Espacios Vectoriales

Espacio vectorial real

- Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos, llamados vectores con las operaciones adición y multiplicación por un escalar que satisface los axiomas siguientes:

Axiomas de un espacio vectorial

1. Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ (ley de cierre)
2. $\forall x, y, z$ **en** $V, (x+y)+z = x+(y+z)$, ley asociativa.
3. Existe un vector $0 \in V / \forall \ x \in V, \ x+0=0+x=x$ elemento neutro de la adición de vectores. (vector nulo)
4. Si $x \in V, \ \exists -x / \ x+(-x)=(-x)+x=0$ elemento opuesto.
5. Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y = y + x$, ley conmutativa.
6. Si , $\forall \ x \in V, \ \forall \alpha \in R, \ \alpha. \cdot x \in V$ ley de cierre.
7. Si , $x \in V$ **y** $\mathbf{y} \in V$ y $\alpha \in R,$ $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
8. Si , $x \in V, \ \alpha \in R, \ \beta \in R,$ entonces $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
9. Si $x \in V, \ \alpha \in R, \ \beta \in R,$ entonces $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
10. Para cada vector $x \in V, \ 1 \cdot x = x$

Ejemplo

- Sea ,

$$V = R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

el primer axioma se verifica por definición de suma de vectores, haciendo

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } -x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

los axiomas 2 a 10, se obtienen de la definición de suma de vectores y de las propiedades que rigen las operaciones con números reales.

- Si *V* verifica los axiomas, entonces es un espacio vectorial.

Propiedades

Sea V un espacio vectorial.

Entonces:

1. $\alpha \cdot \vec{\theta} = \vec{\theta}$ para todo escalar α.

2. $0.\vec{v} = \vec{\theta}$, **para todo** $\vec{v} \in V$

3. Si $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{\theta} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{v} = \vec{\boldsymbol{\theta}}$

4. $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$, **para todo** $\vec{v} \in V$

Subespacio

- Sea H un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V si H es en sí un espacio vectorial bajo las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, entonces se dice que H es un subespacio de V.

- **Teorema:** Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las reglas de cerradura:

$$\textbf{Si } x \in H \ \ \textbf{y } y \in H \Rightarrow x + y \in H$$

$$\textbf{Si } x \in H \Rightarrow \alpha x \in H \qquad \forall \alpha \in R$$

Combinación lineal

Sean , $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ vectores en un espacio vectorial *V*.
Entonces cualquier vector de la forma

$$a_1.\vec{v}_1 + a_2.\vec{v}_2 + a_3.\vec{v}_3 + \cdots + a_n.\vec{v}_n$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son escalares,

se llama combinación lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$

Conjunto generador

- Se dice que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ en un espacio vectorial V generan a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de ellos. Es decir, para todo $\vec{v} \in V$, existen escalares $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, tales que

$$a_1.\vec{v}_1 + a_2.\vec{v}_2 + a_3.\vec{v}_3 + \cdots + a_n.\vec{v}_n = \vec{v}$$

Espacio generado por un conjunto de vectores

- Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$, k vectores de un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_k$
- Es decir:

$$gen\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{v / v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k\}$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son escalares arbitrarios.

Dependencia e independencia lineal

- Sean $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$, n vectores en un espacio vectorial *V*, diremos que ellos son linealmente independientes si la única combinación lineal

$$a_1.\overrightarrow{v_1} + a_2.\overrightarrow{v_2} + a_3.\overrightarrow{v_3} + \cdots + a_n.\overrightarrow{v_n} = \theta$$

cuando los $a_i \text{ con } i = 1,2,3,\ldots,n$ son simultáneamente nulos, en caso contrario los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplos

- Determinar si los vectores que siguen son linealmente independientes, en caso contrario, expresar uno de ellos como combinación lineal de los demás:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dependencia lineal

- Teorema 1: Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

- Teorema 2: Un conjunto de n vectores en $\mathbf{R}^m$ es siempre linealmente dependiente si $n>m$.

Dependencia Lineal

- Teorema 3:

Sea $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces las columnas de A consideradas como vectores, son linealmente dependientes si y sólo si el sistema $A \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$, tiene soluciones no triviales. Donde

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Dependencia lineal

- Teorema 4: Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$, n vectores en

  R^n y sea A una matriz nxn cuyas columnas son $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$

  Entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ es la solución trivial **c** = **0**
- Teorema 5: Sea A una matriz de nxn. Entonces det(A) es distinto de cero si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

Dependencia Lineal

- Teorema de resumen:

  Sea A una matriz de n x n. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes, es decir que si una es cierta, todas son ciertas.

1. A es invertible
2. La única solución al sistema homogéneo A $\mathbf{x}$ = 0 es la trivial.
3. El sistema A $\mathbf{x}$ = b tiene solución única para cada n-vector b
4. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de n x n
5. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes
6. El determinante de A es distinto de cero
7. Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

Dependencia Lineal

- Teorema 7: Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n genera a R^n

Base

- Un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si:

1. El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.
2. El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera a V.

Teoremas

- **Teorema 1**: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para V y si $v \in V$ entonces existe un conjunto único de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$

Demostración: …

- **Teorema 2**: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ **y** $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ son bases de un espacio vectorial V, entonces n = m, es decir cualesquiera dos bases en un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

Rango de una matriz A: $\rho(A)$

- En forma primitiva, podemos decir que:

  - El rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones.
  - El rango de una matriz es el número de columnas linealmente independientes que tiene la matriz (o el número de renglones linealmente independientes)

Teorema resumen

Sea A una matriz de n x n. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes, es decir que si una es cierta, todas son ciertas.

1. A es invertible
2. La única solución al sistema homogéneo A **x** = 0 es la trivial.
3. El sistema A **x** = b tiene solución única para cada n-vector b
4. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de n x n
5. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes
6. El determinante de A es distinto de cero
7. Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.
8. Rango de A: $\rho(A) = n$

Más aún, si una de ellas no se cumple, entonces para cada vector $\mathbf{b} \in R^n$

El sistema A **x** = **b** no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones. Tiene número infinito de soluciones si y sólo si:

$$\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$$

Volviendo a los sistemas de ecuaciones lineales…

Teorema de Rouché – Frobenius

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución, es que la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tengan igual rango.

Es decir que si $\rho(A) = \rho(A,\mathbf{b})$, el sistema es compatible.

Por lo tanto, si $\rho(A) \neq \rho(A,\mathbf{b})$, el sistema es incompatible.

- Si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada e igual al número *n* de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
  En símbolos: si $\rho(A) = \rho(A,\mathbf{b}) = n$ el sistema es compatible determinado.
- Si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número *n* de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, admite infinitas soluciones.

$$\rho(A) = \rho(A,\mathbf{b}) < n$$

Cambio de Base

- **Definición:** La matriz A de n x n cuyas columnas son los vectores de la base B_1 expresados en la base B_2, es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (u_1)_{B_2} & (u_2)_{B_2} & (u_3)_{B_2} & (u_n)_{B_2} \end{matrix}$$

Teoremas

- **Teorema 1**: Sean B_1 y B_2 bases de un espacio vectorial *V*. Sea *A* la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces para todo $\mathbf{x} \in V$

$$(\mathbf{x})_{B_2} = A \cdot (\mathbf{x})_{B_1}$$

- **Teorema 2**: Si *A* es la matriz de transición de B_1 a B_2, entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 **a** B_1

Demostración: ….