Señales aleatorias y ruido. Simulacion de un sistema $M/M/1$

Arcadio Alexis Calvillo Madrid 159702

06 Mayo 2019

1 Antecedentes

La teoría de colas es **el estudio matemático de colas o lineas dentro de un sistema de espera** y fue propuesto por el e estadístico, matemático e ingeniero Agner Krarur Erlang.

La teoría de colas cuenta con un sin fin de aplicaciones que van desde logística y telecomunicaciones en una terminal aeropuerta hasta la experiencia de los niño en la cola de Disneylandia. Es por eso que su estudio es importante para entender las diversas características de los sistemas de espera y así poder controlar, de alguna manera, el tráfico de dicho sistema.

2 Características del sistema $M/M/1$

Consideremos un sistema de espera con las siguientes características:

1) Los clientes llegan de acuerdo con un proceso Poisson con una tasa de llegada λ, es decir, los tiempo entre llegadas se distribuyen de forma **exponencial** con media $\frac{1}{\lambda}$

2) El tiempo de servicio de cada cliente es una variable aleatoria exponencial idénticamente distribuida, es decir, $T_s(i)\ exp(\frac{1}{\mu})$

3) El sistema sólo tiene un servidor

4) La disciplina de servicio es FCFS, es decir, el primero que entra es el primero en salir.

3 Objetivo

Analizar el comportamiento de un sistema de esperas con la características mencionadas anteriormente y comprobar el **Teorema de Little**. El cual dice que el número promedio de clientes en un servidor es igual a la tasa de llegadas por el tiempo promedio pasado en el servidor, es decir,

$$E[N(t)] = \lambda E[T(t)]$$

además, calcular:

1) $P(N = 0)$

2) $P(N = 1)$

4 Código de simulación

Para la simulación se propone el siguiente código:

```
function MM1FCFS1Ser(n,mi,lambda,x0,x1)
%Simulaci n de un sistema MM1. FCFS y un servidor

%      n: N mero de eventos
%     mi: Media del tiempo de servicios
%lambda: Tasa de llegadas
%x0---x1: Estado del sistema durante los servicios x1-x0
close all;
%Tiempos de llegada
Ti=-log(rand(1,n+1))/lambda;
Ti=cumsum(Ti);
%Tiempos de servicio
Ts=-log(rand(1,n+1))/mi;
Te(1)=0;
Tt(1)=Ts(1)+Ti(1);
i=1;
k=1;
Nt(1,:)=[0,0];
tipoG=1;
while k<n
    switch tipoG
    case 1
        if (Ti(k)>=Tt(i))
            tipoG=2;
        else
            %Ti(k+1)=Ti(k)-log(rand())/lambda;
            Nt(k+i,:)=[Nt(k+i-1,1)+1,Ti(k)];
            k=k+1;
        end
    case 2
        %Ts(i+1)=-log(rand())/mi;
        tacum=cumsum(Ts);
        Te(i+1)=(Tt(i)-Ti(i+1)).*(Tt(i)-Ti(i+1)>0);
        Tt(i+1)=Ti(i+1)+Te(i+1)+Ts(i+1);
        Nt(k+i,:)=[Nt(k+i-1,1)-((Nt(k+i-1,1))>0),Tt(i)];
        i=i+1;
        tipoG=1;
    end
```

```
end

N=Nt(x0:x1,:);
stairs(N(:,1))
for i=1:max(Nt(:,1))+1
     aux1=find(Nt(:,1)==i-1);
     if aux1(length(aux1))==length(Nt(:,1))
          aux1=aux1(1:length(aux1)-1);

     end
     aux2=aux1+1;
     tsum=sum(Nt(aux2,2)-Nt(aux1,2));
     P(i)=tsum;
end
P=P/max(Nt(:,2));
figure(2)
subplot(2,1,1)
stem([0:1:max(Nt(:,1))],P,'ok')
subplot(2,1,2)
stem([0:1:max(Nt(:,1))],cumsum(P),'ok')
%Verificaci n de Little
N=trapz(Nt(1:min([i,k]),2),Nt(1:min([i,k]),1))/max(Nt(1:min([i,k])
     ,2))
T=mean(Te(1:min([i,k-1]))+Ts(1:min([i,k-1])))
abs(N-T.*lambda)
P(0)
P(1)
```

5 Resultados de la simulación

5.1 Resultados para $\lambda = 0.5$ mensaje por segundo y $\mu = 1$ segundo por mensaje

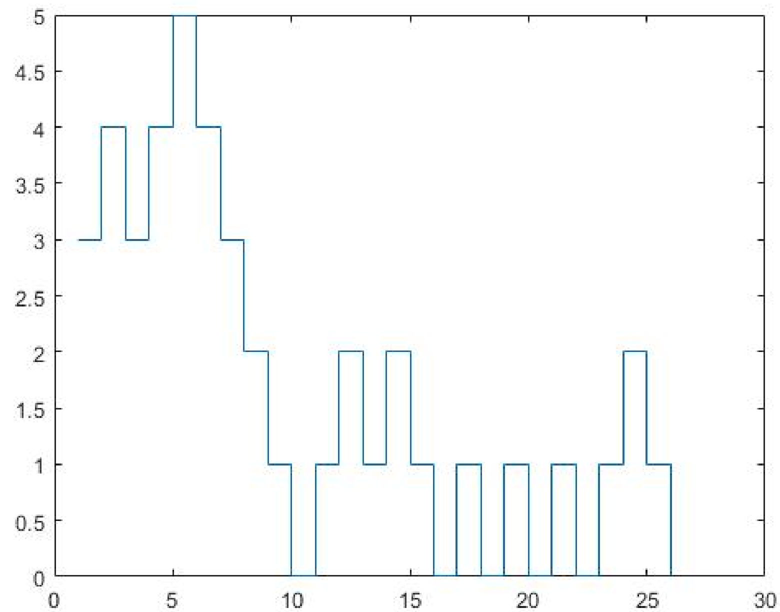

Fig. 1: Trayectoría típica.

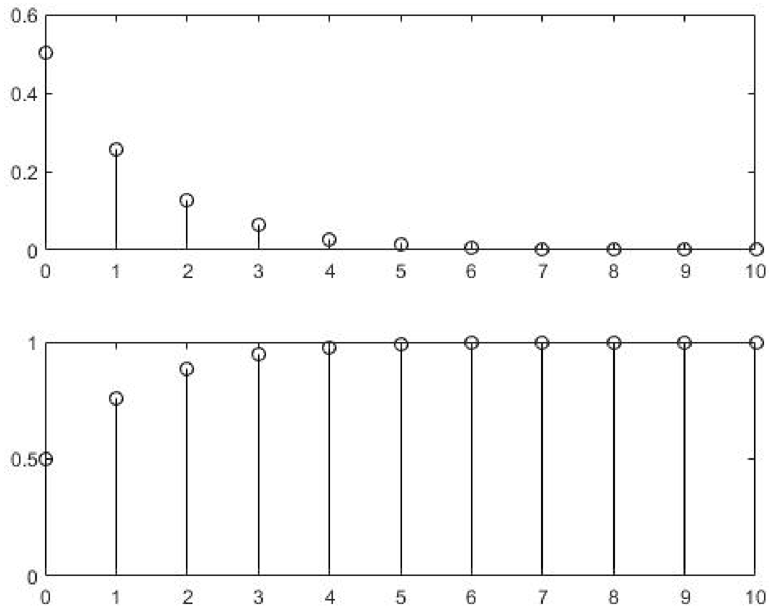

Fig. 2: Distribución de probabilidades del número de clientes en el sistema

La probabilidad de que el servidor esté vacío es del 50.11% y la probabilidad de que sólo contenga a un cliente es deñ 25.55%.

El número de clientes promedio en el servidor fue de 0.6032

El tiempo promedio de tiempo pasado en el servidor fue de 1.017 segundos

El error asociado al teoréma de Little fue del 0.52% es decir, se cumple.

5.2 Resultados para $\lambda = 0.6$ mensaje por segundo y $\mu = 1$ segundo por mensaje

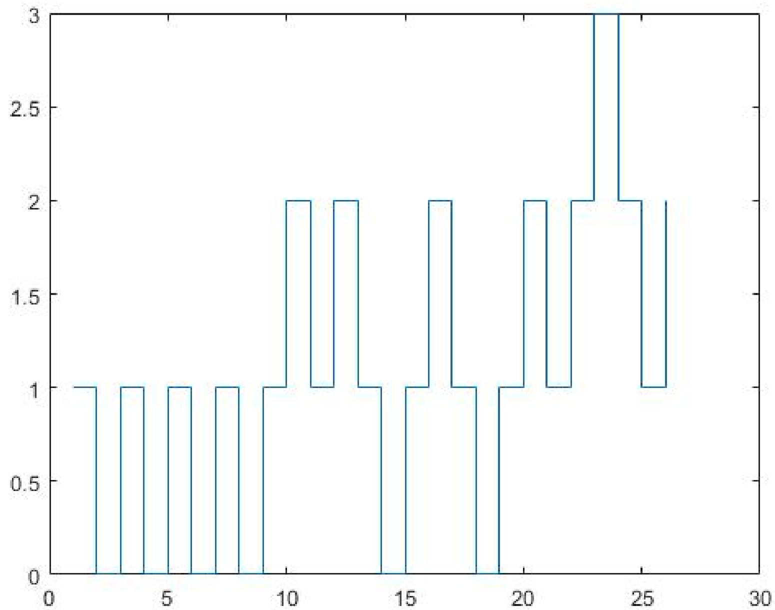

Fig. 3: Trayecoria típica

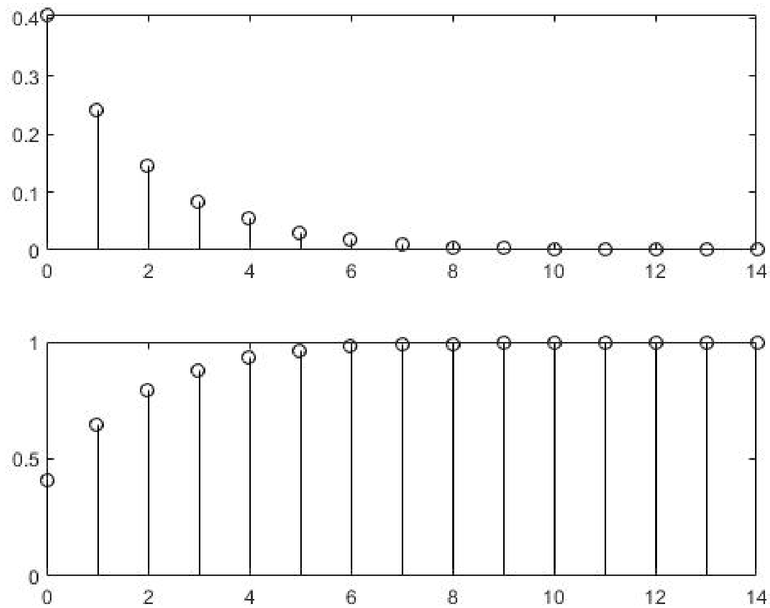

Fig. 4: Distribución de probabilidades del número de clientes en el sistema

La probabilidad de que el servidor esté vacío es del 40.22% y la probabilidad de que sólo contenga a un cliente es deñ 22.87%.

El número de clientes promedio en el servidor fue de 0.65

El tiempo promedio de tiempo pasado en el servidor fue de 1.97 segundos

6 Conclusiones

Podemos ver que Little se verifica siempre y cuando se cumpla la **condicion de ergodicidad**:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

lo cual es verdaderamente intuitivo, es decir, el servidor no se saturará mientras la tasa de llegadas de clientes a un sistema es menor a la tasa de servicio del servidor. Además se puede observar como la probabilidad de que el servidor esté vacío se acerca cada vez más a cero conforme la tasa de llegadas se aproxima a la tasa de servicios. Es decir,

$$\lim_{\lambda \to \mu} P(N(t) = 0) = 0$$

Además, uno de los resultados más importantes también viene con esta tendencia. **El número promedio de clientes en el sistema tiende a hacerse grande conforme la tasa de llegadas tiende a la tasa de servicio**

$$\lim_{\lambda \to \mu} E[N(t)] \to \infty$$

O, en términos de eficiencia, la probabilidad de pérdida de un cliente tiende a uno.

$$\lim_{\lambda \to \mu} P(pérdida) = 1$$