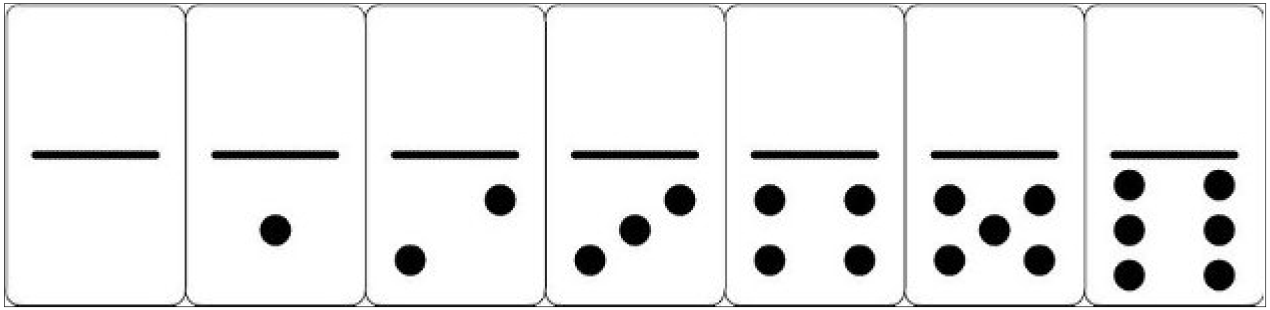
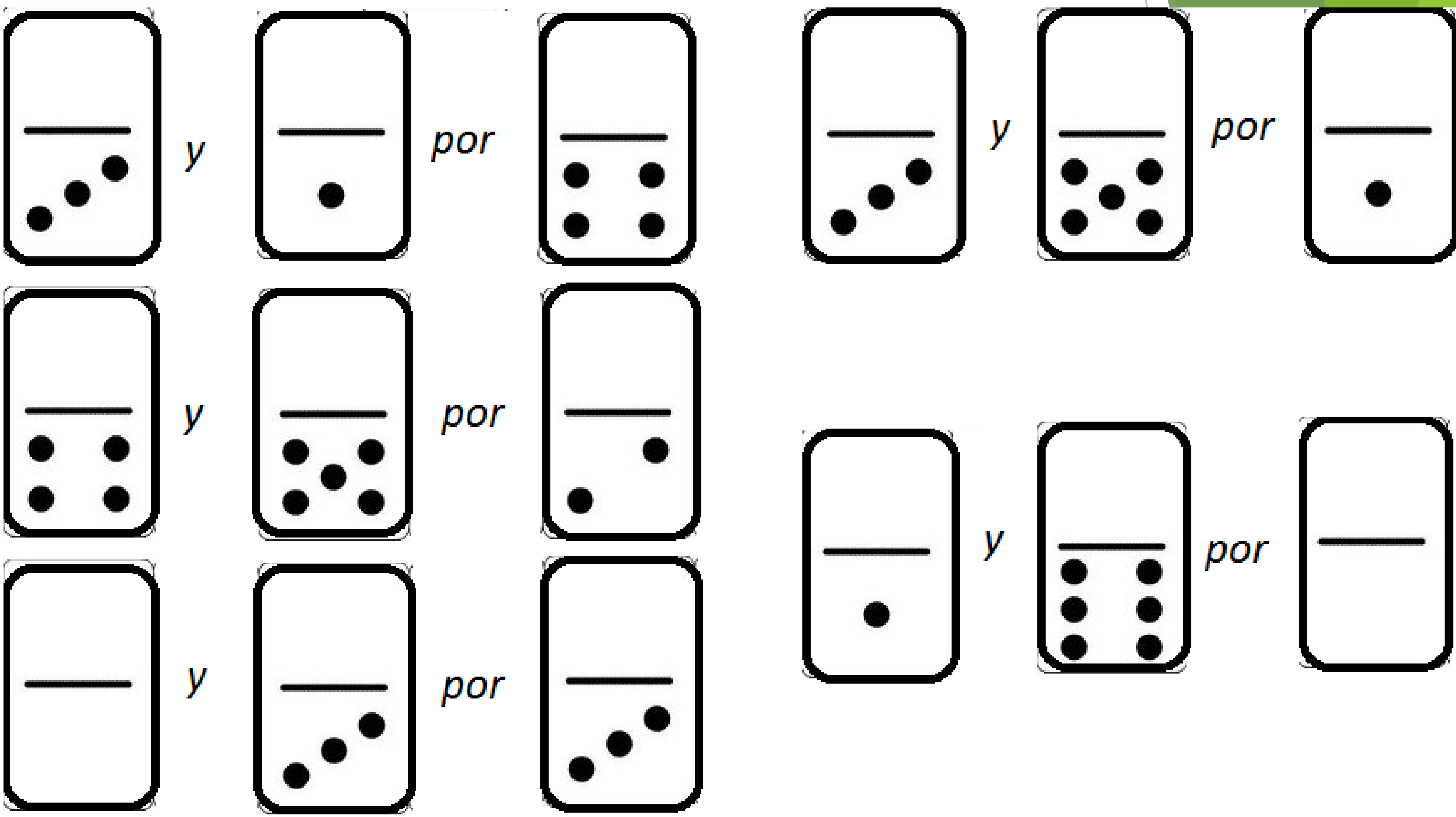
Un dominó particular

Consideremos las 7 fichas de dominó siguientes:



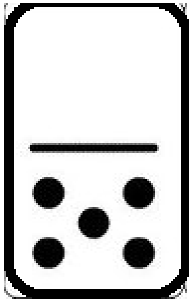
Sabiendo que la regla de sustitución consiste en tomar dos y reemplazarlas por otra, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Un dominó particular



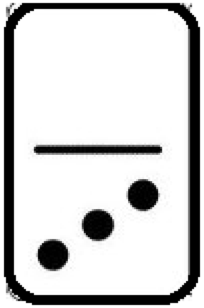
Un dominó particular

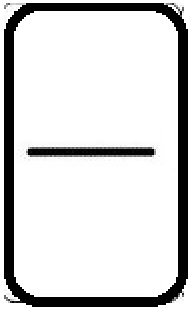
- Descubrir la regla de sustitución de las fichas.
- ¿Es posible que se obtenga una ficha inexistente?
- Utilizando dos fichas, obtener:



- Existen otras posibilidades, ¿cuáles?
- ¿Con qué ficha se debe combinar otra, para obtener, aplicando la regla, la ficha original?

Un dominó particular

- ¿Con qué ficha se debe combinar 

  para obtener la ficha  ?

- Aplicando la regla para dos fichas cualesquiera, ¿importa el orden en que se coloquen?

Un dominó particular

Si establecemos una correspondencia entre las fichas de dominó y los números enteros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, podemos definir el conjunto

$$F = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

Completemos la siguiente tabla:

*	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Un dominó particular

*	0	1	2	3	4	5	6
0				3			
1				4			0
2							
3	3	4				1	
4						2	
5				1	2		
6		0					

Ley de composición interna

Definición: Ley de composición interna definida en un conjunto A no vacío es toda función de A x A en A.

"*" es una ley de composición interna en A $\Leftrightarrow$

$$* : A \times A \to A$$

Es decir, si

$$a \in A \wedge b \in A \Rightarrow a * b \in A$$

Ejemplos

- La adición y multiplicación en N, Z,Q, R,C son leyes de composición interna.
- La sustracción en N no es ley de composición interna.
- La división en Z^+ no es ley de composición interna.

Propiedades y elementos distinguidos de las leyes de composición interna

Asociatividad

$$*: A^2 \to A$$

es asociativa

$$\Leftrightarrow (a*b)*c = a*(b*c) \qquad \forall a,b,c \in A$$

Conmutatividad

$$*: A^2 \to A$$

es conmutativa

$$\Leftrightarrow a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$$

Existencia de elemento neutro

$$*: A^2 \to A$$

posee elemento neutro si

$$\exists e \in A / \forall a \in A: a * e = e * a = a$$

Existencia de inverso en una ley con neutro

$a' \in A$ es inverso de $a \in A$ con respecto a “*”

$$\Leftrightarrow a * a' = a' * a = e$$

El inverso, si existe, es relativo a cada elemento.

Los elementos de A que admiten inverso respecto de “*” se llaman invertibles.

Unicidad del elemento neutro

Si existe elemento neutro en A respecto de "*", entonces es único.

Demostración: supongamos que e y e' son elementos neutros respecto de *.

Por definición de neutro, resulta:

$$e * e' = e' * e = e$$

$$e' * e = e * e' = e'$$

$$\therefore e = e'$$

Unicidad del inverso respecto de una ley asociativa

Si un elemento $a \in A$ admite inverso respecto de la ley de composición interna asociativa "*", entonces dicho inverso es único.

Demostración: supongamos que $a´$ y a'' son inversos de a respecto de la ley asociativa "*".

Aplicando la definición de neutro, de inverso y la asociatividad, se tiene:

$$a'' = a'' * e = a'' * (a * a´) = (a'' * a) * a´ = e * a´ = a´$$

Regularidad de un elemento respecto de una ley de composición interna

Sea "*", una ley de composición interna en A,

- el elemento a de A, es regular a izquierda si y sólo si

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \quad \forall b, c \in A$$

- el elemento a de A, es regular a derecha si y sólo si

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c \quad \forall b, c \in A$$

- Un elemento es regular si lo es a derecha y a izquierda simultáneamente.
- "*" es **cancelativa** en A si y sólo si **todos** los elementos del conjunto son regulares para dicha ley.

Distributividad de una ley de composición interna respecto de otra

Sean “*” y “o” , dos leyes de composición interna definidas en el mismo conjunto A.

“o” es distributiva a derecha respecto de “*” si y sólo si:

$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c), \forall a, b, c \in A$$

“o” es distributiva a izquierda respecto de “*” si y sólo si:

$$c \circ (a * b) = (c \circ a) * (c \circ b), \forall a, b, c \in A$$

Se dice que “o” es distributiva respecto de “*” si y sólo si lo es a izquierda y derecha.

Análogamente se define la distributividad de “*” respecto de “o”.

Estructura de Grupo

Sea un conjunto no vacío G y una ley "*" definida en él.

El par (G, *) es un grupo si y sólo si:

- "*" es ley de composición interna
- "*" es asociativa
- Existe neutro para "*"
- Todo elemento de G admite inverso respecto de "*"

Los grupos para los que "*" es conmutativa se denominan abelianos o conmutativos.

Observación: si "*" es una l. c. i. asociativa, el par (G,*) es semigrupo.

Ejemplos

- El par (**N**, .)
- **(Z, +); (Q , +); (R , +) y (C , +).** Son grupos abelianos.
- **(N, +).** No es grupo. No tiene neutro ni inverso de cada elemento.
- **(N_0, +).** No es grupo. Tiene neutro, el 0, pero no posee inverso aditivo.
- (Q, .) No es grupo, el 0 no tiene inverso multiplicativo.

Subgrupo

- Un subconjunto no vacío B, del conjunto A es un subgrupo de **(A , *)** si y solo sí **(B , *)** es un grupo.
- Por ejemplo, **(Z , +)** es un subgrupo de **(Q , +)**

Anillo

Sea un conjunto no vacío A y las leyes "*" y "." definidas en él.

La terna (A,*, .) es un anillo si y sólo si:

- (K,*) es grupo abeliano
- (K, .) es semigrupo
- "." distribuye doblemente sobre "*", es decir:

$$\forall a, b, c \in A:$$
$$a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * (a \cdot c)$$
$$\wedge \quad (b * c) \cdot a = (b \cdot a) * (c \cdot a)$$

Anillo

Si además:

- “.” es conmutativa se denomina Anillo conmutativo
- “.” posee elemento neutro, se tiene un Anillo con Identidad o Anillo con Unidad
- Todo elemento distinto de cero es invertible respecto de “.”, entonces se tiene un Anillo de División

Ejemplos

- **(N , + , .)** con las operaciones conocidas **no es un anillo**, pues en **N** no existe neutro para la adición.
- **(N_0, + , .)**con las operaciones conocidas **no es anillo**, pues **N_0** carece de inversos aditivos.
- **(Z , + , .)** con las operaciones conocidas, **es un anillo conmutativo con unidad.**

Estructuras algebraicas: síntesis

Sean "*" y "•" l. c. i. en A

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} * \textit{ es Asociativa} \end{array}\right\} (A, *) \text{ semigrupo} \\ * \textit{ Posee elemento neutro} \\ \textit{Todo elemento de A posee inverso según } * \end{array}\right\} (A,*) \text{ grupo} \\ * \textit{ es Conmutativa} \end{array}\right\} (A,*) \text{ grupo abeliano}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} (A,*) \textit{es grupo abeliano} \\ (A,\cdot) \quad \textit{es semigrupo} \\ \cdot \quad \textit{distribuye sobre} \quad * \end{array}\right\} (A,*,\bullet) \text{ Anillo} \\ \cdot \quad \textit{es conmutativa} \end{array}\right\} \text{A. Conmutativo} \\ \cdot \text{ Posee elemento neutro} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Anillo} \\ \text{Conmutativo} \\ \text{Con unidad}\end{array} \\ \textit{Todo elelmento no nulo es invertible respecto de } \cdot \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{A. conmutativo} \\ \text{con unidad} \\ \text{de división}\end{array}$$

<u>Anillo sin divisores de cero (A, *, •):</u> elementos no nulos dan producto no nulo
<u>Anillo de integridad:</u> (A, *, •) es anillo y 0 es el único divisor de cero
<u>Dominio de integridad</u> (A, *, •) es anillo conmutativo con unidad o identidad y sin divisores de cero (de integridad)

$$\left.\begin{array}{r} (A,*) \textit{Grupo Abeliano} \\ (A-\{0\},\cdot) \textit{ Grupo Abeliano} \\ \cdot \quad \textit{distribuye respecto de } * \end{array}\right\} \qquad (A,*,\bullet) \qquad \text{Cuerpo}$$

Enteros módulo n (Z_n)

Si n es un número entero tal que $n \geq 2$, se denomina $\mathbf{Z_n}$ al conjunto

$\mathbf{Z_n} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 ,..., n-1\}$

Operaciones

- <u>+ ***suma***</u>: si h y k pertenecen a $\mathbf{Z}_n$, entonces
  h + k es igual al resto de la división de h + k por n.

  Ejemplo: si n = 8 ; h = 5 y k = 7 ,entonces h + k = 4

- <u>**• producto**</u>: si h y k pertenecen a $\mathbf{Z}_n$, entonces h• k es igual al resto de la división de h• k por n.

  Ejemplo: si n = 8 ; h = 5 y k = 7 , entonces h • k = 3

Estructuras

- La terna **(Z_n, + , .)** es un anillo conmutativo con unidad. Se llama ***Anillo de los enteros módulo n***.
- **(Z_n , + , .)** es un dominio de integridad si y solo sí n es primo.

Ejemplos

Para n = 3: $\mathbf{Z_n}$ **= { 0 , 1 , 2 }** las tablas de operaciones son:

Para la suma

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Para el producto

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

El producto **No** posee divisores de cero

Ejemplos

Para n = 4 : $\mathbf{Z_n}$ **= { 0 , 1 , 2 , 3 }** las tablas de operaciones son:

Para la suma

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Para el producto

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

El producto **posee** divisores de cero

Ley de composición externa

Sean dos conjuntos A y Ω, este último llamado de operadores.

Una ley de composición externa definida en A con operadores de Ω

es toda función de $$A \times \Omega \rightarrow A$$

Ejemplos

- Si A es el conjunto de segmentos pertenecientes a un plano y N, el conjunto de números naturales, una ley de composición externa en A con operadores en N es el producto de números naturales por segmentos del plano.

- Si R(x) denota el conjunto de polinomios con coeficientes reales y R es el conjunto de operadores, entonces el producto usual de números reales por polinomios es una ley de composición externa en R(x) con escalares en R.

Bibliografía

Rojo, Armando; 1996; Álgebra I; Editorial El Ateneo; Buenos Aires.

Font , E. et al; 1999; Álgebra con Aplicaciones a las Ciencias Económicas; Ediciones Macchi; Buenos Aires.

Gentile, E.; 1976; Notas de Álgebra I; Eudeba; Buenos Aires.