TEMA 2
Conjuntos numéricos.
Propiedades. Operaciones.

1.Números Naturales

Simbólicamente: N

Desde épocas inmemoriales, el hombre debió satisfacer su necesidad de contar objetos, personas, animales, con lo que convivía cotidianamente. Para hacerlo, por intuición comenzó a usar los números que llamamos naturales: 1, 2, 3, 4,…, asociados al concepto de cantidad.

Por tanto es el conjunto de números que utilizamos para contar. No tiene último elemento, por ello decimos que es un conjunto infinito. El primer número natural es el “1” pero a veces resulta necesario incluir al cero dentro del conjunto; en este caso escribimos N_{0}.

Entre dos números naturales cualesquiera existe un número finito de números naturales. Por eso es un conjunto **discreto**.

Los números naturales se pueden ordenar de menor a mayor o viceversa por eso es un conjunto **ordenado**.

Siempre es posible determinar el siguiente de un número natural, definido como “**n + 1”.**

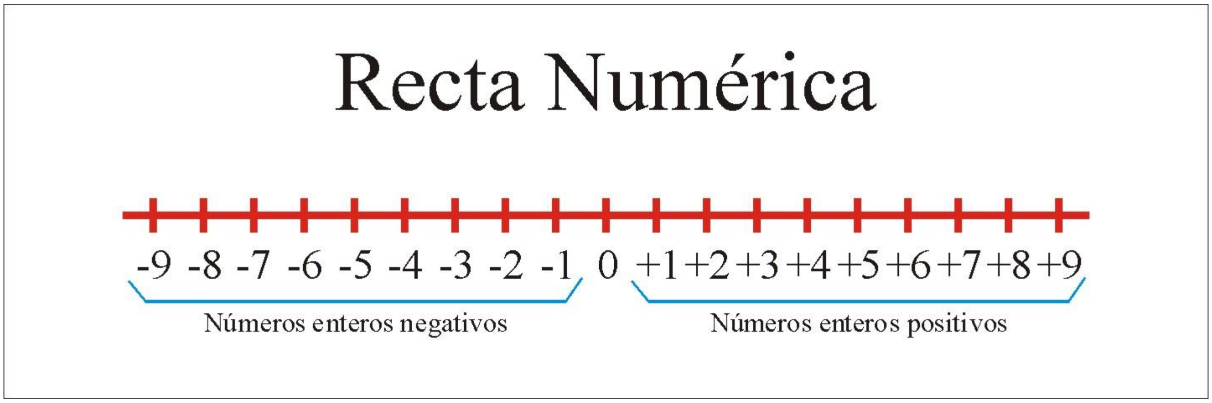
2. Números Enteros.

Simbólicamente: Z

Luego con el tiempo al hombre se le presentaron otros problemas, que para resolverlos ya no le era suficiente el conjunto de los números naturales…

¿Cómo indicar temperaturas bajo 0? ¿Cómo diferenciar alturas y profundidades de la tierra? ¿Cómo expresar que quedó debiendo algo?

Para responder a estas interrogantes, nuevamente recurrió a su inteligencia y formó otro conjunto numérico, en el que podrían expresarse cantidades menores que 0. Es el llamado **conjunto de los números enteros.**



Para los números enteros podemos establecer las siguientes propiedades:

- Es un conjunto ordenado
- Carece de primer elemento.
- Es un conjunto discreto.

3. Números Racionales:

Simbólicamente: Q

Un número racional es aquel que se puede expresar como el cociente de dos enteros: $\frac{a}{b}$ con b distinto de cero.

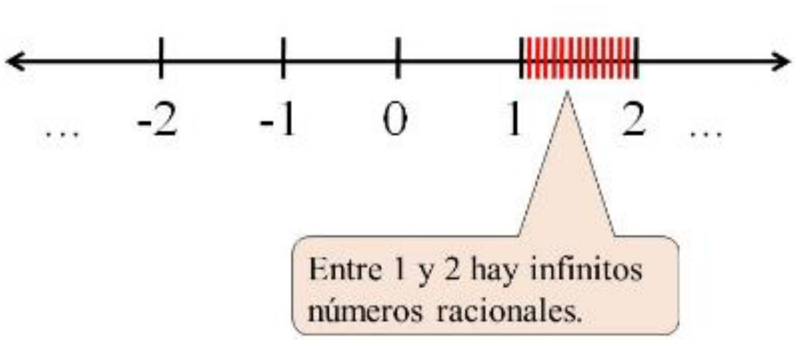
Ejemplos:

3 es racional porque puede expresarse como $\frac{3}{1}, \frac{30}{10}; \frac{6}{2}$ entre otras posibilidades.

1,25 es racional, puede expresarse como $\frac{125}{100}; \frac{5}{4}$ etc.

-2,66666 es racional, puede expresarse como $-\frac{24}{9}; -\frac{8}{3}$ etc.

El conjunto de los racionales es un **"conjunto denso".** Esto significa que entre dos números racionales cualesquiera, existe siempre otro número racional.

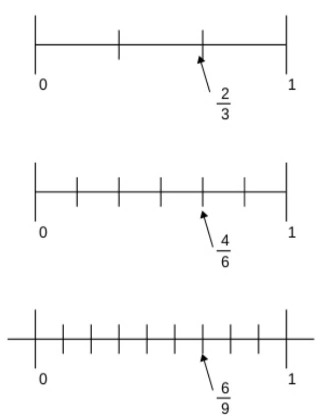


Representación de nº racionales en la recta numérica

Una manera posible es dividir el segmento [0;1] en tantas partes iguales como indica el denominador, y luego considerar tantas veces ese segmento como indique el numerador.

Ejemplo: para representar ⅔ se divide en tres segmentos iguales el segmento que corresponde al intervalo [0;1], luego se toman “2” de esos segmentos.

Pero también puede dividirse el segmento del intervalo [0;1], en 6 partes iguales, y considerar 4. En este caso 4/6 es equivalente a 2/3, y así podemos encontrar infinitas fracciones equivalentes a una dada.



Expresión decimal de un número racional:

Al dividir **a** por **b** (con $b \neq \mathbf{0}$)se obtiene la expresión decimal de un número racional. El número resultante puede tener un número limitado de cifras decimales, o bien un número infinito pero agrupados en períodos que se repiten.

<u>Ejemplos:</u>

$\frac{2}{5}$= 0,4 es un nº decimal con **cantidad finita** de cifras decimales (en este caso solo una cifra decimal)

$\frac{5}{3}$= 1,666….simbólicamente$1,\hat{6}$. Es un nº decimal con infinitas cifras decimales que se repiten. Se llama nº decimal **periódico puro.**

$\frac{173}{90}$= 1,9222222 simbólicamente $1,9\hat{2}$. En este caso, como las cifras periódicas aparecen luego de otra cifra decimal, el número se llama **periódico mixto.**

Otros ejemplos:$10,12\hat{5}$; $0,12\widehat{53}$

<u>Pasaje de números decimales a fracción.</u>

a) Si el decimal tiene cantidad finita de cifras decimales, se escribe en el numerador el número completo (sin coma), y en el denominador el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tengamos.

0,25= $\frac{25}{100}$simplificando queda $\frac{1}{4}$

132,671=$\frac{132671}{1000}$ Esta fracción no puede simplificarse, es irreducible.

b) Si el decimal es periódico puro, en el numerador anotamos el nº completo menos el nº de la parte entera. En el denominador se escriben tantos 9 como cifras periódicas tengamos.

,$1,\hat{6} = \frac{16-1}{9} = \frac{15}{9}$ que simplificando queda $\frac{5}{3}$.

c) En el caso de los nº decimales periódicos mixtos, anotamos en el numerador el nº completo (sin coma) menos el nº formado por las cifras no periódicas. En el denominador escribimos tantos 9 como cifras periódicas haya, seguidos de tantos 0 como cifras no periódicas (luego de la coma) haya.

$1{,}9\hat{2} = \frac{192-19}{90} = \frac{173}{90}$

$10{,}12\hat{5} = \frac{10125-1012}{900} = \frac{9113}{900}$

$0{,}12\widehat{53} = \frac{1253-12}{9900} = \frac{1241}{9900}$

Nº IRRACIONALES: I

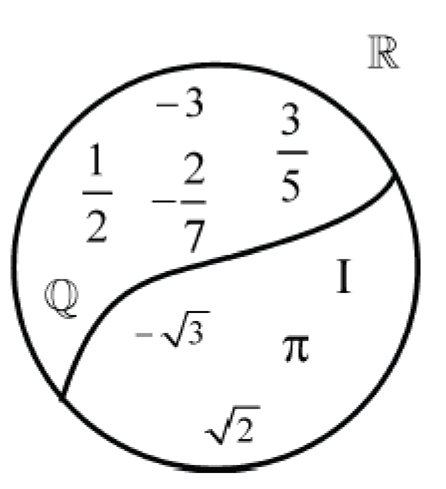
Los números cuya representación decimal es infinita y no periódica no son racionales, o sea, no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. Se denominan irracionales.

Algunos ejemplos:

$\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $-\frac{\sqrt{7}}{2}$; $\pi \approx 3{,}14\ldots$;e≈2,7188... ;$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$llamado número de oro.

<u>Números Reales</u> $\Re$

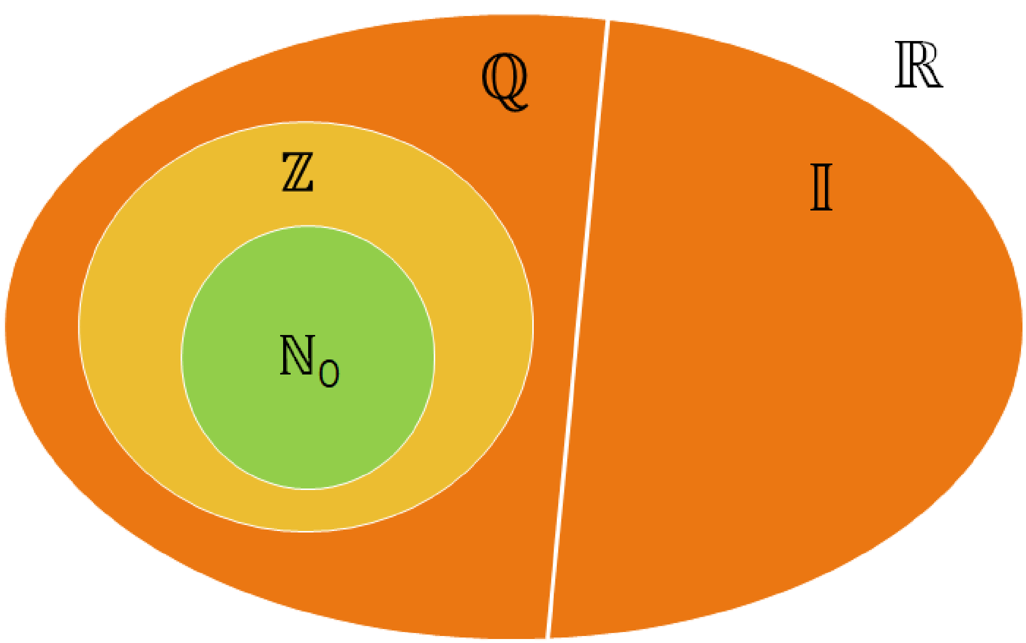
La unión del conjunto de los números racionales y el de los irracionales, da por resultado el conjunto de los números reales.



Entre los números reales y los puntos de una recta existe una correspondencia según la cual, **a cada número real le corresponde un punto de la recta, y, recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real.**

Los nº reales "cubren" totalmente la recta.

El conjunto $\mathfrak{R}$ es también un conjunto denso, porque entre dos números reales cualesquiera existe siempre otro número real.



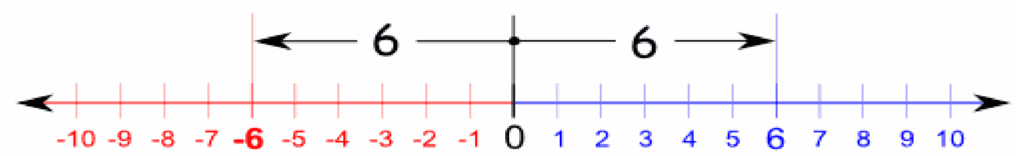
Valor absoluto de un nº real

El valor absoluto o módulo de un nº x perteneciente a los reales, se define así:

$$|x| = \begin{cases} x, \; si \; x \geq 0 \\ -x, \; si \; x < 0 \end{cases}$$

En otras palabras, el valor absoluto de un nº positivo o cero, coincide con el mismo número. En cambio si el nº es negativo, su valor absoluto será su opuesto. Gráficamente, el módulo o valor absoluto de x, indica su distancia hasta el cero, en la recta numérica.

Ejemplo



El valor absoluto de - 6 se escribe $|-6|$y su valor es 6.

El valor absoluto de 6 se escribe $|6|$y su valor es 6.

El conjunto de los números complejos C

En el conjunto de los números reales, una ecuación como **x^2 +1 = 0** no tiene solución .
Sí queremos despejar **x**, llegamos a: **x^2 = -1** pero no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1.

Para dar solución a expresiones como ésa, se crearon los números imaginarios.

Se define a la **unidad imaginaria** con **i,** y se cumple que:

$i = \sqrt{-1}$de donde se obtiene $i^2 = 1$

Potencias de i

$$\boldsymbol{i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i}$$

La unión del conjunto de los reales y el de los imaginarios, da por resultado el de los números complejos **C**.

En el conjunto C tienen significado las raíces de índice par de números negativos.

Así podemos resolver, por ejemplo:

$\sqrt{-4} = \pm 2i$; $\sqrt{-\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5} i$; etc.

Un nº complejo puede escribirse en formabinómica:

Z = a + bi (con a y b reales)

a: parte real

bi: parte imaginaria

Observar que:

- ***Si a = 0 tenemos un nº imaginario puro. Ejemplo Z= 6 i***
- ***Si b= 0 tenemos un nº real. Ejemplo Z = 3.***

Clasificación:

Por tanto, si revisamos todos los conjuntos numéricos hasta aquí aprendidos, su orden y clasificación sería el siguiente:

$$\mathbb{C}\ \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\ \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\ \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\ \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\ \text{Naturales}\\ 0\ \text{Cero}\\ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \mathbf{I}\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \mathbb{IM}\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Ejercicio

Clasificar los siguientes números de acuerdo al campo numérico al cual pertenecen.

-2:……………   8:……………….

1/5: …………$-\frac{\pi}{3}$: … … … …

$\sqrt{-25}$:……….   -6 + 2i : ………..

Ejemplos resueltos

-3,5 es racional, real (y complejo cuya componente real es cero)

$\sqrt[3]{5}$es irracional, real y complejo

-5i es complejo (imaginario puro)

2+3i es complejo.

ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LAS OPERACIONES EN R

$x^m . x^n = x^{m+n}$	Producto de potencias de igual base
$x^m : x^n = x^{m-n}$	Cociente de potencias de igual base
$(x^m)^n = x^{m.n}$	Potencia de otra potencia
$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$	Raíz de un producto
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Raíz de un cociente
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	Raíz de otra raíz

Algunos productos notables

Cuadrado de un binomio **$(a+b)^2$ = $a^2 + 2ab + b^2$** *Trinomio cuadr.perf.*
Cubo de un binomio **$(a+b)^3$ = $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$** *Cutrinomiocubo perf.*

Producto de una suma por una resta

(a+b).(a - b) = $a^2 - b^2$

Dif. de cuadrados

Tener en cuenta

La potenciación y radicación no son distributivas con respecto a la suma ni a la resta.

Por ejemplo:

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 \neq a^2 + b^2$

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Dada una expresión fraccionaria en la que figuran radicales en el denominador, se acostumbra escribir una fracción equivalente que no contenga radicales en el denominador. Este proceso se denomina *racionalización de denominadores.* Para obtener una fracción equivalente, se multiplica el numerador y el denominador por la misma expresión(esta expresión debe ser conveniente, para que en el denominador podamos obtener un nº real)

Algunos ejemplos:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

2) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

3) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$

Si en el denominador figuran sumas o restas con raíces cuadradas, podemos hacer uso de la “diferencia de cuadrados”.

4) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

Ejercicios para el alumno

1) Resolver usando propiedades

a)$\sqrt{6}\ .\ \sqrt{6}$=

b) $(x + 3)^{2}$=

c) $(a – 4)^{3}$=

d)$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{3} =$

e)$\frac{2^{7}.2^{5}.2^{3}}{2^{14}} =$

2) ¿Verdadero o falso? Justificar

a)$\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8}$

b)$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$

c)$5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{4}$

d) $(-2\sqrt{3})^{2}=12$

e)$\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{x}$

3) Racionalizar:

$a)\ \frac{3}{\sqrt[3]{6}} =$

$b)\ \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$=

c) $\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$=

d)$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$=