Determinantes

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det\left(A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n\right)$$

Función que asigna un escalar a cada matriz cuadrada y cumple los siguientes axiomas:

- 1) $$\det(A) = \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i + A_j & \dots. & A_n \end{pmatrix}$$

  $$\det(A) = \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i & \dots. & A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_j & \dots. & A_n \end{pmatrix}$$

  Si una columna (o fila) de una matriz cuadrada A, se descompone en dos sumandos, entonces el determinante de A es igual a la suma de los determinantes de dos matrices que resultan de sustituir, en A, aquella columna (o fila) por uno de los sumandos.

- 2) $$\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & \lambda A_i & \dots. & A_n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i & \dots. & A_n \end{pmatrix}$$

  Si una columna de una matriz cuadrada A, se multiplica por un escalar λ, entonces el determinante de A queda multiplicado por el escalar λ.

Axiomas (continuación)

- 3) $\det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \ldots \quad A_j \quad \ldots. \quad A_n\right)=0 \;\; \text{si} \quad A_i = A_j$

  El determinante de toda matriz *A* que tenga dos columnas o filas idénticas es nulo.

- 4) $\det\left(I\right)=1$

  El determinante de la matriz identidad es 1.

Propiedades de los determinantes

- 1)

$$\det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \ldots \quad A_j \quad \ldots. \quad A_n\right) = -\det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_j \ldots \quad A_i \quad \ldots. \quad A_n\right)$$

Si se permutan dos columnas (o filas) de una matriz cuadrada A, el determinante cambia de signo.

- 2) $\det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i = \vec{0} \quad \ldots. \quad A_n\right) = 0$

Si una columna o una fila de una matriz es nula, entonces su determinante es nulo.

Propiedades de los determinantes

- 3)

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j A_j & \ldots. & A_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_j \text{ escalares cualesquiera}$$

Si una columna (o fila) de una matriz cuadrada A, es combinación lineal de las restantes, entonces el determinante de A es nulo.

- 4)

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j A_j & \ldots. & A_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_i & \ldots. & A_n \end{pmatrix}$$

Si a una columna (o fila) de una matriz cuadrada A se le suma una combinación lineal de otras columnas, con ello no se altera el valor del determinante de A.

Otras propiedades

- El determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales.

$$\det(A) = \det(A^t)$$

- El determinante del producto de dos matrices, es igual al producto de los determinantes respectivos.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Valor de un determinante

- Menor complementario: Se llama menor complementario de un elemento de una matriz *A* de orden *n*, al determinante de orden menor *n - 1*, que se obtiene al suprimir en la matriz *A* la fila *i* y la columna *j* , lo indicaremos con M_{ij}

  .

- Cofactor, adjunto o complemento algebraico: se llama adjunto, cofactor o complemento algebraico de un elemento de una matriz, a su menor complementario con signo positivo o negativo según sea (*i* + *j*) par o impar.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} . A_{ij}$$

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

- El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos cofactores.

- <u>Consecuencia</u>: Si es una matriz cuadrada de orden *n* y llamamos C_{ij} al cofactor de su elemento a_{ij} , para *i*, *j* = 1, 2, … , *n*, la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los cofactores de una línea paralela es nulo.

Método de Chío

- El método consiste en transformar un determinante de orden *n* en otro de igual valor de orden *n – 1* mediante la aplicación de propiedades

$$\det(A) = a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} \cdot a_{1j} & a_{12} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}} \cdot a_{1j} & \dots & a_{1j} - a_{1j} & \dots & a_{1n} - \frac{a_{in}}{a_{ij}} \cdot a_{1j} \\ \mathrm{a}_{21} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} \cdot a_{2j} & a_{22} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}} \cdot a_{2j} & \dots & a_{2j} - a_{2j} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{in}}{a_{ij}} \cdot a_{2j} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \dots & 1 & \dots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} \cdot a_{nj} & a_{n2} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}} \cdot a_{nj} & \dots & a_{nj} - a_{nj} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{in}}{a_{ij}} \cdot a_{nj} \end{vmatrix}$$

Matriz adjunta

- Se llama matriz adjunta de una matriz *A*, y la indicamos con *Adj(A)*, a la traspuesta de la matriz que se obtiene reemplazando cada elemento de *A* por su respectivo cofactor.

Producto de una matriz por su adjunta

- El producto de toda matriz cuadrada por su adjunta es conmutativo e igual al determinante de dicha matriz por la matriz identidad.

$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$$

Inversión de matrices no singulares

- Condición: Una matriz cuadrada es invertible, si y sólo si su determinante es distinto de cero.

- Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$$

Matriz ortogonal

- Una matriz A es ortogonal si su matriz inversa es igual a su traspuesta.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Teorema de Cramer

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

El sistema se puede expresar en la forma:

$$A \cdot X = B$$

Si A es no singular

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Teorema de Cramer

Recordando que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$$

Resulta

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A) \cdot B$$

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 = -1 \\ 2.x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{10}{5} = 2$$

Verificación:

$$\begin{cases} 1 - 2 = -1 \\ 1 + 2.1 - 2.2 = -1 \\ 2.1 - 1 + 2 = 3 \end{cases}$$