Sistemas de ecuaciones lineales

Introducción: Los sistemas de ecuaciones lineales tienen muchas aplicaciones. “Multitud de fenómenos naturales y sociales se comportan linealmente, es decir, una causa doblemente intensa produce un efecto doblemente intenso, una misma causa que actúa por un espacio de tiempo dos veces más largo produce un efecto dos veces mayor. Y aún cuando muchos fenómenos se comportan así tan sólo aproximadamente, se tratan como si fueran lineales para facilitar su estudio inicial. ... Esto explica que las matemáticas de las aplicaciones a los fenómenos naturales y sociales sea fundamentalmente lineal en un primer acercamiento a los fenómenos y que los sistemas de ecuaciones lineales, en particular, constituyan el esqueleto básico de estas aplicaciones”[(1)]. Muchas preguntas en ingeniería, física, química, matemática y otras ciencias se reducen al problema de resolver un sistema lineal. Algunos ejemplos relacionados con química son los problemas relativos a soluciones y al balance de reacciones químicas. En esta unidad nos dedicaremos a la formalización de conceptos y a la búsqueda de métodos de solución para los distintos sistemas de ecuaciones lineales.

Ecuación lineal: se llama ecuación lineal o de primer grado, a toda ecuación que responde a la siguiente forma general:

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + \cdots + a_n.x_n - b = 0$$

o

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + \cdots + a_n.x_n = b$$

Sistema de ecuaciones lineales:

Un sistema de *m* ecuaciones lineales (o conjunto de *m* ecuaciones lineales simultáneas) en *n* incógnitas $x_1; x_2; x_3; ...; x_n$ es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$$

Los a_{ij} con i = 1, 2, ... , m y j = 1, 2, ... , n reciben el nombre de coeficientes del sistema. Los b_i con i = 1, 2, ... , m también son números dados y son los términos constantes en cada ecuación del sistema. Si todos los b_i son iguales a cero, el sistema se llama **homogéneo**. Si alguno de los b_i es distinto de cero el sistema es **no homogéneo**.

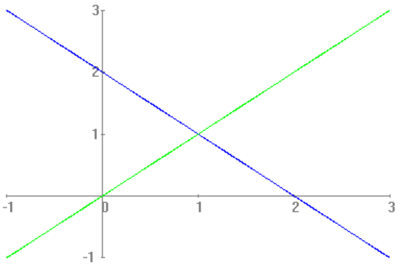
---

[1] Guzmán, Miguel; Colera, José; Matemáticas I; Anaya;1994

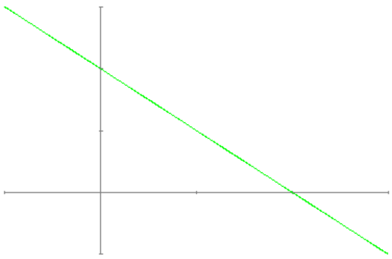
Una solución del sistema es un conjunto de números $c_1; c_2; c_3; ...; c_n$ que satisfacen las m ecuaciones cuando sustituyen a $x_1; x_2; x_3; ...; x_n$

Sistema compatible y sistema incompatible: un sistema de ecuaciones es compatible cuando al menos admite un conjunto solución; es incompatible en caso contrario. Un sistema de ecuaciones compatible es determinado si la solución es única, mientras que si admite infinitas soluciones es indeterminado.

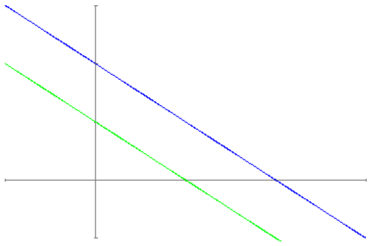
Visualización geométrica de sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas.



Sistema compatible determinado

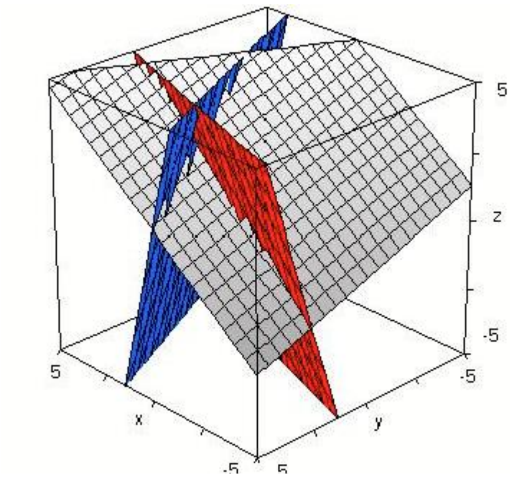


Sistema compatible indeterminado

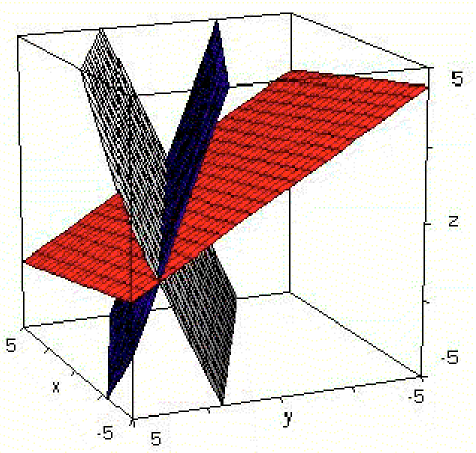


Sistema incompatible

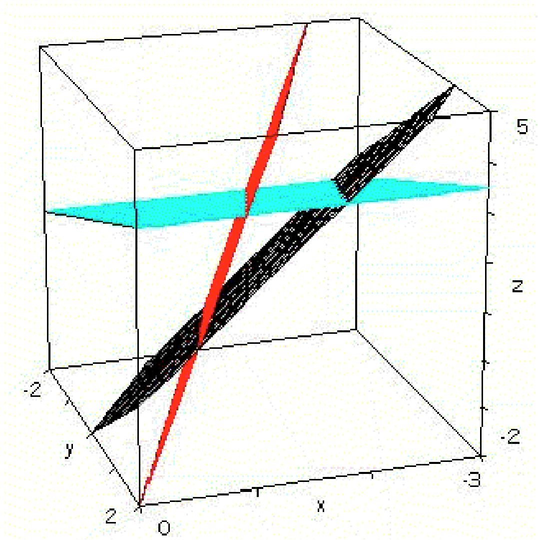
Visualización geométrica de sistemas lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas.



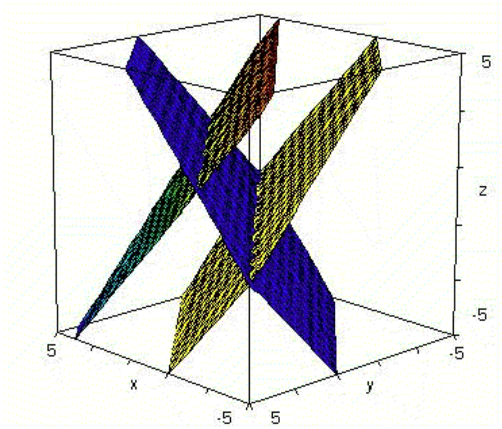
Sistema compatible determinado



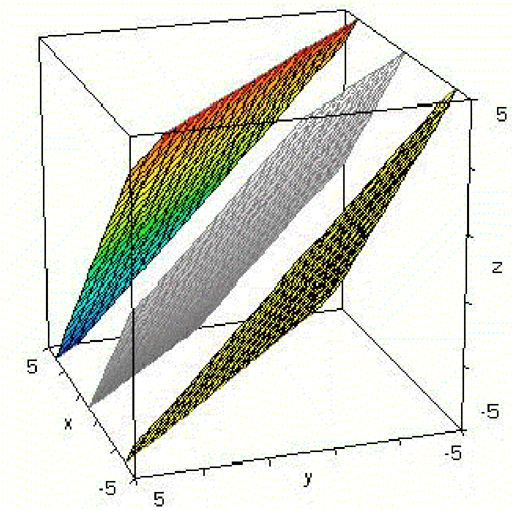
Sistema compatible indeterminado



Sistema incompatible



Sistema incompatible



Sistema incompatible

Sistemas de ecuaciones equivalentes: Dos sistemas de ecuaciones lineales en las mismas incógnitas se llaman equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución.

Teorema fundamental de equivalencia:

Si en un sistema de ecuaciones lineales, se agrega o suprime una ecuación que es combinación lineal de las del sistema, se obtiene un sistema equivalente al dado.

Consecuencia: Si en un sistema de ecuaciones lineales se sustituye una ecuación del sistema por una combinación lineal de ella misma con las restantes, se obtiene un sistema equivalente al dado.

Ejemplo: Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

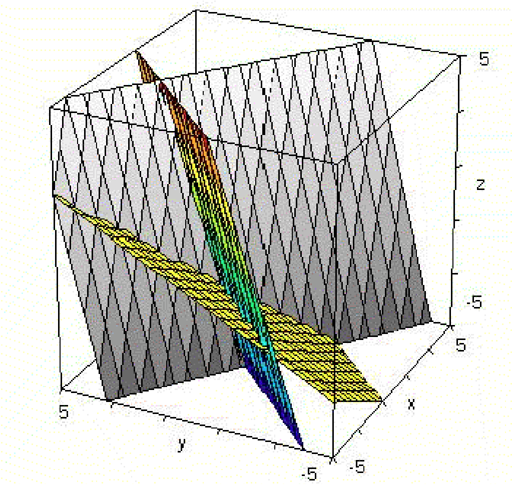
Si agregamos la ecuación $\alpha_1 \cdot E_1 + \alpha_2 \cdot E_2 + \alpha_3 \cdot E_3$ con $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -3$, resulta:

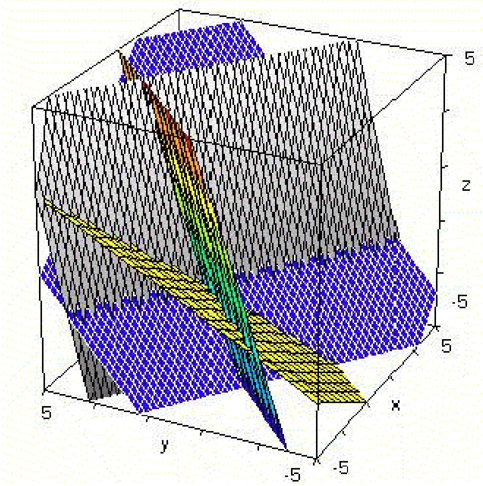
$$\begin{array}{l} 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 \quad = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \quad = -8 \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18 \\ \hline 6x_1 + 8x_2 - 7x_3 \quad = 16 \end{array}$$

esta es la ecuación que incorporamos al sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 16 \end{cases}$$

Los gráficos correspondientes a los dos sistemas muestran que ambos concurren en el mismo punto (tienen la misma solución)





Sistema original — Sistema equivalente

Sistemas de ecuaciones homogéneos

Recordamos que un sistema de ecuaciones es homogéneo cuando todos los términos independientes son nulos:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = 0 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + \cdots + a_{3n}.x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \cdots + a_{mn}.x_n = 0 \end{cases}$$

Este sistema siempre es compatible porque, al ser los términos independientes nulos, la característica de la matriz de los coeficientes es igual a la de la matriz ampliada. Al menos admite la solución $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$ llamada solución trivial.

Interesa saber si el sistema admite soluciones distintas de la trivial; es decir, establecer si el sistema es compatible determinado o indeterminado.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Método de Gauss: se basa en el teorema fundamental de equivalencia.

Sea el sistema (S) $\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + \cdots + a_{3n}.x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$

Si sumamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, con $a_{11} \neq 0$; habremos eliminado el término en x_1. Tomando luego la primera con la tercera, cuarta, ... ,emésima y procediendo de igual manera, obtenemos el sistema ($S´$), equivalente al dado.

$$(S´) \begin{cases} a_{11}.x_1 + \quad a_{12}.x_2 \quad + \cdots + \quad a_{1n}.x_n \quad = \quad b_1 \\ \left(a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}\right).x_2 + \cdots + \left(a_{2n} - a_{1n} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}\right).x_n = \left(b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \\ \left(a_{32} - a_{12} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}}\right).x_2 + \cdots + \left(a_{3n} - a_{1n} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}}\right).x_n = \left(b_3 - b_1 \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(a_{m2} - a_{12} \cdot \frac{a_{m1}}{a_{11}}\right).x_2 + \cdots + \left(a_{mn} - a_{1n} \cdot \frac{a_{m1}}{a_{11}}\right).x_n = \left(b_m - b_1 \cdot \frac{a_{m1}}{a_{11}}\right) \end{cases}$$

Procediendo de igual manera y sucesivamente a partir de la segunda ecuación; obtendremos un sistema equivalente, cuya última ecuación retendrá sólo una incógnita, calculada ésta se obtienen las restantes por sustitución.

Ejemplos:

1. Resolver el sistema $\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 + 6.x_3 = 18 \\ 4.x_1 + 5.x_2 + 6.x_3 = 24 \\ 3.x_1 + x_2 - 2.x_3 = 4 \end{cases}$

   Aplicamos método de Gauss:

   Reemplazamos la E2 por la E2 + E1. $\left(-\frac{4}{2}\right)$, es decir: E2 + E1. (-2); y la E3 por la E3 +

E1. $\left(-\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{array}{r} -4.x_1 - 8.x_2 - 12.x_3 = -36 \\ 4.x_1 + 5.x_2 + 6.x_3 = 24 \\ \hline -3.x_2 - 6.x_3 = -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3.x_1 - 6.x_2 - 9.x_3 = -27 \\ 3.x_1 + x_2 - 2.x_3 = 4 \\ \hline -5.x_2 - 11.x_3 = -23 \end{array}$$

Resulta el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 + 6.x_3 = 18 \\ -3.x_2 - 6.x_3 = -12 \\ -5.x_2 - 11.x_3 = -23 \end{cases}$$

Ahora, reemplazamos la E3 por la E3 + E2. $\left(-\frac{5}{3}\right)$:

$$\begin{array}{r} 5.x_2 + 10.x_3 = 20 \\ -5.x_2 - 11.x_3 = -23 \\ \hline - x_3 = \text{-}3 \end{array}$$

Y obtenemos:

$$\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 + 6.x_3 = 18 \\ -3.x_2 - 6.x_3 = -12 \\ \text{-}\ x_3 = -3 \end{cases}$$

de donde: $x_3 = 3$ y sustituyendo hacia atrás:

$-3.x_2 - 6.3 = -12 \Rightarrow x_2 = -2$

$2.x_1 + 4.(-2) + 6.3 = 18 \Rightarrow x_1 = 4$

Luego la solución del sistema es: $x_1 = 4;\ x_2 = -2;\ x_3 = 3$

2. $\begin{cases} 2.x_2 + 3.x_3 = 4 \\ 2.x_1 - 6.x_2 + 7.x_3 = 15 \\ x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 = 10 \end{cases}$

Primero permutamos las ecuaciones E1 y E3:

$\begin{cases} x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 = 10 \\ 2.x_1 - 6.x_2 + 7.x_3 = 15 \\ 2.x_2 + 3.x_3 = 4 \end{cases}$, luego reemplazamos E2 por E2 + E1.(-2)

$\begin{cases} x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 = 10 \\ -2.x_2 - 3.x_3 = -5 \\ 2.x_2 + 3.x_3 = 4 \end{cases}$, ahora reemplazaremos E3 por E3 + E2.1

$\begin{cases} x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 = 10 \\ -2.x_2 - 3.x_3 = -5 \\ 0.x_3 = 4 \end{cases}$, la última ecuación plantea un imposible: $0 \neq 4$, por lo tanto el sistema dado es incompatible, no tiene solución.

3. $\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 + 6.x_3 = 18 \\ 4.x_1 + 5.x_2 + 6.x_3 = 24 \\ 2.x_1 + 7.x_2 + 12.x_3 = 30 \end{cases}$

Reemplazaremos E2 por E2 + E1. (-2) y E3 por E3 + E1.(-1):

$\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 + 6.x_3 = 18 \\ \quad -3.x_2 - 6.x_3 = -12 \\ \quad 3.x_2 + 6.x_3 = 12 \end{cases}$, ahora reemplazamos E3 por E3 + E2.1, obteniendo el sistema

equivalente: $\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 + 6.x_3 = 18 \\ \quad -3.x_2 - 6.x_3 = -12 \end{cases}$, que tiene dos ecuaciones y tres incógnitas.

Este sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Para hallar el conjunto solución, expresaremos $x_1 \; y \; x_2$ en función de x_3

$\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 = 18 - 6.x_3 \\ \quad -3.x_2 = -12 + 6.x_3 \end{cases}$

despejando en la E2: $x_2 = \dfrac{-12 + 6.x_3}{-3} \Rightarrow x_2 = 4 - 2.x_3$

sustituyendo en E1 y despejando x_1

$2.x_1 + 4.(4 - 2.x_3) = 18 - 6.x_3$

$2.x_1 + 16 - 8.x_3 = 18 - 6.x_3$

$x_1 = \dfrac{18 - 6.x_3 + 8.x_3 - 16}{2} \Rightarrow x_1 = 1 + x_3$

$x_1 \; y \; x_2$ dependen de x_3, si decimos que $x_3 = t$ con $t \in R$, el conjunto solución será de la forma $(1 + t; 4 - 2.t; t)$, para cada valor de *t*, obtendremos una solución del sistema, por ejemplo si *t* = 1, $x_1 = 2, x_2 = 2; x_3 = 1$

Verificación:

$\begin{cases} 2.2 + 4.2 + 6.1 = 18 \\ 4.2 + 5.2 + 6.1 = 24 \\ 2.2 + 7.2 + 12.1 = 30 \end{cases}$

Observación: El método de Gauss puede hacerse más ágil si se trabaja con la matriz ampliada o aumentada a partir de la aplicación de operaciones elementales por renglón.

Matriz: arreglo rectangular de números reales

Matriz de coeficientes (A): matriz que tiene por elementos los coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales

Matriz aumentada o ampliada (A´): es la matriz de los coeficientes ampliada con la columna de términos independientes.

<u>Operaciones elementales sobre una matriz</u>:

Las operaciones elementales sobre una matriz son:

1. Multiplicación de una línea (fila o columna) por un escalar. Ejemplo: $F_1 \to F_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

2. Reemplazo de una línea (fila o columna) por una combinación lineal de ella misma con otra. Ejemplo: $F_1 \to F_1 + F_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

3. Permutación de dos filas o dos columnas entre sí. Ejemplo: $F_1 \leftrightarrow F_2$

<u>Matrices equivalentes</u>: Diremos que una matriz B_{mxn} es equivalente a otra matriz A_{mxn} si y sólo si puede obtenerse efectuando un número finito de operaciones elementales sobre la matriz *A*. Notación: $B \sim A$.

Dado: $\begin{cases} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ -2.x_1 - 4.x_2 - 2.x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 \to F_2 + F_1.(-3)$$
$$F_3 \to F_3 + F_1.2$$

Obtenemos el sistema equivalente:

$\begin{cases} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -7.x_2 - 5.x_3 = 0 \end{cases}$

despejamos x_2 en la segunda ecuación, sustituimos en la primera y allí despejamos x_1

$$x_2 = -\frac{5}{7} \cdot x_3$$

$$x_1 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot x_3 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{7} \cdot x_3$$

Si hacemos $x_3 = t$, obtendremos el conjunto solución $\left(\frac{3}{7} \cdot t; -\frac{5}{7} \cdot t; t\right)$. Asignando valores a *t*, determinaremos soluciones particulares del sistema.

MATRICES

Los conceptos de matriz y determinante han sido de mucha importancia en la matemática, importancia que crece debido al uso de las computadoras. Las matrices son útiles porque permiten considerar a un arreglo de muchos números como un solo objeto, representarlo por medio de un solo símbolo y realizar cálculos en forma muy compacta.

Matriz: Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de m . n números dispuestos en m renglones o filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Observación: se puede utilizar corchetes en lugar de paréntesis.

Orden: El número m de filas y el número n de columnas son las dimensiones de la matriz y se dirá que la misma es de orden $m \times n$ Si $m = n$ la matriz hablaremos de una matriz cuadrada de orden n.

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ matriz de orden 3×2

2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ matriz cuadrada de orden 2.

Notación: el elemento general situado en la i-ésima fila j-ésima columna, será designado con a_{ij} ; la matriz de término general a_{ij} se denotará $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Ejercicio: Encontrar la matriz $A = (a_{ij})_{3\times 4}$ tal que $\begin{cases} a_{ij} = i^2 - j & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 2.j - i & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Solución: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Igualdad de matrices: Dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son iguales si tienen el mismo orden y las componentes correspondientes son iguales, es decir $a_{ij}=b_{ij} \quad \forall\ i, j$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2.a & d \\ \text{b} & 3.e \\ \text{- c} & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} 2.a=-4 \Rightarrow a=-2 & d=1 \\ \text{b}=5 & 3.e=9 \Rightarrow e=3 \\ \text{- c}=2 \Rightarrow \text{c}=\text{-2} & f=-1 \end{array}$

Adición de matrices: La suma de dos matrices $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(b_{ij})_{m\times n}$, es la matriz $C=(c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall i, j$. La adición de matrices sólo se define para matrices del mismo orden.

Ejemplo: Dadas $A=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Propiedades:

1. La adición de matrices es una ley de composición interna: $A \in R_{m\times n}$ y $B \in R_{m\times n} \Rightarrow (A+B) \in R_{m\times n}$
2. Ley asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. Neutro aditivo: $\exists\ \theta / A+\theta=\theta+A=A$ (θ es la matriz nula que también se simboliza con *N*)

   Matriz nula: es la que tiene todos sus elementos iguales a cero.

   Ejemplo: $\theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2.
4. Elemento opuesto: $\forall A\ \exists\ (-A) / A+(-A)=(-A)+A=\theta$ (existe la matriz opuesta)

   Matriz opuesta: Dada una matriz *A* se llama matriz opuesta de *A* y se simboliza – *A*, a la matriz que tiene por elementos, los opuestos de los elementos de *A*.

   Si $A=(a_{ij}) \Rightarrow -A=(-a_{ij})$

   Ejemplo: Para $A=\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$ la matriz opuesta es $-A=\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -12 & 5 \end{bmatrix}$
5. Ley conmutativa: $A+B=B+A$

Multiplicación de una matriz por un escalar:

Dada una matriz $A \in R_{m\times n}$ y $\alpha \in$ R, se llama producto α. *A* a una matriz $B=(b_{ij})_{m\times n} / b_{ij}=\alpha\ .\ a_{ij}$

Ejemplo: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$

Propiedades:

1. La multiplicación de una matriz por un escalar es una ley de composición externa $A_{m\times n} \in \mathrm{R}^{m\times n}$ y $\alpha \in R \Rightarrow (\alpha \cdot A) \in \mathrm{R}^{m\times n}$
2. $(\alpha \,.\, \beta).A = \alpha\,.(\beta.\ A)\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{R}$
3. $(\alpha + \beta)\ .\ A = \alpha.A + \beta.A$
4. $(A + B)\ .\ \alpha = A.\alpha + B.\alpha$
5. $\exists\ 1 \in \mathrm{R}\ /\ 1.A = A.1 = A$

Matriz traspuesta: se llama traspuesta de una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, y la indicaremos con A^t a la matriz de orden $n \times m$ tal que su término general es $b_{ij} = a_{ji}\quad \forall\ i, j$

Ejemplo: Dada $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 4} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 2}$

Propiedades:

1. La traspuesta de la traspuesta de A es A. $(A^t)^t = A$
2. La traspuesta del producto es igual al producto de las traspuestas en orden permutado. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
3. Si A y B tienen el mismo orden: $(A + B)^t = A^t + B^t$
4. Si A es invertible, entonces A^t es invertible y se verifica que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Vectores

Un vector de *n* componentes se define como un conjunto ordenado de *n* números escritos de la siguiente forma:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Un vector columna de *n* componentes es un conjunto ordenado de *n* números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Producto escalar de vectores

Sean *a* y *b* dos vectores.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

El producto escalar de *a* y *b*, denotado *a . b*, está dado por:

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

El producto escalar se llama también producto punto o producto interno. Es un número.

Vectores ortogonales:

Se dice que dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es nulo.

Ejemplo:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$$

Multiplicación de matrices:

Condición: Dos matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.

Sea $A = (a_{ij})_{m \times n} \wedge B = (b_{jk})_{n \times p}$ se llama matriz producto $A.B = C$ a la matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ de orden $m \times p$, tal que su elemento genérico es $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, b_{jk} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \cdots + a_{in}.b_{nk}$

Esto significa que el elemento de la matriz *C*, situado en la fila *i* y columna *k*, es igual a la suma de los productos de los elementos de la fila *i* de la primera matriz, por los elementos de la columna *k* de la segunda matriz.

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A)\cdot(\text{columna } j \text{ de } B)$$

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Ejemplos:

1. $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -1.2+0.1+(-2).(-1) \\ 2.2+1.1+(-1).(-1) \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1.2+2.1 & 1.(-1)+2.(-3) & 1.5+2.2 \\ 3.2+4.1 & 3.(-1)+4.(-3) & 3.5+4.2 \\ (-2).2+1.1 & (-2).(-1)+1.(-3) & (-2).5+1.2 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 10 & -15 & 23 \\ -3 & -1 & -8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

<u>Propiedades</u>:

1. Distributivas: $\begin{cases} A.(B+C) = A.B + A.C \\ (A+B).C = A.C + B.C \end{cases}$
2. Asociativa: $A.(B.C) = (A.B).C$
3. No conmutativa: $A.B \neq B.A$
4. $A.B = \theta$ no implica necesariamente que $A=\theta \vee B=\theta$

Ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ resulta: $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A.B = A.C$ no implica necesariamente que $B = C$

En efecto:

Si $A.B = A.C \Rightarrow A.B - A.C = \theta$

$A.(B-C)=\theta$ pero no podemos afirmar que $A=\theta \vee (B-C)=\theta$ por lo que no necesariamente $B=C$

<u>Matrices cuadradas</u>: son aquellas matrices en las que el número de filas coincide con el número de columnas.

<u>Diagonal principal</u>: En una matriz cuadrada, se llama diagonal principal, al conjunto de elementos a_{ii}

Ejemplo: En la matriz de orden 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ la diagonal principal es {1; 3; 2}

<u>Matriz diagonal</u>: es la matriz cuadrada en la cual todos los elementos son nulos con excepción de los que se sitúan en la diagonal principal.

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz diagonal si y solo si $\begin{cases} a_{ij} \neq 0 & \text{si} \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

Ejemplo: $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.

<u>Matriz escalar</u>: es la matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz escalar si y solo si $\begin{cases} a_{ij} = k & \text{si} \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

Ejemplo: $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar.

<u>Matriz identidad</u>: es la matriz escalar en la que los elementos no nulos son iguales a uno.

$I = (a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz identidad si y solo si $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si} \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3.

<u>Matriz simétrica</u>: Una matriz cuadrada es simétrica, cuando los elementos simétricos respecto de la diagonal principal, son iguales $A = (a_{ij})_{n\times n}$ es simétrica si y solo si $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$.
Una matriz es simétrica si y solo si es igual a su traspuesta.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica.

Verificación $A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Matriz antisimétrica</u>: Una matriz cuadrada es antisimétrica cuando los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos; como los elementos de la diagonal principal deben cumplir con la condición necesariamente serán nulos.

$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ es antisimétrica si y solo si $a_{ij}=-a_{ji} \quad \forall i,j$.
Una matriz es antisimétrica si y solo si es igual a la opuesta de su traspuesta.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Verificación: $A^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad A=-A^t$

Observación: a las propiedades de la multiplicación de matrices, en el caso de las matrices cuadradas se agrega la siguiente propiedad

$\exists\ I \ / \ \ A.I=I.A=A \quad \forall\ A$ (A matriz cuadrada)

Matrices Triangulares:

Matriz triangular superior: una matriz cuadrada es triangular superior si y sólo si para $i>j$ es $a_{ij}=0$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es triangular superior

Matriz triangular inferior: una matriz cuadrada es triangular inferior si y sólo si para $i<j$ es $a_{ij}=0$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ es triangular inferior

Inversa de una matriz cuadrada: La matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ es invertible, regular o no singular si y sólo existe una matriz $B=(b_{ij})_{n\times n}$ tal que su producto por A, a izquierda y a derecha, es la identidad.

A es inversible $\Leftrightarrow\ \exists\ B/\,A.B=B.A=I$. Si la matriz inversa existe, es única y se denota A^{-1}

Ejemplo: Si $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ porque:

$A.A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $A^{-1}.A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema: Unicidad de la matriz inversa. Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración:

Suponemos que A admite dos matrices inversas: B y C, por igualdad de matrices

$$
\begin{aligned}
B \cdot A &= B \cdot A \\
B \cdot A \cdot C &= B \cdot A \cdot C \\
(B \cdot A) \cdot C &= B \cdot (A \cdot C) \\
I \cdot C &= B \cdot I \\
C &= B
\end{aligned}
$$

Luego: La inversa es única

Teorema: Inversa del producto de dos matrices. Sean A y B dos matrices invertibles de n x n. Entonces es invertible y:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Demostración: Se demuestra por aplicación de la definición de matriz inversa.

$$A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

Con lo que queda demostrado.

Inversa de una matriz: Método de Gauss-Jordan

Sea A_{nxn}, una matriz que admite inversa (matriz no singular), a su derecha se escribe la matriz identidad (de orden *n* x *n*). A la matriz obtenida se aplican operaciones elementales hasta transformar *A* en la identidad. La matriz resultante a la derecha es la inversa de A (A^{-1}).

A	I
I	A^{-1}

Ejemplo: Se quiere hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 \to \frac{1}{2} F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 \to F_2 + 4F_1 ; F_3 \to F_3 - F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 \to F_3 - 3F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & -\frac{13}{2} & -3 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 \to \frac{1}{17} F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{34} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{array}\right) \quad F_1 \to F_1 + F_3 ; F_2 \to F_2 + 4F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{17} & \frac{5}{17} & \frac{4}{17} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{34} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{array}\right)$$

Luego: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{5}{17} & \frac{4}{17} \\ -\frac{13}{34} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$

<u>Sistemas lineales de *n* ecuaciones y *n* incógnitas : Resolución matricial</u>

Un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar como ecuación matricial de la siguiente manera:

Sea $\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + \cdots + a_{3n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + a_{nn}.x_n = b_n \end{cases}$,

diremos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots. \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Entonces, $A.X = B$ y $X = A^{-1}.B$

Este método sólo es aplicable si A admite inversa.

<u>Ejemplo</u>:

Dado $\begin{cases} 2.x + 3.y - z = 10 \\ 3.x - 2.y + 4.z = -7 \\ x + 5.y - 2.z = 11 \end{cases}$, expresamos $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$, luego $X = A^{-1}.B$

$$X = -\frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 1 & 10 \\ 10 & -3 & -11 \\ 17 & -7 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} -57 \\ 0 \\ 76 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$