TP1 : Simulation et Monte-Carlo

Benoît Henry, benoit.henry@imt-lille-douai.fr

Exercice 1 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que*

$$\mathbb{P}(X=0) = p \in [0,1],$$

pour un certain réel p fixé quelconque. Écrire une fonction permettant, en fonction du paramètre p choisi, de simuler la variable aléatoire X. Retrouver p avec Monte-Carlo.

Rappel : en python, la commande random.random() permet de simuler une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2 *Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rappel que*

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1. *Écrire une fonction permettant, en fonction du paramètre λ choisi, de simuler la variable aléatoire X.*

2. *Estimer les moyenne et variance de X par Monte-Carlo.*

Exercice 3 *En utilisant l'algorithme du rejet, implémenter une fonction permettant de simuler une variable aléatoire uniforme sur le disque unité.*

Exercice 4 *Soit X une variable aléatoire de densité*

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. *Déterminer la fonction F de répartition de X.*
2. *Calculer l'inverse de F.*
3. *À l'aide de l'algorithme de la fonction de répartition inverse, écrire une fonction permettant, en fonction du paramètre λ choisi, de simuler la variable aléatoire X.*
4. *Estimer la variance de X par Monte-Carlo.*

Exercice 5 *On souhaite simuler une variable aléatoire Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. Malheureusement, on ne sait pas calculer explicitement sa fonction de répartition.*

1. *Proposer une fonction basée sur l'algorithme du rejet permettant de simuler une Gaussienne.*
2. *Par Monte-Carlo, estimer le nombre moyenne d'itération de l'algorithme et son temps moyen d'exécution.*
3. *La commande python "random.normal()" permet de simuler une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite. Comparer l'efficacité de cette méthode avec la votre.*

Exercice 6 *Criticité de l'uranium*

Un minerai d'uranium est composé en majeur parti d'uranium 238 ($\simeq 99,3\%$) et d'uranium 235 ($\simeq 0,7\%$). L'uranium 238 est un isotope stable tant dis que l'uranium 235 est fissible, c'est-à-dire qu'une réaction de fission nucléaire se produit lorsqu'un atome d'uranium 235 est impacté par un neutron. La fission d'un atome d'uranium 235 produit à son tour l'émission de 2 neutron susceptible d'impacter d'autres atomes.

1. *En supposant que la probabilité pour un neutron se propageant dans notre minerai d'impacter un atome d'uranium 235 est égal à la proportion d'uranium 235 dans le minerai, proposer un modèle pour décrire la réaction nucléaire déclenchée par l'introduction d'un neutron dans notre minerai. On pourra supposer la taille de minerais infinis (raisonnable à l'échelle de l'atome) et la proportion constante d'unranium 235 constante.*
2. *Implémenter ce modèle.*
3. *À l'aide de Monte-Carlo, estimer la longueur moyenne de la réaction (c'est à dire la durée de la réaction comptée en générations de neutron).*
4. *Il est possible d'enrichir l'uranium en isotope 235. Tracer, en fonction de la proportion d'uranium 235, la longueur moyenne d'une réaction. Que pouvez-vous observer ?*