R.1 Números reales

PREPARACIÓN PARA ESTE LIBRO *Antes de comenzar, lea "para el estudiante" al inicio de este libro.*

OBJETIVOS
1 Clasificar los números
2 Evaluar expresiones numéricas
3 Trabajar con las propiedades de los números reales

Conjuntos

Cuando se quiere manejar una colección de objetos similares pero diferentes como un todo, se usa la idea de **conjunto**. Por ejemplo, el conjunto de *dígitos* consiste en la colección de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Si se usa el símbolo D para denotar el conjunto de dígitos, entonces se escribe

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

En esta notación, los corchetes { } se usan para encerrar los objetos, o **elementos**, en el conjunto. Este método para denotar un conjunto se llama **método de enumeración**. Otra manera de denotar un conjunto es usar la **notación de construcción del conjunto**, donde el conjunto D de dígitos se escribe como

$$D = \{\quad x \quad | \quad x \text{ es un dígito}\}$$

Se lee "D es el conjunto de todas las x tales que x es un dígito".

EJEMPLO 1 Uso de la notación de construcción del conjunto y el método de enumeración

a) $E = \{x|x \text{ es un dígito par}\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

b) $O = \{x|x \text{ es un dígito impar}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ◀

Al enumerar los elementos de un conjunto, no se lista un elemento más de una vez porque los elementos de un conjunto son diferentes. Además, el orden en que se enumeran no es relevante. Por ejemplo, $\{2, 3\}$ y $\{3, 2\}$ representan el mismo conjunto.

Si todo elemento de un conjunto A también es un elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es **subconjunto** de B. Si dos conjuntos A y B tienen los mismos elementos, entonces se dice que A es **igual** a B. Por ejemplo, $\{1, 2, 3\}$ es subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ es igual a $\{2, 3, 1\}$.

Por último, si un conjunto no tiene elementos, se conoce como **conjunto vacío**, o **conjunto nulo**, y se denota por el símbolo Ø.

Clasificación de números

1 Es útil clasificar los diferentes tipos de números que manejamos como conjuntos. Los **números para contar**, o **números naturales**, son los números en el conjunto $\{1, 2, 3, 4,...\}$. (Los tres puntos, llamados **elipsis**, indican que el patrón continúa indefinidamente). Como su nombre lo indica, estos números con frecuencia se usan para contar cosas. Por ejemplo, hay 27 letras en el alfabeto; hay 100 centavos en un dólar. Los **números enteros no negativos** son los números en el conjunto $\{0, 1, 2, 3,...\}$, es decir, los números naturales junto con el 0.

Los **enteros** son el conjunto de números $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Estos números son útiles en muchas situaciones. Por ejemplo, si tiene \$10 en su cuenta de cheques y hace un cheque por \$15, se representa el saldo actual como $-\$5$.

Observe que el conjunto de números naturales es un subconjunto del conjunto números enteros no negativos. Cada vez que se expande un sistema de números, como de los números enteros no negativos a los enteros, se hace con el fin de poder manejar problemas nuevos y, en general, más complicados. Los enteros nos permiten resolver problemas que requieren números naturales positivos y negativos, como en ganancia/pérdida, altitud arriba/abajo del nivel del mar, temperatura arriba/abajo de 0°F, etcétera.

Pero los enteros no son suficientes para *todos* los problemas. Por ejemplo, no contestan la pregunta "¿qué parte de un dólar son 38 centavos?" Para responder esta pregunta debemos extender el sistema de números para incluir a los *números racionales*. Por ejemplo, $\frac{38}{100}$, contesta la pregunta anterior.

Un **número racional** es un número que se podría expresar como un cociente $\frac{a}{b}$ de dos enteros. El entero a se llama **numerador**, y el entero b, que no puede ser 0, se llama **denominador**. Los números racionales son los números en el conjunto $\{x | x = \frac{a}{b}$, donde a, b son enteros y $b \neq 0.\}$.

Ejemplos de números racionales son $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{0}{4}, -\frac{2}{3}$, y $\frac{100}{3}$. Como $\frac{a}{1} = a$ para cualquier entero a, resulta que el conjunto de enteros es un subconjunto de los números racionales.

En ocasiones los números racionales se representan como **decimales**. Por ejemplo, los números racionales $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{2}{3}$, y $\frac{7}{66}$ se pueden representar como decimales simplemente realizando la división que se indica:

$$\frac{3}{4} = 0.75 \qquad \frac{5}{2} = 2.5 \qquad -\frac{2}{3} = -0.666\ldots = -0.\overline{6} \qquad \frac{7}{66} = 0.1060606\ldots = 0.1\overline{06}$$

Observe que la representación decimal de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{2}$ termina o tiene fin. La representación decimal de $-\frac{3}{4}$, y $\frac{7}{66}$ no termina, pero se ve un patrón de repetición. Para $-\frac{2}{3}$, el 6 se repite indefinidamente, como lo indica la barra sobre el 6; para $\frac{7}{66}$, el bloque 06 se repite en forma indefinida, como lo indica la barra sobre 06. Es posible demostrar que cada número racional se puede representar por un decimal que termina o que no termina y tiene un bloque de dígitos que se repiten, y viceversa.

Por otro lado, algunos decimales no entran en una de estas dos categorías. Estos decimales representan a los **números irracionales**. Todo número irracional se puede representar por un decimal que no se repite y no termina. En otras palabras, los números irracionales no se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b}$, donde a, b son enteros y $b \neq 0$.

Figura 1

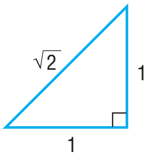
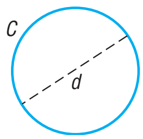


Figura 2

$\pi = \dfrac{C}{d}$



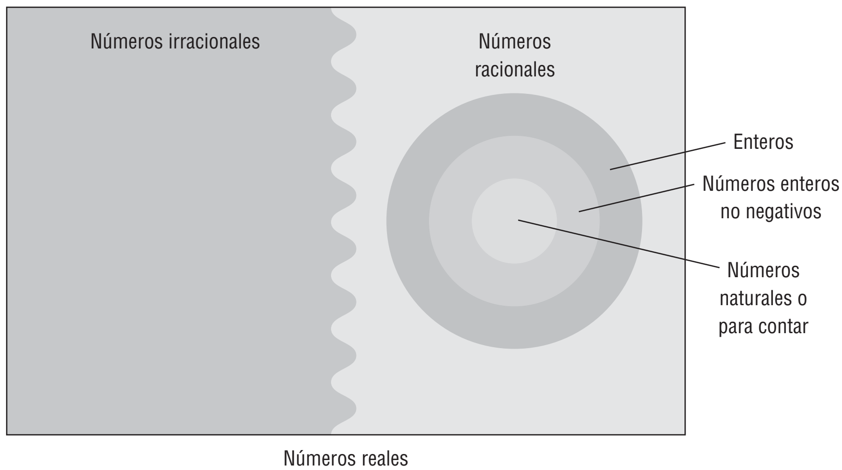
Los números irracionales ocurren de manera natural. Por ejemplo, considere el triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos tienen longitud 1. Vea la figura 1. La longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$, un número irracional.

Además, el número que es igual a la razón de la circunferencia C al diámetro d de cualquier círculo, denotado por π (la letra griega pi), es un número irracional. Vea la figura 2.

> Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de **números reales**.

La figura 3 muestra la relación de varios tipos de números.*

Figura 3



EJEMPLO 2 Clasificación de los números en un conjunto

Liste los números en el conjunto

$$\left\{-3, \frac{4}{3}, 0.12, \sqrt{2}, \pi, 2.151515\ldots \text{(donde el bloque 15 se repite)}, 10\right\}$$

que son:

a) números naturales b) enteros c) números racionales
d) números irracionales e) números reales

Solución

a) 10 es sólo un número natural.

b) -3 y 10 son enteros.

c) $-3, \dfrac{4}{3}, 0.12, 2.151515\ldots$, y 10 son números racionales.

d) $\sqrt{2}$ y π son números irracionales.

e) Todos los números de la lista son números reales. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

*El conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de números complejos. Se estudian los números complejos en la sección 1.3.

Aproximaciones

Todo decimal se puede representar por un número real (ya sea racional o irracional), y todo número real se puede representar por un decimal.

En la práctica, la representación decimal de un número irracional está dada como aproximación. Por ejemplo, si se usa el símbolo $\approx$ (leído "aproximadamente igual a"), se escribe

$$\sqrt{2} \approx 1.4142 \qquad \pi \approx 3.1416$$

Al aproximar decimales, se *redondea* o se *trunca* a un número especificado de lugares decimales.* El número de lugares establece la localización del *dígito final* en la aproximación decimal.

> **Truncado:** elimine todos los dígitos que siguen al dígito final en los decimales.
> **Redondeo:** identifique el dígito final en el decimal. Si el siguiente dígito es 5 o más, sume 1 al dígito final; si el siguiente dígito es 4 o menos, deje el dígito final como está. Después trunque lo que sigue al dígito final.

EJEMPLO 3 Aproximación de un decimal a dos lugares

Aproxime 20.98752 a dos lugares decimales

a) Truncando b) Redondeando

Solución Para 20.98752, el dígito final es 8, ya que está a dos lugares del punto decimal.

a) Para truncar, se eliminan todos los dígitos que siguen al dígito final 8. El truncado de 20.98752 a dos lugares decimales es 20.98.

b) El dígito que sigue al dígito final 8 es el dígito 7. Como 7 es mayor o igual que 5, se suma 1 al dígito final 8 y se trunca. La forma redondeada de 20.98752 a dos lugares decimales es 20.99. ◀

EJEMPLO 4 Aproximación de un decimal a dos y cuatro lugares

	Número	Redondeo a dos lugares decimales	Redondeo a cuatro lugares decimales	Truncado a dos lugares decimales	Truncado a cuatro lugares decimales
a)	3.14159	3.14	3.1416	3.14	3.1415
b)	0.056128	0.06	0.0561	0.05	0.0561
c)	893.46125	893.46	893.4613	893.46	893.4612 ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 15.

Calculadoras

Las calculadoras son máquinas finitas. En consecuencia, son incapaces de desplegar decimales que contienen un número grande de dígitos. Por ejem-

*En ocasiones se dice "correcto a un número dado de lugares decimales" en lugar de "truncado".

plo, algunas calculadoras despliegan sólo ocho dígitos. Cuando un número requiere más de ocho dígitos, la calculadora trunca o redondea. Para ver la manera en que su calculadora maneja los decimales, divida 2 entre 3. ¿Cuántos dígitos ve? ¿El último dígito es 6 o 7? Si es un 6, su calculadora trunca; si es 7, redondea.

Existen diferentes tipos de calculadoras. Una calculadora **aritmética** sólo puede sumar, restar, multiplicar y dividir números; por lo tanto, este tipo no es adecuado para este curso. Las calculadoras **científicas** tienen todas las capacidades de las calculadoras aritméticas y contienen **teclas de funciones** con etiquetas ln, log, sin (sen), cos, tan, x^y, inv, etcétera. Conforme avance en este libro descubrirá cómo usar muchas de las teclas de funciones. Las calculadoras **graficas** tienen todas las capacidades de las calculadoras científicas y tienen una pantalla donde despliegan gráficas.

Para quienes tienen acceso a una calculadora gráfica, se han incluido comentarios, ejemplos y ejercicios marcados con , para indicar que se requiere una calculadora gráfica. También se incluyó un apéndice que explica algunas características de una calculadora gráfica. Los comentarios, ejemplos y ejercicios con se podrían omitir sin pérdida de continuidad, si así lo desea.

Operaciones

En álgebra, se usan letras como x, y, a, b y c para representar números. Los símbolos usados en álgebra para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son $+$, $-$, $\cdot$ y $/$. Las palabras usadas para describir los resultados de estas operaciones son **suma**, **diferencia**, **producto** y **cociente**. La tabla 1 resume estas ideas.

Tabla 1

Operación	Símbolo	Palabras
Suma	$a + b$	Suma: a más b
Resta	$a - b$	Diferencia: a menos b
Multiplicación	$a \cdot b$, $(a) \cdot b$, $a \cdot (b)$, $(a) \cdot (b)$, ab, $(a)b$, $a(b)$, $(a)(b)$	Producto: a por b
División	a/b o $\dfrac{a}{b}$	Cociente: a entre b

En álgebra, casi siempre se evita usar el signo $\times$ de multiplicación y el signo $\div$ tan familiares en aritmética. Observe que cuando dos expresiones se colocan una al lado de la otra sin símbolo de operación, como en ab, o entre paréntesis, como en $(a)(b)$, se entiende que las expresiones, llamadas **factores**, se multiplican.

También es preferible no usar números mixtos en álgebra. Cuando se usan números mixtos, una suma está implícita; por ejemplo, $2\frac{3}{4}$ significa $2 + \frac{3}{4}$. En álgebra, el uso de números mixtos puede ser confuso porque la ausencia de un símbolo de operación entre dos términos en general se toma como multiplicación. Entonces, la expresión $2\frac{3}{4}$ más bien se escribe como 2.75 o como $\frac{11}{4}$.

El símbolo $=$, llamado **signo igual** y leído "igual a" o "es" se usa para expresar la idea de que el número o expresión a la izquierda del signo igual es equivalente al número o expresión a la derecha.

EJEMPLO 5 **Escritura de proposiciones usando símbolos**

a) La suma de 2 y 7 es igual a 9. En símbolos esta proposición se escribe como $2 + 7 = 9$.

b) El producto de 3 y 5 es 15. En símbolos esta proposición se escribe como $3 \cdot 5 = 15$. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **27.**

Orden de operaciones

2 Considere la expresión $2 + 3 \cdot 6$. No está claro si debemos sumar 2 y 3 para obtener 5 y luego multiplicar por 6 para obtener 30, o primero multiplicar 3 y 6 para obtener 18 y luego sumar 2 para obtener 20. A fin de evitar esta ambigüedad, se tiene el siguiente acuerdo.

En palabras
Primero se multiplica, luego se suma.

Siempre que dos operaciones de suma y multiplicación separen tres números la operación de multiplicación se realiza primero, seguida de la operación de suma.

Para $2 + 3 \cdot 6$, se tiene

$$2 + 3 \cdot 6 = 2 + 18 = 20$$

EJEMPLO 6 **Valor de una expresión**

Evalúe cada expresión.

a) $3 + 4 \cdot 5$ b) $8 \cdot 2 + 1$ c) $2 + 2 \cdot 2$

Solución a) $3 + \underbrace{4 \cdot 5}_{\text{multiplicar primero}} = 3 + 20 = 23$ b) $\underbrace{8 \cdot 2}_{\text{multiplicar primero}} + 1 = 16 + 1 = 17$

c) $2 + 2 \cdot 2 = 2 + 4 = 6$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **39.**

Para poder primero sumar 3 y 4 y luego multiplicar por 5, se usan paréntesis y se escribe $(3 + 4) \cdot 5$. La aparición de paréntesis en una expresión, siempre significa "¡realice primero las operaciones dentro del paréntesis!".

EJEMPLO 7 **Valor de una expresión**

a) $(5 + 3) \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$

b) $(4 + 5) \cdot (8 - 2) = 9 \cdot 6 = 54$ ◀

Cuando se dividen dos expresiones, como en

$$\frac{2 + 3}{4 + 8}$$

se entiende que la barra de división actúa como paréntesis; es decir,

$$\frac{2+3}{4+8} = \frac{(2+3)}{(4+8)}$$

La siguiente lista da las reglas para el orden de las operaciones.

Reglas para el orden de las operaciones

1. Comience con el paréntesis que está más adentro y trabaje hacia afuera. Recuerde que al dividir dos expresiones el numerador y el denominador se manejan como si estuvieran entre paréntesis.
2. Realice las multiplicaciones y divisiones, trabajando de derecha a izquierda.
3. Realice las sumas y restas, trabajando de izquierda a derecha.

EJEMPLO 8 Valor de una expresión

Evalúe cada expresión

a) $8 \cdot 2 + 3$ b) $5 \cdot (3 + 4) + 2$

c) $\dfrac{2+5}{2+4 \cdot 7}$ d) $2 + [4 + 2 \cdot (10 + 6)]$

Solución a) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplicar primero}}}{8 \cdot 2} + 3 = 16 + 3 = 19$

b) $5 \cdot (3 + 4) + 2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primero paréntesis}}}{5 \cdot 7} + 2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplicar antes de sumar}}}{35} + 2 = 37$

c) $\dfrac{2+5}{2+4 \cdot 7} = \dfrac{2+5}{2+28} = \dfrac{7}{30}$

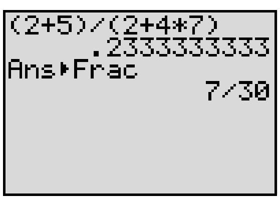
d) $2 + [4 + 2 \cdot (10 + 6)] = 2 + [4 + 2 \cdot (16)]$
$= 2 + [4 + 32] = 2 + [36] = 38$ ◀

Tenga cuidado si usa una calculadora. Para el ejemplo 8 c), necesita usar paréntesis. Vea la figura 4.* Si no lo hace, la calculadora realizará la expresión

$$2 + \frac{5}{2} + 4 \cdot 7 = 2 + 2.5 + 28 = 32.5$$

y dará una respuesta incorrecta.

Figura 4



TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 45 Y 53.

Propiedades de los números reales

3 Se usó el signo igual para indicar que una expresión es equivalente a otra. Ahora se enumeran cuatro propiedades importantes de la igualdad. En la lista a, b y c representan números reales.

*Observe que se convirtió el decimal en su forma fraccionaria. Consulte el manual de su calculadora para hacer esto.

1. La **propiedad reflexiva** establece que el número siempre es igual a sí mismo; esto es, $a = a$.
2. La **propiedad simétrica** establece que si $a = b$, entonces $b = a$.
3. La **propiedad transitiva** establece que si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
4. El **principio de sustitución** establece que si $a = b$, entonces se puede sustituir b por a en cualquier expresión que contenga a a.

Ahora se consideran algunas propiedades de los números reales. Comenzamos por un ejemplo.

EJEMPLO 9 Propiedades conmutativas

a) $3 + 5 = 8$
$5 + 3 = 8$
$3 + 5 = 5 + 3$

b) $2 \cdot 3 = 6$
$3 \cdot 2 = 6$
$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ ◄

Este ejemplo ilustra la **propiedad conmutativa** de los números reales, que establece que el orden en que se realiza la suma o la multiplicación no afecta el resultado final.

Propiedades conmutativas

$$a + b = b + a \qquad \textbf{(1a)}$$
$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \textbf{(1b)}$$

Aquí, y en las propiedades que siguen y en las páginas 10 a 13, a, b y c representan números.

EJEMPLO 10 Propiedades asociativas

(a) $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$
$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$
$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

b) $2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$
$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$
$2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$ ◄

La manera en que se suman o multiplican tres números reales no afectará el resultado final. Las expresiones como $2 + 3 + 4$ y $3 \cdot 4 \cdot 5$ no presentan ambigüedad, aun cuando la suma y la multiplicación se realizan en un par de números a la vez. Esta propiedad se llama **propiedad asociativa**.

Propiedades asociativas

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \qquad \textbf{(2a)}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c \qquad \textbf{(2b)}$$

La siguiente propiedad es quizá la más importante.

Propiedad distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \textbf{(3a)}$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad \textbf{(3b)}$$

La **propiedad distributiva** se utiliza de dos maneras diferentes.

EJEMPLO 11 Propiedad distributiva

a) $2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = 2x + 6$ Se usa para eliminar paréntesis.

b) $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$ Se usa para combinar dos expresiones.

c) $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3) = (x^2 + 3x) + (2x + 6)$
$= x^2 + (3x + 2x) + 6 = x^2 + 5x + 6$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 71.

Los números reales 0 y 1 tienen propiedades únicas.

EJEMPLO 12 Propiedades de identidad

a) $4 + 0 = 0 + 4 = 4$ b) $3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$ ◀

Las propiedades de 0 y 1 ilustradas en el ejemplo 12 se llaman **propiedades de identidad**.

Propiedades de identidad

$$0 + a = a + 0 = a \qquad \textbf{(4a)}$$
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \textbf{(4b)}$$

El 0 recibe el nombre de **identidad aditiva** o **neutro aditivo** y el 1, **identidad multiplicativa** o **neutro multiplicativo**.

Para cada número real a, existe un número real $-a$, llamado **inverso aditivo** de a, que tiene la siguiente propiedad:

Propiedad del inverso aditivo

$$a + (-a) = -a + a = 0 \qquad \textbf{(5a)}$$

EJEMPLO 13 Para encontrar el inverso aditivo

a) El inverso aditivo de 6 es -6, porque $6 + (-6) = 0$.

b) El inverso aditivo de -8 es $-(-8) = 8$, porque $-8 + 8 = 0$. ◀

El inverso aditivo de a, es decir, $-a$, con frecuencia se llama el *negativo* de a o el *opuesto* de a. Quizá el uso de estos términos resulte peligroso, porque sugieren que el inverso aditivo es un número negativo, lo cual no siempre es cierto. Por ejemplo, el inverso aditivo de -3, o $-(-3)$, es igual a 3, un número positivo.

Para cada número real a *diferente de cero*, existe un número real $\frac{1}{a}$, llamado **inverso multiplicativo** de a, que tiene la siguiente propiedad.

Propiedad del inverso multiplicativo

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \qquad \text{si } a \neq 0 \tag{5b}$$

El inverso multiplicativo $\frac{1}{a}$ de un número real diferente de cero también se conoce como el **recíproco** de a.

EJEMPLO 14 Para encontrar el recíproco

a) El recíproco de 6 es $\frac{1}{6}$, porque $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

b) El recíproco de -3 es $\frac{1}{-3}$, porque $-3 \cdot \frac{1}{-3} = 1$.

c) El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$, porque $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$. ◀

Con estas propiedades para sumar y multiplicar números reales, ahora se definen las operaciones de resta y división como sigue:

La **diferencia** $a - b$ también se lee "a menos b" y se define como

$$a - b = a + (-b) \tag{6}$$

Para restar b de a, se suma el opuesto de b a a.

Si b es un número real diferente de cero, el **cociente** $\frac{a}{b}$, se lee "a entre b" o "la razón de a a b" y se define como

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \qquad \text{si } b \neq 0 \tag{7}$$

EJEMPLO 15 Trabajo con diferencias y cocientes

a) $8 - 5 = 8 + (-5) = 3$ b) $4 - 9 = 4 + (-9) = -5$ c) $\frac{5}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$

◀

En palabras
El resultado de multiplicar por cero es cero

Para cualquier número a, el producto de a veces 0 es siempre 0; es decir,

Multiplicación por cero

$$a \cdot 0 = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Para un número diferente de cero a,

Propiedades de la división

$$\frac{0}{a} = 0 \qquad \frac{a}{a} = 1 \quad \text{si } a \neq 0 \qquad \textbf{(9)}$$

NOTA: La división entre 0 *no está definida*. Una razón es evitar la siguiente dificultad: $\frac{2}{0} = x$ significa encontrar x tal que $0 \cdot x = 2$. Pero $0 \cdot x$ es 0 para toda x, de manera que *no* existe un número único x tal que $\frac{2}{0} = x$.

Reglas de signos

$$a(-b) = -(ab) \qquad (-a)b = -(ab) \qquad (-a)(-b) = ab$$
$$-(-a) = a \qquad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad \textbf{(10)}$$

EJEMPLO 16 **Aplicación de las reglas de signos**

a) $2(-3) = -(2 \cdot 3) = -6$ b) $(-3)(-5) = 3 \cdot 5 = 15$

c) $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$ d) $\frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$ e) $\frac{x}{-2} = \frac{1}{-2} \cdot x = -\frac{1}{2}x$ ◀

Si c es un número diferente de cero, entonces

Propiedades de cancelación

$$ac = bc \quad \text{implica} \quad a = b \quad \text{si } c \neq 0$$
$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \text{si } b \neq 0, c \neq 0 \qquad \textbf{(11)}$$

EJEMPLO 17 **Uso de las propiedades de cancelación**

a) Si $2x = 6$, entonces

$$2x = 6$$
$$2x = 2 \cdot 3 \qquad \text{Factorizar 6.}$$
$$x = 3 \qquad \text{Cancelar los números 2.}$$

b) $\dfrac{18}{12} = \dfrac{3 \cdot \cancel{6}}{2 \cdot \cancel{6}} = \dfrac{3}{2}$

Cancelar los números 6. ◀

NOTA: Se sigue la práctica común de usar las diagonales cruzadas para indicar las cancelaciones.

Propiedad del producto cero

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0, \text{ o } b = 0, \text{ o ambos.} \qquad \textbf{(12)}$$

EJEMPLO 18 Uso de la propiedad del producto cero

Si $2x = 0$, entonces $2 = 0$ o $x = 0$. Como $2 \neq 0$, se sigue que $x = 0$. ◀

Aritmética del cociente

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(13)}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{si } b \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(14)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \text{si } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \qquad \textbf{(15)}$$

EJEMPLO 19 Suma, resta, multiplicación y división de cocientes

a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \dfrac{3 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \dfrac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \dfrac{4 + 15}{6} = \dfrac{19}{6}$

Por la ecuación (13)

b) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{5} + \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{-2}{3}$

Por la ecuación (6) Por la ecuación (10)

$$= \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot (-2)}{5 \cdot 3} = \frac{9 + (-10)}{15} = \frac{-1}{15} = -\frac{1}{15}$$

Por la ecuación (13)

c) $\dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{15}{4} = \dfrac{8 \cdot 15}{3 \cdot 4} = \dfrac{2 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 1} = \dfrac{2 \cdot 5}{1} = 10$

Por la ecuación (14) Por la ecuación (11)

NOTA: Inclinar las marcas de cancelación en diferentes direcciones para diferentes factores, como se muestra, es una buena práctica, ya que ayudará a verificar si hay errores.

d) $$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{9}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{9}{7} = \frac{3\cdot 9}{5\cdot 7} = \frac{27}{35}$$

Por la ecuación (14)

Por la ecuación (15)

NOTA: Al escribir los cocientes, debe seguirse la convención y escribirlos en los términos más pequeños; es decir, se escriben de forma que se hayan eliminado los factores comunes del numerador y denominador usando la ecuación (11) de las propiedades de cancelación. Como ejemplo,

$$\frac{90}{24} = \frac{15\cdot \cancel{6}}{4\cdot \cancel{6}} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{24x^2}{18x} = \frac{4\cdot \cancel{6}\cdot x\cdot \cancel{x}}{3\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{x}} = \frac{4x}{3} \qquad x \neq 0$$

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **55, 59 Y 69.**

Algunas veces es más sencillo sumar dos fracciones usando el *mínimo común múltiplo* (MCM). El MCM de dos números es el número más pequeño que es múltiplo de ambos.

EJEMPLO 20 Mínimo común múltiplo de dos números

Encuentre el mínimo común múltiplo de 15 y 12

Solución Para encontrar el MCM de 15 y 12, se observan los múltiplos de 15 y 12.

15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, . . .

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, . . .

Los múltiplos *comunes* están en tipo color azul. El *mínimo* común múltiplo es 60.

EJEMPLO 21 Uso del mínimo común múltiplo para sumar dos fracciones

Encuentre $\frac{8}{15} + \frac{5}{12}$

Solución Se usa el MCM de los denominadores de las fracciones y se reescribe cada una usando el MCM como denominador. El MCM de los denominadores (12 y 15) es 60. Se reescribe cada fracción usando 60 como denominador.

$$\frac{8}{15} + \frac{5}{12} = \frac{8}{15}\cdot\frac{4}{4} + \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{5} = \frac{32}{60} + \frac{25}{60} = \frac{32+25}{60} = \frac{57}{60}$$

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA **63.**

Aspecto histórico

El sistema de números reales tiene una historia que se remonta al menos a la antigua Babilonia (1800 a.C.). Es asombroso cuántas de las actitudes de la antigua Babilonia se parecen a las nuestras. Como se estableció la dificultad fundamental con los números irracionales es que no se pueden escribir como cocientes o enteros, o de manera equivalente, como decimales que se repiten o terminan. En Babilonia escribían los números en un sistema basado en 60, de la misma manera que escribimos los nuestros basados en 10. Escribirían tantos lugares decimales para π como lo demandara la exactitud del problema, igual que ahora se usa

$$\pi \approx 3\frac{1}{7} \quad \text{o} \quad \pi \approx 3.1416 \quad \text{o} \quad \pi \approx 3.14159$$

$$\text{o} \quad \pi \approx 3.14159265358979$$

dependiendo de cuánta exactitud se necesite.

Las cosas eran muy distintas para los griegos, cuyo sistema numérico permitía sólo números racionales. Cuando se descubrió que $\sqrt{2}$ no era un número racional, esto se vio como una falla fundamental en el concepto de número. El asunto era tan serio que se dice que la Hermandad Pitagórica (una sociedad matemática de la época) ahogó a uno de sus miembros por revelar tan terrible secreto. Los matemáticos griegos después se alejaron del concepto de número expresando hechos acerca de los números enteros en términos de segmentos.

Sin embargo, en astronomía, los métodos de Babilonia, incluyendo su sistema numérico, continuaron utilizándose. Simon Stevin (1548-1620), tal vez usando el sistema de Babilonia como modelo inventó el sistema decimal, en 1585, completo con reglas de cálculo. [Otros, como al-Kashi de Samarkanda (1429) habían hecho algunos avances en la misma dirección]. El sistema decimal oculta de manera tan efectiva las dificultades, que la necesidad de mayor precisión lógica comenzó a sentirse hasta principios de 1800. Alrededor de 1880, Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916) proporcionaron definiciones precisas de los números reales. La definición de Cantor, aunque más abstracta y precisa, tiene sus raíces en el sistema numérico decimal (y por ende en el de Babilonia).

Los conjuntos y la teoría de conjuntos fueron el beneficio indirecto de la investigación que llegó a aclarar los fundamentos de los sistemas de números reales. La teoría de conjuntos se ha convertido en una disciplina amplia en sí misma y muchos matemáticos la ven como el fundamento de las matemáticas modernas. Los descubrimientos de Cantor de que los conjuntos infinitos también se pueden contar y tienen tamaños diferentes se encuentran entre los resultados más sorprendentes de las matemáticas modernas.

Problemas históricos

El sistema numérico de Babilonia se basaba en 60. Entonces 2,30 significa $2 + \frac{30}{60} = 2.5$ y 4,25,14 significa

$$4 + \frac{25}{60} + \frac{14}{60^2} = 4 + \frac{1514}{3600} = 4.42055555\ldots$$

1. ¿Cuáles son los siguientes números en la notación de Babilonia?
   a) $1\frac{1}{3}$ b) $2\frac{5}{6}$
2. ¿Cuáles son los siguientes números de Babilonia cuando se escriben como fracciones y como decimales?
   a) 2,20 b) 4,52,30 c) 3,8,29,44

R.1 Evalúe su comprensión

Conceptos y vocabulario

1. Los números en el conjunto $\{x|x = \frac{a}{b}$, donde a, b son enteros y $b \neq 0\}$, se llaman números _________.

2. El valor de la expresión $4 + 5 \cdot 6 - 3$ es _________.

3. El hecho de que $2x + 3x = (2 + 3)x$ es una consecuencia de la propiedad _________.

4. "El producto de 5 y $x + 3$ es igual a 6" se escribe como _________.

5. *Falso o verdadero:* los números racionales tienen decimales que o bien terminan o son sin fin con un bloque de dígitos que se repite.

6. *Falso o verdadero:* la propiedad de producto cero establece que el producto de cualquier número y cero es igual a cero.

7. *Falso o verdadero:* el mínimo común múltiplo de 12 y 18 es 6.

8. *Falso o verdadero:* ningún número puede ser real y racional.

Ejercicios

En los problemas 9-14, enumere los números en cada conjunto que son a) números naturales, b) enteros, c) números racionales, d) números irracionales, e) números reales.

9. $A = \left\{-6, \frac{1}{2}, -1.333\ldots \text{(los números 3 se repiten)}, \pi, 2, 5\right\}$

10. $B = \left\{-\frac{5}{3}, 2.060606\ldots \text{(el bloque 06 se repite)}, 1.25, 0, 1, \sqrt{5}\right\}$

11. $C = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$

12. $D = \{-1, -1.1, -1.2, -1.3\}$

13. $E = \left\{\sqrt{2}, \pi, \sqrt{2} + 1, \pi + \frac{1}{2}\right\}$

14. $F = \left\{-\sqrt{2}, \pi + \sqrt{2}, \frac{1}{2} + 10.3\right\}$

En los problemas 15-26, aproxime cada número a) redondeado y b) truncado a tres lugares decimales.

15. 18.9526 **16.** 25.86134 **17.** 28.65319 **18.** 99.05249 **19.** 0.06291 **20.** 0.05388

21. 9.9985 **22.** 1.0006 **23.** $\frac{3}{7}$ **24.** $\frac{5}{9}$ **25.** $\frac{521}{15}$ **26.** $\frac{81}{5}$

En los problemas 27-36, escriba cada proposición usando símbolos.

27. La suma de 3 y 2 es igual a 5.

28. El producto de 2 y 5 es igual a 10.

29. La suma de x y 2 es el producto de 3 y 4.

30. La suma de 3 y y es la suma de 2 y 2.

31. El producto de 3 y y es la suma de 1 y 2.

32. El producto de 2 y x es el producto de 4 y 6.

33. La diferencia de x menos 2 es igual a 6.

34. La diferencia de 2 menos y es igual a 6.

35. El cociente de x entre 2 es 6.

36. El cociente de 2 entre x es 6.

En los problemas 37-70, evalúe cada expresión.

37. $9 - 4 + 2$ **38.** $6 - 4 + 3$ **39.** $-6 + 4 \cdot 3$ **40.** $8 - 4 \cdot 2$

41. $4 + 5 - 8$ **42.** $8 - 3 - 4$ **43.** $4 + \frac{1}{3}$ **44.** $2 - \frac{1}{2}$

45. $6 - [3 \cdot 5 + 2 \cdot (3 - 2)]$ **46.** $2 \cdot [8 - 3(4 + 2)] - 3$ **47.** $2 \cdot (3 - 5) + 8 \cdot 2 - 1$ **48.** $1 - (4 \cdot 3 - 2 + 2)$

49. $10 - [6 - 2 \cdot 2 + (8 - 3)] \cdot 2$ **50.** $2 - 5 \cdot 4 - [6 \cdot (3 - 4)]$

51. $(5 - 3)\frac{1}{2}$ **52.** $(5 + 4)\frac{1}{3}$ **53.** $\frac{4 + 8}{5 - 3}$ **54.** $\frac{2 - 4}{5 - 3}$

55. $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{21}$ **56.** $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10}$ **57.** $\frac{6}{25} \cdot \frac{10}{27}$ **58.** $\frac{21}{25} \cdot \frac{100}{3}$

59. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ **60.** $\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$ **61.** $\frac{5}{6} + \frac{9}{5}$ **62.** $\frac{8}{9} + \frac{15}{2}$

63. $\frac{5}{18} + \frac{1}{12}$ **64.** $\frac{2}{15} + \frac{8}{9}$ **65.** $\frac{1}{30} - \frac{7}{18}$ **66.** $\frac{3}{14} - \frac{2}{21}$

67. $\frac{3}{20} - \frac{2}{15}$ **68.** $\frac{6}{35} - \frac{3}{14}$ **69.** $\dfrac{\frac{5}{18}}{\frac{11}{27}}$ **70.** $\dfrac{\frac{5}{21}}{\frac{2}{35}}$

En los problemas 71-82, use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

71. $6(x + 4)$ **72.** $4(2x - 1)$ **73.** $x(x - 4)$ **74.** $4x(x + 3)$

75. $(x + 2)(x + 4)$ **76.** $(x + 5)(x + 1)$ **77.** $(x - 2)(x + 1)$ **78.** $(x - 4)(x + 1)$

79. $(x - 8)(x - 2)$ **80.** $(x - 4)(x - 2)$ **81.** $(x + 2)(x - 2)$ **82.** $(x - 3)(x + 3)$

---

83. Explique a un amigo cómo se usa la propiedad distributiva para justificar el hecho de que $2x + 3x = 5x$.

84. Explique a un amigo por qué $2 + 3 \cdot 4 = 14$, mientras que $(2 + 3) \cdot 4 = 20$.

85. Explique por qué $2(3 \cdot 4)$ no es igual a $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4)$.

86. Explique por qué $\frac{4 + 3}{2 + 5}$ no es igual a $\frac{4}{2} + \frac{3}{5}$.

87. ¿Es conmutativa la resta? Apoye su conclusión con un ejemplo.

88. ¿Es asociativa la resta? Apoye su conclusión con un ejemplo.

89. ¿Es conmutativa la división? Apoye su conclusión con un ejemplo.

90. ¿Es asociativa la división? Apoye su conclusión con un ejemplo.

91. Si $2 = x$, por qué $x = 2$?

92. Si $x = 5$, ¿por qué $x^2 + x = 30$?

93. ¿Existen números reales que sean tanto racionales como irracionales? ¿Existen números reales que no son uno ni otro? Explique su razonamiento.

94. Explique por qué la suma de un número racional y un número irracional debe ser irracional.

95. ¿A qué número racional es igual el decimal repetitivo $0.9999\ldots$?

R.2 Repaso de álgebra

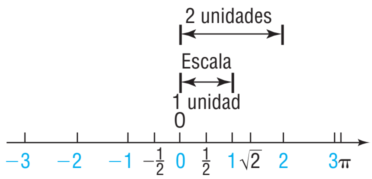
OBJETIVOS
1. Graficar desigualdades
2. Encontrar la distancia en la recta de números reales
3. Evaluar expresiones algebraicas
4. Determinar el dominio de una variable
5. Usar las leyes de exponentes
6. Evaluar raíces cuadradas
7. Usar calculadora para evaluar exponentes
8. Usar notación científica

La recta de números reales

Los números reales se representan por puntos en una recta llamada la **recta de números reales**. Existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos en una recta. Esto es, todo número real corresponde a un punto en la recta, y cada punto en la recta tiene un número real único asociado a él.

Elija un punto en la recta en algún lugar cerca del centro y etiquételo con O. Este punto, llamado **origen**, corresponde al número real 0. Vea la figura 5. El punto que está 1 unidad a la derecha de O corresponde al número 1. La distancia entre 0 y 1 determina la **escala** de la recta numérica. Por ejemplo, el punto asociado con el número 2 está al doble de distancia de O que 1. Observe que la flecha al final de la recta indica la dirección en la que los números aumentan. La figura 5 muestra también los puntos asociados con los números irracionales $\sqrt{2}$ y π. Los puntos a la izquierda del origen corresponden a los números reales -1, -2, etcétera.

Figura 5
Recta de números reales

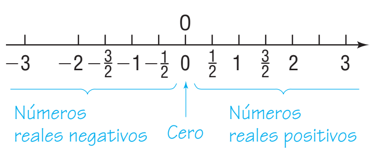


El número real asociado con el punto P se llama **coordenada** de P, y la recta cuyos puntos tiene coordenadas asignadas se llama **recta de números reales**.

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 11.

La recta de números reales consiste en tres clases de números reales, como se muestra en la figura 6.

Figura 6



1. Los **números reales negativos** son las coordenadas de los puntos a la izquierda del origen O.
2. El número real **cero** es la coordenada del origen O.
3. Los **números reales positivos** son las coordenadas de los puntos a la derecha del origen O.

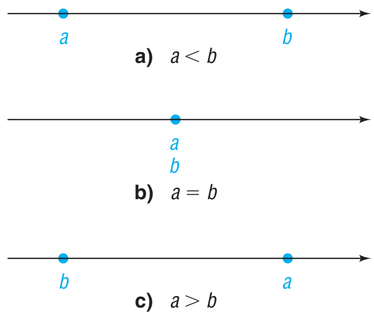
Los números negativos y positivos tienen las siguientes propiedades de multiplicación:

Propiedades de la multiplicación de números positivos y negativos

1. El producto de dos números positivos es un número positivo.
2. El producto de dos números negativos es un número positivo.
3. El producto de un número positivo y un número negativo es un número negativo.

Desigualdades

Figura 7



Una propiedad importante de la recta de números reales se obtiene del hecho de que dados dos números (puntos) a y b, o bien a está a la izquierda de b, a está en el mismo lugar que b, o a está a la derecha de b. Vea la figura 7.

Si a está a la izquierda de b, se dice que "a es menor que b" y se escribe $a < b$. Si a está a la derecha de b, se dice que "a es mayor que b" y se escribe $a > b$. Si a está en el mismo lugar que b, entonces $a = b$. Si a es menor o igual a b, se escribe $a \leq b$. De la misma manera, $a \geq b$ significa a es mayor o igual a b. En conjunto, $<, >, \leq$ y $\geq$ se llaman **símbolos de desigualdad.**

Observe que $a < b$ y $b > a$ significa lo mismo. No importa si se escribe $2 < 3$ o $3 > 2$.

Todavía más, si $a < b$ o si $b > a$, entonces la diferencia $b - a$ es positiva. ¿Sabe por qué?

EJEMPLO 1 Uso de símbolos de desigualdad

a) $3 < 7$	b) $-8 > -16$	c) $-6 < 0$
d) $-8 < -4$	e) $4 > -1$	f) $8 > 0$

En el ejemplo 1a), se concluye que $3 < 7$ ya sea porque 3 está a la izquierda de 7 en la recta real o porque la diferencia $7 - 3 = 4$ es un número real positivo.

De manera similar, se concluye en el ejemplo 1b) que $-8 > -16$ ya sea porque -8 está a la derecha de -16 en la recta real o porque la diferencia, $-8 - (-16) = -8 + 16 = 8$, es un número real positivo.

Vea de nuevo el ejemplo 1. Observe que el símbolo de desigualdad siempre apunta en la dirección del número más pequeño.

Las proposiciones de la forma $a < b$ o $b > a$ se llaman **desigualdades estrictas**, mientras que las proposiciones de la forma $a \leq b$ o $b \geq a$ se llaman **desigualdades no estrictas**. Una **desigualdad** es una proposición en la que dos expresiones se relacionan por un símbolo de desigualdad. Las expresiones se conocen como los **lados** de la desigualdad.

Con base en estos conceptos, se concluye que

$a > 0$ es equivalente a decir que a es positivo
$a < 0$ es equivalente a decir que a es negativo

Algunas veces $a > 0$ se lee diciendo que "a es positivo". Si $a \geq 0$, entonces $a > 0$ o $a = 0$, y se lee como "a es no negativo".

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS **15** Y **25**.

1 Más adelante se encontrará que es útil graficar las desigualdades en la recta de números reales.

EJEMPLO 2 Gráficas de desigualdades

a) En la recta real, grafique todos los números x para los que $x > 4$.
b) En la recta real, grafique todos los números x para los que $x \leq 5$.

Figura 8

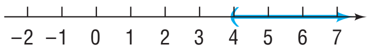
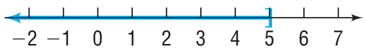


Figura 9



Solución a) Vea la figura 8. Observe que se usó paréntesis izquierdo para indicar que el número 4 *no* es parte de la gráfica.

b) Vea la figura 9. Observe que se usó un corchete derecho para indicar que el número 5 *es* parte de la gráfica. ◀

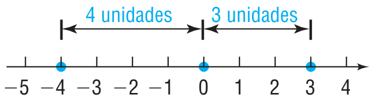
TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 31.

Valor absoluto

El *valor absoluto* de un número a es la distancia de 0 a a en la recta real. Por ejemplo, -4 está a 4 unidades de 0, y 3 está a 3 unidades de 0. Vea la figura 10. Entonces, el valor absoluto de -4 es 4 y el valor absoluto de 3 es 3.

A continuación se da una definición más formal de valor absoluto.

Figura 10



El **valor absoluto** de un número real a, denotado por el símbolos $|a|$, se define por las reglas.

$$\boxed{|a| = a \quad \text{si } a \geq 0 \qquad \text{y} \qquad |a| = -a \quad \text{si } a < 0}$$

Por ejemplo, como $-4 < 0$, debe usarse la segunda regla para obtener $|-4| = -(-4) = 4$.

EJEMPLO 3 **Cálculo del valor absoluto**

a) $|8| = 8$ b) $|0| = 0$ c) $|-15| = -(-15) = 15$ ◀

2 Vea de nuevo la figura 10. La distancia de -4 a 3 es 7 unidades. Esta distancia es la diferencia $3 - (-4)$, obtenida restando la coordenada más pequeña de la más grande. Sin embargo, como $|3 - (-4)| = |7| = 7$ y $|-4 - 3| = |-7| = 7$, podemos usar el valor absoluto para calcular la distancia entre dos puntos sin preocuparnos por cuál es el menor.

Si P y Q son dos puntos en una recta de números reales con coordenadas a y b, respectivamente, la **distancia entre P y Q**, denotada por $d(P, Q)$, es

$$\boxed{d(P, Q) = |b - a|}$$

Como $|b - a| = |a - b|$, se deduce que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

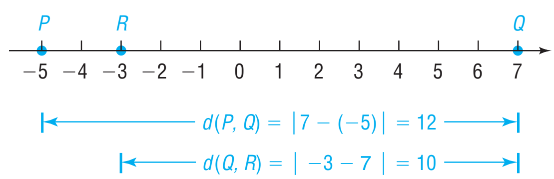
EJEMPLO 4 **Distancia en una recta numérica**

Sean P, Q y R puntos en una recta de números reales con coordenadas respectivas -5, 7 y -3. Encuentre la distancia

a) entre P y Q b) entre Q y R

Solución Vea la figura 11.

Figura 11



a) $d(P, Q) = |7 - (-5)| = |12| = 12$
b) $d(Q, R) = |-3 - 7| = |-10| = 10$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 37.

Constantes y variables

Como se dijo, en álgebra se usan letras como x, y, a, b y c para representar números. Si la letra se usa para representar *cualquier* número de un conjunto de números dado, se llama **variable**. Una **constante** es ya sea un número fijo, como 5 o $\sqrt{3}$, o una letra que representa un número fijo (quizá no especificado).

Las constantes y variables se combinan usando las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para formar *expresiones algebraicas*. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas.

$$x + 3 \qquad \frac{3}{1 - t} \qquad 7x - 2y$$

3 Para evaluar una expresión algebraica, se sustituye el valor numérico de cada variable.

EJEMPLO 5 Evaluación de una expresión algebraica

Evalúe cada expresión si $x = 3$ y $y = -1$.

a) $x + 3y$ b) $5xy$ c) $\dfrac{3y}{2 - 2x}$ d) $|-4x + y|$

Solución a) Se sustituye x por 3 y y por -1 en la expresión $x + 3y$.

$$x + 3y \underset{\uparrow \atop x = 3,\, y = -1}{=} 3 + 3(-1) = 3 + (-3) = 0$$

b) Si $x = 3$ y $y = -1$, entonces

$$5xy = 5(3)(-1) = -15$$

c) Si $x = 3$ y $y = -1$, entonces

$$\frac{3y}{2 - 2x} = \frac{3(-1)}{2 - 2(3)} = \frac{-3}{2 - 6} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

d) Si $x = 3$ y $y = -1$, entonces

$$|-4x + y| = |-4(3) + (-1)| = |-12 + (-1)| = |-13| = 13$$ ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 39 Y 47.

4 Al trabajar con expresiones o fórmulas que incluyen variables, posiblemente sólo se permita que las variables tomen valores de cierto conjunto de números. Por ejemplo, en la fórmula para el área A de un círculo de radio r, $A = \pi r^2$, la variable r está restringida necesariamente a números reales positivos. En la expresión $\frac{1}{x}$, la variable x no puede tomar el valor 0, ya que la división entre 0 no está definida.

El conjunto de valores que toma una variable se llama **dominio de la variable**.

EJEMPLO 6 **Dominio de una variable**

El dominio de la variable x en la expresión

$$\frac{5}{x-2}$$

es $\{x|x \neq 2\}$, ya que si $x = 2$, el denominador es 0, que no está definido. ◀

EJEMPLO 7 **Circunferencia**

En la fórmula de la circunferencia C de un círculo de radio r,

$$C = 2\pi r$$

el dominio de la variable r, que representa el radio del círculo, es el conjunto de números reales positivos. El dominio de la variable C que representa la circunferencia del círculo, también es el conjunto de números reales positivos. ◀

Al describir el dominio de una variable, se utiliza ya sea la notación de conjuntos o de palabras, lo que sea más conveniente.

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 57.

Exponentes

5 Los exponentes enteros proporcionan un sistema de escritura rápida o taquigrafía para representar la multiplicación repetida de un número real. Por ejemplo,

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Además, muchas fórmulas tienen exponentes. Por ejemplo,

- La fórmula para el valor de los caballos de fuerza H de un motor es

$$H = \frac{D^2 N}{2.5}$$

donde D es el diámetro del cilindro y N es el número de cilindros.

- Una fórmula para la resistencia R de la sangre que fluye en los vasos sanguíneos es

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es el radio y C es una constante positiva.

Si a es un número real y n es un entero positivo, entonces el símbolo $\boldsymbol{a^n}$ representa el producto de n factores de a. Es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{factores } n} \qquad \textbf{(1)}$$

Aquí se entiende que $a^1 = a$.

Entonces $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, etcétera. En la expresión a^n, a se llama la **base** y n se llama el **exponente**, o **potencia**. a^n se lee como "a elevado a la potencia n" o como "a a la n". Es usual leer a^2 como "a cuadrada" y a^3 como "a cúbica".

Al trabajar con exponentes, la operación de *elevar a una potencia* se realiza antes de cualquier otra operación. Como ejemplos,

$$4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 \qquad 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$-2^4 = -16 \qquad 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4 = 5 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 45 + 8 = 53$$

Los paréntesis se usan para indicar las operaciones que deben realizarse antes. Por ejemplo,

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16 \qquad (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$

Si $a \neq 0$, se define

$$\boxed{a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0}$$

Si $a \neq 0$ y si n es un entero positivo, entonces se define

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{si } a \neq 0}$$

Siempre que encuentre un exponente negativo, piense en "recíproco".

EJEMPLO 8 Evaluación de expresiones con exponentes negativos

a) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ b) $x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$ c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{25}} = 25$ ◀

TRABAJE AHORA EN LOS PROBLEMAS 75 Y 95.

Las siguientes propiedades, llamadas **leyes de exponentes**, se demuestran usando las definiciones anteriores. En la lista a y b son números reales y m y n son enteros.

Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad \text{si } a \neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{si } b \neq 0$$

EJEMPLO 9 Uso de las leyes de exponentes

a) $x^{-3} \cdot x^5 = x^{-3+5} = x^2, \quad x \neq 0$

b) $(x^{-3})^2 = x^{-3 \cdot 2} = x^{-6} = \dfrac{1}{x^6}, \quad x \neq 0$

c) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$ e) $\dfrac{x^{-2}}{x^{-5}} = x^{-2-(-5)} = x^3, x \neq 0$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 77.

EJEMPLO 10 **Uso de las leyes de exponentes**

Escriba cada expresión de manera que todos los exponentes sean positivos.

a) $\dfrac{x^5 y^{-2}}{x^3 y}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$ b) $\left(\dfrac{x^{-3}}{3y^{-1}}\right)^{-2}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$

Solución a) $\dfrac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} = \dfrac{x^5}{x^3} \cdot \dfrac{y^{-2}}{y} = x^{5-3} \cdot y^{-2-1} = x^2 y^{-3} = x^2 \cdot \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{x^2}{y^3}$

b) $\left(\dfrac{x^{-3}}{3y^{-1}}\right)^{-2} = \dfrac{(x^{-3})^{-2}}{(3y^{-1})^{-2}} = \dfrac{x^6}{3^{-2}(y^{-1})^{-2}} = \dfrac{x^6}{\frac{1}{9}y^2} = \dfrac{9x^6}{y^2}$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 87.

Raíces cuadradas

6 Un número real está elevado al cuadrado cuando está elevado a la potencia 2. El inverso de elevar al cuadrado es encontrar la **raíz cuadrada**. Por ejemplo, $6^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36$, los números 6 y -6 son las raíces cuadradas de 36.

El símbolo $\sqrt{}$, llamando **signo de radical**, se usa para denotar la raíz cuadrada no negativa o **principal**. Por ejemplo, $\sqrt{36} = 6$.

En general, si a es un número real no negativo, el número real no negativo b, tal que $b^2 = a$ es la **raíz cuadrada principal** de a, se denota por $b = \sqrt{a}$.

Los siguientes comentarios son importantes:

1. Los números negativos no tienen raíces cuadradas (en el sistema de números reales), porque el cuadrado de cualquier número real es *no negativo*. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no es un número real, porque no existe un número real cuyo cuadrado sea -4.
2. La raíz cuadrada principal de 0 es 0, ya que $0^2 = 0$. Esto es $\sqrt{0} = 0$.
3. La raíz cuadrada principal de un número positivo es positiva.
4. Si $c \geq 0$, entonces $(\sqrt{c})^2 = c$. Por ejemplo $(\sqrt{2})^2 = 2$ y $(\sqrt{3})^2 = 3$.

EJEMPLO 11 **Evaluación de raíces cuadradas**

a) $\sqrt{64} = 8$ b) $\sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$ c) $\left(\sqrt{1.4}\right)^2 = 1.4$

d) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ ◀

Los ejemplos 11a) y 11b) son ejemplos de raíces cuadradas perfectas, ya que $64 = 8^2$ y $\dfrac{1}{16} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$.

Observe la necesidad del valor absoluto en el ejemplo 11d). Como $a^2 \geq 0$, la raíz cuadrada principal de a^2 está definida, no importa si $a > 0$ o $a < 0$. Sin embargo, como la raíz cuadrada principal es no negativa, se necesita el valor absoluto para asegurar el resultado no negativo.

En general, se tiene

$$\sqrt{a^2} = |a| \tag{2}$$

EJEMPLO 12 **Uso de la ecuación (2)**

a) $\sqrt{(2.3)^2} = |2.3| = 2.3$ b) $\sqrt{(-2.3)^2} = |-2.3| = 2.3$

c) $\sqrt{x^2} = |x|$ ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 83.

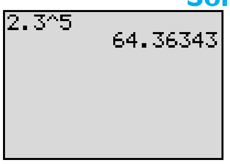
Uso de la calculadora

7 Su calculadora tiene la tecla de acento circunflejo, $\boxed{\wedge}$, o bien la tecla $\boxed{x^y}$, que se usa para cálculos que se refieren a exponentes.

EJEMPLO 13 **Exponentes en una calculadora gráfica**

Evalúe $(2.3)^5$

Figura 12



Solución La figura 12 muestra el resultado usando una calcuadora gráfica TI-83. ◀

TRABAJE AHORA EN EL PROBLEMA 113.

8 Notación científica

Las medidas de cantidades físicas pueden ir de muy pequeñas a muy grandes. Por ejemplo, la masa de un protón es aproximadamente 0.00000000000000000000000000167 kilogramos y la masa de la Tierra es alrededor de 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kilogramos. Es obvio que estos números son tediosos para escribir y difíciles de leer, de manera que usamos exponentes para escribirlos de nuevo.

Cuando un número se escribe como el producto de un número x, donde $1 \leq x < 10$, y una potencia de 10, se dice que está escrito en **notación científica**.

En notación científica,

$$\text{Masa de un protón} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kilogramos}$$
$$\text{Masa de la Tierra} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kilogramos}$$

Conversión de un decimal a notación científica

Para cambiar un número positivo a notación científica:

1. Se cuenta el número N de lugares que debe moverse el punto decimal para obtener un número x, tal que $1 \leq x < 10$.
2. Si el número original es mayor o igual que 1, la notación científica es $x \times 10^N$. Si el número original está entre 0 y 1, la notación científica es $x \times 10^{-N}$.

EJEMPLO 14 **Uso de la notación científica**

Escriba cada número en notación científica.

a) 9582 b) 1.245 c) 0.285 d) 0.000561