**1)** Un coche se mueve por una carretera recta. Su posición en el instante $t$ está dada por:

$$s(t) = 20.t^2 \text{ siendo } 0 \leq t \leq 2$$

donde $t$ se mide en horas y $s(t)$ se mide en kilómetros.

a) Graficar $s(t)$.

b) Calcular la velocidad media del coche entre $t = 0$ y $t = 2$. ¿Cómo se interpreta geométricamente este resultado?

c) Calcular la velocidad instantánea del coche en $t = 1$. ¿Cómo se interpreta geométricamente este resultado?

**2)** Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de $t$ segundos se conoce por $H = 10t - 2t^2$.

a) Hallar la velocidad de la roca después de un segundo.

b) Hallar la velocidad de la roca cuando $t = a$.

c) ¿Cuándo tocará la superficie la roca?

d) ¿Con qué velocidad la roca tocará la superficie?

**3)** Justificar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Una función continua siempre es derivable.

b) Si $f'(2)$ existe y $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca de $f(2)$?

c) La derivada de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[x_1,\ x_2]$ está dada por la expresión: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

d) La pendiente de la recta tangente a la función $y = g(x)$ en el punto $(x, g(x))$ es $\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)$

e) Si las derivadas laterales de una función existen en el punto de abscisa $x = c$, entonces la función es derivable en dicho punto.

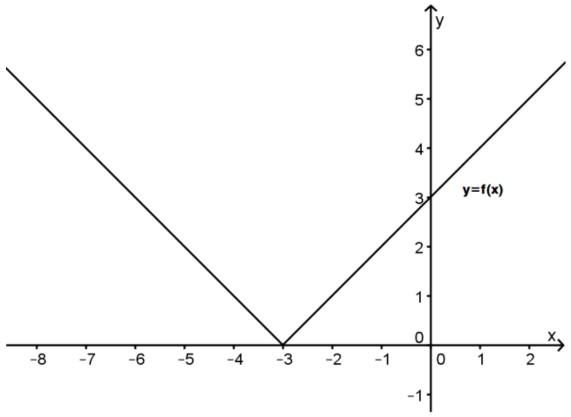
f) Si $f$ es derivable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$.

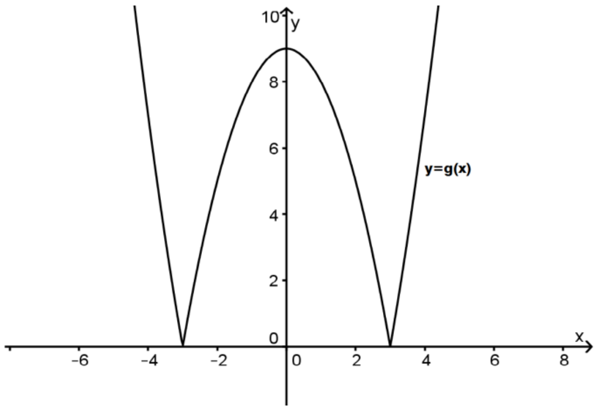
**4)** Usando la definición, encontrar la expresión de la función derivada de las siguientes funciones:

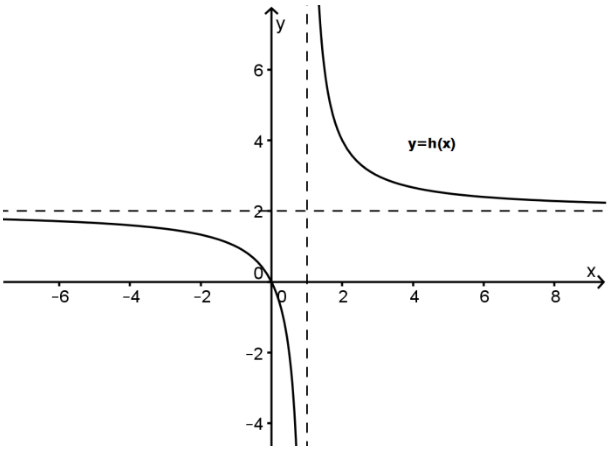
a) $f(x) = 3 - 2x$  b) $f(x) = x^2 - 4$  c) $f(x) = \frac{3}{x}$  d) $f(x) = x + \sqrt{x}$

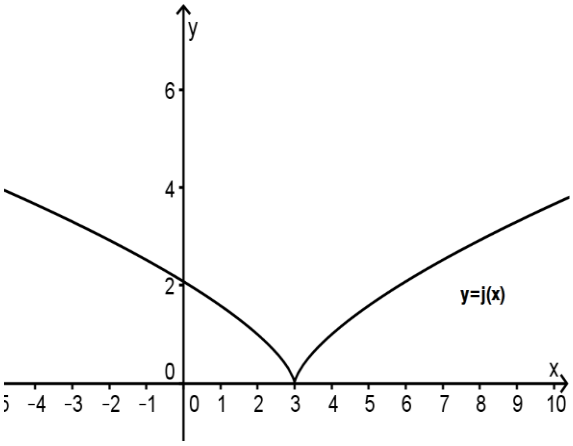
**5)** <u>Análisis gráfico</u>:

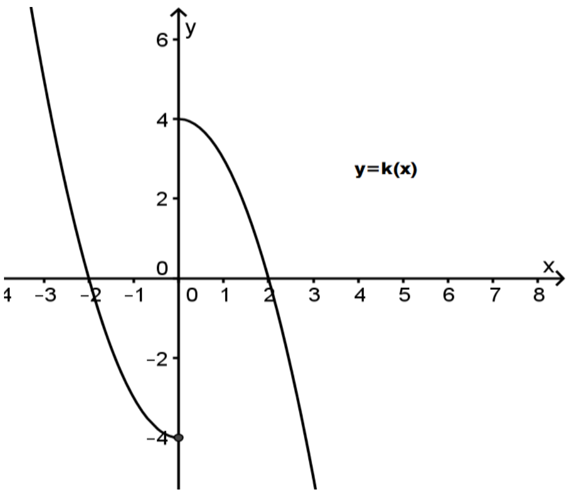
Identificar los intervalos donde cada función es derivable. Justificar.

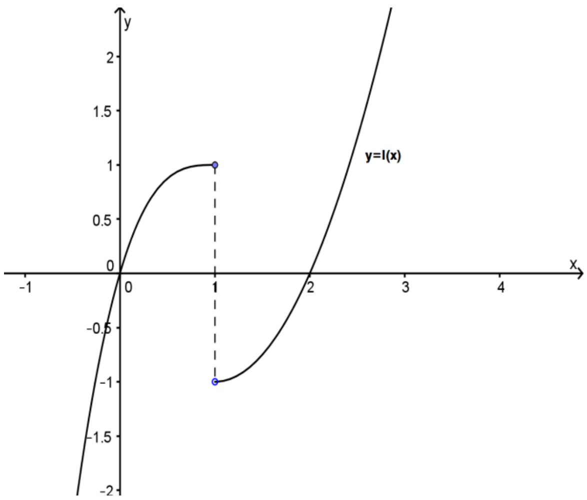



**6)** Sabiendo que la función $f(x)$ es derivable en todo su dominio, y $g(x) = 2x.f(x)$ demostrar, usando la definición de derivada, que $g'(x) = 2.[f(x) + x.f'(x)]$.

**7)** Comprobar que la función $f(x) = |x^2 - 4|$ es continua en el punto $x = 2$, pero no es derivable en dicho punto. Comprobar el resultado gráficamente. ¿En qué otro punto tampoco será derivable?

**8)** Comprobar que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en el punto de abscisa $x = 0$, pero no es derivable en ese punto. Comprobar el resultado gráficamente.

**9)** Encontrar los puntos de $f(x) = x^3 - 3x + 5$ en los que la recta tangente es:

a) Paralela a la recta $y = 24x$

b) Perpendicular a la recta $y = -\frac{x}{9}$

c) Para los casos anteriores, ¿cuáles son las ecuaciones de dichas rectas?

d) ¿En qué punto/s la gráfica de $f(x)$ posee recta tangente horizontal?

**10)** Suponiendo que: $f(5) = 4$, $g(5) = 2$, $f'(5) = -6$ y $g'(5) = 5$, encontrar los valores de:

a) $(f + g)'(5)$ b) $(f.g)'(5)$ c) $(f/g)'(5)$ d) $(g/f)'(5)$ e) $\left(\frac{f}{f-g}\right)'(5)$

**11)** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto que se indica:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $P(1, f(1))$ b) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ en $P(2,4)$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en $P(0,1)$

**12)** Calcular las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{8\pi} - \dfrac{\pi^2}{3} + 2\pi^3$

b) $f(x) = (6x+5)(x^3 - 2)$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} - x^3 + 1 + \dfrac{1}{x^8}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}}$

e) $f(x) = x^3 \cdot \tan(x)$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^3 + 1}$

g) $f(x) = \sqrt{(2x-3)} \cdot (x^3 - 2)^3$

h) $f(x) = sen\,(3x^3)$

i) $f(x) = \left(a^3 + sen^3 x\right)^2$

j) $f(x) = sen\,(3x) - \cos(2x)$

k) $f(t) = \sqrt{(3\cos(nt) - 2sen(nt))/nt}$

l) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2 + 1}\right)$

m) $g(t) = \ln[(t-2)/(2t+1)]$

n) $f(x) = e^{-2x} + 3^x$

o) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$

p) $f(x)=arcsen\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$

q) $f(x)=\log_2\left(3x-x^2\right)$

r) $f(x)=\log_2\sqrt{x-4}$

s) $f(x)=a^x+\left(\cos x\right)^x$

t) $f(x)=\left(x-2\right)^{x+1}$

u) $f(x)=sen\left(x^{\cos x}\right)$

v) $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$

**13)** Encontrar una parábola que tenga la ecuación $f(x)=ax^2+bx$, y cuya tangente en el punto $(1,1)$ tenga ecuación $y=3x-2$.

**14)** Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es derivable en $x=-1$. Probar que $g(x)=f(x).sen(x+1)$ es derivable en $x=-1$.

**15)** Analizar la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2 & x<2 \\ -x^2-4x+1 & x\geq 2 \end{cases}$

b) $f(x)=4-|x-2|$

c) $f(x)=\begin{cases} |2x-6|+1 & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ \ x\leq 0 \\ x+1 & si\ \ 0<x\leq 2 \\ 2x-1 & si\ \ x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si\ \ x\geq -1 \\ 4x+1 & si\ \ x<-1 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+1 & si\ x>0 \\ x^2+2x & si\ \ x\leq 0 \end{cases}$

**16)** Hallar $a$ y $b$ para que la siguiente función sea derivable en todos sus puntos. Comprobar los resultados gráficamente.

$$f(x)=\begin{cases} ax^3 & x\leq 2 \\ x^2+b & x>2 \end{cases}$$

**17)** Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $g(x)=e^{4f(x)-8}$ en el punto $(1,f(1))$, sabiendo que la recta tangente a la gráfica de $f$ en $(1,f(1))$ es $y=4x-2$.

**18)** Sea $f(x)=(ax+2)e^{-kx}$, hallar $a$ y $k$, sabiendo que la función corta al eje $x$ en $x=\frac{2}{3}$ y que la recta $y=5x+2$ es tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(0,2)$.

**19)** Considerar la siguiente función $f(x)=\sqrt{x}-x^{2/3}$ en el intervalo $[0,1]$:

a) ¿Es $f$ continua en $[0,1]$? Justificar.

b) ¿Es $f$ derivable en $[0,1]$? Justificar.

**20)** Sean las funciones $f$ y $g$, probar que $f$ es continua pero no derivable en $x = 0$, y que $g$ es derivable en $0$.

$$f(x) = \begin{cases} x.sen\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2.sen\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

**21)** Justificar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.

b) Si $y = \pi^2$, entonces $dy/dx = 2\pi$.

c) Si $h(x) = f(x).g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x).g'(x)$.

d) Si $h(x) = f \circ g$, entonces $h'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$.

e) La función $f(x) = \frac{1}{|x|}$ es continua y derivable en todo su dominio.

f) Si $f(x) = x.|x|$, entonces $f''(0) = 0$.

**Respuestas:**

1) b) 40 km/h, pendiente de la recta secante     c) 40 km/h, pendiente de la recta tangente

2) a) 6 m/seg.     b) $10-4a$     c) 5 seg.     d) $-10$ m/seg.

3) a) F     b) V     c) F     d) V     e) F     f) V

4) a) $f´(x)=-2$     b) $f´(x)=2x$     c) $f´(x)=-\frac{3}{x^2}$     d) $f´(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5) a) $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$     b) $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$     c) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

d) $(-\infty,\ 3)\cup(3,+\infty)$     e) $(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$     f) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

9) a y c) R. T. en $(3,23)$: $y=24x-49$     R. T. en $(-3,-13)$: $y=24x+59$

b y c) R. T. en $(2,7)$: $y=9x-11$     R. T. en $(-2,3)$: $y=9x+21$

d) R. T. horizontal en $(1,3)$ y $(-1,7)$

10) a) $-1$     b) 8     c) $-8$     d) 2     e) 8

11) a) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$     b) $y=4$     c) $y=-x+1$

12) a) $f´(x)=0$     b) $f´(x)=24x^3+15x^2-12$     c) $f´(x)=\frac{3}{5}x^{-2/5}-3x^2-8x^{-9}$

d) $f´(x)=\frac{14}{5}x^{9/5}+\frac{3}{10}x^{-7/10}-\frac{2}{15}x^{-13/15}$     e) $f´(x)=3x^2tgx+\frac{x^3}{cos^2x}$

f) $f´(x)=\frac{1}{3x^{2/3}(x^3+1)}-\frac{3x^{7/3}}{(x^3+1)^2}$     g) $f´(x)=\left(\frac{1}{2x-3}+\frac{9x^2}{x^3-2}\right)(x^3-2)^3\sqrt{2x-3}$

h) $f´(x)=9x^2\cos(3x^3)$     i) $f´(x)=6(a^3+sen^3x)\cdot sen^2x\cdot cosx$

j) $f´(x)=3\cos(3x)+2sen(2x)$     k) $f´(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-3n\,sen(nt)-2n\cos(nt)}{3\cos(nt)-2sen(nt)}-\frac{1}{t}\right)\cdot\sqrt{\frac{3\cos(nt)-2sen(nt)}{nt}}$

l) $f´(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}$     m) $g´(t)=\frac{1}{t-2}-\frac{2}{2t+1}$     n) $f´(x)=-2e^{-2x}+3^x ln3$

o) $g´(x)=\frac{4}{e^{2x}-e^{-2x}}$     p) $f'(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$     q) $f'(x)=\frac{3-2x}{(3x-x^2)ln2}$

r) $f´(x)=\frac{1}{2\ln(2)(x-4)}$     s) $f´(x)=a^x lna+[\ln(cosx)-x\,tgx](cosx)^x$

t) $f'(x) = \left[\ln(x-2) + \frac{x+1}{x-2}\right] \cdot (x-2)^{x+1}$

u) $f'(x) = [-senx \cdot \ln(senx) + cotgx \cdot cosx] \cdot (senx)^{cosx}$

v) $f'(x) = -\frac{1}{senx}$

13) $f(x) = 2x^2 - x$

15) a) y b) $f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$

c) f es derivable en $\mathbb{R} - \{0,3\}$

d) $f$ derivable en $\mathbb{R} - \{0,2\}$

e) $f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$

f) $f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

16) $a = 1/3$ y $b = -4/3$

17) $y = 16x - 14$

18) $a = -3$ y $k = -4$

19) a) Sí b) No

21) a) F b) F c) F d) F e) V f) F