Trabajo práctico: Sistemas de ecuaciones lineales y Matrices

1) Encuentren el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales o indique que el sistema no es compatible según corresponda:

a) $\begin{cases} y+5z=-4 \\ x+4y+3z=-2 \\ 2x+7y+z=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-5y+4z=-3 \\ 2x-7y+3z=-2 \\ -2x+y+7z=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3z=8 \\ 2x+2y+9z=7 \\ y+5z=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-6z=-8 \\ y+2z=3 \\ 3x+6y-2z=-4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z+2t=-1 \\ 2x+y+z+4t=-3 \\ 3x+2z+4t=-6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y+2z+3t=-1 \\ x-2y+z+3t=-4 \\ -x+2y+2t=-3 \\ x-2y+2z+5t=-5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -x+y-2z+3t=-6 \\ x-y-z+3t=5 \\ -x+y-t=2 \\ x-y+2z-3t=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x+2y-8z-2t=13 \\ y-z-t=2 \\ -x-2y+4z+2t=-7 \\ x+y-3z-t=5 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+2y-2z+t=0 \\ 2x+y-2z+3t=4 \\ -x+z+t=6 \\ 3x-2y+3z-4t=-11 \end{cases}$

2) Supongan que el sistema que aparece a continuación es compatible $\forall\, f; g \in \mathbb{R}$, ¿qué pueden decir acerca de los coeficientes c y d? Justifiquen tu respuesta.

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=f \\ cx_1+dx_2=g \end{cases}$$

3) Supongan que $a; b; c; d$ son constantes tales que $a \neq 0$ y el el sistema que aparece a continuación es compatible $\forall\, f; g \in \mathbb{R}$, ¿qué pueden decir acerca de los coeficientes $a; b; c; d$? Justifiquen tu respuesta.

$$\begin{cases} ax_1+4b=f \\ cx_1+dx_2=g \end{cases}$$

4) Dado el sistema lineal $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-4y+5z=0 \end{cases}$

a) Verifiquen que $x_1=1;\ y_1=-1;\ z_1=-1$ es una solución.

b) Verifiquen que $x_2=-2;\ y_2=2;\ z_2=2$ es una solución.

c) ¿ x=$x_1+x_2=-1;\ y=y_1+y_2=1\,; z=z_1+z_2=1$ es una solución del sistema?

d) ¿$3x; 3y; 3z$ son una solución del sistema lineal? Justifiquen cada respuesta.

5) ¿Existe un valor real r tal que $x=1; y=2; z=r$ sea solución del siguiente sistema lineal?, de ser así, determínenlo.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=11 \\ x-y+2z=-7 \\ 4x+y-2z=12 \end{cases}$$

6) Determina todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que los siguientes sistemas admitan: a) púnica solución, b) infinitas soluciones; c) no tengan solución.

a) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(a^2-5)z=a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+3y+2z=5 \\ 2x+3y+(a^2-1)z=a+1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(a^2-5)z=a \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+(a^2-8)y=a \end{cases}$

7) Un editor publica un posible éxito de librería en tres presentaciones distintas: libro de bolsillo, edición para club de lectores y edición de lujo. Cada libro de bolsillo necesita un minuto para el cosido y 2 para el pegado. Cada libro de la edición para el club de lectores necesita 2 minutos para el cosido y 4 para el pegado. Cada libro en edición de lujo necesita 3 minutos para el cosido y 5 para el pegado. Si la planta de cosido está disponible 6 horas diarias y la planta de pegado 11 horas, ¿cuántos libros de cada presentación se pueden producir por día de modo que las plantas se aprovechen a toda su capacidad?

8) Un ebanista fabrica sillas, mesas para café y mesas para comedor. Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se requieren 12 minutos para lijar una mesa para café, ocho para pintarla y 12 para barnizarla. Son necesarios 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. El centro de lijado está disponible 16 horas a la semana, el de pintura 11 horas a la semana y el de barnizado 18 horas. ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se utilicen a toda su capacidad?

9) Hay tres cadenas que pesan 450, 610 y 950 gramos, cada una de ellas formada por eslabones de tres tamaños diferentes. Cada cadena tiene 10 eslabones pequeños y también tienen 20, 30 y 40 eslabones de tamaño mediano, así como 30, 40 y 70 eslabones grandes, respectivamente. Encuentre los pesos de los eslabones pequeños, medianos y grandes.

10) Suponga que las industrias del carbón y del acero forman una economía abierta. Cada $1 producido por la industria del carbón requiere $0.15 de carbón y $0.20 de acero. Cada $1 producido por la del acero requiere $0.25 de carbón y $0.10 de acero. Suponga que hay una demanda exterior anual por $45 millones de carbón y $124 millones de acero. (a) ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer las demandas? (b) Si la demanda de carbón disminuye en $5 millones al año, mientras que la demanda de acero aumenta en $6 millones al año, ¿cómo deben ajustar su producción las industrias del carbón y del acero?

11) Una dietética prepara bolsas con tres tipos de mezclas saludables.

Una bolsa de la mezcla Energética lleva 500 g de pasas de uva, 200g de nueces y 300g de almendras. Una bolsa de la mezcla de Frutos Secos lleva 500g de nueces y 400g de almendras. La bolsa Mezcla Serrana lleva 200g de pasas de uva, 400g de nueces y 400g de almendras.

Se disponen de 4800g de pasas de uva, 9600g de nueces y 8600g de almendras. ¿Cuántas bolsas de cada tipo se pueden armar si se agotan todas las existencias?

12) Una librería armó tres tipos de combos para el comienzo de clases. El combo I lleva 3 cuadernos, 2 biromes y 1 resaltador. El combo II lleva 5 cuadernos, 1 birome y 2 resaltadores. El combo III lleva 2 cuadernos, 3 biromes y 1 resaltador. Si se utilizaron 202 cuadernos, 126 biromes y 80 resaltadores, ¿cuántos combos de cada tipo se armaron?

13) Un editor publica un posible éxito de librería en tres presentaciones distintas: libro de bolsillo, edición para club de lectores y edición de lujo. Cada libro de bolsillo necesita un minuto para el cosido y 2 para el pegado. Cada libro de la edición para el club de lectores necesita 2 minutos para el cosido y 4 para el pegado. Cada libro en edición de lujo necesita 3 minutos para el cosido y 5 para el pegado. Si la planta de cosido está disponible 6 horas diarias y la planta de pegado 11 horas, ¿cuántos libros de cada presentación se pueden producir por día de modo que las plantas se aprovechen a toda su capacidad?

14) La imagen que figura más abajo, ilustra los sucedido entre los equipos del Grupo D, en la Copa Mundial de Fútbol, disputada en Rusia.

Grupo D

	Equipo	PJ	G	E	P	GF	GC	DG	Pts
1	Croacia	3	3	0	0	7	1	6	9
2	Argentina	3	1	1	1	3	5	-2	4
3	Nigeria	3	1	0	2	3	4	-1	3
4	Islandia	3	0	1	2	2	5	-3	1

a) Les proponemos realizar una interpretación de lo que observan en la imagen, a la luz de lo que hemos estudiado en la teoría acerca de la unidad didáctica Matrices.

b) Elaboren 2 preguntas al compañero, que se responda con la información disponible en la imagen.

c) Busquen la información correspondiente a los otros grupos y realicen una posible vinculación de ellos con la presentada en la imagen.

15) Escriban explícitamente las matrices definidas por:

a) $A \in \Re^{3x3} \;/\; a_{ij} = i^2 + j^2$

b) $A \in \Re^{4x4} \;/\; a_{ij} = 0 \;\; si \;\; i \leq j \;\; ; \;\; a_{ij} = -i\,.\,j \;\; si \; i > j$

c) $A \in \Re^{4x5} \;/\; a_{ij} = 1 \;\; si \;\; (i+j) es\ primo \,; \; a_{ij} = 0 \; si \; (i+j) \; no\ es\ primo$

d) $A \in \Re^{4x4} \;/\; a_{ij} = \begin{cases} 0 & si \;\; i \neq j \\ 1 & si \;\; i = j \end{cases}$

16) Escriban un ejemplo de una matriz de orden 3 que cumpla las siguientes condiciones:

a) Antisimétrica

b) diagonal, no escalar

c) Triangular superior, no diagonal

d) escalar, no diagonal

e) Simétrica y escalar

f) Triangular superior y escalar

17) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3/4 & 6 \\ 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Calculen, siempre que sea posible:

a) A+B=

b) C+2D

c) A+C=

d) -3B+F=

e) D-F=

f) $-\frac{2}{5}F^t - D =$

g) -2E+4F=

h) $4D - \frac{5}{2}F + 6C^t =$

18) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -9 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Determinen los siguientes productos, siempre que sea posible. En caso que no tlo sean, justifiquen por qué.

$$a)\; A.B.C = \quad b)\; A.C.B = \quad c)\; B.A.C = \quad d)\; C^t.A^t.B =$$
$$e)\; B.C.A = \quad f)\; C.A.B = \quad g)\; C.B.A = \quad h) A.B^t.C^t =$$

19) Indiquen cuál/es de las siguientes afirmaciones pueden ser ciertas, sabiendo que $A \in \Re^{3x4}, B$ es una matriz cuadrada, y que el producto $(A . B)$ existe.

a) B tiene tres filas y el producto cuatro columnas.

b) B tiene cuatro columnas y el resultado es una matriz cuadrada.

c) B tiene tres columnas y el resultado del producto cuatro filas.

d) B tiene cuatro filas y el resultado del producto tras filas.

20) Hallen $a; b; c; d \in \Re,\ si$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifiquen su respuesta.

21) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, darle valores a "$a, b, c, d, e, f, g, h, i$", para que resulte: a) una matriz triangular superior; b) una matriz simétrica. Justifiquen cada respuesta.

22) Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. ¿Es $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^{\,2}$ una identidad matricial válida? Justifiquen su respuesta.

23) Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$ Determinen, si existe, el o los valores de k para los cuales A y B conmutan, es decir A . B = B . A

24) Un comerciante de televisores a color tiene cinco televisores de 26 pulgadas, ocho de 20, cuatro televisores de 18 pulgadas y diez de 12. Los televisores de 26 pulgadas se venden en $650 cada uno, los de 20 en $550 cada uno, los televisores de 18 pulgadas en $500 cada uno y los de 12 se venden en $300 cada uno.

25) Para las unidades de tres alimentos, la siguiente matriz indica los correspondientes contenidos de vitaminas en unidades apropiadas.

VITAMINA / ALIMENTOS	A	B	C	D
1	0,5	0,3	0,1	0
2	0,3	0,1	0	0,3
3	0,2	0,4	0,6	0,1

a. ¿Qué alimento no contiene vitamina C? ¿Y vitamina D? ¿Qué alimento contiene igual cantidad de vitamina A y D? b. ¿Cuánto se consume de cada tipo de vitamina si se comen 4 unidades del alimento 1; 5 unidades del alimento 2 y 12 unidades del alimento 3? c. Si sólo se paga por el contenido vitamínico de cada alimento y se han abonado respectivamente 15 unidades monetarias (u.m.), 10 u.m., 18 u.m. y 20 u.m. por las unidades de las cuatro vitaminas, ¿Cuánto cuesta la unidad de cada tipo de alimento? d. Calcular por dos caminos distintos el costo total del alimento que hemos consumido.

26) Una empresa alimenticia produce dulces, quesos y mermeladas. en un mes se fabrican 3000; 2500 y 1500 unidades respectivamente. el costo de producción unitario para cada bien es de $4; $3 y $3 respectivamente. Se pide plantear el cálculo del costo total mensual de producción de la empresa como producto de matrices y calcularlo.

27) Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ a) calculen $(A.B)^{-1}$. Determinen si $(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$

28) Calculen la inversa de las siguientes matrices y verifiquen que $A.A^{-1} = I$

$$a)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\4 & -1 & 3\\-1 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

29) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\5 & -3\end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix}5 & -2\\-4 & 3\end{pmatrix}$, hallar la matriz X :

a) $-\frac{1}{2}.X + 3.B - C^t = 3A$; b) $A.X = -2C$

c) $B.X = A.C$ d) $-4C.X = B - 4A$

30) Encuentre todos los valores posibles del escalar m para que los vectores dados sean ortogonales. Justifiquen cada respuesta.

$a)\ \vec{p} = \begin{pmatrix}2\\-4\\m\end{pmatrix}\ y\ \vec{q} = \begin{pmatrix}-m\\4\\1\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{u} = (-2; 5m; 3m)\ \ y\ \ \vec{v} = \left(-3; -m; \frac{1}{3}\right)$