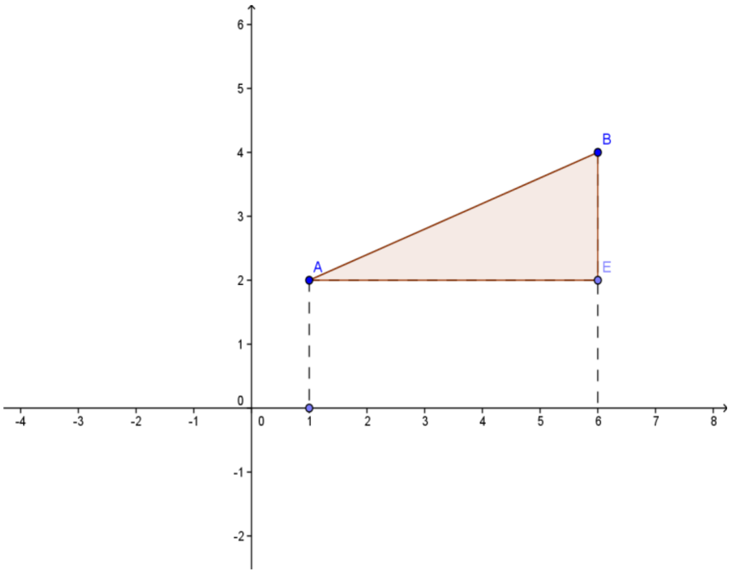
Geometría Analítica en el plano

Recordemos: Distancia entre dos puntos:

En general, consideraremos el problema de hallar la longitud de un segmento AB, siendo $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$. Hallaremos la distancia desde A hasta B.



El problema se resuelve de la misma forma que en el planteo inicial por aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo sombreado.

$$AB^2 = EA^2 + EB^2$$

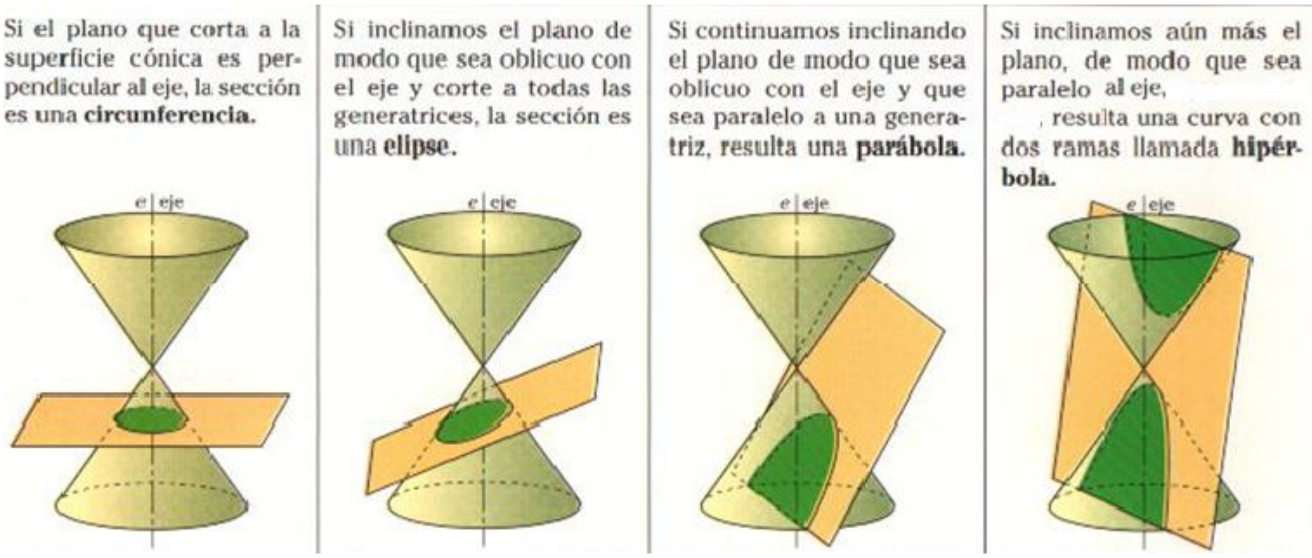
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

La distancia entre dos puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ .del plano es:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

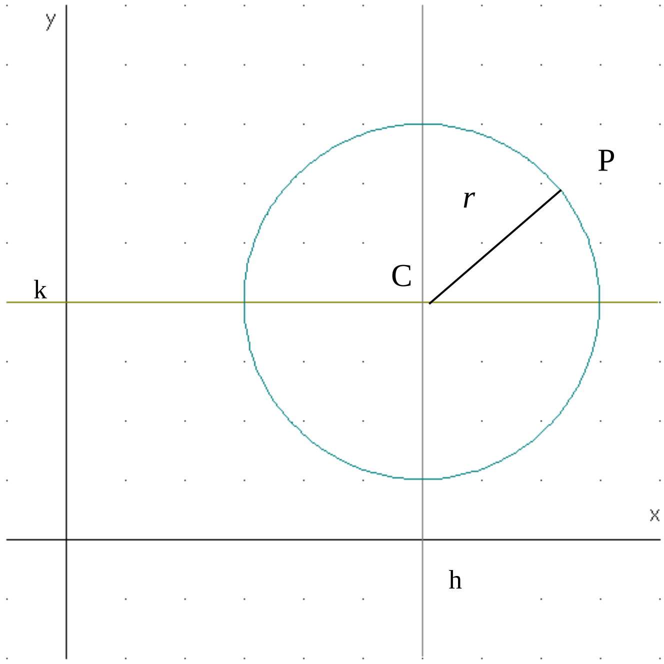
Secciones cónicas

Una sección cónica es la curva que resulta de la intersección de un plano con un cono circular recto doble. Estas curvas, también llamadas cónicas, son la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Se obtienen según las distintas posiciones del plano con respecto al eje del cono.



Circunferencia:

Definición: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. La distancia constante se llama **radio**.



Ecuación cartesiana de la circunferencia

Sea P(x, y) un punto cualquiera de la circunferencia de centro C (h, k) y radio r. Por definición de circunferencia el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$\left|\overline{CP}\right| = r$, (la distancia del punto al centro debe ser igual al radio) (1)

Por definición de distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevando ambos miembros al cuadrado, resulta la ecuación cartesiana de la circunferencia

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2} \quad (2)$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2), pertenece a la circunferencia

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2$$

aplicando raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2} = r$$

$\left|\overline{CP_1}\right| = r$, $P_1(x_1, y_1)$ satisface la ecuación (1)

De lo que se deduce que el punto pertenece a la circunferencia.

Corolario: La circunferencia de centro en el origen y radio *r* tiene por ecuación:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Forma general de la ecuación de la circunferencia:

Si se desarrolla la ecuación cartesiana de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, se obtiene:

$$x^2 - 2.x.h + h^2 + y^2 - 2.y.k + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2.h.x - 2.k.y + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Considerando:

$$D = -2.h$$
$$E = -2.k \qquad ,$$
$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

resulta: $\boxed{x^2 + y^2 + D.x + E.y + F = 0}$ (3)

que es la forma general de la ecuación de la circunferencia.

El problema que se presenta ahora es averiguar si, recíprocamente, toda ecuación de la forma general (3) representa una circunferencia.

Ordenando los términos de (3), resulta:

$$\left(x^2 + D.x\right) + \left(y^2 + E.y\right) = -F\,,$$

para completar trinomios cuadrados perfectos sumamos a ambos miembros de la igualdad $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$

$$\left(x^2 + D.x + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + E.y + \frac{E^2}{4}\right) = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

$$\boxed{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4.F}{4}} \qquad (4)$$

Comparando las ecuaciones (2) y (4), vemos que según el valor del segundo miembro de (4), la ecuación (3) representa o no una circunferencia.

Hay tres casos posibles a considerar:

a) $D^2 + E^2 - 4.F > 0$, en este caso la ecuación (3) representa una circunferencia con centro en $\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ y radio igual a $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{D^2 + E^2 - 4.F}$

b) $D^2 + E^2 - 4.F = 0$, la ecuación (3) representa al punto $\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$

c) $D^2 + E^2 - 4.F < 0$, la ecuación (3) no representa a un lugar geométrico.

<u>Conclusión</u>: la ecuación: $A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.y + F = 0$, representa a una circunferencia sólo si $A = B = 1$ y $D^2 + E^2 - 4.F > 0$.

<u>Ejercicios resueltos</u>:

1. Escribir la ecuación de la circunferencia con centro C (-3, -5) y radio 7.
2. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos A (2, 3) y B (-4; 5). Hallar su ecuación, indicar el centro y el radio.
3. Determinar si la ecuación representa una circunferencia, en caso afirmativo, encontrar el centro y el radio.

   $2.x^2 + 2.y^2 - 6.x + 10.y + 7 = 0$

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en C(0, -2) y es tangente a la recta 5.x - 12.y +2 = 0

Respuestas:

1. La ecuación de la circunferencia de centro C(h, k) y radio r dado es: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

   En este caso (h, k) = (-3; -5) y r = 7

   la ecuación resultante es:

   $(x-(-3))^2+(y-(-5))^2=7^2$

   $(x+3)^2+(y+5)^2=49$

2. El punto medio del diámetro es el centro de la circunferencia: $x_m=\dfrac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow x_m=\dfrac{2+(-4)}{2}=-1$

   $y_m=\dfrac{y_1+y_2}{2} \Rightarrow y_m=\dfrac{3+5}{2}=4$

   luego las coordenadas del centro son: C(-1; 4)

   Para hallar el radio existe más de un camino. Una opción es tener en cuenta que la longitud del radio es la mitad de la del diámetro, entonces por fórmula de distancia entre dos puntos:

   $\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(5-3)^2}$

   $\overline{AB}=\sqrt{36+4} \Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{40}$

   $r=\dfrac{\overline{AB}}{2} \Rightarrow r=\dfrac{2.\sqrt{10}}{2}$

   $r=\sqrt{10}$

   Por lo tanto la ecuación de la circunferencia es:

   $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

3. Dada $2.x^2+2.y^2-6.x+10.y+7=0$, en primer término dividimos ambos miembros por 2:

   $x^2+y^2-3.x+5.y+\dfrac{7}{2}=0$, asociamos los términos en x y los términos en y y completamos cuadrados

$$\left(x^2-3.x\right)+\left(y^2+5.y\right)=-\frac{7}{2}$$

$$\left(x^2-3.x+\frac{9}{4}\right)+\left(y^2+5.y+\frac{25}{4}\right)=-\frac{7}{2}+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=5$$

la ecuación dada representa a la circunferencia de centro $C\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$ y radio $r=\sqrt{5}$

4. C(0, -2) y tangente a la recta 5.*x* - 12.*y* +2 = 0

   la ecuación que buscamos es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, si la recta es tangente a la circunferencia significa que tienen un punto en común, por otro lado el radio y la recta tangente son perpendiculares en el punto de tangencia

$$\begin{cases} y+2=-\frac{12}{5}\cdot\left(x-0\right)\Rightarrow y=-\frac{12}{5}\cdot x-2 \\ y=\frac{5.x+2}{12}\Rightarrow y=\frac{5}{12}\cdot x+\frac{1}{6} \end{cases}$$

   resolviendo el sistema

$$-\frac{12}{5}.x-2=\frac{5}{12}\cdot x+\frac{1}{6}$$

$$-\frac{12}{5}.x-\frac{5}{12}\cdot x=\frac{1}{6}+2$$

$$-\frac{169}{60}\cdot x=\frac{13}{6}\Rightarrow x=-\frac{10}{13}$$

$$y=-\frac{12}{5}\cdot\left(-\frac{10}{13}\right)-2\Rightarrow y=-\frac{2}{13}$$

   hemos obtenido las coordenadas del punto de tangencia, el cual pertenece a la circunferencia, luego

$$\left(-\frac{10}{13}\right)^2+\left(-\frac{2}{13}+2\right)^2=r^2$$

$$\frac{100}{169}+\frac{576}{169}=r^2\Rightarrow r^2=\frac{676}{169}\Rightarrow r^2=4$$

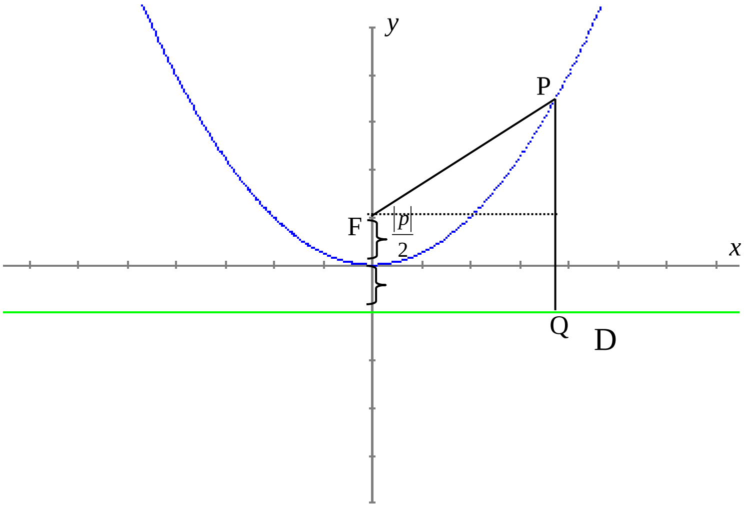
   , por lo tanto la ecuación de la circunferencia que buscamos es:

$$x^2+\left(y+2\right)^2=4$$

Parábola

El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo, exterior a ella, recibe el nombre de parábola. Al punto fijo se le llama foco y a la recta fija, directriz.

Ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas:



Sea P (x, y) un punto que pertenece a la parábola, por definición y aplicando fórmula de distancia entre dos puntos:

$$|PQ| = |PF| \Rightarrow \left|y + \frac{p}{2}\right| = \left|\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}\right|$$

elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2 + p.y + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - p.y + \frac{p^2}{4}$$

$$2.p.y = x^2$$

$$y = \frac{1}{2.p} \cdot x^2$$

Si hacemos: $\frac{1}{2.p} = a \Rightarrow y = a.x^2$, con $a \neq 0$

Si el parámetro p es positivo la parábola tiene un mínimo, en caso contrario, un máximo.

Observación:

Del mismo modo, se demuestra que la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco en el eje de abscisas es:

$$x = \frac{1}{2.p} \cdot y^2$$

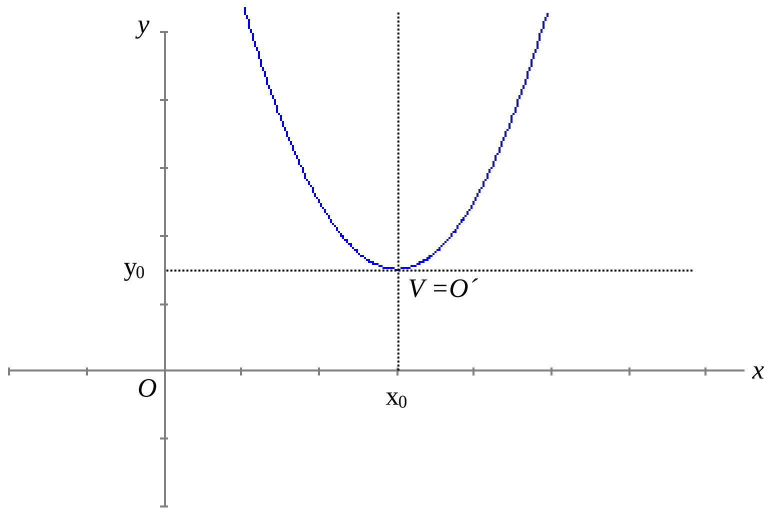
Elementos:

- Directriz: es la recta fija dada.
- Foco: es el punto fijo dado.
- Eje: es la recta perpendicular a la directriz trazada por el foco
- Vértice: es el punto medio del segmento que representa la distancia del foco a la directriz
- Parámetro (p): el valor absoluto del parámetro p, está dado por la distancia entre el foco y la directriz.

Ecuación de la parábola de vértice $V(x_0; y_0)$, eje paralelo al eje de ordenadas y parámetro "p"

La ecuación $y = \frac{1}{2.p}.x^2$ representa una parábola de eje vertical con vértice en el origen.

Si el vértice es el punto $O'(x_0; y_0)$, consideremos un sistema de coordenadas $x'y'$ con origen en O', trasladado del anterior. Respecto del sistema $O'x'y'$, la ecuación es de la forma:



$$y' = \frac{1}{2.p}.x'^2 \qquad (1)$$

En el sistema oxy:

$$x' = x - x_0 \qquad (2)$$
$$y' = y - y_0$$

Reemplazando en (1) por (2):

$$\boxed{y - y_0 = \frac{1}{2.p} \cdot (x - x_0)^2}$$

que es la ecuación de la parábola con vértice $V(x_0; y_0)$ y eje paralelo al eje de ordenadas, de ecuación $x = x_0$.

Del mismo modo, la parábola con vértice $V(x_0; y_0)$ y eje paralelo al eje de abscisas es:

$$\boxed{x - x_0 = \frac{1}{2.p} \cdot (y - y_0)^2}$$

<u>Ecuación general de la parábola</u>

Desarrollando la ecuación:

$$y - y_0 = \frac{1}{2.p} \cdot (x - x_0)^2$$
$$y - y_0 = \frac{1}{2.p} \cdot (x^2 - 2.x.x_0 + x_0{}^2)$$
$$y - y_0 = \frac{1}{2.p} \cdot x^2 - \frac{1}{2.p} \cdot 2.x.x_0 + \frac{1}{2.p} \cdot x_0{}^2$$
$$y = \frac{1}{2.p} \cdot x^2 + \left(-\frac{x_0}{p}\right) \cdot x + \left(\frac{1}{2.p} \cdot x_0^2 + y_0\right)$$

haciendo: $\frac{1}{2.p} = a; -\frac{x_0}{p} = b \wedge \left(\frac{1}{2.p} \cdot x_0{}^2 + y_0\right) = c$, resulta:

$$y = a.x^2 + b.x + c$$

<u>Conclusión</u>: toda función polinómica entera de segundo grado, tiene por gráfica una parábola que según *a* sea positivo o negativo tiene un máximo o un mínimo.

<u>Coordenadas del vértice de la parábola de ecuación general $y = a.x^2 + b.x + c$</u>

Si $y = a.x^2 + b.x + c$, trataremos de llegar a la forma $y - y_0 = \frac{1}{2.p} \cdot (x - x_0)^2$

$$y-c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)$$
$$y-c+\frac{b^2}{4.a}=a.\left(x^2+\frac{b}{a}.x+\frac{b^2}{4.a^2}\right)$$
$$y-\left(c-\frac{b^2}{4.a}\right)=a.\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2$$
$$y-\frac{4.a.c-b^2}{4.a}=a.\left(x-\left(-\frac{b}{2.a}\right)\right)^2$$

Por lo que las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-\frac{b}{2.a};\frac{4.a.c-b^2}{4.a}\right)$$

El eje de esta parábola tiene por ecuación: $x=-\frac{b}{2.a}$

Ejercicios resueltos:

1. Escribe la ecuación de la parábola que tiene vértice en (4;5) y foco (3;5)
2. Obtiene la ecuación de la parábola cuyo foco está en $\left(-\frac{3}{4};2\right)$ y cuya directriz es $x=\frac{3}{4}$
3. Escribe la ecuación de la parábola que tiene vértice en el centro de la circunferencia $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ y su directriz es la recta de ecuación $y-10=0$
4. Hallar la ecuación de la parábola de vértice (-1, 2), eje de simetría paralelo al eje y, que pasa por el punto (-3, 1).
5. Determinar el vértice, el foco y la directriz de la parábola $6.y^2+36.y+5.x+29=0$

Respuestas:

1. Ubicando el vértice y el foco de la parábola en un sistema de ejes coordenados cartesianos, observamos que el eje de la misma es paralelo al eje de abscisas y que la parábola se abre hacia la izquierda. Por esto, la ecuación es de la forma:

   $x-x_0=\frac{1}{2.p}\cdot(y-y_0)^2$ y el parámetro p es negativo

   la distancia entre el vértice y el foco es $\left|\frac{p}{2}\right|$, en este caso:

   $\left|\frac{p}{2}\right|=1\Rightarrow p=-2$, reemplazando en la ecuación:

$$x-4=\frac{1}{2.(-2)}\cdot(y-5)^2$$

$$x-4=-\frac{1}{4}\cdot(y-5)^2$$

2. Teniendo en cuenta que la directriz es una recta paralela al eje de ordenadas, sabemos que el eje de la parábola será paralelo al eje de abscisas. Además la distancia entre el foco y la directriz es el valor absoluto del parámetro p y el vértice está a mitad de esa distancia y alineado con el foco perpendicularmente a la directriz.
   Luego:
   $$|p|=\frac{3}{2}$$
   El foco está a la izquierda de la directriz, la parábola se abre hacia la izquierda, entonces el parámetro es negativo.
   El vértice es $(0;2)$
   La ecuación es: $x-0=\dfrac{1}{2.\left(-\dfrac{3}{2}\right)}\cdot(y-2)^2 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}\cdot(y-2)^2$
3. El vértice de la parábola es (-1; 2), y el eje es paralelo al eje de ordenadas, por lo que buscamos una ecuación de la forma:
   $$y-y_0=\frac{1}{2.p}\cdot(x-x_0)^2$$
   $$y-2=\frac{1}{2.p}\cdot(x+1)^2$$
   la distancia entre el vértice y la directriz es $\left|\dfrac{p}{2}\right|$, luego:
   $\left|\dfrac{p}{2}\right|=8 \Rightarrow p=-16$, además, debe ser negativo porque el vértice se ubica "debajo" de la directriz, la parábola tiene un máximo. Su ecuación es:
   $$y-2=\frac{1}{-32}\cdot(x+1)^2$$
4. La ecuación es de la forma:
   $y-y_0=\dfrac{1}{2.p}\cdot(x-x_0)^2$ porque su eje de simetría es paralelo al eje y
   su vértice es (-1, 2) y pasa por el punto (-3, 1), es decir que este punto verifica la ecuación.
   Reemplazando:
   $$1-2=\frac{1}{2.p}\cdot(-3+1)^2$$
   $$-1=\frac{1}{2.p}\cdot 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{1}{p} \Rightarrow p=-2$$
   Por lo que la ecuación resultante es:
   $$y-2=-\frac{1}{4}\cdot(x+1)^2$$

5. Dada $6.y^2+36.y+5.x+29=0$, asociaremos términos convenientemente

$$\left(6.y^2+36.y\right)=-5.x-29$$

$$6.\left(y^2+6.y\right)=-5.x-29$$

completamos un trinomio cuadrado perfecto

$$6.\left(y^2+6.y+9\right)=-5.x-29+54$$

$$6.(y+3)^2=-5.x+25$$

$$6.(y+3)^2=-5.(x-5)$$

$$-\frac{6}{5}\cdot(y+3)^2=x-5 \Rightarrow x-5=-\frac{6}{5}\cdot(y+3)^2$$

es la ecuación de una parábola de eje horizontal, con vértice (5; -3)

$$\frac{1}{2.p}=-\frac{6}{5} \Rightarrow 2.p=-\frac{5}{6} \Rightarrow p=-\frac{5}{12} \therefore \frac{p}{2}=-\frac{5}{24}$$

luego las coordenadas del foco son: $\left(5-\frac{5}{24};-3\right)=\left(\frac{115}{24};-3\right)$

la directriz es de ecuación: $x=5+\frac{5}{24} \Rightarrow x=\frac{125}{24}$

Elipse:

Definición: Una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano, llamados focos, es siempre igual a una constante (2.*a*).

Relación entre *a* y *c*:

Sea $\overline{F_1F_2} = 2.c$ (distancia entre los focos, *c* es semidistancia focal)

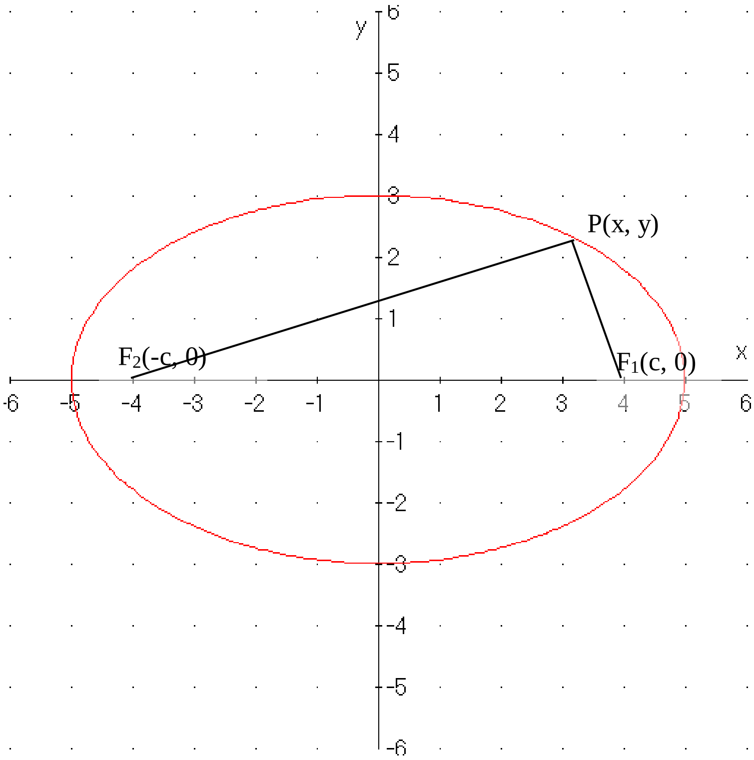
Por definición, si *P* pertenece a la elipse se debe cumplir $\left|\overline{PF_1}\right| + \left|\overline{PF_2}\right| = 2.a$

En el triángulo $F_1\overset{\Delta}{F_2}P$, por propiedad triangular, se verifica que:

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2} \Rightarrow 2.a > 2.c \Rightarrow a > c$

Ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas

Por definición todo punto de la elipse debe satisfacer la condición geométrica



$$\left|\overline{PF_1}\right| + \left|\overline{PF_2}\right| = 2.a$$, en donde *a* es una constante positiva mayor que *c*

P tiene por coordenadas (*x*, *y*), F_1 (*c*, 0) y F_2 (-*c*, 0), en consecuencia, por aplicación del concepto de distancia, resulta:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2.a$$

Restando a ambos miembros de la igualdad $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ y elevando ambos miembros de la ecuación resultante al cuadrado:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2.a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4.a^2 - 4.a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

cancelando y^2, desarrollando los cuadrados y asociando convenientemente, resulta:

$$x^2+2.x.c+c^2 = 4.a^2 - 4.a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2.x.c + c^2$$
$$4.a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4.a^2 - 4.x.c$$
$$a.\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - x.c$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$a^2.\left(x^2-2.x.c+c^2+y^2\right) = x^2.c^2 - 2.x.c.a^2 + a^4$$
$$a^2.x^2 - 2.x.c.a^2 + a^2.c^2 + a^2.y^2 = x^2.c^2 - 2.x.c.a^2 + a^4$$
$$a^2.x^2 - x^2.c^2 + a^2.y^2 = a^4 - a^2.c^2$$

asociando, extrayendo factor común y teniendo en cuenta que $a^2-c^2=b^2$ (por ser un número positivo ya que $a > c$)

$$x^2.\left(a^2-c^2\right) + a^2.y^2 = a^2.\left(a^2-c^2\right)$$
$$x^2.b^2 + a^2.y^2 = a^2.b^2$$

dividiendo ambos miembros de la igualdad por $a^2.b^2$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

que es la ecuación buscada.

Elementos de la elipse:

Vértices: son los puntos de intersección de la elipse con los ejes de coordenadas.

Intersecciones con el eje de abscisas ($y = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2$$

las intersecciones con este eje son: $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a; 0)$

Intersecciones con el eje de ordenadas ($x = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2$$

las intersecciones con este eje son: $B_1(0; b)$ y $B_2(0; -b)$

Focos: $F_1(c; 0)$ y $F_2(- c; 0)$

Longitud del eje mayor: $2.a$

Longitud del eje menor: $2.b$

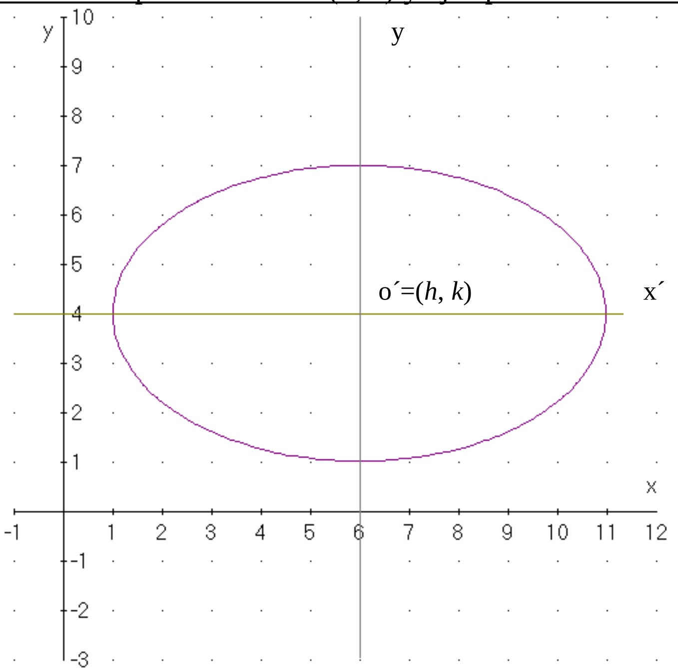
Excentricidad: es el cociente $e = \dfrac{c}{a}$, como se verifica que $c < a$, la excentricidad de una elipse es menor que 1.

Relación entre a, b y c:
Siendo $a^2 - c^2 = b^2$, resulta $a^2 = c^2 + b^2$, con lo que a, b y c verifican la relación pitagórica.

Observaciones:

- ✓ Si $a = b$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=a^2$, obtenemos la ecuación de la circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio a. En este caso, $c = 0$, con lo que la excentricidad es 0 y la circunferencia se podría definir como una elipse de focos coincidentes, $F_1 = F_2 = (0; 0)$.
- ✓ Si en la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ es:
  a) $a > b$, el eje focal es el eje de abscisas.
  b) $a < b$, el eje focal es el eje de ordenadas; en consecuencia los focos son F_1 $(0; c)$ y F_2 $(0; - c)$, la relación entre a, b y c es $b^2 = a^2 + c^2$, la longitud del eje mayor es $2.\ b$, la longitud del eje menor es $2.a$ y la excentricidad es $e = \dfrac{c}{b}$.

Ecuación de la elipse con centro (h, k) y ejes paralelos a los ejes de coordenadas



Consideraremos la elipse cuyo centro está en el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje de abscisas. Sean $2.a$ y $2.b$ las longitudes de los ejes, mayor y menor, respectivamente. Si los ejes de coordenadas son trasladados de manera que el nuevo origen coincida con el centro de coordenadas (h, k) de la elipse, la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes está dada por

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Pero para cualquier (x, y),

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

Luego:
$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned} \qquad (2)$$

Reemplazando en (1) por (2):

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

<u>Ejercicios resueltos:</u>

1. Hallar los elementos de la elipse de ecuación $4.x^2 + 9.y^2 = 36$.
2. Los vértices de una elipse son $(0;\pm 6)$ y sus focos son $(0;\pm 4)$. Hallar su ecuación.
3. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje de abscisas. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6};-1)$ y $(2;\sqrt{2})$.
4. Los focos de una elipse son los puntos (3; 8) y (3; 2), y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación, las coordenadas de sus vértices y la excentricidad.
5. Determinar los elementos de la elipse cuya ecuación es $4.x^2 + 9.y^2 + 32.x - 18.y + 37 = 0$

<u>Respuestas</u>:

1. Dada $4.x^2 + 9.y^2 = 36$, dividimos ambos miembros de la igualdad por 36

   $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; entonces:

   $$a = 3; b = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$
   $$c^2 = 9 - 4$$
   $$c = \sqrt{5}$$

   Por lo tanto,

   vértices son: $A(\pm 3;0)$ y $B(0;\pm 2)$

   focos: $F\left(\pm\sqrt{5};0\right)$

   excentricidad: $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

long. del eje mayor: 6

long. del eje menor: 4

2. De acuerdo a los datos, los focos se encuentran sobre el eje de ordenadas, con lo que la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y la relación entre a, b y c es $c^2=b^2-a^2$ $b=6; c=4 \Rightarrow b^2=c^2+a^2 \Rightarrow a^2=36-16 \Rightarrow a^2=20$, luego la ecuación buscada es: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$

3. Si la elipse pasa por $(\sqrt{6};-1)$ y $(2;\sqrt{2})$, estos puntos verifican su ecuación:

$$\begin{matrix} \frac{6}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1 \end{matrix}$$

la solución de este sistema de ecuaciones nos permitirá encontrar la ecuación buscada

$$\frac{6}{a^2}=\frac{b^2-1}{b^2} \Rightarrow a^2=\frac{6.b^2}{b^2-1} \quad (1)$$

$$\frac{4}{a^2}=\frac{b^2-2}{b^2} \Rightarrow a^2=\frac{4.b^2}{b^2-2} \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$\frac{6.b^2}{b^2-1}=\frac{4.b^2}{b^2-2} \Rightarrow 6.(b^2-2)=4.(b^2-1)$$ podemos simplificar porque $b^2 \neq 0$

$$2.b^2=-4+12 \Rightarrow b^2=4$$

reemplazando en (1):

$$a^2=\frac{6.4}{4-1} \Rightarrow a^2=8$$

con lo que la ecuación es: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

4. Esta elipse tiene ejes paralelos a los ejes de coordenadas. Por la localización de los focos (3; 8) y (3; 2), sabemos que el eje focal es paralelo al eje de ordenadas y la distancia entre los focos es 2.c = 6, luego la longitud de su eje menor es 2.a = 8 y el centro de la elipse es el punto medio entre los focos (3; 5)

$$a=4; c=3 \Rightarrow b^2=16+9 \Rightarrow b^2=25 \Rightarrow b=5,$$

la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$$

sus vértices son (-1; 5), (7;5), (3; 10) y (3; 0)

la excentricidad $e=\frac{3}{5}$

Llevaremos la ecuación

$4.x^2+9.y^2+32.x-18.y+37=0$ a la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

asociamos los términos en *x*; los términos en *y*, y extraemos factor común según corresponda

$4.(x^2+8.x)+9.(y^2-2.y)=-37$

completamos cuadrados

$4.(x^2+8.x+16)+9.(y^2-2.y+1)=-37+64+9$

$4.(x+4)^2+9.(y-1)^2=36$

dividimos ambos miembros de la ecuación por 36

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

Centro (-4; 1)

Vértices: (-7; 1), (-1; 1), (1; -1); (1; 3)

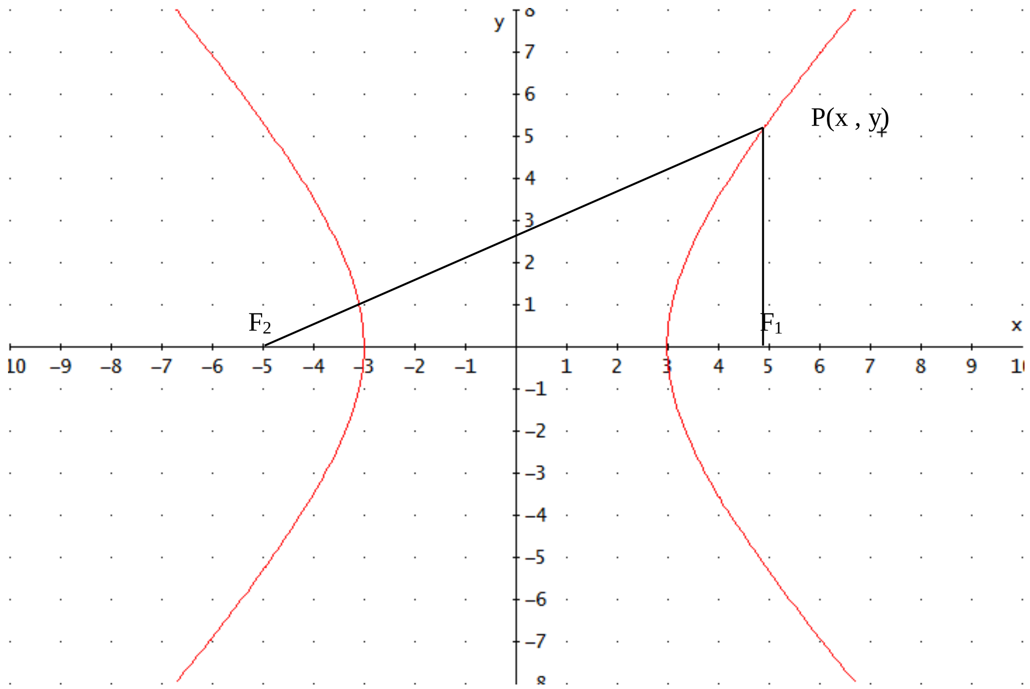
Focos: $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$; $\left(-4-\sqrt{5};1\right),\left(-4+\sqrt{5};1\right)$

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Hipérbola

Se llama así al lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante

Ecuación cartesiana de la hipérbola con centro en el origen y focos en el eje de abscisas



Sea la hipérbola de focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ y $P(x, y)$, un punto de la misma; por definición

$$\left| \overline{PF}_1 - \overline{PF}_2 \right| = 2.a \text{ , con } a > 0 \wedge c > 0 \qquad (1)$$

Además para que exista por lo menos un punto de la curva que no esté en el eje x debe ser $2.c > 2.a$, con lo que $c > a$

Aplicando distancia entre dos puntos resulta:

$$\left| \sqrt{y^2 + (x+c)^2} - \sqrt{y^2 + (x-c)^2} \right| = 2.a$$

$$\sqrt{y^2 + (x+c)^2} - \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = \pm 2.a$$

Sumamos $\sqrt{y^2 + (x-c)^2}$ a ambos miembros de la igualdad y elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad resultante

$$\left(\sqrt{y^2+(x+c)^2}\right)^2=\left(\sqrt{y^2+(x-c)^2}\pm 2.a\right)^2$$

$$y^2+(x+c)^2=y^2+(x-c)^2+4.a^2\pm 4.a.\sqrt{y^2+(x-c)^2}$$

$$x^2+2.x.c+c^2=x^2-2.x.c+c^2+4.a^2\pm 4.a.\sqrt{y^2+(x-c)^2}$$

$$4.x.c-4.a^2=\pm 4.a.\sqrt{y^2+(x-c)^2}$$

$$4.\left(x.c-a^2\right)=\pm 4.a.\sqrt{y^2+(x-c)^2}$$

$$x.c-a^2=\pm .a.\sqrt{y^2+(x-c)^2}$$

elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\left(x.c-a^2\right)^2=\left(\pm .a.\sqrt{y^2+(x-c)^2}\right)^2$$

$$x^2.c^2-2.x.c.a^2+a^4=a^2.\left(y^2+x^2-2.x.c+c^2\right)$$

$$x^2.c^2-2.x.c.a^2+a^4=y^2.a^2+x^2.a^2-2.x.c.a^2+c^2.a^2$$

$$x^2.c^2-x^2.a^2-y^2.a^2=c^2.a^2-a^4$$

$$x^2.\left(c^2-a^2\right)-y^2.a^2=a^2.\left(c^2-a^2\right)$$

como $c>a\Rightarrow c^2>a^2$, hacemos $c^2-a^2=b^2$ y reemplazamos

$$x^2.b^2-y^2.a^2=a^2.b^2$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación por $a^2.b^2$

$$\frac{x^2.b^2}{a^2.b^2}-\frac{y^2.a^2}{a^2.b^2}=\frac{a^2.b^2}{a^2.b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (1)$$

obtenemos la ecuación cartesiana de la hipérbola.

<u>Significado de *a* y *b*</u>

En la ecuación (1), para $y=0\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a$, luego los puntos $(a;0)\wedge(-a;0)$ pertenecen a la hipérbola y son los vértices de la misma; para $x = 0$: $y^2=-b^2\Rightarrow y=\pm bi$
a es el semieje real y *b* es el semieje imaginario.

<u>Observación</u>:

Si la ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, el eje focal es el eje de abscisas.

Excentricidad: es el cociente $e=\frac{c}{a}$, como se verifica que $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es mayor que 1.

Si es de la forma $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, el eje focal es el eje de ordenadas. Los focos serán $F_1(0;-c)$ y $F_2(0;c)$.

Excentricidad: es el cociente $e=\frac{c}{b}$, como se verifica que $c > b$, la excentricidad de una hipérbola es mayor que 1.

Asíntotas de la hipérbola:

Siendo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2-b^2$

$\therefore\ y=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2-a^2}$

Hallaremos asíntotas oblicuas:

$$m=lím_{x\to\infty}\left(\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)=lím_{x\to\infty}\left(\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)=\pm\frac{b}{a}$$

$$n=lím_{x\to\infty}\left(\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2-a^2}\pm\frac{b}{a}\cdot x\right)=\pm\frac{b}{a}\cdot lím_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)}$$

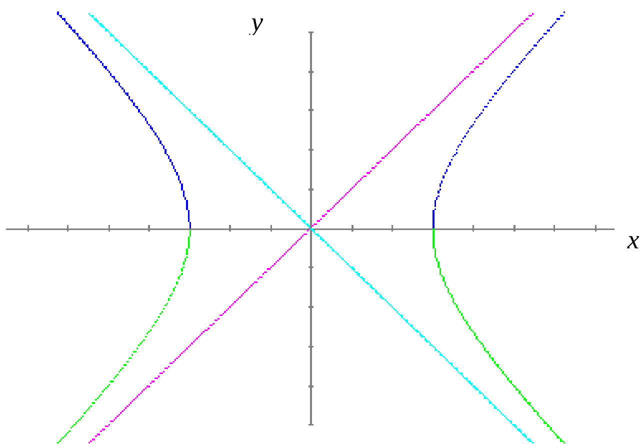
$$n=\pm\frac{b}{a}\cdot lím_{x\to\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}-x}=0$$

$y=\frac{b}{a}\cdot x \wedge y=-\frac{b}{a}\cdot x$ son las ecuaciones de las asíntotas oblicuas.

Hipérbola equilátera

Si $a=b$ la hipérbola se llama equilátera, su ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2-y^2=a^2$ o $y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$ sus asíntotas son $y=x \vee y=-x$.

En la hipérbola equilátera las asíntotas son perpendiculares.



Además, siendo $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 2.a^2 \Rightarrow c = a.\sqrt{2}$, luego $e = \dfrac{a.\sqrt{2}}{a} \Rightarrow e = \sqrt{2}$. La excentricidad de toda hipérbola equilátera es $\sqrt{2}$

Ejercicios resueltos:

1) Encontrar los elementos de la hipérbola cuya ecuación es:

   a) $x^2 - 4.y^2 = 4$

   b) $9.y^2 - 4.x^2 = 36$

2) El centro de una hipérbola está en el origen de coordenadas, un foco está en el punto (0; 5) y la excentricidad es igual a 3, hallar su ecuación.

3) Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje conjugado en el eje de abscisas. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por el punto (1; 2) y su excentricidad es $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}$

4) Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son (-7; 3) y (-1; 3), siendo la longitud del eje imaginario 4.

5) Encontrar los elementos de la hipérbola de ecuación: $3.x^2 - y^2 + 30.x + 78 = 0$

Respuestas:

1) Llevaremos a la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ o bien $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

   a) $x^2 - 4.y^2 = 4$, dividimos ambos miembros por 4

   $$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

   ahora sabemos que a = 2 y b = 1; y, teniendo en cuenta que $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos $c^2 = 4 + 1 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

   Los vértices de la hipérbola son (2; 0) y (-2; 0), los extremos del eje imaginario, (0;1) y (0;-1), los focos son $\left(\sqrt{5};0\right)$ y $\left(-\sqrt{5};0\right)$ y las asíntotas son $y = \dfrac{1}{2}\cdot x$ e $y = -\dfrac{1}{2}\cdot x$

   b) $9.y^2 - 4.x^2 = 36$, dividimos ambos miembros por 36

   $$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

   ahora sabemos que a = 3 y b = 2; y, teniendo en cuenta que $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos $c^2 = 9 + 4 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

   Los vértices de la hipérbola son (0; 2) y (0; -2), los extremos del eje imaginario, (0;3) y (0;-3), los focos son $\left(0;\sqrt{13}\right)$ y $\left(0;-\sqrt{13}\right)$ y las asíntotas son $y = \dfrac{2}{3}\cdot x$ e $y = -\dfrac{2}{3}\cdot x$

2) Según los datos la ecuación buscada es de la forma $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, un foco es (0;5), con lo cual $c = 5$ y si la excentricidad es igual a 3: $\frac{c}{b}=3 \Rightarrow \frac{5}{b}=3 \Rightarrow b=\frac{5}{3}$. Además: $c^2=a^2+b^2$, es decir que $25=\frac{25}{9}+a^2 \Rightarrow a^2=25-\frac{25}{9} \Rightarrow a^2=\frac{200}{9}$.

Por lo tanto la ecuación es: $\frac{y^2}{\frac{25}{9}}-\frac{x^2}{\frac{200}{9}}=1 \Rightarrow \frac{9.y^2}{25}-\frac{9.x^2}{200}=1$

3) La hipérbola que se pide responde a la ecuación $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.Si pasa por el punto (1; 2), este punto verifica la ecuación, luego:

$\frac{4}{b^2}-\frac{1}{a^2}=1$, (1)

por otro lado su excentricidad es $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6} \Rightarrow b=\frac{2.c}{\sqrt{6}}$ y teniendo en cuenta que $c^2=a^2+b^2$: $c^2=a^2+\frac{4.c^2}{6} \Rightarrow a^2=c^2-\frac{2.c^2}{3}=\frac{1}{3}\cdot c^2$.

Reemplazando a y b en (1):

$\frac{4}{\frac{2}{3}\cdot c^2}-\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot c^2}=1 \Rightarrow \frac{6}{c^2}-\frac{3}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{3}{c^2}=1 \Rightarrow c^2=3$

Luego: $a^2=1 \wedge b^2=2$, con lo que la ecuación correspondiente es:

$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{1}=1$

4) Los focos (-7; 3) y (-1; 3) tienen la misma ordenada, por lo que el eje focal es paralelo al eje de abscisas, el centro de la hipérbola es el punto medio del segmento determinado por los focos C (-4; 3), el eje imaginario, de longitud 4., es paralelo al eje de ordenadas.

La ecuación buscada responde a la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Conocemos $b=2 \wedge c=3$, calcularemos a, reemplazando en $c^2=a^2+b^2$

$9=a^2+4 \Rightarrow a^2=5$.

La hipérbola es: $\frac{(x+4)^2}{5}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$

5) Dada la ecuación $3.x^2-y^2+30.x+78=0$, debemos llevarla a la forma:

$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, o bien $\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$

Asociamos los términos en *x* y los términos en *y:*

$$\left(3.x^2+30.x\right)-y^2=-78$$

extraemos factor común y completamos un trinomio cuadrado perfecto:

$$3.\left(x^2+10.x+25\right)-y^2=-78+75$$

$$3.\left(x^2+10.x+25\right)-y^2=-3$$

dividimos ambos miembros de la ecuación por (-3):

$$-\left(x+5\right)^2+\frac{y^2}{3}=1$$

$$\frac{y^2}{3}-\frac{\left(x+5\right)^2}{1}=1$$

En consecuencia:

$$a=1;\ b=\sqrt{3}\Rightarrow c=\sqrt{1+3}=2$$

El centro es (-5; 0)

los vértices son (-5; $\pm\sqrt{3}$)

los extremos del eje conjugado: (-6; 0) y (-4; 0)

las asíntotas son $y=\pm\sqrt{3}.\left(x+5\right)$

la excentricidad es $e=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2.\sqrt{3}}{3}$

	Circunferencia	Elipse		Hipérbola		Parábola	
Definición	Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. La distancia constante se llama **radio**	Lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano, llamados **focos**, es siempre igual a una constante (2.*a*)		Lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante		Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo, exterior a ella. Al punto fijo se le llama **foco** y a la recta fija, **directriz**	
Centro C(0,0)		Eje mayor en y=0	Eje mayor en x=0	Eje real en y=0	Eje real en x=0	Eje de simetría en y = 0	Eje de simetría en x = 0
Ecuación canónica	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$x = \frac{1}{2.p} \cdot y^2$	$y = \frac{1}{2.p} \cdot x^2$
Elementos	Centro C(0,0)	Vértices $A_1(a,0)$; $A_2(-a,0)$ $B_1(0,b)$; $B_2(0,-b)$	Vértices $A_1(a,0)$; $A_2(-a,0)$ $B_1(0,b)$; $B_2(0,-b)$	Vértices $A_1(a,0)$; $A_2(-a,0)$	Vértices $B_1(0,b)$; $B_2(0,-b)$	Vértice V(0,0)	Vértice V(0,0)
	Radio *r*			Extremos eje conjugado $B_1(0,b)$; $B_2(0,-b)$	Extremos eje conjugado $A_1(a,0)$; $A_2(-a,0)$	Directriz x=-p/2	Directriz y=-p/2
		Focos $F_1(c,0)$; $F_2(-c,0)$	Focos $F_1(0,c)$; $F_2(0,-c)$	Focos $F_1(c,0)$; $F_2(-c,0)$	Focos $F_1(0,c)$; $F_2(0,-c)$	Foco F(p/2,0)	Foco F(0,p/2)

		Long. Eje mayor: 2*a* Long. Eje menor: 2*b* Distancia focal: 2*c*	Long. Eje mayor: 2*b* Long. Eje menor: 2*a* Distancia focal: 2*c*	Long. Eje transverso: 2*a* Long. Eje conjugado: 2*b* Distancia focal: 2*c*	Long. Eje transverso: 2*b* Long. Eje conjugado: 2^a Distancia focal: 2*c*		
				Asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$	Asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$		
Excentricidad	$e = 0$	$e = \frac{c}{a}$; $e < 1$	$e = \frac{c}{b}$; $e < 1$	$e = \frac{c}{a}$; $e > 1$	$e = \frac{c}{b}$; $e > 1$		
Relación entre *a*, *b* y *c*		$a^2 = c^2 + b^2$	$b^2 = c^2 + a^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$		
Forma explícita	$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$	$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$	$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$	$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2 - a^2}$	$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\cdot y^2$	$y = a\cdot x^2$
	Circunferencia	Elipse		Hipérbola		Parábola de vértice V(*h*, *k*)	
Centro (*h*, *k*)		Eje mayor paralelo a y=0	Eje mayor paralelo a x=0	Eje real paralelo a y=0	Eje real paralelo a x = 0	Eje de simetría paralelo a y = 0	Eje de simetría paralelo a x = 0
Ecuación Canónica	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$	$x - h = \frac{1}{2.p}\cdot(y-k)^2$	$y - k = \frac{1}{2.p}\cdot(x-h)^2$
Forma explícita						$x = a.y^2 + by + c$	$y = a.x^2 + b.x + c$
Reconocimiento $Ax^2 + By^2 + D.x + E.y + F = 0$	$A = B$	$\lvert A\rvert \neq \lvert B\rvert$, pero de igual signo	$\lvert A\rvert \neq \lvert B\rvert$, pero de igual signo	*A* de distinto signo que *B*	*A* de distinto signo que *B*	$B = 0$	$A = 0$