<u>Επιχειρησιακή Έρευνα: 2η Σειρά Ασκήσεων</u>

Ηλίας Στεφανής - 3180176
Αλέξιος- Λάζαρος Γεωργίου – 3180027

<u>Άσκηση 1:</u>
(α’)
(β’)

<u>Άσκηση 2:</u>
(α’) Μέθοδος απότομης κατάβασης με ακριβή αναζήτηση

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2$$
$$\overrightarrow{x_0} = (x_1,x_2) = (1,1)$$

$$\vec{\delta} = -\nabla f(1,1) = -\left[\frac{\theta f}{\theta x_1}, \frac{\theta f}{\theta x_2}\right] = -[4x_1 - 2, \quad 2x_2 - 2x_1 + 4] \xrightarrow{\vec{x}=(1,1)} [-2,-4]$$
$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0} + t\vec{\delta} = (1,1) + (-2t,-4t) = (1-2t, 1-4t)$$
$$g(t) = f(1-2t, 1-4t) = 2(1-2t)^2 + (1-4t)^2 - 2(1-2t)(1-4t) + 4(1-4t)$$
$$= 8t^2 - 20t + 5$$

g κυρτή και $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 16t - 20 = 0 \Leftrightarrow t^* = \frac{5}{4}$

Για αυτό το t έχουμε μηδενική παράγωγο και συνεπώς η ελάχιστη τιμή της f θα είναι προς το σημείο $\overrightarrow{x_1} = (1-2t^*, 1-4t^*) = (-\frac{3}{2}, -4)$

$$\nabla f(\vec{x}_1) = [4x_1 - 2, \quad 2x_2 - 2x_1 + 4] \xrightarrow{x_1=-\frac{3}{2}, x_2=-4} [-8,-1] \neq [0,0]$$

Άρα η $(-\frac{3}{2}, -4)$ δεν είναι βέλτιστη λύση.

(β’) Μέθοδος Newton
Υπολογισμός Εσσιανής:

$$H(f,\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\theta^2 f(\vec{x})}{\theta x^2} & \frac{\theta^2 f(\vec{x})}{\theta x \theta y} \\ \frac{\theta^2 f(\vec{x})}{\theta y \theta x} & \frac{\theta^2 f(\vec{x})}{\theta y^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\vec{x}=(1,1)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα κλίσης:

$$\nabla f(x_1,x_2) = \left[\frac{\theta f}{\theta x_1}, \frac{\theta f}{\theta x_2}\right] = [4x_1 - 2, \quad 2x_2 - 2x_1 + 4] \xrightarrow{\vec{x}=(1,1)} [2,4]$$

Άρα από απλή μέθοδο του Newton έχουμε:

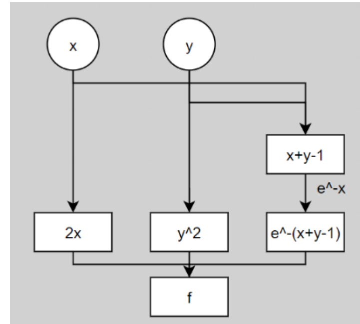
$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - H(f,\vec{x}_0)^{-1}\nabla f(\vec{x}_0) = [1,1] - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} * [2,4] = [1,1] - [3,5] = [-2,-4]$$

Άρα $\vec{x}_1 = (-2,-4)$

$$\nabla f(\vec{x}_1) = [4x_1 - 2, \quad 2x_2 - 2x_1 + 4] \xrightarrow{x_1=-2, x_2=-4} [-10,0] \neq [0,0]$$

Άρα η $(-2, -4)$ δεν είναι βέλτιστη λύση.

<u>Άσκηση 3:</u>



(α’)

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 + e^{-(x_1+x_2-1)}$$

Η συνάρτηση είναι κυρτή ως άθροισμα κυρτών συναρτήσεων.
e^x *κυρτή* άρα και ο τρίτος όρος είναι κυρτός από ιδιότητες κυρτών συναρτήσεων.

(β’)

```
import math
import numpy as np

n = 0
c = 0.8
#e = 2.718281828459
xn = np.array([3,3])

def f(x,y):
    return 2*x + y**2 + math.exp(-(x+y-1))

def d(x,y):
    return np.array([2- math.exp(-x-y+1), 2*y - math.exp(-x-y+1)])

t = 1
xnplus1 = xn + t * d(xn[0],xn[1])

for i in range(100):
    if f(xnplus1[0],xnplus1[1]) <= (f(xn[0],xn[1]) - c * d(xn[0],xn[1]) * (xnplus1-
xn)).all():
        print(xnplus1)
        print(n)
        break
    if abs(d(xn[0],xn[1])).all() <= 10**(-5):
        print(xnplus1)
        print(n)
        break
    t = t /2
    xn = xnplus1
    xnplus1 = xn + t * d(xn[0],xn[1])
    n += 1

print(xnplus1)
print(n)
```

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΟΠΙΣΘΟΔΡΟΜΗΣΗΣ (BACKTRACKING)

Είσοδος: $\vec{x}_n, \vec{\delta}, c$

1. **Θέσε** $t = 1$**.**
2. **Υπολογισμός** $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + t\vec{\delta}$**.**
3. **Εάν** $f(\vec{x}_{n+1}) \leq f(\vec{x}_n) + c\nabla f(\vec{x}_n) \cdot (\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n)$ **τότε ΤΕΛΟΣ.**
4. **Θέσε** $t = t/2$ **και μετάβαση στο βήμα 2.**

(γ’)

Άσκηση 4:

$$\mathrm{x + 3y + 2z = 5}$$

Συνάρτηση απόστασης από το σημείο (0,0,0): $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Leftrightarrow d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$minimize\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Με constraint $g(x, y, z) = x + 3y + 2z - 5$

$$\nabla f = \left[\frac{\theta f}{\theta x}, \frac{\theta f}{\theta y}, \frac{\theta f}{\theta z}\right] = [2x, 2y, 2z]$$

$$\nabla g = \left[\frac{\theta g}{\theta x}, \frac{\theta g}{\theta y}, \frac{\theta g}{\theta z}\right] = [1{,}3{,}2]$$

Lagrange Multipliers:

Πρέπει να ισχύει $\nabla f = \lambda * \nabla g \Rightarrow$

$$2x = \lambda, 2y = 3\lambda, 2z = 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\lambda}{2}, y = \frac{3\lambda}{2}, z = \lambda \Leftrightarrow$$

Από την εξίσωση constraint έχουμε: $\frac{\lambda}{2} + \frac{9\lambda}{2} + 2\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{7}$

Άρα $x = \frac{5}{14}, y = \frac{15}{14}, z = \frac{5}{7}$

Λύση $(\frac{5}{14}, \frac{15}{14}, \frac{5}{7})$

Άσκηση 5:

$Ισχύς\ που\ καταναλώνετε$: $minimize\ f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$

Constraint: $x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 10$

Lagrange Multipliers:

$$\nabla f = \lambda * \nabla g$$

$$\nabla f = \left[\frac{\theta f}{\theta x_1}, \frac{\theta f}{\theta x_2}, \frac{\theta f}{\theta x_3}\right] = [4x_1, 2x_2, 6x_3]$$

$$\nabla g = \left[\frac{\theta g}{\theta x_1}, \frac{\theta g}{\theta x_2}, \frac{\theta g}{\theta x_3}\right] = [1{,}1{,}1]$$

Συνεπάγεται:

$$4x_1 = \lambda. 2x_2 = \lambda, 6x_3 = \lambda \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{\lambda}{4}, x_2 = \frac{\lambda}{2}, x_3 = \frac{\lambda}{6}$$

Από εξίσωση constraint:

$$\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{6} = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{120}{11}$$

Άρα $x_1 = \frac{30}{11}, x_2 = \frac{60}{11}, x_3 = \frac{20}{11}$