## 1.2 Conjuntos

En esta sección se tratará con objetos llamados **conjuntos** y **elementos**. Los conceptos de conjunto y elemento se definen como "**conceptos primitivos**". Existe un sentido intuitivo que todos tienen de estos objetos, es decir, "un **conjunto** es una cierta colección o agrupación de objetos llamados **elementos**". Los conjuntos se representarán con letras mayúsculas como A, B, C, etc.

### 1.2.1 Relaciones de: igualdad, pertenencia e inclusión

Una de las relaciones más elementales e importantes que existe entre los objetos, elementos o conjuntos, es la relación de **igualdad,** la cual se representa por el símbolo = y se lee "igual". La expresión $a = b$ se lee "a es igual a b" y significa que "el elemento representado por a es el mismo que el elemento representado por b".

En lo que sigue del libro, por razones de comodidad, se dirá simplemente "el elemento a", en lugar de "el elemento representado por a" y "el conjunto A" en lugar de "el conjunto representado por A".

La negación de la relación "$a = b$" se denota por "$a \neq b$" y se lee "a es diferente a b" o "a no es igual a b".

**Teorema 1.**

La relación de igualdad cumple con las siguientes propiedades:

Sean a, b, c elementos de A

i) $\forall a \in A,\ a = a$ (Reflexiva)

ii) si $a = b$ entonces $b = a$ (Simétrica)

iii) si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$ (Transitiva)

**Demostración**

Es consecuencia inmediata de la definición de $a = b$.

**Corolario 1**:

Si $u \neq v$ entonces $v \neq u$.

**Demostración**:

Basta aplicar el principio de contraposición a la propiedad simétrica (ii).

**Observación 1:**

En lo que sigue del texto esta relación de igualdad y sus propiedades quedarán fácilmente establecidas en cada sistema numérico que se define, como en el sistema de los números naturales, enteros, racionales y reales.

Otra relación importante es la que existe entre elementos y conjuntos, llamada relación de **pertenencia**, que se denota con el símbolo $\in$ y se lee "pertenece". No se define la relación de pertenencia; se la aceptará como **concepto primitivo** y se le dará el sentido intuitivo que todos tienen de ella.

Así, si A es un conjunto y si x es un elemento de A, la expresión simbólica $\mathbf{x \in A}$**,** se lee **"x pertenece a A"** y significa que **"x es un elemento del conjunto A"**.

La negación de la relación $x \in A$ se denota por $\mathbf{x \notin A}$ y se lee: **"x no pertenece al conjunto A ".**

Una tercera relación entre objetos, en este caso entre conjuntos, es la relación de **inclusión**, que se representa por el símbolo $\subset$ y que se lee **"incluido en" o "contenido en".**

**Definición 1.-** Sean A y B dos conjuntos, A está incluido en B, lo que se denota $A \subset B$ si, y sólo si, todo elemento de A es elemento de B.

Simbólicamente:

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)}$$

Si $A \subset B$ se dirá también que A es un **subconjunto** de B, o que A está **contenido** en B.

**Ejemplo 1.**

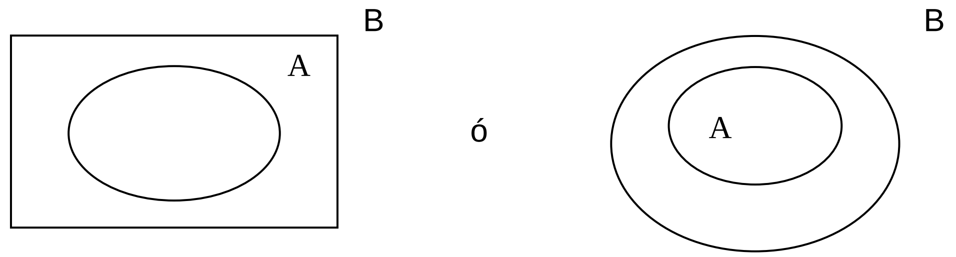
Si A es el conjunto cuyos elementos son todos los paralelogramos y B es el conjunto cuyos elementos son todos los cuadriláteros, entonces $A \subset B$, pues todo paralelogramo es un cuadrilátero; es decir, todo elemento de A es elemento de B.

La negación de la relación $A \subset B$ se denota por $A \not\subset B$ y se lee "A no está incluido (o no está contenido) en B"; significa que "existe por lo menos un elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$".

Simbólicamente:

$$\boxed{A \not\subset B \iff (\exists\, x \in A \,/\, x \notin B)}$$

Es usual representar gráficamente los conjuntos A, B, C,... con circunferencias, rectángulos o alguna simple curva cerrada. Así la relación $A \subset B$ se representa mediante los siguientes diagramas:



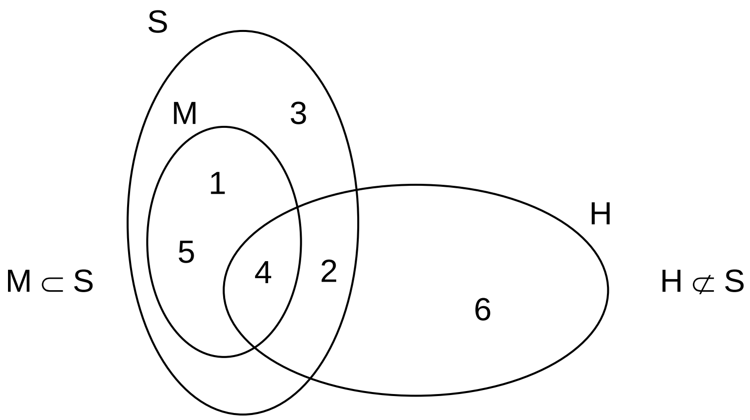

**Ejemplo 2.**

Sean

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $M = \{1, 4, 5\}$ y $H = \{2, 4, 6\}$.

Entonces, $M \subset S$, pero, $H \not\subset S$ pues $\exists x = 6 \in H \,/\, x \notin S$.

Gráficamente:




**Teorema 2**

(a) $A \subset A$; para todo conjunto A (Propiedad reflexiva)

(b) Si $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (Propiedad transitiva)

**Demostración:**

(b) Para todo x, la proposición compuesta:

$[(x\in A \Rightarrow x\in B) \wedge (x\in B \Rightarrow x\in C)] \Rightarrow (x\in A \Rightarrow x\in C)$

es verdadera (tautología) luego aplicando la definición de inclusión se tiene:

$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

**De la Teoría Axiomática de Conjuntos, debido a su complejidad, se mencionará sólo cinco axiomas: Sustitución, Extensión, Especificación, del Conjunto Potencia, y la existencia de la Unión de Conjuntos**. Estos axiomas serán descritos a continuación y al mismo tiempo se irá explicando su importancia.

### 1.2.2 Axiomas

**Axioma 1. (Axioma de Sustitución)**

**“Sea P(x) una proposición respecto a la variable x. Si P(x) es verdadera y si u = x, entonces P(u) es también verdadera”.**

Así por ejemplo, sea P(x) la proposición dada por la expresión “$x \in E$”. Si P(x) es verdadera, o sea “$x \in E$” es verdadera, y si u = x, entonces P(u) es verdadera, o sea “$u \in E$” es verdadera.

**Axioma 2. (Axioma de Extensión)**

**“Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos”**. O sea, “**A es igual a B si, y sólo si, todo elemento de A pertenece a B** y, recíprocamente, **todo elemento de B pertenece a A”.**

Simbólicamente

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow [\, A \subset B \wedge B \subset A \,]}$$

O también

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\ [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

La negación de la relación A = B se denota con $A \neq B$, se lee “A no es igual a B” o “A es diferente de B”, y significa que existe por lo menos un elemento de A que no está en B o que existe por lo menos un elemento de B que no está en A.

Simbólicamente

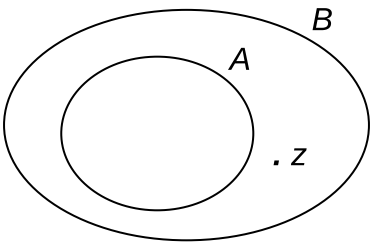
$$\boxed{A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\ (x \in A \wedge x \notin B) \vee (\exists y)\ (y \in B \wedge y \notin A)}$$

**Definición 2.** Dados los conjuntos A y B, se dice que **A es subconjunto propio de B o que A es parte propia de B**, y se denota por $A \underset{\neq}{\subseteq} B$; si, y sólo si $A \subset B \wedge A \neq B$.

Simbólicamente

$$\boxed{A \underset{\neq}{\subset} B \Leftrightarrow A \subset B \wedge \exists\, z \in B \,/\, z \notin A}$$

Gráficamente:




Hasta ahora, se ha utilizado la noción de pertenencia para definir nuevas relaciones y se han dado ejemplos de conjuntos. Pero, ¿cómo construir nuevos conjuntos a partir de un conjunto dado? Para hacerlo, es necesario el siguiente axioma.

**Axioma 3. (Axioma de Especificación)**

**“Dado un conjunto E y una proposición P(x) con x $\in$ E, existe un único subconjunto A de E, cuyos elementos son todos los elementos x $\in$ E tales que P(x) es verdadera”.**

Tal subconjunto se denota por:

$$A = \{x \in E \,/\, P(x) \text{ es verdadera}\}$$

o, simplemente,

$$A = \{x \in E \,/\, P(x)\}$$

que se lee “A es el subconjunto de E formado por todos los elementos x $\in$ E, tales que la proposición P(x) es verdadera”.

Así, el conjunto A se caracteriza por la condición

$$x \in A \Leftrightarrow P(x) \text{ es verdadera.}$$

En algunos textos de secundaria, este axioma es presentado como la definición de un **conjunto determinado por comprensión**; es decir, aquel conjunto en el que se indica la propiedad P(x), que caracteriza a los elementos del conjunto. En este sentido, la llamada definición de **conjunto determinado por extensión**, en la que se enumeran o indican sus elementos no es más que un caso particular del axioma de especificación, como se verá en los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 3.**

Sea E = $\mathbb{N}$ = {0,1,2,3,4,…….}**,** el conjunto de los números naturales y Q(x) la propiedad "x es par"; o sea x = 2n, con n $\in \mathbb{N}$, entonces por el axioma de especificación, existe un único subconjunto P de $\mathbb{N}$ tal que:

$$P = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x = 2n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{(por comprensión)}$$

llamado conjunto de los números naturales pares, es decir:

$$P = \{0,2,4,6,8,\ldots\ldots\ldots\}$$

Se nota que 0 = 2(0), 0 $\in \mathbb{N}$, por tanto **cero es un número par**.

**Ejemplo 4**

Sea E = {1,2,3,4,5,6,7} y Q(x): x=1 $\vee$ x=3 $\vee$ x=5 $\vee$ x=7; luego, por el axioma de especificación, existe un único subconjunto B de E tal que:

$$B = \{x \in E \ / \ Q(x)\} = \{x \in E \ / \ x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5 \vee x = 7\}$$

Luego,

$$B = \{1, 3, 5, 7\} \qquad \text{(por extensión)}$$

que también se puede escribir

$$B = \{x \in E / \ x \text{ es impar}\} \qquad \text{(por comprensión)}$$

**Ejemplo 5**

Se considera un conjunto y una proposición.

Sea E el conjunto formado por todos los alumnos de un determinado salón de clase.

P(x): x cumple años en Agosto

El subconjunto A determinado por esta propiedad será el de todos los alumnos del salón que cumplan años en agosto. Al sustituir x por cada alumno del salón el enunciado “x cumple años en agosto” es verdadero o falso. El conjunto de los alumnos x del salón para los cuales P(x) es verdadero, es el único subconjunto A de E con esta propiedad.

Se usará el Axioma de Especificación para presentar algunos conjuntos especiales: Para completar el lenguaje de los conjuntos se necesita introducir un nuevo conjunto llamado **conjunto vacío**, el cual se denota por $\phi$, que no tiene ningún elemento y que está contenido en cualquier conjunto A, o sea, $\phi \subset A$.

Usando el axioma de especificación, este conjunto se puede definir de la siguiente manera:

$$\phi = \{ x \in A \,/\, x \neq x \}.$$

Como la definición de $\phi$ depende del conjunto A, se puede denotarlo también por $\phi_A$. En cursos avanzados; se define, finalmente, el conjunto vacío $\phi$, se demuestra que es único y que $\phi \subset A$ para todo conjunto A.

Sean E un conjunto no vacío, $a \in E$, y P(x) la propiedad: x = a, entonces por el axioma de especificación, existe un único subconjunto A de E tal que:

$$A = \{x \in E \,/\, x = a\} = \{a\}.$$

A este tipo de conjunto, que tienen un solo elemento, se les llama **Conjunto Unitario.**

**Ejemplo 6**

Sean E = {4, 9, 7} y los enunciados P(x): "x es par" y Q(x): 2x+1=15, entonces por el axioma de especificación, el conjunto $A = \{x \in E/ P(x)\} = \{4\}$ y $B = \{x \in E/ 2x + 1 = 15\} = \{7\}$. A y B son conjuntos unitarios.

Finalmente, en lo que sigue siempre se trabajará con subconjuntos de un conjunto dado fijo al cual se le llamará **Conjunto Universal o Referencial**, y se le denotará con la letra **U**. Algunas veces se representa gráficamente por un rectángulo:


Por ejemplo, el conjunto de todos los alumnos de un determinado colegio es un conjunto universal. Podría ser también el conjunto de todos los alumnos de un salón, etc. Si se trabaja con números, puede ser un conjunto particular como U = {3, 5, 6, 8, 2, 45, 0}, o el conjunto de todos los números naturales ($\mathbb{N}$), o el conjunto de todos los números enteros ($\mathbb{Z}$), etc. El conjunto universal no es único, pero una vez adoptado para cierto contexto, ya no se cambia.

A continuación se presenta otro axioma que permite construir nuevos conjuntos a partir de uno dado.

**Axioma 4. (Axioma del conjunto potencia)**

**"Dado un conjunto E, existe un conjunto y solamente uno cuyos elementos son todos los subconjuntos de E".**

Tal conjunto se denota con $\mathcal{P}(E)$ y se le llama **conjunto potencia de E o conjunto de partes de E**.

En símbolos: $\mathcal{P}(E) = \{A \,/\, A \subset E\}$, es decir:

$$\boxed{A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E}$$

o, equivalentemente, A no es elemento de $\mathcal{P}(E)$ si, y sólo si, A no es subconjunto de E. En símbolos:

$$\boxed{A \notin \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \not\subset E}$$

**Ejemplo 7**

a) Si $A = \{a, b, c\}$, o sea si A tiene tres elementos, entonces el conjunto de todos los subconjuntos o partes de A, $\mathcal{P}(A)$ tiene $2^3 = 8$ elementos.

   En efecto $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

b) Si $E = \phi$, entonces $\mathcal{P}(\phi) = \{ A \,/\, A \subset \phi \} = \{\phi\}$, es decir $\mathcal{P}(\phi)$ tiene $2^0 = 1$ elemento.

c) Si $E = \mathcal{P}(\phi)$ entonces $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) = \mathcal{P}(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$ tiene $2^1 = 2$ elementos.

**Observación 2:**

a) Como para todo conjunto E, $\phi \subset E$ y $E \subset E$, entonces

$$\phi \in \mathcal{P}(E) \quad \text{y} \quad E \in \mathcal{P}(E)$$

b) Se demuestra que, si A es un conjunto que tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene $2^n$ elementos. Este resultado se demuestra usando inducción matemática.

## EJERCICIOS 1.2

1. ¿Cuántos conjuntos no vacíos se pueden formar con los elementos: lápiz (l), regla (r), tajador (t) y borrador (b)?, es decir, hallar todos los subconjuntos, no vacíos, de {b, l, r, t}.

2. Dado los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{\{1\},\{2\}\}$

   Determinar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) $\{2\}\in A$
   b) $3\in A$
   c) $2\in A$
   d) $\{3\}\subset A$
   e) $\{1\}\in B$
   f) $B \subset A$
   g) $\{2\}\subset A$
   h) $\{1,2\} \subset B$
   i) $\{1\}\subset A$
   j) $\phi \subset A$

3. Complete la demostración del teorema 1.
4. Pruebe que si $B \subset A$, entonces $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A)$
5. Pruebe que $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$ si, y sólo si, $A = B$.
6. Determinar el número de subconjuntos A de $\mathcal{N}$ que cumplen con la condición de que "la suma de los elementos de A es igual a 8".
7. Determinar cuántos subconjuntos A de P existen, siendo $P = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, de manera que se cumplan las siguientes condiciones:
   a. A tiene tres elementos.
   b. La suma de los elementos de A es un número positivo.

## 1.3 Operaciones con Conjuntos

A partir de dos conjuntos dados se construirá nuevos conjuntos, usando los axiomas de la unión y de especificación.

### 1.3.1 Unión de Conjuntos

**Axioma 1 (Axioma de la unión de conjuntos)**

**"Dados dos conjuntos A y B, existe un conjunto U tal que $A \subset U$ y $B \subset U$".**

Este axioma garantiza la existencia de un conjunto, por ejemplo un conjunto que se puede denotar por **U** y considerarse como conjunto universal. Con elementos de este conjunto **U**, usando el axioma de especificación se puede definir nuevos conjuntos.

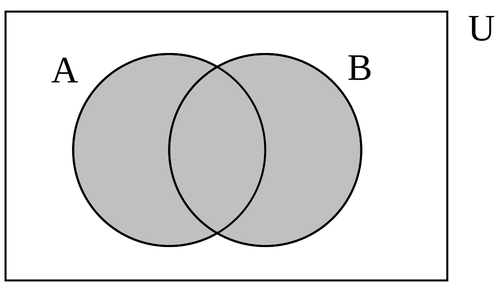
**Definición 1.-** Sean $A \subset U$ y $B \subset U$ dos conjuntos, la unión de A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos $x \in U$ tales que $x \in A$ o $x \in B$.
Simbólicamente

$$\boxed{A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \ \text{v} \ x \in B\}}$$

Es decir

$$\boxed{x \in (A \cup B) \Leftrightarrow [x \in A \text{ v } x \in B]}$$

Gráficamente:




**Observación 1:**

Notar que se está usando la **disyunción** ( v ). Aplicando la Ley de De Morgan para la **disyunción** (ver el cuadro de las propiedades y principios lógicos) se formula la definición equivalente "por negación":

x **no** es elemento de $A \cup B$ si y sólo si, x **no** es elemento de A **y** x **no** es elemento de B.

Simbólicamente:

$$\boxed{x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow [x \notin A \wedge x \notin B]}$$

**Teorema 1 (Propiedades de la Unión)**

Dado los conjuntos A, B, C, D, y $\phi$, en un conjunto universal **U**, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A \subset A \cup B \wedge B \subset A \cup B$

b) $A \subset D \wedge B \subset D \Rightarrow A \cup B \subset D$

c) $A \cup A = A$ (Idempotencia)

d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociativa)

e) $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa)

f) $A \cup \phi = A$ (Elemento Neutro)

g) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

**Demostración:**

A manera de ilustración, demostraremos algunas de las propiedades:

d) La demostración de esta proposición consistirá en aplicar el axioma de extensión, o sea probar la doble inclusión (dos implicaciones)

En efecto,

| | | |
|---|---|---|
| $x \in [(A \cup B) \cup C]$ | $\Rightarrow x \in A \cup B \vee x \in C$ | (Def. de Unión) |
| | $\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$ | (Def. de Unión) |
| | $\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ | (Asociatividad) |
| | $\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \cup C)$ | (Def. de Unión) |
| | $\Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ | (Def. de Unión) |

Lo que prueba que: $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

Análogamente se prueba que: $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

Aplicando el axioma de extensión a las dos últimas relaciones se sigue que:

$$(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$$

### 1.3.2 Intersección de Conjuntos

**Definición 2.** Sean $A \subset U$ y $B \subset U$ dos conjuntos, **la intersección de A y B,** denotada por $A \cap B$ es el conjunto formado por todos los elementos x de U, tales que $x \in A$ y $x \in B$.

$$\boxed{A \cap B = \{x \in U \ / \ x \in A \wedge x \in B\}}$$

Es decir

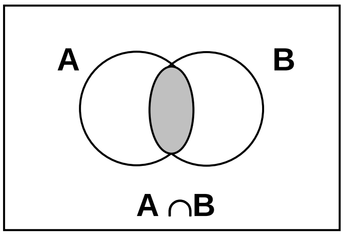
$$\boxed{X \in (A \cap B) \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]}$$

O, equivalentemente, por negación: x no es elemento de $A \cap B$ si, y sólo si, x **no** es elemento de A o x **no** es elemento de B.

Simbólicamente:

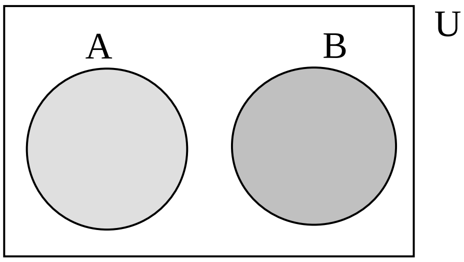
$$\boxed{x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow [x \notin A \vee x \notin B]}$$

Gráficamente:




**Observación 2:**

Si $A \cap B = \phi$, se dirá que los conjuntos A y B son disjuntos. Puede representarse gráficamente de la siguiente manera:




**Teorema 2 (Propiedades de la Intersección)**

Dado los conjuntos A, B, C y $\phi$, en el conjunto universal **U**, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A \cap B \subset A \wedge A \cap B \subset B$

b) $A \cap A = A$ (Idempotencia)

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Asociativa)

d) $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativa)

e) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = B$

f) $A \cap \phi = \phi$; $A \cap U = U$

**Demostración**:

a) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (Def. Intersección)

$\Rightarrow x \in A$ ($p \wedge q \Rightarrow p$ es siempre verdadera )

Luego: $A \cap B \subset A$ (Def. Inclusión)

En los siguientes teoremas se asumirá que los conjuntos considerados son subconjuntos de un determinado conjunto universal **U**.

**Teorema 3** (**Propiedades distributivas**)

Dado los conjuntos A, B y C se cumplen las siguientes propiedades distributivas:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Demostración**:

a) $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$ (Def. de Intersección)

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (Def. de Unión)

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ (Distributiva)

$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$ (Def. de Intersección)

$\Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ (Def. de Unión)

Luego $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ (Transitividad)

O sea $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Análogamente se prueba que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$, de donde, por el axioma de extensión se obtiene la igualdad.

b) La demostración es similar al caso (a).

### 1.3.3 Diferencia de Conjuntos

**Definición 3.** Dados los conjuntos $A \subset U$ y $B \subset U$, **la diferencia de A y B**, denotado por A -B, es el conjunto formado por todos los elementos x de U tales que $x \in A$ y $x \notin B$.

Simbólicamente: $\boxed{A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}}$

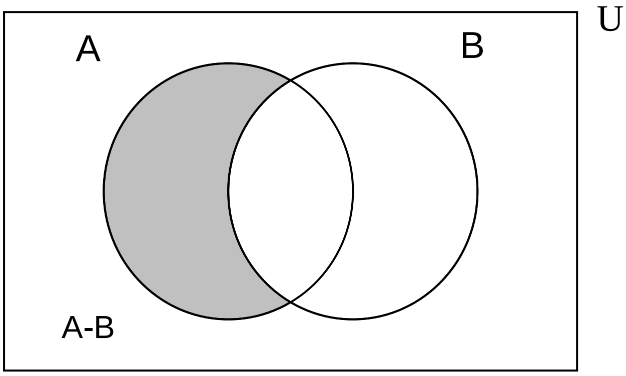
Es decir,

$$\boxed{X \in A - B \Leftrightarrow [\, x \in A \wedge x \notin B \,]}$$

o equivalentemente

$$\boxed{X \notin A - B \Leftrightarrow [\, x \notin A \vee x \in B \,]}$$

Gráficamente, la región sombreada muestra el conjunto A - B:




**Ejemplo 1**

Sea U = N = {0,1,2,3,4,……..}. Si A = {1,2,5,7} y B = {2,3,4,5,6}. Entonces A-B = {1,7} y B-A = {3,4,6}

Nótese que, $A\text{-}B \neq B\text{-}A$.

**Teorema 4**

Dado los conjuntos A, B, C, y $\phi$, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A - \phi = A$

b) $A - A = \phi$

c) $A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

d) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

La demostración se deja como ejercicio.

### 1.3.4 Complemento de un Conjunto.

**Definición 4.-** Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subset B \subset U$. Se llama **complemento de A con respecto al conjunto B**, y se denota por $\mathcal{C}_B A$, a la diferencia B -A.

Es decir, $\mathcal{C}_B A = B - A$.

El complemento de un conjunto con respecto a otro es un caso particular de la diferencia de conjuntos.

Si B = U, el complemento de A respecto a U se denota simplemente por: $\mathcal{C}A$. En este caso se tiene por definición que:

**x pertenece a $\mathcal{C}$A si, y sólo si, x no es elemento de A.**

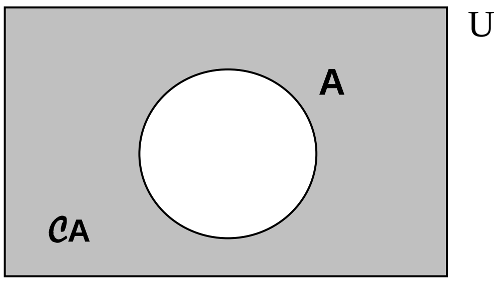
En símbolos,

$$\boxed{x \in \mathcal{C}A \Leftrightarrow x \notin A}$$

o, equivalentemente

$$x \notin \mathcal{C}A \Leftrightarrow x \in A.$$

Gráficamente:




**Ejemplo 2**

a) Si A = {a, e, i, o, u}, B = {a, e, o} y C = {a},
   entonces $\mathcal{C}_A B$ = {i,u}, $\mathcal{C}_A C$ = {e,i,o,u} y $\mathcal{C}_B C$ = {e,o}

b) Sean U = N = {0,1,2,3,4,………} y P = {0,2,4,6,8,……....}, el conjunto de los números naturales pares; entonces su complemento es
   $\mathcal{C}$P = {1,3,5,7,9,……....}, el conjunto de los números naturales impares.

**Teorema 5.**

Dado los conjuntos $\phi$, $A \subset U$ y $B \subset U$, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{C}(\mathcal{C}A) = A$

b) $A \subset B \Rightarrow \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$; $\mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A \Rightarrow A \subset B$

c) $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$

d) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$

e) $A \cap \mathcal{C}A = \phi$

f) $A \cup \mathcal{C}A = U$

g) $\mathcal{C}\phi = U$ y $\mathcal{C}U = \phi$.

**Demostración:**

a) $x \in \mathcal{C}(\mathcal{C}A)$ $\Rightarrow x \in U \wedge x \notin \mathcal{C}A$ (Def. de Complemento)

$\Rightarrow x \in U \wedge x \in A$ (Def. de Complemento)

$\Rightarrow x \in (A \cap U)$ (Def. de Intersección)

$\Rightarrow x \in A$ (Teorema 3.f )

Luego $\mathcal{C}(\mathcal{C}A) \subset A$

Análogamente, se prueba que $A \subset \mathcal{C}(\mathcal{C}A)$ y en consecuencia la igualdad.

b) Se prueba que $A \subset B \Rightarrow \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$.

Si $x \in \mathcal{C}B$ $\Rightarrow x \notin B$ (Def. de Complemento)

$\Rightarrow x \notin A$ (Hipótesis: $A \subset B$)

$\Rightarrow x \in \mathcal{C}A$ (Def. de Complemento)

Entonces $x \in \mathcal{C}B$ $\Rightarrow x \in \mathcal{C}A$ (Transitiva)

Y en consecuencia, $\mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$ (Def. de inclusión)

Análogamente se prueba que $\mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A \Rightarrow A \subset B$.

c) Si $x \in \mathcal{C}(A \cap B)$ $\Rightarrow x \notin A \cap B$ (Def. de Complemento)

$\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$ (Def. de Intersección )

$\Rightarrow x \in \mathcal{C}A \vee x \in \mathcal{C}B$ (Def. de Complemento)

$\Rightarrow x \in (\mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B)$ (Def. de Unión)

Entonces $x \in \mathcal{C}(A \cap B)$ $\Rightarrow x \in \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$ (Propiedad Transitiva)

Y en consecuencia $\mathcal{C}(A \cap B) \subset \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$ (Def. de inclusión)

### 1.3.5 Ejemplos de aplicación de operaciones con conjuntos.

Para dar los ejemplos de aplicación, se supondrá que el lector está familiarizado con las propiedades elementales del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Si el conjunto E tiene r elementos, donde r es un número natural, se dirá que E es un conjunto finito y se escribirá $n(E) = r$. Si E es el conjunto vacío, o sea, $E = \phi$, se aceptará que $n(\phi) = 0$. Sean A y B conjuntos finitos, entonces:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Observa que se resta $n(A \cap B)$ para no contar dos veces los elementos comunes de A y B.

En particular, si $A \cap B = \phi$, es decir si $A \cup B$ es una unión disjunta, entonces

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Si además se tiene un conjunto finito C, entonces se cumple:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Pruebe esta igualdad usando la anterior.

Aplica estos resultados a los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3**

A continuación, damos alguna información sobre el conjunto U de los alumnos del Cuarto año del Colegio José Carlos Mariátegui de Comas. Sean: A el subconjunto de los alumnos que pertenecen al equipo de fútbol, y B el subconjunto de los estudiantes que pertenecen al club de poetas. Si además, $n(A) = 12$, $n(B) = 5$ y $n(A \cup B) = 14$.

a) ¿Cuántos alumnos del equipo de fútbol pertenecen también al club de poetas?
b) ¿Cuántos alumnos del club de poetas no están en el equipo de fútbol?

Solución:

a) El conjunto de alumnos que pertenecen al equipo de fútbol y al club de poetas es $A \cap B$.

   Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,

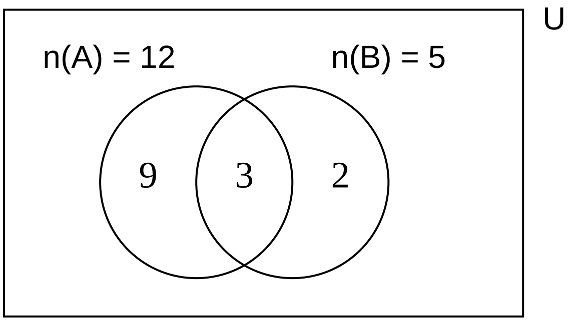
   se tiene: $14 = 12 + 5 - n(A \cap B)$

   de donde: $n(A \cap B) = 3$.

Por lo tanto el número de alumnos que pertenecen al equipo de fútbol y al club de poetas es 3.

b) n(B)= 5 y n(A $\cap$ B) = 3, luego el número de alumnos del club de poetas, que no están en el equipo de fútbol, es 2.

Observa el diagrama siguiente:




**Ejemplo 4**

A un grupo de 25 alumnos se les ha tomado un examen de Matemática y un examen de Historia, obteniéndose los siguientes resultados: 16 alumnos aprobaron Matemática; 20 alumnos aprobaron Historia y 14 aprobaron ambas asignaturas.

a) ¿Cuántos alumnos aprobaron por lo menos un curso?
b) ¿Cuántos alumnos aprobaron sólo Matemática?
c) ¿Cuántos alumnos no aprobaron ninguna de las dos asignaturas?

Solución:

Sean: U el conjunto formado por los 25 alumnos, entonces n( U ) = 25; A el subconjunto de U, de los alumnos que aprobaron Matemática, luego n(A)=16 y B el subconjunto de U, de los alumnos que aprobaron Historia, es decir n( B ) = 20

Entonces, el subconjunto de U, de los alumnos que aprobaron ambas asignaturas es A$\cap$B y en consecuencia n(A$\cap$B) = 14

a) El conjunto de los alumnos que aprobarán por lo menos un curso, Matemática o Historia es A$\cup$B y n(A $\cup$ B) = n(A)+ n(B) – n(A $\cap$ B)

   es decir n(A $\cup$ B) = 16 + 20 - 14 = 22

   Luego, aprobaron por lo menos un curso: 22 alumnos.

b) El conjunto A puede expresarse como la unión disjunta de los conjuntos de alumnos que aprobaron sólo Matemática: A-B y el de alumnos que aprobaron Matemática e Historia: A $\cap$ B; es decir, A = (A - B) $\cup$ (A $\cap$ B), siendo la unión disjunta.

   Luego, n(A) = n(A - B) + n(A $\cap$ B)

o sea 16 = n(A - B) + 14

de donde n(A - B) = 2

Por lo tanto, aprobaron sólo Matemática: 2 alumnos.

c) El conjunto de los alumnos que no aprobaron ninguna de las asignaturas es X $(A \cup B)$.
Como $U = (A \cup B) \cup \mathcal{C}(A \cup B)$, donde la unión es disjunta,
entonces $n(U) = n(A \cup B) + n(\mathcal{C}(A \cup B))$

o sea $25 = 22 + n(\mathcal{C}(A \cup B))$

de donde $n(\mathcal{C}(A \cup B)) = 3$

Luego no aprobaron ninguna de las dos asignaturas: 3 alumnos.

**Ejemplo 5**

Una agencia de turismo convocó a un concurso para administradores con conocimientos de algún idioma extranjero. De los que se presentaron, 25 saben Inglés; 21 Francés; y 17 Alemán. Además: 17 saben inglés y francés; 14 inglés y alemán; 11 francés y alemán; y 9 Inglés francés y alemán.

¿Cuántas personas se presentaron al concurso?

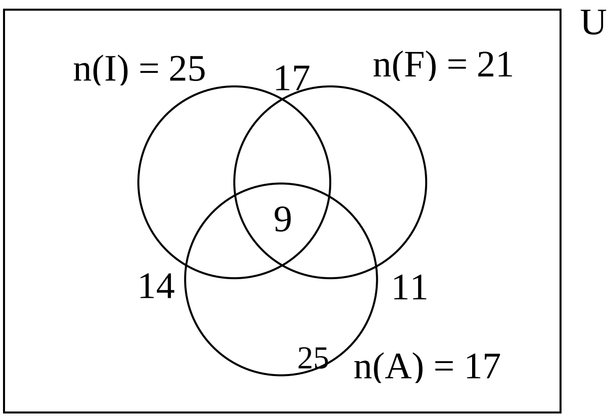
Solución:

Del conjunto formado por los participantes en el concurso, se considera los siguientes subconjuntos, de acuerdo al conocimiento del idioma:

| | | |
|---|---|---|
| I, | los que saben inglés, luego | n(I) = 25 |
| F, | los que saben francés, es decir: | n(F) = 21 |
| A, | los que saben alemán, o sea | n(A) = 17 |

De los conjuntos anteriores se obtiene los siguientes conjuntos y sus números de elementos:

| | |
|---|---|
| $I \cap F$, los que saben inglés y francés | $n(I \cap F) = 17$ |
| $I \cap A$, los que saben inglés y alemán | $n(I \cap A) = 14$ |
| $F \cap A$, los que saben francés y alemán | $n(F \cap A) = 11$ |
| $I \cap F \cap A$, que saben inglés, francés y alemán | $n(I \cap F \cap A) = 9$ |



Como $n(I \cup F \cup A) = n(I) + n(F) + n(A) - n(I \cap F) - n(I \cap A) - n(F \cap A) + n(I \cap F \cap A)$ resulta: $n(I\cup F\cup A) = 25 + 21 + 17 – 17 – 14 – 11 + 9 = 30$.

## EJERCICIOS 1.3

1. Dado $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $M = \{x\in U/\ 2 \leq x < 8\}$ y $N =\{x\in U/\ x=2n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$, determinar los siguientes conjuntos:

   a) $(M - N) \cup (N – M$ b) $(M \cup N) - (M \cap N)$

   Comprueba que los conjuntos obtenidos en (a) y (b) son iguales. Al conjunto $(A-B) \cup (B – A)$, se le llama **diferencia simétrica** de A y B y se le denota por $A \Delta B$. Pruebe que

   $$A \Delta B=(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

2. Sea $E= \{x\in \mathbb{N} / x \geq 2\}$. Si A es el subconjunto formado por todos los números naturales de E; B es el subconjunto de E formado por todos los múltiplos de 3, y C es el subconjunto de E formado por todos los múltiplos de 5.
   C es el subconjunto de E formado por todos los múltiplos de 5:
   a) Determinar los conjuntos $A \cap C$, $B \cap C$ y $(A \cap B) \cap C$
   b) Determinar el conjunto $= \{x\in E /\ x=n^2,\ n\in (A \cap B) \cap C,\ n<20\}$

3. Se aplica una encuesta a 30 televidentes y se determina que a 14 de ellos no les gusta ver el fútbol; a 11 no les gusta ver novelas y a 6, no les gusta ver ni el ni el fútbol, ni las novelas. ¿A cuántos televidentes, de los 30 encuestados, les gusta ver fútbol y novelas?

4. Si $A \subset B \subset \mathbf{U}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Para las proposiciones falsas muestra un contraejemplo.

   a) $A – B = (A \cup B) - B$ b) $A \cap CB = \phi$ c) $A \Delta B = B$

5. Dado los conjuntos:
   $A = \{ x \in \mathbb{N} / x^2 – 7 = 9\}$
   $B = \{ x \in \mathbb{N}$ / $x^2$ no tiene más de dos cifras$\}$
   $C = \{3, 5, 8, 9\}$

Y el conjunto universal: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Determinar $(\mathcal{C}\, A \cup C) \cap [(\mathcal{C}\,(A \cap B)) - \mathcal{C}\, C]$.

6. Si el conjunto A tiene 5 elementos y el conjunto B tiene 8 elementos, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones puede ser cierta en algún caso?

I) $A - B$ tiene 2 elementos

II) $B - A$ tiene un elemento

III) $A \cup B$ tiene 6 elementos

IV) $A \cap B$ tiene 5 elementos

V) $A \cap B$ tiene 6 elementos

VI) $B - A$ tiene 4 elementos

VII) $A \cup B$ tiene 13 elementos

VIII) $A \,\Delta\, B$ tiene 11 elementos

7. Graficar: $[\mathcal{C}\,(A - (A \,\Delta\, B))] \cap (A \cup \mathcal{C}\, B)$

8. Encontrar tres subconjuntos M, N y P en el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

a) $M \,\Delta\, N = M \cup N$

b) $(M \cup N) - P \neq \phi$

c) $\mathcal{C}\, P$ tiene 3 elementos

9. Encuentra tres conjuntos no vacíos P, Q, R en el universo U = {Doris, Ruth, Silvia, Heidy, Yéssica} de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

I) $\mathcal{C}\,[P \cup (Q \cup R)] \neq \phi$

II) $P - (Q \cup R)$ tiene 2 elementos

III) {Doris, Silvia} $\subset Q$

10. De 25 personas que tienen sólo 20 ó 30 años; 6 mujeres tienen 20 años y 11 personas tienen 30 años. ¿Cuántas personas tienen 20 años?

11. De un equipo de 30 asesores, 10 son mujeres, 12 personas asesoran en la noche, y 11 varones asesoran en la mañana. ¿Cuántas mujeres asesoran en la mañana?

12. Si A y B son conjuntos tales que $n(A \,\Delta\, B) = 7$, $n[P(A) \cap P(B)] = 16$ y $n(B) = n(A) + 1$, hallar $n(A \cup B)$

13. Dados los conjuntos finitos M y N tales que $n(M) = 7$, $n[P(M) \cap P(N)] = 8$, $n(M).n(N) = 28$, hallar $n[P(N \cap \mathcal{C}\, M)]$

## 1.4 Nociones de Función y Operación

### 1.4.1 Par Ordenado y Producto Cartesiano

Un conjunto que tiene dos elementos es un **par ordenado** si, y sólo si, dicho conjunto tiene la propiedad de que un elemento puede ser distinguido como el primero y el otro como el segundo.

**Definición 1.** Dado los conjuntos no vacíos $A \subset U$ y $B \subset U$ y los elementos $a \in A$ y $b \in B$, se llama **par ordenado** de componentes a y b, que se denota por $(a,b)$, al conjunto $\{\{a\}, \{a,b\}\}$;
O sea, por definición $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$. En el par ordenado $(a,b)$, el elemento **a** se llama **primera componente**; y **b** se llama **segunda componente** del par.

**Teorema 1.**
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$, o equivalentemente, $(a,b) \neq (c,d) \Leftrightarrow a \neq c \vee b \neq d$.
**Demostración**
[$\Rightarrow$] Si $a = b$, entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$ y por lo tanto $\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}\}$, lo que implica que $\{c\} = \{c, d\} \wedge \{c\} = \{a\}$, de donde se sigue que $c = d \wedge c = a$. O sea, se tiene que $a = b = c = d$ y en consecuencia $a = c \wedge b = d$.
Si $a \neq b$ en $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, entonces en $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ se tendría que $c \neq d$, puesto que si fuera $c = d$, entonces, por el caso anterior, resultaría $a = b$, lo que es una contradicción. Luego $c \neq d$ y en consecuencia la igualdad $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ implicaría que $\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}$, o sea $a = c \vee a = c = d$. Pero esta última relación no es posible debido a que $c \neq d$, luego $\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$, de donde $a = c \wedge b = d$.
[$\Leftarrow$] El recíproco es consecuencia inmediata del principio de sustitución.

**Definición 2.** Dado los subconjuntos A y B, de un conjunto universal **U**, se llama **producto de A y B**, y se denota por $A \times B$, al conjunto formado por todo los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$.
Simbólicamente: $A \times B = \{(a, b) \in E \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$,
o sea $(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$.

Por ejemplo, si $A = \{2, 5, 8\}$ y $B = \{4,5\}$ entonces

$AxB = \{(2,4), (2,5), (5,4), (5,5), (8,4), (8,5)\}$

**Observación 1.**

El producto cartesiano $A \times B$ debe ser subconjunto de algún conjunto universal E. La existencia de $A \times B$ esta justificada por el axioma de especificación. Pero, ¿cómo es E? Recordando el axioma del conjunto potencia se puede tomar

$E = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, pues si $a \in A \wedge b \in B$, entonces:

$\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, luego $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

**Teorema 2**

El Producto Cartesiano de dos conjuntos tiene las siguientes propiedades:

1. $A \times \phi = \phi$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

**Demostración**

Las demostraciones se dejan como ejercicio.

### 1.4.2 Funciones

**Definición 3.** Dados dos conjuntos A y B se llama función definida en A y con valores en B, o simplemente función de A en B, a toda correspondencia f que asocia a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$. El conjunto A recibe el nombre de **Dominio** de la función f.

La palabra **correspondencia** se aceptará como concepto primitivo y se le dará la interpretación intuitiva que todos tienen de ella.

Las funciones reciben también el nombre de aplicaciones y se denotan simbólicamente por:

$$f: A \to B \quad \text{ó} \quad A \xrightarrow{f} B$$

Para indicar que f hace corresponder a cada elemento x de A un único elemento $y \in B$, se escribe

$$f: x \to y, \qquad x \xrightarrow{f} y, \quad \text{ó} \quad y = f(x)$$

y se dice que y es la imagen de x mediante f, o que x es una preimagen de y mediante f.