Unidad III

1. Asíntotas de una función

Asíntota: Se llama asíntota de una función f a una recta r cuya distancia a la curva que es gráfica de la función $y = f(x)$ tiende a cero, cuando x tiende a infinito o bien x tiende a un punto a.

1.1. Asíntota Vertical

La recta de ecuación $x = a$ es una asíntota vertical al gráfico de f si y sólo si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

1.2. Asíntota Horizontal

La recta de ecuación $y = b$ es una asíntota horizontal al gráfico de f si y sólo si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Ejemplo: Analicemos la existencia de asíntotas en las siguiente función:

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$$

El dominio de la función es: $Df = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Luego, analizamos la existencia de asíntota vertical en $x = -2$ y en $x = 2$.
Como $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$
$\Rightarrow x = -2$ es asíntota vertical.
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
$\Rightarrow x = 2$ es asíntota vertical.

Si ahora calculamos el $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ es asíntota horizontal.

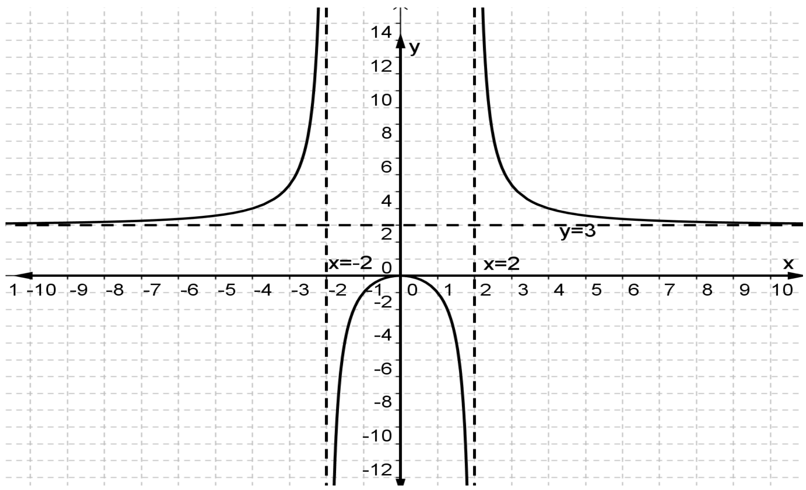


Figura 1: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 4}$

1.3. Asíntota Oblicua

La recta de ecuación $y = mx + b$ es una asíntota oblicua al gráfico de f si y sólo si:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Para hallar el valor de m multiplicamos $[f(x) - (mx + b])$ por $\dfrac{1}{x}$, luego

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

resulta entonces que $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ya que $\dfrac{b}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$. Luego:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Una vez calculado el valor de m se calcula el valor de b, teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, entonces

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

Ejemplo: Analicemos la existencia de asíntotas en la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$$

El dominio de la función es: $Df = \mathbb{R} - \{-2\}$.
Luego, analizamos la existencia de asíntota vertical en $x = -2$.
Como

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Si ahora calculamos el $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ f no tiene asíntota horizontal.

Luego analicemos la existencia de asíntota oblicua.
Como

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{\dfrac{x^2}{x+2}}{x} \right] = 1 \Rightarrow m = 1$$

Luego

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{x^2}{x+2} \right) - x \right] = -2 \Rightarrow b = -2$$

Entonces

$$y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua}$$

2. Funciones Continuas

Definición Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que es continua en un punto $a \in A$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ y $|x - a| < \delta$ se cumple $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Observación: La continuidad de f en un punto a implica tres cosas:

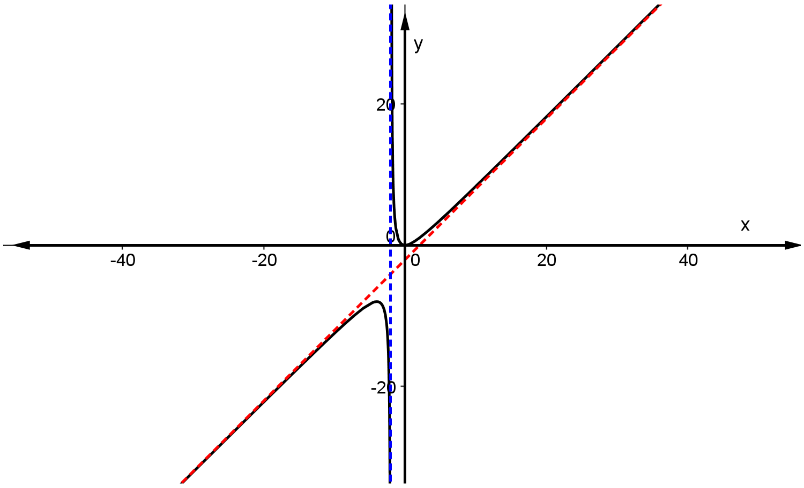


Figura 2: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

- Está definido $f(a)$. Es decir, a pertenece al dominio de f
- Existe (y es finito) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (el límite de f en a es $f(a)$)

Diremos que una función es *discontinua* en un punto $a \in \mathbb{R}$ cuando no es continua en dicho punto.
Entonces podemos distinguir las siguientes maneras de que una función no sea continua en un punto.

Ejemplo 1: La función tiene límite infinito en el punto.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/y = f(x)$ y

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En este caso, $f(0) = 0$ pero $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Por lo que la función no es continua en $a = 0$.
Ejemplo 2: La función no tiene límite en el punto.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/y = g(x)$ y

$$g(x) = \begin{cases} sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

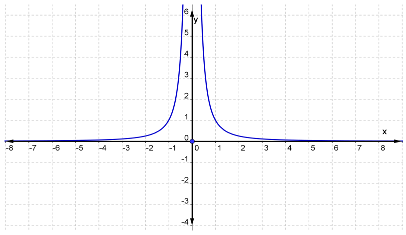


Figura 3: Gráfico de la función $y = f(x)$

En este caso, $g(0) = 0$ pero no existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$. Por lo que la función no es continua en $a = 0$.

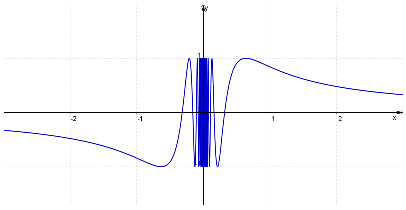


Figura 4: Gráfico de la función $y = g(x)$

Ejemplo 3: La función no está definida en el punto.
Sea $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} / h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ En este caso $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$, es decir existe el límite de la función en el punto, pero $f(3)$ no existe.

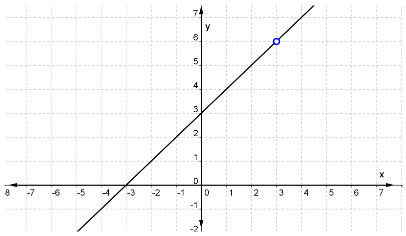


Figura 5: Gráfico de la función $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Ejemplo 4: La función tiene límite pero no es igual al valor de la función en el punto.
Sea la función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$l(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Para esta función es $l(2) = 5$, pero $\lim\limits_{x \to 2} l(x) = 4$

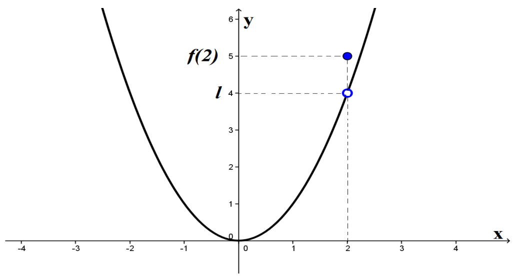


Figura 6: Gráfico de la función $y = l(x)$

Definición: Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es una **función continua** cuando f es continua en todos los puntos de A.

2.1. Propiedades de las funciones continuas

1. Sea f continua en a. Si $b < f(a) < c$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para $|x - a| < \delta$ es $b < f(x) < c$.

2. Si f y g son dos funciones continuas en a, entonces $f + g$ y $f.g$ son continuas en a. Si además $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.

3. Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.

4. La función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}/f(x) = ln(x)$ es continua.

5. Si $a > 0$, la función exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = a^x$ es continua.

6. Toda función polinómica es continua. Una función racional (cociente de funciones polinómicas) es continua en todos los puntos en donde el denominador es distinnto de cero.

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la siguiente función: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x^3 + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad sólo debemos hacerlo en el punto $x = 1$, ya que en los demás puntos del dominio, la función es continua por las propiedades enunciadas anteriormente.
En primer lugar, hallamos $f(1) = 3$.
Para calcular el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, debemos estudiar los límites laterales.
Así:
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} x+1 = 2$

Por otro lado:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^3+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} x^3+1 = 2$

Luego:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Por lo que la función no es continua en $x = 1$ ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.

2.2. Propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado

En esta sección veremos propiedades muy importantes que cumplen las funciones continuas en un intervalo cerrado.
Antes de enunciar estas propiedades deberíamos definir continuidad en un intervalo cerrado. Para ello debemos definir continuidad a derecha y a izquierda.

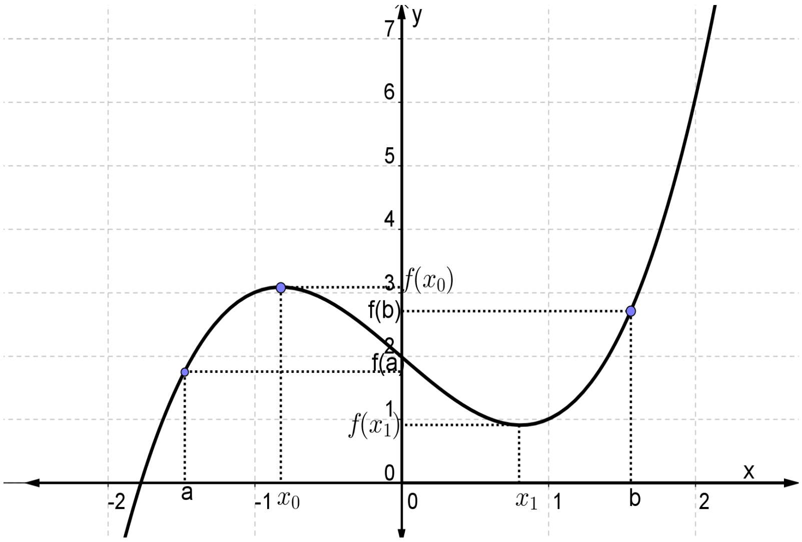
Definición: Una función es continua a la derecha de un número a si:
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y es continua a la izquierda de a si: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Definición: Se dice que $f(x)$ es continua en $[a,b]$ sí y sólo sí:

- a) $f(x)$ es continua en (a,b)
- b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (continua a la derecha de a)
- c) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (continua a la izquierda de b)

Función acotada: diremos que una función $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$ es acotada si existe números reales m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in A$.
Equivalentemente, una función es acotada si el conjunto imagen de la misma es un conjunto acotado. Recordemos que un conjunto acotado, es aquel que está acotado superior e inferiormente.

Teorema 2.1 *Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es acotada en $[a, b]$.*



Observemos que al ser acotada la imagen de la función, entonces tiene ínfimo y supremo.Ese ínfimo y supremo son, respectivamente, un mínimo y un máximo, simpre que la función sea continua en un intervalo cerrado.

Teorema 2.2 *Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$.*

Demostración: Como la función es continua en $[a, b]$, el conjunto $Imf = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ es acotado por el teorema 2.1.
Luego existen entonces $m = infImf$ y $M = supImf$.
Deberíamos probar que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = m$ y $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = M$.
Supongamos que no existe $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = M$. Consideremos la función $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$, que es continua en $[a, b]$ (el numerador es continuo por ser una función constante y el denominador es continuo por ser diferencia

de funciones continuas y siempre es distinto de cero por lo que hemos supuesto anteriormente). Luego, g es una función acotada.En particular, existe, $K > 0$ tal que:

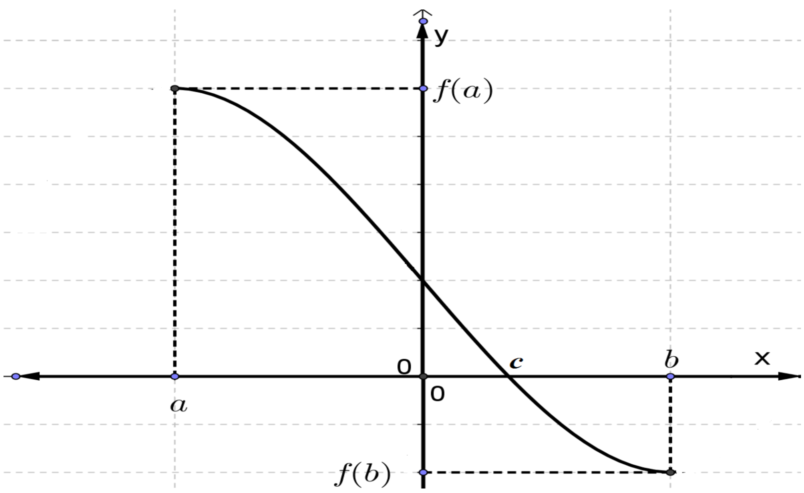
$$\frac{1}{M - f(x)} \leq K \text{ para toda } x \in [a, b]$$

Luego,

$$f(x) \leq M - \frac{1}{K} \text{ para toda } x \in [a, b]$$

Luego resulta que $M - \dfrac{1}{K}$ es cota superior de Imf; como $M - \dfrac{1}{K} < M$, esto es una contradicción. Esta contradicción proviene de suponer que no existe $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = M$; luego existe $x_1 \in [a, b]$ que verifica $f(x_1) = M$. Siendo M el supremo, eso implica $f(x_1) \geq f(x)$ para toda $x \in [a, b]$.
Razonando de forma análoga con la función $h(x) = \dfrac{1}{f(x) - m}$ se prueba que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = m$, y por lo tanto,$f(x_0) \leq f(x)$ para toda $x \in [a, b]$.

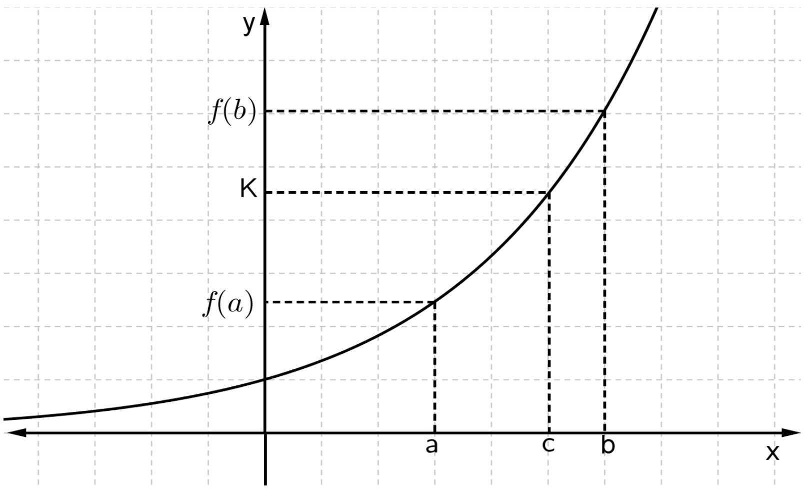
Teorema 2.3 *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a).f(b) < 0$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*



De acuerdo con este teorema se puede afirmar que si un punto de la gráfica de una función continua está por debajo del eje de abscisas y otro está por encima, entonces dicha gráfica debe cortar al eje de abscisas en algún punto.

Una aplicación inmediata de este teorema es la localización de raíces de una función continua en un intervalo.
Ejemplo: Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ se puede probar que tiene una raíz real en el intervalo $[1, 3]$.
Es una función continua en todo su dominio, por ser una función polinómica y $f(1).f(3) < 0$, luego por el teorema 2.3 existe $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema 2.4 *(Teorema del valor intermedio) Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.*
Si K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = K$.



El teorema 2.4 nos permite enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2.5 *(Continuidad de la función inversa) Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) en $[a, b]$. Entonces:*

- *i) $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ es biyectiva*
- *ii)$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ es continua*