Unidad IV

1. Derivada de una función en un punto

Supongamos que lanzamos verticalmente hacia arriba una pelota, la trayectoria de la pelota es un segmento de recta vertical, ya que la pelota se eleva hasta una cierta altura y luego se detiene por un instante y cae.

Representemos en función del tiempo la altura de la pelota y supongamos que la altura viene dada por la siguiente función $h(t) = -4t^2 + 30t$. Supongamos que el tiempo está medido en segundos y la altura en centímetros.
La gráfica de esta función es la figura 1. Si fuera necesario a partir de la

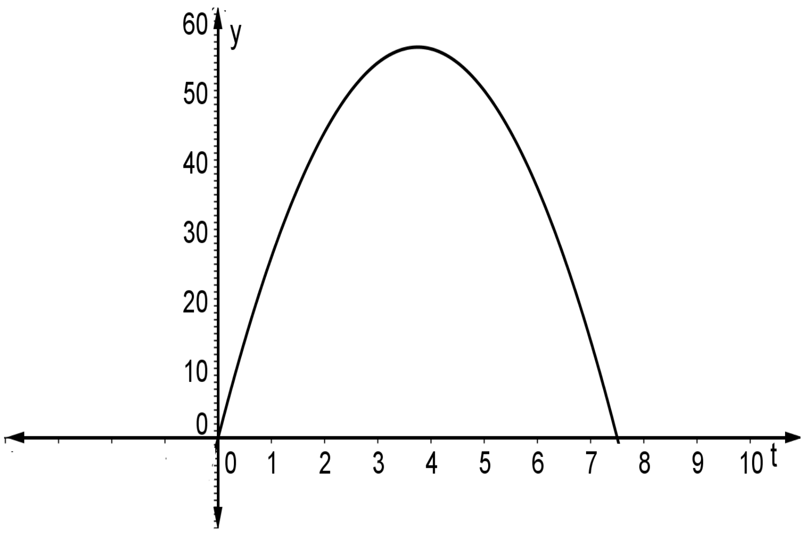


Figura 1: Gráfico de la función $h(t) = -4t^2 + 30t$

gráfica de la función podemos calcular la altura de la pelota para un tiempo dado.También observando la gráfica, se puede ver como esta describe el movimiento de la pelota, ya que la misma crece hasta alcanzar una altura máxima y luego decrece hasta alcanzar nuevamente la altura desde donde partió.

Podemos encontrar otro tipo de información, como por ejemplo la rapidez del cambio de altura con el tiempo.

Consideremos un instante inicial t_0 y un instante final t, luego en en el tiempo $t - t_0$ segundos la altura ha variado $h(t) - h(t_0)$ metros.

El cociente

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$$

representa la variación de la altura en el tiempo $t - t_0$.
Este cociente se denomina **tasa de variación media** de la altura en el intervalo $[t_0, t]$.
En Física se la denomina **velocidad media** de la pelota en el tiempo $[t_0, t]$.

Si por ejemplo nos interesa la variación de la altura en cada instante t_0, bastará, calcular:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$$

si este límite existe y es finito, representa la **tasa de cambio instantánea** de la altura en el instante t_0 .
En Física, se denomina **velocidad instantánea** de la pelota en t_0.

1.1. Cociente incremental

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, sean x_0 y $x_0 + \Delta x$ dos puntos de A. La variación absoluta de f cuando x se incrementa de x_0 a $x_0 + \Delta x$ está medida por $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
Pero si queremos medir la variación relativa de f, entonces debemos considerar el cociente:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Este cociente recibe el nombre de **cociente incremental** y mide la variación relativa de f cuando x pasa de x_0 a $x_0 + \Delta x$.

1.2. Derivada de una función en un punto

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$. Diremos que f es derivable en x_0 si existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si el límite existe, se lo indica $f^{'}(x_0)$ y se lo llama **derivada de f en x_0**.

Ejemplo: Sea $f(x) = 3x^2 + 1$, encontrar la derivada de f en $x_0 = 2$.

$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(2 + \Delta x)^2 + 1 - 13}{\Delta x}$$

$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2) - 12}{\Delta x}$$

$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 12}{\Delta x}$$

$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} 12 + 3\Delta x$$

$$f^{'}(2) = 12$$

1.2.1. Otras formas de definir la derivada de una función en un punto

Observemos que el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

es lo mismo que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y lo mismo que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y si existe cualquiera de ellos existen los otros y todos en caso de existir representan a $f^{'}(x_0)$, o sea la derivada de la función f en el punto x_0.

1.3. Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto

1.3.1. Recta tangente a una curva en un punto

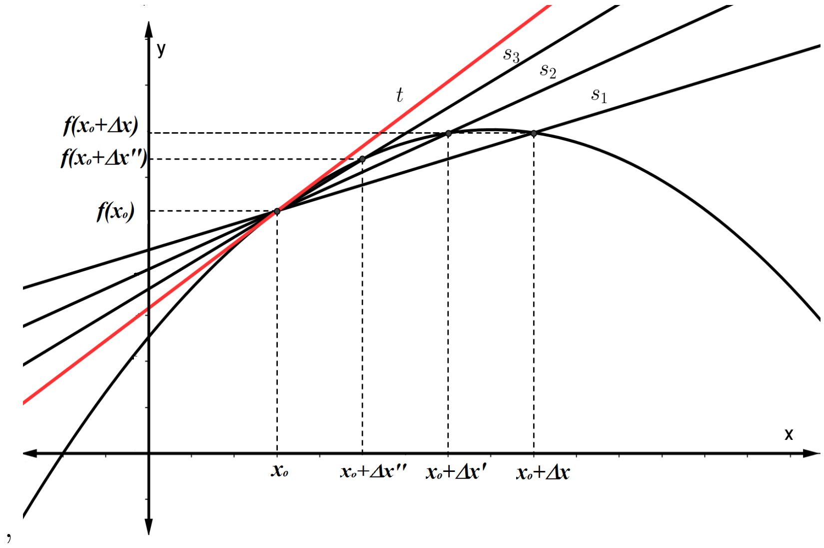


Figura 2: Recta tangente a una curva en un punto

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, sean x_0 y $x_0 + \Delta x$ dos puntos de A. Sean los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, la recta s_1 que pasa por dichos puntos se llama **recta secante a la gráfica de** f.

Si Δx es cada vez más pequeño, se puede observar que la recta secante s_1 tiende s_2, s_3, etc.

La recta límite es la recta t. Esta recta se denomina **recta tangente a la curva que es gráfica de** f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Ahora bien, la pendiente de la recta s_1 esta dada por:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

que es el cociente incremental.
Luego, podemos interpretar geométricamente al cociente incremental como la pendiente de la recta secante a la curva que es gráfica de f por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Definimos derivada de la función en un punto como:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Luego, $f^{'}(x_0)$ es el límite del cociente incremental, podemos entonces interpretar geométricamente a $f^{'}(x_0)$ como la pendiente de la recta tangente (recta límite de las rectas secantes, cuyas pendientes vienen dadas por el cociente incremental) a la curva que es gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

1.3.2. Ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) viene dada por:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

Luego, por lo visto anteriormente reemplazando se tiene:

$$y - f\,(x_0) = f^{'}(x_0)\,(x - x_0)$$

Es la ecuación de la recta tangente a la curva que es gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

1.4. Relación entre derivabilidad y continuidad

Cuando definimos derivada de una función en un punto dijimos que si $f^{'}(x_0)$ existe, entonces la función f se dice derivable en dicho punto. Veremos a continuación un teorema que relaciona la derivabilidad de la función en un punto con la continuidad de la función en dicho punto.

Teorema 1.1 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$. Si f es derivable en x_0 entonces, es continua en x_0.*

Demostración: para demostrar que la función f es continua en x_0, debemos probar que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ o equivalentemente $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.
Ahora bien, $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)]\,\frac{x - x_0}{x - x_0}$
Como la función es derivable en x_0, el límite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0)$, y $x - x_0$ tiende a cero cuando $x \to x_0$, por lo que $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ que es lo queríamos demostrar.
El recíproco de este teorema no es cierto, ya que hay funciones que son continuas en un punto, pero no son derivables en dicho punto.

Ejemplo: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ vimos que es continua en $x = 0$, probaremos que no es derivable en dicho punto.
En efecto, intentemos calcular por definición la derivada de f en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Y como ya se estudió anteriormente la función signo no tiene límite en el punto $x = 0$, por lo que $f'(0)$ no existe. Luego, $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

1.5. Derivadas laterales

Los límites laterales del cociente incremental $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$, si existen se denominan derivadas laterales de la función en el punto $x = x_0$.
Definimos entonces:

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

y

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

a la derivada lateral por derecha de f en $x = x_0$ y a la derivada lateral por izquierda de f en $x = x_0$, respectivamente.
Al igual que en el caso de los límites laterales, si la función es derivable en el punto $x = x_0$, las derivadas laterales deben ser iguales.

1.6. Función Derivada

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, supongamos que f es derivable en todos los puntos del conjunto A. Esto quiere decir que para cada $x \in A$ le corresponde $f'(x) \in \mathbb{R}$, de esta manera tenemos definida una función $x \to f'(x)$ que se llamará **función derivada de** f, y se indicará f'
.

1.6.1. Derivada de la función constante

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y tal que $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ constante.
Si

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

entonces:

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}$$

Luego

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} 0 \Rightarrow f^{'}(x) = 0$$

Luego si: $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ constante, entonces $f^{'}(x) = 0$.

1.6.2. Derivada de la función idéntica

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.
Si

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

entonces:

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

Luego

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} 1 \Rightarrow f^{'}(x) = 1$$

1.6.3. Derivada de una constante por una función

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y tal que $f(x) = kg(x)$ con g una función derivable en $A \subseteq \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$ constante.
Si

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

entonces:

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{kg(x+h)-kg(x)}{h}$$

Luego

$$f^{'}(x) = k\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \Rightarrow f^{'}(x) = kg^{'}(x)$$

1.6.4. Derivada de la función potencial

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$.
Si

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

entonces:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

Como $x^n - x_0^n$ es divisible por $(x - x_0)$; entonces

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}.x_0 + x^{n-3}.x_0^2 + ... + x_0^{n-1}\right)$$

Luego:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}.x_0 + x^{n-3}.x_0^2 + ... + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0}$$

Entonces:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}.x_0 + x^{n-3}.x_0^2 + ... + x_0^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \left(x_0^{n-1} + x_0^{n-2}.x_0 + x_0^{n-3}.x_0^2 + ... + x_0^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = n x_0^{n-1}$$

1.6.5. Derivada de la suma de dos funciones

Sean f y g dos funciones derivables en x_0.
Luego, la función $f + g$ es derivable en x_0 y

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

En efecto:

$$(f + g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h}$$

$$(f + g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - [f(x_0) + g(x_0)]}{h}$$

$$(f + g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

$$(f+g)^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right]$$

$$(f+g)^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Como f y g son funciones derivables en x_0:

$$(f+g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0)$$

A partir de esta última expresión se puede obtener la siguiente:

$$(f-g)^{'}(x_0) = (f+(-1)g)^{'}(x_0)$$

$$(f-g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + (-1)g^{'}(x_0)$$

$$(f-g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) - g^{'}(x_0)$$

1.6.6. Derivada del producto y del cociente de dos funciones

- Sean f y g dos funciones derivables en x_0.
  Luego, la función $f.g$ es derivable en x_0 y

$$(f.g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g^{'}(x_0)$$

- Sean f y g dos funciones derivables en x_0, y $g(x_0) \neq 0$.
  Luego, la función $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ es derivable en x_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x_0) = \frac{f^{'}(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g^{'}(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

1.6.7. Derivada de la función seno

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = sen(x)$.

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{sen(x)-sen(x_0)}{x-x_0}$$

Pero: $sen(x) - sen(x_0) = 2sen(\frac{x-x_0}{2})cos(\frac{x+x_0}{2})$, luego reemplazando en el numerador de la expresión anterior:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{2sen(\frac{x-x_0}{2})cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{sen(\frac{x-x_0}{2})cos(\frac{x+x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}$$

Recordemos que, $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$; luego:

$\lim_{x \to x_0} \frac{sen(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} = 1$ y $\lim_{x \to x_0} cos(\frac{x+x_0}{2}) = cos(x_0)$

$$\Rightarrow f'(x_0) = cos(x_0)$$

1.6.8. Derivada de la función coseno

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cos(x)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{cos(x) - cos(x_0)}{x - x_0}$$

Pero: $cos(x) - cos(x_0) = -2sen(\frac{x-x_0}{2})sen(\frac{x+x_0}{2})$, luego reemplazando en el numerador de la expresión anterior:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{-2sen(\frac{x-x_0}{2})sen(\frac{x+x_0}{2})}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{-sen(\frac{x-x_0}{2})sen(\frac{x+x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}$$

Recordemos que, $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$; luego:

$\lim_{x \to x_0} \frac{sen(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} = 1$ y $\lim_{x \to x_0} sen(\frac{x+x_0}{2}) = sen(x_0)$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -sen(x_0)$$

1.6.9. Derivada de la función logaritmo natural

Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ln(x)$.

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{ln(x) - ln(x_0)}{x - x_0}$$

Por propiedades de la función logaritmo:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)}{x - x_0} \Leftrightarrow f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} ln\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} ln\left[\left(\frac{x - x_0 + x_0}{x_0}\right)^{\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} ln\left[\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} ln\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{x - x_0}}\right)^{\left(\dfrac{x_0}{x - x_0}\right)}\right]^{\dfrac{1}{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow f^{'}(x_0) = \frac{1}{x_0} ln\left\{\lim_{x \to x_0}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{x - x_0}}\right)^{\left(\dfrac{x_0}{x - x_0}\right)}\right]\right\}$$

Como $\lim_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{x - x_0}}\right)^{\left(\dfrac{x_0}{x - x_0}\right)}\right] = e$$

Luego, $f^{'}(x_0) = \dfrac{1}{x_0} ln(e)$

$$\Rightarrow f^{'}(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

1.6.10. Derivada de la función compuesta

Si g es derivable en x_0, y f es derivable en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x_0 y :

$$(f \circ g)^{'}(x_0) = f^{'}[g(x_0)]\, g^{'}(x_0)$$

Ejemplo: Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = sen(x^2 + x)$.

Esta función es composición de dos funciones $h(x) = sen(x)$ y $g(x) = x^2 + x$, (en efecto:$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + x) = sen(x^2 + x)$) ambas derivables para todo $x \in \mathbb{R}$.
Luego,

$$(h \circ g)^{'}(x) = h^{'}(g(x))g^{'}(x)$$

$$f^{'}(x) = cos(x^2 + x)(2x + 1)$$

$$f^{'}(x) = (2x + 1)cos(x^2 + x)$$

1.6.11. Derivada de la función exponencial

Sea $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, tal que $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.
Luego: $ln\,(f(x)) = xln(a)$, derivando ambos miembros (supongamos que f es derivable en x y que $f(x) \neq 0$):
$\dfrac{1}{f(x)} f^{'}(x) = ln(a) \Rightarrow f^{'}(x) = f(x).ln(a)$, como $f(x) = a^x$, resulta:

$$\Rightarrow f^{'}(x) = a^x.ln(a)$$

- Si $f(x) = e^x$ entonces $f^{'}(x) = e^x$

1.6.12. Derivada de la función potencial de exponente real

Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^a$, con $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $ln\,(f(x)) = a.ln(x)$, derivando ambos miembros:

$$\frac{1}{f(x)} f^{'}(x) = a.\frac{1}{x} \Rightarrow f^{'}(x) = a.f(x).\frac{1}{x}$$

como $f(x) = x^a$, resulta:$f^{'}(x) = a.x^a.\dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow f^{'}(x) = a.x^{a-1}$$

1.6.13. Derivada de la función Inversa

Sea f una función biyectiva, con inversa f^{-1}.
Si f es derivable en el punto x_0 y f^{-1} es continua en el punto $y_0 = f(x_0)$ entonces f^{-1} es derivable en el punto y_0 si, y sólo si, $f^{'}(x_0) \neq 0$. En caso afirmativo, se tiene

$$\left(f^{-1}\right)^{'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Observación: La expresión anterior también se puede escribir:

$$\left(f^{-1}\right)^{'}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Ejemplo 1: Sea $f : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f(x) = arcsen(x)$.
Esta función tal como está definida es la inversa de $g(x) = sen(x)$, que es derivable para todo $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Su derivada es $g^{'}(x) = cos(x)$ y es distinta de cero para todo $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Entonces f es derivable para todo $x \in (-1, 1)$ y su derivada es:

$$(f)^{'}(x) = \frac{1}{g^{'}(y)}$$

Luego, reemplazando:

$$(arcsen)^{'}(x) = \frac{1}{cos(y)} \qquad (1)$$

Pero si $y = arcsen(x)$ entonces $x = sen(y)$, además $sen^2(y) + cos^2(y) = 1$.
Luego $cos(y) = \sqrt{1 - sen^2(y)}$. Entonces: $cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$.

Reemplazando, en (1)

$$(arcsen)^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejemplo 2: Sea $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ tal que $f(x) = arccos(x)$.
Esta función tal como está definida es la inversa de $g(x) = cos(x)$, que es derivable para todo $x \in (0, \pi)$. Su derivada es $g^{'}(x) = -sen(x)$ es distinta de cero para todo $x \in (0, \pi)$.
Entonces f es derivable para todo $x \in (-1, 1)$ y su derivada es:

$$(f)^{'}(x) = \frac{1}{g^{'}(y)}$$

Luego, reemplazando:

$$(arccos)^{'}(x) = \frac{1}{-sen(y)} \qquad (2)$$

Pero si $y = arccos(x)$ entonces $x = cos(y)$, además $sen^2(y) + cos^2(y) = 1$.
Luego $sen(y) = \sqrt{1 - cos^2(y)}$. Entonces:$sen(y) = \sqrt{1 - x^2}$.

Reemplazando, en (2)

$$(arccos)^{'}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejemplo 3: Sea $f : \mathbb{R} \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f(x) = arctan(x)$.
Esta función tal como está definida es la inversa de $g(x) = tan(x)$, que es derivable para todo $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Su derivada es $g^{'}(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$ y es distinta de cero para todo $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Entonces f es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada es:

$$(f)^{'}(x) = \frac{1}{g^{'}(y)}$$

Luego, reemplazando:

$$(arctan)^{'}(x) = \frac{1}{\frac{1}{cos^2(y)}} \qquad (3)$$

Pero si $y = arctan(x)$ entonces $x = tan(y)$, además $sen^2(y) + cos^2(y) = 1$.
Luego $\frac{1}{cos^2(y)} = \frac{sen^2(y) + cos^2(y)}{cos^2(y)}$,
o equivalentemente $\frac{1}{cos^2(y)} = tan^2(y) + 1$.
Entonces: $\frac{1}{cos^2(y)} = 1 + x^2$.

Reemplazando, en (3)

$$(arctan)^{'}(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

1.6.14. Reglas de derivación

Con los resultados obtenidos, podemos confeccionar la siguiente tabla, que contiene las reglas de derivación estudiadas:

1. Si $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ constante. Entonces $f'(x) = 0$
2. Si $f(x) = x$. Entonces $f'(x) = 1$
3. Si $f(x) = k.g(x)$ con k constante. Entonces $f'(x) = k.g'(x)$
4. Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f'(x) = n.x^{n-1}$
5. Si f y g dos funciones derivables. Entonces $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
6. Si f y g dos funciones derivables. Entonces
$$(f.g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$
7. Si f y g dos funciones derivables en x, y $g(x) \neq 0$. Entonces
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$
8. Si $f(x) = sen(x)$. Entonces $f'(x) = cos(x)$.
9. Si $f(x) = cos(x)$. Entonces $f'(x) = -sen(x)$.
10. Si $f(x) = ln(x)$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$.
11. Si g es derivable en x, y f es derivable en $g(x)$. Entonces
$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\,g'(x)$$
12. Si $f(x) = a^x$. Entonces $f'(x) = a^x ln(a)$.
13. Si $f(x) = e^x$. Entonces $f'(x) = e^x$.
14. Si $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) = a.x^{a-1}$.
15. Si $f(x) = arcsen(x)$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. Si $f(x) = arccos(x)$. Entonces $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. Si $f(x) = arctan(x)$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1.7. Derivadas Sucesivas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, una función derivable en A.
A su función derivada $f^{'} : A \to \mathbb{R}$ se la llamará *derivada primera* de f en A. Si existe la derivada de $f^{'}$ en un punto $x \in A$, a ella se la llama *derivada segunda* de f en x y se la denota por $f^{''}(x)$, si esta derivada existe para todo $x \in A$, a la función $x \to f^{''}(x)$ se la llama *función derivada segunda de* f.

En general: si existe la derivada de $f^{(n-1)}$ en un punto $x \in A$, a ella se la llama *derivada de orden* n *de* f en x y se la denota por $f^{(n)}(x)$, si esta derivada existe para todo $x \in A$, a la función $x \to f^{(n)}(x)$ se la llama *función derivada n-ésima de* f.

1.8. Diferencial de una función

Definición: Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$ tal que f sea derivable en x_0, y un incremento Δx, se llama diferencial de f (y lo notamos $df = df(x_0, \Delta x)$) al producto de $f^{'}(x_0)$ por Δx.
Simbólicamente:

$$df = f^{'}(x_0) \cdot \Delta x$$

Si f es derivable para todo $x \in A$, se obtiene la función diferencial:

$$df = f^{'}(x) \cdot \Delta x$$

Observemos que el incremento de la variable independiente, coincide con su diferencial.

Es decir, si $f(x) = x$, su diferencial es $df = 1.\Delta x$, pero $df = dx$, luego:

$$\Delta x = dx.$$

Luego, se puede generalizar la fórmula del diferencial de una función en un punto, como:

$$df = f^{'}(x_0) \cdot dx$$

1.8.1. Interpretación geométrica del diferencial

Consideremos una función $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_0 \in A$ tal que f sea derivable en x_0, y un incremento Δx. La gráfica de f es una curva del plano que tiene por ecuación $y = f(x)$, tiene tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de esta recta tangente es:

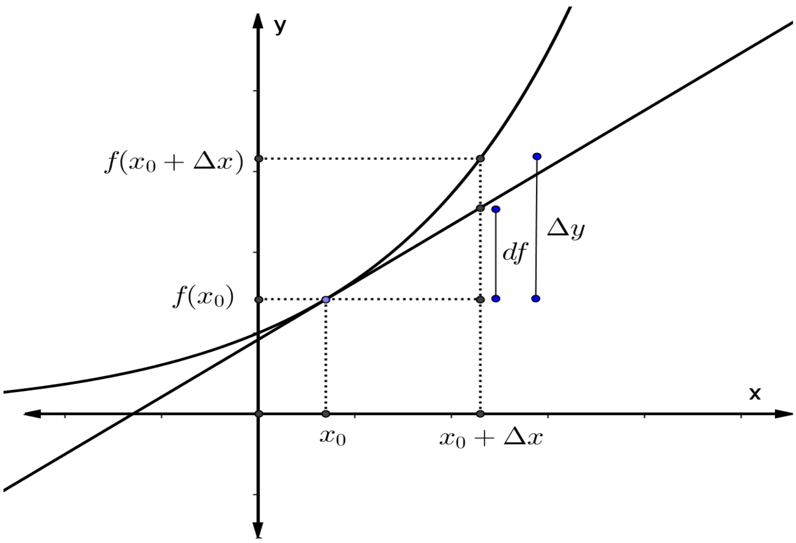
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Al incrementar x, los correspondientes incrementos de la función y de la tangente son:

$$\text{incremento de la función: } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x$$

$$\text{incremento de la tangente: } f'(x_0)(x - x_0) = df$$

Luego, el diferencial de la función de f en un punto x_0 es igual al incremento que sufre la recta tangente a f en x_0 al pasar de x_0 al punto incrementado $x_0 + \Delta x$.



,

Figura 3: Interpretación geométrica del diferencial de una función en un punto

Se observa que si se hace: $\Delta y - df$ da la diferencia entre los incrementos de ordenadas de f y su recta tangente al pasar de x_0 al punto incrementado $x_0 + \Delta x$.
Se puede probar que si $\Delta x \to 0$, la diferencia $df - \Delta y \to 0$. Luego, para valores pequeños de Δx, es $\Delta y \cong df$.

Esta última expresión permite aproximar el valor de una función en un punto incrementado:

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (4)$$

Ejemplo: Hallar el valor aproximado de $\sqrt{81{,}5}$

En efecto, podemos aproximar el valor a partir de $\sqrt{81 + 0{,}5}$

De acuerdo con la expresión (4), $f(x) = \sqrt{x}$ y $f^{'}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, luego:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \cong \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x$$

Donde $x_0 = 81$ y $\Delta x = 0{,}5$

$$\sqrt{81{,}5} \cong \sqrt{81} + \frac{1}{2\sqrt{81}} \cdot 0{,}5$$

Finalmente:

$$\sqrt{81{,}5} \cong 9 + \frac{1}{18} \cdot 0{,}5 \quad \Rightarrow \sqrt{81{,}5} \cong 9 + 0{,}0\widehat{5} \cdot 0{,}5$$

$$\Rightarrow \sqrt{81{,}5} \cong 9{,}02\widehat{7}$$