CUADRATURA

Para la formula de cuadratura de tipo interpolativo; se encuentra las formulas de aprox. para:

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\, dx \quad (1)$$ $\rho(x)$ positiva e integrable.

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\, dx \cong \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) \quad (2)$$

Se encontrará una formula general $f(x)$ suficientemente suave, con polinomios de Lagrange.

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)\, \omega(x)}{(x-x_k)\, \omega'(x_k)}$$

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$\omega'(x) = \prod_{j\neq k} (x_j - x_k)$$

Si se reemplaza (1) $f(x)$ en $L_n(x)$ entonces se encontrará C_k

$$C_k = \int_a^b \frac{\rho(x)\, \omega(x)}{(x-x_k)\, \omega'(x_k)}\, dx \qquad k=0,1,\dots,n \quad (3)$$

Definición.- Una formula de cuadratura de tipo interpolativo se llama a aquella forma de cuadratura de tipo ~~interpolativa~~ (2) si y solo si los coeficientes C_k de la formula (2), se calcula por la formula (3) $\rho(x)$ se llama función de peso.

El error del tipo de cuadratura

Sean los puntos de la red: $x_0, x_1, \dots x_n$ y además se conocen los valores $f(x_k) = f_k$; $k=\overline{0,N}$

$$f(x) = L_n(x) + \underbrace{r_{n+1}(x)}_{\text{Error de } x}$$

Se escribe la integral definida a continuación:

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)\, \underline{L_n(x)\,dx} + \int_a^b \rho(x)\, r_{n+1}(x)\,dx$$

aplicando polinomio de Lagrange se tiene:

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) + \int_a^b \rho(x)\, r_{n+1}(x)\,dx$$

El error de interpolación es:

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, \omega(x) \qquad \xi \in [a,b]$$

Para evaluar se tiene:

$$\varphi_{n+1} = \int_a^b \rho(x)\, f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) =$$

$$= \int_a^b \frac{\rho(x)\, f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\, \omega(x)\,dx$$

Se tiene la siguiente evaluación:

$$|\varphi_{n+1}| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b \rho(x)\, |\omega(x)|\,dx$$

Fórmula de cuadratura (Es exacta para polinomio de grado n)

donde: $M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{n+1}(x)|$

- Se tiene un polinomio de grado n, la formula de cuadratura es exacta
- Si una formula de cuadratura es exacta para cualquier polinomio de grado n, es del tipo interpolativo.

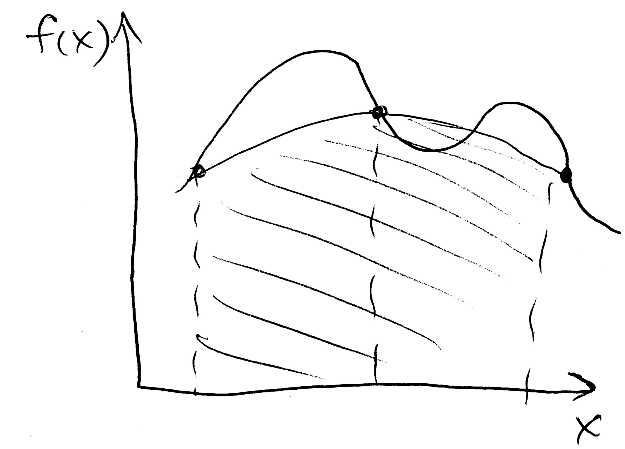
SPLINE

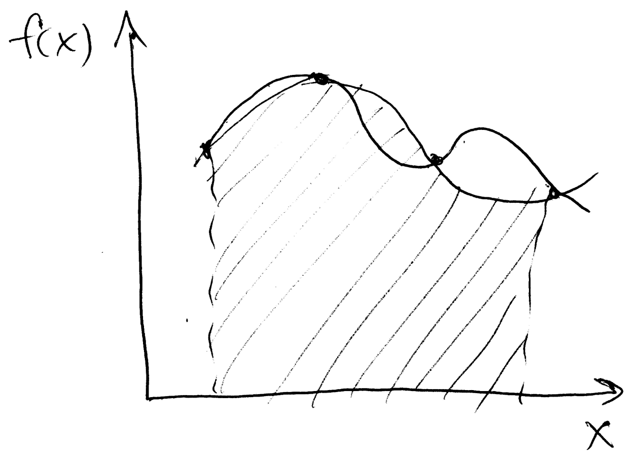
1º Se ajustan los puntos aplicando splines cubicos.

2º Para cada intervalo se tiene una ecuación y se aplica un método de integración puede ser rectangulos o trapecios.

FORMULA DE SIMPSON.

Gráficamente





Regla de Simpson 1/3.

Resulta cuando un polinomio de interpolación de segundo grado se sustituye en la ecuación:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Si se designan a y b como x_0 y x_2, y $f_2(x)$ se representa por un polinomio de Lagrange de 2° grado, la integral se transforma en

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Despues de integrar y manipulaciones algebraicas, se obtiene

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]$$

Donde $h = \frac{b-a}{2}$

Esta ecuación se conoce como regla de Simpson $1/3$. y la segunda fórmula de integración cerrada de Newton - Cotes.

También puede expresarse como:

$$\boxed{I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}}_{\text{altura promedio}}}$$

Donde $a = x_0$, $b = x_2$ y x_1 = el punto a la mitad entre a y b, que está dado por $(b+a)/2$.

Error de truncamiento:

$$E_t = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

o como $h = \frac{b-a}{2}$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

donde ξ está en algún lugar en el intervalo de a a b.

<u>Ejemplo</u>. Integrar con la regla de Simpson $1/3$

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a=0$ hasta $b=0.8$. La integral exacta es: 1.640533

<u>Sol.</u>

$f(0) = 0.2$

$f(0.4) = 2.456$

$f(0.8) = 0.232$

Por lo tanto, ~~la~~ se utiliza la 2ª ecuación.

$$I \cong 0.8 \, \frac{0.2 + 4(2.456) + 0.232}{6} = 1.367467$$

Error exacto

$$E_t = 1.640533 - 1.367467 = 0.2730667$$

$$\varepsilon_t = 16.6\%$$

5 veces más precisa que la regla del trapecio.

Error estimado

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{2880}(-2400) = 0.2730667$$

La regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo:

$$I \cong 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6}$$

$$+ \dots + 2h \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}$$

Ejemplo.

Utilizar la ecuación de Simpson 1/3 de aplicación multiple con $n=4$ para estimar la integral de:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a=0$ hasta $b=0.8$. La integral exacta es 1.640533

SOL.

$n=4 \quad (h=0.2)$

$f(0) = 0.2$

$f(0.2) = 1.288$

$f(0.4) = 2.456$

$f(0.6) = 3.464$

$f(0.8) = 0.232$

$$I = 0.8\,\frac{0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232}{12}$$

$= 1.623467$

$E_t = 1.640533 - 1.623467 = 0.017067$

$\varepsilon_t = 1.04\%$

Error estimado

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{180(4)^4}(-2400) = 0.017067$$

Regla de Simpson 3/8

Con un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos e integrando:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$

para obtener:

$$I \cong \frac{3h}{8}\boxed{\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]}$$

Donde $h = \frac{b-a}{3}$

Tambien es la tercera fórmula de integración cerrada de Newton-Cotes. Se puede expresar:

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\ \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio.}}$$

Error

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

o, como $h = \frac{b-a}{3}$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

Ejemplo.

Con la regla de Simpson $\frac{3}{8}$ integrar:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$

SOL

80/

$f(0)=0.2$

$f(0.2667)=1.432724$

$f(0.5333)=3.487177$

$f(0.8)=0.232$

$$I=0.8\,\frac{0.2+3(1.432724+3.487177)+0.232}{8}=1.519170$$

$$E_t=1.640533-1.519170=0.121363 \qquad \varepsilon_t=7.4\%$$

$$E_a=-\frac{(0.8)^5}{6480}(-2400)=0.121363$$

Trabajo Práctico

a) Demostrar la fórmula de Simpson 1/3.

b) ~~Inv~~ Investigar las fórmulas de Newton-Cotes.

c) Hacer los algoritmos de los rectángulos, trapecio, Simpson 1/3 y Simpson 3/8.

PROGRAMAS ADAPTATIVOS

Un método adaptativo es refinar los cálculos solamente en los dominios en los que es necesario y realizar el mínimo de cuentas en los restantes para lograr a la postre una distribución uniforme de errores de aproximación. Es decir combinando los métodos de integración.

Una ecuación diferencial es una ecuación en que la incógnita es una función y que, además, involucra también las derivadas de la función hasta un cierto orden. La incógnita no es el valor de la función en uno o varios puntos, sino la función en sí misma.

Cuando la incógnita es una función de una sola variable se dice que la función es ordinaria, debido a que la o las derivadas que aparecen en ella son derivadas ordinarias. (las derivadas parciales de las funciones de varias variables).

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Una ecuación diferencial en su forma más simple se define de forma explícita así:

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t,y), \text{ siendo } y(0) = y_0$$

Su solución es

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t,y)\,dt$$

Una EDO $y' = f(t,y)$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

admite, en general, infinitas soluciones.

Ejemplo: a) $y'(t) = 5y+8$, $y(0)=1$ b) $y'(t) = ty+5$, $y(0)=0$ c) $y'(t) = \frac{2}{1+t^2}$, $y(0)=1$