Actividad 6: **Método de la lluvia (regla de Sarrus) en matrices 4x4**

Martín Alexis Martínez Andrade - 2049334
Inteligencia Artificial

Expansión de Laplace para una matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

El determinante de A se calcula mediante la expansión de Laplace de la siguiente manera:

$$\det(A) = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Resolviendo, quedaría:

$$\det(A) = a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg) = (aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

Regla de Sarrus para una matriz de 3×3

La regla de Sarrus aumenta la matriz copiando las dos primeras columnas a la derecha:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & | & a & b \\ d & e & f & | & d & e \\ g & h & i & | & g & h \end{bmatrix}$$

Sumamos los productos de las diagonales descendentes y restamos los productos de las ascendentes:

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Por lo tanto, el determinante obtenido con la Expansión de Laplace es el mismo que por medio de la regla de Sarrus.

Regla de Sarrus en una matriz 4×4

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c & d & | & a & b & c \\ e & f & g & h & | & e & f & g \\ i & j & k & l & | & i & j & k \\ m & n & o & p & | & m & n & o \end{bmatrix}$$

Al tratar de usar la regla de Sarrus para una matriz 4×4, se llega a:

$$\det(B) = (afkp + bglm + chin + dejo) - (mjgh + nkha + oleb + pifc)$$

Comparando con la expansión de Laplace:

$$\det(B) = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Calculando los determinantes de estas 4 submatrices, tenemos:

$$D_1 = f(kp - lo) - g(jp - ln) + h(jo - kn),$$

$$D_2 = e(kp - lo) - g(ip - lm) + h(io - km),$$
$$D_3 = e(jp - ln) - f(ip - lm) + h(in - jm),$$
$$D_4 = e(jo - kn) - f(io - km) + g(in - jm).$$

Por lo que el determinante quedaría:

$$\det(B) = a\Big[f(kp-lo)-g(jp-ln)+h(jo-kn)\Big]-b\Big[e(kp-lo)-g(ip-lm)+h(io-km)\Big]$$
$$+c\Big[e(jp-ln)-f(ip-lm)+h(in-jm)\Big]-d\Big[e(jo-kn)-f(io-km)+g(in-jm)\Big].$$

Este resultado obtenido correctamente por medio de la expansión de Laplace claramente no coincide con el determinante obtenido con la regla de Sarrus, **demostrando que la regla de Sarrus no es válida para matrices** 4×4.

Ya que la regla de Sarrus no es válida, para calcular el determinante de una matriz 4×4 se suele usar directamente la expansión de Laplace con operaciones elementales para simplificar el cálculo, de tal forma de que, por ejemplo, queden más ceros en la fila que se usará como pivote, reduciendo la cantidad de cálculos a realizar. Se puede realizar también una eliminación Gaussiana, usando operaciones elementales para transformar la matriz en una triangular superior; el método Montante puede también hacer el cálculo del determinante más sencillo evitando errores de truncamiento.