Trabajo Práctico 4: Funciones Continuas

1. Estudiar la continuidad de la siguiente función en $x = -1$ y $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & si\ x \leq -1 \\ 3x - 1 & si\ -1 < x \leq 1 \\ -1/2(x+3) & si\ 1 < x \leq 7 \end{cases}$$

2. Calcular el valor de k para que la función sea continua en todos los puntos de su dominio:

   a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x \leq 1/2 \\ kx & si\ x > 1/2 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} kt^2 & si\ t < 2 \\ -2 & si\ t = 2 \\ kt - 1 & sit > 2 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & si\ x < 2 \\ x^3 - kx & si\ x \geq 2 \end{cases}$

3. Si f y g son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encontrar g(3).

4. Indicar los intervalos en los cuales las siguientes funciones son continuas:

   a) $f(x) = x^3 + 2x - 7$

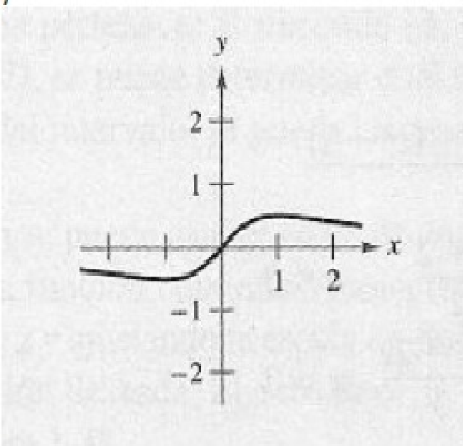
   b) $g(x) = \dfrac{9 - x^2}{x}$

   c) $h(x) = \ln(x^2 - 1)$

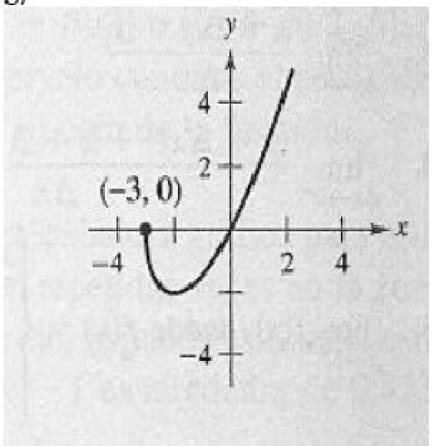
   d) $m(x) = \sqrt{x - 3}$

   e) $n(x) = x^2 + 1 + |2x - 1|$

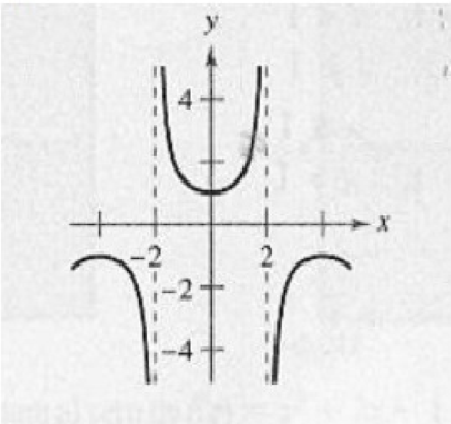
f)



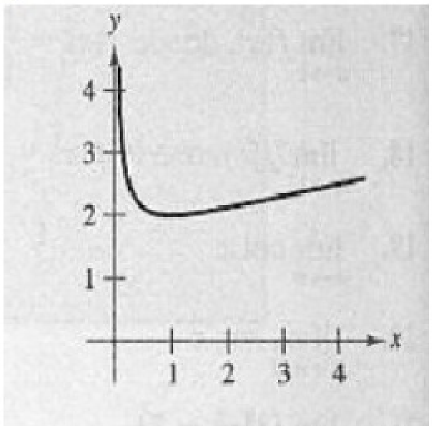
g)



h)



i)



5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

   a) Si $lim_{x\to a} f(x) = L$ y $f(a) = L$, entonces f es continua en a.

   b) En una función racional puede haber infinitos valores de x en los que no es continua.

   c) Si$|f(x)|$ es continua en x = a, entonces f es continua en x = a.

   d) Si las funciones f(x) y g(x) son continuas para $0 \leq x \leq 1$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en [0, 1].

6. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+e^{\frac{1}{x^2}}}{1-e^{\frac{1}{x^2}}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

   a) Estudiar su continuidad.
   b) En el caso de no ser continua en x = 0, ¿cómo debería definirse f(0) para que fuese continua?

7. Dada la función $f(x) = x^2.sen\frac{1}{x}$,si $x \neq 0$ y $f(0) = k$, determinar el valor de k para que la función sea continua en x = 0.

8. Explicar por qué la función es discontinua en el punto dado a. Graficar

   a) $f(x) = ln|x-2|, a = 2$

   b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x-3}{x-3} & si\ x \neq 3 \\ 6 & si\ x = 3 \end{cases}, a = 3$

   c) $f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ x^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}, a = 0$

9. ¿Puede asegurarse que la función:$f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x^3-x^2+x-1}$ está acotada en el intervalo [0, 2]?

10. Se considera la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & si \neq 2 \\ 3 & six = 2 \end{cases}$$

¿Está acotada la función en el intervalo [1, 3]? Si es así, determinar el valor máximo y mínimo

11. Demostrar que la función f(x)=2x$^3 - 5x^2 + x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo [-1;3] ¿Puede afirmarse lo mismo de la función g(x)= $\dfrac{2x+1}{x-2}$?

12. Demostrar que la ecuación $3x-\sqrt{2}=0$ tiene una solución en el intervalo $[0,\,1]$. Encontrar dicha solución.

13. Demostrar que la ecuación $e^{-x^2}=2x$ tiene al menos una solución real.

Respuestas

1. f es continua en $x = -1$ y discontinua en $x = 1$.
2. a) $1/4$ b) $-1/2$ c) $2/3$
3. g(3)= 6
4. a) $(-\infty, \infty)$
   b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
   c) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
   d) $[3, \infty)$
   e) $(-\infty, \infty)$
   f) $(-\infty, \infty)$
   g) $[-3, \infty)$
   h) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$
   i) $(0, \infty)$
5. a) V b) F c) F d) F
6. f es discontinua en x = 0. Para que sea continua debería ser f(0) = -1
7. k=0
8. a) $\nexists f(2)$ b) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$ c) $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$
9. No
10. Sí, máximo 4 y mínimo 2
11. No
12. $\dfrac{ln2}{2ln3}$