Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Definición: Se llama determinante a una aplicación que a cada matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ le asigna un escalar que se llama determinante de la matriz A y se denota de la siguiente manera:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

de manera que se cumpla, para cualesquiera índices i y j, que:

1. $\det(A)=\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_j+A_k & \dots. & A_n \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_j & \dots. & A_n \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k & \dots. & A_n \end{pmatrix}$
   Si una columna (o fila) de una matriz cuadrada A, se descompone en dos sumandos, entonces el determinante de A es igual a la suma de los determinantes de dos matrices que resultan de sustituir, en A, aquella columna (o fila) por uno de los sumandos.

2. $\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & \lambda\cdot A_i & \dots. & A_n \end{pmatrix}=\lambda\cdot\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i & \dots. & A_n \end{pmatrix}$
   Si una columna de una matriz cuadrada A, se multiplica por un escalar λ, entonces el determinante de A queda multiplicado por el escalar λ.
3. $\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i \dots & A_j & \dots. & A_n \end{pmatrix}=0$ si $A_i = A_j$
   El determinante de toda matriz A que tenga dos columnas o filas idénticas es nulo.
4. $\det(I)=1$
   El determinante de la matriz identidad es 1.

Observaciones:

- A_i : indica columna i-esima de A

- Las propiedades se verifican de igual manera si se consideran filas, en lugar de columnas.

Propiedades de los determinantes:

1. $\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i \dots & A_j & \dots. & A_n \end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_j \dots & A_i & \dots. & A_n \end{pmatrix}$
   Si se permutan dos columnas (o filas) de una matriz cuadrada A, el determinante cambia de signo.
2. $\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i=\vec{0} & \dots. & A_n \end{pmatrix}=0$.
   Si una columna o una fila de una matriz es nula, entonces su determinante es nulo.
3. $\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i=\sum_{j\neq i}\lambda_j A_j & \dots. & A_n \end{pmatrix}=0,$ λ_j escalares cualesquiera.
   Si una columna (o fila) de una matriz cuadrada A, es combinación lineal de las restantes, entonces el determinante de A es nulo.
4. $\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j A_j & \dots. & A_n \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_i & \dots. & A_n \end{pmatrix}$
   Si a una columna (o fila) de una matriz cuadrada A se le suma una combinación lineal de otras columnas, con ello no se altera el valor del determinante de A.

Demostración:

1. Sustituyendo las columnas i-ésima y j-ésima por $A_i + A_j$, resulta:
$0 = \det(A) = \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i + A_j \quad \ldots \quad A_i + A_j \ldots \quad A_n\right)$, hipótesis 3
$0 = \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \quad \ldots \quad A_i \ldots \quad A_n\right) + \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \quad \ldots \quad A_j \ldots \quad A_n\right) + \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_j \quad \ldots \quad A_i \ldots \quad A_n\right)$
$+ \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_j \quad \ldots \quad A_j \ldots \quad A_n\right)$, por hipótesis 1
$0 = \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \quad \ldots \quad A_j \ldots \quad A_n\right) + \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_j \quad \ldots \quad A_i \ldots \quad A_n\right)$, por hipótesis 3
$\therefore \quad \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \quad \ldots \quad A_j \ldots \quad A_n\right) = -\det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_j \quad \ldots \quad A_i \ldots \quad A_n\right)$

2. Tomando λ = 0, en la hipótesis 2 de la definición de determinante, se obtiene que:
$\det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i = \vec{0} \quad \ldots. \quad A_n\right) = \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i = 0 \cdot \vec{0} \quad \ldots. \quad A_n\right) = 0 \cdot \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i = \vec{0} \quad \ldots. \quad A_n\right) = 0$

3. Recurriendo a las hipótesis 1, 2 y 3 de la definición de determinante, se obtiene:
$$\det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j \quad \ldots. \quad A_n\right) = \sum_{j \neq i} \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i = \lambda_j A_j \quad \ldots. \quad A_n\right) =$$
$$\sum_{j \neq i} \lambda_j \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i = A_j \quad \ldots. \quad A_n\right) = \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot 0 = 0$$

4. Aplicando la hipótesis 1 de la definición y la propiedad anterior, se obtiene:
$$\det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j \quad \ldots. \quad A_n\right) = \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \quad \ldots. \quad A_n\right) + \det\left(A_1 \quad \ldots \quad \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j \quad \ldots. \quad A_n\right)$$
$$= \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \quad \ldots. \quad A_n\right) + 0 = \det\left(A_1 \quad \ldots \quad A_i \quad \ldots. \quad A_n\right)$$

Valor de un determinante:

Determinante de una matriz de orden 2:

Sea $n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, el determinante de A es: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1).4 - 3.2 = -10$

Determinante de una matiz de orden 3: Regla de Sarrus

Se escriben a continuación de las tres primeras filas (columnas), las dos primeras, luego se suman los productos señalados con línea continua y se restan los señalados con línea punteada.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \text{, o bien } \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ agregamos las dos primeras columnas } \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(-5).3 + 0.1.1 + 2.0.2 - 0.0.3 - (-1).1.2 - 2.(-5).1$$

$$|A| = 15 + 0 + 0 - 0 + 2 + 10 = 27$$

Es preciso verificar que esta fórmula de cálculo satisface las hipótesis de la definición. Lo haremos para $n = 2$

1. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$, verificaremos que: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$
$$a_{11} \cdot (a_{22}+b_{22}) - (a_{12}+b_{12}) \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} + a_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot a_{21}$$
$$a_{11} \cdot a_{22} + a_{11} \cdot b_{22} - a_{12} \cdot a_{21} - b_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} + a_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot a_{21}$$
$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} + a_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} + a_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot a_{21}$$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A') = \lambda \det(A)$. En efecto:
$$\det(A') = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \lambda \cdot a_{22} - \lambda \cdot a_{12} \cdot a_{21} = \lambda \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = \lambda \cdot \det(A)$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$

4. Sea $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

Otras propiedades:

1. El determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales.

   Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   $|A| = 12 + 2 = 14$ y $|A^t| = 12 + 2 = 14$

2. El determinante del producto de dos matrices, es igual al producto de los determinantes respectivos.
   Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -15 - 2 = -17 \\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 2 + 12 = 14 \\ A.B = \begin{pmatrix} -14 & -14 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A.B| = -126 - 112 = -238 \end{array}\right\} \therefore |A|.|B| = |A.B|$$

Desarrollo de un determinante de orden mayor que tres:

Menor complementario: Se llama menor complementario de un elemento a_{ij} de una matriz *A* de orden *n*, al determinante de orden menor *n - 1*, que se obtiene al suprimir en la matriz *A* la fila *i* y la columna *j* , lo indicaremos con $|A_{ij}|$.

Ejemplo: Dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Cofactor, adjunto o complemento algebraico: se llama adjunto, cofactor o complemento algebraico de un elemento a_{ij} de una matriz, a su menor complementario con signo positivo o negativo según sea (*i* + *j*) par o impar.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}.A_{ij}$$

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1).(1+4) = -5$

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (Laplace)

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos cofactores.

Ejemplo: desarrollar el determinante por los elementos de una fila o columna.

Sea $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ conviene desarrollar el determinante por los elementos de la segunda columna dado que dos de sus elementos son nulos.

$$|A| = 5.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

A continuación desarrollamos los determinantes de tercer orden por los elementos de la primera fila:

$$|A| = -5.\left[3.(-1)^2.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5.(-1)^3.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^4.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right] + 2.\left[2.(-1)^2.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4.(-1)^3.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3.(-1)^4.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$|A| = -5.[3.(4-3) - 5.(8-3) + 1.(12-6)] + 2.[2.(4-3) - 4.(8-3) + 3.(12-6)]$$

$$|A| = -5.[3.1 - 5.5 + 1.6] + 2.[2.1 - 4.5 + 3.6]$$

$$|A| = -5.(-16) + 2.0$$

$$|A| = 80$$

<u>Consecuencia</u>: Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden *n* y llamamos α_{ij} al cofactor de su elemento a_{ij}, para *i*, *j* = 1, 2, … , *n*, la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los cofactores de una línea paralela es nulo.

Demostración:

Consideremos el caso de las filas (para las columnas se razona de igual manera). Recurrimos a una matriz auxiliar $B = (b_{ij})$ que coincide con la $A = (a_{ij})$ salvo en la fila *j* de *B* que es igual a la fila *i* de *A*, de manera que *B* tiene iguales sus filas *i* y *j*. En *B*, los cofactores $\beta_{j1}, \beta_{j2}, ..., \beta_{jn}$ de los elementos de la fila *j*, coinciden con los respectivos adjuntos $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, ..., \alpha_{jn}$ de la fila *j* de *A*. Como *B* tiene dos filas iguales, su determinante es nulo, desarrollando éste por los elementos de su fila *j*, se obtiene que:

$$0 = \det B = b_{j1}\beta_{j1} + b_{j2}\beta_{j2} + ... + b_{jn}\beta_{jn} = a_{j1}\alpha_{j1} + a_{j2}\alpha_{j2} + ... + a_{jn}\alpha_{jn}$$

Ejemplo: sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ hallaremos la suma de los productos de los elementos de la fila 1 por los cofactores de los elementos de la fila 3

$$1.(-1)^4.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 2.(-1)^5.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^6.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$$

Reducción de determinantes (Método de Chío):

El método consiste en transformar un determinante de orden *n* en otro de igual valor de orden *n-1*.

$$\text{Sea } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Se elige como pivote un elemento no nulo, a_{ij} y se lo extrae como factor común de la fila *i*. Luego se reducen a cero los demás elementos de la columna del pivote restando a cada fila *h*, con $h \neq i$, la fila *i* multiplicada por a_{hj}, así:

$$|A| = a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} \cdot a_{1j} & a_{12} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}} \cdot a_{1j} & \cdots & a_{1j} - a_{1j} & \cdots & a_{1n} - \frac{a_{in}}{a_{ij}} \cdot a_{1j} \\ \mathrm{a}_{21} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} \cdot a_{2j} & a_{22} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}} \cdot a_{2j} & \cdots & a_{2j} - a_{2j} & \cdots & a_{2n} - \frac{a_{in}}{a_{ij}} \cdot a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} \cdot a_{nj} & a_{n2} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}} \cdot a_{nj} & \cdots & a_{nj} - a_{nj} & \cdots & a_{nn} - \frac{a_{in}}{a_{ij}} \cdot a_{nj} \end{vmatrix}$$

Al desarrollar el determinante por los elementos de la columna *j*, resulta un determinante de orden
(n – 1) multiplicado por $(-1)^{i+j}.a_{ij}$

Ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ tomaremos como pivote el elemento a_{11}, luego efectuaremos las siguientes operaciones F_2 - F_1.2 ; F_3 – F_1.(-3); F_4 – F_1.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & 10 & 17 & 23 \\ 0 & -16 & -22 & -34 \end{vmatrix} = (-1)^2.1. \begin{vmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 10 & 17 & 23 \\ -16 & -22 & -34 \end{vmatrix}$$

en el determinante de tercer orden obtenido, extraeremos factor común (-2) en la fila 1:

$(-2). \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7/2 \\ 10 & 17 & 23 \\ -16 & -22 & -34 \end{vmatrix}$ y tomamos como pivote el elemento a_{11} y efectuamos las siguientes operaciones: F_2 + F_1. (-10); F_3 + F_1 . 16

$$(-2). \begin{vmatrix} 1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & 10 & 22 \end{vmatrix} = (-2).(-1)^2. \begin{vmatrix} -3 & -12 \\ 10 & 22 \end{vmatrix} = -2.(-66 + 120) = -2.54 = -108$$

Matriz adjunta:

Se llama matriz adjunta de una matriz *A*, y la indicamos con *A´*, a la traspuesta de la matriz que se obtiene reemplazando cada elemento de *A* por su respectivo cofactor.

En símbolos: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz adjunta de *A* será:

$$A'=\begin{pmatrix} (-1)^2.\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^3.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^4.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^3.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^4.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^5.\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^4.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^5.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^6.\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 13 \\ 4 & -7 & 8 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \\ 13 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por su adjunta:

Propiedad: el producto de toda matriz cuadrada por su adjunta es conmutativo e igual al determinante de dicha matriz por la matriz identidad.

En efecto:

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$

$$A.A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}.C_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}.C_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}C_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}.C_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}.C_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}.C_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}.C_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}.C_{nj} \end{pmatrix}$$

Al aplicar las propiedades: la suma de los productos de los elementos de una línea por sus respectivos cofactores es el determinante de la matriz y, la suma de los productos de los elementos de una línea por los cofactores de una línea paralela es cero, resulta:

$$A.A' = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} \Rightarrow A.A' = |A|.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = |A|.I$$

Del mismo modo se puede demostrar que $A'.A = |A|.I$

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } A.A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{por otro lado: } A'.A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 + 12 - 12 - 12 - 10 = 1$$

El ejemplo verifica la propiedad: $\boxed{A.A' = A'.A = |A|.I}$

<u>Inversión de matrices no singulares</u>:

<u>Condición</u>: Una matriz cuadrada es invertible, si y sólo si su determinante es distinto de cero

En efecto:

Si A es invertible existe B tal que: $A.B = B.A = I$

por propiedad del determinante del producto de dos matrices, resulta:

$|A|.|B| = |B|.|A| = |I| \Rightarrow |A|.|B| = |B|.|A| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$ (si fuese cero, $|A|.|B| = 0$ y debe ser uno).

Por otro lado:

$A.A' = A'.A = |A|.I$, como $|A| \neq 0$, dividimos los miembros de la igualdad por $|A|$

$$A.\frac{A'}{|A|} = \frac{A'}{|A|}.A = I \quad \Rightarrow \quad \boxed{A^{-1} = \frac{A'}{|A|}} \text{, de otra manera: } \boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A'}$$

Ejemplo: Hallar la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 0 + 2 - 9 + 6 - 2 = -3$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -11 & -3 & -2 \\ -8 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -11 & -3 & -2 \\ -8 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Matriz ortogonal</u>: Una matriz A es ortogonal si su matriz inversa es igual a su traspuesta.

En símbolos: A es ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (1)

Además: $|A| = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ y $A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Luego: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (2)

De (1) y (2), la matriz *A* es ortogonal.

<u>Ecuación matricial</u>: es toda ecuación de la forma $A.X = B$ (*A*, *X* y *B*, matrices)

Para resolver esta ecuación debemos tener en cuenta que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

$A.X = B$, multiplicamos a la izquierda ambos miembros por A^{-1}

$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$, teniendo en cuenta que el producto de una matriz por su inversa es la identidad.

$I.X = A^{-1}.B$, siendo I elemento neutro en la multiplicación de matrices.

$\boxed{X = A^{-1}.B}$

De la misma forma, si $X.A = B \Rightarrow X.A.A^{-1} = B.A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = B.A^{-1}}$

<u>Sistemas lineales de *n* ecuaciones y *n* incógnitas : Resolución matricial</u>

El sistema $\begin{cases} 2.x + 3.y - z = 10 \\ 3.x - 2.y + 4.z = -7 \\ x + 5.y - 2.z = 11 \end{cases}$ puede expresarse como ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{B} \quad \Rightarrow \quad A.X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}.B$$

sólo podrá resolverse el sistema por este método cuando la matriz de los coeficientes sea regular, es decir que su determinante sea distinto de cero.

$$A' = \begin{pmatrix} -16 & 10 & 17 \\ 1 & -3 & -7 \\ 10 & -11 & -13 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -16 & 1 & 10 \\ 10 & -3 & -11 \\ 17 & -7 & -13 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 8 - 15 + 12 - 2 - 40 + 18 = -19$$

$$X = -\frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 1 & 10 \\ 10 & -3 & -11 \\ 17 & -7 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} -57 \\ 0 \\ 76 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales:

<u>Teorema de Cramer</u>

Sea el sistema $\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + \cdots + a_{3n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$ *, si* A *es regular entonces* m = n, $A.X = B$ *admite solución única, y el valor de cada variable es el cociente entre el determinante que se obtiene al sustituir, en el determinante de la matriz de los coeficientes, la columna de coeficientes de la variable por la columna de los términos constantes, y el determinante del sistema.*

En efecto:

Siendo $A.X = B$, multiplicamos a la izquierda ambos miembros por A^{-1}

$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$, teniendo en cuenta que el producto de una matriz por su inversa es la identidad.

$I.X = A^{-1}.B$, (I elemento neutro en la multiplicación de matrices.)

$\boxed{X = A^{-1}.B}$

Pero: $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$

Entonces:

$$X = \frac{Adj(A)}{|A|} \cdot B \Rightarrow X = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \cdot B \text{ y } Adj(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

Entonces $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots\dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ C_{13} & C_{23} & \dots & C_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_i.C_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i.C_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i.C_{i3} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} b_i.C_{in} \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \cdot \left(b_1.C_{11} + b_2.C_{21} + b_3.C_{31} + \cdots + b_n.C_{n1} \right)$$

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \cdot \left(b_1 . \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots. & \dots & \dots. \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - b_2 . \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots. & \dots & \dots. \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + b_3 . \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{41} & \dots & a_{4n} \\ \dots. & \dots & \dots. \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + b_n . \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-2)n} \end{vmatrix} \right)$$

la expresión encerrada entre paréntesis es el desarrollo por los elementos de una línea del determinante

$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ que resulta de sustituir la columna de coeficientes de x_1 por la columna de términos constantes del sistema.

De igual modo podemos verlo para $x_2, x_3, \dots, x_n$.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}; \ \ldots. \ ; x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

<u>Ejemplo</u>:

Sea $\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 = -1 \\ 2.x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$, resolveremos por Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 0 + 4 - 2 - 0 = 5$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 0 + 6 + 2 - 0 = 5$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3 + 4 - 2 + 6 + 1 = 5$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 + 0 + 4 - 1 - 0 = 10$$

Luego:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{10}{5} = 2$$

<u>Verificación</u>:

$$\begin{cases} 1 - 2 = -1 \\ 1 + 2.1 - 2.2 = -1 \\ 2.1 - 1 + 2 = 3 \end{cases}$$