# Unidad I

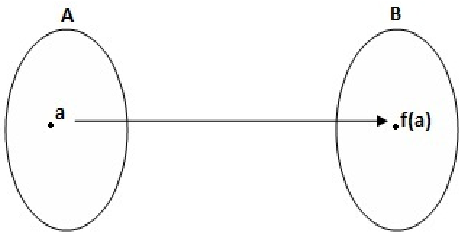
Lic. María Josefina Tito
Licenciatura en Sistemas
Facultad de Ciencias de la Administración
UNER

Marzo de 2019

## 1. Funciones

### 1.1. Definición de función

**Definición**: Sean **A** y **B** dos conjuntos cualesquiera. Una *función* de **A** en **B** es una correspondencia que a cada elemento de **A** le asigna un *único* elemento de **B**.




Se acostumbra a indicar una función de **A** en **B** como **f:A→B** y si **a** $\in$ **A** indicar con **f(a)** al elemento de **B** que le corresponde por la función.
Esto es equivalente a decir que **f(a)** es la imagen de **a** por medio de **f**.

**Ejemplo 1**: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $f : A \to B$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$, $f(5) = 7$
Se observa en el ejemplo anterior que $f$ es una función ya que a cada elemento del conjunto $A$, le corresponde un único elemento del conjunto $B$.
Al conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7\} \subset B$, se lo denomina conjunto imagen de la función $f$.

**Ejemplo 2**: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $f : A \to B$, tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$
Se observa que esta última correspondencia no es una función ya que $5 \in A$, pero al 5 no le corresponde ningún elemento en $B$.

**Ejemplo 3**: Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{1,3,4,5,6,7\}$ y sea ahora $f : A \rightarrow B$, tal que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ , $f(3) = 5$, $f(4) = 6$, $f(5) = 7$.
Se observa que esta correspondencia no es una función, ya que al elemento $3 \in A$, le corresponde más de un elemento en $B$.

Es importante recalcar dos aspectos de la definición de función, que son las condiciones de existencia y unicidad, se dice ünna correspondencia que a cada elemento de $A$ (existencia) le asigna un único elemento en $B$ (unicidad)". En el ejemplo 2, la correspondencia dada no es una función, ya que no cumple la condición de existencia.Y el ejemplo 3 muestra una correspondencia que no cumple la condición de unicidad.
**Expresión Simbólica**: $f : A \rightarrow B$ es una función si la correspondencia entre los elementos del conjunto $A$ y el conjunto $B$ cumple:

1. $\forall x \in A \exists y \in B /\ y = f(x)$ o $(x, y) \in f$. (Condición de *existencia*)

2. $\forall x \in A : (x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. (Condición de *unicidad*).

A la variable $x$ le llamaremos variable *independiente* y a la variable $y$ variable *dependiente*.

**Dominio**: al conjunto **A**, se lo llama *dominio* de la función.
Al conjunto **B** se lo llama *codominio* de la función.
**Imagen**: llamaremos *imagen* de la función, al conjunto de las imágenes por $f$ de los elementos de $A$.Indicaremos a este conjunto $If$ y observemos que $If \subseteq B$.
Simbólicamente: $If = \{y / y \in B \wedge y = f(x)\}$

## 2. Funciones de variable real

Trabajaremos con funciones de variable real,es decir, tanto $A$ como $B$ será el conjunto de los números reales o un subconjunto de este.
De ahora en adelante si al definir una función $f$ no especificamos el conjunto dominio $A$, supondremos que se está considerando el ***dominio natural*** o ***campo de definición*** de $f$ que es el mayor conjunto de números reales para los cuales la función $f$ está definida.

**Ejemplo 4** : Sea la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, de acuerdo a lo definido ante-riormente el dominio natural de esta función será el conjunto de los números reales $x$ donde la $\sqrt{1 - x^2}$ esté definida, es decir el conjunto de todos los reales que satisfacen la condición:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$$
$$-1 \leq x \leq 1$$

Luego el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es el intervalo: $Df = [-1, 1]$

**Ejemplo 5** :Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, como en el ejemplo anterior el dominio de esta función, será el conjunto de los números reales para los que la expresión $\frac{1}{1-x}$ está definida, esto el el conjunto de todos los números reales que satisfacen la condición:

$$1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Luego el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ es el conjunto $Df = \mathbb{R} - \{1\}$ o bien, usando notación de intervalos: $Df = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

**Ejemplo 6** :Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$, el dominio de esta función es el conjunto de números reales que cumplen la condición:

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4$$
$$\Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$$

Entonces el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ es el conjunto:
$Df = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

## 2.1. Representación gráfica de funciones

Veremos ahora como se puede obetenr una imagen geómetrica de las funciones de $A \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
Sea el siguiente conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

luego $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.Se puede demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre este conjunto y el conjunto de puntos del plano cartesiano.Es decir, a cada punto del plano cartesiano le corresponde un punto del conjunto $\mathbb{R}^2$ y recíprocamente a cada punto del conjunto $\mathbb{R}^2$ le corresponde un punto del plano cartesiano.

**Gráfico de una función**: Una vez definida una función, el conjunto de

todos los pares ordenados que satisfacen la regla de correspondencia que la define constituye lo que se denomina ***gráfico de la función***.
Observe que $G_f \subset \mathbb{R}^2$.
En símbolos: el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el conjunto:

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\right\}$$

**Ejemplo 7**:Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) = x^2$ entonces, el gráfico de $f$ es:

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\right\}$$

luego, los pares ordenados que pertenecen al gráfico de $f$ tiene la forma $(x, x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
La figura 1 muestra la representación gráfica de la función del ejemplo 4.

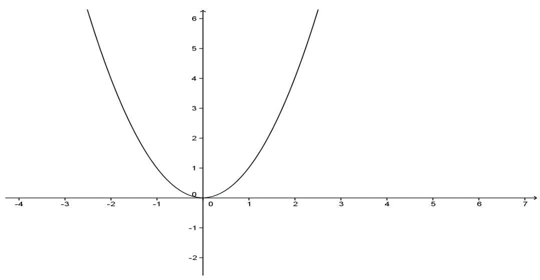


Figura 1: Gráfico de la función $f(x) = x^2$

**Ejemplo 8**:Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ cuyo dominio es el conjunto: $Df = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, el gráfico de esta función se muestra en la figura 2.

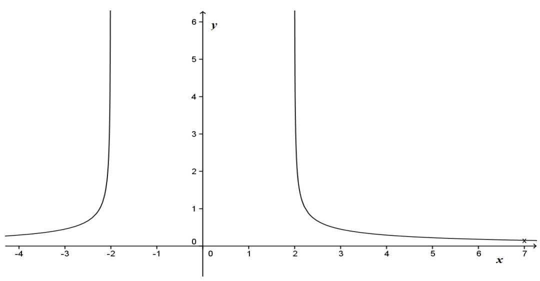


Figura 2: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

# 3. Funciones elementales

## 3.1. Función lineal

Se define la función lineal como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = ax + b$$

El gráfico de la función lineal consiste en todos los pares ordenados de la forma:$(x, ax + b)$ con $x$ en $\mathbb{R}$.La representación gráfica en el plano es una recta.
El coeficiente $a$ se denomina *pendiente* de la recta, está relacionado con la inclinación de la recta respecto del eje $x$, ya que es el valor de la tangente trigonómetrica del ángulo de inclinación de la recta con el eje $x$.

$$a = tg(\alpha)$$

El coeficiente independiente $b$ se denomina *ordenada al origen*.
La figura 3 nos muestra el gráfico de la función $f(x) = 2x + 3$. Se puede ver

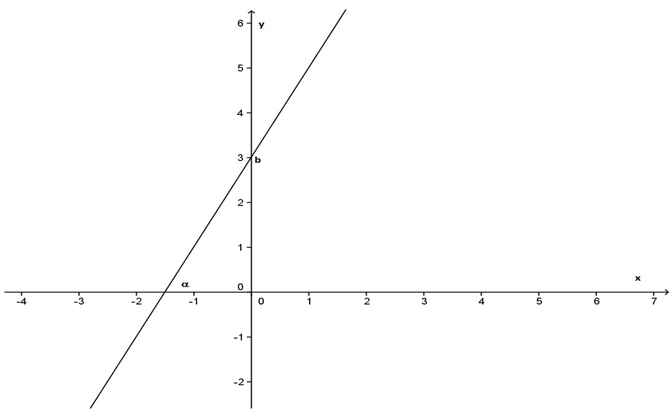



Figura 3: Gráfico de la función $f(x) = 2x + 3$

que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{R}$
**Función Constante**: Si en la definición anterior $a = 0$, la función resultante $f(x) = b$ se denomina *función constante*.
Es decir,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = b$$

Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \{b\}$ Asi, por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2$, luego su gráfica esta dada en la figura 4.
**Función Idéntica**: Si en la definición de función lineal se hace $a = 1$ y $b = 0$, la función resultante $f(x) = x$ se denomina *función idéntica*.Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{R}$. La figura 5 muestra la representación gráfica

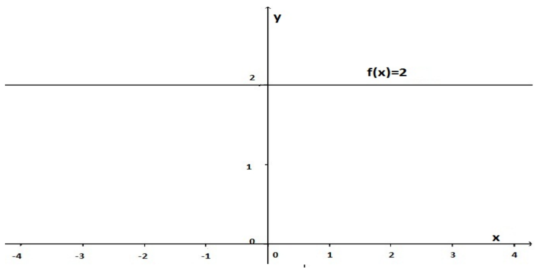



Figura 4: Gráfico de la función $f(x) = 2$

de la función idéntica.

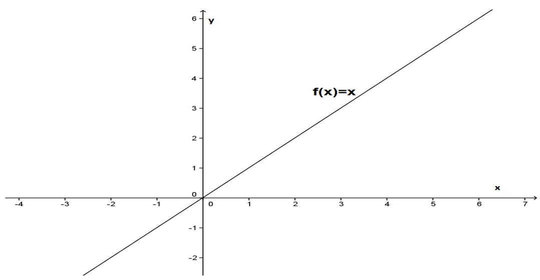



Figura 5: Gráfico de la función $f(x) = x$

### 3.2. Función valor absoluto

Se define como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = |x|$; entonces

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Observación**: $|x| = \sqrt{x^2}$. En este caso $Df = \mathbb{R}$ y $If = [0, +\infty)$ La figura 6 muestra el gráfico de la función valor absoluto.

**Propiedades del valor absoluto**:

1. $\forall x, x \neq 0 : |x| > 0$
2. $\forall k \in \mathbb{R}, k > 0, \forall x, : (|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k)$
3. $\forall k \in \mathbb{R}, k > 0, \forall x, : (|x| > k \Leftrightarrow x < -k \vee x > k)$
4. $\forall x \forall y : |x.y| = |x| \, . \, |y|$
5. $\forall x \forall y : |x + y| \leq |x| + |y|$

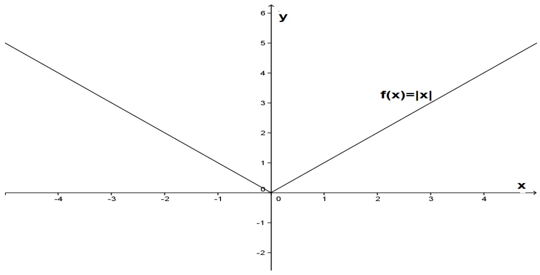



Figura 6: Gráfico de la función $f(x) = |x|$

## 3.3. Función parte entera

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = [x]$
donde $[x] = max\,\{k \in \mathbb{Z}/k \leq x\}$, es decir la parte entera de $x$ es el mayor número entero $k$ que cumple con la condición: $k \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k \leq x < k+1$. Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{Z}$ La figura 7 muestra el gráfico de la función parte entera.

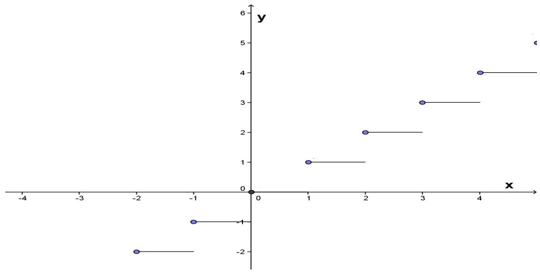



Figura 7: Gráfico de la función $f(x) = [x]$

## 3.4. Función mantisa

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x - [x]$.
Es la función tal que a cada $x$ real le asigna la parte decimal del mismo número. Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = [0, 1)$

## 3.5. Función signo

Se define como $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}/sgn(x) = \frac{|x|}{x}$
De acuerdo a la definición es: $Df = \mathbb{R} - \{0\}$ y $If = \{-1, 1\}$.

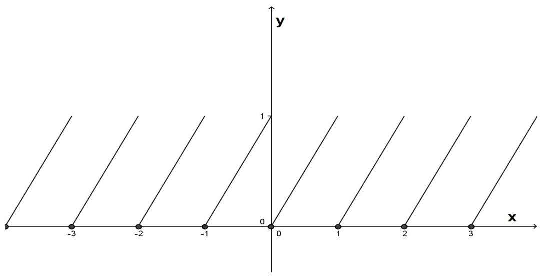



Figura 8: Gráfico de la función $f(x) = x - [x]$

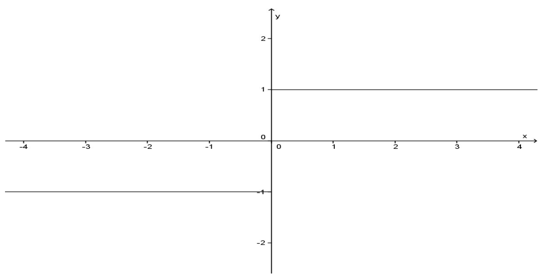



Figura 9: Gráfico de la función $f(x) = sgn(x)$

## 3.6. Función cuadrática

Se define:$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a$, $b$ y $c$ son constantes que representan números reales, y $a \neq 0$.
La gráfica de esta función es una parábola de eje vertical.
Por ejemplo, si $f$ es la función definida como $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ su gráfica es la parábola cuyo vértice es el punto: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ (recordemos que el vértice esta dado por la ecuación: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$)
La gráfica de $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ se muestra en la figura 9.

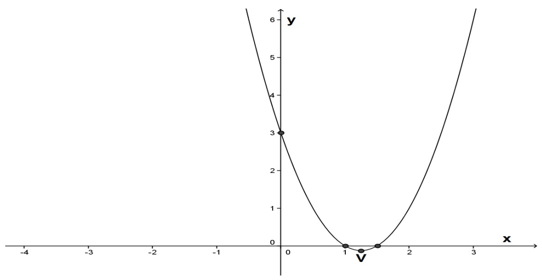



Figura 10: Gráfico de la función $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

### 3.7. Función polinómicas

La función lineal y la función cuadrática son casos particulares de una familia de funciones más amplia, que son las *funciones polinómicas.*Estas se definen como:$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ donde $a_1, ..., a_n$. son constantes reales llamadas *coeficientes*.
La figura 10 muestra el gráfico de la función plinómica de grado 3,
$f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

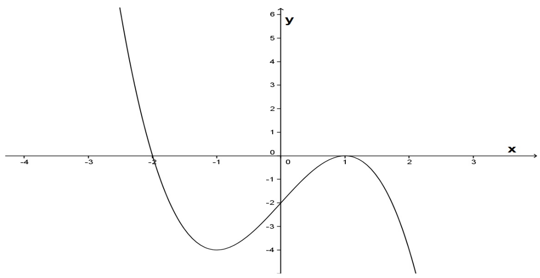



Figura 11: Gráfico de la función $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

## 4. Paridad de funciones

### 4.1. Función par

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es ***par*** si es $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Así por ejemplo la función $f(x) = x^2$ es par ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Otro ejemplo de función que es par es la función $f(x) = |x|$.

### 4.2. Función impar

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es ***impar*** si es $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Así por ejemplo la función $f(x) = x^3$ es impar ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Otro ejemplo de función que es impar es la función $f(x) = x$.

**Para pensar**:Qué propiedad de simetría tiene la representación gráfica de una función par? y la de una función impar?.

# 5. Clasificación de funciones

## 5.1. Funciones Inyectivas

Una función $f : A \to B$ se dice ***inyectiva*** si cumple la siguiente condición: si $x_1$, $x_2 \in A$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces debe ser $x_1 = x_2$.
Así por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x+3$ es inyectiva y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$ no es inyectiva.

## 5.2. Funciones suryectivas o sobreyectivas

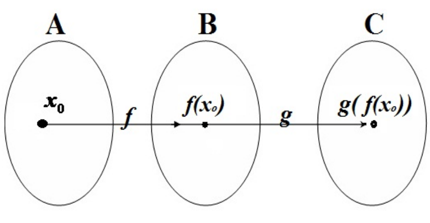
Una función $f : A \to B$ se dice ***suryectiva o sobreyectiva*** si cumple la siguiente condición:cualquiera sea $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
Esto es equivalente a decir que $f : A \to B$ se dice *suryectiva o sobreyectiva* si la $If = B$.
Así por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$ es sobreyectiva y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$ no es sobreyectiva.

## 5.3. Funciones biyectivas

Una función $f : A \to B$ se dice ***biyectiva*** si es inyectiva y suryectiva.
**Ejemplo 9**: de acuerdo a lo visto anteriormente la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$ es biyectiva.

# 6. Composición de funciones

Sean $A$, $B$ y $C$ tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Si $x_0$ es un elemento de $A$, por $f$ le corresponder $f(x_0)$; como $f(x_0)$ es un elemento de $B$, por $g$ le corresponder un elemento de $C$ que será:$g(f(x_0))$.




**Definición**:Sean $A$, $B$ y $C$ tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones.La composición de $g$ y $f$ es la función $g \circ f : A \to C$ definida por $g \circ f = g(f(x))$.
Sean ahora las funciones $f : A \to B$ y $g : M \to N$, para que exista la función compuesta $g \circ f$ es necesario que la $If \subseteq Dg$.

**Ejemplo 10**:Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/g(x) = x^2$, entonces la función $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se obtiene de la siguiente manera:
$(g \circ f)(x) = g(2x + 1) \Rightarrow (g \circ f)(x) = (2x + 1)^2$
Si ahora se quiere obtener $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow (f \circ g)(x) = f\left(x^2\right) \Rightarrow (f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$

**Ejemplo 11**: Sean $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)/f(x) = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$ y
$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}/g(x) = \sqrt{x}$
La composición $f \circ g : [0, +\infty) \to (-\infty, 0)$ será: $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) \Rightarrow (f \circ g)(x) = -\dfrac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \Rightarrow (f \circ g)(x) = -\dfrac{1}{1 + x}$

Sin embargo la composición $g \circ f$ no existe ya que $If$ no está incluida en el $Df$.

# 7. Función inversa

Sea $f : A \to B$ una función.Se llama función inversa de $f$ a la función $g : B \to A$ tal que
$g \circ f(x) = x,\ \forall x \in A$
y
$f \circ g(x) = x,\ \forall x \in B$.
Si la función inversa de $f$ existe la denotaremos: $f^{-1}$.
si $f$ es una función cualquiera, siempre tiene inversa?
La respuesta a esta pregunta viene dada por la siguiente proposición:

**Proposición 1** *:*
*Sea $f : A \to B$ una función. Existe entonces función inversa de $f$ si y sólo si $f$ es biyectiva.*

Demostración: supongamos que $f$ tiene función inversa $f^{-1}$. Debemos probar que $f$ es biyectiva.
Por definicón $f^{-1} : B \to A$ es tal que cumple $f^{-1} \circ f(x) = x,\ \forall x \in A$
y $f \circ f^{-1}(x) = x,\ \forall x \in B$.
la inyectividad de $f$ resulta de: si $x_1, x_2 \in A$ son tales que: $f(x_1) = f(x_2)$
entonces será: $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$
o sea: $f^{-1} \circ f(x_1) = f^{-1} \circ f(x_2)$
lo que por definición resulta : $x_1 = x_2$
Para probar suryectividad, consideremos un $y_0$ cualquiera en $B$. Debemos encontrar un $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y_0$; pero si $x_0 = f^{-1}(y_0)$ resulta:
$f(x_0) = f\left(f^{-1}(y_0)\right) = y_0$

Supongamos ahora que $f$ es biyectiva y probemos que en ese caso hay función inversa de $f$.
Para $y$ en $B$ sabemos por la suryectividad de $f$, que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y sabemos por la inyectividad de $f$, que ese $x$ es único. Definimos entonces $g(y) = x$
De esta manera definimos una función $g : B \to A$ que, por su propia construcción, resulta ser $f^{-1}$.•
**Ejemplo 12**: sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$,
su función inversa es la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

En efecto si se hace:
$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(2x+3) \Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = \dfrac{(2x+3)-3}{2}$
$\Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = \dfrac{(2x)}{2}$
$\Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = x$

y si se hace:
$f \circ f^{-1}(x) = f\left(\dfrac{x-3}{2}\right) \Rightarrow f \circ f^{-1}(x) = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 \Rightarrow$
$f \circ f^{-1}(x) = (x-3) + 3 \Rightarrow f \circ f^{-1}(x) = x$
Luego la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$
es la función inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$.

## 8. Función homográfica

La función homográfica tiene la forma: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ donde $c \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$.
Veamos ahora el por qué de estas restricciones:
Si $c = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$ que es la función lineal.
Si $ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Entonces,
$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{b\left(\dfrac{a}{b}x+1\right)}{d\left(\dfrac{c}{d}x+1\right)} = \dfrac{b}{d} \Rightarrow$ la función es constante.

El dominio de esta función será el conjunto de los números reales menos aquellos que anulen el denominador. Luego:

$$Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

El gráfico de esta función es una curva llamada *hipérbola.*

Ejemplo: Sea la función $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} / f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$ Observación: si en la

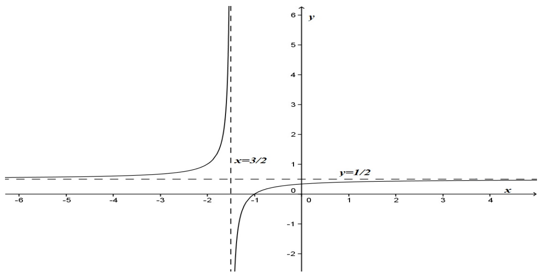



Figura 12: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$

función del ejemplo $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$ se hace:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x+\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = -\frac{\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2}$$

La recta $x = \dfrac{-3}{2}$ es la ecuación de la *asíntota vertical*.

La recta $y = \dfrac{1}{2}$ es la ecuación de la *asíntota horizontal*.

# 9. Funciones trascendentes

## 9.1. Función exponencial

La funcion *exponencial* se define: $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty) / f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Se puede probar que esta función es *inyectiva* y *suryectiva*, por lo tanto es *biyectiva*. El gráfico de esta función para el caso $a > 1$ viene dado en la figura 13, como se puede observar la función es creciente y positiva. En el caso $0 < a < 1$ la función es decreciente y se muestra el gráfico en la figura 14.

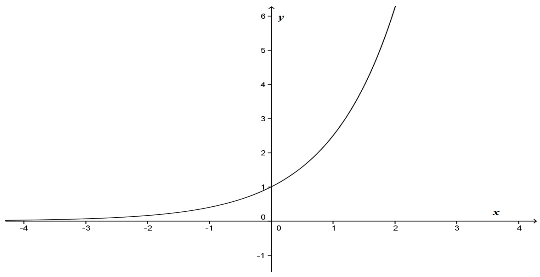



Figura 13: Gráfico de la función $f(x) = a^x$ con $a > 1$

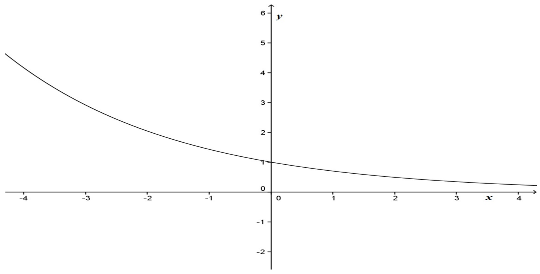



Figura 14: Gráfico de la función $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

## 9.2. Función logaritmo

Si $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es la función tal que $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces su inversa se denomina función *logaritmo en base a* y se indica $log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Esto define, para cada $x > 0$, un número real $log_a(x)$ caracterizado por la propiedad:

$$log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Dicho número, $log_a(x)$, se llama *logaritmo en base a de x.*
Recordemos que $a > 0$ y $a \neq 1$ . si $a = 10$ entonces $y = log(x)$ y si $a = e$ entonces $y = ln(x)$.
La grfica de la función logaritmo para $a > 1$ se muestra en la figura 15 y para $0 < a < 1$ en la figura 16.

**Propiedades de los logaritmos:**

1. $log_a(x.y) = log_a(x) + log_a(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$
2. $log_a(x : y) = log_a(x) - log_a(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$
3. $log_a(x^n) = n.log_a(x)\ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$
4. $a^{log_a(x)} = x\ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$

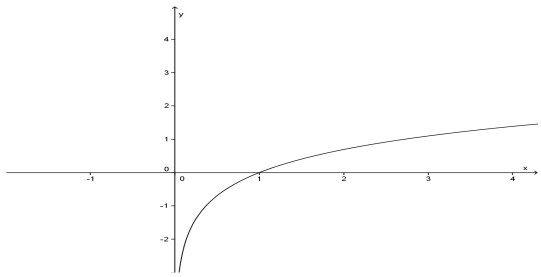


Figura 15: Gráfico de la función $f(x) = log_a(x)$ con $a > 1$

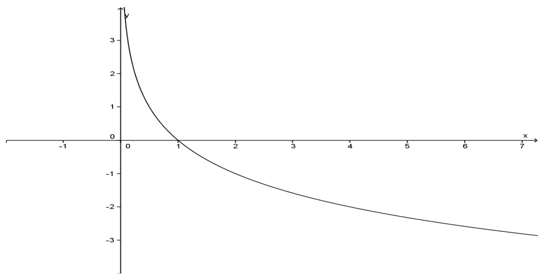
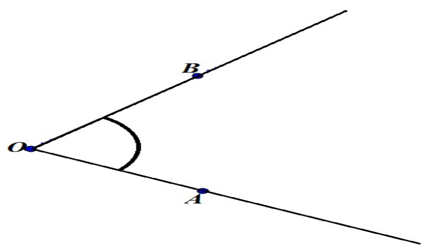


Figura 16: Gráfico de la función $f(x) = log_a(x)$ con $0 < a < 1$

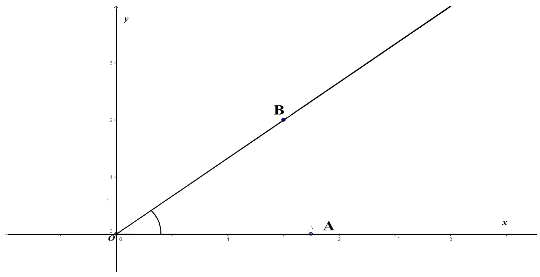
## 9.3. Funciones trigonométricas

### 9.3.1. Ángulos

**Definición:** Se llama ángulo a la porción del plano comprendida entre dos semirectas con el mismo origen. Cada una de ellas se llama *lado* del ángulo y el origen se llama *vértice*. El lado $\vec{OA}$ se denomina lado *inicial* y el lado $\vec{OB}$ lado *terminal*.




**Ángulo en posición normal**: Se dice que un ángulo se encuentra en *posición normal* cuando su vértice coincide con el origen de coordenadas y su lado inicial con el semieje positivo de abscisas.
El ángulo $A\hat{O}B$ se puede formar haciendo girar el lado $\vec{OB}$ sobre el lado $\vec{OA}$ y con esa rotación el punto $B$ se mueve hacia el punto $A$ a lo largo de




una circunferencia de centro $O$ y radio $\bar{OB}$. El ángulo es *positivo* cuando $\vec{OB}$ gira hacia $\vec{OA}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj. El ángulo es *negativo* cuando $\vec{OB}$ gira hacia $\vec{OA}$ en el sentido de las agujas del reloj.

### 9.3.2. Medición de ángulos

**Sistema circular** Si un ángulo tiene su vértice en el centro de una circunferencia de radio $r$ e intercepta en ella un arco cuya longitud es $r$ entonces dicho ángulo tiene una medida de *un radián*. En símbolos: 1 rad.

Así, el ángulo que recorre la mitad de la longitud de la circunferencia será igual a $\pi$ radianes, un cuarto de longitud de la circunferencia $\pi/2$ radianes, la longitud de la circunferencia $2\pi$ rad, etc.
Si usamos el sistema de medición sexagesimal se sabe que : 1 ángulo de un giro mide 360° el equivalente en el sistema circular es $2\pi$ rad.
Entonces:

$$1giro \approx 2\pi \text{ rad} \approx 360^\circ$$

Con esto:

$$1^\circ \approx \frac{2\pi}{360^\circ} \text{ y } 1rad \approx \frac{360^\circ}{2\pi}$$

## 9.4. Funciones trigonométricas definidas en un triángulo rectángulo

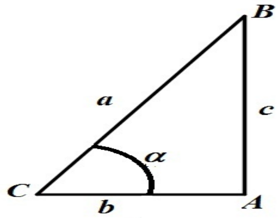



Figura 17: Triángulo BAC

Sea $BAC$ un triángulo rectángulo en $\hat{A}$, se define:

$$sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{c}{a}$$

$$cos(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{b}{a}$$

$$tan(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \Rightarrow tan(\alpha) = \frac{c}{b}$$

$$cosec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} \Rightarrow cosec(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$sec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} \Rightarrow sec(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$cotan(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} \Rightarrow cotan(\alpha) = \frac{b}{c}$$

Se puede probar que:

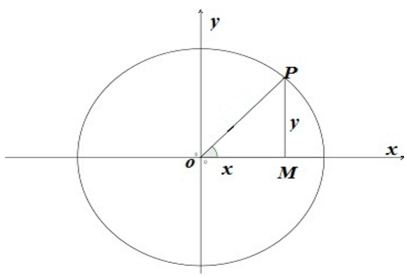
$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$tan(\alpha) = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

De esta manera quedan definidas las funciones trigonométricas para ángulos mayores que 0 y menores que un ángulo recto. La extensión de estas funciones a ángulos cualesquiera se da a continuación

## 9.5. Funciones trigonométricas




**La circunferencia trigonométrica**

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano y la circunferencia con centro en el origen y radio $r$.

Si consideramos un ángulo $\alpha$ menor que un recto, entonces en el triángulo rectángulo $OMP$, como el radio $OP$ es igual a $r$, resulta:

$$sen(\alpha) = \frac{PM}{OP} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{y}{r}$$
$$cos(\alpha) = \frac{OM}{OP} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{x}{r}$$
$$tan(\alpha) = \frac{PM}{OM} \Rightarrow tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$

**Observación** La abscisa del punto resultante al girar un ángulo $\alpha$ es la que le da el signo al coseno de dicho ángulo y la ordenada es la que le da el signo al seno.

De acuerdo con esta observación, el seno es positivo en los dos primeros cuadrantes y negativo en el tercer y cuarto cuadrante.

El coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante y negativo en el segundo y tercer cuadrante.

Se puede probar que esta definición de las funciones trigonométricas también cumplen las propiedades enunciadas anteriormente. A saber:

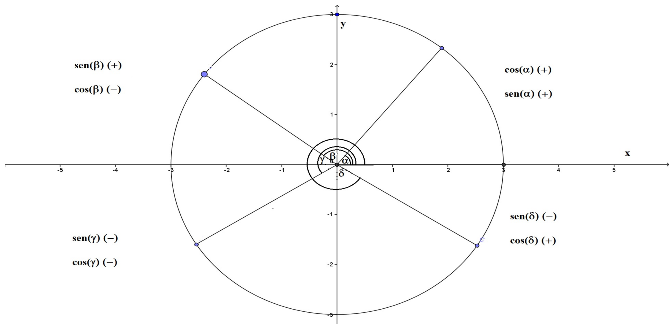



Figura 18: Signo del seno y coseno

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$
$$tan(\alpha) = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$
$$tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Se vió anteriormente que se puede expresar la medida de un ángulo como un número real. Como las funciones trigonométricas están definidas sobre ángulos, y los ángulos se pueden medir en radianes por ejemplo, entonces se puede pensar definir las funciones trigonometricas como funciones de $A$ en $\mathbb{R}$ donde $A \subseteq \mathbb{R}$.

## 9.6. Función seno

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = sen(x)$. La representación gráfica esta dada en la figura 19. La curva que representa la gráfica de la función

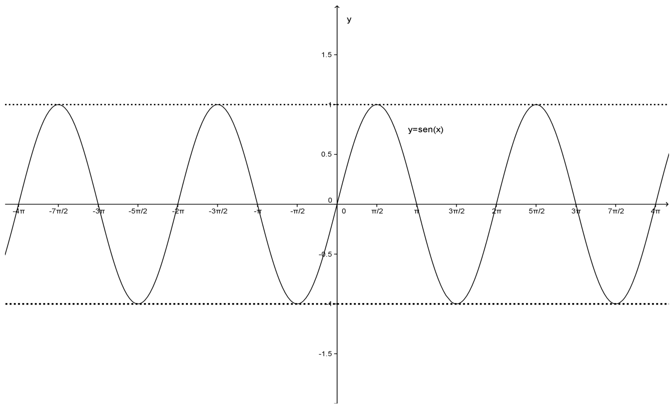



Figura 19: Gráfico de la función $y = sen(x)$

$y = sen(x)$ se denomina *sinusoide.*
El $Df = \mathbb{R}$ y su $If = [-1, 1]$.
Es una función impar.
La función alcanza un máximo de 1 y un mínimo de -1.
Los ceros de esta función son de la forma: $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Es una función periódica de período $2\pi$. Esto es: $sen\,(x + 2\pi) = sen\,(x)$ En general $sen\,(x + 2k\pi) = sen\,(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Tal como está definida no es inyectiva, ni suryectiva, por lo que no es biyectiva.
Si se define ahora:$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]\,/f(x) = sen(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa del seno es el arcoseno y se define:
$f : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]/f(x) = sen^{-1}(x)$

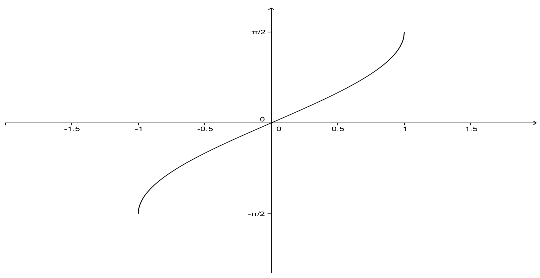



Figura 20: Gráfico de la función $y = sen^{-1}(x)$

## 9.7. Función coseno

Se define como: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = cos(x)$. La representación gráfica esta dada en la figura 21. La curva que representa la gráfica de la función

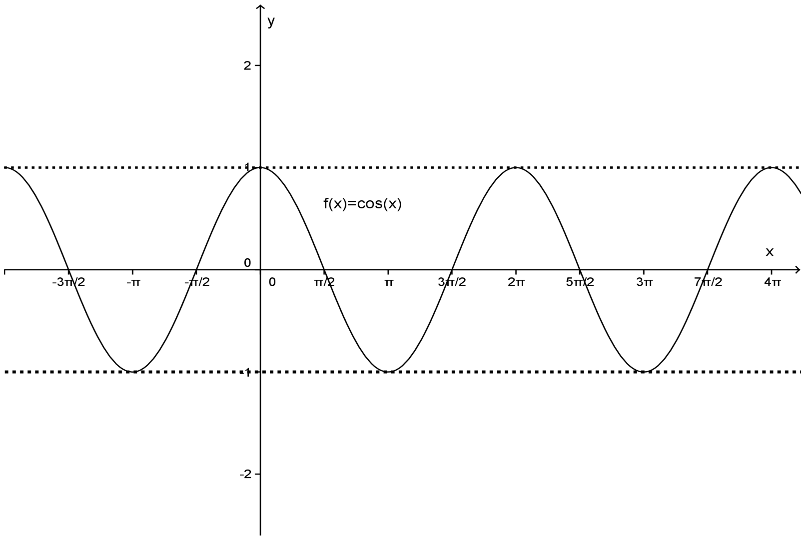



Figura 21: Gráfico de la función $y = cos(x)$

$y = cos(x)$ se denomina *cosinusoide.*
El $Df = \mathbb{R}$ y su $If = [-1, 1]$.
Es una función par.
La función alcanza un máximo de 1 y un mínimo de -1.
Los ceros de esta función son de la forma: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Es una función periódica de período $2\pi$. Esto es: $cos\,(x + 2\pi) = cos\,(x)$ En general $cos\,(x + 2k\pi) = cos\,(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Tal como está definida no es inyectiva, ni suryectiva, por lo que no es

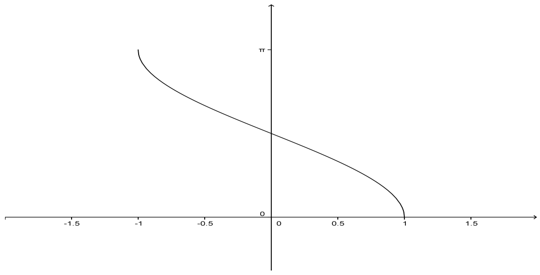



Figura 22: Gráfico de la función $y = cos^{-1}(x)$

biyectiva.

Si se define ahora:$f:[0,\pi]\rightarrow[-1,1]\,/f(x)=cos(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa del coseno es el arcocoseno y se define:
$f:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]\,/f(x)=cos^{-1}(x)$

## 9.8. Función tangente

Se define como: $f:A\rightarrow\mathbb{R}/f(x)=tan(x)$, donde
$A=\left\{x/x\in\mathbb{R},x\neq(2k+1)\,\dfrac{\pi}{2}\forall k\in\mathbb{Z}\right\}$.
La representación gráfica esta dada en la figura 23. La curva que representa

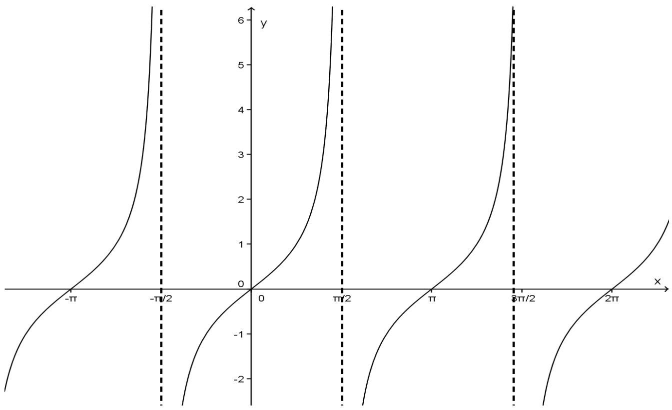



Figura 23: Gráfico de la función $y=tan(x)$

la gráfica de la función $y=tan(x)$ se denomina *tangentoide.*
El $Df=\left\{x/x\in\mathbb{R},x\neq(2k+1)\,\dfrac{\pi}{2}\forall k\in\mathbb{Z}\right\}$ y su $If=\mathbb{R}$.
Es una función impar.No está acotada.
Los ceros de esta función son de la forma: $x=k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Es una

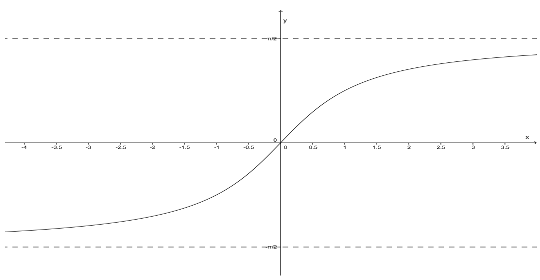


Figura 24: Gráfico de la función $y=tan^{-1}(x)$

función periódica de período $\pi$. Esto es: $tan\,(x+\pi)=tan\,(x)$. En general $tan\,(x+k\pi)=tan\,(x)$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Tal como está definida no es inyectiva,si es suryectiva,por lo que no es biyectiva.

Si se define ahora:$f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = tan(x)$ es biyectiva, luego tiene inversa, la función inversa de la tangente es el arcotangente y se define:
$f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) / f(x) = tan^{-1}(x)$