<u>Επιχειρησιακή Έρευνα: 3η Σειρά Ασκήσεων</u>

Ηλίας Στεφανής - 3180176
Αλέξιος- Λάζαρος Γεωργίου – 3180027

<u>Άσκηση 1:</u>

Αιτήσεις $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ με $0 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 10, 0 \le x_3 \le 10$
Συνολική ισχύ: $\sum f_i = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$

$$Ισχύς\ που\ καταναλώνετε: minimize\ f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$$

Πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την ισχύ για τους παραπάνω περιορισμούς:

Constraint: $x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0\ και\ x_1 - 5 \le 0$

Οι x_1, x_2, x_3 θεωρούμε ότι είναι θετικές αφού οποιαδήποτε αρνητική λύση θα είχε και την αντίθετή της, λόγω του τετραγώνου

Δεν χρείαζεται να πάρουμε περιορισμό για $x_2, x_3 \le 10$ αφού "καλύπτεται" απο τον 1ο περιορισμό.

$$L(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 10) + \lambda_2(x_1 - 5 + z_1)$$
$$= (2x_1^2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1) + (x_2^2 + \lambda_1 x_2) + (3x_3^2 + \lambda_1 x_3) - 10\lambda_1 - 5\lambda_1 + \lambda_2 z_1$$

KKT:

i) $\frac{\theta L}{\theta x_1} = 0 \Rightarrow 4x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,\ \frac{\theta L}{\theta x_2} = 0 \Rightarrow 2x_2 + \lambda_1 = 0,\ \frac{\theta L}{\theta x_3} = 0 \Rightarrow 6x_3 + \lambda_1 = 0$

ii) $x_1 - 5 \le 0, x_1 + x_2 + x_3 = 10$
iii) $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$
iv) $\lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 10) = 0,\ \lambda_2(x_1 - 5) = 0$

Από (i)

$$x_1 = |x_1| = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{4}$$
$$x_2 = |x_2| = \frac{\lambda_1}{2}$$
$$x_3 = |x_3| = \frac{\lambda_1}{6}$$

Αν $\lambda_2 > 0\ από\ (iv) \Rightarrow x_1 = 5$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{6} = 5 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{15}{2}$$

Άρα

$$5 = \frac{\frac{15}{2} + \lambda_2}{4} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{25}{2}$$

Μη βέλτιστη Λύση: $(x_1 = 5, x_2 = \frac{15}{4}, x_3 = \frac{4}{3})$ => Ισχύς: 69.39

Αν $\lambda_2 = 0 => x_1 = \frac{\lambda_1}{4}$

Αντικαθιστούμε τα x_1, x_2, x_3 στον πρώτο περιορισμό και έχουμε:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0 => \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{6} - 10 = 0 => \lambda_1 = \frac{120}{11}$$

Άρα η βέλτιστη λύση είναι: ($x_1 = \frac{30}{11}, x_2 = \frac{60}{11}, x_3 = \frac{20}{11}$) => Ισχύς: 54.54

Μπορεί να λυθεί με Lagrange Multiplier όπως στην hw2 και τυχαίνει να ισχύει ο περιορισμός $x_1 \leq 5$

Lagrange Multipliers:

$$\nabla f = \lambda * \nabla g$$

$$\nabla f = \left[\frac{\theta f}{\theta x_1}, \frac{\theta f}{\theta x_2}, \frac{\theta f}{\theta x_3}\right] = [4x_1, 2x_2, 6x_3]$$

$$\nabla g = \left[\frac{\theta g}{\theta x_1}, \frac{\theta g}{\theta x_2}, \frac{\theta g}{\theta x_3}\right] = [1,1,1]$$

Συνεπάγεται:

$$4x_1 = \lambda. 2x_2 = \lambda, 6x_3 = \lambda \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{\lambda}{4}, x_2 = \frac{\lambda}{2}, x_3 = \frac{\lambda}{6}$$

Από εξίσωση constraint:

$$\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{6} = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{120}{11}$$

Άρα $x_1 = \frac{30}{11}, x_2 = \frac{60}{11}, x_3 = \frac{20}{11}$

$$x_1 \leq 5 \; οπότε \; η \; λύση \; είναι \; αποδεκτή$$

Άσκηση 2:

$$\max x + 2y$$
$$Constraint: 2x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0 \; και \; y \in R$$

Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε ελαχιστοποίηση συνάρτησης:

$$min -x - 2y$$

με τις ίδιες συνθήκες.

$$L(x, y, z_1, z_2;\ \lambda_1, \lambda_2) = -x - 2y + \lambda_1(2x^2 + y^2 - 1 + z_1) + \lambda_2(x + z_2)$$
$$= (-x + 2\,\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x) + (-2y + \lambda_1 y^2) + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 - \lambda_1$$

KKT:

i) $\frac{\theta L}{\theta x} = 0 => -1 + 4\,\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$ και

$\frac{\theta L}{\theta y} = 0 => -2 + 2\,\lambda_1 y = 0$

ii) $2x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0$

iii) $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

iv) $\lambda_1(2x^2 + y^2 - 1) = 0,\ \lambda_2 x = 0$

Από την πρώτη συνθήκη i)

$$x = \frac{1 - \lambda_2}{4\,\lambda_1} \; και \; y = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$\lambda_1 \neq 0 \; αφού \; y = \frac{1}{\lambda_1} \; και \; επομένως \; \lambda_1 > 0 \; (αφού \; \lambda_1 \geq 0 \; και \; \lambda_1 \neq 0)$$

Από iv)

$$\lambda_1(2x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Όμως $\lambda_1 \neq 0$, άρα $2x^2 + y^2 - 1 = 0$

Η εξίσωση $2x^2 + y^2 - 1 = 0$ αν αντικαταστήσουμε τα x, y με τους τύπους με λ_1, λ_2 γίνεται:

$$2\left(\frac{1 - \lambda_2}{4\,\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 - 1 = 0$$

Για το λ_2:

Αν $\lambda_2 = 0$, τότε $x = \frac{1-\lambda_2}{4\,\lambda_1} = \frac{1}{4\,\lambda_1} > 0 \; αφού \; \lambda_1 > 0, όμως \; από \; (ii) \; πρέπει \; x \leq 0 \; όποτε \; άτοπο$

Αν $\lambda_2 > 0, τότε \; από \; την \; (iv) \; πρέπει \; x = 0 \; (αφού \; \lambda_2 x = 0)$

Άρα $x = 0 => \frac{1-\lambda_2}{4\,\lambda_1} = 0 => \lambda_2 = 1$

Για $\lambda_2 = 1$ η παραπάνω συνάρτηση γίνεται

$$2\left(\frac{1 - 1}{4\,\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 - 1 = 0 => \boldsymbol{\lambda_1 = 1} \text{ ή } \lambda_1 = -1 \; \big(απορρίπτεται \; από \; (iii)\big)$$

Για $\lambda_1 = 1$:

$y = \frac{1}{\lambda_1} = 1$

Άρα η βέλτιστη λύση είναι η $(x = 0, y = 1)$

Άσκηση 3:

$$\max \quad \log(x+3) + \log(y+6)$$
έτσι ώστε $x + 2y \leq 3$
$$x - y \leq 6$$
όπου $x > -3, y > -6$

Το πρόγραμμα είναι κυρτό.
(α')
Αντικατάσταση $x' = x + 3,\ y' = y + 6$
Πρόγραμμα:
f: $\max \log(x') + \log(y')$
Constraint: $x' + 2y' \leq 18,\ x' - y' \leq 3$ με αντικατάσταση στα constraints
Όπου $x', y' > 0$

f: $\max \log(x') + \log(y')$
$$L(x', y';\ \lambda_1,\ \lambda_2) = \log(x') + \log(y') +\ \lambda_1(x' + 2y' - 18) +\ \lambda_2(x' - y' - 3)$$
$$= (\ \lambda_1 x' +\ \lambda_2 x' + \log(x') + (2\ \lambda_1 y' -\ \lambda_2 y' + \log(y')) - 18\ \lambda_1 - 3\ \lambda_2$$

$$\frac{\theta L}{\theta x'} = 0 => \ \lambda_1 +\ \lambda_2 + \frac{1}{x'} = 0 => x' = -\frac{1}{\lambda_1 +\ \lambda_2}$$

$$\frac{\theta L}{\theta y'} = 0 => \ 2\lambda_1 -\ \lambda_2 + \frac{1}{y'} = 0 => y' = -\frac{1}{2\lambda_1 -\ \lambda_2}$$

(β')

Βέλτιστη τιμή:

$$g(\ \lambda_1,\ \lambda_2) = \log\left(-\frac{1}{\lambda_1 +\ \lambda_2}\right) + \log\left(-\frac{1}{2\lambda_1 -\ \lambda_2}\right)$$
$$\nabla g(\ \lambda_1,\ \lambda_2) = 0$$
$$Βρίσκω\ \lambda_1,\ \lambda_2\ από\ το\ σύστημα\ των\ μερικών\ παραγώγων$$

(γ')
Η βέλτιστή λύση είναι ίδια με τη λύση του δυικού προβλήματος.

Άσκηση 4:

$$\begin{aligned} &\max \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ &\text{έτσι ώστε } 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6\,, \\ &\qquad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3\,, \\ &\text{όπου } x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

(α')

Τυπική μορφή:

$$\max f = \max 2x_1 + 4x_2 + x_3 \;\; [\mathbf{1}]$$
$$Constraint: 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + s_2 = 3$$
$$όπου\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

$$s_1 = 6 - 2x_1 - x_2 - x_3 \; [\mathbf{2}]$$
$$s_2 = 3 - x_1 - 2x_2 + x_3 \; [\mathbf{3}]$$

Βασική λύση:
Θέτουμε τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με 0.

$$x_{1,}x_2, x_3 = 0 => \; s_1 = 6, \qquad s_2 = 3$$

Η λύση είναι $\left(x_{1,}x_2, x_3, s_1, s_2, f(x_{1,}x_2, x_3)\right) = (0{,}0{,}0{,}6{,}3{,}0)$

Πρώτο βήμα:

Αυξάνουμε το x_3 κατά ε, έχουμε λύση $(0{,}0, \varepsilon, 6 - \varepsilon, 3 - \varepsilon, \varepsilon)$, προκύπτει από τις σχέσεις ότι η μέγιστη τιμή του $\varepsilon = 3\ (αφού\ \varepsilon \leq 3)$
Άρα η λύση γίνεται (0,0,3,3,0,3)

Νέες βασικές μεταβλητές (μη μηδενικές): x_3, s_1
Νέες μη-βασικές μεταβλητές (μηδενικές): x_1, x_2, s_2

Στόχος: να έχουμε αριστερά μόνο τις βασικές μεταβλητές και δεξιά μόνο τις μη-βασικές.

Από την $[\mathbf{3}]$ μεταφέρουμε τους όρους και προκύπτει

$$x_3 = s_2 - 3 + x_1 + 2x_2 \;\; [\mathbf{2.1}]$$

Προσθέτοντας την $[\mathbf{2}] + [\mathbf{3}]$ προκύπτει

$$s_1 = 6 - 2x_1 - x_2 - s_2 \;\; [\mathbf{2.2}]$$

Προσθέτοντας την $[\mathbf{1}] + [\mathbf{3}]$ προκύπτει

$$f = s_2 + 3x_1 + 6x_2 - 3 \;\; [\mathbf{2.3}]$$

Επόμενο βήμα:

Αυξάνουμε το x_2 κατά ε, έχουμε λύση $(0, \varepsilon, 2\varepsilon - 3{,}6 - \varepsilon, 0{,}6\varepsilon - \varepsilon)$, προκύπτει από τις σχέσεις ότι η μέγιστη τιμή του $\varepsilon = 3\ (αφού\ \varepsilon \leq 3, πρέπει\ x_2 + x_3 \leq 6 => \varepsilon + 2\varepsilon - 3 \leq 6 => 3\varepsilon \leq 9 => \varepsilon \leq 3)$
Άρα η λύση για $\varepsilon = 3$ γίνεται (0,3,3,3,0,15)

Νέες βασικές μεταβλητές (μη μηδενικές): x_2, x_3, s_1
Νέες μη-βασικές μεταβλητές (μηδενικές): x_1, s_2

Δεν μπορούμε να βελτιώσουμε με τον ίδιο τρόπο σε επόμενα βήματα όποτε η βέλτιστη λύση είναι η (0,3,3) $\mu\varepsilon\ f\ =\ 15$.

(β’)
Η λύση θα αλλάξει ελάχιστα στα x_2, x_3

Αλλαγή στον περιορισμό = 0.01

Εφαρμόζεται το θεώρημα ανάλυσης ευαισθησίας ΓΠ από διαλέξεις, δηλαδή βέλτιστη τιμή αλλάζει κατά

$$0.01 * \lambda_2 = 0.01 * 2 = \mathbf{0.02}$$

Δηλαδή νέα βέλτιστη τιμή = 15.02
Το λ_2 είναι ο συντελεστής του s_2 στο τελευταίο βήμα του simplex για την συνάρτηση $f\ = 3x_1 + 4s_1 + s_2$ (Δεν λύθηκε με το χέρι το (β’))