ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

Lic. Silvina San Miguel

Lógica

Lógica es el estudio del razonamiento; se refiere específicamente a si el razonamiento es correcto. La lógica se centra en la relación entre las afirmaciones y no en el contenido de una afirmación en particular.

Los métodos lógicos se usan en matemáticas para demostrar teoremas y, en las ciencias de la computación, para probar que los programas hacen lo que deben hacer.

¿A qué llamamos proposición?

Una oración que es verdadera o falsa, pero no ambas, se llama una **proposición.**

Ejemplos de oraciones que son proposiciones:

- Teoría de Sistemas es una asignatura de la carrera Licenciatura en Sistemas de la FCAD
- 15 es múltiplo de 3

Ejemplos de oraciones que no son proposiciones:

- Compre un pen drive y una resma de papel
- ¡Qué día espectacular!
- 5 – x = 6

Es común que una proposición se exprese como una oración declarativa (y no como pregunta, orden, exclamación, etcétera)

Se usarán variables, como *p*, *q* y *r*, para representar las proposiciones.

Proposiciones simples y proposiciones compuestas

- Proposiciones simples (o atómicas) son aquellas que no contienen a otras.

  Ejemplos:

  - 2 divide a 6
  - Paraná es la capital de Entre Ríos.

- Proposiciones compuestas (o moleculares): las que no son simples.

  Ejemplos:

  - 15 es múltiplo de 3 y de 5 (contiene las proposiciones simples: 15 es múltiplo de 3 , 15 es múltiplo de 5)
  - Juan acepta la calificación 6 del primer parcial o renuncia a ella. (contiene las proposiciones simples: Juan acepta la calificación 6 del primer parcial, Juan renuncia a la calificación 6 del primer parcial)

Operaciones y conectivos lógicos

Conectivos	Operaciones
-	Negación
$\wedge$	Conjunción
$\vee$	Disyunción inclusiva
$\Rightarrow$	Implicación
$\Leftrightarrow$	Doble implicación
$\veebar$	Diferencia Simétrica (Disyunción exclusiva)

Tablas de verdad

- Los valores de verdad de las proposiciones compuestas se describen mediante tablas de verdad.
- Cada proposición simple puede ser Verdadera o Falsa.
- La cantidad de renglones de la tabla de verdad de una proposición compuesta está dada por 2^n , donde n es el número de proposiciones simples que la componen.

Negación

p	- p
V	F
F	V

Conjunción

La *conjunción* de *p* y *q*, denotada por $p \wedge q$, es la proposición: *p* y *q*.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción **sólo** es verdadera si **las dos** proposiciones simples son **verdaderas**.

Disyunción inclusiva

El valor de verdad de la disyunción *p* ∨ *q* también está determinado por los valores de verdad de *p* y *q*, y la definición se basa en la interpretación "inclusiva" de "o".

P	q	*p* ∨ *q*
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción *p* ∨ *q* es verdadera siempre que *p* o *q* (o ambas) sean verdaderas; de otra manera, *p* ∨ *q* será falsa (es decir, **sólo si *p* y *q* son falsas la disyunción será falsa**).

Proposición condicional (implicación)

Si p y q son proposiciones, la proposición si p entonces q se llama *proposición condicional* y se denota por $p \Rightarrow q$

La proposición p se llama *hipótesis* (o *antecedente*) y la proposición q recibe el nombre de *conclusión* (o *consecuente*).

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposición bicondicional (doble implicación)

El operador $\Leftrightarrow$ asigna a cada par de proposiciones p y q la proposición $p \Leftrightarrow q$.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disyunción exclusiva

p	q	p $\underline{\vee}$ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La proposición compuesta p $\underline{\vee}$ q es verdadera si y solamente si p y q tienen distinto valor de verdad.

Tautologías, contradicciones y contingencias.

- Una proposición compuesta se denomina tautología si es verdadera para cualquiera de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. Ejemplo:

p	- p	p ∨ - p
V	F	V
F	V	V

- Una proposición compuesta se denomina contradicción si es falsa para cualquiera de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. Ejemplo:

p	- p	p ∧ - p
V	F	F
F	V	F

Tautologías, contradicciones y contingencias.

- Una proposición compuesta se llama contingencia si su valor de verdad depende de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. Ejemplo:

(p	∨	q)	⇒	p
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

CONTINGENCIA

Equivalencias lógicas

- Dos proposiciones compuestas son equivalentes si presentan la misma tabla de verdad.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	v

-p	q	$-p \vee q$
F	V	V
F	F	F
V	V	V
V	F	v

- Dos proposiciones compuestas son equivalentes si y sólo si el operador bicondicional entre ellas es una tautología.

(p	⟺	q)	⟺	(p	⟹	q)	∧	(q	⟹	p)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Equivalencias lógicas

Otros ejemplos son:

- $-(p \Longrightarrow q)$ equivale a $p \wedge -q$
- p $\underline{\vee}$ q equivale a $-\left(p \Leftrightarrow q\right)$

Propiedades del Álgebra de Proposiciones

- Las propiedades que se presentan a continuación constituyen equivalencias lógicas.
- El símbolo ≡ se lee “ equivale”
- Si se obtienen las tablas de verdad de ambos miembros en cada propiedad se podrá verificar la equivalencia.
- Otro modo de verificación consiste en reemplazar " ≡ " por el bicondicional , la proposición compuesta resultante corresponderá en cada caso a una tautología.

Propiedades del Álgebra de Proposiciones

- Idempotencia
  - Disyunción → $p \vee p \equiv p$
  - Conjunción → $p \wedge p \equiv p$
- Conmutativa
  - Disyunción → $p \vee q \equiv q \vee p$
  - Conjunción → $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- Asociativa
  - Disyunción → $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
  - Conjunción → $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Propiedades del Álgebra de Proposiciones

- Absorción
  - Disyunción → $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
  - Conjunción → $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- Distributiva
  - Disyunción → $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - Conjunción → $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negación
  - Disyunción → $p \vee -p \equiv T$
  - Conjunción → $p \wedge -p \equiv C$

Observación

T: Tautología - C: Contradicción

Propiedades del Álgebra de Proposiciones

- Elemento Neutro
  - Disyunción $\Rightarrow$ $p \vee C \equiv p$
  - Conjunción $\Rightarrow$ $p \wedge T \equiv p$
- Elemento Absorbente
  - Disyunción $\Rightarrow$ $p \vee T \equiv T$
  - Conjunción $\Rightarrow$ $p \wedge C \equiv C$
- Involución $\Rightarrow$ $-(-p) \equiv p$

Propiedades del Álgebra de Proposiciones

- Leyes de De Morgan

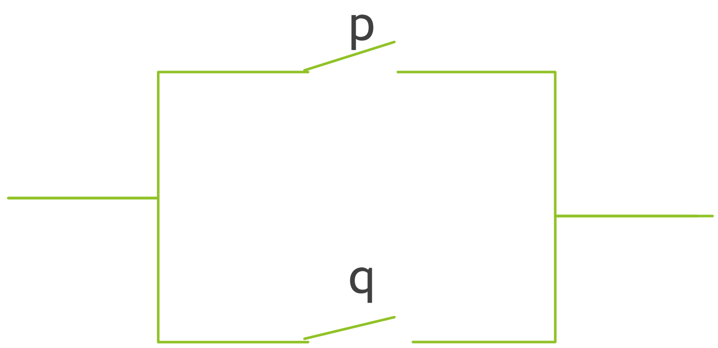
Disyunción ⟶ $-(p \vee q) \equiv (-p) \wedge (-q)$

Conjunción ⟶ $-(p \wedge q) \equiv (-p) \vee (-q)$

Circuitos lógicos

- Circuito lógico de la conjunción

- Circuito lógico de la disyunción



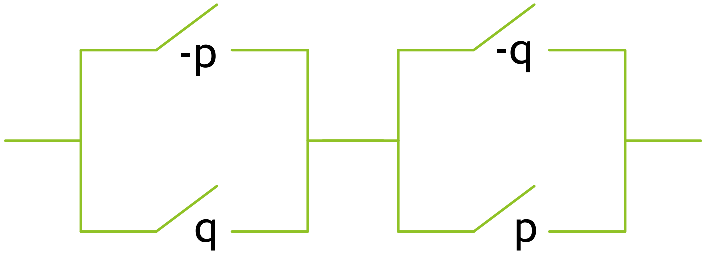
Circuitos lógicos

Para poder encontrar el circuito lógico de una proposición compuesta cualquiera, es necesario usar las propiedades y equivalencias lógicas que permitan transformarla en una proposición donde sólo intervengan disyunciones inclusivas y conjunciones entre las proposiciones simples o sus negaciones.

Ejemplo: Circuito lógico de la doble implicación

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$$
$$p \Leftrightarrow q \equiv (-p \vee q) \wedge (-q \vee p)$$

Luego, el circuito correspondiente es el que sigue



Función proposicional

- Función proposicional en una variable x es toda oración que tiene a x como sujeto y se transforma en una proposición para cada especificación de x .

  Una función proposicional *P*, por sí misma, no es falsa ni verdadera. Sin embargo, para cada ***x*** en su dominio de discurso, *P*(***x***) es una proposición y es, por lo tanto, verdadera o falsa.

  Ejemplo:

  Sea U el conjunto de números dígitos y P(x) : x es par

  P(1) es una proposición falsa y P(4) es una proposición verdadera.

- Conjunto de verdad: es el conjunto de valores que pertenecen a U y que transforman a P(x) en una proposición verdadera.

  En el ejemplo anterior: $P = \{0,2,4,6,8\}$

Cuantificadores: cuantificador universal

- Sea *P* una función proposicional con universo U. Se dice que la afirmación para toda *x*, *P*(*x*) es una *afirmación cuantificada universalmente*. Simbólicamente:

$$\forall x : P(x)$$

El símbolo ∀ se llama *cuantificador universal*.

La afirmación $\forall x : P(x)$ es verdadera si $P(x)$ es verdadera para toda *x* en *U*.

La afirmación $\forall x: P(x)$ es falsa si $P(x)$ es falsa para al menos una *x* en *U*.

Ejemplo: $\forall x: (x^2 > 0)$ en el universo de los números reales, es falsa, dado que 0 es un número real y no verifica la inecuación planteada.

Cuantificadores: cuantificador existencial

Sea P una función proposicional con dominio de discurso (universo) U. Se dice que la afirmación existe x tal que $P(x)$ es una *afirmación cuantificada existencialmente*. El símbolo ∃ significa "existe". Simbólicamente:

$$\exists x / P(x)$$

El símbolo ∃ se llama *cuantificador existencial*.

La afirmación $\exists x \ / \ P(x)$ es verdadera si $P(x)$ es verdadera para al menos una x en U.

La afirmación $\exists x \ / \ P(x)$ es falsa si $P(x)$ es falsa para toda x en U.

Ejemplo: En el universo de los números reales, $\exists x / x - 5 = 2$ es verdadera dado que 7 es un número real que verifica la ecuación. Mientras que, en el mismo universo de referencia, $\exists x / x^2 + 1 = 0$, resulta falsa.

Negación de funciones proposicionales cuantificadas

- Negación del cuantificador universal: $\boxed{-\left(\forall x : P(x)\right) \equiv \exists x / - P(x)}$

Ejemplo:

$$-\left(\forall x : x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1\right) \equiv \exists x / x^2 - 1 > 0 \wedge x \leq 1$$

Si la función proposicional cuantificada universal es verdadera, su negación, será falsa. En el ejemplo, al ser falso el universal, el existencial es verdadero.

- Negación del cuantificador existencial: $\boxed{-\left(\exists x / P(x)\right) \equiv \forall x : -P(x)}$

Ejemplo:

$$-\left(\exists x \in R / x^2 - 4 = 0\right) \equiv \forall x : x^2 - 4 \neq 0$$

El valor de verdad de la negación es falso.

Relaciones lógicas

- Implicación formal: es aquella implicación que es una tautología. No puede ocurrir que siendo el antecedente verdadero, el consecuente sea falso.

  Ej.: $p \Rightarrow (p \vee q)$

- Doble implicación formal o equivalencia lógica: es aquella doble implicación que es una tautología (p implica formalmente a q, y q implica formalmente a p).

  Ej. : $(p \Rightarrow -q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow -p)$

Condiciones necesarias y suficientes

- Si P(x) implica formalmente Q(x), diremos que P(x) es **condición suficiente** para Q(x), Q(x) si P(x); Q(x), es **condición necesaria** para P(x), P(x) sólo si Q(x).

- Si entre P(x) y Q(x) existe una doble implicación formal, diremos que P(x) es **condición necesaria y suficiente** para Q(x), P(x) si y sólo si Q(x).

En consecuencia, determinar si P(x) es condición suficiente, necesaria o necesaria y suficiente para Q(x), implica establecer en qué sentido se da la implicación formal entre las funciones proposicionales (o proposiciones) dadas

Condiciones necesarias y suficientes

Ejemplos: Sean las funciones proposicionales P(x) y Q(x) definidas en los reales.

P(x): $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Q(x): $2 < x < 3$

Q(x) implica formalmente a P(x), no puede ocurrir que siendo Q verdadera, P resulte falsa. Luego: P(x) es condición necesaria para Q(x).

Si ahora, se plantea

P(x): $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Q(x): $2 \leq x \leq 3$

P(x) es condición suficiente y necesaria para Q(x) dado que P(x) implica formalmente a Q(x) y Q(x) implica formalmente a P(x).

Implicaciones asociadas

Dada una implicación (teorema) $p \Longrightarrow q$, que denominaremos implicación directa (teorema directo), existen tres implicaciones asociadas a ella. A saber:

Implicación recíproca (teorema recíproco): $q \Longrightarrow p$

Implicación contraria(teorema contrario): $-p \Longrightarrow -q$

Implicación cotrarrecíproca (teorema contrarrecíproco): $-q \Longrightarrow -p$

Las implicaciones (teoremas) directas y contrarrecíprocas son equivalentes.

Implicaciones asociadas: resumen

$p \Rightarrow q$	recíprocos	$q \Rightarrow p$
contrarios	contrarrecíprocos / contrarrecíprocos	contrarios
$-p \Rightarrow -q$	recíprocos	$-q \Rightarrow -p$

Implicaciones asociadas: ejemplo

Dada $\forall x, y \in N: x > y \Longrightarrow x^2 > y^2$, las implicaciones asociadas son:

$\forall x, y \in N: x^2 > y^2 \Longrightarrow x > y$, implicación recíproca.

$\forall x, y \in N: x \leq y \Longrightarrow x^2 \leq y^2$, implicación contraria.

$\forall x, y \in N: x^2 \leq y^2 \Longrightarrow x \leq y$, implicación contrarrecíproca.

Razonamientos

- Razonamiento: Es todo par ordenado $(\{p_i\};q)$ en el que $\{p_i\}$ es un conjunto finito de proposiciones, llamadas premisas, y q una proposición, llamada conclusión, respecto de la cual se afirma que deriva de las premisas.
- Razonamiento deductivo: es aquel razonamiento en el que las premisas son evidencia de la verdad de la conclusión (si las premisas son verdaderas, la conclusión es verdadera)
- Razonamiento deductivo válido: si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión, falsa.
- La expresión $(\{p_i\};q)$ se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Nota: $\therefore$ se lee "por lo tanto"

Reglas de inferencia

Esquemas válidos de razonamiento, independientemente de la verdad o falsedad de las proposiciones componentes.

- Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \Rightarrow q} \\ \therefore q \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{-q} \\ \therefore -p \end{array}$$

- Silogismo hipotético

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

Validez de un razonamiento deductivo

¿Cómo determinar la validez de un razonamiento deductivo?

- Primera opción: Construir la tabla de verdad para la implicación entre la conjunción de las premisas y la conclusión. Si resulta una tautología, el razonamiento deductivo es válido. En general, procuraremos no utilizar este camino.
- Segunda opción: Aplicar la definición de razonamiento deductivo válido. Es decir, realizar la verificación directa de que si las hipótesis o premisas son verdaderas, la conclusión también lo es.
- Tercera opción: Aplicar las reglas de inferencia.

Validez de un razonamiento deductivo

Determine si los siguientes razonamientos deductivos son o no válidos:

1) $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{p} \\ \therefore -q \end{array}$$

Para que las dos premisas resulten verdaderas, sólo se requiere que el valor de verdad sea verdadero. Si ocurre que q es verdadera, se presenta un caso donde a premisas verdaderas sigue una conclusión falsa.

En consecuencia: el razonamiento no es válido.

2) $$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{array}\right] \\ \underline{-r} \\ -p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ \underline{-r} \\ \therefore -p \end{array}$$

Si se asocian las dos primeras premisas, aplicando Silogismo Hipotético, se obtiene como conclusión: $p \Longrightarrow r$.

Se reemplazan las dos primeras premisas por la conclusión anterior y se aplica Modus Tollens.

El razonamiento deductivo es válido.