ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ — ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ — SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES & TECHNOLOGY — ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ — DEPARTMENT OF INFORMATICS

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Διδάσκουσα: Κ. Παπακωνσταντινοπούλου

2η Σειρά Ασκήσεων (Γραπτών)
Προσομοίωση γραπτής εξέτασης: 21/6/2020

Τις λύσεις των ασκήσεων, εφόσον επιθυμείτε, μπορείτε να τις σκανάρετε και να τις υποβάλετε στο eClass ως αρχείο .pdf με όνομα τον αριθμό μητρώου σας, δηλαδή 3xxxxxx.pdf.

Στις περισσότερες από τις ασκήσεις χρησιμοποιούμε το πρόβλημα τοποθέτησης σε κάδους (Bin Packing). Μπορείτε να βρείτε τη διατύπωσή του στο τέλος των εκφωνήσεων.

Άσκηση 2.1

Θεωρήστε μια παραλλαγή του προβλήματος τοποθέτησης σε κάδους, στην οποία μας ενδιαφέρει να βρούμε μια έγκυρη τοποθέτηση σε κάδους, αλλά όχι κατ΄ ανάγκη αυτή που χρησιμοποιεί το ελάχιστο δυνατό πλήθος κάδων. Για παράδειγμα, αν έχουμε το σύνολο αντικειμένων με μεγέθη $\{1, 2, 2, 5, 3, 1, 4, 1\}$ και χωρητικότητα $C = 5$, μια έγκυρη τοποθέτηση σε κάδους είναι η εξής: $[(1, 2, 2), (5), (3, 1), (4, 1)]$.

α. Να σχεδιάσετε έναν **διαίρει-και-βασίλευε** αλγόριθμο που να επιλύει το πρόβλημα αυτό.

β. Πότε σταματούν οι αναδρομικές κλήσεις στον αλγόριθμό σας;

γ. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

δ. Πόσα επίπεδα θα έχει το δέντρο των αναδρομικών κλήσεων του αλγορίθμου σας στην καλύτερη και στη χειρότερη περίπτωση;

ε. Να υπολογίσετε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

στ. Το πρόβλημα τοποθέτησης σε κάδους στην αρχική μορφή του είναι δύσκολο (NP-hard). Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος που δώσατε παραπάνω δε βρίσκει πάντα τη λύση που χρησιμοποιεί το ελάχιστο πλήθος κάδων. Να δώσετε ένα στιγμιότυπο στο οποίο πράγματι ο αλγόριθμός σας δε βρίσκει τη λύση με το ελάχιστο πλήθος κάδων.

Άσκηση 2.2

Θεωρήστε μια παραλλαγή του προβλήματος τοποθέτησης σε κάδους, στην οποία κάθε αντικείμενο είναι διαιρετό και μπορούμε να το τοποθετήσουμε σε ένα κάδο τμηματικά, για παράδειγμα να τοποθετήσουμε το μισό αντικείμενο σε ένα κάδο και το υπόλοιπο σε άλλο κάδο.

α. Να σχεδιάσετε **άπληστο** αλγόριθμο που να επιλύει το πρόβλημα αυτό.

β. Να αποδείξετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. (Να δείξετε δηλαδή ότι η λύση που βρίσκει είναι πράγματι βέλτιστη, χρησιμοποιώντας την τεχνική που έχουμε μελετήσει.)

γ. Να υπολογίσετε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

δ. Να δώσετε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος (καθορίζοντας τις τιμές των n, s_i για κάθε i και C) και να το λύσετε χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που σχεδιάσατε.

Άσκηση 2.3

Θεωρήστε ξανά το πρόβλημα τοποθέτησης σε κάδους. Στην περίπτωση που τα αντικείμενα δεν είναι διαιρετά, ο άπληστος αλγόριθμος που προτείνατε στην άσκηση 2.2 δεν είναι σωστός.

α. Να δώσετε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος (καθορίζοντας τις τιμές των n, s_i για κάθε i και C) για το οποίο ο άπληστος αλγόριθμος της άσκησης 2 δε βρίσκει βέλτιστη λύση.

β. Να σχεδιάσετε αλγόριθμο **δυναμικού προγραμματισμού** που να επιλύει το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή. Ξεκινήστε δίνοντας την αναδρομική εξίσωση που δίνει τη λύση του προβλήματος συναρτήσει των λύσεων των υποπροβλημάτων του.

Ο αλγόριθμός σας αρκεί να επιστρέφει το πλήθος των κάδων που απαιτούνται. Φυσικά μπορεί να επιστρέφει και τα αντικείμενα που θα μπουν σε κάθε κάδο, απλώς δεν είναι απαραίτητο.

γ. Σε τι διαστάσεων πίνακα θα αποθηκεύσετε τις λύσεις των υποπροβλημάτων; Σε ποια θέση του πίνακα περιέχεται η λύση του αρχικού προβλήματος;

δ. Να αποδείξετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

ε. Να υπολογίσετε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

στ. Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο που σχεδιάσατε, για να λύσετε το στιγμιότυπο του ερωτήματος (**α**).

Άσκηση 2.4

α. Δίνεται γράφος G με θετικά βάρη στις ακμές και ένας κόμβος του s. Θεωρήστε το δέντρο T που περιέχει τους κόμβους του G και τις ακμές που ορίζουν το συντομότερο μονοπάτι από τον s προς κάθε κόμβο του G . Είναι το T ένα **δέντρο επικάλυψης ελάχιστου κόστους** του G; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Βοήθεια: Αν η απάντησή σας είναι ΝΑΙ, θα πρέπει να αποδείξετε την παραπάνω πρόταση για κάθε γράφο G. Αν η απάντησή σας είναι ΟΧΙ, αρκεί να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα, δηλαδή μια περίπτωση γράφου G για την οποία δεν ισχύει το παραπάνω.

β. Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G με βάρη στις ακμές τα οποία μπορεί να είναι και αρνητικά, και στον οποίο το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων αποτελείται από το πολύ k ακμές.

Δώστε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει το **συντομότερο μονοπάτι** μεταξύ δύο κόμβων u και v σε χρόνο $O(k|E|)$.

Βοήθεια: Αρκεί μια μικρή παραλλαγή ενός από τους αλγορίθμους που μελετήσαμε στο μάθημα.

Άσκηση 2.5

Θεωρήστε το πρόβλημα τοποθέτησης σε κάδους (έστω Π).

α. Να δώσετε το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης D (decision version).

β. Έστω ότι έχουμε αλγόριθμο A που λύνει το παραπάνω πρόβλημα απόφασης (D). Να περιγράψετε πώς μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε ώστε να λύσουμε το Π.

γ. Να δείξετε ότι το D είναι **NP-complete**: Αφού δείξετε ότι το D ανήκει στην κλάση NP, δώστε μια αναγωγή από το πρόβλημα διαμέρισης (Partition) στο D.

δ. Με ποιο/ποια από τα προβλήματα που μελετήσαμε στο μάθημα μοιάζει το Π και με ποιο τρόπο (πχ είναι γενίκευση, ειδίκευση, κάτι άλλο);

Πρόβλημα τοποθέτησης σε κάδους (Bin Packing)
Είσοδος: Σύνολο αντικειμένων S, μεγέθη των αντικειμένων $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, κάδοι χωρητικότητας C.
Έξοδος: Βρείτε το ελάχιστο πλήθος κάδων στους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα αντικείμενα του S.

Πρόβλημα διαμέρισης (Partition)
Είσοδος: Δίνεται σύνολο S που περιέχει n αριθμούς: $a_1, \ldots, a_n$.
Έξοδος: Υπάρχει διαμέριση του S σε δύο υποσύνολα X και $S \setminus X$ με το ίσο άθροισμα στοιχείων, δηλαδή $\sum_{i \in X} a_i = \sum_{i \in S \setminus X} a_i$;

Δίνεται το Θεώρημα του κυρίαρχου όρου (Master Theorem), για την περίπτωση που το χρειάζεστε:

Αν $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ με σταθερές $a \geq 1$ και $b > 1$, τότε:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{αν } f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \text{ για σταθερά } \epsilon > 0 \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n), & \text{αν } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \\ \Theta(f(n)), & \text{αν } f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \text{ για σταθερά } \epsilon > 0 \\ & \text{και } af(n/b) \leq cf(n) \text{ για σταθερά } c < 1 \text{ και μεγάλα } n \end{cases}$$