1. Representar gráficamente y expresar como intervalos los siguientes conjuntos:

$A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 3\}$ $\quad$ $B = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 4\}$

$C = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge |x+1| \leq 3\}$ $\quad$ $D = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge |x-2| > 0\}$

$E = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 2 \wedge x \geq -1\}$ $\quad$ $F = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 1 \vee x > 3\}$

$G = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x+2| \leq 5\}$ $\quad$ $H = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 3 < |x-2| \leq 5\}$

$I = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \leq 9\}$ $\quad$ $J = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 \leq 16\}$

2. Si existen, hallar conjuntos de cotas, supremos, ínfimos, máximos y mínimos, de los conjuntos anteriores.

3. Escribir como intervalos, y, si es posible como entornos, los siguientes conjuntos de números reales:

$A = \{x/\ 2 \leq x \leq 4\}$ $\quad$ $B = \{x/-7 \leq x < -2\}$

$C = \{x/-1 < x \leq 3\}$ $\quad$ $D = \{x/-1 < x < 3\}$

$E = \{x/-3 < x < 1\} - \{-1\}$ $\quad$ $F = \{x/-3 < x < -1\}$

$G = \{x/|x-2| < 5\}$ $\quad$ $H = \{x/|x+2| \leq 3\}$

$I = \{x/0 < |x-3| < 1\}$ $\quad$ $J = \{x/0 < |x+4| < 2\}$

4. Dar el conjunto derivado de cada uno de los siguientes conjuntos:

$A = (-2;5]$ $\quad$ $B = (1;7]$ $\quad$ $C = [0;4]$

$D = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge |x-2| < 5\}$ $\quad$ $E = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge |x-2| < 5\}$

$F = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge |x-2| < 5\}$ $\quad$ $G = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge |x-1| \leq 3\}$

$H = \{3, 4, 5\}$ $\quad$ $L = \left\{x/x = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$

$M = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x-3| < 2\}$ $\quad$ $N = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge |x| > 1\}$

5. Indicar cuáles de los conjuntos anteriores son cerrados.

6. Indicar cuáles de los conjuntos anteriores son abiertos.

7. Sabiendo que: $\lim_{x \to c} f(x) = \frac{1}{2}$ y $\lim_{x \to c} g(x) = \frac{3}{4}$, calcular:

a) $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)]$ $\quad$ b) $\lim_{x \to c}[f(x) - g(x)]$

c) $\lim_{x\to c}[3f(x)+2g(x)]$ d) $\lim_{x\to c}[f(x).\,g(x)]$

e) $\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ f) $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$

8. Dado que: $\lim_{x\to 2} f(x)=4$, $\lim_{x\to 2} g(x)=2$ y $\lim_{x\to 2} h(x)=0$, encontrar los límites que existan. Si el límite no existe, explicar por qué.

a) $\lim_{x\to 2}[f(x)+5g(x)]$ b) $\lim_{x\to 2} g(x)^3$

c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ d) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{3g(x)}$

e) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{h(x)}$ f) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

9. Evaluar el límite y justificar cada paso indicando la(s) ley(es) apropiada(s) de los límites:

a) $\lim_{x\to -2}(3x^4+2x^2-x+1)$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+1}{x^2+6x-4}$

c) $\lim_{x\to 8}(1+\sqrt[3]{x})(2-6x^2+x^3)$ d) $\lim_{t\to -1}(t^2+1)^3(t+3)^5$

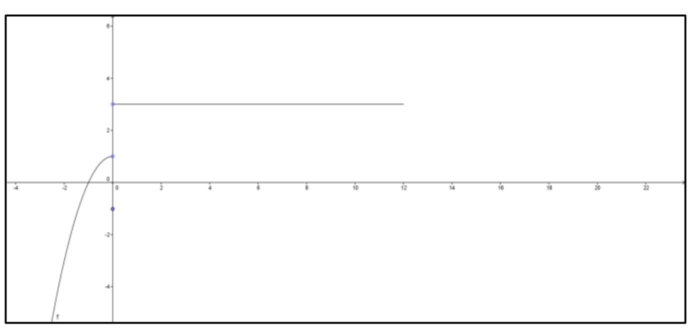
e) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)$ f) $\lim_{x\to -2}\sqrt{x^4+3x+6}$

g) $\lim_{x\to 4}\sqrt{16-x^2}$

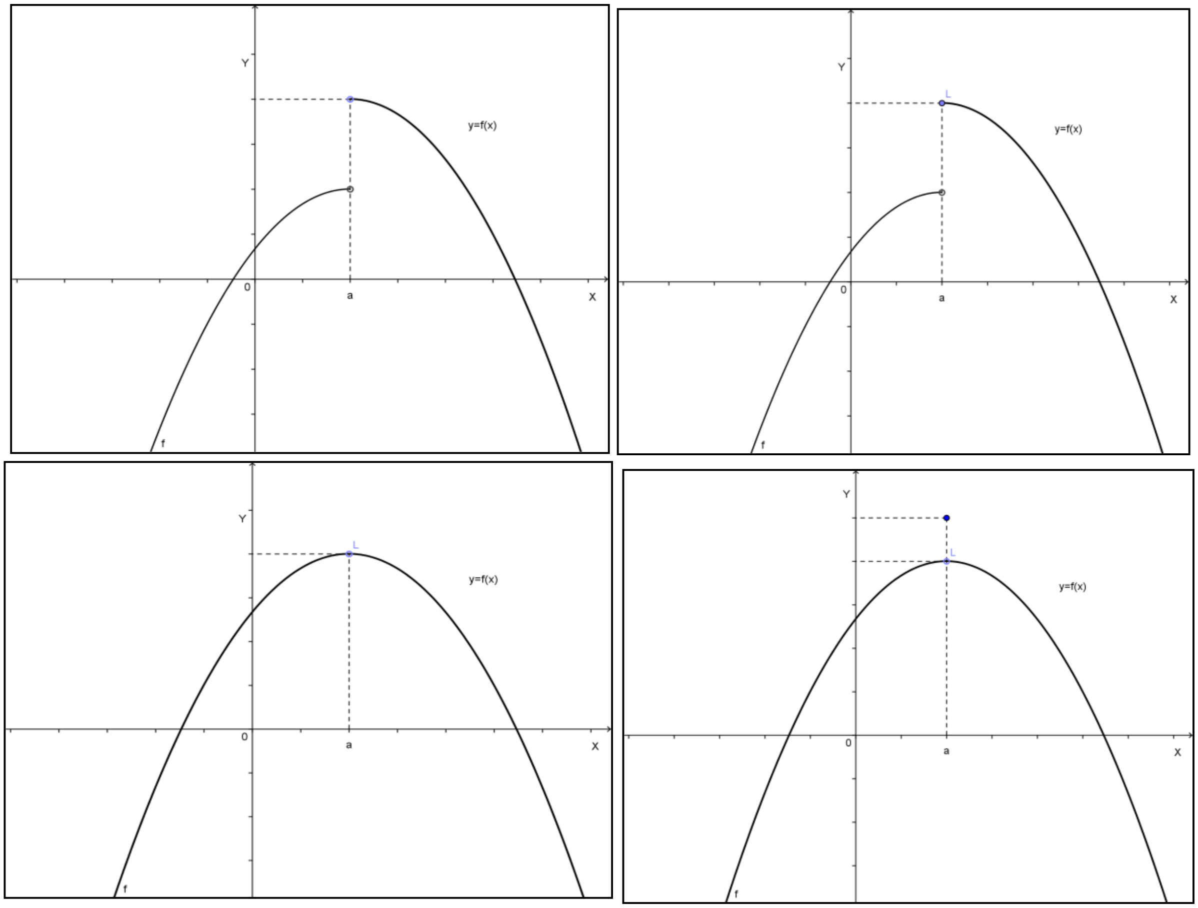
10. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f(x)=\begin{cases}3+ax & si\ x<1\\ 3 & si\ x=1\\ 5 & si\ \ x>1\end{cases}$

Para que exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$, el valor de a debe ser: a) 3 b) 5 c) 2 d) no existe

11. El límite de la función dada gráficamente cuando $x\to 0$, es: a) 1 b) 3 c) -1 d) no existe



12. ¿En cuál de las siguientes gráficas $f(a)$ no está definida pero existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$? ¿Y en cuál $f(a)$ está definida pero no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?



13. Dada $f(x)$, indicar si son verdaderas o falsas las afirmaciones:

a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \implies f(x_0) = L$

b) Si $\exists \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L_1 \;\wedge\; \exists \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L_2 \implies \left(\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow L_1 = L_2\right)$

c) Si $f(x_0) = t;\quad \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = s \;\wedge\; \exists \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = t \implies \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

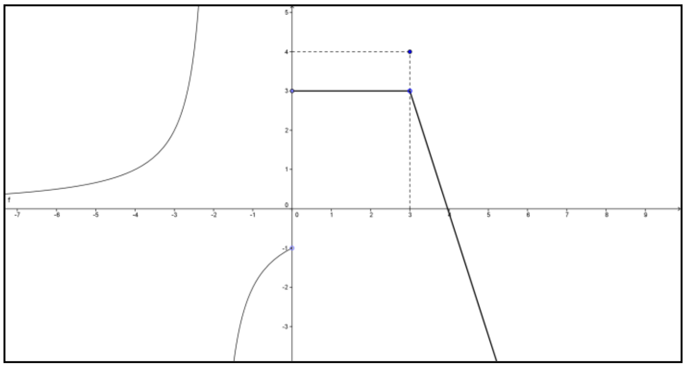
d) Si $f(x_0)$ no está definida entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe.

e) Si $f(x)$ es una función polinomial, entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

14. Graficar la función $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 3 \\ 2 & si\ x = 3 \\ 4 & si\ \ x > 3 \end{cases}$ y calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$, b) $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$, c) $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$, d) $h(3)$

15. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, hallar:



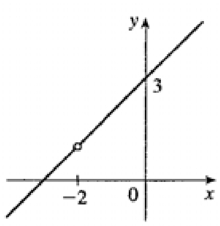
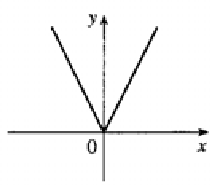
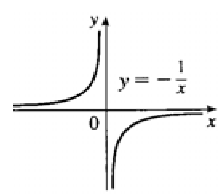
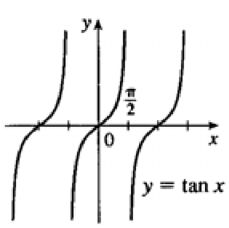
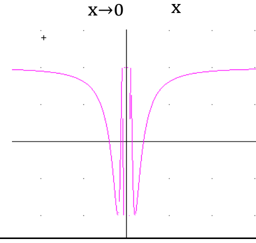
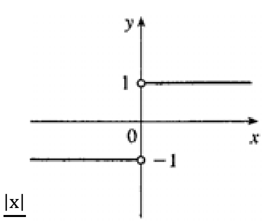
a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, e) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, f)) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

16. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 5 & si\ x = 2 \\ 4 - x & si\ \ x > 2 \end{cases}$, el $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ es:

a)3 b) 5 c) 2 d) no existe.

17. Usar la gráfica para estimar el límite, si existe.

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$ 	 $\lim\limits_{x\to 0}\lvert 2x\rvert$	$\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x}$ 
	$\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{2}{x}$ 	 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lvert x\rvert}{x}$

18. Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$, calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{sen\,(4t)}{t}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5tg\, x}{x}$ c) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{2t}{sen(3t)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{sen(5x)}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{sen(x-2)}{2x^2-8}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos^2x}{2x}$

19. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2}{x^4-x^3+5x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x-4}{x^3-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(2x-3)(3-5x)}{7x^2-6x+4}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x-1}{x.(x-1)}$

g) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^4-a^4}{x-a}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}}\left|sen\frac{\pi}{x-2}\right|\right)$ j) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{sen(x)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}} sen\frac{x}{\pi}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x-1}$ n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-x}-x$

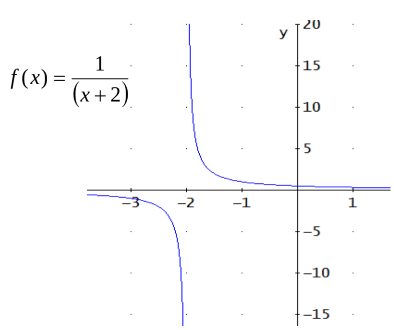
ñ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}\right)$ o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x-1)}{x^2-1}$

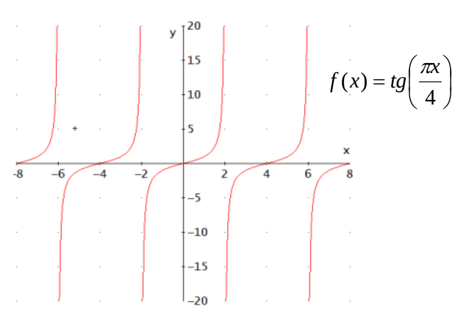
p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}\right)$ q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-x}-x$

s) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{[sen(x-1)]^2}{x^2-1}$ t) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}\right)$

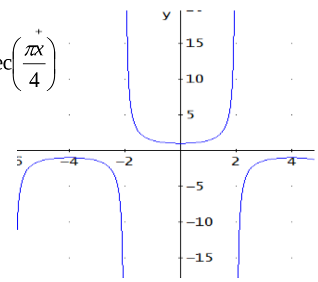
u) $\lim\limits_{x\to 0^-} \log\frac{1}{|x|}$

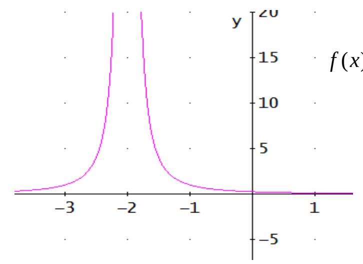
20. Averiguar si f(x) tiende a ∞ o a - ∞ cuando x tiende a - 2 por la izquierda o por la derecha.





$f(x)=\sec\left(\frac{\pi x}{4}\right)$





$f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$

21. Trazar la gráfica de una función que cumpla con todas las condiciones dadas:

   a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=-2$ y $f(1)=2$

   b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-1, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=0$,
   $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1 \quad , \quad f(2)=1 \;\; y \;\; f(0)\; no\; está\; definida$

   c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)=4, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=2, \;\; \lim_{x\to -2} f(x)=2, \;\; f(3)=3 \;\; y\, f(-2)=1$

22. Comprobar que el $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ no existe.

23. Si $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4} & \text{si x} > 4\\ 8-2x & \text{si x} < 4\end{cases}$ determinar si existe el $\lim_{x\to 4} f(x)$.

24. Demostrar que el $\lim_{x\to 0} x^2.sen\frac{1}{x}=0$

25. Sea f(x) = [x] (parte entera)
   a) evaluar: $a)\lim_{x\to -2^+}[x] \quad b)\lim_{x\to -2}[x] \quad c)\lim_{x\to -2,4}[x]$
   b) si n es un entero, evaluar: $a)\lim_{x\to n^-}[x] \quad b)\lim_{x\to n^+}[x]$
   c) ¿Para cuáles valores de *c* existe $\lim_{x\to c}[x]$?

Respuestas

1) $A = (-\infty, 3),\ B = [4, \infty),\ C = [-4, 2],\ D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty),\ E = [-1, 2),$

$F = (-\infty, 1) \cup (3, \infty), G = [-7, -2) \cup (-2, 3], H = [-3, -1) \cup (5, 7], I = [-3, 3],$

$J = \{x \in \mathbb{Q} \wedge -4 \leq x \leq 4\}$

2)

Conjunto	*Cotas superiores*	*Supremo*	*Máximo*	*Cotas inferiores*	*Ínfimo*	*Mínimo*
A	$[3, \infty)$	3	No posee	No posee	No posee	No posee
B	No posee	No posee	No posee	$(-\infty, 4]$	4	4
C	$[2, \infty)$	2	2	$(-\infty, -4]$	-4	-4
D	No posee	No posee	No posee	No posee	No posee	No posee
E	$[2, \infty)$	2	No posee	$(-\infty, -1]$	-1	-1
F	No posee	No posee	No posee	No posee	No posee	No posee
G	$[3, \infty)$	3	3	$(-\infty, -7]$	-7	-7
H	$[7, \infty)$	7	7	$(-\infty, -3]$	-3	-3
I	$[3, \infty)$,	3	3	$(-\infty, -3]$	-3	-3
J	$[4, \infty)$	4	4	$(-\infty, -4]$	-4	-4

3) A=[2, 4] B=[-7, -2) C=(-1, 3] D=(-1, 3)= $E_2(1)$ E=$(-3, -1) \cup (-1, 1) = E'_2(-1)$

F= $(-3, -1) = E_1(-2)$ G= (-3, 7) = $E_5(2)$ H=[-5, 1] I= $(2, 3) \cup (3, 4) = E'_1(3)$

J=$(-6, -4) \cup (-4, -2) = E'_2(-4)$

4) $A' = [-2, 5]$ $B' = [1, 7]$ $C' = [0, 4]$ $D' = \emptyset$ $E' = [-3, 7]$ $F' = [-3, 7]$

$G' = [-2, 4]$ $H' = \emptyset,$ $L' = \{0\}$ $M' = [1, 5]$ $N' = \{x \in \mathbb{R} \wedge |x| \geq 1\}$

5) Son conjuntos cerrados: C, D, G,H

6) Son conjuntos abiertos: F, M

7) a) 5/4 b) -1/4 c) 3 d) 3/8 e) 2/3 f) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

8) a) 14 b) 8 c) 2 d) 2/3 e) $\nexists$ f) 0

9) a) 59 b) 3/4 c) 390 d) 256 e) 1/2 f) 4 g) 0

10) 2

11) No existe

12) $\nexists f(a)\ y\ si\ \exists \lim_{x\to a} f(x)$ en c) $\exists f(a)\ y\ si\ \nexists \lim_{x\to a} f(x)$ en a) y b)

13) a) F b) V c) F d) F e) V

14) a) 4 b) 4 c) 4 d) 2

15) a) ∞ b) $-\infty$ c) $\nexists$ d) -1 e) 3 f) $\nexists$

16) 3

17) a)1 b)0 c) $\nexists$ d) $\nexists$ e) $\nexists$ f) $\nexists$

18) a)4 b)5 c) 2/3 d)2/5 e) 1/8 f) 0

19) a)2 b) -2/5 c) 4 d) $2\sqrt{2}$ e) $-\frac{10}{7}$ f) 0

g) $4a^3$ h) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ i) ∞ j) 0 k) 0 l) $\frac{1}{2}$ m) 5

n) ∞ ñ) 0 o) $\sin(1)$ p) $\frac{1}{4}$ q) $-\frac{1}{2}$ s)0 t) 1/3

u) ∞

20) $\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$, $\lim_{x\to -2^\mp} \frac{1}{x+2} = \infty$

$\lim_{x\to -2^-} tg\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \infty$, $\lim_{x\to -2^+} tg\left(\frac{\pi x}{4}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to -2^-} sec\left(\frac{\pi x}{4}\right) = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} sec\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \infty$

$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$, $\lim_{x\to +} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$,

23) $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$

25) a) a) -2 b) $\nexists$ c) -3

b) a) n-1 b) n

c) $\forall\ c \notin \mathbb{Z}$