Επιχειρησιακή Έρευνα: 1η Σειρά Ασκήσεων

Ηλίας Στεφανής - 3180176

Αλέξης Γεωργίου – 3180027

Άσκηση 1:

(α')

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε f, g *ισχύει* $max_x[f(\text{x}) + g(\text{x})] \leq max_x f(\text{x}) + max_x\, g(\text{x})$.

Αρχικά, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$f(x) \leq max_x[f(x)],$$

και $\quad g(x) \leq max_x[g(x)]$

για κάθε συναρτήσεις f, g

Άμα τα προσθέσουμε έχουμε

$$f(x) + g(x) \leq max_x[f(x)] + max_x[g(x)] \Leftrightarrow$$

Θέτοντας h(x) = f(x)+g(x)

$$\Leftrightarrow h(x) \leq max_x[f(x)] + max_x[g(x)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow max_x[h(x)] \leq max_x[f(x)] + max_x[g(x)] \Leftrightarrow$$

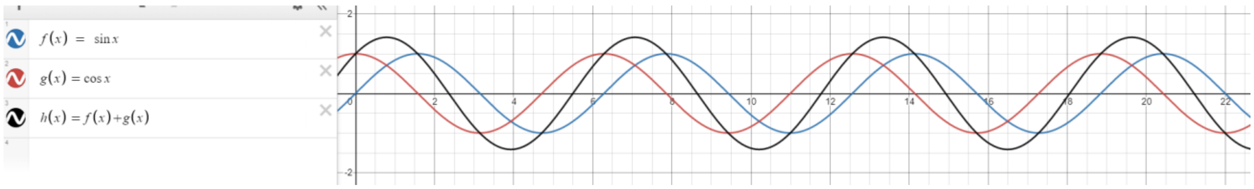
Το οποίο ισχύει γιατί $h(x) \leq max_x[h(x)]$

$$\Leftrightarrow max_x[\, f(x) + g(x)] \leq max_x[f(x)] + max_x[g(x)]$$

(β') Έστω συναρτήσεις f, g, h με f(x) = sin(x), g(x) = cos(x) και

h(x) = f(x) + g(x).

διαγραμματική αναπαράσταση:



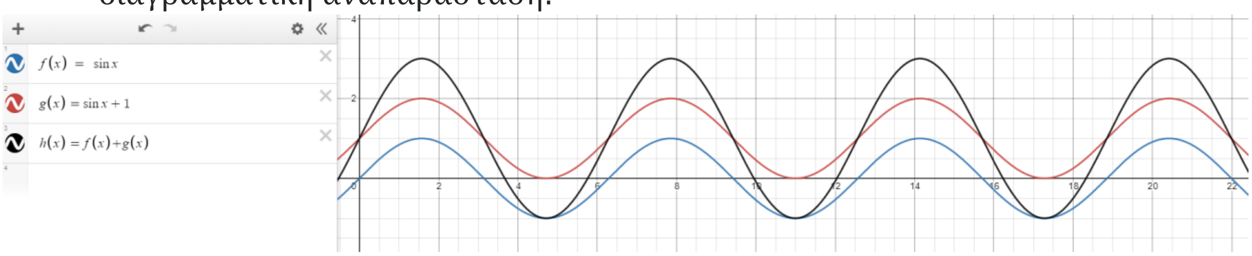
Σε αυτές τις συναρτήσεις έχουμε $max_x f(x) = 1, max_x g(x) = 1$ και $max_x h(x) = 1.414$.

$max_x f(x) + max_x g(x) = 2 \neq 1.414 = max_x h(x) = max_x[f(x) + g(x)]$

<u>(γ')</u> Έστω συναρτήσεις f, g, h με f(x) = sin(x), g(x) = sin(x) + 1 και

h(x) = f(x) + g(x).

διαγραμματική αναπαράσταση:



Σε αυτές τις συναρτήσεις έχουμε $max_x f(x) = 1, max_x g(x) = 2$ και $max_x h(x) = 3$.

$max_x f(x) + max_x g(x) = 3 = max_x h(x) = max_x[f(x) + g(x)]$

Άσκηση 2:

1) Έστω f, g κυρτές συναρτήσεις με Df = Dg
θέτουμε z = cx + (1-c)y

Αφού f, g είναι κυρτές, ισχύει ότι $\mathrm{f(z)} \le \mathrm{cf(x)} + (1 - \mathrm{c})\mathrm{f(y)}\ \mathrm{x}, y \in \mathrm{Df}\,, \mathrm{c} \in [1{,}0]\ \kappa\alpha\iota$
$f(z) \le \max\,(f(z))$ **(1)**
Και ομοίως $\mathrm{g(z)} \le \mathrm{c\,g(x)} + (1 - \mathrm{c})\mathrm{g(y)}\ \mathrm{x}, y \in \mathrm{Dg}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{c} \in [1{,}0]$ **(2)**

Έχουμε h(x) = max{f(x), g(x)}, για να είναι η h κυρτή θα πρέπει να ισχύει
$\mathrm{h(cx} + (1 - \mathrm{c})\mathrm{y}) \le \mathrm{ch(x)} + (1 - \mathrm{c})\mathrm{h(y)}\ \mathrm{x}, y \in \mathrm{Dh}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{c} \in [1{,}0] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \max\{\,\mathrm{f(z)}, \mathrm{g(z)}\} \le \mathrm{ch(x)} + (1 - \mathrm{c})\mathrm{h(y)}\ (\mathbf{3})$$

Όμως από το (1) ισχύει ότι $f(z) \le cf(x) + (1 - c)f(y) \le ch(x) + (1 - c)h(y)$
Και ομοίως από το (2) $g(z) \le cg(x) + (1 - c)g(y) \le ch(x) + (1 - c)h(y)$

Αφού ισχύει ότι $g(z) \le\ ch(x) + (1 - c)h(y)$ ***και*** $f(z) \le ch(x) + (1 - c)h(y)$
τότε ισχύει και η συνθήκη **(3)** άρα η h είναι κυρτή.

Άσκηση 3:

Προφανής λύση το σημείο (6,4)

(α) Ψάχνουμε ένα σημείο (x, y) στο δωμάτιο για το οποίο η απόσταση του από το ηχείο μεγιστοποιείται.

Το ηχείο είναι στην θέση (1,0). Ισχύει ότι για οποιοδήποτε σημείο (x, y) η απόσταση του από το ηχείο θα είναι ίση με: $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ *(από τύπο απόστασης 2 σημείων)*

Εφόσον το σημείο πρέπει να ανήκει στο δωμάτιο, πρέπει να ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

$$0 \le x \le 6, \qquad 0 \le y \le 4$$

Πρόβλημα βελτιστοποίησης $\max f(x, y) = \min -f(x, y)$

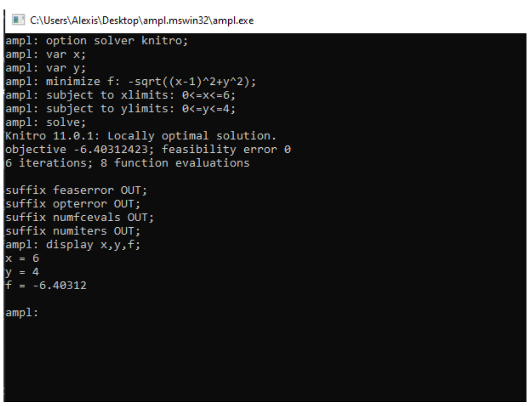
(β) Το σύνολο είναι κυρτό αφού με βάση το θεώρημα προέρχεται από δυο γραμμικές ανισότητες. Γεωμετρικά είναι ένα ορθογώνιο.

$$\nabla f(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} = 0 \end{cases}$$

$$H=\begin{bmatrix}\frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dx\,dy}\\ \frac{d^2f}{dy\,dx} & \frac{d^2f}{dy^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}-\frac{(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\ -\frac{(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}-\frac{y^2}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{bmatrix}$$

(γ)

```
var x;
var y;
minimize f: -sqrt((x-1)^2+y^2);
subject to xlimits: 0<=x<=6;
subject to ylimits: 0<=y<=4;
solve;
display x,y,f;
```



Λύση (6,4) με απόσταση 6.4 μέτρα

Άσκηση 4:

Προφανής λύση το σημείο 2000 kWh από το φωτοβολταϊκό και 3000 kWh αγορά. (Αφού είναι φτηνότερες τις εξαντλούμε)

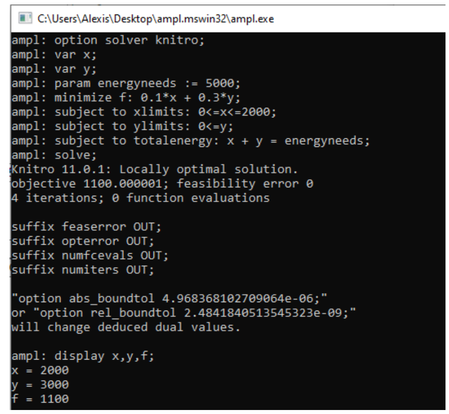
(α) Έστω (x, y) η λύση, όπου x οι kWh από φωτοβολταϊκό και y οι kWh που θα αγοράσουμε.

Το κόστος μας εκφράζεται από τη συνάρτηση $f(x, y) = 0.1x + 0.3y$

Πρέπει να **ελαχιστοποιήσουμε** την συνάρτηση μας με τις εξής προϋποθέσεις:

$x + y = 5000,\ 2000 \geq x \geq 0,\ y \geq 0$

```
option solver knitro;
var x;
var y;
param energyneeds := 5000;
minimize f: 0.1*x + 0.3*y;
subject to xlimits: 0<=x<=2000;
subject to ylimits: 0<=y;
subject to totalenergy: x + y = energyneeds;
solve;
display x,y,f;
```



```
C:\Users\Alexis\Desktop\ampl.mswin32\ampl.exe
ampl: option solver knitro;
ampl: var x;
ampl: var y;
ampl: param energyneeds := 5000;
ampl: minimize f: 0.1*x + 0.3*y;
ampl: subject to xlimits: 0<=x<=2000;
ampl: subject to ylimits: 0<=y;
ampl: subject to totalenergy: x + y = energyneeds;
ampl: solve;
Knitro 11.0.1: Locally optimal solution.
objective 1100.000001; feasibility error 0
4 iterations; 0 function evaluations

suffix feaserror OUT;
suffix opterror OUT;
suffix numfcevals OUT;
suffix numiters OUT;

"option abs_boundtol 4.968368102709064e-06;"
or "option rel_boundtol 2.4841840513545323e-09;"
will change deduced dual values.

ampl: display x,y,f;
x = 2000
y = 3000
f = 1100
```

Λύση (2000,3000) με κόστος 1100 ευρώ.

(γ)

Το νέο κόστος μας εκφράζεται από τη συνάρτηση $f(x, y) = 0.1x + 0.3y + 50 * \frac{x^2}{x^2+1} + 30$

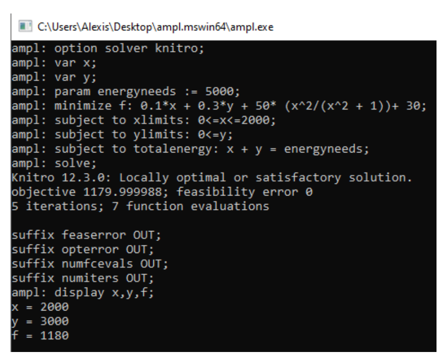
Μπορεί να γίνει και χρήση λογικής μεταβλητής στον τρίτο όρο

$$f(x, y) = 0.1x + 0.3y + 50 * flag + 30$$

Όπου $if\ x = 0: flag = 0\ else\ flag = 1, flag \in \{0,1\}$

Πρέπει να **ελαχιστοποιήσουμε** την συνάρτηση μας με τις ίδιες προϋποθέσεις.

```
option solver knitro;
var x;
var y;
param energyneeds := 5000;
minimize f: 0.1*x + 0.3*y + 50* (x^2/(x^2 + 1))+ 30;
subject to xlimits: 0<=x<=2000;
subject to ylimits: 0<=y;
subject to totalenergy: x + y = energyneeds;
solve;
display x,y,f;
```



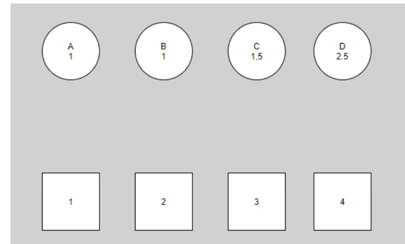
```
C:\Users\Alexis\Desktop\ampl.mswin64\ampl.exe
ampl: option solver knitro;
ampl: var x;
ampl: var y;
ampl: param energyneeds := 5000;
ampl: minimize f: 0.1*x + 0.3*y + 50* (x^2/(x^2 + 1))+ 30;
ampl: subject to xlimits: 0<=x<=2000;
ampl: subject to ylimits: 0<=y;
ampl: subject to totalenergy: x + y = energyneeds;
ampl: solve;
Knitro 12.3.0: Locally optimal or satisfactory solution.
objective 1179.999988; feasibility error 0
5 iterations; 7 function evaluations

suffix feaserror OUT;
suffix opterror OUT;
suffix numfcevals OUT;
suffix numiters OUT;
ampl: display x,y,f;
x = 2000
y = 3000
f = 1180
```

Λύσης (2000,3000) με κόστος 1180 ευρώ.

Άσκηση 5:

Αφού έχουμε 4 αντικείμενα θα θεωρήσουμε ότι οι πιθανές λύσεις μας θα είναι από 1 σακούλα έως 4 σακούλες. (Προφανής λύση 2 σακούλες)



Μεταβλητές: $x_{ij} = 1$ όταν το αντικείμενο i τοποθετείται στην σακούλα j, αλλιώς 0

$f_j = 1$ όταν η σακούλα j χρησιμοποιείται, αλλιώς 0 (άδεια)

Συνάρτηση ελαχιστοποίησης: $min \sum_{j=1}^{4} f_j$ (Μέτρηση χρησιμοποιημένων σακούλων)

Τα $\mathrm{i}, \mathrm{j} \in \{1,2,3,4\}$ οπότε υπάρχουν 16 μεταβλητές x_{ij} και 4 f_j όπως θεωρήσαμε.

Προϋποθέσεις: $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1$ (Το κάθε αντικείμενο χρησιμοποιείται μια φορά σε σακούλα)

$\sum_{i=1}^{4} w_i \, x_{ij} \leq 4 f_j$ (Κάθε σακούλα είναι από άδεια μέχρι γεμάτη, δεν υπάρχουν σακούλες με παραπάνω από 4 κιλά περιεχόμενο)

$x_{ij}, f_j \in \{0,1\} \ \forall \mathrm{i}, \mathrm{j}$ (Οι μεταβλητές έχουν τιμές 0 ή 1)

Άσκηση 6:

Έστω $f(x, y) = 2x + y^2 - log_{10}(x + y + 1)$

Για να αποδείξουμε ότι το πρόγραμμα είναι κυρτό, πρέπει το πεδίο ορισμού να είναι κυρτό και η συνάρτησης να είναι κυρτή.

Το πεδίο ορισμού είναι κυρτό αφού προέρχεται από ανισώσεις κυρτών συναρτήσεων.

Η πρώτη ανίσωση είναι κυρτή ως άθροισμα κυρτών συναρτήσεων, $e^{-x1+4x2}$ κυρτό αφού η e^x $κυρτ$ή και τα υπόλοιπα είναι πολυώνυμα.

Η συνάρτηση είναι κυρτή ως άθροισμα κυρτών όρων. Οι δυο πρώτοι όροι είναι κυρτοί αφού είναι πολυώνυμα.

Ο λογάριθμός είναι κυρτή συνάρτηση αφού το πεδίο ορισμού του είναι κυρτό και $για\ f(x) = logx, f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0\ για\ κάθε\ x \geq 0.$

Αφού η $logx$ είναι κυρτή θα είναι και η $\log(x_1 + x_2)$ και κατά συνέπεια και ο τρίτος όρος της συνάρτησης.

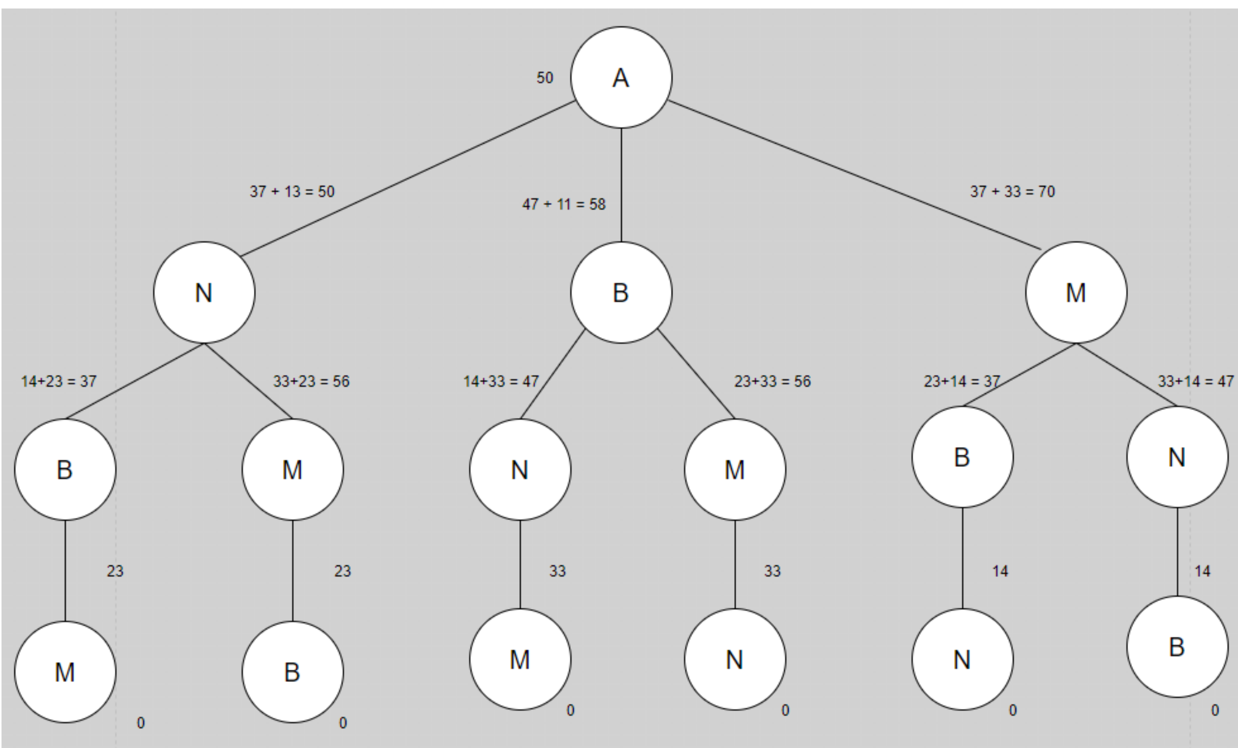
Άσκηση 7:

Έστω T(A,B) η συντομότερη διαδρομή σε χρόνο ως πεζός μεταξύ δύο σημείων A,B. Θεωρούμε ότι $T(A, B) = T(B, A)$ ∀ A, B ∈ S

Ακρόπολη	A
Ναός του Ολυμπίου Διός	N
Βιβλιοθήκη του Αδριανού	B
Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο	M

Πίνακας Αποστάσεων	A	N	B	M
A	0	13	11	33
N	13	0	14	33
B	11	14	0	23
M	33	33	23	0

Φτιάχνουμε το σχήμα με όλα τα πιθανά σενάρια και υπολογίζουμε το χρόνο από κάτω προς τα πάνω.



$$g(i, S) = \min_{k \in S}\{c_{ik} + g(k, S - \{k\})\}$$

$$c_{ik} = κόστος\ κάθε\ παιδιού\ από\ τον\ κόμβο\ μας\ i$$

$$S = \{A, N, B, M\}$$

Με αυτόν τον τύπο δυναμικού προγραμματισμού μπορούμε να βρούμε το σύνολο της μικρότερης διαδρομής μεταξύ των τεσσάρων σημείων. Η διαδρομή από το Α είναι η μικρότερη τιμή μεταξύ:

1) του κόστους από το Α στο Ν συν την διαδρομή του Ν
2) του κόστους από το Α στο Β συν την διαδρομή του Β
3) του κόστους από το Α στο Μ συν την διαδρομή του Μ

Και με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε την μικρότερη διαδρομή (Α,Ν,Β,Μ).

Άσκηση 8: Μπορούμε να δούμε το πρόβλημα σαν το πρόβλημα 0-1 Knapsack, όπου η συνάρτηση μεγιστοποίησης μας δίνει την αξία των αντικειμένων και ο περιορισμός το βάρος τους.

Αντικείμενο	Αξία	Βάρος
x_1	1	2
x_2	2	3
x_3	2	1
x_4	3	2

Capacity: m = 4, Number of Objects: n = 4

Η λύση δίνεται με τη μορφή $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, x_i \in \{0,1\}$

Αν $x_i = 1$ τότε το αντικείμενο i είναι μέρος της λύσης αλλιώς όχι.

Τα ταξινομούμε με βάση το βάρος τους.

			T					
			$i \downarrow m \rightarrow$	0	1	2	3	4
Αξία P	Βάρος w		0	0	0	0	0	0
2	1	x_3	1	0	2	2	2	2
1	2	x_1	2	0	2	2	3	3
3	2	x_4	3	0	2	3	5	5
2	3	x_2	4	0	2	3	5	5

$$T[0,m] = 0, T[i,0] = 0$$

$$T[i,m] = \max\{T[i-1,m], T[i-1, w-w[i]] + P[i]\}$$

Φτιάχνουμε έναν πίνακα δυναμικού προγραμματισμού και τον υπολογίζουμε με τους παραπάνω τύπους. Στην ουσία σε κάθε γραμμή βλέπουμε το καλύτερο που μπορούμε να πάρουμε για το συγκεκριμένο capacity m, και για τα πρώτα i αντικείμενα.

Τώρα ξεκινάμε από το τελευταίο κελί και ψάχνουμε να βρούμε τον συνδυασμό με την συγκεκριμένη αξία. Βλέπουμε ότι το 5 είναι το μέγιστο οπότε βρίσκουμε τη μικρότερη γραμμή που το περιέχει και τώρα ξέρουμε ότι το x_4 είναι μέρος της λύσης. Τώρα ψάχνουμε για $m -$

$w_4 = 2$ $και$ $p - p_4 = 2$, με την ίδια λογική ξεκινάμε από το κελί 2,2 και βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή μέχρι εκείνο το σημείο είναι 2 και η μικρότερη γραμμή που την συναντάμε είναι στο κελί 1,1, άρα και το x_3 είναι μέρος της λύσης.

Τελική λύση $A = \{0,0,1,1\}$