Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Bibliografía:
Álgebra lineal de Stanley Grossman

Sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas

Ejemplos

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Solución única

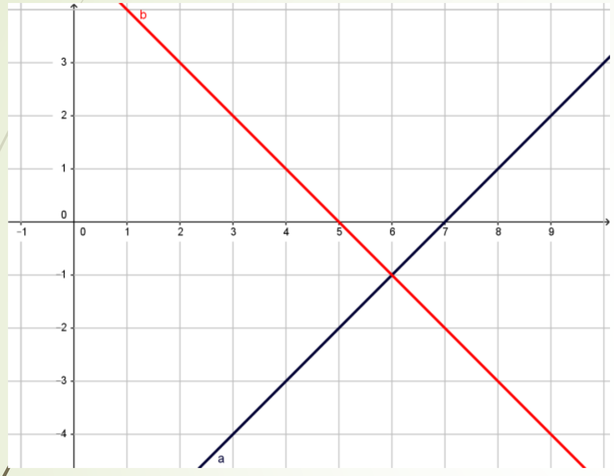
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 3y = 12 \end{cases}$$

Infinitas soluciones

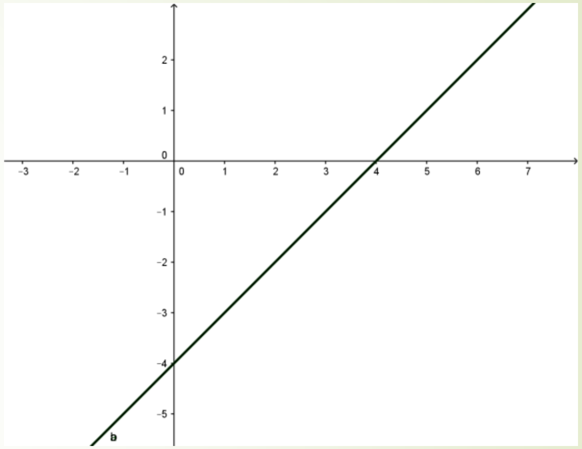
$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases}$$

Sin solución

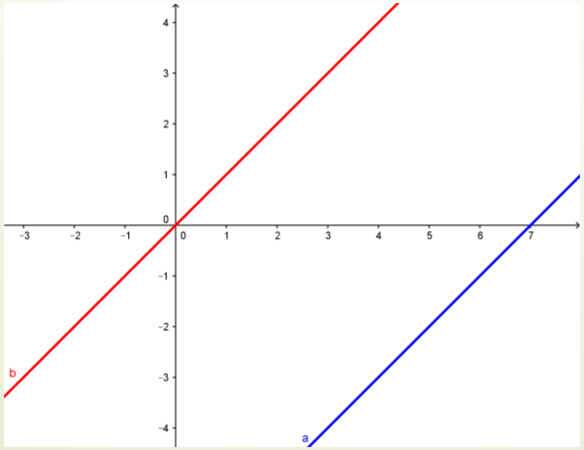
Sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas



Sistema compatible determinado



Sistema compatible indeterminado

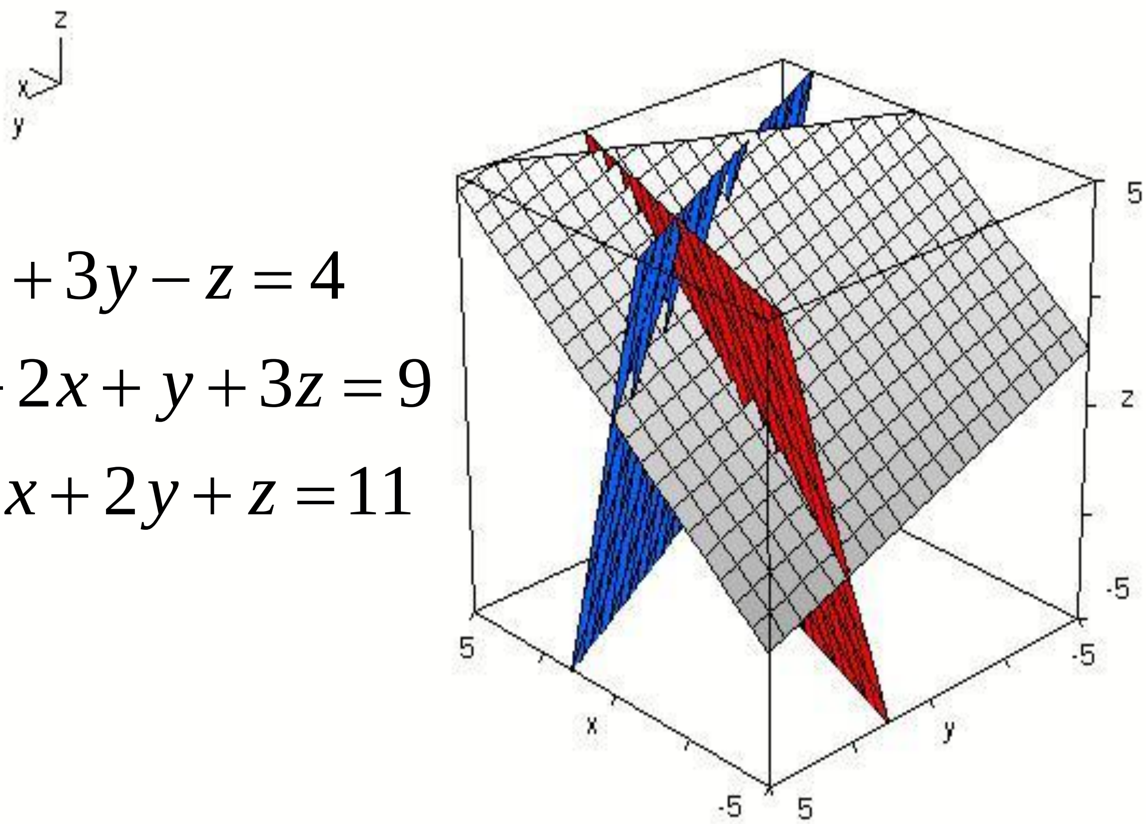


Sistema incompatible o Inconsistente

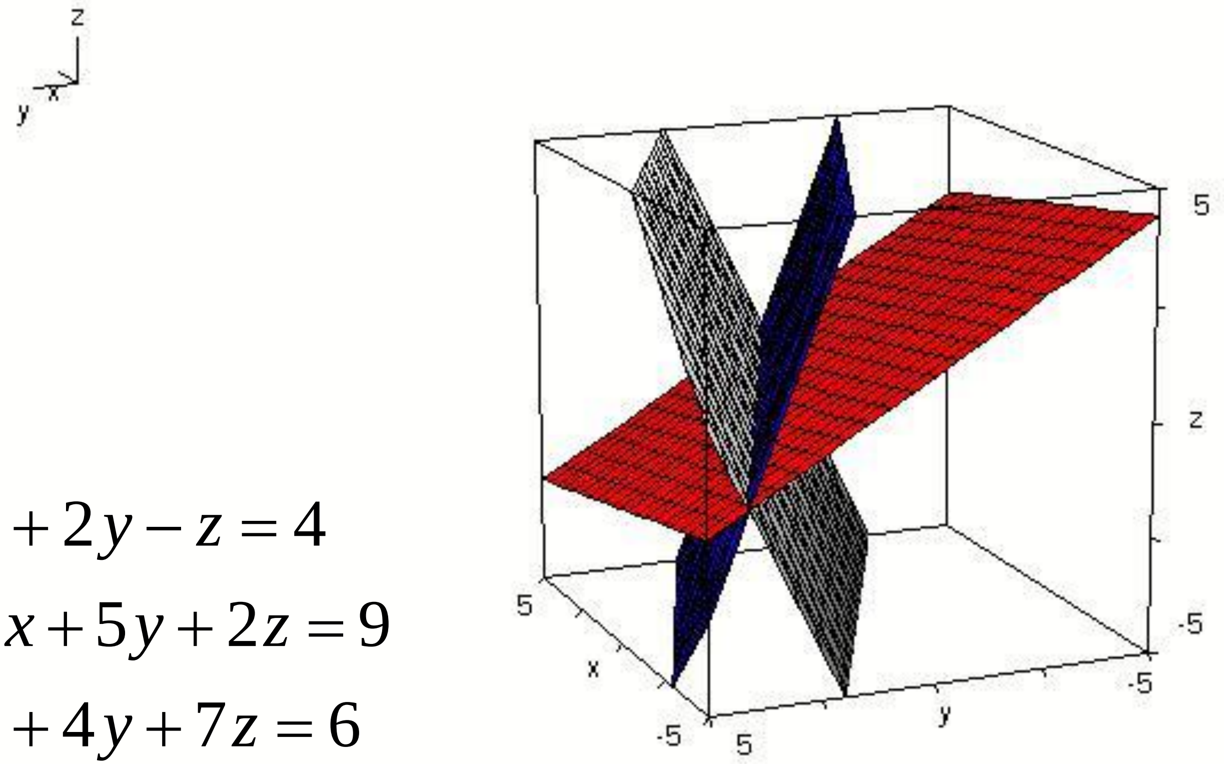
Sistemas lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas

Sistema Compatible Determinado

$$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -2x + y + 3z = 9 \\ 4x + 2y + z = 11 \end{cases}$$



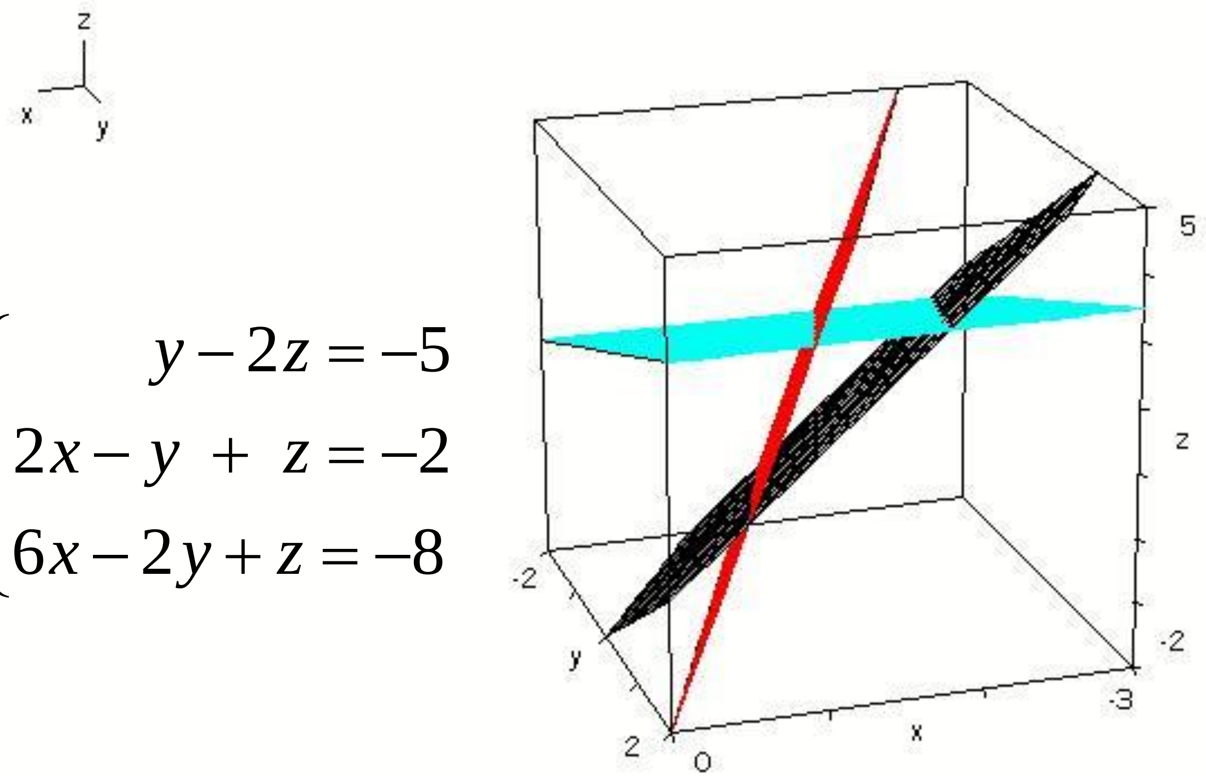
Sistema compatible indeterminado



$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x+5y+2z=9 \\ x+4y+7z=6 \end{cases}$$

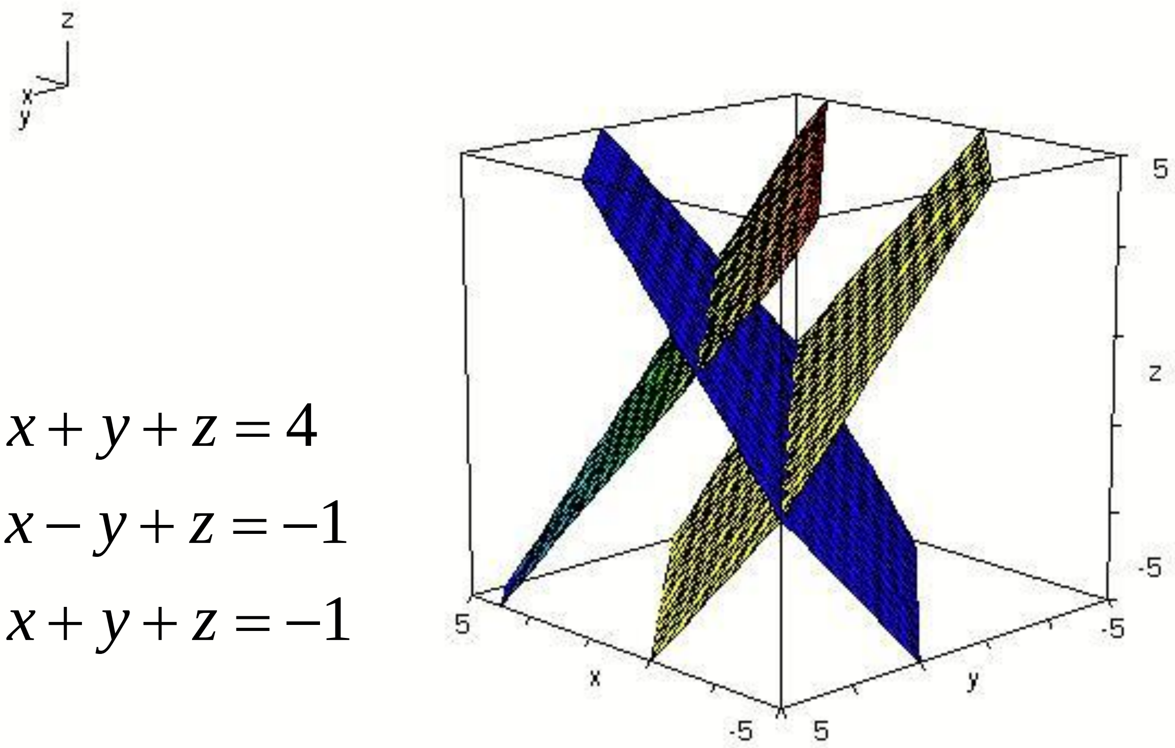
Sistemas incompatibles

$$\begin{cases} y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = -2 \\ 6x - 2y + z = -8 \end{cases}$$



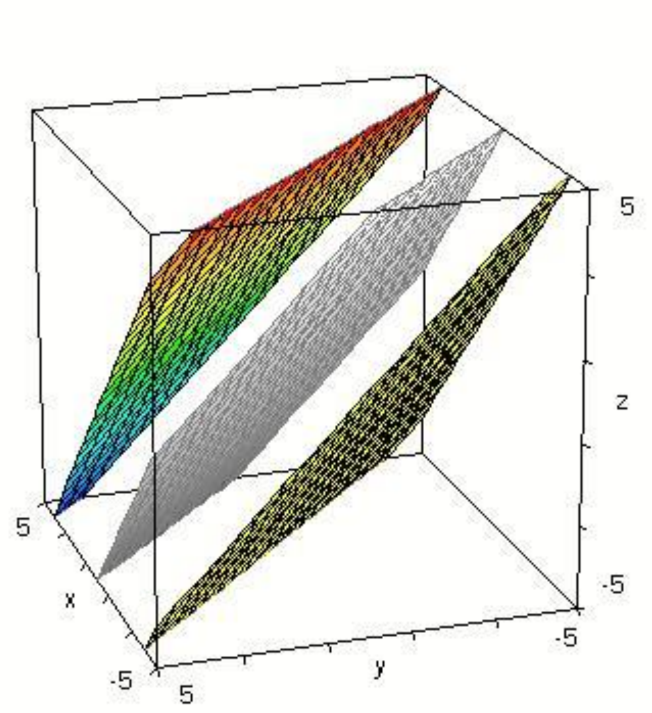
Sistemas incompatibles

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x - y + z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$



Sistemas incompatibles

$$\begin{cases} x+y+z=-4 \\ x+y+z=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$



Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

- Matriz: arreglo rectangular de números reales

- Matriz de coeficientes (A): matriz que tiene por elementos los coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales

- Matriz aumentada o ampliada (A´): es la matriz de los coeficientes ampliada con la columna de términos independientes.

Operaciones elementales con renglones

- Multiplicar (o dividir) un renglón por un número distinto de cero.
- Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
- Intercambiar dos renglones.

Sistemas de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

a_{ij} : coeficientes

con $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$

b_i : términos constantes

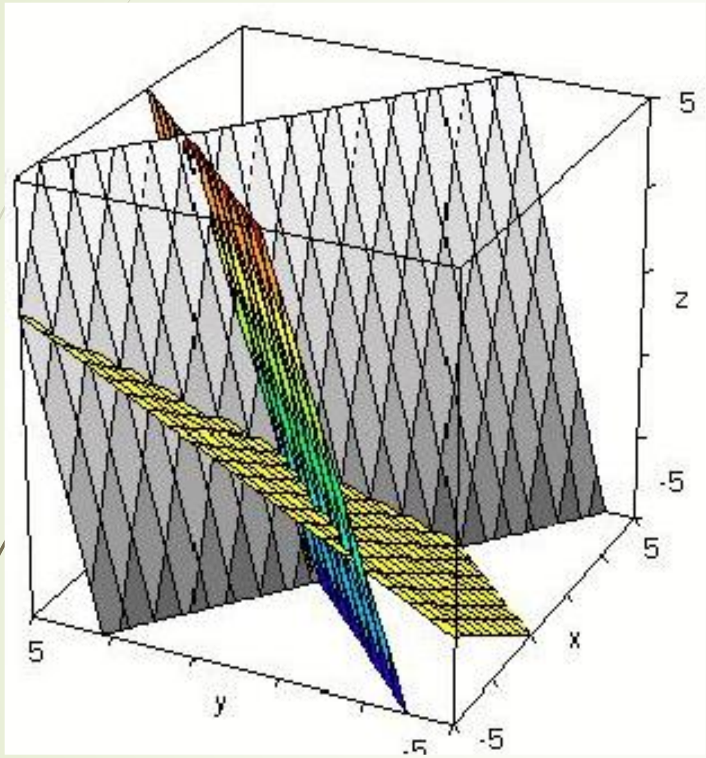
x_j : incógnitas o variables

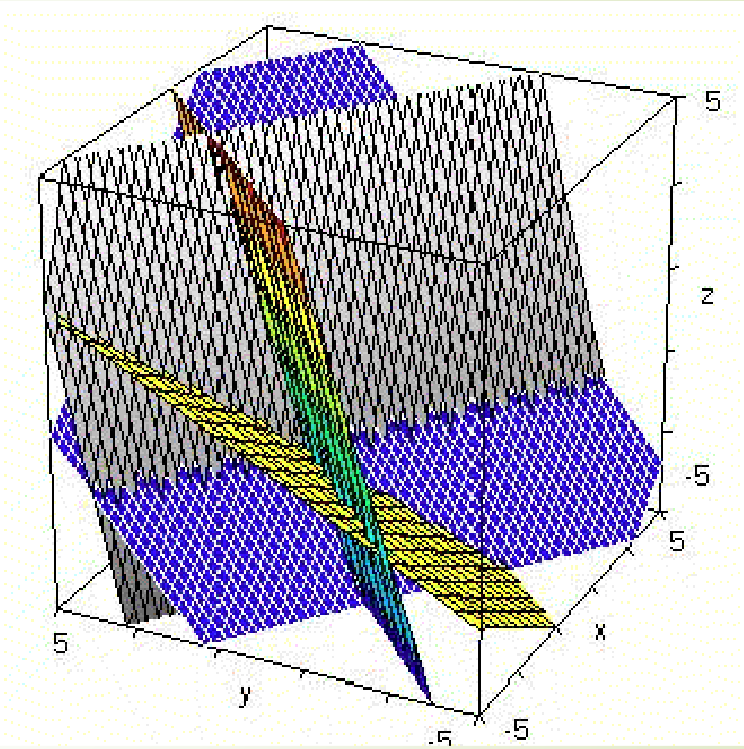
Forma escalonada reducida por renglones y pivote

Una matriz se encuentra en la forma **escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

- Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.
- El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.
- Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.
- Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

Sistemas equivalentes





$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 16 \end{cases}$$

Se llaman sistemas equivalentes a aquellos que presentan el mismo conjunto solución.

$\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = -3$

Sistema homogéneo de ecuaciones

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

Un sistema homogéneo es siempre consistente dado que al menos admite la solución trivial:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Vectores y Matrices

Un vector de n componentes se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente forma:

$$\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$$

Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

El espacio R^n

Se utiliza este símbolo para denotar al conjunto de todos los n – vectores, donde cada a_i es un número real.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Matriz

Una matriz m x n es un arreglo m . n números dispuestos en m renglones y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \text{a}_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz

El vector renglón $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ se llama **renglón o fila i** y el vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ se llama **columna j**.

La componente o elemento ij de A, denotado por a_{ij}
Es el número que aparece en el renglón i, columna j de A.
Matriz cuadrada: Si m = n.
Matriz cero o matriz nula: Una matriz donde todos los elementos son iguales a cero.
Tamaño u orden de una matriz: m x n

Matrices

Igualdad de matrices: Dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son iguales si tienen el mismo orden y las componentes correspondientes son iguales, es decir: $a_{ij}=b_{ij} \quad \forall\ i,j$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2.a & d \\ \mathrm{b} & 3.e \\ \text{- c} & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2.a=-4 \Rightarrow a=-2 & d=1 \\ \mathrm{b}=5 & 3.e=9 \Rightarrow e=3 \\ \text{- c}=2 \Rightarrow \mathrm{c}=\text{-2} & f=-1 \end{matrix}$$

Adición de matrices

La suma de dos matrices $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, es la matriz $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad \forall i,j$. La adición de matrices sólo se define para matrices del mismo orden o tamaño.

Multiplicación de una matriz por un escalar

Dada una matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ y $\alpha \in R$, se llama producto $\alpha. A$ a una matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n} / b_{ij} = \alpha \,.\, a_{ij}$

Teorema 1

Sean A, B y C matrices de mxn y sean α y β, dos escalares. Entonces:

$$1)A+0=A$$

$$2)0\cdot A=0$$

$$3)A+B=B+A$$

$$4)(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$5)\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$$

$$6)1\cdot A=A$$

$$7)(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$$

Nota: el cero en 1) es la matriz nula. El cero en el primer miembro de 2 es escalar, en el segundo miembro, la matriz

Producto escalar

Sean $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores.

El producto escalar de a y b, denotado $a \cdot b$, está dado por:

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

El producto escalar se llama también producto punto o producto interno. Es un número.

Producto escalar

Frecuentemente, se toma el producto escalar de un vector renglón y un vector columna. (Siempre los vectores deben tener el mismo número de componentes)

Vector renglón 1xn

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

Vector columna nx1

Producto escalar: propiedades

Sean a, b **y** c tres n-vectores y sean α **y** β dos escalares. Entonces:

$$1)\, a \cdot 0 = 0$$

$$2)\, a \cdot b = b \cdot a$$

$$3)\, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$4)\, (\alpha \cdot a) \cdot b = \alpha \cdot (a \cdot b)$$

Vectores ortogonales

Se dice que dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es nulo.

Ejemplo:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$$

Producto de dos matrices

Sea $A=(a_{ik})$ una matriz mxn, y sea $B=(b_{kj})$, una matriz nxp. Entonces el producto de A **y** B es una matriz mxp. $C=(c_{ij})$, en donde:

$$c_{ij}=\left(renglón\, i\; de\;\; A\right)\cdot\left(columna\; j\; de\, B\right)$$

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots+a_{in}\cdot b_{nj}$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces A y B son **compatibles bajo la multiplicación**.

Propiedades

Ley asociativa para la multiplicación de matrices:

$$A\cdot\left(B\cdot C\right)=(A\cdot B)\cdot C$$

Leyes distributivas para la multiplicación de matrices:

$$A\cdot\left(B+C\right)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$\left(A+B\right)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

- Sea

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + \cdots + a_{3n}.x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + a_{nn}.x_n = b_n \end{cases}$$

- Diremos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}_{\mathbf{n\times n}} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots. \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathbf{n\times 1}} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

- Entonces: $\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}$

Inversa de una matriz cuadrada

- Matriz identidad: $I = (b_{ij})_{n \times n}$ es la matriz cuadrada tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad i = j \\ 0 & \textbf{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

- Teorema: Sea A una matriz cuadrada de n x n. Entonces:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Inversa de una matriz cuadrada

- Definición: La matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es **invertible, regular o no singular** si y sólo existe una matriz $B = (b_{ij})_{n \times n}$ tal que su producto por A, a izquierda y a derecha, es la identidad.

$$A \textbf{ es invertible} \Leftrightarrow \exists\ B / A.B = B.A = I_n$$

- Si la matriz inversa existe, es única y se denota A^{-1}

- Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ porque:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A^{-1}.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Procedimiento para obtener la inversa

- Sea A_{nxn}, una matriz, a su derecha se escribe la matriz identidad (de orden n x n). Se aplican operaciones elementales por renglones hasta transformar A en la identidad. La matriz resultante a la derecha es la inversa de A.

A	I_n
I_n	A^{-1}

Teoremas:

- Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración:

Suponemos que A admite dos matrices inversas: B y C, por igualdad de matrices

$$B \cdot A = B \cdot A$$

$$B \cdot A \cdot C = B \cdot A \cdot C$$

$$(B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C)$$

$$I \cdot C = B \cdot I$$

$$C = B$$

Luego: La inversa es única

- Sean A y B dos matrices invertibles de n x n. Entonces

es invertible y : $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Demostración: Se demuestra aplicando la definición de matriz inversa

Conceptos destacados

- **Matrices equivalentes por renglones:** Suponga que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones con renglones. Entonces se dice que A y B son **equivalentes por renglones**.
- **Teorema:** Sea A una matriz de n x n.

I. A es invertible si y sólo si A es equivalente por renglones a la matriz identidad.

II. A es invertible si y sólo si el sistema $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$

III. Si A es invertible, entonces la solución única de $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ está dada por $\mathbf{x}=A^{-1}\cdot\mathbf{b}$

IV. A es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

Inversa de una matriz de orden 2

- Determinante de una matriz de orden 2:

$$Sea \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- Teorema: Sea A una matriz de 2 x 2. Entonces:

1. A es invertible si y sólo si det(A)≠ 0.
2. Si det(A)≠ 0, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Demostrar parte 2 por aplicación de la definición de matriz inversa

Transpuesta de una matriz

- Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de m x n. Entonces la transpuesta de A es la matriz de n x m que se obtienen al intercambiar los renglones por las columnas. Simbólicamente:

$$A^t=(a_{ji})$$

- Ejemplo: Si

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 4} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

Teorema

- Suponga que $A=(a_{ij})$ es una matriz de n x m y $B=(b_{jk})$ es una matriz de m x p. Entonces:

1. La transpuesta de la transpuesta de A es A. $\left(A^t\right)^t = A$
2. La transpuesta del producto es igual al producto de la transpuestas en orden permutado. $\left(A \cdot B\right)^t = B^t \cdot A^t$
3. Si A y B tienen el mismo orden: $\left(A + B\right)^t = A^t + B^t$
4. Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

Matrices cuadradas especiales

- Matriz simétrica: Una matriz cuadrada es simétrica si

  $A = A^t$, es decir $a_{ij} = a_{ji}$

  Ejemplo:

  $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matriz antisimétrica: Una matriz cuadrada es antisimétrica si

  $A^t = -A$ es decir $a_{ij} = -a_{ji}$

  Ejemplo:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas especiales

- **Matriz triangular superior:** una matriz cuadrada es triangular superior si y sólo si para $i > j$ es $a_{ij} = 0$

  Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior:** una matriz cuadrada es triangular inferior si y sólo si para $i < j$ es $a_{ij} = 0$

  Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas especiales

<u>Matriz diagonal</u>: es la matriz cuadrada en la cual todos los elementos son nulos con excepción de los que se sitúan en la diagonal principal.

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz diagonal si y solo si $\begin{cases} a_{ij} \neq 0 & \text{si} \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

Ejemplo: $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Matriz escalar</u>: es la matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz escalar si y solo si $\begin{cases} a_{ij} = k & \text{si} \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

Ejemplo: $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$