Unidad II

Lic. María Josefina Tito
Licenciatura en Sistemas
Facultad de Ciencias de la Administración
UNER

1. Nociones previas

1.1. Cotas de un conjunto

Definición: Sea A un conjunto cualquiera de números reales, es decir $A \subset \mathbb{R}$. Un número real c se dice cota superior de A si para todo $x \in A$ se cumple $x \leq c$.
Observe que, un número real es cota superior de un conjunto cuando es mayor o igual que todos los elementos del conjunto.
Ejemplo: cualquier número real mayor o igual a 3 es una cota superior del conjunto $A = (-\infty, 3)$.
Definición : Sea A un conjunto cualquiera de números reales, es decir $A \subset \mathbb{R}$. Un número real d se dice cota inferior de A si para todo $x \in A$ se cumple $x \geq d$.
Es decir, un número real es cota inferior de un conjunto cuando es menor o igual que todos los elementos del conjunto.
Ejemplo: cualquier número real menor o igual a -2 es una cota inferior del conjunto $B = (-2, 3)$.
Un conjunto se dice acotado superiormente si tiene cota superior y se dice acotado inferiormente si tiene cota inferior.
Un conjunto se dice acotado cuando está acotado superior e inferiormente.
Ejemplo: el conjunto $A = (-\infty, 3)$ está acotado superiormente, pero no inferiormente. El conjunto $B = (-2, 3)$ está acotado.

1.2. Supremo e ínfimo de un conjunto

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, un número real c se dice supremo de A y se indica $c = supA$ si es una cota superior de A y es la menor de las cotas

superiores de A. Es decir, si l es cualquier otra cota superior de A, entonces $c \leq l$.
Si el supremo del conjunto pertenece al conjunto, entonces se llama máximo del conjunto.
Ejemplo: 3 es supremo del conjunto $A = (-\infty, 3)$.
Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, un número real d se dice ínfimo de A y se indica $d = infA$ si es una cota inferior de A y es la mayor de las cotas inferiores de A. Es decir, si k es cualquier otra cota inferior de A, entonces $d \geq k$.
Si el ínfimo del conjunto pertenence al conjunto, entonces se llama mínimo del conjunto.
Ejemplos: Dado conjunto $B = (-2, 3)$, -2 es el ínfimo de B y 3 es el supremo de B.
El intervalo cerrado $C = [0, 1]$ está acotado. Además 1 es el máximo y 0 es el mínimo.

1.3. Entornos

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$. Se llama entorno de centro a y radio $\delta > 0$ y se indica: $E_\delta(a)$, al conjunto: $E_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$
o lo que es lo mismo: $E_\delta(a) = \{x/x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta\}$
Ejemplo: $E_2(3) = (3 - 2, 3 + 2) \Leftrightarrow E_2(3) = (1, 5)$
$\Leftrightarrow E_2(3) = \{x/x \in \mathbb{R}, |x - 3| < 2\}$
Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$. Se llama entorno reducido de centro a y radio $\delta > 0$ y se indica: $E'_\delta(a)$, al conjunto: $E'_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$,
es decir: $E'_\delta(a) = \{x/x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta\}$
Ejemplo: $E'_2(3) = (3 - 2, 3 + 2) - \{3\} \Leftrightarrow E'_2(3) = (1, 3) \cup (3, 5)$
$\Leftrightarrow E'_2(3) = \{x/x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 3| < 2\}$

1.4. Clasificación de los puntos de un conjunto

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto interior de A si $\exists\delta > 0$ tal que $E_\delta(x_0) \subset A$. Note que se debe cumplir que $x_0 \in A$.
Definición: Se llama interior de A, al conjunto formado por todos los puntos interiores de A. El interior de A se indica A^o.
Ejemplo: Dado $A = [-1, 1]$; el conjunto $A^o = (-1, 1)$
Definición: Se dice que un conjunto A es abierto si $A = A^o$.
Ejemplo:Cualquier intervalo abierto de números reales es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.
Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$ diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A si $\forall\delta > 0$ tal que $E'_\delta(x_0) \cap A \neq \phi$. Es decir, cuando todo entorno reducido

de x_0 contiene puntos del conjunto A distintos de x_0.
Definición: Se llama conjunto derivado de A, al conjunto formado por todos los puntos de acumulación de A. El conjunto derivado de A se indica $A^{'}$.
Ejemplo: Dado $A = [-1, 1)$; el conjunto $A^{'} = [-1, 1]$
Ejemplo: Dado $A = \mathbb{Q}$; el conjunto $A^{'} = \mathbb{R}$
Definición: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si su complementario $\mathbb{R} - A$ es abierto.
Ejemplo: Dado $A = [-1, 1]$; el conjunto A es cerrado ya que el $\bar{A} = \mathbb{R} - [-1, 1]$ es un conjunto abierto.
Propiedad: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, es cerrado si, y sólo si, contiene todos sus puntos de acumulación.

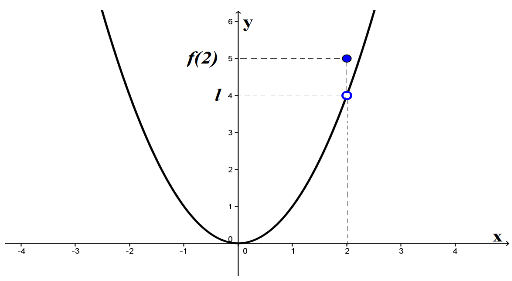
2. Límite de funciones

2.1. Definición y propiedades

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Para esta función es $f(2) = 5$, pero cuando x se acerca a 2, (pero distinto



de 2) se puede ver que la función se acerca a 4. En matemática se explicaría esta situación diciendo que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$
La idea de la noción de límite es dar una definición precisa de la frase $f(x)$ se acerca a 4 cuando x se acerca a 2.

2.1.1. Definición de límite de una función en un punto

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto de números reales, $f : A \to \mathbb{R}/y = f(x)$, sea a un punto de acumulación de A. Se dice que el número real ℓ es el límite de f si x tiende a a, y se indica: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, cuando, dado cualquier $\epsilon > 0$, se puede

obtener un $\delta > 0$ (que depende de ϵ) tal que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
En símbolos:
$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ / \ x \in A \ \wedge \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon}$.

Observaciones: Notemos que en la definición dada, la expresión $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$, indica que no interesa lo que pasa con la función en a sino *cerca* de a.
Observemos también que en la definición de límite es esencial que a sea un punto de acumulación de A pero es irrelevante que a pertenezca o no a A, es decir que f esté o no definida en el punto a.
Informalmente, podemos interpretar el valor ℓ como el valor al que se *acerca* $f(x)$ cuando se toma x *cerca* de a, pero sin importar lo que pasa con el valor de la función en a.

Cálculo de límites por definición

Ejemplo 1: Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 1$. Demostraremos que:

$$\lim_{x \to 3}(2x + 1) = 7$$

Observemos que:

$|f(x) - \ell| = |2x + 1 - 7| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = 2\,|x - 3|$ y por lo tanto, que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ significa, en este caso, que $2\,|x - 3| < \epsilon$

Luego sea $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Si $0 < |x - 3| < \dfrac{\epsilon}{2}$

$\Rightarrow |f(x) - \ell| = |2x + 1 - 7| = |2x - 6| = 2\,|x - 3| \leq 2\dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$

lo cual, siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, demuestra lo afirmado.

Ejemplo 2: Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$. Demostraremos que:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

En este caso es: $|f(x) - \ell| = |x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2|\,|x + 2|$

Elijamos $\delta^{'} = 1$. Entonces si $|x - 2| < 1$ será: $-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow$

$-1+2<x<1+2 \Rightarrow 1+2<x+2<3+2 \Rightarrow 3<x+2<5.$

En particular, si $|x-2|<1$ es: $|x+2|<5$

Por lo tanto , y siempre que $|x-2|<1$:

$|f(x)-\ell| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| < 5\,|x-2|$

Luego sea $\delta \leq \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{5}\right\}$.

Si $0<|x-2|<\delta$, entonces:

$|f(x)-\ell| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)| < 5\,|x-2| <$ (porque $\delta \leq 1$)

$< 5.\dfrac{\epsilon}{5} = \epsilon$ (por ser $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{5}$)

lo cual, siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, demuestra lo afirmado.

2.1.2. Propiedades

Teorema 2.1 *Sean $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$. Si $\ell_1 < \ell_2$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$.*

Demostración Sea $K = \dfrac{\ell_1+\ell_2}{2}$. Tomando $\epsilon = K - \ell_1 = \ell_2 - K$, resulta entonces $K = \ell_1 + \epsilon = \ell_2 - \epsilon$. Por la definición del límite, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que para todo $x \in A$, $0 < |x-a| < \delta_1$ es $\ell_1 - \epsilon < f(x) < K$ y para todo $x \in A$, $0 < |x-a| < \delta_2$ es $K < g(x) < \ell_2 + \epsilon$. Por lo tanto, eligiendo $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que para todo $x \in A$, $0 < |x-a| < \delta$ se cumple $f(x) < K < g(x)$. Lo que prueba el teorema.

Corolario 2.1 *Sea $f: A \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ si $\ell_1 < M$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$, es $f(x) < M$.*

Corolario 2.2 *Sea $f: A \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ si $\ell_1 > L$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$, es $f(x) > L$.*

Corolario 2.3 *Sea $f: A \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A - \{a\}$ entonces $\ell_1 \leq \ell_2$.*

Teorema 2.2 *("Teorema del emparedado")Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ y $h : A \to \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A, y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A - \{a\}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*

Demostración Dado $\epsilon > 0$,existen δ_1 y δ_2 tales que para todo $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta_1$ es $|g(x) - \ell| < \epsilon$ o bien $-\epsilon < g(x) - \ell < \epsilon$,
y $0 < |x - a| < \delta_2$ es $|h(x) - \ell| < \epsilon$ o bien $-\epsilon < h(x) - \ell < \epsilon$.
entonces, si $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, para todo $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$ es $-\epsilon < g(x) - \ell \leq f(x) - \ell \leq h(x) - \ell < \epsilon$. De donde reulta que para todo $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$ es $|f(x) - \ell| < \epsilon$, luego: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Teorema 2.3 *(Unicidad del límite) Sea $f : A \to \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_2$, entonces $\ell_1 = \ell_2$.*

Demostración Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que si
$0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - \ell_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Análogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces
$|f(x) - \ell_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Sea $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1$ y tal que $0 < |x - a| < \delta_2$.
Luego valen las dos desigualdades y por lo tanto:
$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$
Resulta entonces que $|\ell_1 - \ell_2|$ es menor que cualquier número positivo y como además es mayor o igual que cero, se deduce que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$.
Luego $\ell_1 = \ell_2$.

Teorema 2.4 *(Operaciones con límites) Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$.Entonces:*

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)) = \ell_1.\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ *si* $\ell_2 \neq 0$
- *Si* $\ell_1 > 0$ *entonces,* $\lim\limits_{x\to a} ln(f(x)) = ln(\ell_1)$
- *Si* $\ell_1 \neq 0$ *entonces,* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)^{g(x)}) = \ell_1^{\ell_2}$

Además, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y g es una función acotada en un entorno del a, se cumple que $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)) = 0$

2.1.3. Límites laterales

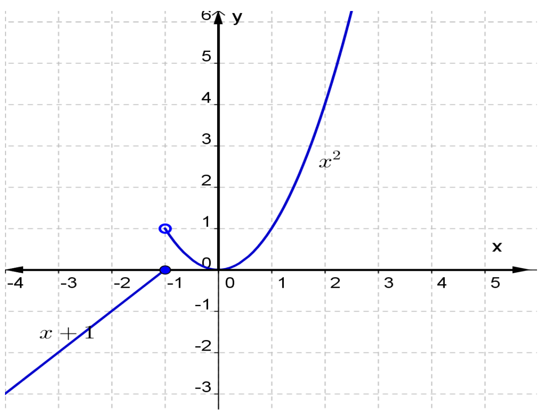
Hemos estudiado el comportamiento de una función cuando x se acerca a un cierto punto a y no se han puesto restricciones sobre la manera en que x se acerca al punto a. Consideraremos los casos en que x se acerca al punto a por la derecha y por la izquierda.

Definición

- Sea $f : A \to \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de $A \cap (a, +\infty)$.Se dice que ℓ_1 es el límite $f(x)$ cuando x se acerca al punto a por la derecha, y lo escribimos: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1$ si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ y $0 < x - a < \delta$ se cumple $|f(x) - \ell_1| < \epsilon$.
- Sea $f : A \to \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de $A \cap (-\infty, a)$.Se dice que ℓ_1 es el límite $f(x)$ cuando x se acerca al punto a por la izquierda, y lo escribimos: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_2$ si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ y $0 < a - x < \delta$ se cumple $|f(x) - \ell_2| < \epsilon$.

Ejemplo: Sea la función: $f : A \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



Los límites laterales de la función para $a = -1$ son:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x + 1 = 0$$

Teorema 2.5 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell = \lim_{x\to a^-} f(x)$

Observación: El contrarecíproco de este teorema, nos permite probar la no existencia de límite, ya que si los límites laterales son distintos, esto implicaría que el límite de la función no existe en dicho punto.

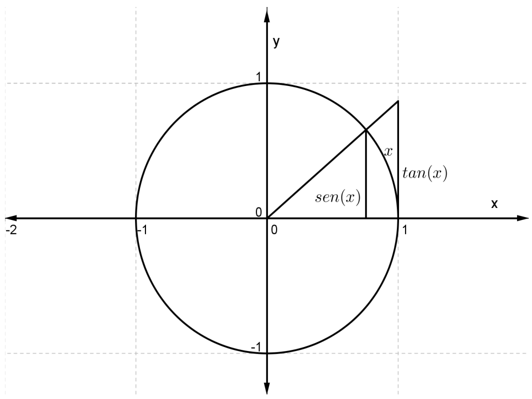
Ejemplo: Se mostró en el ejemplo anterior que la funcin: $f : A \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

tiene límites laterales distintos en $x = -1$, por lo que $\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe.

Cálculo de $\lim_{x\to 0}(\frac{sen(x)}{x})$

Probaremos a continuación que: $\lim_{x\to 0}(\frac{sen(x)}{x}) = 1$



Para todo ángulo entre $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se cumple que: $sen(x) < x < tan(x)$.

Como en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la función $sen(x) > 0$, dividiendo la desigualdad por $sen(x)$, resulta:

$\frac{sen(x)}{sen(x)} < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tan(x)}{sen(x)}$

Luego, $1 < \frac{x}{sen(x)} < cos(x)$

Invirtiendo la desigualdad: $1 > \dfrac{sen(x)}{x} > cos(x)$ o lo que es lo mismo: $cos(x) < \dfrac{sen(x)}{x} < 1$

Como $\lim_{x \to 0^+} cos(x) = 1$ y $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ aplicando el Teorema 2.2 resulta que $\lim_{x \to 0^+} (\dfrac{sen(x)}{x}) = 1$

Análogamente, como para todo ángulo entre $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ se cumple: $sen(x) > x > tan(x)$.

Por lo que siguiendo los pasos desarrollados anteriormente se prueba que: $\lim_{x \to 0^-} (\dfrac{sen(x)}{x}) = 1$

Luego por el Teorema 2.5 resulta que: $\lim_{x \to 0} (\dfrac{sen(x)}{x}) = 1$

2.2. Límites en el infinito y límites infinitos

2.2.1. Límite en el infinito

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente. Dada $f : A \to \mathbb{R}$, diremos que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si: dado $\epsilon > 0$ existe un número real $K > 0$ tal que para todo $x \in A$ y $x > K$ se cumple $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Ejemplo: Dada la funcón $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ se puede ver que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

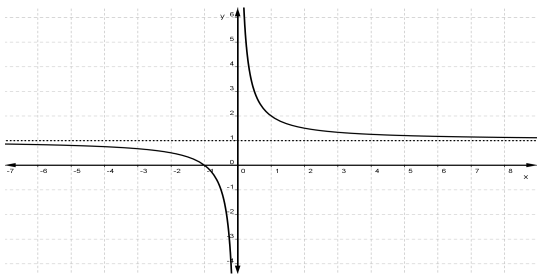


Figura 1: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

De manera análoga se define $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ cuando el dominio de f no está acotado inferiormente: dado $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $x < -K$ se cumple:$|f(x) - \ell| < \epsilon$.

En estos casos son válidos los resultados enunciados para el límite finito, con las adaptaciones obvias.

2.2.2. Límite infinito

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A y $f : A \to \mathbb{R}$. Diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ cuando, para todo $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

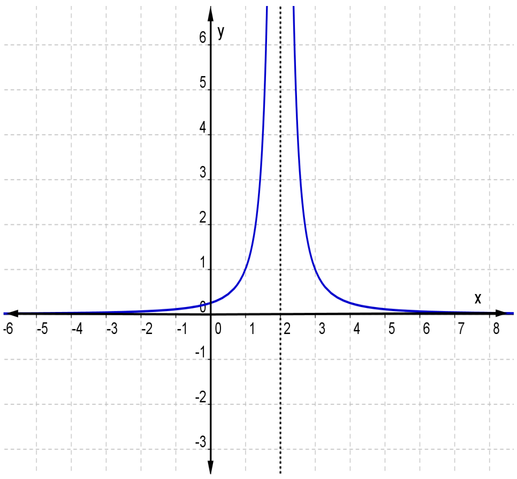


Figura 2: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

Pues dado $K > 0$, existe $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ y $0 < |x-2| < \dfrac{1}{\sqrt{K}} \Rightarrow 0 < (x-2)^2 < \dfrac{1}{K} \Rightarrow \dfrac{1}{(x-2)^2} > K$.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A y $f : A \to \mathbb{R}$. Diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ cuando, para todo $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -K$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$. Pues dado $K > 0$, existe $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ y $0 < |x-2| < \dfrac{1}{\sqrt{K}} \Rightarrow 0 < (x-2)^2 < \dfrac{1}{K}$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{(x-2)^2} < -K.$

Observaciones:

Las definiciones de $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, etc. no presentan mayores dificultades, por lo que se dejan como ejercicio.
También es interesante como práctica para el alumno escribir la definición de:
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Es importante recalcar que $+\infty$ y $-\infty$, no son números reales; por lo que las expresiones $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, no representan límites en el sentido estricto del término.

Ejemplos Importantes

- Veamos que $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$

Esto es equivalente a probar que: $\lim\limits_{x\to 0^+} (-ln(x)) = +\infty$. Esto es dado $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < x < \delta$ es $-ln(x) > K$. Dado $K > 0$, existe $\delta = e^{-K}$. Si $0 < x < \delta$ como la función logaritmo natural es creciente es $ln(x) < ln(\delta)$, o sea $ln(x) < ln\left(e^{-K}\right)$ o sea $ln(x) < -K$ o lo que es lo mismo:$-ln(x) > K$.

- Probemos que $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(x) = +\infty$

Dado $K > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $M > 0$ es $ln(x) > K$. Tomando $M = e^K$ entonces si $x > M$ como la función logaritmo natural es creciente es $ln(x) > ln(M)$, o sea $ln(x) > ln\left(e^K\right)$ o sea $ln(x) > K$.

- Si $a > 1$ probemos que $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$

Luego, dado $K > 0$ tomando $M = log_a K$ entonces, si $x > M$: $a^x > a^M \Leftrightarrow a^x > a^{log_a K} \Leftrightarrow a^x > K$.

- Si $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$

Dado $\epsilon > 0$ tomando $M = -log_a \epsilon$ entonces, si $x < -M = log_a \epsilon$ resulta $a^x < a^{-M} \Leftrightarrow a^x < a^{log_a \epsilon} \Leftrightarrow a^x < \epsilon$.

2.2.3. Indeterminaciones

Son expresiones indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0, y 1^∞.

En el caso de la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ afirmar que es una indeterminación tiene el siguiente significado:
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$, sea a un punto de acumulación de A.
Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y sea $X = \{x \in A; g(x) \neq 0\}$, notemos que $a \in X'$.
Cuando $x \in X$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ está definido y tiene sentido preguntarse si existe o no el $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. No obstante, en general nada se puede afirmar sobre dicho límite.
Dependiendo del valor de las funciones f y g, éste puede ser cualquier valor real o no existir. Por ejemplo sea $f(x) = 4x$ y $g(x) = x$, tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, mientras que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 4$.
Por otra parte si por ejemplo $f(x) = xsen(\frac{1}{x})$ para $(x \neq 0)$ y $g(x) = x$, tendríamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, sin que exista $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.