Aplicaciones de la derivada

1. Discutir si esaplicable el Teorema de Rolle en el intervalo indicado. Si lo es, hallar todos los c del intervalo en los que $f'(c) = 0$. Completar con una interpretación geométrica.

   a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en [1,2]

   b) $f(x) = |x - 1|$ en [0,2]

   c) $f(x) = x^{2/3} - 1$ en [-8,8]

2. Dada la función $h(x) = x^3 - 9x + 1$que cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en [0,b], hallar b y el punto c que verifica el teorema.

3. Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene sólo una raiz real en el intervalo [0,1].

4. Comprobar que la siguiente función cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle enel intervalo [-0,5;4]. Averiguar dónde cumple la tesis.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & si \ -0,5 \leq x < 1 \\ 5 - (x-2)^2 & si \ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

5. Discutir si es aplicable el teeorema de Lagrange en el intervalo indicado. Si lo es, hallar todos los c que cumplen con la conclusión del teorema.

   a) $f(x) = x^3 + x - 1$ en [0,2]

   b) $f(x) = \begin{cases} x & si \ 0 < x < 1 \\ 1 & si \ x = 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = e^{-2x}$ en [0,3]

6. Demostrar que si f s una función cuadrática definida por $f(x) = Ax^2 + Bx + C, A \neq 0$, el número c del teorema de Lagrange es el punto medio del intervalo [a,b]

7. Evaluar los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - (1+x)}{x^3}$

   b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{lnx^2}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ln(senx)}{ln(tgx)}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2.e^{-x})$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^{-x}.\sqrt{x})$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (secx - tgx)$

g) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

8. Explicar por qué la aplicación de la regla de L'Hospital es incorrecta:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}}{e^x} = \lim\limits_{x\to 0} 2e^{2x} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x.cos\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{cos(1/x)}{(1/x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{cos(1/x)(1/x^2)}{-1/x^2} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to infty} \dfrac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 = 1$

9. Desarrollar según Taylor

a) $y = ln(x)$ para $n = 3, a = 1$

b) $y = sen(x)$ para $n = 5, a = \pi/2$

c) $y = cos(x)$ para $n = 3, a = \pi/4$

10. Desarrollar según Mac Laurin

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ para $n = 3$

b) $f(x) = e^{-x}$ para $n = 4$

11. Verificar los resultados y expresar el término complementario:

a) $sen(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + R_5(x)$

b) $\sqrt{x+1} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + \dfrac{7x^5}{256} + R_5(x)$

c) $ln(x+1) = x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + R_5(x)$

12. Realice el estudio completo de las siguientes funciones y esboce su gráfica:

    a) $f(x) = (\mathrm{x}^2 - 4)(x^2 - 4x)$

    b) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+4}$

    c) $f(x) = x.\sqrt{9-x}$

    d) $f(x) = \dfrac{x}{lnx}$

    e) $f(x) = e^{-3x^2}$

Respuestas:

1. a) $c = \dfrac{3}{2}$ b)yc) No se pude aplicar el T. de Rolle

2. $b = 3$ y $c = \sqrt{3}$

3.

4. $c = 2$

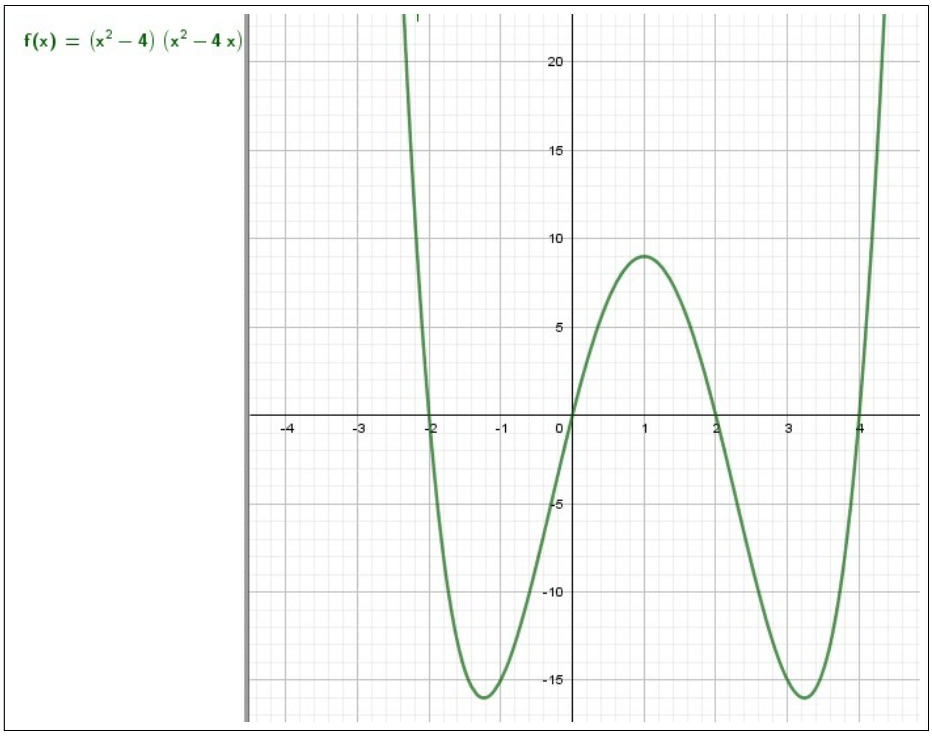
5. a) $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ c) $c = -\dfrac{1}{2} ln(\dfrac{1 - e^{-6}}{6})$

   b) No se puede aplicar el teorema

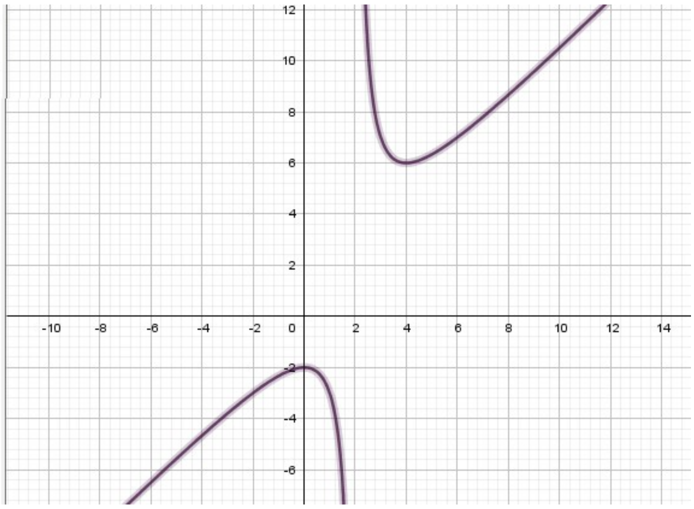
6. a) ∞ c) 1 e) 0 g) e

   b) 1 d) 0 f) 0 h) e^3

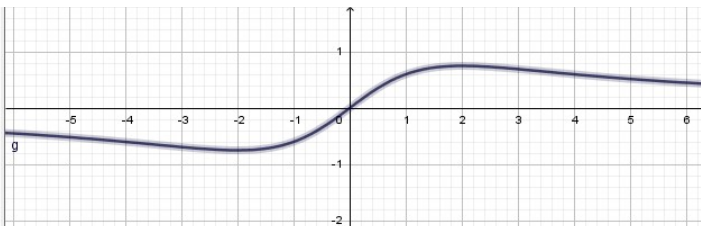
Gráficas del ejercicio 12



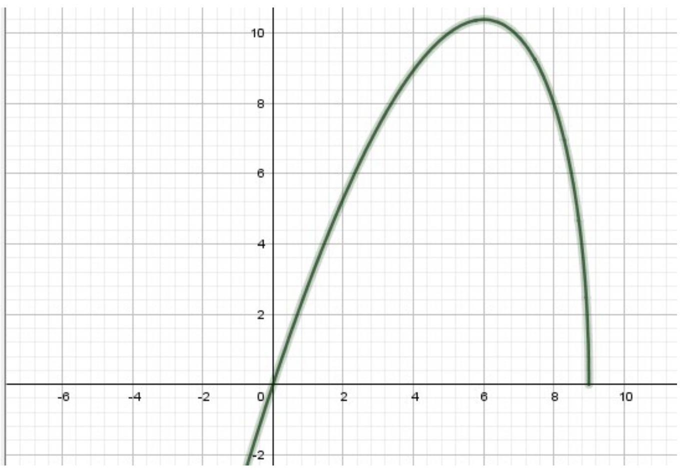
b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$



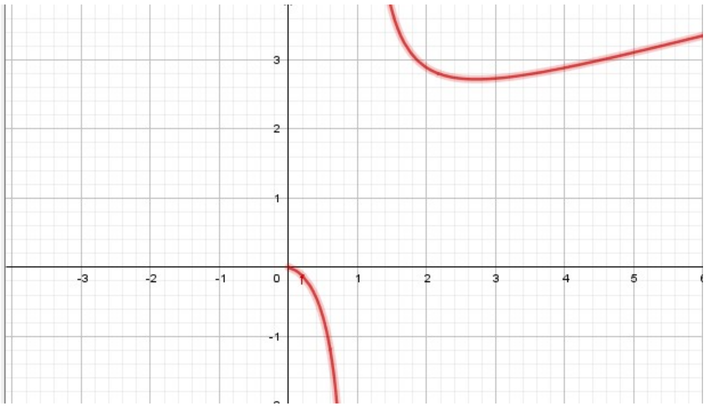
c) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 4}$



d) $f(x) = x\sqrt{9 - x}$



e) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$



f) $f(x) = e^{-3x^2}$