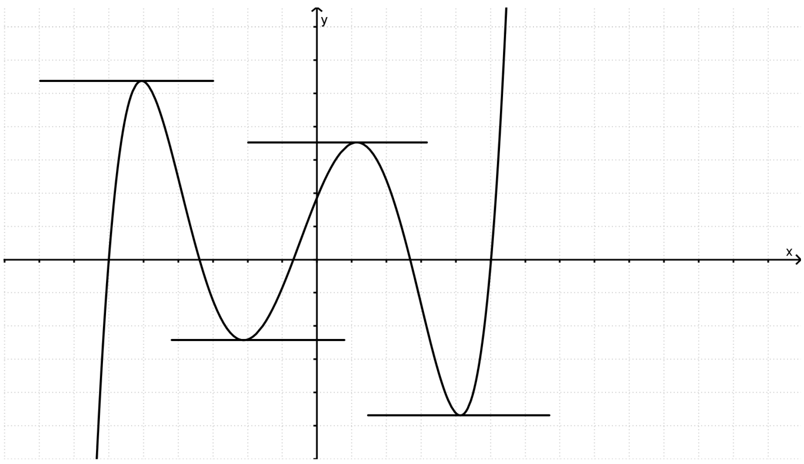
Unidad V

1. Aplicaciones de la Derivada

1.1. Teoremas de las funciones derivables

Definición 1: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y tal que $y = f(x)$.
Sea un punto $x_0 \in A$ se dice *máximo* de f si es $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f y se dice *mínimo* de f si es $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f.
Dicho de otra manera, un máximo de f es un punto donde f alcanza su máximo valor posible y un mínimo de f es un punto en donde f alcanza su menor valor posible.
Definición 2: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y tal que $y = f(x)$.
Sea un punto $x_0 \in A$ se dice *máximo relativo* de f si existe un entorno de centro x_0 y radio δ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en dicho entorno y se dice *mínimo relativo* de f si existe un entorno de centro x_0 y radio δ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en dicho entorno.
Al observar la siguiente figura, se puede ver que en los máximos o mínimos de la función, la recta tangente a la gráfica de la misma es horizontal.



Recordemos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función

en un punto está dada por la derivada de la función en dicho punto.
Esta observación y la del parrafo anterior motivan enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.1 *(Teorema de Fermat)*
Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b), si $x_0 \in (a, b)$ y es un máximo o un mínimo de f y si f es derivable en x_0 entonces, $f^{'}(x_0) = 0$.

Demostración: Supongamos que x_0 es un mínimo, entonces $f(x_0) \leq f(x)$.
Calculando las derivadas laterales:

$$f^{'}_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pero si $x \to x_0^+$, entonces es $x > x_0$, luego $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$,porque al ser x_0 un mínimo, es $f(x) - f(x_0) \geq 0$, luego

$$f^{'}_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (1)$$

Para la derivada por la izquierda, $x \to x_0^-$, entonces $x < x_0$, y $f(x) - f(x_0) \geq 0$, por ser x_0 un mínimo, entonces $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, luego

$$f^{'}_{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (2)$$

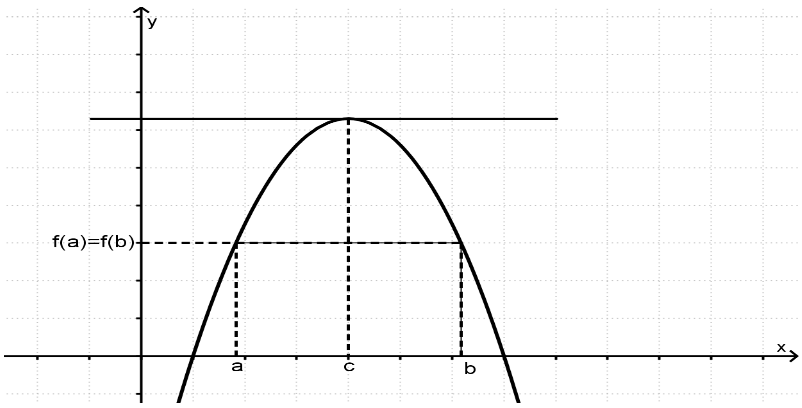
Por otro lado, como por hipótesis f es derivable en x_0, se cumple que

$$f^{'}_{+}(x_0) = f^{'}_{-}(x_0) = f^{'}(x_0)$$

Entonces (1) y (2) deben ser iguales, por lo tanto $f^{'}_{+}(x_0) = f^{'}_{-}(x_0) = 0$, luego $f^{'}(x_0) = 0$, que es lo que queriamos demostrar.
En el caso en que x_0 sea un máximo el procedimiento es análogo.

Teorema 1.2 *(Teorema de Rolle)*
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f^{'}(c) = 0$.

Demostración: Como f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe $x_1 \in [a, b]$ en donde f alcanza su valor mínimo y existe $x_2 \in [a, b]$ en donde f alcanza su valor máximo.
Si $x_1 \neq a$ y $x_1 \neq b$, debe ser $x_1 \in (a, b)$, considerando f restringida al intervalo abierto (a, b), resulta que estamos en las condiciones del teorema de



Fermat (con $x_0 = x_1$). Luego, $f'(x_1) = 0$. Se demuestra de manera análoga para $x_2 \neq a$ y $x_2 \neq b$.
Si x_1 y x_2 están en los extremos de a, b (o sea los dos son a, o los dos son b, o son uno a y el otro b), entonces resulta $f(x_1) = f(x_2)$. Pero entonces la función es constante, ya que si $x \in [a, b]$ es $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ por ser x_1 y x_2 mínimo y máximo respectivamente. Luego $f(x) = f(x_1) = f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Luego, como toda función constante tiene derivada nula, se cumple el teorema también en este caso.
Geométricamente, si una función cumple con las condiciones del teorema de Rolle, existe un punto intermedio del intervalo donde la tangente a la gráfica es horizontal.

Teorema 1.3 *(Teorema de Lagrange)*
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Demostración: La ecuación de la recta secante a la gráfica de f por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Consideremos entonces la función: $g(x) = f(x) - y$, luego:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por ser producto y diferencia de funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Además:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$

y

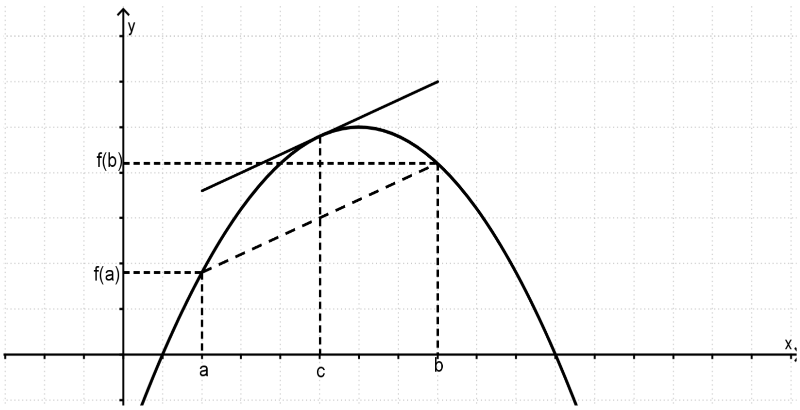
$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0$$

Luego, resulta que $g(a) = g(b)$, entonces g está en las condiciones del teorema de Rolle, luego existe $c \in (a, b)$ tal que $g^{'}(c) = 0$. Como

$$g^{'}(x) = f^{'}(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g^{'}(c) = f^{'}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica
El teorema establece (bajo la hipótesis enunciadas), existe un punto en el



intervalo (a, b)en donde la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a la recta que determinan los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Teorema 1.4 *(Teorema de Cauchy)*
Si f y g son funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))\, g^{'}(c) = (g(b) - g(a))\, f^{'}(c)$$

Si, además, $g^{'}(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

Demostración: Consideremos la función:

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

La función h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por ser producto y diferencia de funciones de ese tipo. Además:

$$h(b) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(b) - f(a)) = 0$$

y

$$h(a) = (f(b) - f(a))(g(a) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(a) - f(a)) = 0$$

Entonces h satisface las condiciones del teorema de Rolle, por lo tanto existe $c \in (a, b)$ tal que $h^{'}(c) = 0$. Pero:

$$h^{'}(x) = (f(b) - f(a))\, g^{'}(x) - (g(b) - g(a))\, f^{'}(x)$$

luego es

$$h^{'}(c) = (f(b) - f(a))\, g^{'}(c) - (g(b) - g(a))\, f^{'}(c) = 0$$
$$\Rightarrow (f(b) - f(a))\, g^{'}(c) = (g(b) - g(a))\, f^{'}(c)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Teorema 1.5 *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f^{'}(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$ (Es decir existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$).*

Demostración: Sean x_1 y x_2 en $[a, b]$, tales que $x_1 < x_2$. La función f restringida al intervalo $[x_1, x_2]$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange, por lo tanto existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f^{'}(c)$$

pero, $f^{'}(c) = 0$ pues, por hipótesis $f^{'}(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Luego

$$f(x_2) - f(x_1) = 0$$

Luego $f(x_2) = f(x_1)$ cualquiera sean x_1 y x_2 en $[a, b]$, con lo cual f es la función constante.

Corolario 1.1 *Si f y g son funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en (a, b) y además, es $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f y g difieren en una constante, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración: Basta considerar la función $h(x) = f(x) - g(x)$ y aplicar el teorema anterior.Ya que como $h^{'}(x) = f^{'}(x) - g^{'}(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, luego es $h(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = g(x) + k$.

1.2. Regla de L'Hospital

- **Caso** $\dfrac{0}{0}$

  Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un intervalo (a, b). Para $x_0 \in (a, b)$, supongamos $g^{'}(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)\,, x \neq x_0$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$. En esas condiciones, si existe

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)},$$

  entonces existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$$

  Ejemplo 1: Calcular $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x - 1}$.

  El numerador y el denominador valen 0 cuando $x = 1$, y además $(x - 1)^{'} = 1 \neq 0$, luego estamos en condiciones de aplicar la regla enunciada:

  $$\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

- **Caso** $\dfrac{\infty}{\infty}$

  Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un intervalo (a, b), salvo en $x_0 \in (a, b)$, y supongamos que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ y que $g^{'}(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)\,, x \neq x_0$. En esas condiciones, si existe

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)},$$

  entonces existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$$

Ejemplo 2: Calcular $\lim_{x \to 0} x.ln(x)$.

Este límite no es del tipo enunciado, ya que es de la forma $0.\infty$, pero lo podemos llevar a la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(x)}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{(-1/x^2)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{ln(x)}{1/x} = 0$$

1.3. Fórmula de Taylor y Mac Laurin

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función $(n + 1)$ veces derivable en (a, b) y supongamos que $f^{(n+1)}$ es continua en (a, b).
Dado $x_0 \in (a, b)$. En un entorno de dicho punto es posible aproximar f mediante un polinomio $P_n(x)$ de grado n, según potencias de $(x - x_0)$ cuyo valor y el de sus n derivadas sucesivas en $x = x_0$ sean iguales al valor de la función y el de sus n derivadas sucesivas en el mismo punto.
Dicho polinomio se denomina **polinomio de Taylor** y es de la forma:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

La diferencia entre la expresión de $f(x)$ y el polinomio de Taylor $P_n(x)$ que la aproxima, se denomina **resto o término complementario** y tiene la forma:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

El valor del resto $R_n(x)$, da una medida de la precisión de la aproximación local de los valores de la función a través del polinomio de Taylor.

Se puede probar que la expresión del resto es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

donde ξ es un valor comprendido entre x_0 y x.

Luego:

$$f(x) = f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

con

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

donde ξ es un valor comprendido entre x_0 y x, es la **fórmula de Taylor**.

Si en la fórmula de Taylor se reemplaza $x_0 = 0$, se obtiene la llamada fórmula de Mac Laurin:

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

con $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, donde ξ es un valor comprendido entre 0 y x.

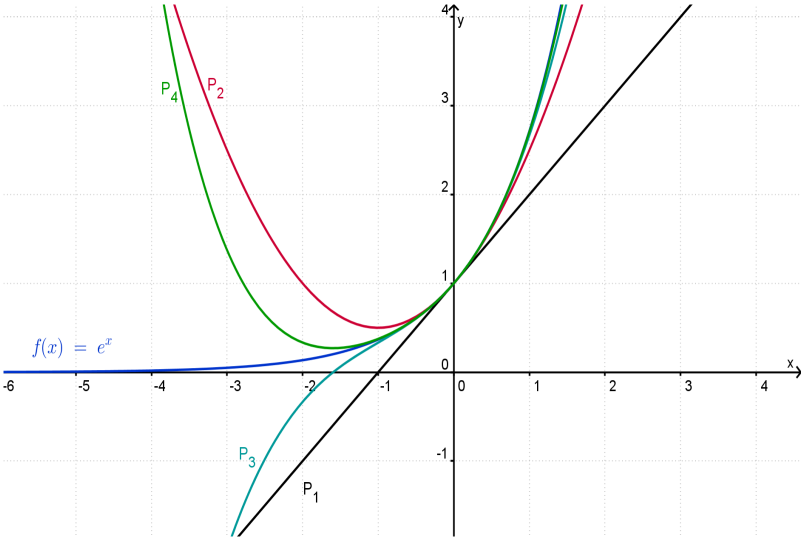
Ejemplo 1: Sea la función $f(x) = e^x$.
Hallemos los polinomios de Mac Laurin grado 1, 2, 3, y 4.
Comparemos gráficamente los resultados obtenidos.
En efecto: $f(x) = e^x$, por lo tanto $f(0) = e^0 = 1$.

$f^{'}(x) = e^x$ entonces $f^{'}(0) = e^0 = 1$. Luego: $P_1(x) = 1 + x$

$f^{''}(x) = e^x$ entonces $f^{''}(0) = e^0 = 1$.
Luego: $P_2(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 \Rightarrow P_2(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$

$f^{'''}(x) = e^x$ entonces $f^{'''}(0) = e^0 = 1$.
Luego: $P_3(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 \Rightarrow P_3(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$

$f^{iv}(x) = e^x$ entonces $f^{iv}(0) = e^0 = 1$.
Luego: $P_4(x) = 1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{4!}x^4 \Rightarrow P_4(x) = 1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4$
En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x) = e^x$ y de los polinomios, de Mac Laurin grado 1, 2, 3, y 4.
Es muy importante, no perder de vista que el polinomio de Mac Laurin aproxima localmente (es decir, en un entorno de 0) los valores de la función f.



Ejemplo 2: Aproximar el valor de $e^{0,1}$ usando el polinomio de Mac Laurin de grado 4 y dar la expresión del resto.

De acuerdo al ejemplo anterior: $P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

Luego: $P_4(0{,}1) = 1 + 0{,}1 + \frac{1}{2}0{,}1^2 + \frac{1}{6}0{,}1^3 + \frac{1}{24}0{,}1^4$

$P_4(0{,}1) = 1 + 0{,}1 + \frac{1}{2}0{,}01 + \frac{1}{6}0{,}001 + \frac{1}{24}0{,}0001$

$P_4(0{,}1) = 1{,}105170833.$

Luego $e^{0,1} \cong 1{,}105170833.$

Si buscamos el valor con la calculadora: $e^{0,1} = 1{,}105170918$

La expresión del resto:

$$R_4(0{,}1) = \frac{e^{\xi}}{5!}(0{,}1)^5$$

donde ξ es un valor comprendido entre 0 y 0,1

2. Estudio de funciones

2.1. Funciones crecientes y decrecientes

Una función f es **creciente** sobre un intervalo I si para cualquier para cualquier par de números x_1 y x_2, en dicho intervalo, tales que $x_1 < x_2$ es $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** sobre un intervalo I si para cualquier para cualquier par de números x_1 y x_2, en dicho intervalo, tales que $x_1 < x_2$ es $f(x_1) > f(x_2)$.

2.2. Criterio para las funciones crecientes y decrecientes

Sea una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración: Supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b) y sean $x_1 < x_2$ dos puntos cualesquiera en el intervalo. Por el teorema del valor medio de Lagrange , se sabe que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, debe ser $f(x_2) - f(x_1) > 0$ lo que implica $f(x_1) < f(x_2)$. Luego f es creciente en el intervalo considerado, como x_1 y x_2, son dos puntos cualesquiera del intervalo $[a, b]$, entonces f es creciente en el intervalo $[a, b]$.
La demostración de la segunda parte es análoga, por lo que queda como ejercicio.
Definición: diremos que x_0 es un punto crítico de f si $f'(x_0) = 0$, o bien f' no está definida en x_0.

2.3. Criterio de la derivada primera

Sea x_0 un punto crítico de f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a x_0. Si f es derivable en dicho intervalo, execpto posiblemente en x_0, entonces:

- Si $f^{'}(x)$ cambia de **negativa** a **positiva** en x_0, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f^{'}(x)$ cambia de **positiva** a **negativa** en x_0, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f^{'}(x)$ **no cambia de signo** en x_0, entonces f no tiene ni un máximo ni un mínimo relativo en $(x_0, f(x_0))$.

Ejemplo: Encontrar extremos relativos de: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$
En primer lugar observemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$. La derivada de f viene dada por:

$$f^{'}(x) = \frac{2}{3}\left(x^2-4\right)^{-1/3}(2x)$$

$$f^{'}(x) = \frac{4x}{3\left(x^2-4\right)^{1/3}}$$

Observemos que $f^{'}(x) = 0$ si $x = 0$, y que $f^{'}$ no está definida en $x = -2$ y en $x = 2$. Luego, los puntos críticos son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. La siguiente tabla resume los valores de prueba de cuatro intervalos determinados por esto puntos. críticos:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de f'	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Aplicando el criterio de la derivada primera se puede concluir que f tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$, un máximo relativo en $(0, \sqrt[3]{16})$ y mínimo relativo en $(2, 0)$.

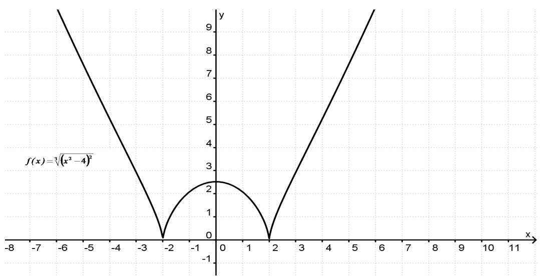


Figura 1: Gráfico de una función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$

2.4. Criterio de la derivada segunda

Si f es derivable un intervalo I, sea $x_0 \in I$ un punto crítico de f, tal que $f^{''}(x_0) \neq 0$, entonces:

- Si $f^{''}(x_0) > 0$,entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f^{''}(x_0) < 0$,entonces f tiene un *máximo relativo* en $(x_0, f(x_0))$.

Ejemplo: Encontrar extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

En primer lugar observemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$. La derivada de f viene dada por:

$$f^{'}(x) = 3x^2 - 6x$$

Observemos que $f^{'}(x) = 0$ en $x = 0$ y en $x = 2$. Luego, los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. La derivada sefunda de f es:

$$f^{''}(x) = 6x - 6$$

Luego:
$f^{''}(0) = -6$ como $f^{''}(0) < 0$, f tiene un *máximo relativo* en $(0, 2)$.

$f^{''}(2) = 6$ como $f^{''}(0) > 0$, f tiene un *mínimo relativo* en $(2, 4)$

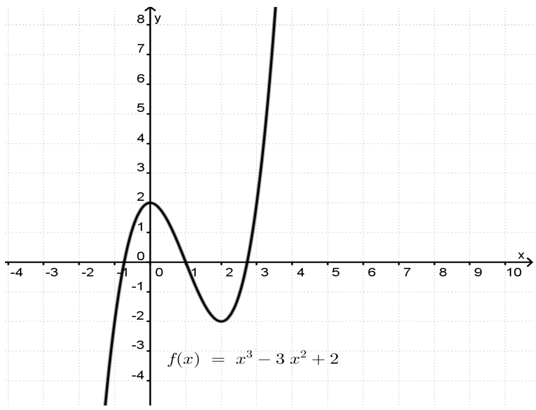


Figura 2: Gráfico de una función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

2.5. Funciones convexas y cóncavas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$. Sean a y b dos puntos de A.
Dados los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ en el plano, la recta secante a la gráfica de f por esos puntos viene dada por:

$$y = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a) + f(a)$$

Sea $I \subseteq A$ un intervalo.La función $f : I \to \mathbb{R}$ se llama *convexa* cuando su gráfico está situado debajo de cualquier secante.
De forma más precisa, la convexidad de f se expresa como sigue:

$$a < x < b \text{ en } I \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a),$$

o sea

$$a < x < b \text{ en } I \Rightarrow f(x) \leq f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - b).$$

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice *cóncava* cuando $-f$ es convexa, esto es, cuando el gráfico de f está encima de cualquier secante.

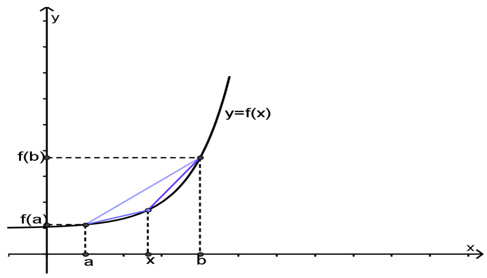


Figura 3: Gráfico de una función convexa

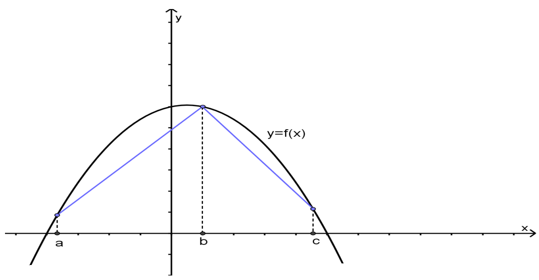


Figura 4: Gráfico de una función cóncava

Si la función es derivable hay una manera muy sencilla de caracterizar la concavidad y la convexidad. En los intervalos de convexidad a medida que x aumenta, crece la pendiente de la tangente, es decir $f^{'}(x)$ crece. Y en los intervalos de concavidad, a medida que aumenta x, decrece $f^{'}(x)$.
Luego podemos enunicar el siguiente resultado:

- Si $f^{''}(x) > 0$ en (a, b), entonces la función f es convexa en (a, b).
- Si $f^{''}(x) < 0$ en (a, b), entonces la función f es cóncava en (a, b).

Un punto donde la curva cambia de convexa a cóncava o viceversa, se denomina *punto de inflexión*.
De lo enunciado anteriormente se puede deducir que si x_0 es un punto de inflexión, entonces $f^{''}(x_0) = 0$.

2.6. Estudio completo de funciones

Realizar el estudio completo de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.