Licenciatura en Sistemas

Trabajo Práctico: Espacios Vectoriales

1. Determinar si los siguientes conjuntos de objetos poseen estructura de espacio vectorial. Justificar.
   a. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} / x\epsilon R \right\}$ con las operaciones adición de vectores y multiplicación por un escalar en R^2.
   b. El conjunto de todas las matrices invertibles 2x2 con las operaciones adición de matrices y multiplicación por un escalar.
   c. El conjunto de todas las matrices 2x3 con las operaciones adición de matrices y multiplicación por un escalar.

a) Determinar si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.
   a. $V = R^2; H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; y \geq 0 \right\}$
   b. $V = R^2; H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; x = y \right\}$
   c. $V = M_{22}; H = \left\{ A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \right\}$
   d. $V = M_{22}; H = \left\{ A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

2. Determinar el valor de verdad de las siguientes expresiones. Justificar.
   a. Un conjunto de vectores $S = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ en un espacio vectorial es linealmente dependiente si la ecuación vectorial $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$ admite sólo la solución trivial.
   b. Dos vectores $u\ y\ v$ en un espacio vectorial V son linealmente dependientes si y sólo si uno es un múltiplo escalar del otro.
   c. Si un subconjunto S genera un espacio vectorial V, entonces todo vector en V puede escribirse como una combinación lineal de los vectores en S.
   d. Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces todo conjunto que contiene más de n vectores en V sigue siendo linealmente independiente.

3. Si es posible, escribir en cada caso, el vector w como combinación lineal de los vectores del conjunto: $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   a. $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   b. $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$
4. Explicar por qué son linealmente dependientes los siguientes vectores:
   a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Expresar uno de ellos como combinación lineal de los restantes.
5. Determinar si los siguientes conjuntos son o no linealmente independientes:
   a. S es un conjunto de vectores M_{2x2}, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   b. S es un conjunto de vectores M_{4x1}, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
   c. S es un conjunto de vectores en R^3, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
6. Determinar cuando los vectores dados constituyen una base del espacio vectorial indicado:
   a. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -16 \end{pmatrix} \right\}$ para R^3.
   b. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ para R^2.
   c. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ para R^3.
   d. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ para M_{2x2}.
7. Dados los vectores $[X]$ en base canónica, encontrar el vector $[X]_B$, siendo B, la base dada : $B = \{b_1, \dots, b_n\}$:
   a. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}_1$, $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}\right\}_1 , \; X = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

c. $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\4\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}\right\} , \; X = \begin{pmatrix}8\\-9\\6\end{pmatrix}$

d. $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\} , \; X = \begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}$

8. Dadas las bases en R^2: $A = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}$, determine las coordenadas del vector $x_A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en la base *B*.