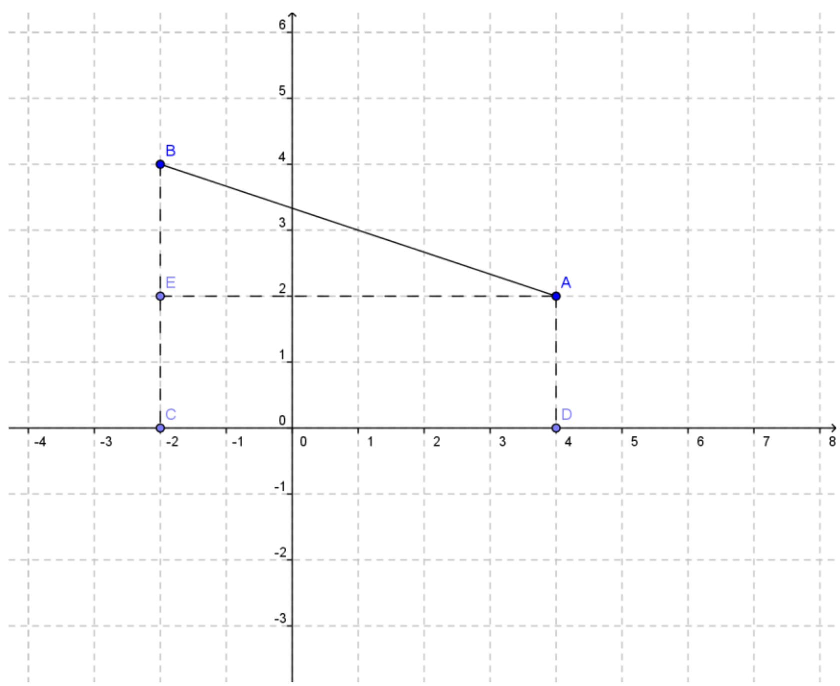
Geometría Analítica en el Plano: Distancia entre dos puntos – Ecuación de la recta.

Distancia entre dos puntos:

Problema inicial: En una carta de navegación, el origen se indica en un puerto. Una embarcación se encuentra en el punto (-2; 4) y otra en el punto (4;2) ¿A qué distancia se encuentran si las unidades de la carta corresponden a km?

Solución: Ubicamos en un sistema de coordenadas cartesianas los puntos A (-2; 4) y B (4; 2). Debemos encontrar la longitud del segmento AB.



Observamos que el segmento AB, es la hipotenusa del triángulo rectángulo AEB. Aplicando teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = EA^2 + EB^2$$

$$AB^2 = \left(4-(-2)\right)^2 + (4-2)^2$$

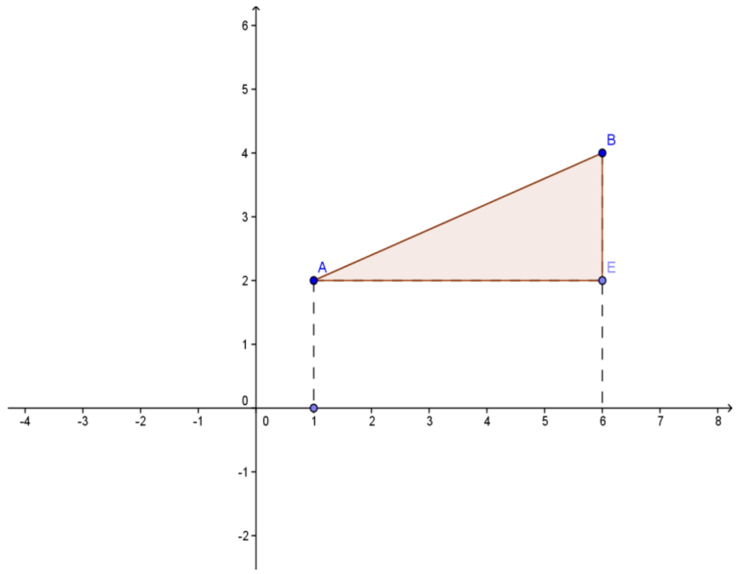
$$AB = \sqrt{6^2 + 2^2}$$

$$AB = \sqrt{40}$$

$$AB = 6{,}32$$

Luego, las dos embarcaciones se encuentran a una distancia de 6,32 km.

En general, consideraremos el problema de hallar la longitud de un segmento AB, siendo $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$. Hallaremos la distancia desde A hasta B.



El problema se resuelve de la misma forma que en el planteo inicial por aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo sombreado.

$$AB^2 = EA^2 + EB^2$$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

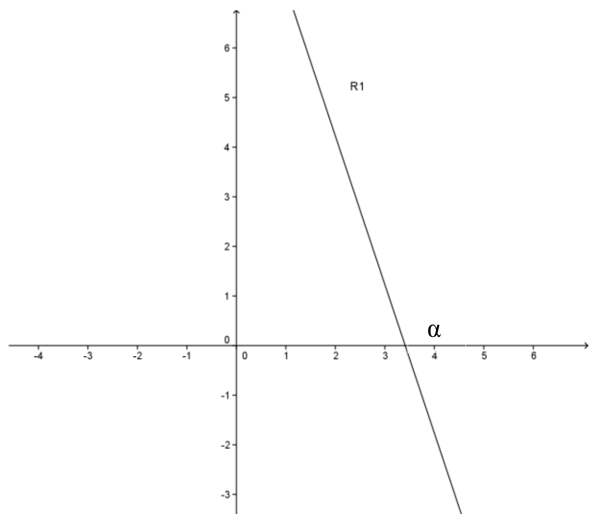
La distancia entre dos puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ .del plano es:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Recta:

Ángulo de inclinación: El ángulo de inclinación de una recta que corta al eje de abscisas es el menor ángulo positivo que la recta forma con el semieje positivo de abscisas. Si α es el ángulo de inclinación de una recta R, entonces:

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$



Pendiente de una recta: La pendiente (*m*) de una recta es la tangente del ángulo de inclinación de la misma (siempre que el ángulo de inclinación no sea recto).

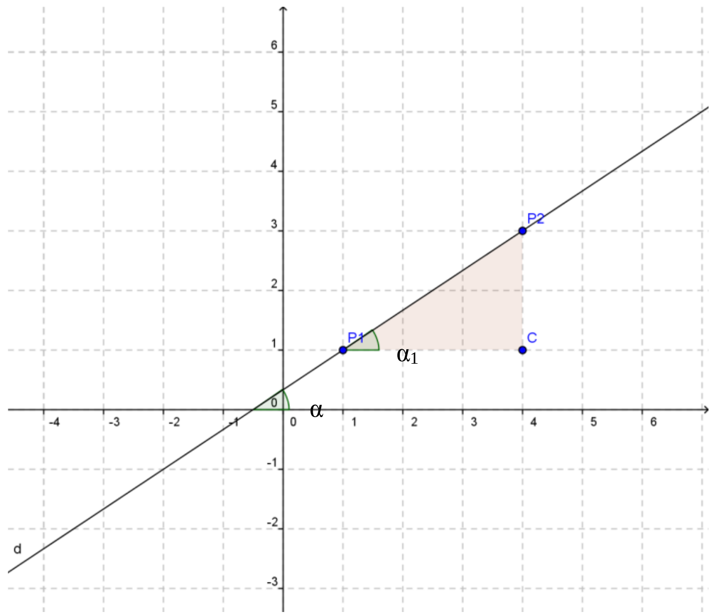
$$m = tg(\alpha)$$

Pendiente de una recta conocidos dos puntos pertenecientes a ella: Sean $P_1(x_1; y_1)$ **y** $P_2(x_2; y_2)$, $x_1 \neq x_2$ dos puntos pertenecientes a la recta R:

$m = tg(\alpha)$

$\alpha = \alpha_1$ **(por correspondientes entre paralelas)**

$$m = ta(\alpha) = tg(\alpha_1) = \frac{|P_2Q|}{|P_1Q|} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ecuación de la recta conocidos un punto perteneciente a ella y su pendiente:

Consideremos el problema de encontrar la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(x_1; y_1)$ y tiene pendiente *m*.

Sea $Q(x; y)$ otro punto cualquiera que pertenece a dicha recta. La pendiente de una recta que pasa por dos puntos está dada por:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, entonces resulta: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

Multiplicando ambos miembros por $(x - x_1)$:

$$m \cdot (x - x_1) = y - y_1$$
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

Esta es la ecuación de la recta cuando se conoce su pendiente y un punto que le pertenece.

Ecuación del haz de rectas que pasa por un punto: Si en la ecuación anterior mantenemos fijo el punto *P* y variamos la pendiente, obtendremos las infinitas ecuaciones de las rectas que pasan por *P*.

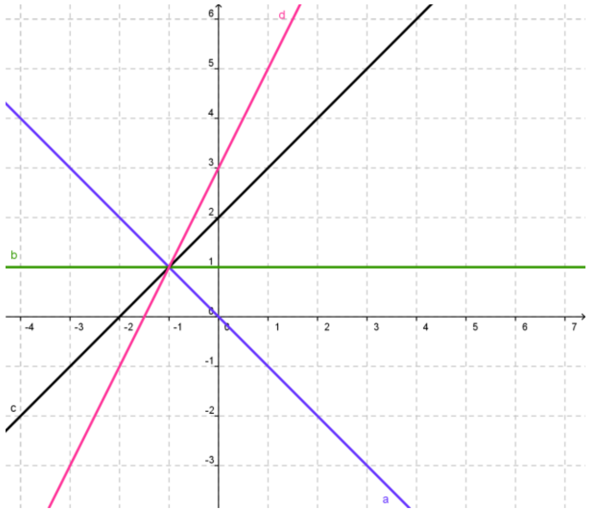
Ejemplo: Encontrar cuatro rectas pertenecientes al haz de rectas que pasa por *P* (-1; 1)

Si $m = -1 \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -x$

Si $m = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 1$

Si $m = 1 \Rightarrow y - 1 = 1 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = x + 2$

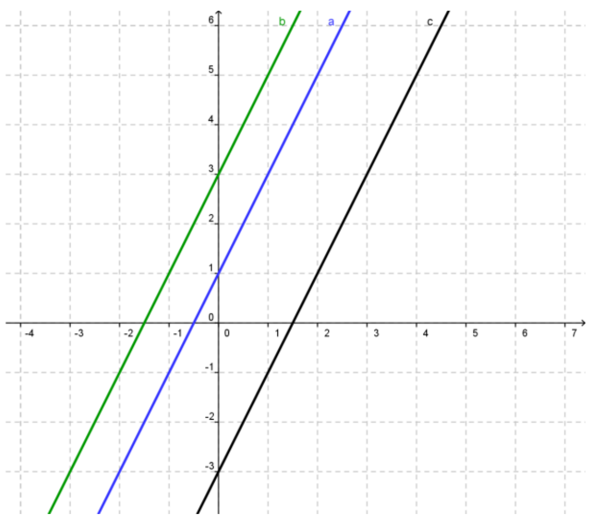
Si $m = 2 \Rightarrow y - 1 = 2 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 2x + 3$



Ecuación del haz de rectas paralelas: Si en la ecuación de la recta $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ mantenemos fija la pendiente y variamos el punto *P*, obtendremos la familia de rectas que tiene pendiente *m* (infinitas rectas paralelas)

Ejemplo: Encontrar las ecuaciones de tres rectas pertenecientes al haz $y - y_1 = 2 \cdot (x - x_1)$

Si $P(-1{,}1) \Rightarrow y - 1 = 2 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 2x + 3$
Si $P(0{,}1) \Rightarrow y - 1 = 2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$
Si $P(2{,}-1) \Rightarrow y + 1 = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 2x - 3$



Ecuación de la recta conocidos dos puntos pertenecientes a ella: Sean $P_1(x_1; y_1)$ **y** $P_2(x_2; y_2)$, $x_1 \neq x_2$ dos puntos pertenecientes a una recta. Si consideramos a uno cualquiera de ellos como punto fijo dado y utilizamos la fórmula de pendiente de una recta conocidos dos de sus puntos, podemos resolver el problema utilizando la ecuación obtenida anteriormente. En efecto:

$P_1(x_1; y_1)$ es el punto fijo dado y $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ es la pendiente de la recta. Entonces, sustituyendo en la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente conocida:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ obtenemos la ecuación buscada.

Otra forma de escritura para la ecuación: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Observación:

Si $x_1 = x_2$, entonces la ecuación de la recta es $x = x_1$ o $x = x_2$

Distintas formas de la ecuación de la recta:

Forma Explícita: Partimos de la ecuación $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
$$y - y_1 = mx - mx_1 \quad \textbf{(propiedad distributiva)}$$
$$y - y_1 + y_1 = mx - mx_1 + y_1 \quad \textbf{(sumamos a ambos miembros } y_1 \textbf{)}$$
$$y = mx + (-mx_1 + y_1) \quad \textbf{(asociamos y hacemos} - mx_1 + y_1 = b / b \in R)$$
$$y = mx + b$$

m, es la **pendiente** de la recta y b, la **ordenada al origen** (Si x = 0, y=b)

Forma Implícita o General: Partimos de la ecuación $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$
$$(y - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = (y_2 - y_1) \cdot (x - x_1)$$
$$y \cdot (x_2 - x_1) - y_2 \cdot (x_2 - x_1) = x \cdot (y_2 - y_1) - x_1 \cdot (y_2 - y_1)$$
$$y \cdot (x_2 - x_1) - x \cdot (y_2 - y_1) + [x_1 \cdot (y_2 - y_1) - y_2 \cdot (x_2 - x_1)] = 0$$

Si hacemos:

$$A = -(y_2 - y_1); B = x_2 - x_1; C = x_1 \cdot (y_2 - y_1) - y_2 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$Ax + By + C = 0$$

***A* y *B* no pueden ser simultáneamente nulos.**

Casos particulares:

- **Si** $A=0, B\neq 0, C\neq 0$, resulta $By+C=0 \Rightarrow y=-\frac{C}{B}$ recta horizontal.
- **Si** $B=0, A\neq 0, C\neq 0$, resulta $Ax+C=0 \Rightarrow x=-\frac{C}{A}$ recta vertical.
- **Si** $C=0, B\neq 0, A\neq 0$, resulta $Ax+By=0 \Rightarrow y=-\frac{A}{C}x$ recta que pasa por el origen de coordenadas.
- **Si** $A=0, B\neq 0, C=0$, resulta $By=0 \Rightarrow y=0$ ecuación del eje de abscisas.
- **Si** $A\neq 0, B=0, C=0$, resulta $Ax=0 \Rightarrow x=0$ ecuación del eje de ordenadas.

Forma Segmentaria:

Partimos de la ecuación de la recta dada en forma implícita o general:

$$Ax+By+C=0$$

$$Ax+By=-C$$

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

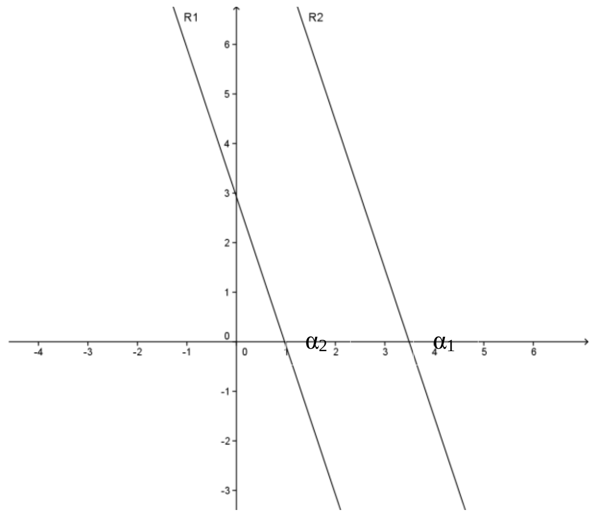
Haciendo: $-\frac{C}{A}=a \wedge -\frac{C}{B}=b$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

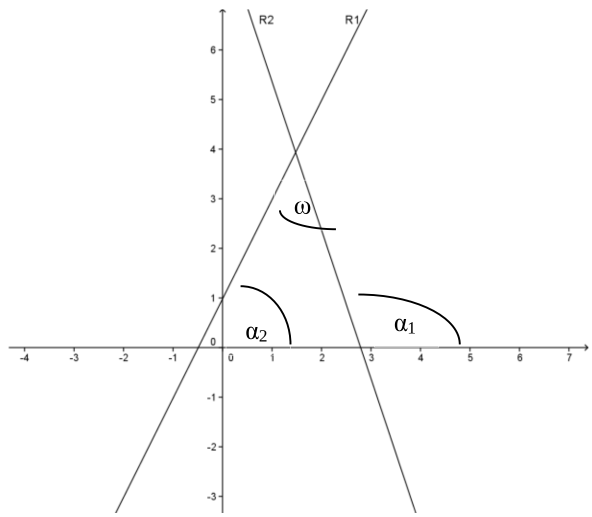
Significado de *a* y *b*: *a* es la abscisa al origen y *b*, la ordenada al origen.

Condición de paralelismo entre rectas: Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

$$R_1 // R_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$$



Ángulo de dos rectas:



$$\alpha_1 = \alpha_2 + \varpi \quad \textbf{(prop. ángulo exterior de un triángulo)}$$

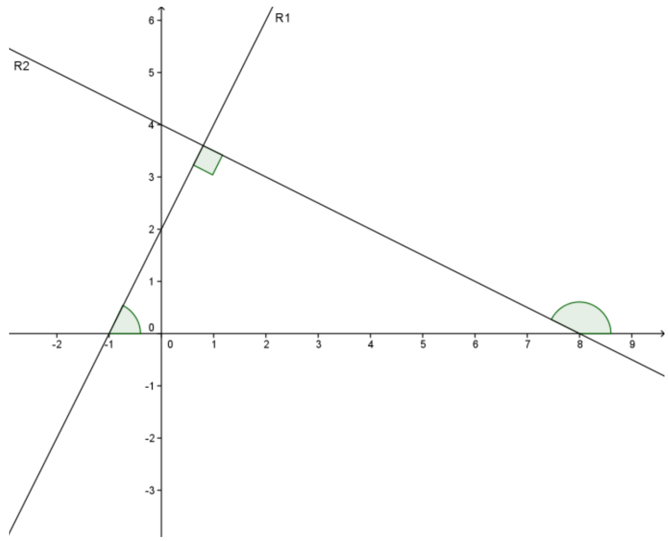
$$\varpi = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$tg\varpi = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} \textbf{(tangente de la diferencia de dos ángulos)}$$

$$tg\varpi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \varpi = tg^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Condición de perpendicularidad entre rectas:

Si las rectas son perpendiculares el ángulo que determinan es recto, por lo que la tangente no está definida.



$$\varpi = 1R \Leftrightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$