Ejercicios sugeridos para el Segundo Parcial 2019 (PARTE I)

1) Un grupo de científicos ha realizado un estudio donde analizó la población de una colonia de bacterias (en miles) después de transcurrir t días desde la toma de cierto antibiótico, llegando a modelizarla a través de la siguiente función matemática:

$$f:[0;9]\to\mathbb{R}/f(t)=\begin{cases}t^2+7 & t<5\\ 72-8t & t\geq 5\end{cases}$$

a) ¿Es posible saber cuántas bacterias hay al iniciar el tratamiento? Explicar.
b) ¿Qué ocurre con la población de bacterias al transcurrir los días? Explicar.
c) ¿Muere en algún momento la colonia de bacterias? Justificar.
d) ¿Existe algún/os día/s donde la colonia de bacterias cambie su comportamiento? Justificar.
e) La población de bacterias al tercer día, ¿es mayor que al octavo día? Justificar.

2) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f(x)=\begin{cases}3x+ax^2 & si\ x<1\\ 0 & si\ x=1\\ 5-ax & si\ x>1\end{cases}$

¿Hay algún o algunos valores de a para los cuales exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$? Justificar y, en caso de que la respuesta sea afirmativa, hallar todos sus valores.

3) Analizar la existencia de los siguientes límites con las herramientas que prefiera. Dar una conclusión al respecto.

a) $\lim_{x\to 0} x.e^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim_{x\to 0}\cos\left(-\frac{1}{x}\right)$

4) Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justificar la respuesta.

a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y $f(a)\neq L$, entonces f no es continua en a.

b) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|$ es continua en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$.

c) Sea $h:\mathbb{R}-\{a\}\to\mathbb{R}$ entonces h es continua en su dominio.

d) Si las funciones f y g de valores reales a valores reales, son continuas para $0\leq x\leq 1$, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en [0, 1].

e) Si sabemos que una función es continua en $x=c$ entonces c pertenece dominio de la función.

f) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $\lim_{x\to c^+} f(x)=a$ y $\lim_{x\to c^-} f(x)=b$ entonces podemos asegurar que no existe $\lim_{x\to c} f(x)$

g) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ entonces f no está definida en $x=0$.

5) Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 sen\frac{1}{x},\ si\ x \neq 0$ y $f(0) = k$, ¿podría tomar algún valor k para que la función sea continua? Justificar.

6) Considerar las siguientes funciones definidas en el conjunto A indicado en cada una y a valores reales. ¿Es posible que sean discontinuas? Justificar.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} & x \leq 1 \\ -x + 2 & 1 < x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$ $\quad A = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ $\quad A = \mathbb{R}$

7) Las siguientes son funciones de valores reales, a valores reales. ¿Existe algún o algunos valores de k para los cuales las funciones serían continuas? Justificar y, en caso de que la respuesta sea afirmativa, hallar todos sus valores.

a) $f(t) = \begin{cases} kt^2 & si\ t < 2 \\ -2 & si\ t = 2 \\ kt - 1 & si\ t > 2 \end{cases}$ $\quad$ b) $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & si\ x < 2 \\ x^3 - kx & si\ x \geq 2 \end{cases}$

8) Nos proponemos transportar un barco y averiguamos que la empresa Ship SRL cobra \$200 por km para transportar dicho barco hasta 150 km; \$150 (por km) si la distancia es mayor a 150 km y hasta 400 km; y \$125 (por km), si la distancia es mayor a 400 km.

a) Describir cómo es el costo del transporte en función de los kilómetros recorridos.

b) ¿Hay cambios abruptos de los costos de acuerdo con las distancias que se busca recorrer? Justificar.

c) En el libro de quejas se encuentran varias quejas de usuarios que dicen que les cobraron mal porque hicieron viajes más cortos que otros dueños y pagaron más, siendo que los valores siguen siendo los mismos, sin aumentar. Explicar qué podría haber pasado.

9) Trazar la gráfica de una función que cumpla con todas las condiciones dadas:

a) $Df = (-\infty; 3]$ $\quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = 1, \quad f(-1) = 1$ y f no es continua en $x = -1$

b) $Df = \mathbb{R}, \quad Imf = \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 1, \ f(0) = 1,\ f$ es discontinua, f es inyectiva.

c) $Df = (-4; 4) - \{0\}, \quad Imf = \mathbb{R} - \{0\}, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -4^+} f(x) = -1, \quad f(1) = 3, \quad f$ es impar