



Facultad de Ciencias de la Administración

Universidad Nacional
de Entre Ríos

Licenciatura en Sistemas
Organización de computadoras

Lic. Marcelo Alberto Colombani
marcol@fcad.uner.edu.ar

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional
de Entre Ríos**Unidad N° III****Objetivos:**

Comprender en detalle las operaciones lógicas de los componentes digitales estándares más comunes.
Distinguir a estos dispositivos digitales como bloques de construcción para el diseño de circuitos más grandes.

LA LÓGICA DEL COMPUTADOR

Álgebra de Boole.
Circuitos en serie y en paralelo.
Puertas lógicas.
Implementación de funciones booleanas.
Expresiones canónicas.



Facultad de Ciencias de la Administración

Unidad N° III**Bibliografía**

Orden	Título	Autor(es)	Editorial	Año de edición
1	Organización de computadoras. Un enfoque estructurado.	Andrew S. Tanenbaum	Pearson Educación	Séptima Edición, 2000
3	Organización y arquitectura de computadores	William Stallings	Prentice Hall	Séptima Edición, 2007
4	Principios de arquitectura de computadores	Murdocca, Miles J. Heuring, Vincent P.	Prentice Hall	2002
5	Arquitectura de ordenadores	M. Rafiquzzaman	Anaya	1988
11	Arquitectura de computadoras. De los microprocesadores a las supercomputadoras	Parhami, Behrooz	Mc Graw Hill	2007



Facultad de Ciencias de la Administración

Álgebra de Boole.

Teoría matemática desarrollada por el filósofo y matemático George Boole en el año 1854.

En informática y matemática, es una estructura algebraica que esquematiza las operaciones lógicas Y, O, NO y SI

Todos los elementos que contempla el álgebra de Boole, o sea, *constantes y variables* sólo admiten dos estados. Por lo tanto, se contemplan con la posibilidad de aceptar dos estados.

Así, un interruptor puede estar "abierto" o "cerrado", un relé eléctrico admite estar "activado" o "desactivado", un diodo semiconductor, "conduciendo" o "bloqueado".

Debe notarse que los elementos 0 y 1 no representan números enteros, sino más bien alguna condición física del sistema.



Facultad de Ciencias de la Administración

Álgebra de Boole.

La posibilidad de que todos los elementos admitan dos estados en esta estructura matemática ha llevado a llamarla "álgebra binaria".

La denominación de "álgebra lógica", se debe al carácter de tipo intuitivo y lógico que tienen los razonamientos que en ella se aplican.

En 1938, Claude Shannon, sugirió que el A.B. podría usarse para resolver problemas de diseño de circuitos de conmutación.



Facultad de Ciencias de la Administración

Álgebra de Boole.

Las variables y constantes binarias de entrada y salida se suelen expresar con las letras del alfabeto.

Sus operaciones se expresan con signos muy similares a los empleados en las operaciones matemáticas clásicas, como la suma y la multiplicación.

Diferencia.
El álgebra clásica establece *relaciones cuantitativas*.
El álgebra de Boole establece *relaciones de tipo lógico*.

Álgebra de Boole.

En el álgebra de Boole se pretende conocer en cuál de los dos estados posibles está uno de los términos de una ecuación lógica.

Existen tres operaciones básicas en un AB:

- o NOT.
- o AND.
- o OR.

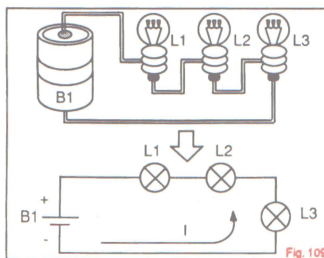
Tabla de Verdad

Consiste en una tabla cuyas columnas de la parte izquierda representan todas las combinaciones que pueden tomar las variables de entrada. En la columna de la derecha se indica el valor que toman las salidas para cada combinación de las entradas.

A	B	X
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

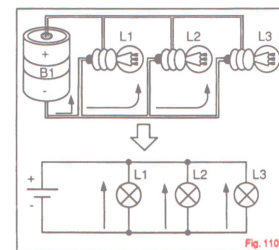
CIRCUITOS EN SERIE

Se dice que los componentes de un circuito están en serie cuando la corriente circula primero por un componente, luego por el siguiente y así sucesivamente hasta recorrer el camino completo.



CIRCUITOS EN PARALELO

Se dice que un circuito está en paralelo cuando la corriente circula simultáneamente por todos sus componentes, ya que los terminales de cada uno están conectados uno a cada polo de la fuente de voltaje o alimentación.



PUERTA LÓGICA

El bloque fundamental de construcción de todos los circuitos lógicos digitales son las puertas. Las funciones lógicas se implementan interconectando puertas.

- Una *puerta lógica* es un elemento eléctrico simple, que toma una o más señales de entradas y genera una señal salida cuyo valor depende de los valores de entradas.

Una tabla de verdad de la puerta define cuál será el resultado de la salida para cada combinación de entradas. Los valores de entrada y salida son representados mediante voltajes.

Típicamente, 5 volts representa un 1 y 0 volts representa un 0.

PUERTA LÓGICA

Una puerta es un circuito electrónico que produce una señal de salida que es una operación booleana sencilla de las señales de entrada.

Las puertas básicas usadas en lógica digital son:

- AND
- OR
- NOT
- NAND
- NOR.

Cada puerta se define de tres formas:

- Símbolo gráfico.
- Notación algebraica o ecuación booleana.
- Tabla verdad.

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA AND

Cuando varias variables lógicas, de tipo binario, se combinan mediante la operación lógica AND, producen una variable de salida, que sólo toma el nivel lógico 1 o estado alto o verdadero, si todas ellas tienen dicho nivel o estado.

La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = A \cdot B$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA AND

La representación eléctrica de la operación AND se realiza mediante interruptores conectados en serie.

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA AND

En la ecuación $X = A \cdot B$, existen dos variables de entrada (A y B) y una sola salida (X). El número de combinaciones diferentes, N, que se pueden realizar con n variables binarias viene expresado por la fórmula $N = 2^n$, que, en el ejemplo citado, dará lugar a $N = 2^2 = 4$ combinaciones posibles.

A	B	X
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA AND

El símbolo lógico que representa una función AND es el siguiente.

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA OR

Cuando distintas variables lógicas se combinan mediante la función OR, el resultado toma el estado ALTO si alguna de ellas tiene dicho estado.

La operación OR es menos exigente que la AND porque sólo exige que alguna de las variables de entrada valga 1, para que la salida tome ese nivel.

La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = A + B$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA OR

En la implementación eléctrica de la función OR, los interruptores que referencian las variables de entrada se conectan en paralelo.

La tensión aplicada a la entrada del circuito eléctrico pasa a la salida X, siempre que alguno de los interruptores esté cerrado.

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA OR

La tabla de verdad correspondiente.

A	B	X
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA OR

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación OR, es decir, el símbolo de la puerta OR.

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NOT

Se trata de una operación que sólo maneja una variable de entrada y otra de salida.
La salida toma estado opuesto o inverso del que tiene la entrada. Por este motivo, también se la llama función inversión o negación.
La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = \bar{A}$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NOT

La tabla de verdad correspondiente.

A	X
0	1
1	0

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NOT

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación NOT, es decir, el símbolo de la puerta NOT.

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NAND

La puerta NAND produce la función inversa de la AND, o sea, la negación del producto lógico de las variables de entrada. Actúa como una puerta AND seguida por una NOT.

La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = A \text{ NAND } B$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NAND

La tabla de verdad correspondiente.

A	B	A NAND B
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NAND

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación NAND, es decir, el símbolo de la puerta NAND.

Entrada { A B } Salida X

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NOR

La puerta NOR produce la función inversa de la OR, o sea, la negación de la suma lógica de las variables de entrada. Actúa como una puerta OR seguida por una NOT.

La expresión simbólica de dicha ecuación en el álgebra de Boole es la siguiente :

$$X = A \text{ NOR } B$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NOR

La tabla de verdad correspondiente.

A	B	A NOR B
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA NOR

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación NOR, es decir, el símbolo de la puerta NOR.

Entrada { A B } Salida X

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA XOR

A esta puerta se la denomina OR EXCLUSIVA porque su comportamiento es igual al de la puerta OR excepto en la combinación en que el número de entradas que tienen nivel lógico 1 es par, en cuyo caso la salida de la XOR es 0.

El símbolo matemático es el del OR pero rodeado de un círculo \oplus .

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA XOR

La tabla de verdad correspondiente.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

PUERTA XOR

El símbolo usada para representar un dispositivo que efectúa la operación XOR, es decir, el símbolo de la puerta XOR.

Entrada { A B } Salida X

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Implementación de funciones booleanas

La puerta XOR puede representarse utilizando puertas AND y OR.

- Si consideremos que para que se obtenga un valor 1 en la salida debe una de las entradas ser 1.

$X = 0$ y $Y = 1 \Rightarrow Z = 1$
 $X = 1$ y $Y = 0 \Rightarrow Z = 1$

- siendo Z el resultado la función XOR

$Z = X' \cdot Y + X \cdot Y'$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Propiedades del álgebra de boole

A continuación se resumen algunas de las propiedades más importantes de estos operadores:

Las operaciones AND y OR son conmutativas. Es decir:

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

$$X + Y = Y + X$$

Las operaciones AND y OR son asociativas. Es decir:

$$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$$

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Propiedades del álgebra de boole

La operación AND es distributiva respecto a la operación OR y viceversa. Es decir:

$$X (Y + Z) = XY + XZ$$

$$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) (X + Z)$$

Se verifica la ley de la doble negación o principio de involución

$$(X')' = X$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Propiedades del álgebra de boole

Cuando se efectúa una operación AND sobre una variable booleana y su complementario, el resultado es 0.

$$X \cdot X' = 0$$

Sin embargo, cuando se efectúa una operación OR sobre una variable booleana y su complementario, el resultado es 1.

$$X + X' = 1$$

Cuando se efectúa una operación AND sobre una variable booleana y el valor 0, el resultado es 0.

$$X \cdot 0 = 0$$

Sin embargo, cuando se efectúa una operación OR entre una variable booleana y un 1, ésta resulta invariante. Es decir:

$$X + 1 = X$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Propiedades del álgebra de boole

De la misma manera, efectuar una operación AND entre una variable booleana y 1 producirá un efecto nulo.

$$X \cdot 1 = X$$

Por otra parte, cuando se efectúa una operación OR entre una variable y 1, el resultado es siempre 1. De manera más formal:

$$X + 1 = 1$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Propiedades del álgebra de boole

El complemento de un producto booleano es la suma de los complementos individuales.

$$(X \cdot Y \cdot Z)' = X' + Y' + Z'$$

De forma similar, el complemento de una suma booleana es el producto de los complementos individuales. Es decir:

$$(X + Y + Z)' = X' \cdot Y' \cdot Z'$$

Los dos resultados anteriores se conocen normalmente como *Leyes de De Morgan*

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Expresiones canónicas

En Álgebra booleana, se conoce como término canónico de una función lógica a todo producto o suma en la cual aparecen todas las variables en su forma directa o inversa.

Existen dos formas básicas de expresiones canónicas que pueden ser implementadas en dos niveles de compuertas:

- Suma de productos o expansión de minterminos
- Producto de sumas o expansión de maxterminos

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Suma de productos lógicos

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = A' \cdot B' \cdot C + A' \cdot B \cdot C + A \cdot B' \cdot C + A \cdot B \cdot C' + A \cdot B \cdot C$$

Facultad de Ciencias de la Administración
Universidad Nacional de Entre Ríos

Producto de sumas lógicas

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B'+C) \cdot (A'+B+C)$$