Métodos Numéricos: Resumen y ejemplos
Tema 3: Integración numérica

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Cataluña
Marzo 2008, versión 1.4

Contenido

---

1 Fórmulas de cuadratura

• **Objetivo**

Aproximar la integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

usando una combinación lineal de valores de $f(x)$ en puntos del intervalo $[a, b]$,

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b,$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

La fórmula de cuadratura es

$$F(f) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

• **Error**

$$\begin{aligned} E(f) &= I - F(f) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx - \left[\alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1 *Consideramos la integral*

$$I = \int_0^1 x \sin x \ dx.$$

1. Aproxima el valor de I con la fórmula de cuadratura

$$F(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

2. Calcula el valor exacto de la integral y el valor del error.

1. Valor aproximado.
Tenemos

$$a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = x \sin x,$$

$$F(f) = \frac{1-0}{6}\left(0 + 4 \cdot (0.5) \sin (0.5) + \sin 1\right) = 0.30005.$$

2. Valor exacto y error.
Calculamos una primitiva de $f(x)$

$$\begin{aligned}
\int x \sin x \, dx = & \text{ integramos por partes} \\
& = -x\cos x - \int (-\cos x) \ dx \\
\begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x \, dx & v = -\cos x \end{pmatrix} & = -x\cos x + \int \cos x \, dx \\
& = -x\cos x + \sin x + c
\end{aligned}$$

El valor exacto es

$$\int_0^1 x \sin x \, dx = \left[-x\cos x + \sin x\right]_{x=0}^{x=1} = -\cos 1 + \sin 1 = 0.30117.$$

Error

$$|E(f)| = |I - F(f)| = |0.30117 - 0.30005| = 0.00112.$$

La fórmula de cuadratura ha producido una aproximación con 2 decimales exactos. $\square$

• Grado de precisión

Dado un intervalo $[a, b]$, decimos que una fórmula de cuadratura

$$F(f) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

tiene *grado de precisión* g si es exacta para todos los polinomios de grado $\leq g$ (y no lo es para alguno de grado $g+1$). Es decir, si $p(x)$ es un polinomio de grado $\leq g$, entonces la fórmula de cuadratura es exacta para $p(x)$

$$\int_a^b p(x)\, dx = \alpha_0 p(x_0) + \alpha_1 p(x_1) + \cdots + \alpha_n p(x_n).$$

• Determinación del grado de precisión

Puede demostrarse que la fórmula de cuadratura $F(f)$ tiene grado de precisión g si es exacta para los polinomios

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2, \ldots, p_g(x) = x^g$$

y no lo es para

$$p_{g+1}(x) = x^{g+1}.$$

Ejemplo 1.2 *Consideramos el intervalo* $[0,2]$. *Determina el grado de precisión de la fórmula de cuadratura*

$$F(f) = \frac{1}{3}\left[f(0) + 4f(1) + f(2)\right].$$

Tenemos que verificar la exactitud de $F(f)$ sobre

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^2 1\, dx = [x]_0^2 = 2 \\ F(1) = \frac{1}{3}(1+4+1) = \dfrac{6}{3} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F(f) \text{ exacta para } p_0(x) = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^2 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \\ F(x) = \frac{1}{3}(0 + 4\cdot 1 + 2) = \frac{6}{3} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F(f) \text{ exacta para } p_1(x) = x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \\ F\left(x^2\right) = \frac{1}{3}(0 + 4\cdot 1 + 4) = \dfrac{8}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F(f) \text{ exacta para } p_2(x) = x^2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^2 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4 \\ F\left(x^3\right) = \frac{1}{3}(0 + 4\cdot 1 + 8) = \dfrac{12}{3} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F(f) \text{ exacta para } p_3(x) = x^3.$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^2 x^4\, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5} \\ F\left(x^4\right) = \frac{1}{3}(0 + 4\cdot 1 + 16) = \dfrac{20}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F(f) \textbf{no exacta} \text{ para } p_4(x) = x^4.$$

La fórmula de cuadratura tiene grado de precisión 3, y es exacta para todas las integrales

$$\int_0^2 p(x)\,dx$$

con $p(x)$ polinomio de grado ≤ 3. Por ejemplo, tomemos

$$p(x) = x^3 - x,$$

$$\int_0^2 \left(x^3 - x\right)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{16}{4} - \frac{4}{2} = 4 - 2 = 2,$$

$$F(p) = \frac{1}{3}[0 + 4 \cdot \underbrace{(1-1)}_{p(1)} + \underbrace{(8-2)}_{p(2)}] = \frac{6}{3} = 2. \quad \square$$

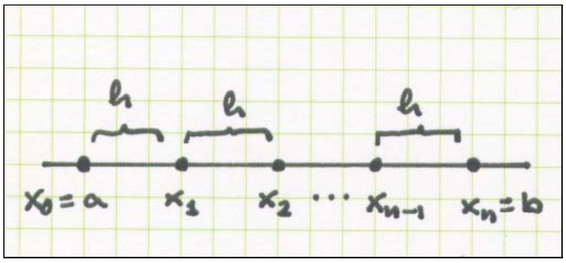
2 Fórmulas de Newton-Cotes

Las fórmulas de Newton-Cotes se obtienen integrando el polinomio interpolador construido con nodos *igualmente espaciados.*

• **Estrategia**

1. Dividimos $[a, b]$ en n subintervalos de longitud

$$h = \frac{b-a}{n},$$



los puntos de división son de la forma

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= a + h, \\ x_2 &= a + 2h, \\ &\vdots \\ x_j &= a + jh, \\ &\vdots \\ x_n &= a + nh = b. \end{aligned}$$

2. Calculamos el polinomio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ en los nodos

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

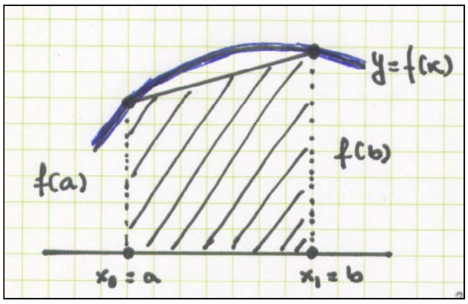
3. Tomamos

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \int_a^b p_n(x)\, dx.$$

2.1 Fórmula del trapecio y de Simpson

• Fórmula del Trapecio

Es la fórmula de Newton-Cotes de 2 puntos.



$$\int_a^b p_1(x)\, dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

$$F_T(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right].$$

Si tomamos $h = b - a$

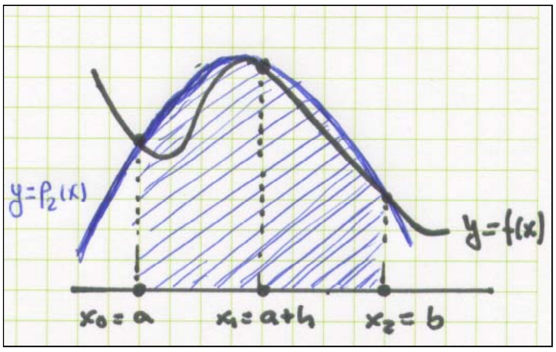
$$\boxed{\begin{array}{l} F_T(f) = \dfrac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right], \\ x_0 = a, \quad x_1 = a+h, \\ h = b-a. \end{array}}$$

• Fórmula de Simpson

Es la fórmula de Newton-Cotes de 3 puntos.

$$h = \frac{b-a}{2},$$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a+h, \quad x_2 = a+2h = b.$$



Puede demostrarse que

$$\begin{aligned}\int_a^b p_2(x)\,dx &= \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\\ &= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right].\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F_S(f)=\dfrac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right],\\ x_0=a,\quad x_1=a+h,\quad x_2=a+2h,\\ h=\dfrac{b-a}{2}.\end{array}}$$

Ejemplo 2.1 *Consideramos la integral*

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

1. *Aproxima el valor de I usando la fórmula del trapecio.*
2. *Aproxima el valor de I usando la fórmula de Simpson.*
3. *Calcula los errores.*

1. Aproximación por trapecio.

Tenemos

$$a=1,\quad b=2,\quad f(x)=\frac{1}{x},$$

$$F_T(f)=\frac{2-1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}=0.75.$$

2. Aproximación por Simpson.

Tenemos

$$h=\frac{2-1}{2}=0.5,$$

$$x_0=1,\quad x_1=1.5,\quad x_2=2,$$

$$F_S(f)=\frac{0.5}{3}\left(1+4\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2}\right)=0.69444.$$

3. Valor exacto y errores.

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 = 0.69315,$$

$$|E_T(f)| = |I - F_T(f)| = |0.69315 - 0.75| = 0.05685,$$

$$|E_S(f)| = |I - F_S(f)| = |0.69315 - 0.69444| = 0.00129.$$

Con la fórmula Simpson, hemos obtenido 2 decimales exactos. □

2.2 Errores

• Fórmula del trapecio

Sea $f(x)$ de clase $C^2[a,b]$,

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad h = b - a.$$

Se cumple

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(t), \quad t \in (a,b).$$

Valor absoluto del error

$$|E_T(f)| = |I - F_T(f)| = \frac{h^3}{12}\left|f^{(2)}(t)\right|, \quad t \in (a,b).$$

Cota superior de error

$$\boxed{|E_T(f)| \le \frac{h^3}{12} M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(2)}(x)\right|.}$$

• Fórmula de Simpson

Sea $f(x)$ de clase $C^4[a,b]$,

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = b, \quad h = \frac{b-a}{2}.$$

Se cumple

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(t), \quad t \in (a,b).$$

Valor absoluto del error

$$|E_S(f)| = |I - F_S(f)| = \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(t)\right|, \quad t \in (a,b).$$

Cota superior de error

$$\boxed{|E_S(f)| \le \frac{h^5}{90} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|.}$$

Ejemplo 2.2 *Consideramos la integral*

$$I = \int_1^2 x \ln x \, dx.$$

1. Aproxima el valor de I usando la fórmula del trapecio; calcula una cota superior de error.
2. Aproxima el valor de I usando la fórmula de Simpson; calcula una cota superior de error.
3. Calcula el valor exacto de la integral y verifica los resultados.

1. Aproximación trapecio.
Tenemos

$$a = 1, \quad b = 2, \quad h = 2 - 1 = 1, \quad f(x) = x \ln x,$$

$$F_T(f) = \frac{1}{2}(1 \ln 1 + 2 \ln 2) = \ln 2 = 0.\,69315.$$

Cota de error

$$|E_T(f)| \leq \frac{h^3}{12} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [1,2]} \left| f^{(2)}(x) \right| \,.$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = \ln x + 1,$$

$$f''(x) = \frac{1}{x},$$

$f''(x)$ es positiva si $x \in [1, 2]$. La función objetivo es

$$g(x) = \left| f^{(2)}(x) \right| = \frac{1}{x},$$

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2},$$

la derivada $g'(x)$ es negativa, por lo tanto $g(x)$ es decreciente en el intervalo y resulta

$$M_2 = \max_{x \in [1,2]} \left| f^{(2)}(x) \right| = g(1) = 1.$$

La cota de error es

$$|E_T(f)| \leq \frac{h^3}{12} M_2 = \frac{1}{12} = 0.083333.$$

2. Aproximación por Simpson.
Tenemos

$$h = \frac{2 - 1}{2} = 0.5,$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 2.$$

Valor de la aproximación,

$$F_S(f) = \frac{0.5}{3}\left(1 \ln 1 + 4 \cdot 1.5 \ln (1.5) + 2 \ln 2\right) = 0.\,63651.$$

Cota de error,

$$|E_s(f)| \leq \frac{h^5}{90} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [1,2]} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Empezamos por determinar M_4. Calculamos las derivadas

$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

La derivada $f^{(4)}(x)$ es positiva si $x \in [1, 2]$, por lo tanto, la función objetivo es

$$g(x) = \left| f^{(4)}(x) \right| = \frac{2}{x^3}.$$

Calculamos la derivada de la función objetivo

$$g'(x) = \frac{-6}{x^4},$$

vemos que $g'(x)$ es negativa y, en consecuencia, la función objetivo $g(x)$ es decreciente

$$M_4 = \max_{x \in [1,2]} \left| f^{(4)}(x) \right| = g(1) = 2.$$

Cota de error para la aproximación mediante la fórmula de Simpson

$$|E_S(f)| \leq \frac{h^5}{90} M_4 = \frac{(0.5)^5}{90} 2 = 0.0006\,9444.$$

Vemos que, en este caso, podemos asegurar 2 decimales exactos.

3. Valor exacto y errores.

Calculamos una primitiva de $f(x)$

$$\int x \ln x \, dx = \text{ integramos por partes.}$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x} dx. \\ dv = x\, dx, & v = \dfrac{x^2}{2}. \end{array} \right) \quad \begin{aligned} &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c. \end{aligned}$$

El valor exacto, con cinco decimales, es

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_{x=1}^{x=2}=(2\ln 2-1)-\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{4}\right)\\ &= 2\ln 2-1+1/4=0.63629.\end{aligned}$$

Error trapecio

$$|E_T(f)|=|I-F_T(f)|=|0.63629-0.69315|=0.0\,5686,$$

cota error trapecio

$$|E_T(f)|\le 0.083333.$$

Error Simpson

$$|E_S(f)|=|I-F_S(f)|=|0.63629-0.63651|=0.000\,22,$$

cota error Simpson

$$|E_S(f)|\le 0.0006\,94.$$

Observamos que los errores son inferiores a las cotas de error correspondientes. □

3 Fórmulas compuestas

3.1 Trapecio compuesto

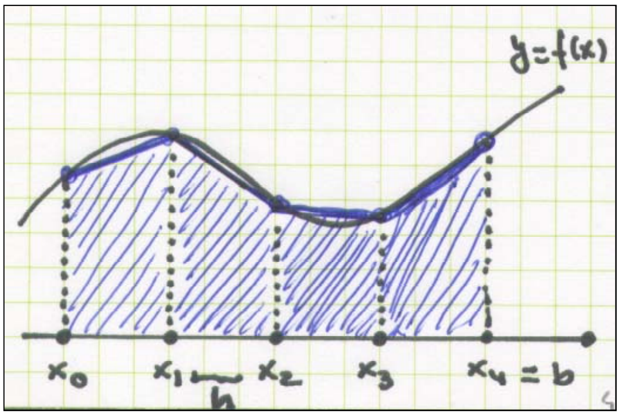
• **Estrategia**

1. Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de longitud
$$h=\frac{b-a}{n},$$
y obtenemos $n+1$ puntos
$$x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h,\ldots,x_n=a+nh=b.$$
Los n subintervalos son
$$A_1=[x_0,x_1],\ A_2=[x_1,x_2],\ldots,A_j=[x_{j-1},x_j],\ldots,A_n=[x_{n-1},x_n].$$

2. Aplicamos la fórmula del trapecio a cada subintervalo
$$\begin{array}{lclcl} A_1=[x_0,x_1] & \Rightarrow & F_T^{(1)} & = & \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right],\\ & & \vdots & & \vdots\\ A_j=[x_{j-1},x_j] & \Rightarrow & F_T^{(j)} & = & \frac{h}{2}\left[f(x_{j-1})+f(x_j)\right],\\ & & \vdots & & \vdots\\ A_n=[x_{n-1},x_n] & \Rightarrow & F_T^{(n)} & = & \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right].\end{array}$$

3. Tomamos como aproximación global la suma de las aproximaciones sobre los subintervalos

$$F_{TC}^{(n)} = F_T^{(1)} + F_T^{(2)} + \cdots + F_T^{(j)} + \cdots + F_T^{(n)}.$$



• **Fórmula de trapecio compuesto**

$$\boxed{\begin{aligned} &F_{TC}^{(n)} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_j) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right], \\ &h = \frac{b-a}{n}. \end{aligned}}$$

Si agrupamos términos, obtenemos

$$\boxed{F_{TC}^{(n)} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n)\right] + h\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j), \quad h = \frac{b-a}{n}.}$$

• **Cota de error**

Si $f(x)$ es de clase $C^2[a,b]$, se cumple

$$\boxed{\left|E_{TC}^{(n)}\right| = \left|\int_a^b f(x)dx - F_{TC}^{(n)}\right| \leq \frac{b-a}{12}\, h^2 M_2, \quad h = \frac{b-a}{n}.}$$

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(2)}(x)\right|.$$

• **Demostración de la cota de error**

Dividimos el intervalo en n subintervalos y aplicamos las propiedades de las integrales

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx, \\
&= \int_{A_1} f(x)\,dx + \int_{A_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{A_n} f(x)\,dx, \\
&= I_1 + I_2 + \cdots + I_n.
\end{aligned}$$

Definimos

$$F_{TC}^{(n)} = F_T^{(1)} + F_T^{(2)} + \cdots + F_T^{(n)},$$

donde $F_T^{(j)}$ es el valor de la fórmula simple del trapecio sobre el intervalo $A_j = [x_{j-1}, x_j]$. Entonces se cumple

$$\begin{aligned}
\left|E_{TC}^{(n)}\right| &= \left|\int_a^b f(x)\,dx - F_{TC}^{(n)}\right| \\
&= \left|(I_1 + I_2 + \cdots + I_n) - \left(F_T^{(1)} + F_T^{(2)} + \cdots + F_T^{(n)}\right)\right| \\
&= \left|\left(I_1 - F_T^{(1)}\right) + \left(I_2 - F_T^{(2)}\right) + \cdots + \left(I_n - F_T^{(n)}\right)\right| \\
&\le \left|I_1 - F_T^{(1)}\right| + \left|I_2 - F_T^{(2)}\right| + \cdots + \left|I_n - F_T^{(n)}\right| \\
&\le \left|E_T^{(1)}\right| + \left|E_T^{(2)}\right| + \cdots + \left|E_T^{(n)}\right|,
\end{aligned}$$

donde $\left|E_T^{(j)}\right|$ representa el error del trapecio simple en el intervalo A_j.
Podemos acotar el error en cada subintervalo como sigue

$$\left|E_T^{(j)}\right| \le \frac{h^3}{12} M_2^{(j)}, \quad M_2^{(j)} = \max_{x \in A_j} \left|f^{(2)}(x)\right|.$$

Entonces, resulta la siguiente cota para el error global

$$\left|E_{TC}^{(n)}\right| \le \frac{h^3}{12} M_2^{(1)} + \frac{h^3}{12} M_2^{(2)} + \cdots + \frac{h^3}{12} M_2^{(n)}.$$

Si tomamos

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} \left|f^{(2)}(x)\right|,$$

se cumple para todos los intervalos

$$M_2^{(j)} = \max_{x \in A_j} \left|f^{(2)}(x)\right| \le \max_{x \in [a,b]} \left|f^{(2)}(x)\right| = M_2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left|E_{TC}^{(n)}\right| &\le \frac{h^3}{12} M_2 + \frac{h^3}{12} M_2 + \cdots + \frac{h^3}{12} M_2 = n\frac{h^3}{12} M_2 = n\frac{b-a}{n}\frac{h^2}{12} M_2 \\
&\le \frac{b-a}{12} h^2 M_2. \quad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1 *Calcula*

$$\int_1^2 x \ln x \, dx$$

con 2 *decimales exactos usando la fórmula del trapecio compuesto.*

1. Cálculo del número de intervalos.

$$a = 1, \; b = 2, \; f(x) = x \ln x.$$

Tenemos la acotación

$$\left| E_{TC}^{(n)} \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

$$M_2 = \max_{x \in [1,2]} \left| f^{(2)}(x) \right|.$$

Hemos visto en el Ejemplo 2.2 que

$$M_2 = \max_{x \in [1,2]} \left| f^{(2)}(x) \right| = 1,$$

entonces

$$\left| E_{TC}^{(n)} \right| \leq \frac{1}{12} h^2.$$

Exigimos

$$\left| E_{TC}^{(n)} \right| \leq \frac{1}{12} h^2 \leq 0.5 \times 10^{-2}$$

y resulta

$$h^2 \leq 12 \cdot \left(0.5 \times 10^{-2}\right) = 0.0\,6,$$

$$h \leq \sqrt{0.0\,6} = 0.\,24495.$$

Como

$$h = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n},$$

resulta

$$\frac{1}{n} \leq 0.\,24495 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{1}{0.\,24495} = 4.\,0825.$$

Necesitamos 5 subintervalos.

2. Valor de la aproximación.

Con $n = 5$, el valor del *step* es

$$h = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Obtenemos los nodos

$$x_0 = 1, \; x_1 = 1.2, \; x_2 = 1.4, \; x_3 = 1.6, \; x_4 = 1.8, \; x_5 = 2.$$

La fórmula del trapecio compuesto con 5 subintervalos es

$$F_{TC}^{(5)} = \frac{h}{2}\left[f\left(x_0\right) + f\left(x_5\right)\right] + h\sum_{j=1}^{4} f\left(x_j\right),$$

en nuestro caso resulta

$$\begin{aligned} F_{TC}^{(5)} &= \frac{0.2}{2}\left(1\ln 1 + 2\ln 2\right) + (0.2)\left(1.2\ln 1.2 + 1.4\ln 1.4 + 1.6\ln 1.6 + 1.8\ln 1.8\right) \\ &= 0.\,13863 + 0.\,49997 = 0.\,63860. \end{aligned}$$

3. Error exacto.

Valor exacto con 5 decimales

$$I = \int_1^2 x\ln x\,dx = 0.\,63629.$$

Error

$$\left|E_{TC}^{(5)}\right| = \left|I - F_{TC}^{(5)}\right| = |0.\,63629 - 0.\,63860| = 0.00\,231. \quad \square$$

3.2 Fórmula de Simpson compuesto

• Estrategia

La idea es dividir el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos de igual longitud

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

y aplicar la regla simple de Simpson a cada subintervalo. Para centrar ideas, expondremos el caso $m = 3$.

1. Para aplicar la regla de Simpson, debemos tomar el punto medio de cada intervalo. Por lo tanto, la distancia entre nodos (step) es

   $$h = \frac{b-a}{2m}.$$

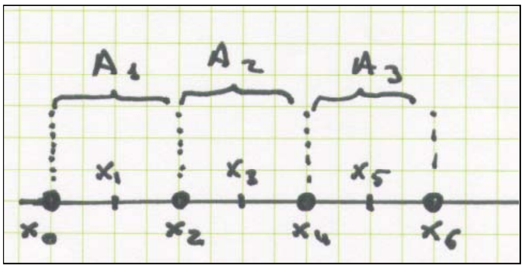
   Los nodos son

   $$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \ldots, x_n = a + 2mh = b.$$

   Si $m = 3$, la distancia entre nodos será

   $$h = \frac{b-a}{6}$$

   y tendremos $2m + 1 = 7$ nodos



en este caso, los intervalos son

$$
\begin{aligned}
A_1 &= [x_0, x_2], \quad \text{punto medio } x_1. \\
A_2 &= [x_2, x_4], \quad \text{punto medio } x_3. \\
A_3 &= [x_4, x_6], \quad \text{punto medio } x_5.
\end{aligned}
$$

2. Aplicamos la fórmula de Simpson a cada subintervalo

$$
\begin{aligned}
A_1 = [x_0, x_2] \quad &\Rightarrow \quad F_S^{(1)} = \frac{h}{3}\left[f\left(x_0\right) + 4f\left(x_1\right) + f(x_2)\right]. \\
A_2 = [x_2, x_4] \quad &\Rightarrow \quad F_S^{(2)} = \frac{h}{3}\left[f\left(x_2\right) + 4f\left(x_3\right) + f(x_4)\right]. \\
A_3 = [x_4, x_6], \quad &\Rightarrow \quad F_S^{(3)} = \frac{h}{3}\left[f\left(x_4\right) + 4f\left(x_5\right) + f(x_6)\right].
\end{aligned}
$$

3. Tomamos como aproximación global la suma de las aproximaciones sobre los subintervalos

$$F_{SC}^{(m)} = F_S^{(1)} + F_S^{(2)} + \cdots + F_S^{(m)}.$$

En el caso $m = 3$

$$F_{SC}^{(3)} = \frac{h}{3}\left[f\left(x_0\right) + 4f\left(x_1\right) + 2f(x_2) + 4f\left(x_3\right) + 2f(x_4) + 4f\left(x_5\right) + f(x_6)\right].$$

Podemos reordenar y agrupar los valores como sigue.

$$F_{SC}^{(3)} = \frac{h}{3}\{\underbrace{f\left(x_0\right) + f(x_6)}_{\text{nodos extremos}} + 2\underbrace{\left[f(x_2) + f(x_4)\right]}_{\text{nodos pares interiores}} + 4\underbrace{\left[f\left(x_1\right) + f\left(x_3\right) + f\left(x_5\right)\right]}_{\text{nodos impares}}\}.$$

- **Fórmula de Simpson compuesto**

$$\boxed{F_{SC}^{(m)} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f\left(x_{2m}\right) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f\left(x_{2j}\right) + 4\sum_{j=1}^{m} f\left(x_{2j-1}\right)\right], \quad h = \frac{b-a}{2m}.}$$

• Cota de error

Si $f(x)$ es de clase $C^4[a,b]$, se cumple

$$\boxed{\left|E_{SC}^{(m)}\right| = \left|\int_a^b f(x)dx - F_{SC}^{(m)}\right| \le \frac{b-a}{180}\, h^4 M_4, \quad h = \frac{b-a}{2m}.}$$

$$M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

• Demostración de la cota de error

El procedimiento es muy parecido al empleado en la demostración de la cota de error para la fórmula del trapecio compuesto. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \int_{A_1} f(x)\, dx + \int_{A_2} f(x)\, dx + \cdots + \int_{A_m} f(x)\, dx \\ &= I_1 + I_2 + \cdots + I_m.\end{aligned}$$

$$F_{SC}^{(m)} = F_S^{(1)} + F_S^{(2)} + \cdots + F_S^{(m)},$$

donde $F_S^{(j)}$ es el valor de la fórmula simple de Simpson sobre el intervalo $A_j = [x_{2j-2}, x_{2j}]$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|E_{SC}^{(m)}\right| &= \left|\int_a^b f(x)\, dx - F_{SC}^{(m)}\right| \\ &= \left|(I_1 + I_2 + \cdots + I_m) - \left(F_S^{(1)} + F_S^{(2)} + \cdots + F_S^{(m)}\right)\right| \\ &= \left|\left(I_1 - F_S^{(1)}\right) + \left(I_2 - F_S^{(2)}\right) + \cdots + \left(I_m - F_S^{(m)}\right)\right| \\ &\le \left|I_1 - F_S^{(1)}\right| + \left|I_2 - F_S^{(2)}\right| + \cdots + \left|I_m - F_S^{(m)}\right| \\ &\le \left|E_S^{(1)}\right| + \left|E_S^{(2)}\right| + \cdots + \left|E_S^{(m)}\right|,\end{aligned}$$

donde $\left|E_S^{(j)}\right|$ representa el error de Simpson simple en el intervalo A_j. Sabemos que se cumple

$$\left|E_S^{(j)}\right| \le \frac{h^5}{90} M_4^{(j)}, \quad M_4^{(j)} = \max_{x\in A_j} \left|f^{(4)}(x)\right|,$$

entonces

$$\left|E_{SC}^{(m)}\right| \le \frac{h^5}{90} M_4^{(1)} + \frac{h^5}{90} M_4^{(2)} + \cdots + \frac{h^5}{90} M_4^{(m)}.$$

Si tomamos

$$M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|,$$

se cumple para todos los intervalos

$$M_4^{(j)} = \max_{x\in A_j} \left|f^{(4)}(x)\right| \le \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| = M_4,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\left|E_{SC}^{(m)}\right| &\leq \frac{h^5}{90}M_4 + \frac{h^5}{90}M_4 + \cdots + \frac{h^5}{90}M_4 \\ &\leq m\frac{h^5}{90}M_4 = m\frac{b-a}{2m}\frac{h^4}{90}M_4 \\ &\leq \frac{b-a}{180}\,h^4 M_4. \quad \square\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2 *Calcula*

$$\int_1^2 x \ln x \, dx$$

con 4 *decimales exactos usando la fórmula de Simpson compuesto.*

1. Cálculo del número de intervalos.

$$a = 1,\ b = 2,\ f(x) = x \ln x.$$

Tenemos la acotación

$$\left|E_{SC}^{(m)}\right| \leq \frac{b-a}{180}h^4 M_4, \quad h = \frac{b-a}{2m},$$

$$M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Hemos visto en el Ejemplo 2.2 que

$$M_4 = \max_{x\in[1,2]} \left|f^{(4)}(x)\right| = 2,$$

entonces

$$\left|E_{SC}^{(m)}\right| \leq \frac{1}{180}h^4 \cdot 2.$$

Exigimos

$$\frac{1}{180}h^4 \cdot 2 \leq 0.5 \times 10^{-4},$$

$$h^4 \leq \frac{180 \cdot \left(0.5 \times 10^{-4}\right)}{2} = 0.00\,45,$$

$$h \leq \sqrt[4]{0.0\,045} = 0.\,259.$$

Como

$$h = \frac{2-1}{2m} = \frac{1}{2m},$$

resulta

$$\frac{1}{2m} \leq 0.\,259 \quad \Rightarrow \quad m \geq \frac{1}{2 \cdot 0.\,259} = 1.\,9305.$$

Necesitamos tomar $m = 2$. Se trata de Simpson doble, con $2m = 4$ subintervalos.

2. Valor de la aproximación.
Con $m = 2$, resulta

$$h = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Los nodos son

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1.25,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 1.75,\ x_4 = 2.$$

La fórmula de Simpson doble es

$$\begin{aligned} F_{SC}^{(2)} &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_4) + 2\sum_{j=1}^{1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{2} f(x_{2j-1})\right] \\ &= \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + f(x_4) + 2f(x_2) + 4\left[f(x_1) + f(x_3)\right]\right\}, \end{aligned}$$

en concreto

$$\begin{aligned} F_{SC}^{(2)} &= \frac{0.25}{3}\left[(1\ln 1 + 2\ln 2) + 2(1.5\ln 1.5) + 4(1.25\ln 1.25 + 1.75\ln 1.75)\right] \\ &= \frac{0.25}{3}\, 7.63571\,8 = 0.63630\,98. \end{aligned}$$

3. Error exacto.

$$I = \int_1^2 x\ln x\, dx = 0.63629\,44.$$

$$\left|E_{SC}^{(2)}\right| = \left|I - F_{SC}^{(2)}\right| = |0.63629\,44 - 0.63630\,98| = 0.154 \times 10^{-4}. \quad \square$$