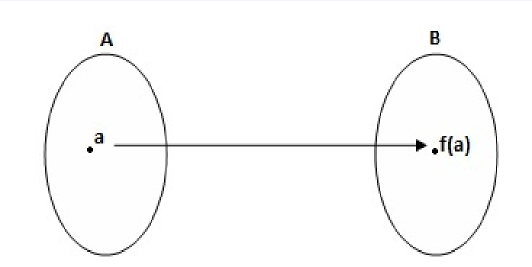
Funciones

Definición de funciones

Sean **A** y **B** dos conjuntos cualesquiera. Una *función* de **A** en **B** es una correspondencia que a cada elemento de **A** le asigna un *único* elemento de **B**.



Se acostumbra a indicar una función de **A** en **B** como **f:A**$\rightarrow$**B** y si **a** $\in$ **A** indicar con **f(a)** al elemento de **B** que le corresponde por la función. Esto es equivalente a decir que **f(a)** es la imagen de **a** por medio de **f**

Ejemplo 1

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $f : A \to B$ tal que $f(1) = 3,\ f(2) = 4,\ f(3) = 5,\ f(4) = 6,\ f(5) = 7$

Se observa en el ejemplo anterior que f es una función ya que a cada elemento del conjunto A, le corresponde un único elemento del conjunto B. Al conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7\} \subset B$, se lo denomina conjunto imagen de la función f.

Ejemplo 2

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $f : A \rightarrow B$, tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$
Se observa que esta última correspondencia no es una función ya que $5 \in A$, pero al 5 no le corresponde ningún elemento en B.

Ejemplo 3: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea ahora $f : A \to B$, tal que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$, $f(5) = 7$.
Se observa que esta correspondencia no es una función, ya que al elemento $3 \in A$, le corresponde más de un elemento en B.
Es importante recalcar dos aspectos de la definición de función, que son las condiciones de existencia y unicidad, se dice üna correspondencia que a cada elemento de A (existencia) le asigna un único elemento en B (unicidad)". En el ejemplo 2, la correspondencia dada no es una función, ya que no cumple la condición de existencia.Y el ejemplo 3 muestra una correspondencia que no cumple la condición de unicidad.

Expresión simbólica

$f : A \to B$ es una función si la correspondencia entre los elementos del conjunto A y el conjunto B cumple:

1. $\forall x \in A \exists y \in B /\ y = f(x)$ o $(x, y) \in f$. (Condición de *existencia*)
2. $\forall x \in A : (x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. (Condición de *unicidad*).

A la variable x le llamaremos variable *independiente* y a la variable y variable *dependiente*.

Dominio e Imagen de una función

Dominio: al conjunto **A**, se lo llama *dominio* de la función.
Al conjunto **B** se lo llama *codominio* de la función.
Imagen: llamaremos *imagen* de la función, al conjunto de las imágenes por f de los elementos de A.Indicaremos a este conjunto If y observemos que $If \subseteq B$.
Simbólicamente: $If = \{y/y \in B \wedge y = f(x)\}$

Funciones de variable real

Trabajaremos con funciones de variable real,es decir, tanto A como B será el conjunto de los números reales o un subconjunto de este.
De ahora en adelante si al definir una función f no especificamos el conjunto dominio A, supondremos que se está considerando el **dominio natural** o **campo de definición** de f que es el mayor conjunto de números reales para los cuales la función f está definida.

Ejemplo 4

Sea la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, de acuerdo a lo definido anteriormente el dominio natural de esta función será el conjunto de los números reales x donde la $\sqrt{1 - x^2}$ esté definida, es decir el conjunto de todos los reales que satisfacen la condición:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$$
$$-1 \leq x \leq 1$$

Luego el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es el intervalo:
$Df = [-1, 1]$

Ejemplo 5

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, como en el ejemplo anterior el dominio de esta función, será el conjunto de los números reales para los que la expresión $\frac{1}{1-x}$ está definida, esto el el conjunto de todos los números reales que satisfacen la condición:

$$1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Luego el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ es el conjunto $Df = \mathbb{R} - \{1\}$ o bien, usando notación de intervalos: $Df = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Ejemplo 6

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$, el dominio de esta función es el conjunto de números reales que cumplen la condición:

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4$$
$$\Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$$

Entonces el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ es el conjunto:
$Df = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Representación gráfica de funciones

Veremos ahora como se puede obtener una imagen geómetrica de las funciones de $A \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
Sea el siguiente conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

luego $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.Se puede demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre este conjunto y el conjunto de puntos del plano cartesiano.Es decir, a cada punto del plano cartesiano le corresponde un punto del conjunto $\mathbb{R}^2$ y recíprocamente a cada punto del conjunto $\mathbb{R}^2$ le corresponde un punto del plano cartesiano.

Gráfico de una función

Una vez definida una función, el conjunto de todos los pares ordenados que satisfacen la regla de correspondencia que la define constituye lo que se denomina **gráfico de la función**.
Observe que $G_f \subset \mathbb{R}^2$.
En símbolos: el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el conjunto:

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\right\}$$

Ejemplo 7

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) = x^2$ entonces, el gráfico de f es:

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\right\}$$

luego, los pares ordenados que pertenecen al gráfico de f tiene la forma (x, x^2) para todo $x \in \mathbb{R}$.
La figura 1 muestra la representación gráfica de la función del ejemplo 4.

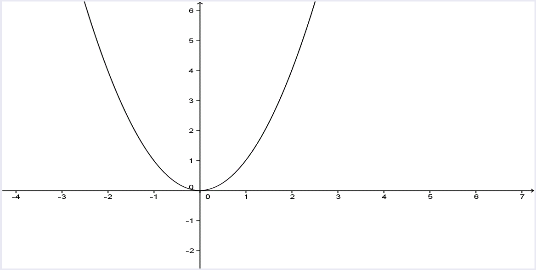


Figura: Gráfico de la función $f(x) = x^2$

Ejemplo 8

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ cuyo dominio es el conjunto: $Df = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, el gráfico de esta función se muestra en la figura 2.

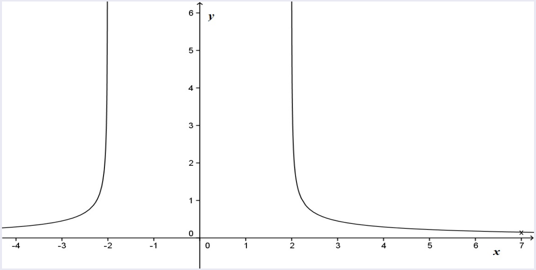


Figura: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Funciones elementales

Se define la función lineal como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = ax + b$$

El gráfico de la función lineal consiste en todos los pares ordenados de la forma:$(x, ax + b)$ con x en $\mathbb{R}$.La representación gráfica en el plano es una recta.

El coeficiente a se denomina *pendiente* de la recta, está relacionado con la inclinación de la recta respecto del eje x, ya que es el valor de la tangente trigonómetrica del ángulo de inclinación de la recta con el eje x.

$$a = tg(\alpha)$$

El coeficiente independiente b se denomina *ordenada al origen*

Función lineal

La figura 3 nos muestra el gráfico de la función $f(x) = 2x + 3$.

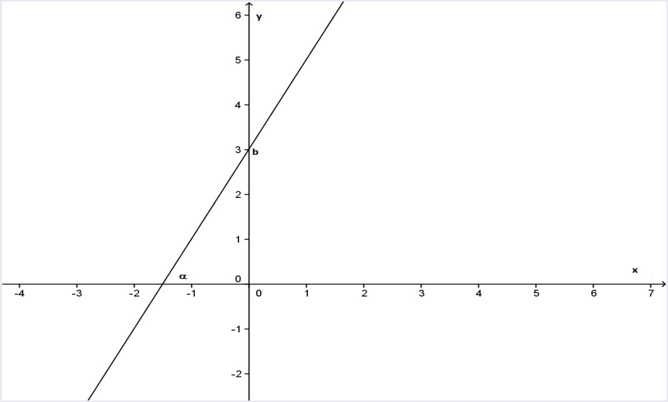


Figura: Gráfico de la función $f(x) = 2x + 3$

Se puede ver que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{R}$

Función Constante

Si en la definición anterior $a = 0$, la función resultante $f(x) = b$ se denomina *función constante*.
Es decir,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = b$$

Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \{b\}$

P

or ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2$, luego su gráfica esta dada por:

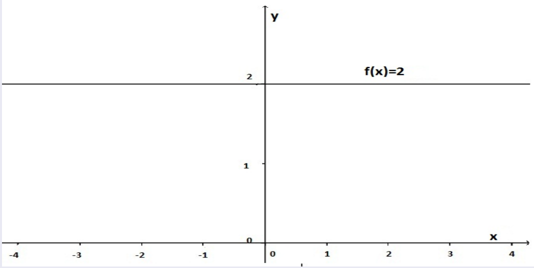


Figura: Gráfico de la función $f(x) = 2$

Función Idéntica

Si en la definición de función lineal se hace $a = 1$ y $b = 0$, la función resultante $f(x) = x$ se denomina *función idéntica*.Se observa que $Df = \mathbb{R}$ y $If = \mathbb{R}$. La figura muestra la representación gráfica de la función idéntica.

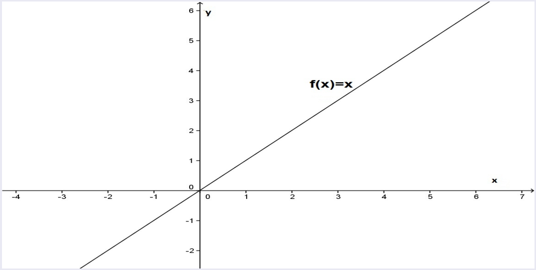


Figura: Gráfico de la función $f(x) = x$

Función valor absoluto

Se define como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = |x|$; entonces

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observación: $|x| = \sqrt{x^2}$. En este caso $Df = \mathbb{R}$ y $If = [0, +\infty)$