TEMA 7

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

Una expresión algebraica es aquella que vincula números y letras por medio de las operaciones aritméticas: suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación.

Por ejemplo, son expresiones algebraicas: $3x^2+4;\ 5x+\frac{7}{y};\ \sqrt{2x}+3y;\ \frac{3x+5}{x^2-1}$

Las letras que se utilizan se denominan *variables o indeterminadas,* y como su nombre lo indica, pueden tomar cualquier valor que no haga incompatible la expresión.
Según qué operaciones afecten a la o las variables podemos clasificar las expresiones algebraicas en: racionales, irracionales o trascendentes. Las primeras se subdividen a su vez en enteras y fraccionarias.

Fraccionarias
Expresiones Algebraicas
- Racionales
  - Enteras (monomios y polinomios)
  - Fraccionarias
- Irracionales
- Trascendentes

Expresiones Algebraicas Racionales Enteras: son expresiones en las cuales las variables pueden estar afectadas por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potenciación con **exponentes enteros no negativos.**
Por ejemplo:

$$\sqrt{3}x^2+\frac{1}{4}x-7\ ;\ 4x^3+2x\ ;\ 3-7t$$

Expresiones Algebraicas Racionales Fraccionarias: son expresiones en las que la variable está elevada a exponentes enteros negativos o que tienen variables en el denominador.
Ejemplos:

$$\sqrt{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{7}{x}\ ;\ 3-7t^{-3}\ ;\ \frac{2x-3}{x+4}$$

Expresiones Algebraicas Irracionales: son aquellas en las que la variable esá elevada a un número racional que no es entero.
Ejemplos:

$\sqrt{x}+x^2+\frac{1}{4}x$; $4t^2+t^{\frac{1}{2}}-5$

Expresiones Algebraicas Trascendentes: son aquellas en las cuales la variable está afectada por una función trascendente (no algebraica).
Ejemplo:
$sen(2x+4)$; $x\ln x+2$

7.1. EXPRESIONES RACIONALES ENTERAS: MONOMIOS Y POLINOMIOS

7.1.1. Monomio y Polinomio

MONOMIO: es una expresión algebraica en la que solo se involucra el producto y la potencia de exponente natural de las variables. Los factores numéricos de dicha expresión se llaman coeficientes.

Por ejemplo: $5x^7$; $-3x^2y$; $7x\ y\ z^3$ son monomios, con los coeficientes 5, -3 y 7 respectivamente.

Se llama ***grado de un monomio*** a la suma de os exponentes de las variables intervinientes. Por ejemplo, los grados de las expresiones anteriores son 7,3 y 5 respectivamente.

Dos monomios se dicen semejantes si difieren sólo en sus coeficientes. Por ejemplo: $4x^2y$ es semejante a $-\frac{1}{2}x^2y$.

POLINOMIO: es una suma algebraica de monomios no semejantes, llamados términos del polinomio.

Ejemplo: $3x^5y-2x+6$; $\sqrt{2}x^3+3x\ y$; $6x+x^4-\frac{1}{3}x^2$

El **grado de un polinomio** está dado por **el mayor de los grados de los monomios que lo constituyen**. Es decir que los polinomios anteriores son de grado 6, 3 y 4 respectivamente.

Observación: de acuerdo al número de términos es habitual denominar a los polinomios de dos, tres y cuatro términos como binomio, trinomio o cuadrinomio respectivamente

1. Polinomio en una variable.

Definición:

Se llama *POLINOMIO EN LA VARIABLE X* a toda expresión de la forma:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +a_2x^2+a_1x+a_0$$

Con $n\in N_0$ y $a_n, a_{n-1},\ \dots\ , a_2, a_1, a_0$ números reales, que denominaremos ***coeficientes***.

Si $a_n \neq 0$, decimos que el polinomio tiene ***grado**n* y a_n es el ***coeficiente principal***.

El coeficiente a_0 recibe el nombre de ***término independiente***.
El polinomio cuyos coeficientes son todos ceros recibe el nombre de ***polinomio nulo*** y carece de grado.

Ejemplos:

$0x^3+0x^2+0x+0$ es un polinomio nulo.
$-3x^6+x^4-8x^2-\frac{2}{3}x+1$ es un polinomio donde los coeficientes son -3, 0, 1, -8, 0, $-\frac{2}{3}$,1; el grado es 6, el coeficiente principal es -3 y el término independiente es 1.

Un polinomio se dice ***completo*** cuando en la expresión aparecen explícitamente todos los términos correspondientes a las potencias de la variable, y ***ordenado*** cuando dichas potencias están expresadas en orden creciente o decreciente.

Ejemplos:
$-2x^6+x^4-7x^2-\frac{2}{5}x+1$ es un polinomio de ***grado 6***, ***incompleto*** y ***ordenado***.
$3x^5+x^4+6x^3-\frac{1}{3}x^2-3x+4$ es un polinomio de ***grado 5**, **completo** y **ordenado**.*
$-4x+2x^3-5x^7$ es un polinomio de ***grado 7**, **incompleto** y **ordenado**.*

$-5+9x^3-7x+11x^4$ es un polinomio de ***grado 4**, **incompleto** y **no ordenado***.

¡Muy importante!

Es posible asociar a cada polinomio $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \ldots\ +a_2x^2+a_1x+a_0$ una única función $P_n(x)=R\rightarrow R$ definida por $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \ldots\ +a_2x^2+a_1x+a_0$, y recíprocamente, a cada función de esta forma es posible asociar un polinomio.

Llamamos a la función $P_n(x)$ ***función polinómica***.

¿Por qué es una función?

Es una función porque a cada valor real de *x*, le corresponde un único valor real de $P_n(x)$.

Bajo esta identificación, en lo sucesivo, hablaremos indistintamente de polinomios o funciones polinómicas.

2. Valor numérico de un polinomio.

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para **x=a** es el número que se obtiene al reemplazar la variabe**x** por el número **a** y efectuar todas las operaciones indicadas. Se simboliza $P(a)$

2.1 ***Ceros de un polinomio*.**

Si al reemplazar $P(a)=0$, entonces se dice que el número a es un cero del polinomio $P(x)$.

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x)=5x^4+2x^2-7$; tenemos que: $P(2)=5.2^4+2.2^2-7=81$

Luego si tomamos a=1 y reemplazamos llegamos a $P(1)=5.1^4+2.1^2-7=0$ y podemos afirmar que en número 1 es **un cero del polinomio** $P(x)$.

3.OPERACIONES CON POLINOMIOS

De igual forma que con los números, los polinomios pueden manipularse y se comportan de manera parecida a los enteros. Es decir, de la misma manera que la suma, la resta y el producto de dos enteros es un entero, la suma, resta y el producto de dos polinomios es un polinomio.

A continuación veremos cómo se pueden realizar las operaciones básicas de adición, sustracción y multiplicación.

Adición:

Calculemos la suma de los polinomios: $P(x)=2x^3+5x^2-7x+6$ y $Q(x)=6x^2+7$

Sumar es muy rápido! Solo debemos sumar los coeficientes de los términos semejantes.

Una forma práctica de realizar esta operación es ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro. Si falta algún término intermedio en algún polinomio, lo completamos escribiendo dicho término con coeficiente cero o dejamos el espacio libre.

$$
\begin{array}{rrcrrrr}
 & P(x) & = & 2x^3 & +5x^2 & -7x & +6 \\
+ & Q(x) & = & & 6x^2 & & +7 \\
\hline
 & P(x)+Q(x) & = & 2x^3 & +11x^2 & -7x & +13
\end{array}
$$

Sustracción:

Calculamos ahora la resta de los polinomios: $P(x)=5x^3-8x+4$ y $Q(x)=x^3-2x^2-x+2$

Para efectuar la resta de dos polinomios, se suma al polinomio minuendo el opuesto del polinomio sustraendo.

La disposición es similar que la usada para la suma, pero en lugar de escribir Q (x), se escribe el opuesto.

$$
\begin{array}{lrcrrrr}
 & P(x) & = & 5x^3 & & -8x & +4 \\
+ & -Q(x) & = & -x^3 & +2x^2 & +x & -2 \\
\hline
 & P(x)-Q(x) & = & 4x^3 & +2x^2 & -7x & +2
\end{array}
$$

<u>Observación:</u> El resultado que se obtiene de la suma o la resta de dos polinomios puede ser el polinomio nulo o tener grado menor o igual que el del polinomio de mayor grado que estanos sumando o restando.

Producto o multiplicación:

a) Producto de un polinomio por un número real:

El producto de un polinomio por un número real se resuelve aplicando la propiedad distributiva:

Ejemplo:

Si $P(x) = \frac{11}{3}x^2 - 5x + 1$, hallar $6 \cdot P(x)$:

$$6 \cdot P(x) = 6 \cdot \left(\frac{11}{3}x^2 - 5x + 1\right) = 6 \cdot \frac{11}{3}x^2 - 6 \cdot 5x + 6 \cdot 1 = 22x^2 - 30x + 6$$

b-Producto de dos polinomios:

Para calcular el producto de dos polinomios, la propiedad distributiva es la herramient fundamental. Multiplicamos cada uno de los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro y sumamos.

Para multiplicar los polinomios $P(x) = 4x^2 - 3x + 2$ y $Q(x) = -3x + 4$

utilizaremos la siguiente disposición práctica:

$$
\begin{array}{lrrrr}
 & & 4x^2 & -3x & +2 \\
 & & -3x & +4 & \\
\hline
 & & 16x^2 & -12x & +8 \\
+ & -12x^3 & +9x^2 & -6x & \\
\hline
 & -12x^3 & +25x^2 & -18x & +8
\end{array}
$$

En la primer fila debajo de la línea, encontramos el producto de P(x) por 4, y en la segunda, el producto de P (x) por –3 x. Notemos que se van encolumnando los términos semejantes. Por último, efectuamos la suma.

<u>Observación:</u> Cuando se multiplican dos polinomios no nulos el resultado es un polinomio cuyo grado es igual **a la suma de los grados** de los polinomios factores.

$$P(x)\ .\ Q(x) = grado\ de\ P(x) + grado\ de\ Q(x)$$

Productos especiales:

- Cuadrado de un binomio $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
- Cubo de un binomio $(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
- Producto de la suma por la diferencia de dos términos $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

Cociente o división:

Otra operación a tener en cuenta con los polinomios es la división. Para dividir recordemos la división entera entre números, en la cual aplicamos el algoritmo de Euclides:

dividendo = divisor * cociente + resto

$$\begin{array}{ccccc} \text{dividendo} & & & & \text{divisor} \\ & 17 & \multicolumn{1}{|c}{5} & & \\ \cline{3-3} & 2 & 3 & & \\ \text{resto} & & & & \text{cociente} \end{array}$$

Se verifica que 17 = 5 . 3 + 2, y el resto es siempre menor que el divisor.

Ahora, si tenemos por ejemplo los polinomios $P(x) = 10x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 53x + 4$ y $Q(x) = 5x - 8$, calculemos $P(x) : Q(x)$

$$\left(10x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 53x + 4\right) : (5x - 8) =$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{10x^4} & -11x^3 & +22x^2 & -53x & +4 & 5x \quad -8 \\ \cline{6-6}
-\cancel{10x^4} & +16x^3 & & & & 2x^3 \quad +x^2 \quad +6x \quad -1 \\ \cline{1-2}
& \cancel{5x^3} & +22x^2 & & & \\
& -\cancel{5x^3} & +8x^2 & & & \\ \cline{2-3}
& & \cancel{30x^2} & -53x & & \\
& & -\cancel{30x^2} & +48x & & \\ \cline{3-4}
& & & -\cancel{5x} & +4 & \\
& & & \cancel{5x} & -8 & \\ \cline{4-5}
& & & & -4 & \text{Resto}
\end{array}$$

El procedimiento a seguir es el siguiente:
1. El polinomio dividendo debe escribirse ordenado en forma decreciente y completa.
2. Se divide el primer término del polinomio dividendo por el primer término del polinomio divisor.
3. Se multiplica este resultado por el divisor y se resta del polinomio dividendo.
4. Se bajan los términos necesarios y se repite la operación hasta obtener una expresión de grado menor que el del divisor. Esta última expresión recibe el nombre de resto.

Observación: El grado del polinomio cociente es igual a la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el del polinomio divisor.

4 REGLA DE RUFINI Y TEOREMA DEL RESTO.

Cuando tenemos que dividir un polinomio $P(x)$ por uno de la forma $(x-a)$, es conveniente utilizar la denominada **Regla de Ruffini**(Paolo Ruffini, 1765 – 1822, matemático italiano). Esta regla permite calcular los coeficientes del cociente antes mencionado, veámosla en un ejemplo:

Dividir $\left(5x^4-6x^3+9x^2-10x+3\right):(x-2)=$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 5 & -6 & 9 & -10 & 3 \\
 & & & & & \\
2 & & 10 & 8 & 34 & 48 \\
\hline
 & \underbrace{5 \quad 4 \quad 17 \quad 24}_{\text{Coeficientes del polinomio cociente}} & & & & 51 \leftarrow \text{Resto}
\end{array}
$$

Procedimiento:
1. En la primera fila se escriben los coeficientes del polinomio dividendo, ordenados en forma decreciente y completa (si falta algún término se completa con cero).
2. En el ángulo superior izquierdo se escribe ***a***.
3. Se baja el primero de los coeficientes y se multiplica por ***a***. Este resultado se escribe debajo del siguiente y se efectúa la suma.
4. Se continúa el procedimiento hasta el último coeficiente.

Los números obtenidos son los coeficientes del polinomio cociente, y el último es el resto de la división.
Como ya hemos visto, el grado del polinomio cociente es la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el del polinomio divisor, por lo que, al dividir aplicando la Regla de Ruffini, el grado del cociente es una unidad menor que el grado del divisor.

$$\therefore \left(5x^4-6x^3+9x^2-10x+3\right):(x-2)=5x^3+4x^2+17x+24\ ;\ \text{resto}=51$$

TEOREMA DEL RESTO
"El resto de la división de P(x) por (x – a) es igual a P(a)".
Demostración:
Si $C(x)$ es el cociente de $P(x):(x-a)$ y el resto es igual a R, entonces se cumple:

$P(x) = C(x)\cdot(x-a)+R$; haciendo $x=a$:
$P(a) = C(a)\cdot(a-a)+R$, pero $a-a=0$, entonces $C(a)\cdot 0 = 0 \Rightarrow P(a)=R$

Apliquemos el teorema del resto en el cociente que resolvimos por la regla de Ruffini:

$$R = 5\cdot 2^4 - 6\cdot 2^3 + 9\cdot 2^2 - 10\cdot 2 + 3 =$$
$$= 5\cdot 16 - 6\cdot 8 + 9\cdot 4 - 20 + 3 =$$
$$= 80 - 48 + 36 - 20 + 3 = 51$$

Verificamos que $P(a) =$ Resto.

El teorema del resto ***puede servir como verificación***, para saber si hemos resuelto correctamente un cociente mediante la regla de Ruffini, pero su aplicación más importante es para averiguar si un polinomio es divisible o no por otro de la forma (x – a), ya que si lo es, el resto de la división será cero y la aplicación del teorema, nos evita el tener que resolver el cociente.

TEOREMA DEL FACTOR (corolario del Teorema del Resto)

A partir del teorema del resto podemos enunciar el Teorema del Factor, el cual puede enunciarse de las siguientes formas:

- "Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ sí y sólo si $P(x)$ se anula para $x=a$"**.**
- "$(x-a)$ es un factor de $P(x)$ si sólo si $P(a)=0$".

5. CASOS DE FACTOREO

De manera similar a la descomposición de un número en sus factores primos, se pueden expresar polinomios como el producto de expresiones algebraicas enteras, por cada una de las cuales son divisibles. Según el tipo de factorización aplicada, se acostumbra a efectuar una clasificación, habitual y aceptada, de acuerdo a características particulares. Por tanto, pordemos describir así los siguientes cinco casos de factoreo:

1- FACTOR COMÚN
Una expresión algebraica es factor común de todos los términos de un polinomio cuando figura en todo ellos como factor.
Ejemplos:

$P(x) = 8x^5 + 5x^4 + x^3 = x^3(8x^2 + 5x + 1)$

$Q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2(x^2 - 3x + 2)$

$R(x) = -4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x = 4x(-x^6 - 2x^2 + x + 4)$

Observemos que el procedimiento de extraer el factor común consiste en:
a) Extraer la variable x de cada término elevada a la menor de sus potencias.
b) Extraer un número que es factor de todos los coeficientes.

¡Recordar!Siempre es posible verificar que el producto obtenido es correcto aplicando la propiedad distributiva.

2- FACTOR COMUN POR GRUPO

Algunos polinomios presentan una distribución que nos permiten formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

$$\underbrace{3x^3+x^2}_{\substack{\text{factor común}\\ x^2}} + \underbrace{6x+2}_{\substack{\text{factor común}\\ 2}} =$$

$$= x^2(3x+1)+2(3x+1) =$$

$$= (3x+1)(x^2+2)$$

Notemos que han quedado dos términos donde el contenido del paréntesis es factor común.
Se extrajo factor común el paréntesis.
Más ejemplos:

$$P(x) = 7x^5-5x^4+14x-10 = (7x^5-5x^4)+(14x-10) =$$
$$= x^4(7x-5)+2(7x-5) =$$
$$= (x^4+2)\ (7x-5)$$

$$Q(x) = x^7+3x^3+3x^8+x^2-2x^5-2 = (3x^8+x^7-2x^5)+(3x^3+x^2-2) =$$
$$= x^5(3x^3+x^2-2)+(3x^3+x^2-2) =$$
$$= (x^5+1)\ (3x^3+x^2-2)$$

3- TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Llamamos de esta manera al trinomio tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados.
Un trinomio cuadrado perfecto se factoriza expresándolo como el cuadrado de un binomio:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Ejemplos:

$$P(x) = x^2-10x+25 = x^2-2.5x+5^2 = (x-5)^2$$
$$Q(x) = 4x^2+4x^3+x^4 = (2x)^2+2(2x)x^2+(x^2)^2 = (2x+x^2)^2$$

4-CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Expresión general: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$

Al desarrollar el cubo de un binomio, se obtiene un cuatrinomio cubo perfecto. El método para factorearlo es similar al caso anterior, supongamos que queremos factorear $P(x) = x^3+6x^2+12x+8$

Debemos encontrar dos términos cubos perfectos: $x^3 = (x)^3$ $8 = (2)^3$

Después es necesario hacer dos verificaciones:

a) que el triplo del cuadrado de la primera base por la segunda es uno de los términos restantes: $3(x)^2 2 = 6x^2$

b) y que el triplo de la primera base por el cuadrado de la segunda es el otro término: $3x(2)^2 = 12x$

Por lo tanto, el cuatrinomio queda factoreado como: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$

5- DIFERENCIA DE CUADRADOS

Todo polinomio que es una diferencia de cuadrados se puede Factorizar como el producto de la suma por la diferencia de sus bases, es decir: $a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b)$

Por ejemplo:

$P(x) = x^2 - 25 = (x-5)\ (x+5)$

$Q(x) = x^4 - 9x^2 = (x^2)^2 - (3x)^2 = (x^2 - 3x)\ (x^2 + 3x)$

$R(x) = x^2 - 6 = x^2 - (\sqrt{6})^2 = (x - \sqrt{6})\ (x + \sqrt{6})$

¡Observación!
Todo número positivo es el cuadrado de su propia raíz.

6.Sumas o restas de potencias de igual exponente

Ejemplo

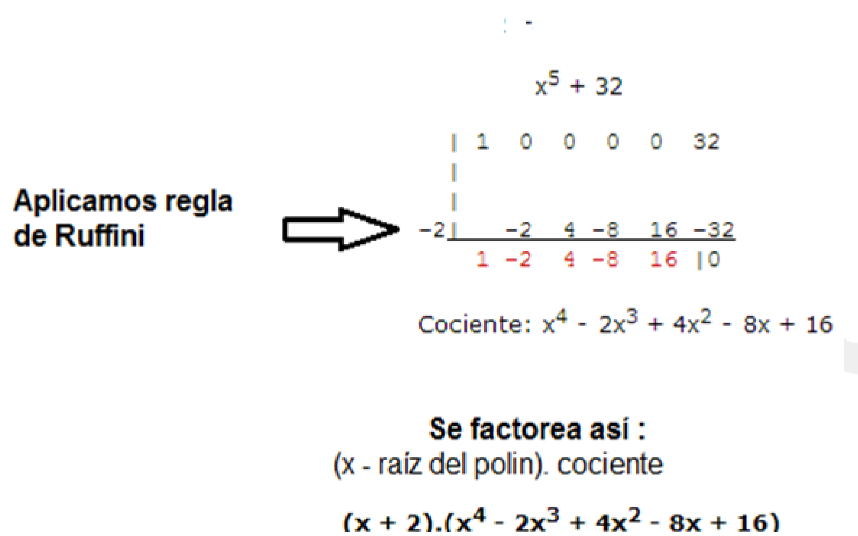
$X^5 - 32$

Vemos que este polinomio tiene como raíz a 2, porque $2^5 - 32 = 0$

Para factorizar usamos el nº que es “raíz” en la regla de Ruffini

Y luego multiplicamos (x-raíz). Cociente

En el ejemplo anterior nos quedaría así



Factorización aplicando el método de Gauss

- El polinomio debe tener coeficientes enteros
- PROPIEDAD: Si la fracción p/q es una raíz, se cumple que “p” es divisor del término independiente y “q” divisor del coeficiente principal.

PASOS

- Se arman todas las posibles fracciones p/q y se busca alguna que anule el polinomio.
- Luego aplicamos regla de Ruffini para hallar las restantes raíces.

El polinomio factorizado quedará de esta forma:

$$a \cdot (x - r_1).(x - r_2)...(x - r_n)$$

Coeficiente principal ***raíces***

EJEMPLO **$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$**

Divisores del término independiente 6: p = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6
Divisores del coeficiente principal 2 : q = 1, -1, 2, -2
Posibles raíces del polinomio:
p/q: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 1/2, -1/2, 3/2, -3/2

si probamos con (-2) , se anula , con lo cual, -2 es una raíz.
Usamos Ruffini y continuamos

	2	-3	-11	6
-2		-4	14	-6
	2	-7	3	0
3		6	-3	
2	-1	0		
½		1		
	2	0		

RESULTADO $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ = **$2.(x+2).(x-3).(x-\frac{1}{2})$**

Ejercicios para el alumno

Resolver las operaciones

1) $(x - 7)^2 \quad + (2x^3 – 2x + 4) . (2 x + 3)=$

2) $(6x^3 – x^2 + 9x + 1) : (3x – 2)$

3) Aplicar regla de Ruffini y teorema del resto:

   a) $(2x^3 – 3x + 3) : (x - 2) =$
   b) $(x^4 – 2) : (x +1)=$
   c) $(12x^3 – x + 1) : (x – 3)=$

Factorizar los polinomios

a) $x^2 – 14x + 49=$ b) $x^3 + 64=$ c) $x^3 -3x +2 =$ d) $4x^3-12x^2 -16x =$	e) $x^2 – 12x + 36=$ f) $x^3 + 1000=$ g) $x^3- 3x^2-x +3=$ h) $20x^3-15x^2 -10x=$