Tema: Combinatoria

Notación Sumatoria: Si m y n son enteros con m < n, $\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + ... + f(n)$

m es el límite inferior de la sumatoria, mientras que *n* es el límite superior.

Ejemplos:

$$\sum_{i=3}^{5}(2i-1) = (2.3-1)+(2.4-1)+(2.5-1) = 5+7+9 = 21$$

$$\sum_{i=2}^{5} i^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2 = 4+9+16+25 = 54$$

$$\sum_{i=1}^{4} 3 = 3+3+3+3 = 12$$

Propiedades de la sumatoria:

1. $\sum_{i=m}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

2. $\sum_{i=m}^{n}(ka_i) = k\sum_{i=m}^{n} a_i$

   k es constante

Demostración por inducción matemática: A cada número natural (N_0), asociemos una proposición P(*n*) que puede ser verdadera o falsa y supongamos que:

i. P(n_0) es verdadera

ii. De la hipótesis que $h \geq n_0$ y que P(*h*) es verdadera, se puede demostrar que P(*h* + 1), es verdadera,

Entonces P(*n)* debe ser verdadera para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo 1: Probar por inducción que, para todo número natural $n \geq 1$, es verdadera la siguiente proposición: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

Resolución:

Probamos la verdad de P(1):

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1)=1^2$$

$$2.1-1=1$$

$$1=1$$

$$\sum_{i=1}^{h}(2i-1)=1+3+5+...+(2h-1)=h^2$$

Demostramos la verdad de P(h+1):

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1)=1+3+5+...+[2(h+1)-1]$$

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{h}(2i-1)+[2(h+1)-1]$$

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1)=h^2+2h+2-1$$

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1)=h^2+2h+1$$

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1)=(h+1)^2$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

Función factorial

Definición: La función factorial es la aplicación cuyo dominio está dado por el conjunto de los números naturales incluyendo el cero y cuya imagen es un subconjunto de los números naturales, $f : N_0 \to N$,definida por $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 1 \\ f(h+1) = (h+1).f(h) \quad \forall\ h > 1 \end{cases}$

El símbolo característico de la función factorial es "!". Para indicar *f(h)* , se escribe *h!*.
Luego

$$f(0) = 0! = 1$$
$$f(1) = 1! = 1$$
$$f(2) = 2! = 2.f(1) = 2.1! = 2.1 = 2$$
$$f(3) = 3! = 3.f(2) = 3.2.f(1) = 3.2.1 = 6$$

....

En general:

$$\boxed{f(n) = n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1}$$

Propiedad: El factorial de un número natural *n* mayor o igual que 2 es igual al producto de n factores decrecientes a partir del mismo.

Observación: la función factorial no es inyectiva porque f(0)=1 y f(1)=1, tampoco es suryectiva porque existen números naturales que no tienen preimagen en el conjunto de los números naturales incluyendo el cero.

Ejercicios resueltos:

1. Simplificar: $\dfrac{n!.(n+1)}{(n-1)!}$

   Aplicando propiedad conmutativa de la multiplicación en el numerador, resulta

   $$\frac{(n+1).n!}{(n-1)!}$$

   Por definición de *n!*

   $$\frac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!}$$

   Simplificando: $\boxed{\dfrac{n!.(n+1)}{(n-1)!} = (n+1).n}$

2. Resolver: $\frac{15!}{13!.2!}$
   Teniendo en cuenta que *n! = n.(n-1)!*
   $\frac{15!}{13!.2!} = \frac{15.14.13!}{13!.2.1} = \frac{15.14}{2} = 105$
3. Verificar la siguiente identidad: $\frac{n!}{(n-4)!} - \frac{n!}{(n-3)!} = (n-4)\cdot\frac{n!}{(n-3)!}$
   $\frac{n!}{(n-4)!} - \frac{n!}{(n-3).(n-4)!} = (n-4)\cdot\frac{n!}{(n-3).(n-4)!}$, aplicando definición a *(n-3)!*
   $\frac{(n-3).n! - n!}{(n-3).(n-4)!} = \frac{(n-4).n!}{(n-3).(n-4)!}$, resolviendo la sustracción de fracciones
   $n!.[(n-3)-1] = (n-4).n!$, cancelando los denominadores (por definición mayores que cero) y extrayendo factor común $n!$

   $\boxed{n-4 = n-4}$, suprimiendo paréntesis, resolviendo y cancelando *n!* (*n!* > 0)

<u>Números combinatorios</u>:

Dados los números enteros no negativos *m* y *n*, tales que *m* ≥ *n*, se llama número combinatorio *m* sobre *n* al número $\binom{m}{n}$ definido por $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!.(m-n)!}$

Ejemplo: $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!.3!} = \frac{8.7.6.5!}{5!.3!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$

<u>Casos particulares</u>:

- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!.n!} = 1$
- $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!.(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{1.(n-1)!} = n$
- $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!.0!} = 1$
- $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!.[n-(n-1)]!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!.1!} = n$

<u>Propiedades de los números combinatorios</u>:

1. Dos números combinatorios de igual numerador tales que la suma de los denominadores coincide con aquel, se llaman números combinatorios complementarios.
   En símbolos: $\binom{m}{n}$ *y* $\binom{m}{m-n}$

Ejemplo: $\binom{9}{2}$ y $\binom{9}{7}$

Propiedad: Dos números combinatorios complementarios son iguales.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

En efecto,

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!.(m-n)!} \qquad (1)$$

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!.[m-(m-n)]!} = \frac{m!}{(m-n)!.[m-m+n]!} = \frac{m!}{(m-n)!.n!} = \frac{m!}{n!.(m-n)!} \qquad (2)$$

de (1) y (2), se demuestra que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

Ejemplo: $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$

$$\frac{6!}{2!.4!} = \frac{6!}{4!.2!}$$

2. <u>Teorema de Stiffel</u>: La suma de dos números combinatorios que tienen igual numerador y denominadores consecutivos cumple la siguiente relación $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$

En efecto:

$$\binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!.[m-1-(n-1)]!} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!.[m-1-n+1]!}$$

$$\binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!.(m-n)!}$$

multiplicando numerador y denominador por n

$$\binom{m-1}{n-1} = \frac{n.(m-1)!}{n.(n-1)!.(m-n)!}$$

pero $n.(n-1)! = n!$

$$\binom{m-1}{n-1} = \frac{n.(m-1)!}{n!.(m-n)!} \qquad (1)$$

Por otro lado:

$$\binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)!}{n!.(m-1-n)!} = \frac{(m-1)!}{n!.(m-n-1)!}$$

multiplicando numerador y denominador por $(m-n)$

$$\binom{m-1}{n} = \frac{(m-n).(m-1)!}{n!.(m-n).(m-n-1)!}$$

pero $(m-n).(m-n-1)! = (m-n)!$, luego :

$$\binom{m-1}{n} = \frac{(m-n).(m-1)!}{n!.(m-n)!} \qquad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2):

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \frac{n.(m-1)! + (m-n).(m-1)!}{n!.(m-n)!}$$

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)!.[n+(m-n)]}{n!.(m-n)!}$$

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)!.m}{n!.(m-n)!}$$

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \frac{m!}{n!.(m-n)!}$$

$$\boxed{\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}}$$

Triángulo aritmético o de Pascal

La relación de Stiffel permite el cálculo rápido de los números combinatorios de numerador *n* conocidos los de numerador *n* – 1 y da origen al triángulo de Pascal.

Los extremos de cada fila valen 1, dado que corresponden a números combinatorios $\binom{n}{0}$ y $\binom{n}{n}$. Además, cada número combinatorio restante es igual a la suma de los dos que figuran sobre él.

$n = 0$	$\binom{0}{0}$	1
$n = 1$	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$	1 1
$n = 2$	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$	1 2 1
$n = 3$	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$	1 3 3 1
	....	....

En el triángulo de Pascal puede considerarse que la primera fila es el resultado de $(a+b)^0$

La segunda fila determina los coeficientes de $(a+b)^1 = a+b$

La tercera, los de $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

La cuarta, los de $(a+b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$, etc.

<u>Binomio de Newton</u>: este teorema se demuestra mediante el principio de inducción completa, o inducción matemática enunciado anteriormente.

<u>Teorema del binomio</u>

Para cualquier número entero positivo *n*,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n.b^0 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1.b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0.b^n$$

Utilizando notación sumatoria: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$

En efecto:

Para $n=1$, $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a^1.b^0 + \binom{1}{1}a^0.b^1$

Suponemos verdadera la fórmula para $n = h$

$$(a+b)^h = \binom{h}{0}a^h.b^0 + \binom{h}{1}.a^{h-1}.b^1 + \binom{h}{2}.a^{h-2}.b^2 + \cdots + \binom{h}{h-1}a^1.b^{h-1} + \binom{h}{h}a^0.b^h \qquad (1)$$

Demostraremos que es verdadera para $n = h + 1$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad (1) por $(a + b)$

$$(a+b)(a+b)^h = (a+b)\left[\binom{h}{0}a^h.b^0 + \binom{h}{1}.a^{h-1}.b^1 + \binom{h}{2}.a^{h-2}.b^2 + \cdots + \binom{h}{h-1}a^1.b^{h-1} + \binom{h}{h}a^0.b^h\right]$$

$$(a+b)(a+b)^h=\binom{h}{0}a^{h+1}.b^0+\binom{h}{1}.a^h.b^1+\binom{h}{2}.a^{h-1}.b^2+\cdots+\binom{h}{h-1}a^2.b^{h-1}+\binom{h}{h}a^1.b^h+\binom{h}{0}a^h.b^1+$$
$$\binom{h}{1}a^{h-1}.b^2+\binom{h}{2}a^{h-2}.b^3+\cdots+\binom{h}{h-1}a^1.b^h+\binom{h}{h}a^0.b^{h+1}$$

Asociando los términos semejantes:

$$(a+b)^{h+1}=\binom{h}{0}a^{h+1}.b^0+\left[\binom{h}{1}+\binom{h}{0}\right]a^h.b^1+\left[\binom{h}{2}+\binom{h}{1}\right]a^{h-1}.b^2+\cdots+\left[\binom{h}{h}+\binom{h}{h-1}\right]a^1.b^h+\binom{h}{h}.a^0.b^{h+1}$$

Por relación de Stiffel: $\left[\binom{h}{1}+\binom{h}{0}\right]=\binom{h+1}{1}$, $\left[\binom{h}{2}+\binom{h}{1}\right]=\binom{h+1}{2}$

Además: $\binom{h}{0}=\binom{h+1}{0}=1$ y $\binom{h}{h}=\binom{h+1}{h+1}=1$

Entonces:

$$(a+b)^{h+1}=\binom{h+1}{0}a^{h+1}.b^0+\binom{h+1}{1}.a^h.b^1+\binom{h+1}{2}.a^{h-1}.b^2+\cdots+\binom{h+1}{h}a^1.b^h+\binom{h+1}{h+1}a^0.b^{h+1}$$

(2)

Luego la fórmula es válida para todo n entero positivo, es decir $\forall n\in N$

Ejemplo 1:

$$(3.x+1)^5=\binom{5}{0}.(3.x)^5.1^0+\binom{5}{1}(3.x)^4.1^1+\binom{5}{2}(3.x)^3.1^2+\binom{5}{3}(3.x)^2.1^3+\binom{5}{4}(3.x)^1.1^4+\binom{5}{5}(3.x)^0.1^5$$

$$(3.x+1)^5=243.x^5+5.81.x^4+10.27.x^3+10.9.x^2+5.3.x+1$$
$$(3.x+1)^5=243.x^5+405.x^4+270.x^3+90.x^2+15.x+1$$

Ejemplo 2:

$$\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)^6=\binom{6}{0}(2.x)^6.\left(\frac{x^2}{2}\right)^0+\binom{6}{1}(2.x)^5.\left(\frac{x^2}{2}\right)^1+\binom{6}{2}.(2.x)^4.\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\binom{6}{3}(2.x)^3.\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+$$
$$\binom{6}{4}(2.x)^2.\left(\frac{x^2}{2}\right)^4+\binom{6}{5}(2.x)^1.\left(\frac{x^2}{2}\right)^5+\binom{6}{6}(2.x)^0.\left(\frac{x^2}{2}\right)^6$$

$$\left(2.x+\frac{x^2}{2}\right)^6=64.x^6+6.32.x^5\cdot\frac{x^2}{2}+15.16.x^4\cdot\frac{x^4}{4}+20.8.x^3\cdot\frac{x^6}{8}+15.4.x^2\cdot\frac{x^8}{16}+6.2.x\cdot\frac{x^{10}}{32}+\frac{x^{12}}{64}$$

$$\left(2.x+\frac{x^2}{2}\right)^6=64.x^6+96.x^7+60.x^8+20.x^9+\frac{15}{4}\cdot x^{10}+\frac{3}{8}\cdot x^{11}+\frac{x^{12}}{64}$$

Propiedades del desarrollo:

Sea $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

i. El desarrollo de la potencia enésima de un binomio tiene (n + 1) términos por variar k desde 0 hasta n.

ii. Cada término del desarrollo tiene como coeficiente un número combinatorio cuyo numerador es igual al exponente del binomio y tal que el denominador varía de 0 a n.

iii. El exponente del primer término del binomio (a) es la diferencia entre el numerador y el denominador del número combinatorio respectivo, y el exponente del segundo término (b) es igual al denominador de dicho número combinatorio.

iv. Los términos equidistantes de los extremos tienen igual coeficiente porque corresponden a números combinatorios complementarios.

v. El término central del desarrollo cuando n es par es de orden $\frac{n}{2}+1$

vi. El término de orden k del desarrollo es $T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} . b^{k-1}$

Observación: Si el binomio fuera $(a-b)^n$, se transforma la sustracción en adición y luego se aplica la misma fórmula:

$$(a-b)^n = [a+(-b)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . a^{n-k} . (-b)^k$$

Ejercicios resueltos:

1. Calcular el cuarto término del desarrollo $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$

$$T_4 = \binom{7}{3} . x^4 . \left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)^3 == 35.x^4 . \frac{1}{x^{3/2}} = 35.x^{5/2}$$

2. Calcular directamente el término medio del desarrollo $\left(3.x^2 - \frac{1}{3}x\right)^8$

el orden del término central es $\frac{8}{2}+1=5$

$$T_5 = \binom{8}{4} (3.x^2)^4 . \left(-\frac{1}{3}x\right)^4 = 70.81.x^8 . \frac{1}{81} . x^4 = 70.x^{12}$$

3. Hallar la potencia a la que fue elevado el binomio $\left(2.x^2 - \frac{1}{2}\right)^n$ si su cuarto término es de grado 20

$$T_4 = \binom{n}{3} (2.x^2)^{n-3} . \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$2.(n-3) = 20$$

$$2.n - 6 = 20 \Rightarrow n = 13$$

Verificación:

$$T_4 = \binom{13}{3}.(2.x^2)^{10}.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 286.2^{10}.x^{20}.\left(-\frac{1}{2^3}\right) = -286.2^7.x^{20} = -36608.x^{20}$$

4. Calcular $\left(\frac{1}{2} - 4.x^2\right)^5$

$$\left(\frac{1}{2} - 4.x^2\right)^5 = \binom{5}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^5.(-4.x^2)^0 + \binom{5}{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^4.(-4.x^2)^1 + \binom{5}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^3.(-4.x^2)^2 +$$

$$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2.(-4.x^2)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^1.(-4.x^2)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^0.(-4.x^2)^5$$

$$\left(\frac{1}{2} - 4.x^2\right)^5 = \frac{1}{32} + 5.\frac{1}{16}.(-4.x^2) + 10.\frac{1}{8}.16.x^4 + 10.\frac{1}{4}.(-64.x^6) + 5.\frac{1}{2}.256.x^8 + (-1024.x^{10})$$

$$\left(\frac{1}{2} - 4.x^2\right)^5 = \frac{1}{32} - \frac{5}{4}.x^2 + 20.x^4 - 160.x^6 + 640.x^8 - 1024.x^{10}$$

5. En el desarrollo de $(2.a^2 + a)^{10}$, encontrar el término de grado 14

$$T_k = \binom{10}{k-1}.(2.a^2)^{10-k+1}.a^{k-1}$$

$$T_k = \binom{10}{k-1}.(2.a^2)^{11-k}.a^{k-1}$$

El grado de T_k es:

$$2.(11-k) + (k-1) = 14$$

$$22 - 2.k + k - 1 = 14$$

$$-k = 14 + 1 - 22$$

$$-k = -7$$

$$k = 7$$

$$T_7 = \binom{10}{6}(2.a^2)^4.a^6 = 210.16.a^8.a^6 = 3360.a^{14}$$

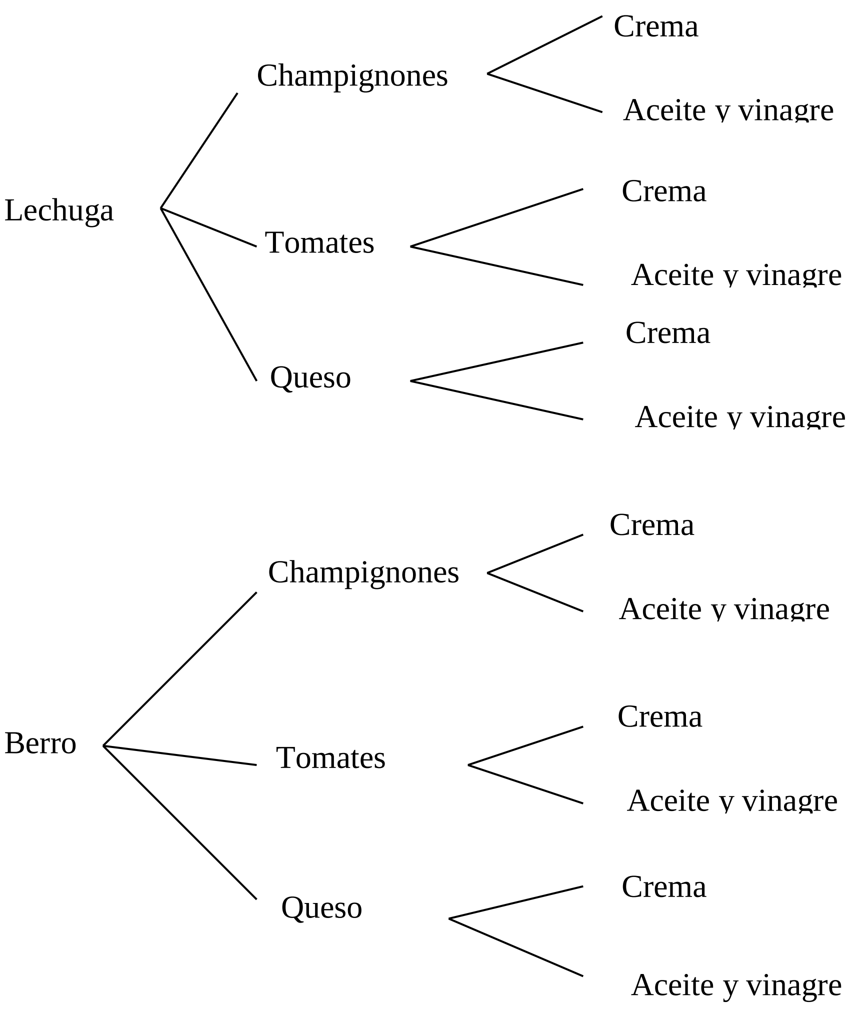
Análisis combinatorio:

Una gran variedad de problemas prácticos requieren contar el número de maneras en las cuales puede ocurrir algo. Al estudio de tales problemas se le llama combinatoria.

Principio fundamental de conteo: Si un suceso puede ocurrir de n_1 maneras diferentes y, después de que ha sucedido, un segundo suceso puede ocurrir de n_2 diferentes maneras, entonces el número total de las maneras en las cuales ambos sucesos pueden ocurrir es el producto $n_1 . n_2$.

Este principio puede extenderse a n_k sucesos.

<u>Ejemplo 1</u>: Un restaurante ofrece ensaladas por un cierto precio. Se puede elegir entre una ensalada de lechugas o una de berros. Después existe la opción de un complemento de champignones, tomates o queso. Por último se puede optar por un aderezo de crema o de aceite y vinagre. ¿De cuántas maneras se puede elaborar una ensalada?
Las posibilidades se visualizan a través de un diagrama de árbol.



Hay 2.3.2 = 12 maneras posibles de elaborar una ensalada.

Ejemplo 2: El prefijo telefónico de cierta zona de la ciudad de Concordia es 0345425. Si al prefijo le siguen 4 dígitos, ¿cuántos números telefónicos diferentes son posibles?

Para la primera cifra disponemos de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (diez posibilidades), para la segunda, tercera y la cuarta también. En consecuencia hay 10.10.10.10 =100000 números telefónicos diferentes con el prefijo 0345425.

Definiciones:

i. Llamaremos población a un conjunto de *m* elementos elegidos como universo de un suceso.

ii. Se llama muestra de orden *n* a cada grupo de *n* elementos cada uno extraídos de una población de *m* elementos, la muestra puede determinarse teniendo en cuenta o sin tener en cuenta el orden de extracción y repitiendo o no, los elementos.

Arreglos o variaciones con repetición: $A'_{m,n}$ o $V'_{m,n}$

Dada una población de *m* elementos, se llaman arreglos o variaciones de orden *n* con repetición de estos *m* elementos a cada una de las muestras de *n* elementos cada una, distintos o repetidos, tales que difieran en al menos un elemento o en el orden de los elementos diferentes, o en el número de los que se repiten, cuando están formadas por los mismos elementos.

Ejemplo: Dado $P=\{a_1,a_2,a_3\}$ o $P=\{1,2,3\}$, encontrar los arreglos con repetición de esos tres elementos tomados de a dos.

a_1a_1	a_2a_1	a_3a_1	1 1	2 1	3 1
a_1a_2	a_2a_2	a_3a_2	1 2	2 2	3 2
a_1a_3	a_2a_3	a_3a_3	1 3	2 3	3 3

hemos obtenido nueve arreglos con repetición.

En general interesa conocer su número sin necesidad de obtener las muestras.

Sea una población de *m* elementos, si queremos obtener muestras de orden *n*, con repetición; el primer elemento de la muestra puede obtenerse de *m* formas distintas, restituido a la población, el segundo elemento puede elegirse de *m* formas distintas, y así sucesivamente, de manera que el enésimo elemento también podrá elegirse de *m* formas distintas.

De acuerdo con el principio fundamental de conteo resulta $A'_{m,n} = m.\ m.\ m.....m$, *n* veces, con lo que:

$$\boxed{A'_{m,n} = m^n,} \quad \text{con } m \gtrless n, \text{ por ser con repetición}$$

Ejemplo: ¿cuántos números de 2 cifras se pueden obtener con los dígitos 1, 2, 3, 4?

$P = \{1,2,3,4\}$

$A'_{m,n} = m^n \Rightarrow A'_{4,2} = 4^2 = 16$

Arreglos o variaciones simples (sin repetición): $A_{m,n}$ o $V_{m,n}$

Dada una población de *m* elementos se llaman arreglos o variaciones simples de *n* elementos, a cada una de las muestras de *n* elementos cada una, tales que dos de ellas son distintas cuando difieren en al menos un elemento, o en el orden, si tienen los mismos elementos.

Ejemplo: Dado $P = \{a_1, a_2, a_3\}$ o $P = \{1,2,3\}$, encontrar los arreglos sin repetición de esos tres elementos tomados de a dos.

a_1a_2	a_2a_1	a_3a_1	1 2	2 1	3 1
a_1a_3	a_2a_3	a_3a_2	1 3	2 3	3 2

hemos obtenido seis muestras diferentes.

Sea una población de *m* elementos, si queremos obtener muestras de orden *n*, sin repetición; el primer elemento de la muestra puede obtenerse de *m* formas distintas, al no haber sido restituido a la población, el segundo elemento puede elgirse de (*m* - 1) formas distintas; el tercero, de (*m* – 2) formas; y así sucesivamente, de manera que el enésimo elemento podrá elegirse de [*m*- (*n* –1)] formas distintas, aplicando el principio fundamental:

$$\boxed{A_{m,n} = m.(m-1).(m-2).....[m-(n-1)] \quad \text{con} \quad n \le m}$$

(es el producto de *n* factores decrecientes a partir de *m*)

Esta fórmula también puede fundamentarse por generalización. En efecto:

$$A_{m,1} = m$$

$$A_{m,2} = m.(m-1) = m.[m-(2-1)]$$

$$A_{m,3} = m.(m-1)(m-2) = m.(m-1).[m-(3-1)]$$

En general:

$$A_{m,n} = m.(m-1).(m-2).....[m-(n-1)] \qquad \text{con} \quad n \le m$$

Otra expresión para $A_{m,n}$ se obtiene multiplicando y dividiendo el segundo miembro de la igualdad por $(m - n)!$

$$A_{m,n} = \frac{m.(m-1).(m-2).....[m-(n-1)].(m-n)!}{(m-n)!}$$

pero: $m.(m-1).(m-2).....[m-(n-1)].(m-n)! = m!$

$$\boxed{A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

Ejemplo 1: ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden obtenerse con los dígitos 3, 4, 5, 6, 7, 8?

m = 6, n = 3, $A_{6,3}$ = 6.5.4 =120 números de tres cifras distintas.

Con la otra fórmula: $A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$

Ejemplo 2: Entre los integrantes de un equipo de hockey se reparten 3 premios: premio a la mejor actuación, premio al mejor compañero, premio a la asistencia a los entrenamientos. Ninguno puede recibir más de un premio. ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir los premios entre los 11 jugadores?

Solución: Para el primer premio existen 11 posibilidades, para el segundo 10 y para el tercero 9.

$A_{11,3}$ = 11.10.9 = 990

Con la otra fórmula $A_{11,3} = \frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11.10.9.8!}{8!} = 990$ posibilidades.

Permutaciones: P_n

En el caso particular en que los arreglos o variaciones simples de *m* elementos tomados de *n* sean tales que *m* = *n*, de manera tal que las muestras tienen todos los elementos de la población con lo que sólo diferirán en el orden, hablaremos de permutaciones.

Por definición $P_n = A_{n,n}$ con $m = n$

$\Rightarrow P_n = n.(n-1).(n-2).....[n-(n-1)]$

$\Rightarrow P_n = n.(n-1).(n-2).....3.2.1$

$\Rightarrow \boxed{P_n = n!}$

Ejemplo 1: Cuatro esquiadores usan cuatro gorros de distinto color (azul, rojo, amarillo y verde) para distinguirse a la distancia. ¿De cuántas maneras diferentes pueden distribuirse los gorros?

Solución: existen 4 posibilidades para el gorro azul, una vez asignado quedan 3 para el rojo, luego restan 2 para el amarillo y finalmente sólo 1 para el verde.

P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24 maneras diferentes

Ejemplo 2: ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden obtenerse con los dígitos 1, 2, 3?

Solución: dos números de 3 cifras distintas serán diferentes en el orden de los dígitos.

P_3 = 3! = 3.2.1 =6

Los números son:

123 213 312

132 231 321

<u>Combinaciones simples (sin repetición)</u>: $C_{m,n}$ o C_n^m

Dada una población de *m* elementos, se llaman combinaciones simples de orden *n*, de estos *m* elementos, a todas las muestras de *n* elementos cada una, tales que dos de ellas son diferentes cuando difieren al menos en un elemento.

Ejemplo: $P=\{a_1,a_2,a_3\}$ o $P=\{1,2,3\}$

Las combinaciones de tres elementos de orden 2 ($C_{3,2}$) son:

a_1a_2 a_1a_3 a_2a_3 o 1 2 1 3 2 3

$C_{3,2}=3$

Para obtener el número de combinaciones de *m* elementos de orden *n* consideremos la población $P=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ y formemos las combinaciones de tres elementos, luego las permutaciones de cada una de ellas:

$$P_3 \left\{ \underbrace{\begin{array}{cccc} a_1a_2a_3 & a_1a_2a_4 & a_1a_3a_4 & a_2a_3a_4 \\ a_1a_3a_2 & a_1a_4a_2 & a_1a_4a_3 & a_2a_4a_3 \\ a_2a_1a_3 & a_2a_1a_4 & a_3a_1a_4 & a_3a_2a_4 \\ a_2a_3a_1 & a_2a_4a_1 & a_3a_4a_1 & a_3a_4a_2 \\ a_3a_1a_2 & a_4a_1a_2 & a_4a_1a_3 & a_4a_2a_3 \\ a_3a_2a_1 & a_4a_2a_1 & a_4a_3a_1 & a_4a_3a_2 \end{array}}_{C_{4,3}} \right. \quad A_{4,3}$$

El cuadro representa los arreglos simples de cuatro elementos de orden tres; entonces:

$$A_{4,3}=C_{4,3}.P_3 \Rightarrow C_{4,3}=\frac{A_{4,3}}{P_3}$$

Generalizando: $A_{m,n}=C_{m,n}.P_n \Rightarrow C_{m,n}=\dfrac{A_{m,n}}{P_n}$

$$C_{m,n}=\frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{m,n}=\frac{m!}{n!.(m-n)!}}$$

en consecuencia: $\boxed{C_{m,n}=\binom{m}{n}}$ con $n\le m$

Ejemplo 1: Una empresa de autos remises tiene 8 choferes disponibles. Se solicitan 3 choferes para una ceremonia. ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir los tres choferes?

Solución: $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!.5!} = \frac{8.7.6.5!}{3.2.1.5!} = 56$

Ejemplo 2: Con 5 pesas distintas, ¿cuántas pesadas diferentes se pueden efectuar tomadas las pesas de dos en dos?

Solución: las pesadas serán diferentes cuando al menos una de las pesas lo sea.

$C_{5,2} = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4.3!}{3!.2.1} = 10$ pesadas diferentes.

Combinaciones con repetición: Las combinaciones con repetición de m elementos tomados de n responden a la siguiente fórmula:

$$C'_{m,n} = C_{m+n-1,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

Permutaciones con repetición: Dados *n* elementos entre los cuales existan α iguales entre sí, β iguales entre sí pero distintos de los anteriores, etc. y finalmente λ iguales entre sí pero distintos de los precedentes, se denominan permutaciones con repetición de esos elementos a todos los conjuntos ordenados que se pueden formar con los *n* elementos de manera que dos cualesquiera de dichos conjuntos difieren únicamente en el orden de los elementos distintos que los componen.

Ejemplo: con las letras de la palabra SOS se forman las permutaciones con repetición: SSO, OSS, SOS, en total $P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!} = \frac{3.2!}{2!} = 3$

En general, el número de permutaciones con repetición de *n* elementos con α, β, ...,λ elementos iguales entre sí está dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!....\lambda!}$$

Ejemplo: ¿Cuántos códigos se pueden obtener con las letras de la palabra ARRAIGO?

Solución: cantidad de A: 2; cantidad de R: 2; total de letras: 7

$$P_7^{2,2} = \frac{7!}{2!.2!} = \frac{7.6.5.4.3.2}{2.2} = 1260$$