Unidad I

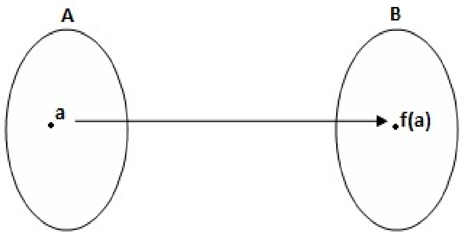
Lic. María Josefina Tito
Licenciatura en Sistemas
Facultad de Ciencias de la Administración
UNER

Marzo de 2018

1. Funciones

1.1. Definición de función

Definición: Sean **A** y **B** dos conjuntos cualesquiera. Una *función* de **A** en **B** es una correspondencia que a cada elemento de **A** le asigna un *único* elemento de **B**.



Se acostumbra a indicar una función de **A** en **B** como **f:A→B** y si **a** $\in$ **A** indicar con **f(a)** al elemento de **B** que le corresponde por la función.
Esto es equivalente a decir que **f(a)** es la imagen de **a** por medio de **f**.

Ejemplo 1: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $f : A \to B$ tal que $f(1) = 3,\ f(2) = 4,\ f(3) = 5,\ f(4) = 6,\ f(5) = 7$
Se observa en el ejemplo anterior que f es una función ya que a cada elemento del conjunto A, le corresponde un único elemento del conjunto B.
Al conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7\} \subset B$, se lo denomina conjunto imagen de la función f.

Ejemplo 2: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $f : A \to B$, tal que $f(1) = 3,\ f(2) = 4,\ f(3) = 5,\ f(4) = 6$
Se observa que esta última correspondencia no es una función ya que $5 \in A$, pero al 5 no le corresponde ningún elemento en B.

Ejemplo 3: Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{1,3,4,5,6,7\}$ y sea ahora $f : A \to B$, tal que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$, $f(5) = 7$.
Se observa que esta correspondencia no es una función, ya que al elemento $3 \in A$, le corresponde más de un elemento en B.

Es importante recalcar dos aspectos de la definición de función, que son las condiciones de existencia y unicidad, se dice üna correspondencia que a cada elemento de A (existencia) le asigna un único elemento en B (unicidad)". En el ejemplo 2, la correspondencia dada no es una función, ya que no cumple la condición de existencia.Y el ejemplo 3 muestra una correspondencia que no cumple la condición de unicidad.
Expresión Simbólica: $f : A \to B$ es una función si la correspondencia entre los elementos del conjunto A y el conjunto B cumple:

1. $\forall x \in A \exists y \in B / \ y = f(x)$ o $(x, y) \in f$. (Condición de *existencia*)

2. $\forall x \in A : (x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. (Condición de *unicidad*).

A la variable x le llamaremos variable *independiente* y a la variable y variable *dependiente*.

Dominio: al conjunto **A**, se lo llama *dominio* de la función.
Al conjunto **B** se lo llama *codominio* de la función.
Imagen: llamaremos *imagen* de la función, al conjunto de las imágenes por f de los elementos de A.Indicaremos a este conjunto If y observemos que $If \subseteq B$.
Simbólicamente: $If = \{y / y \in B \wedge y = f(x)\}$

2. Funciones de variable real

Trabajaremos con funciones de variable real,es decir, tanto A como B será el conjunto de los números reales o un subconjunto de este.
De ahora en adelante si al definir una función f no especificamos el conjunto dominio A, supondremos que se está considerando el ***dominio natural*** o ***campo de definición*** de f que es el mayor conjunto de números reales para los cuales la función f está definida.

Ejemplo 4 : Sea la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, de acuerdo a lo definido ante-riormente el dominio natural de esta función será el conjunto de los números reales x donde la $\sqrt{1 - x^2}$ esté definida, es decir el conjunto de todos los reales que satisfacen la condición:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$$
$$-1 \leq x \leq 1$$

Luego el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es el intervalo: $Df = [-1, 1]$

Ejemplo 5 :Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, como en el ejemplo anterior el dominio de esta función, será el conjunto de los números reales para los que la expresión $\frac{1}{1-x}$ está definida, esto el el conjunto de todos los números reales que satisfacen la condición:

$$1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Luego el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ es el conjunto $Df = \mathbb{R} - \{1\}$ o bien, usando notación de intervalos: $Df = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Ejemplo 6 :Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$, el dominio de esta función es el conjunto de números reales que cumplen la condición:

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4$$
$$\Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$$

Entonces el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ es el conjunto:
$Df = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

2.1. Representación gráfica de funciones

Veremos ahora como se puede obetenr una imagen geómetrica de las funciones de $A \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
Sea el siguiente conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

luego $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.Se puede demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre este conjunto y el conjunto de puntos del plano cartesiano.Es decir, a cada punto del plano cartesiano le corresponde un punto del conjunto $\mathbb{R}^2$ y recíprocamente a cada punto del conjunto $\mathbb{R}^2$ le corresponde un punto del plano cartesiano.

Gráfico de una función: Una vez definida una función, el conjunto de

todos los pares ordenados que satisfacen la regla de correspondencia que la define constituye lo que se denomina ***gráfico de la función***.
Observe que $G_f \subset \mathbb{R}^2$.
En símbolos: el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el conjunto:

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\right\}$$

Ejemplo 7:Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) = x^2$ entonces, el gráfico de f es:

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\right\}$$

luego, los pares ordenados que pertenecen al gráfico de f tiene la forma (x, x^2) para todo $x \in \mathbb{R}$.
La figura 1 muestra la representación gráfica de la función del ejemplo 4.

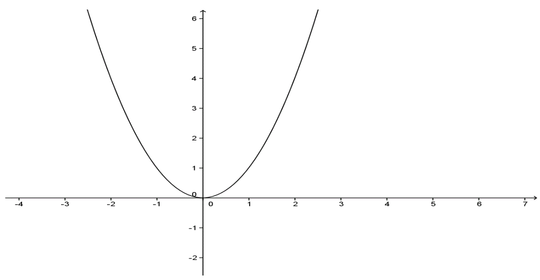


Figura 1: Gráfico de la función $f(x) = x^2$

Ejemplo 8:Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ cuyo dominio es el conjunto: $Df = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, el gráfico de esta función se muestra en la figura 2.

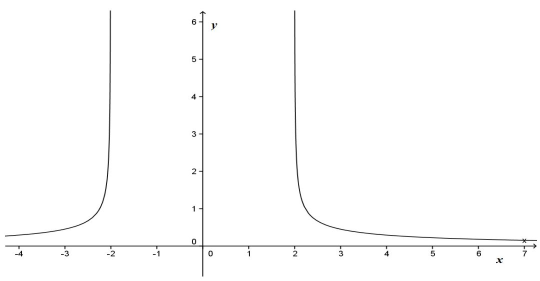


Figura 2: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

3. Funciones elementales

3.1. Función lineal

Se define la función lineal como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = ax + b$$

El gráfico de la función lineal consiste en todos los pares ordenados de la forma:$(x, ax + b)$ con x en $\mathbb{R}$.La representación gráfica en el plano es una recta.
El coeficiente a se denomina *pendiente* de la recta, está relacionado con la inclinación de la recta respecto del eje x, ya que es el valor de la tangente trigonómetrica del ángulo de inclinación de la recta con el eje x.

$$a = tg(\alpha)$$

El coeficiente independiente b se denomina *ordenada al origen*.
La figura 3 nos muestra el gráfico de la función $f(x) = 2x + 3$. Se puede ver

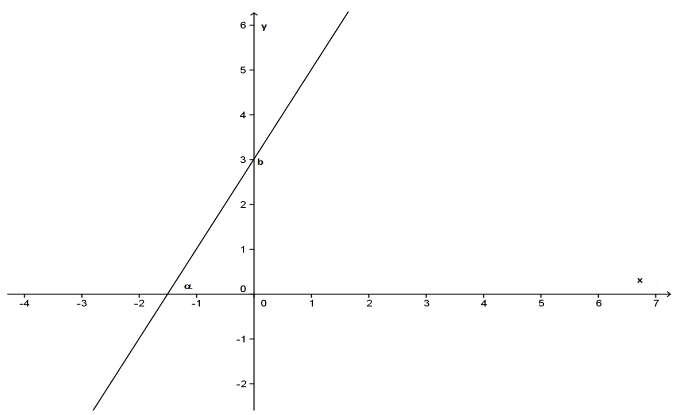


Figura 3: Gráfico de la función $f(x) = 2x + 3$

que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{R}$
Función Constante: Si en la definición anterior $a = 0$, la función resultante $f(x) = b$ se denomina *función constante*.
Es decir,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = b$$

Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \{b\}$ Asi, por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2$, luego su gráfica esta dada en la figura 4.
Función Idéntica: Si en la definición de función lineal se hace $a = 1$ y $b = 0$, la función resultante $f(x) = x$ se denomina *función idéntica*.Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{R}$. La figura 5 muestra la representación gráfica

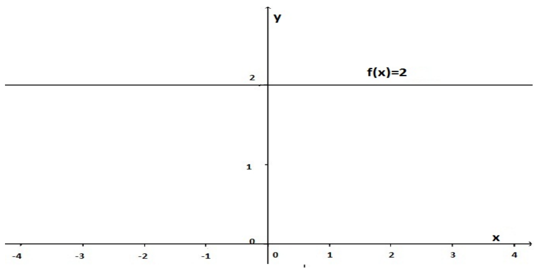


Figura 4: Gráfico de la función $f(x) = 2$

de la función idéntica.

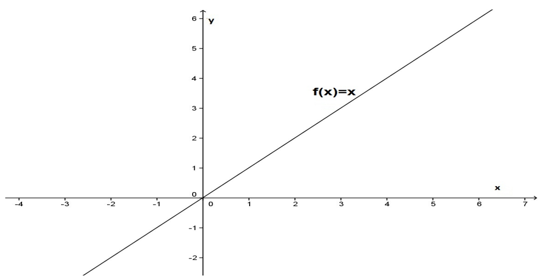


Figura 5: Gráfico de la función $f(x) = x$

3.2. Función valor absoluto

Se define como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = |x|$; entonces

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observación: $|x| = \sqrt{x^2}$. En este caso $Df = \mathbb{R}$ y $If = [0, +\infty)$ La figura 6 muestra el gráfico de la función valor absoluto.

Propiedades del valor absoluto:

1. $\forall x, x \neq 0 : |x| > 0$
2. $\forall k, \forall x, : (|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k)$
3. $\forall k, \forall x, : (|x| > k \Leftrightarrow x < -k \vee x > k)$
4. $\forall x \forall y : |x.y| = |x| \, . \, |y|$
5. $\forall x \forall y : |x + y| \leq |x| + |y|$

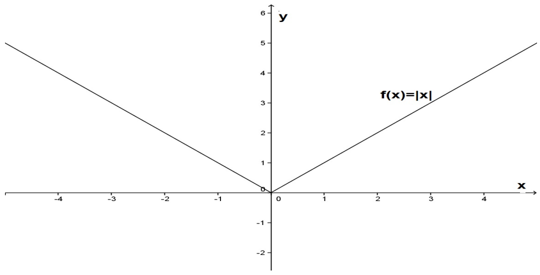


Figura 6: Gráfico de la función $f(x) = |x|$

3.3. Función parte entera

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = [x]$
donde $[x] = max\,\{k \in \mathbb{Z}/k \leq x\}$, es decir la parte entera de x es el mayor número entero k que cumple con la condición: $k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k \leq x < k+1$. Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{Z}$ La figura 7 muestra el gráfico de la función parte entera.

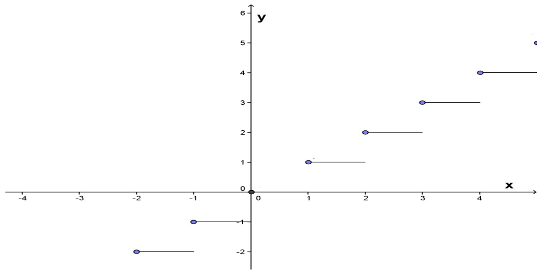


Figura 7: Gráfico de la función $f(x) = [x]$

3.4. Función mantisa

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x - [x]$.
Es la función tal que a cada x real le asigna la parte decimal del mismo número. Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = [0, 1)$

3.5. Función signo

Se define como $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}/sgn(x) = \frac{|x|}{x}$
De acuerdo a la definición es: $Df = \mathbb{R} - \{0\}$ y $If = \{-1, 1\}$.

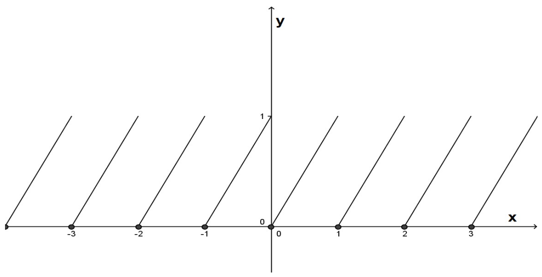


Figura 8: Gráfico de la función $f(x) = x - [x]$

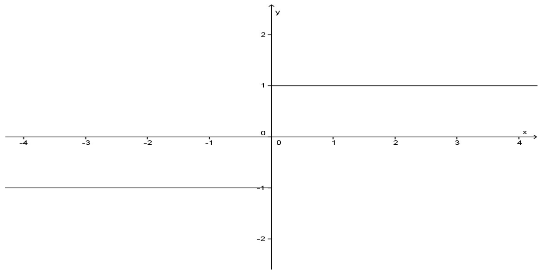


Figura 9: Gráfico de la función $f(x) = sgn(x)$

3.6. Función cuadrática

Se define:$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son constantes que representan números reales, y $a \neq 0$.
La gráfica de esta función es una parábola de eje vertical.
Por ejemplo, si f es la función definida como $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ su gráfica es la parábola cuyo vértice es el punto: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ (recordemos que el vértice esta dado por la ecuación: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$)
La gráfica de $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ se muestra en la figura 9.

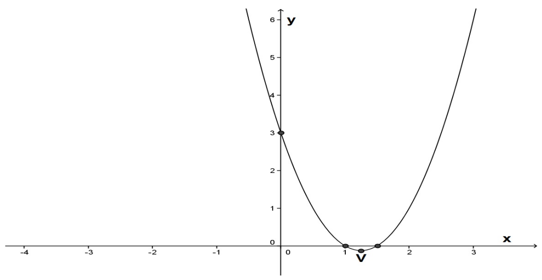


Figura 10: Gráfico de la función $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

3.7. Función polinómicas

La función lineal y la función cuadrática son casos particulares de una familia de funciones más amplia, que son las *funciones polinómicas.*Estas se definen como:$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ donde $a_1, ..., a_n$. son constantes reales llamadas *coeficientes*.
La figura 10 muestra el gráfico de la función plinómica de grado 3,
$f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

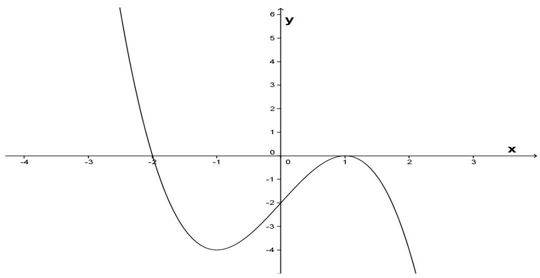


Figura 11: Gráfico de la función $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

4. Paridad de funciones

4.1. Función par

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***par*** si es $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Así por ejemplo la función $f(x) = x^2$ es par ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Otro ejemplo de función que es par es la función $f(x) = |x|$.

4.2. Función impar

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***impar*** si es $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Así por ejemplo la función $f(x) = x^3$ es impar ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Otro ejemplo de función que es impar es la función $f(x) = x$.

Para pensar:Qué propiedad de simetría tiene la representación gráfica de una función par? y la de una función impar?.

5. Clasificación de funciones

5.1. Funciones Inyectivas

Una función $f : A \to B$ se dice ***inyectiva*** si cumple la siguiente condición: si x_1, $x_2 \in A$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces debe ser $x_1 = x_2$.
Así por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x+3$ es inyectiva y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$ no es inyectiva.

5.2. Funciones suryectivas o sobreyectivas

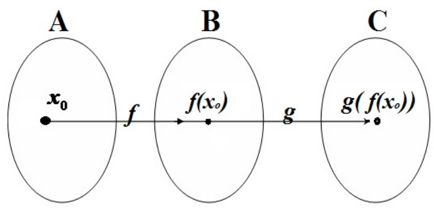
Una función $f : A \to B$ se dice ***suryectiva o sobreyectiva*** si cumple la siguiente condición:cualquiera sea $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
Esto es equivalente a decir que $f : A \to B$ se dice *suryectiva o sobreyectiva* si la $If = B$.
Así por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$ es sobreyectiva y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$ no es sobreyectiva.

5.3. Funciones biyectivas

Una función $f : A \to B$ se dice ***biyectiva*** si es inyectiva y suryectiva.
Ejemplo 9: de acuerdo a lo visto anteriormente la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$ es biyectiva.

6. Composición de funciones

Sean A, B y C tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Si x_0 es un elemento de A, por f le corresponder $f(x_0)$; como $f(x_0)$ es un elemento de B, por g le corresponder un elemento de C que será:$g(f(x_0))$.



Definición:Sean A, B y C tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones.La composición de g y f es la función $g \circ f : A \to C$ definida por $g \circ f = g(f(x))$.
Sean ahora las funciones $f : A \to B$ y $g : M \to N$, para que exista la función compuesta $g \circ f$ es necesario que la $If \subseteq Dg$.

Ejemplo 10:Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}/f(x)=2x+1$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}/g(x)=x^2$, entonces la función $g\circ f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ se obtiene de la siguiente manera:
$(g\circ f)(x)=g(2x+1)\Rightarrow(g\circ f)(x)=(2x+1)^2$
Si ahora se quiere obtener $f\circ g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\Rightarrow(f\circ g)(x)=f\left(x^2\right)\Rightarrow$ $(f\circ g)(x)=2x^2+1$

Ejemplo 11: Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow(-\infty,0)\,/f(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}$ y
$g:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}/g(x)=\sqrt{x}$
La composición $f\circ g:[0,+\infty)\rightarrow(-\infty,0)$ será: $(f\circ g)(x)=f(\sqrt{x})\Rightarrow$ $(f\circ g)(x)=-\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\Rightarrow(f\circ g)(x)=-\dfrac{1}{1+x}$

Sin embargo la composición $g\circ f$ no existe ya que If no está incluida en el Df.

7. Función inversa

Sea $f:A\rightarrow B$ una función.Se llama función inversa de f a la función $g:B\rightarrow A$ tal que
$g\circ f(x)=x,\ \forall x\in A$
y
$f\circ g(x)=x,\ \forall x\in B$.
Si la función inversa de f existe la denotaremos: f^{-1}.
si f es una función cualquiera, siempre tiene inversa?
La respuesta a esta pregunta viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 1 *:*
Sea $f:A\rightarrow B$ una función. Existe entonces función inversa de f si y sólo si f es biyectiva.

Demostración: supongamos que f tiene función inversa f^{-1}. Debemos probar que f es biyectiva.
Por definicón $f^{-1}:B\rightarrow A$ es tal que cumple $f^{-1}\circ f(x)=x,\ \forall x\in A$
y $f\circ f^{-1}(x)=x,\ \forall x\in B$.
la inyectividad de f resulta de: si $x_1,x_2\in A$ son tales que: $f(x_1)=f(x_2)$
entonces será: $f^{-1}(f(x_1))=f^{-1}(f(x_2))$
o sea: $f^{-1}\circ f(x_1)=f^{-1}\circ f(x_2)$
lo que por definición resulta : $x_1=x_2$
Para probar suryectividad, consideremos un y_0 cualquiera en B. Debemos encontrar un $x_0\in A$ tal que $f(x_0)=y_0$; pero si $x_0=f^{-1}(y_0)$ resulta:
$f(x_0)=f\left(f^{-1}(y_0)\right)=y_0$

Supongamos ahora que f es biyectiva y probemos que en ese caso hay función inversa de f.
Para y en B sabemos por la suryectividad de f, que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y sabemos por la inyectividad de f, que ese x es único. Definimos entonces $g(y) = x$
De esta manera definimos una función $g : B \to A$ que, por su propia construcción, resulta ser f^{-1}.•
Ejemplo 12: sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$,
su función inversa es la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

En efecto si se hace:
$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(2x+3) \Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = \dfrac{(2x+3)-3}{2}$
$\Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = \dfrac{(2x)}{2}$
$\Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = x$

y si se hace:
$f \circ f^{-1}(x) = f\left(\dfrac{x-3}{2}\right) \Rightarrow f \circ f^{-1}(x) = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 \Rightarrow$
$f \circ f^{-1}(x) = (x-3) + 3 \Rightarrow f \circ f^{-1}(x) = x$
Luego la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$
es la función inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$.

8. Función homográfica

La función homográfica tiene la forma: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ donde $c \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$.
Veamos ahora el por qué de estas restricciones:
Si $c = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$ que es la función lineal.
Si $ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Entonces,
$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{b\left(\dfrac{a}{b}x+1\right)}{d\left(\dfrac{c}{d}x+1\right)} = \dfrac{b}{d} \Rightarrow$ la función es constante.
El dominio de esta función será el conjunto de los números reales menos aquellos que anulen el denominador. Luego:

$$Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

El gráfico de esta función es una curva llamada *hipérbola*.

Ejemplo: Sea la función $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} / f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$ Observación: si en la

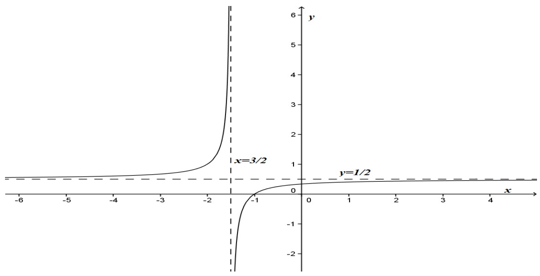


Figura 12: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$

función del ejemplo $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$ se hace:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x+\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = -\frac{\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2}$$

La recta $x = \dfrac{-3}{2}$ es la ecuación de la *asíntota vertical*.

La recta $y = \dfrac{1}{2}$ es la ecuación de la *asíntota horizontal*.

9. Funciones trascendentes

9.1. Función exponencial

La funcion *exponencial* se define: $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty) / f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Se puede probar que esta función es *inyectiva* y *suryectiva*, por lo tanto es *biyectiva*. El gráfico de esta función para el caso $a > 1$ viene dado en la figura 13, como se puede observar la función es creciente y positiva. En el caso $0 < a < 1$ la función es decreciente y se muestra el gráfico en la figura 14.

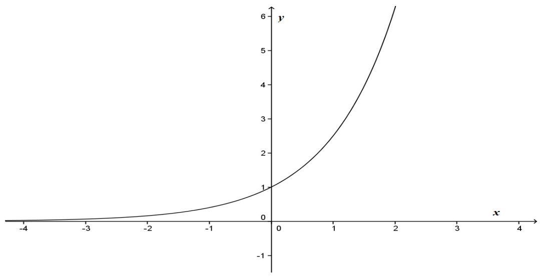


Figura 13: Gráfico de la función $f(x) = a^x$ con $a > 1$

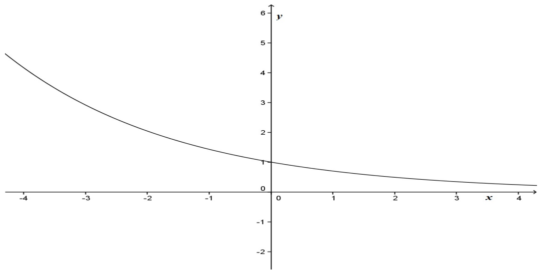


Figura 14: Gráfico de la función $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

9.2. Función logaritmo

Si $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es la función tal que $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces su inversa se denomina función *logaritmo en base a* y se indica $log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Esto define, para cada $x > 0$, un número real $log_a(x)$ caracterizado por la propiedad:

$$log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Dicho número, $log_a(x)$, se llama *logaritmo en base a de x.*
Recordemos que $a > 0$ y $a \neq 1$. si $a = 10$ entonces $y = log(x)$ y si $a = e$ entonces $y = ln(x)$.
La grfica de la función logaritmo para $a > 1$ se muestra en la figura 15 y para $0 < a < 1$ en la figura 16.

Propiedades de los logaritmos:

1. $log_a(x.y) = log_a(x) + log_a(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$
2. $log_a(x : y) = log_a(x) - log_a(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$
3. $log_a(x^n) = n.log_a(x)\ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$
4. $a^{log_a(x)} = x\ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$

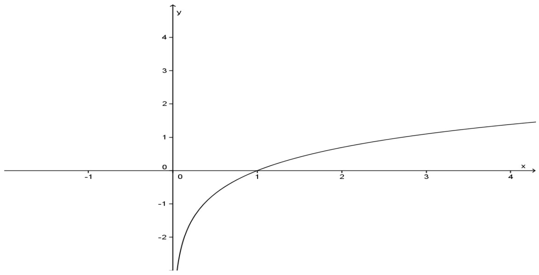


Figura 15: Gráfico de la función $f(x) = log_a(x)$ con $a > 1$

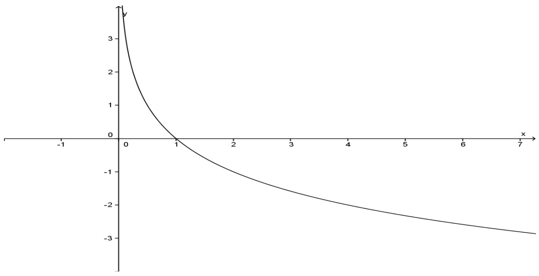
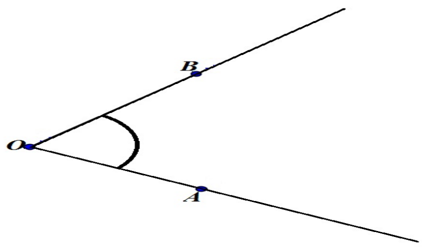


Figura 16: Gráfico de la función $f(x) = log_a(x)$ con $0 < a < 1$

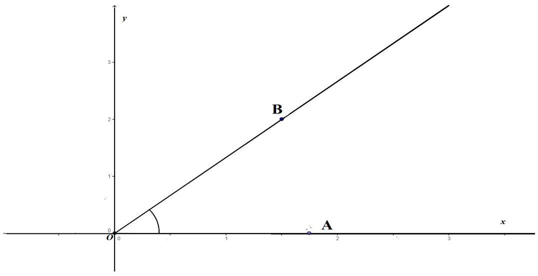
9.3. Funciones trigonométricas

9.3.1. Ángulos

Definición: Se llama ángulo a la porción del plano comprendida entre dos semirectas con el mismo origen. Cada una de ellas se llama *lado* del ángulo y el origen se llama *vértice*. El lado $\vec{OA}$ se denomina lado *inicial* y el lado $\vec{OB}$ lado *terminal*.



Ángulo en posición normal: Se dice que un ángulo se encuentra en *posición normal* cuando su vértice coincide con el origen de coordenadas y su lado inicial con el semieje positivo de abscisas.
El ángulo $A\hat{O}B$ se puede formar haciendo girar el lado $\vec{OB}$ sobre el lado $\vec{OA}$ y con esa rotación el punto B se mueve hacia el punto A a lo largo de



una circunferencia de centro O y radio $\bar{OB}$. El ángulo es *positivo* cuando $\vec{OB}$ gira hacia $\vec{OA}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj. El ángulo es *negativo* cuando $\vec{OB}$ gira hacia $\vec{OA}$ en el sentido de las agujas del reloj.

9.3.2. Medición de ángulos

Sistema circular Si un ángulo tiene su vértice en el centro de una circunferencia de radio r e intercepta en ella un arco cuya longitud es r entonces dicho ángulo tiene una medida de *un radián*. En símbolos: 1 rad.
Así, el ángulo que recorre la mitad de la longitud de la circunferencia será igual a π radianes, un cuarto de longitud de la circunferencia $\pi/2$ radianes, la longitud de la circunferencia 2π rad, etc.
Si usamos el sistema de medición sexagesimal se sabe que : 1 ángulo de un giro mide 360° el equivalente en el sistema circular es 2π rad.
Entonces:

$$1giro \approx 2\pi \text{ rad} \approx 360°$$

Con esto:

$$1° \approx \frac{2\pi}{360°} \text{ y } 1rad \approx \frac{360°}{2\pi}$$

9.4. Funciones trigonométricas definidas en un triángulo rectángulo

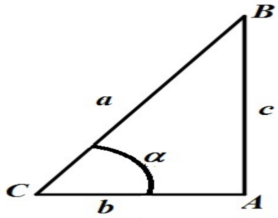


Figura 17: Triángulo BAC

Sea BAC un triángulo rectángulo en $\hat{A}$, se define:

$$sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{c}{a}$$

$$cos(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{b}{a}$$

$$tan(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \Rightarrow tan(\alpha) = \frac{c}{b}$$

$$cosec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} \Rightarrow cosec(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$sec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} \Rightarrow sec(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$cotan(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} \Rightarrow cotan(\alpha) = \frac{b}{c}$$

Se puede probar que:

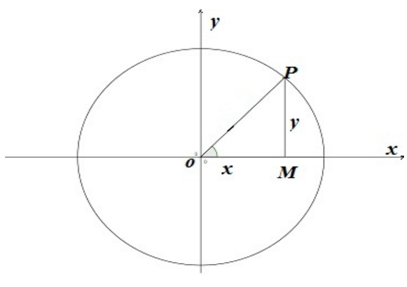
$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$tan(\alpha) = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

De esta manera quedan definidas las funciones trigonométricas para ángulos mayores que 0 y menores que un ángulo recto. La extensión de estas funciones a ángulos cualesquiera se da a continuación

9.5. Funciones trigonométricas



La circunferencia trigonométrica

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano y la circunferencia con centro en el origen y radio r.

Si consideramos un ángulo α menor que un recto, entonces en el triángulo rectángulo OMP, como el radio OP es igual a r, resulta:

$$sen(\alpha) = \frac{PM}{OP} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{y}{r}$$
$$cos(\alpha) = \frac{OM}{OP} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{x}{r}$$
$$tan(\alpha) = \frac{PM}{OM} \Rightarrow tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$

Observación La abscisa del punto resultante al girar un ángulo α es la que le da el signo al coseno de dicho ángulo y la ordenada es la que le da el signo al seno.

De acuerdo con esta observación, el seno es positivo en los dos primeros cuadrantes y negativo en el tercer y cuarto cuadrante.

El coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante y negativo en el segundo y tercer cuadrante.

Se puede probar que esta definición de las funciones trigonométricas tam-

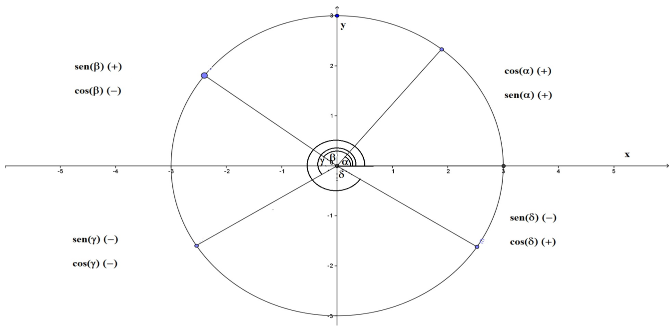


Figura 18: Signo del seno y coseno

bién cumplen las propiedades enunciadas anteriormente. A saber:

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$
$$tan(\alpha) = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$
$$tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Se vió anteriormente que se puede expresar la medida de un ángulo como un número real. Como las funciones trigonométricas están definidas sobre ángulos, y los ángulos se pueden medir en radianes por ejemplo, entonces se puede pensar definir las funciones trigonometricas como funciones de A en $\mathbb{R}$ donde $A \subseteq \mathbb{R}$.

9.6. Función seno

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = sen(x)$. La representación gráfica esta dada en la figura 19. La curva que representa la gráfica de la función

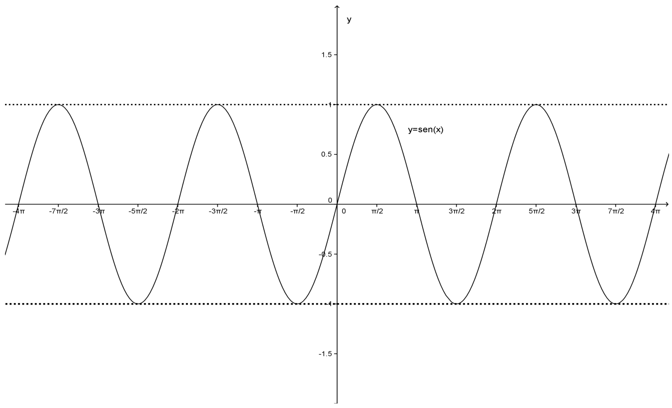


Figura 19: Gráfico de la función $y = sen(x)$

$y = sen(x)$ se denomina *sinusoide*.
El $Df = \mathbb{R}$ y su $If = [-1, 1]$.
Es una función impar.
La función alcanza un máximo de 1 y un mínimo de -1.
Los ceros de esta función son de la forma: $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Es una función periódica de período 2π. Esto es: $sen\,(x + 2\pi) = sen\,(x)$ En general $sen\,(x + 2k\pi) = sen\,(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Tal como está definida no es inyectiva, ni suryectiva, por lo que no es biyectiva.
Si se define ahora:$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]\,/f(x) = sen(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa del seno es el arcoseno y se define:
$f : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]/f(x) = sen^{-1}(x)$

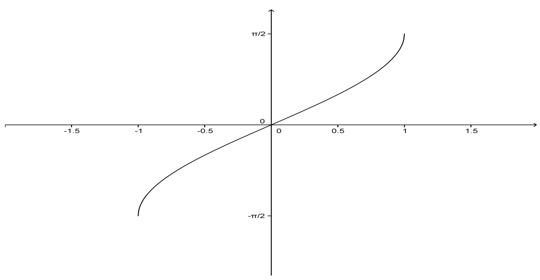


Figura 20: Gráfico de la función $y = sen^{-1}(x)$

9.7. Función coseno

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = cos(x)$. La representación gráfica esta dada en la figura 21. La curva que representa la gráfica de la función

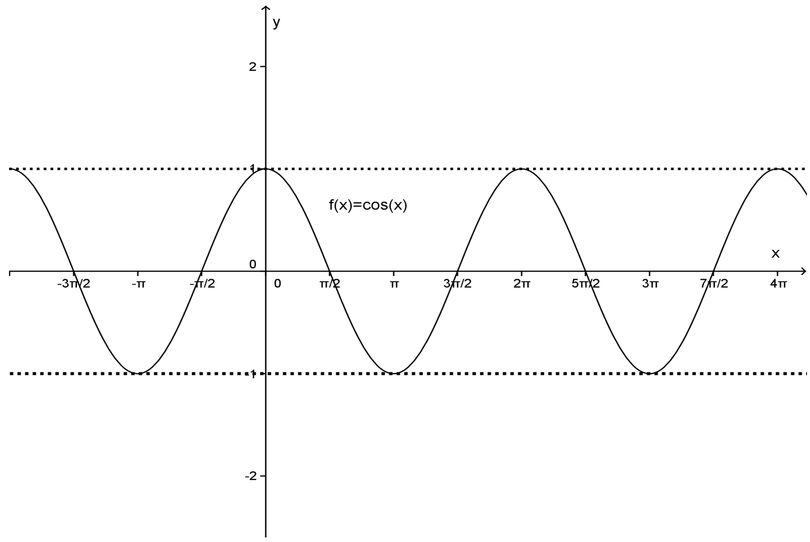


Figura 21: Gráfico de la función $y = cos(x)$

$y = cos(x)$ se denomina *cosinusoide.*
El $Df = \mathbb{R}$ y su $If = [-1, 1]$.
Es una función par.
La función alcanza un máximo de 1 y un mínimo de -1.
Los ceros de esta función son de la forma: $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Es una función periódica de período 2π. Esto es: $cos\,(x + 2\pi) = cos\,(x)$ En general $cos\,(x + 2k\pi) = cos\,(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Tal como está definida no es inyectiva, ni suryectiva, por lo que no es

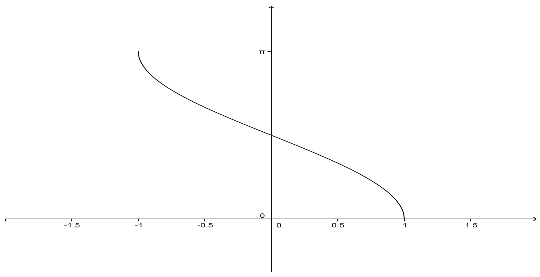


Figura 22: Gráfico de la función $y = cos^{-1}(x)$

biyectiva.

Si se define ahora:$f:[0,\pi]\rightarrow[-1,1]\,/\,f(x)=cos(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa del coseno es el arcocoseno y se define:
$f:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]\,/\,f(x)=cos^{-1}(x)$

9.8. Función tangente

Se define como: $f:A\rightarrow\mathbb{R}/f(x)=tan(x)$, donde
$A=\left\{x/x\in\mathbb{R},x\neq(2k+1)\,\dfrac{\pi}{2}\forall k\in\mathbb{Z}\right\}$.
La representación gráfica esta dada en la figura 23. La curva que representa

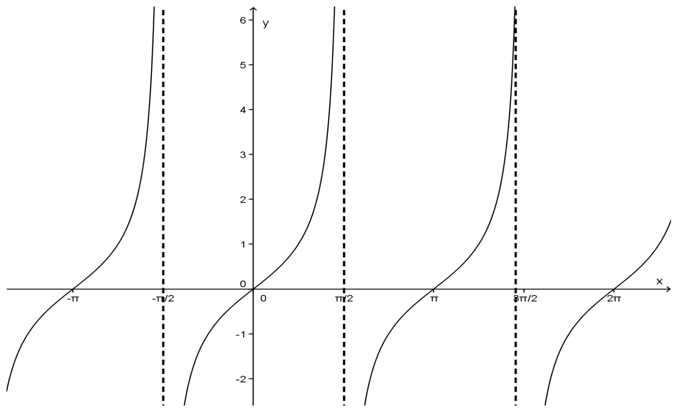


Figura 23: Gráfico de la función $y=tan(x)$

la gráfica de la función $y=tan(x)$ se denomina *tangentoide.*
El $Df=\left\{x/x\in\mathbb{R},x\neq(2k+1)\,\dfrac{\pi}{2}\forall k\in\mathbb{Z}\right\}$ y su $If=\mathbb{R}$.
Es una función impar.No está acotada.
Los ceros de esta función son de la forma: $x=k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Es una

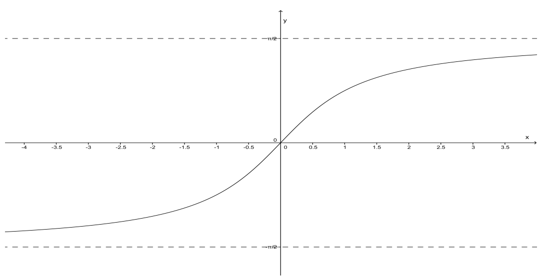


Figura 24: Gráfico de la función $y=tan^{-1}(x)$

función periódica de período π. Esto es: $tan\,(x+\pi)=tan\,(x)$. En general $tan\,(x+k\pi)=tan\,(x)$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Tal como está definida no es inyectiva,si es suryectiva,por lo que no es biyectiva.

Si se define ahora:$f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\rightarrow\mathbb{R}/f(x)=tan(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa de la tangente es el arcotangente y se define:
$f:\mathbb{R}\rightarrow\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]/f(x)=tan^{-1}(x)$