME D'INVERSION LOCALE

Commençons par introduire la notion fondamentale de difféomorphisme (en fait de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, mais on omettra systématiquement le «préfixe $\mathcal{C}^1$). Dans tout ce qui suit, E et F désignent des $\mathbb{R}$-espaces de Banach.

Définition 2.11

Soient U et V des ouverts (non vides) de E et F respectivement. On dit qu'une application $f : U \to V$ est un difféomorphisme (de U sur V) si et seulement si

1. *f est une bijection,*
2. *f est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire continûment différentiable sur U,*
3. *f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.*

▶ **Exemple** La fonction trigonométrique tan est un difféomorphisme de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **Contre-exemple** La fonction polynomiale $x \mapsto x^3$ n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bien que ce soit une bijection continûment différentiable : sa réciproque n'est en effet pas différentiable en $y = 0$.

Proposition 2.12 *Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme, sa différentielle est en tout point de U un isomorphisme de E sur F, et la différentielle de la fonction réciproque f^{-1} est liée à celle de f par la formule :*

$$\mathrm{d}\left(f^{-1}\right)(y) = \left(\mathrm{d}f\left(f^{-1}(y)\right)\right)^{-1} \quad \textit{pour tout } y \in V$$

Preuve 7 *Pour simplifier l'écriture, notons $g = f^{-1}$. Par définition, on a*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_U \quad \textit{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_V$$

d'où en appliquant la règle de dérivation des fonctions composées (Théorème 1.3)

$$\mathrm{d}g(y) \circ \mathrm{d}f(x) = \mathrm{Id}_E \textit{ et } \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}g(y) = \mathrm{Id}_F \textit{ pour tout } x \in U \textit{ et } y = f(x).$$

Corollaire 2.13

S'il existe un difféomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert de F, les deux espaces sont isomorphes. En particulier, si l'un d'eux est de dimension finie, l'autre aussi et sa dimension est la même.

Le théorème d'inversion locale fournit une sorte de réciproque de la proposition 1.12

Théorème 2.8

Si $f : U \to V$ est de classe $\mathcal{C}^1$, si $a \in U$ est tel que que $\mathrm{d}f(a)$ soit un isomorphisme de E sur F, il existe un voisinage ouvert U_a de a dans U et un voisinage ouvert V_b de $b = f(a)$ dans V tel que la restriction de f à U_a soit un difféomorphisme de U_a sur V_b.

La démonstration utilise essentiellement trois ingrédients :

1 le fait que l'ensemble $\mathbf{Isom}(E;F)$ des isomorphismes de E sur F soit un ouvert et que l'application $u \in \mathbf{Isom}(E;F) \mapsto u^{-1} \in \mathbf{Isom}(F;E)$ soit continue,

2 le théorème des accroissements finis,

3 le théorème du point fixe de Banach-Picard.

Pour le point 3), rappelons

Théorème 2.9: (Point fixe)(Banach-Picard)

Si C est un fermé non vide d'un espace de Banach E et si $h : C \to C$ est contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\left\|h(x) - h(x')\right\|_E \leq k \left\|x - x'\right\|_E \qquad \text{quels que soient } x \text{ et } x' \in C$$

alors il existe un unique $x \in C$ tel que $h(x) = x$.

Preuve 8 *Démonstration du théorème 2.8.. Exercice*

Le théorème d'inversion locale est fondamental en analyse. Le corollaire qui suit, parfois appelé théorème d'inversion globale, caractérise complètement les difféomorphismes.

Corollaire 2.14

Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ avec U un ouvert non vide. C'est un difféomorphisme (de U sur $f(U)$) si et seulement si elle est injective et sa différentielle est en tout point de U un isomorphisme de E sur F.

Preuve 9 *. Exercice*

En dimension finie, le résultat peut s'énoncer ainsi :

Corollaire 2.15

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ injective et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est un difféomorphisme si et seulement si le déterminant de sa matrice jacobienne (que l'on appelle simplement le jacobien de f) ne s'annule pas sur U.

2.3 THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

Parmi les conséquences fondamentales du théorème d'inversion locale, on trouve un résultat tout aussi important, connu sous le nom de théorème des fonctions implicites (en fait ces deux théorèmes sont équivalents, car on peut aussi déduire le premier du second). Il concerne la résolution d'équations non-linéaires de la forme :

$$f(x,y) = 0$$

et doit son nom au fait que, sous les hypothèses que l'on va préciser, on peut en tirer y comme fonction de x : on dit alors que $f(x,y) = 0$ définit implicitement y, ou encore y comme fonction implicite de x.

Dans l'énoncé qui suit, E, F et G sont trois espaces de Banach.

Théorème 2.10

Soit U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0_G$ et la différentielle partielle de f par rapport à y, $\mathrm{d}_2 f$ est telle que $\mathrm{d}_2 f(a,b)$ soit un isomorphisme de F sur G. Alors il existe un voisinage ouvert $U_{(a,b)}$ de (a,b) dans U, un voisinage ouvert W_a de a dans E et une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(W_a; F)$ telle que :

$$\left((x,y) \in U_{(a,b)} \text{ et } f(x,y) = 0_G\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$$

Preuve 10 . *Exercice*

Proposition 2.16 *Sous les hypothèses du théorème 1.10 , quitte à réduire W_a, on a*

$$\mathrm{d}\varphi(x) \cdot h = -\left(\mathrm{d}_2 f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \mathrm{d}_1 f(x, \varphi(x)) \cdot h$$

pour tout $x \in W_a$ et pour tout $h \in E$.

Preuve 11 *L'image réciproque de l'ouvert $\mathbf{Isom}(F;G)$ par l'application continue $\mathrm{d}_2 f$ est un ouvert et il contient (a,b). Donc, quitte à réduire $U_{(a,b)}$ et donc aussi W_a, on peut supposer*

$$\mathrm{d}_2 f(x, \varphi(x)) \in \mathbf{Isom}(F;G) \qquad \text{pour tout } x \in W_a$$

On obtient le résultat en différenciant la fonction $x \mapsto f(x, \varphi(x))$, identiquement nulle dans W_a.