ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Θεωρία Παιγνίων και Αποφάσεων
Διδάσκων: Ε. Μαρκάκης, Εαρινό εξάμηνο 2021

1η σειρά ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 10 Μαΐου 2021**

Πρόβλημα 1. (16 μονάδες) Μία τράπεζα σκέφτεται να επενδύσει ένα ποσό 50 χιλιάδων ευρώ που έχει διαθέσιμο αυτή τη στιγμή. Οι επιλογές είναι οι εξής:

- Επιλογή α_1: η τράπεζα θα δώσει τα χρηματα στην αίτηση ενός πελάτη για τη χορήγηση δανείου με αυτό το ποσό, για 1 χρόνο με σταθερό επιτόκιο 25%.
- Επιλογή α_2: η τράπεζα θα τοποθετήσει τα χρήματα αυτά σε Γερμανικά κρατικά ομόλογα για το ίδιο διάστημα με σταθερό επιτόκιο 15% (και κάνουμε την υπόθεση ότι η Γερμανία δεν θα χρεοκοπήσει εντός του επόμενου έτους). Έχει επίσης αποφασισθεί ότι αν δεν παρθεί η απόφαση α_1, τότε σίγουρα θα παρθεί η α_2.

Ο Προϊστάμενος Χορηγήσεων Δανείων κάνει πρώτα μια πρόχειρη έρευνα της φερεγγυότητας του υποψήφιου πελάτη για το δάνειο, και εκτιμά ότι η πιθανότητα πλήρους αποπληρωμής του δανείου είναι 0.96. Επιπλέον ο Προϊστάμενος έχει τη δυνατότητα να ζητήσει μια πλήρη έκθεση φερεγγυότητας του πελάτη της οποίας όμως το κόστος είναι 1000 ευρώ, καθώς απαιτεί πρόσβαση σε περισσότερα δεδομένα. Το αποτέλεσμα της έκθεσης μπορεί να είναι είτε θετικό (Θ) ως προς την αποπληρωμή του δανείου είτε αρνητικό (Α), και οι προβλέψεις της έκθεσης επαληθεύονται με πιθανότητα 90%. Αυτό σημαίνει ότι αν π.χ. ο πελάτης είναι φερέγγυος, τότε η πιθανότητα το αποτέλεσμα της έκθεσης να είναι Θ είναι 0.9, ενώ αντίστοιχα η πιθανότητα το αποτέλεσμα να ειναι Α είναι 0.1 και αντίστοιχα για την περίπτωση που ο πελάτης δεν είναι φερέγγυος. Θεωρούμε ότι μη αποπληρωμή του δανείου σημαίνει ότι η τράπεζα δεν θα εισπράξει τίποτα από τον πελάτη στη διάρκεια του ενός χρόνου.

(i) (10 μονάδες) Να κατασκευαστεί το δέντρο απόφασης και να προσδιοριστεί η στρατηγική του Προϊσταμένου αν γνωρίζουμε ότι θα ακολουθήσει το κριτήριο της μεγιστοποίησης του αναμενόμενου χρηματικού ποσού που θα έχει η τράπεζα στο τέλος του χρόνου. Να ενημερωθεί το δέντρο απόφασης κατάλληλα.

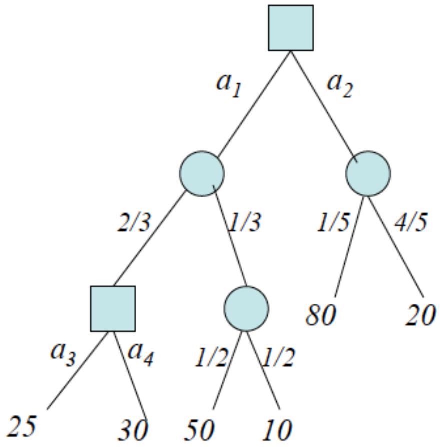
(ii) (4 μονάδες) Ποια είναι η αξία της τέλειας πληροφόρησης?

(iii) (2 μονάδες) Ποια είναι η μέγιστη επιτρεπτή τιμή για το κόστος της πλήρους έκθεσης φερεγγυότητας, έτσι ώστε να συμφέρει την τράπεζα να ζητήσει μια τέτοια έκθεση?

Πρόβλημα 2. (13 μονάδες) Θεωρήστε το δέντρο απόφασης που φαίνεται στο Σχήμα 1.

(i) (3 μονάδες) Αν οι προτιμήσεις ενός αποφασίζοντα εκφράζονται από το κριτήριο του Bayes, βρείτε την κανονικοποιημένη συνάρτηση χρησιμότητας $\pi(x)$.

(ii) (5 μονάδες) Αν ο ΑΜ σας λήγει σε άρτιο αριθμό, επιλέξτε μία συνάρτηση ωφέλειας $\pi(x)$ που να εκφράζει συντηρητική συμπεριφορά. Διαφορετικά επιλέξτε μια συνάρτηση



Σχήμα 1: Το δέντρο απόφασης για το Πρόβλημα 2.

που να εκφράζει ριψοκίνδυνη συμπεριφορά. Η συνάρτηση θα πρέπει να δίνεται από μία φόρμουλα (μην χρησιμοποιήσετε δηλαδή κλαδικές συναρτήσεις). Επιπλέον, η συνάρτηση $\pi(x)$ που θα διαλέξετε, θα πρέπει να ικανοποιεί τις παραδοχές που είδαμε στο μάθημα για την ανάλυση δέντρων με τη χρήση βασικών κληρώσεων παραμέτρου π, θα πρέπει δηλαδή να είναι κανονικοποιημένη αναφορικά με τα ποσά που εμφανίζονται στο δέντρο του Σχήματος 1. Δικαιολογήστε την ορθότητα της επιλογής που κάνατε.

(iii) (5 μονάδες) Αναλύστε το δέντρο του Σχήματος 1 με βάση την συνάρτηση ωφέλειας $\pi(x)$ από το προηγούμενο υποερώτημα. Ποια είναι η προτεινόμενη στρατηγική? Ενημερώστε το δέντρο κατάλληλα.

Πρόβλημα 3. (7 μονάδες) Έχουμε 2 κουτιά με το εξής περιεχόμενο: το πρώτο κουτί έχει 70 πράσινες μπίλιες και 30 άσπρες ενώ το δεύτερο περιέχει 70 άσπρες μπίλιες και 30 πράσινες. Ένα από τα 2 κουτιά επιλέγεται τυχαία. Από το κουτί αυτό επιλέγουμε 12 μπίλιες, τη μία μετά την άλλη, τυχαία και με επανατοποθέτηση, δηλαδή, διαλέγουμε τυχαία την πρώτη, βλέπουμε τι χρώμα είναι, την επανατοποθετούμε, διαλέγουμε μία δεύτερη, βλέπουμε το χρώμα της, την επανατοποθετούμε, κ.ο.κ. μέχρι τη 12η. Έστω ότι παρατηρήσαμε συνολικά 8 πράσινες και 4 άσπρες με την εξής ακολουθία χρωμάτων: Π Π Α Π Α Π Π Α Π Α Π Π. Υπολογίστε την πιθανότητα το κουτί που διαλέξαμε να είναι το κουτί με τις 70 πράσινες μπίλιες. Ποια θα ήταν η πιθανότητα αν είχαμε παρατηρήσει την ακολουθία Π Π Π Π Π Π Π Π Α Α Α Α? Αιτιολογήστε την απάντησή σας και δείξτε πώς υπολογίσατε τις πιθανότητες που ζητούνται.

Πρόβλημα 4. (12 μονάδες) Βρείτε τον συντελεστή αποφυγής κινδύνου $\tau(x)$ για τις παρακάτω συναρτήσεις. Θεωρήστε ως πεδίο ορισμού το $[0, \infty)$, δεν μας ενδιαφέρει δηλαδή τι συμβαίνει για αρνητικές τιμές του x.

1. $u_1(x) = \ln(2x + 5)$
2. $u_2(x) = 8 + 5x$

3. $u_3(x) = \sqrt{x+5}$

4. $u_4(x) = x^3 + 3x$

Μπορείτε να συγκρίνετε τις 4 αυτές συναρτήσεις και να τις ταξινομήσετε από αυτήν που εκφράζει την πιο ριψοκίνδυνη συμπεριφορά σε αυτή με την πιο συντηρητική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 5. (10 μονάδες) Βρίσκεστε σε ένα παιχνίδι ζαριών, όπου πέρα από τους 2 παίκτες που παίζουν σε κάθε γύρο, οι υπόλοιποι μπορούν να βάζουν στοιχήματα για την έκβαση. Π.χ. αν σε ένα γύρο παίζουν ο παίκτης Α με τον Β, μπορεί ένας (εξωτερικός) παίκτης Γ να προκαλέσει έναν άλλο (εξωτερικό) παίκτη Δ λέγοντας π.χ. "Στοίχημα x ευρώ ότι θα κερδίσει ο Α, δέχεσαι;"

Έστω ότι την στιγμή που είναι να ξεκινήσει ο επόμενος γύρος μεταξύ των παικτών Α και Β, με τα ζάρια στα χέρια του Α, ένας παίκτης σας προκαλεί σε στοίχημα 50 ευρώ ότι θα κερδίσει ο Α (άρα αν δεχθείτε, τότε θα κερδίσετε μόνο αν κερδίσει ο Β). Η δική σας συμπεριφορά προς το παιχνίδι είναι ελαφρώς ριψοκίνδυνη με συνάρτηση ωφέλειας την $u(x) = x^{1.05}$. Επίσης επιλέξατε να έρθετε στο παιχνίδι ακριβώς με 100 ευρώ στο πορτοφόλι σας.

Αναλύστε μόνο 1 εκτέλεση του παιχνιδιού (δηλαδή 1 ρίψη των ζαριών), και αποφασίστε αν πρέπει να δεχθείτε το στοίχημα.

Σημείωση: Οι συνδυασμοί που κερδίζουν είναι οι 6-6, 5-5, 6-5, 5-6, 3-3. Οι συνδυασμοί που χάνουν είναι οι 1-1, 2-2, 1-2, 2-1, 4-4. Οι υπόλοιποι οδηγούν σε ισοπαλία.

Πρόβλημα 6. (10 μονάδες) Ένας επενδυτής έχει αρχικό κεφάλαιο K ευρώ και σκέφτεται να επενδύσει όλο το κεφάλαιο αυτό σε μετοχές μιας εταιρείας. Κατόπιν μελέτης, αποφασίζει ότι η απόδοση των μετοχών μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μια συνεχή τυχαία μεταβλητή r.

(i) (5 μονάδες) Έστω ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι η $u(x) = \sqrt{x}$, κι έστω ότι η απόδοση r, ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, για κάποιες παραμέτρους α, β. Υπολογίστε τη μέση χρησιμότητα αν γίνει η επένδυση, ως συνάρτηση των παραμέτρων K, α, και β. Αν $\alpha = -0.05$, και $\beta = 0.1$, θα γίνει τελικά η συγκεκριμένη επένδυση;

(ii) (5 μονάδες) Έστω τώρα ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι η $u(x) = x$, κι έστω ότι η απόδοση r, ακολουθεί μια κατανομή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(r)$. Αν η μέση τιμή της r είναι $\mu = E[r]$, και χωρίς να γνωρίζετε τίποτα περαιτέρω για την μορφή της f, υπολογίστε τη μέση χρησιμότητα ως συνάρτηση των παραμέτρων K και μ. Σχολιάστε πώς εξαρτάται η απόφαση του επενδυτή να κάνει την επένδυση από την τιμή μ.

Πρόβλημα 7. (12 μονάδες) Στη Νέα Ορλεάνη, μετά τον τυφώνα Κατρίνα, πολλες ασφαλιστικές εταιρείες προσφέρουν ποικίλα προγράμματα κάλυψης για ολική καταστροφή σπιτιού από πλημμύρα, φωτιά, κτλ. Έστω ένας υποψήφιος πελάτης, ο οποίος κατέχει ένα σπίτι αξίας W ευρώ. Υπάρχει η δυνατότητα ο πελάτης αυτός να αγοράσει ένα πρόγραμμα κάλυψης το οποίο λειτουργεί ως εξής (υποθέτουμε ότι είναι ένα πρόγραμμα με διάρκεια κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, π.χ. 1 έτος):

- Ο πελάτης αποφασίζει μέχρι ποιο ποσό θέλει να ασφαλίσει το σπίτι, π.χ., μπορεί να διαλέξει να κάνει μια ασφάλεια για q ευρώ, όπου αναγκαστικά $q \leq W$ (η ασφαλιστική εταιρεία δεν δέχεται ασφάλεια αξίας μεγαλύτερης του W).
- Αν ο πελάτης αγοράσει κάλυψη q ευρώ, πληρώνει στην εταιρεία $x \cdot q$ ευρώ, οπου $x < 1$ (συνήθως το x είναι αρκετά μικρότερο του 1).
- Σε περίπτωση ολικής καταστροφής του σπιτιού εντός του χρονικού διαστήματος όπου ισχύει το πρόγραμμα, η εταιρεία δίνει στον πελάτη q ευρώ. Αν δεν συμβεί κάτι τέτοιο εντός του διαστήματος αυτού, ο πελάτης απλά έχει χάσει $x \cdot q$ ευρώ.

Έστω ότι με βάση την τοποθεσία του σπιτιού, και τη συχνότητα για τους τυφώνες, τα tornadoes, την πιθανή άνοδο της στάθμης του νερού, και όλα τα άλλα φαινόμενα που πλήττουν κατά καιρούς τη Νέα Ορλεάνη, υπάρχει πιθανότητα p το σπίτι του πελάτη να καταστραφεί ολικά, εντός του χρονικού διαστήματος που καλύπτει το πρόγραμμα. Έστω επίσης ότι η συνάρτηση ωφέλειας του πελάτη είναι η $u(x) = \sqrt{x}$. Αν $W = 100,000$, $p = 0.01$, και $x = 0.02$, εξηγήστε τι ποσό κάλυψης q πρέπει να αγοράσει ο πελάτης, όπου $q \in [0, W]$. Κάντε την ανάλυση πρώτα παραμετρικά και κατόπιν αντικαταστήστε τις τιμές των παραμέτρων που δίνονται στο τέλος.