Teoría de Conjuntos

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
LICENCIATURA EN SISTEMAS

Lic. Silvina San Miguel

Conceptos primitivos

- **Conjunto:** agrupación de objetos llamados **elementos**.

- **Relación de pertenencia:** Si A es un conjunto y x es un elemento de A, la expresión simbólica **$x \in A$,** se lee **"x pertenece a A"** y significa que **"x es un elemento del conjunto A"**

Relación de inclusión:

Sean A y B dos conjuntos, A está incluido en B, lo que se denota $A \subset B$ si, y sólo si, todo elemento de A es elemento de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Propiedades de la relación de inclusión

(a) $A \subset A; \quad \forall A$ (Propiedad reflexiva)

(b) $\forall A,B$: si $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A=B$
(Propiedad antisimétrica)

(c) $\forall A, B, C$: si $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
(Propiedad transitiva)

AXIOMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

- **Axioma 1. (Axioma de Sustitución)**

  "Sea P(x) una proposición respecto a la variable x. Si P(x) es verdadera y si u = x, entonces P(u) es también verdadera".

- **Axioma 2. (Axioma de Extensión)**

  "Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos".

  Simbólicamente: $A = B \Leftrightarrow [\, A \subset B \wedge B \subset A \,]$

Propiedades de la relación de igualdad

(a) $A = A;\ \forall A$ (Propiedad reflexiva)

(b) $\forall A,B$: si $A = B \Rightarrow B = A$
(Propiedad simétrica)

(c) $\forall A, B, C$: si $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$
(Propiedad transitiva)

Por cumplir estas tres propiedades se trata de una relación de equivalencia

Axiomas de la teoría de conjuntos

- **Axioma 3. (Axioma de Especificación)**

  "Dado un conjunto U y una función proposicional P(x) con $x \in U$, existe un único subconjunto A de U, cuyos elementos son todos los elementos $x \in U$ tales que P(x) es verdadera".

$$A = \{x \in U \,/\, P(x)\}$$

- **Conjunto vacío:** $\varnothing = \{x \,/\, f(x)\}$

  Ejemplo: $\varnothing = \{x \in R \,/\, x \neq x\}$

- **Propiedades del conjunto vacío**

$$a) \qquad \forall a : a \notin \phi$$

$$b) \qquad \forall A : \phi \subset A$$

$$c) \qquad \phi \ \text{ es único}$$

Axiomas de la teoría de conjuntos

- **Axioma 4. (Axioma del conjunto potencia)**

  "Dado un conjunto E, existe un conjunto y solamente uno cuyos elementos son todos los subconjuntos de E".

  $$P(E) = \{A \,/\, A \subset E\}$$

- **Observación:**

  a) Como para todo conjunto E, $\phi \subset E$ y $E \subset E$, entonces

  $$\phi \in P(E) \quad \text{y} \quad E \in P(E)$$

  b) Se demuestra que, si A es un conjunto que tiene n elementos, entonces P (A) tiene 2^n elementos.

Operaciones con Conjuntos

Unión de Conjuntos

- **Axioma 5 (Axioma de la unión de conjuntos)**

  "Dados dos conjuntos A y B, existe un conjunto U tal que $A \subset U$ y $B \subset U$".

- **Definición.-** Sean $A \subset U$ y $B \subset U$ dos conjuntos, la unión de A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos $x \in U$ tales que $x \in A$ o $x \in B$.

  Simbólicamente

$$A \cup B = \{x \in U / \ x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

  Es decir

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B]$$

Operaciones con Conjuntos

Intersección de Conjuntos

- **Definición.-** Sean A $\subset$ U y B $\subset$ U dos conjuntos, **la intersección de A y B,** denotada por $A \cap B$ es el conjunto formado por todos los elementos x de U, tales que x $\in$ A y x $\in$ B.

Simbólicamente: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$

Es decir

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

Observación

Si $A \cap B = \phi$, se dirá que los conjuntos A y B son disjuntos.

Operaciones con Conjuntos

Diferencia de Conjuntos

- **Definición.-** Dados los conjuntos $A \subset U$ y $B \subset U$, **la diferencia de A y B**, denotado por A -B, es el conjunto formado por todos los elementos x de U tales que $x \in A$ y $x \notin B$.

Simbólicamente: $A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

Es decir,

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow [\, x \in A \wedge x \notin B \,]$$

Operaciones con Conjuntos

Complemento de un Conjunto.

- **Definición.-** Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subset B \subset U$. Se llama **complemento de A con respecto al conjunto B**, y se denota por $\boldsymbol{C}_B A$, a la diferencia B -A.

  Es decir, $\boldsymbol{C}_B A = B - A$.

- **Observación:** Si B = U, el complemento de A respecto a U se denota simplemente por: $\overline{A}$ ó $\boldsymbol{C}A$. En este caso se tiene por definición que: **x pertenece a $\overline{A}$ si, y sólo si, x no es elemento de A.**

  En símbolos,

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

Operaciones con Conjuntos

Diferencia simétrica.

- **Definición.-** Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset U$. Se llama **diferencia simétrica entre A y B**, y se denota por $A \Delta B$, al conjunto formado por todos los elementos x de U tales que $x \in A$ y $x \notin B$ o $x \in B$ y $x \notin A$.

  Simbólicamente: .

$$A \Delta B = \{x \in U / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

Propiedades de la Unión

- **Teorema 1**

  Dado los conjuntos A, B, C, D, y ϕ, en un conjunto universal **U**, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A \subset (A \cup B) \wedge B \subset (A \cup B)$

b) $A \subset D \wedge B \subset D \Rightarrow (A \cup B) \subset D$

c) $A \cup A = A$ (Idempotencia)

d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociativa)

e) $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa)

f) $A \cup \phi = A$ (Elemento Neutro)

g) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

h) $A \cup U = U$

Propiedades de la Intersección

- **Teorema 2**
- Dado los conjuntos A, B, C y ϕ, en el conjunto universal **U**, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $(A \cap B) \subset A \wedge (A \cap B) \subset B$

b) $A \cap A = A$ (Idempotencia)

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Asociativa)

d) $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativa)

e) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

f) $A \cap \phi = \phi$

g) $A \cap U = A$

Propiedades distributivas

- **Teorema 3**

  Dado los conjuntos A, B y C se cumplen las siguientes propiedades distributivas:

  a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

- **Teorema 4**

  Dado los conjuntos A, B, C, y ϕ, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A - \phi = A$

b) $A - A = \phi$

c) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

d) d) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B) = A \cap \boldsymbol{C}B$

Propiedades del complemento

- **Teorema 5.**

  Dado los conjuntos ϕ, $A \subset U$ y $B \subset U$, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{C}(\mathcal{C}A) = A$

b) $A \subset B \Rightarrow \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$; $\mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A \Rightarrow A \subset B$

c) $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$

d) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$

e) $A \cap \mathcal{C}A = \phi$

f) $A \cup \mathcal{C}A = U$

g) $\mathcal{C}\phi = U$ y $\mathcal{C}U = \phi$.

Relacionando el álgebra de conjuntos con el álgebra de proposiciones.

Álgebra de Conjuntos	**Álgebra de proposiciones**
Unión ($\cup$)	Disyunción ($\vee$)
Intersección ($\cap$)	Conjunción ($\wedge$)
Complemento ($\overline{\ }$)	Negación (~)
Conjunto vacío ($\varnothing$)	Falso (f)
Conjunto Universal (U)	Verdadero (v)
Diferencia simétrica (Δ)	Disyunción excluyente ($\underline{\vee}$)

Álgebra de Conjunto: Propiedades

Idempotencia	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Conmutatividad	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociatividad	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributividad	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento Neutro	
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
Elemento Absorbente	
$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Absorción	
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Involución	
$\overline{\overline{A}} = A$	
Leyes de De Morgan	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Par ordenado

- Es todo conjunto de dos elementos en el que se distingue un primer elemento y un segundo elemento.

  (a, b) par ordenado de primera componente a y segunda componente b

Producto cartesiano de dos conjuntos : A x B

- Es el conjunto que tiene por elementos todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B.

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

- Ejemplo 1: Sean

$$A = \{x \in Z / -1 \leq x < 2\}$$

$$B = \{x \in N / |x - 1| \leq 1\}$$

Hallar A x B

- Efectuar A x B, considerando cada uno de los conjuntos anteriores en el universo de los reales.

Propiedades del producto cartesiano

a)	$A\times B\neq B\times A$
b)	$A\times\phi\neq\phi\times A=\phi$
c)	Si $A\subset B\wedge C\subset D\Rightarrow(A\times C)\subset(B\times D)$
d)	Si $(A\times C)\subset(B\times D)\wedge(A\times C)\neq\phi\Rightarrow A\subset B\wedge C\subset D$
e)	$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
f)	$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$
g)	$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

Relación binaria

- Entre los elementos de los conjuntos A y B, es todo subconjunto del producto cartesiano A x B

$$R = \{(x, y) \in A \times B \,/\, xRy\}$$

Ejemplos:

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \,/\, x < y\}$$

$$R_2 = \left\{(x, y) \in A \times B \,/\, x = \dot{y}\right\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in A \times B \,/\, y = x^2\}$$

Conjuntos importantes

- A es el **conjunto de partida** de la relación.
- B es el **conjunto de llegada** de la relación.
- **Dominio de la relación:** es el conjunto que tiene por elementos las primeras componentes de los pares ordenados de la relación.
- **Imagen de la relación:** es el conjunto que tiene por elementos las segundas componentes de los pares ordenados de la relación.

Relación definida en un conjunto

- Es toda relación definida a partir del producto cartesiano A x A. El conjunto de partida es igual al conjunto de llegada.

- Ejemplo:

$$A = \left\{ x \in R / \frac{x+1}{x-3} < 1 \right\}$$

$$R = \{(x, y) \in A \times A / y = 2x - 1\}$$