INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Los métodos de integración numérica se pueden utilizar para integrar funciones dadas, ya sea mediante una tabla o en forma analítica.

Integral definida de una función continua:

$$f: [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Los métodos de integración numérica se obtienen al integrar los polinomios de interpolación

Integración de una sola variable. $f(x)$ en $[a,b]$

1) La función $f(x)$ se conoce solo en ciertos puntos $x_i \in [a,b]$

2) " " " conoce en forma explícita para calcular la función en cualquier punto.

El problema está en calcular:

$$I : \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{o} \quad I_N = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f(x_k)$$

↳ ptos que $\in [a,b]$

FORMULA DE LOS RECTÁNGULOS

- Construir una función que interpole en el punto medio.
- En grado cero es una constante.

$f(x)$ se cambia por $\cong f(x_{i-1/2})$ ← función interpolante

y en vez de calcular $f(x)$ se calcula

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(_{i-1/2})\,dx \cong f(x_{i-1/2})\,h \quad ; \quad h = x_i - x_{i-1}$$

por ser intervalo constante.

$$x_{i-1/2} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

Se quiere evaluar el error:

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(x_{i-1/2})\,h$$

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1/2})]\,dx$$

Con ayuda de la formula de Taylor:

$$f(x) = f(x_{i-1/2}) + (x - x_{i-1/2}) f'(x_{i-1/2}) + (x - x_{i-1/2})^2 f''(\xi_i)$$

$$\xi_i = \xi_i(x) \in [x_{i-1}, x_i]$$

Reemplazando en la integral se obtiene:

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1/2}) f'(x_{i-1/2}) + \frac{(x - x_{i-1/2})^2}{2} f''(\xi_i)\,dx$$

Evaluar

$t = x - x_{i-1/2} = x - \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$, $dx = dt$

si $x \to x_{i-1}$; $t \to -\frac{1}{2}h$; $x_{i-1} - \frac{x_i}{2} - \frac{x_{i-1}}{2} = -\frac{x_i}{2} + \frac{x_{i-1}}{2}$

$x \to x_i$; $t \to \frac{1}{2}h$; $h = x_i - x_{i-1}$; $x_i - \frac{x_i}{2} - \frac{x_{i-1}}{2} = \frac{x_i}{2} - \frac{x_{i-1}}{2}$

$$\varphi_i = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} t f'(x_{i-1/2})\,dt + \frac{t^2}{2} f''(x_{i-1/2})\,dt = 0$$

$$= \frac{t^2}{2} f'(x_{i-1/2}) \Big|_{-1/2h}^{1/2h} + \int_{-1/2h}^{1/2h} t^2 f''(x_{i-1/2})\,dt$$

$$= f'(x_{i-1/2}) \left[\frac{(1/2)^2}{2} - \frac{(-1/2)^2}{2}\right] + \int_{-1/2h}^{h} \frac{t^2}{2} f''(x_{i-1/2})\,dt$$

$\varnothing$

Si $M = \max\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$

$$|\varphi_i| \le \int_{-1/2h}^{1/2h} M \cdot \frac{t^2}{2}\,dt = 2\int_0^{1/2h} M \frac{t^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^{1/2h} = \frac{h^3}{24} M$$

Formula de integración de Newton - Cotes

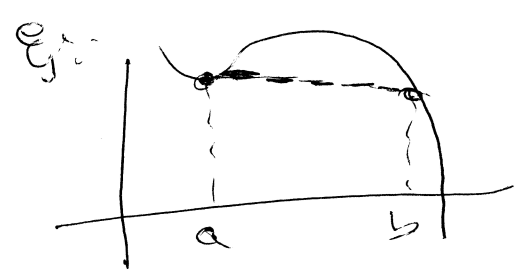
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

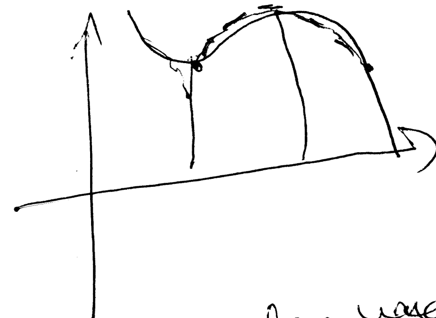
donde:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

n grado del polinomio

Ej.:





Polinomio de 1er grado

Se emplea una parabola

FORMULA DE LOS TRAPECIOS ~~PARA LA REGLA DEL TRAPECIO~~
~~FORMULA~~

Es la 1a de las fórmulas cerradas de integración de Newton Cotes. polinomio de 1er grado:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx$$

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

El área bajo esta línea recta es una aprox. de la integral de f(x) entre los límites a y b:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx$$

Para integrar:

$$f_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - \frac{af(b)-af(a)}{b-a}$$

$$f_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b-a}$$

$$f_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

Integrando;

$$I = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2} + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}x\right]_a^b$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b^2-a^2)}{2} + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}(b-a)$$

Como $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

$$I = \left(f(b)-f(a)\right)\frac{(b+a)}{2} + bf(a) - af(b)$$

$$= \frac{(f(b)-f(a))(b+a) + 2bf(a) - 2af(b)}{2}$$

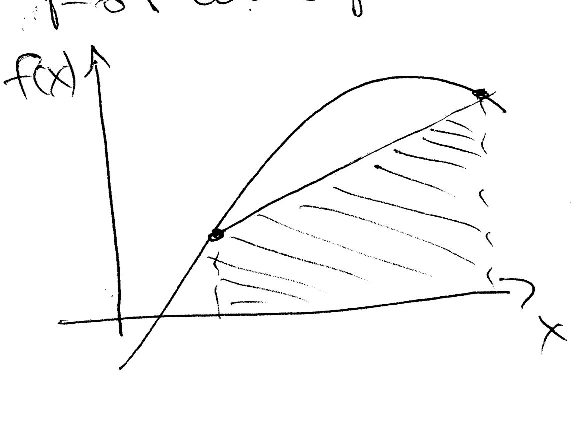
$$= \frac{bf(b) - bf(a) + af(b) - af(a) + 2bf(a) - 2af(b)}{2}$$

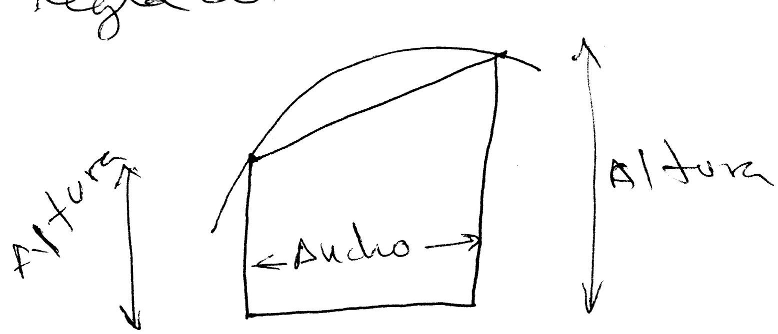
$$= \frac{bf(b) + bf(a) - af(b) - af(a)}{2}$$

$$= \frac{(b-a)(f(b)) + (b-a)f(a)}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}}$$

Fórmula para la regla del trapecio.





$I \equiv$ Ancho x altura promedio

o $I \equiv (b-a) \times$ " "

Para hallar el error se tiene:

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - L_{1,i}]\,dx$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \simeq \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{1,i}\,dx \quad 69/$$

Teniendo en cuenta que:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Se obtiene

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{2} f''(\xi_i)\,dx \leq$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{2} M\,dx$$

$t = x - x_i \;;\; x = t + x_i$

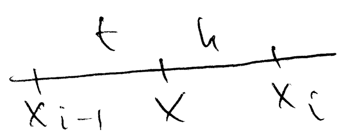
si $x \to x_{i-1} \;;\; t \to -h$

si $x \to x_i \;;\; t \to 0$

$h = x_i - x_{i-1}$

$(x - x_i) + (x_i - x_{i-1}) = (x - x_{i-1})$

$(t + h)$



$$\int_{-h}^{0} \frac{t(t+h)}{2} M\,dt$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}h\right)\Big|_{-h}^{0} M$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{2}\right) M$$

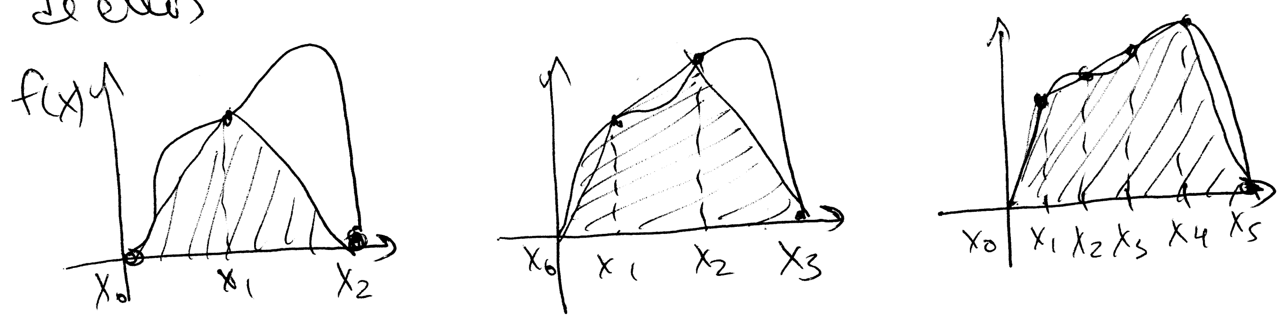
$$\frac{1}{2}\left(\frac{-h^3}{3} + \frac{h^2}{2}h\right) M$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-2h^3 + 3h^3}{6}\right) M$$

$$|\varphi| \leq \frac{h^3}{12} M$$

La regla del trapecio de aplicación múltiple

Consiste en dividir el intervalo de integración de a a b en varios segmentos y aplicar el método a cada uno de ellos



Las ecuaciones resultantes se llaman fórmulas de integración, de aplicación múltiple o compuestas.

Hay $n+1$ puntos igualmente espaciados $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

En consecuencia, existen n segmentos del mismo ancho:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Si a y b se designan como x_0 y x_n, la integral completa se representará como:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla del trapecio en cada integral se obtiene

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

ó

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

En forma general:

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{altura promedio.}}$$

Error de la regla del trapecio de aplicación múltiple:

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

Ejemplo Usar la regla del trapecio con dos segmentos para estimar la integral de:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a=0$ hasta $b=0.8$. Estimar el error.

El valor correcto es 1.640533

SOL

$n = 2 \quad (h = 0.4)$

$f(0) = 0.2$

$f(0.4) = 2.456$

$f(0.8) = 0.232$

$$I = 0.8 \cdot \frac{0.2 + 2(2.456) + 0.232}{4} = 1.0688$$

$\text{Error}_1 = 1.640533 - 1.0688 = 0.57137 \quad \varepsilon_t = 34.9\%$

$$\text{Error}_a = -\frac{(0.8)^3}{12\cdot(2)^3}(-60) = 0.64$$