Θεωρία Παιγνίων και Αποφάσεων

1η Σειρά Ασκήσεων

Γεωργίου Αλέξιος- Λάζαρος - 3180027

Πρόβλημα 1:

50000€

Θ: Θετικό

Ε: εξόφληση

$$P(\Theta) = P(\Theta|E) * P(E) + P(\Theta|E') * P(E') = 0.9 * 0.96 + 0.1 * 0.04 = 0.868$$

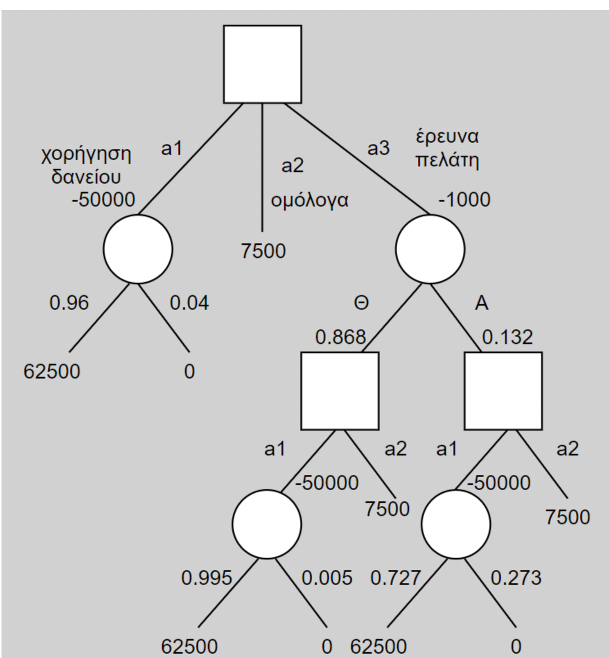
$$Bayes: P(E|\Theta) = P(\Theta|E) * \frac{P(E)}{P(\Theta)} = 0.9 * \frac{0.96}{0.868} = 0.995$$

$$Bayes: P(E|A) = P(A|E) * \frac{P(E)}{P(A)} = 0.1 * \frac{0.96}{0.132} = 0.727$$

Επιλογή a_1: Μέσο κέρδος: 12500 *0.96 – 50000 * 0.04 = 10000

Επιλογή a_3: Μέσο κέρδος: -1000 + 0.868 * 0.995 * 12500 – 50000 *0.005 + 0.132 *7500 = 10,535.75
(Επιλογή α2 σε περίπτωση αρνητικού δεν έχει νόημα η χορήγηση δανείου)

Επιλογή a_2: Μέσο κέρδος: 0.15 * 50000 * 100% = 7500



(i) Η στρατηγική που θα ακολουθήσει είναι έλεγχος και αν είναι θετικός χορήγηση δανείου, αν είναι αρνητικός επιλογή ομολόγων.

(ii) Αξία τέλειας πληροφόρησης, τι θα γινόταν αν ήξερα αν ο πελάτης θα εξοφλήσει ή όχι.

.

$$Μέσο\ Κέρδος\ 12500\ * 0.96 + 7500 * 0.04 = 12300$$

$$Μέσο\ Κέρδος\ χωρίς\ πειράματα\ =\ 10000\ (απο\ α1)$$

$$EVPI\ =\ 12300 - 10000\ =\ 2300$$

(iii) Μέσο κέρδος α3 = 10535.75, Μέσο κέρδος από α1 = 10000

Άρα μπορεί η έρευνα να κοστίζει 10535.75 – 10000 = 535.75 παραπάνω για να αξίζει οριακά. Δηλαδή 1000 + 535.75 = 1535.75 ευρώ

Πρόβλημα 2:

Εφόσον ακολουθούμε το κριτήριο του Bayes η συνάρτηση θα είναι γραμμική $\pi(x) = \alpha x + \beta$

Παρατήρηση: ξέρουμε ήδη 2 σημεία της γραφικής παράστασης της π(X)

- $\pi(X_{min}) = 0$
- $\pi(X_{max}) = 1$

Αν η π(X) είναι ευθεία μας αρκούν αυτά τα 2 και δεν χρειάζεται απολύτως καμία ερώτηση

i)

$$\pi(10) = 0, \pi(80) = 1\ άρα\ \pi(x) = \frac{1}{70}x - \frac{1}{7}$$

ii)

Ριψοκίνδυνη συμπεριφορά:

Θα επιλέξουμε μια κυρτή συνάρτηση π(x) ώστε τα σημεία στο Xmin και Xmax να συμπίπτουν με το διάγραμμα.

Έστω $ax^2 + bx = 0$ τότε με βάση τα 2 σημεία έχουμε $\pi(x) = \frac{1}{5600}x^2 - \frac{1}{560}$

iii)

Η στρατηγική μας είναι ριψοκίνδυνη, να ρισκάρουμε στην α2 για τα 80 ευρώ.

Μέσα κέρδη:

Επιλογή a_1: $\frac{2}{3} * 30 + \frac{1}{3} * \left(\frac{1}{2} * 50 + \frac{1}{2} * 10\right) = 30$ Θα επιλέγαμε πάντα a_4

Επιλογή a_2: $\frac{1}{5} * 80 + \frac{4}{5} * 20 = 32$

Πρόβλημα 3:

(i) Πιθανότητα 8 πράσινες, 4 άσπρες(Π Π Α Π Α Π Π Α Π Α Π Π):

$$Τύπος\ Bayes: P(A|X) = P(X|A) * \frac{P(A)}{P(X)}$$

$$Πιθανότητα\ 8\ πράσινων\ δεδομένου\ A\ κουτιού: P(X|A) = \frac{0.7 * 8 + 0.3 * 4}{12} = 0.566..$$

$$Πιθανότητα\ επιλογής\ κουτιού = \ P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$Πιθανότητα\ 8\ πράσινων\ δεδομένου\ B\ κουτιού: P(X|B) = \frac{0.3 * 8 + 0.7 * 4}{12} = 0.433..$$

$$Πιθανότητα\ επιλογής\ 8\ πράσινων: P(X) = \frac{1}{2} * P(X|A) + \frac{1}{2} * P(X|B) = 0.5$$

$$Άρα\ από\ τύπο\ του\ Bayes\ P(A|X) = 0.566 * \frac{1}{1} = 0.566..$$

(ii) Πιθανότητα 8 πράσινες, 4 άσπρες (Π Π Π Π Π Π Π Π Α Α Α Α):

Η πιθανότητα παραμένει ίδια με την πρώτη σειρά, αφού έχουμε επανατοποθέτηση δεν ευνοεί η σειρά κάποιο κουτί αλλά μόνο το άθροισμα των χρωμάτων.

Πρόβλημα 4:

Εφαρμόζουμε τον τύπο αποφυγής κινδύνου

$$\tau(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

a)

$$u_1(x) = \ln(2x + 5)$$

$$u_1'(x) = \frac{2}{2x + 5}$$

$$u_1''(x) = -\frac{4}{(2x+5)^2}$$

$$\tau_1(x) = -\frac{-\frac{4}{(2x+5)^2}}{\frac{2}{2x+5}} = \frac{2}{2x+5}$$

b)

$$u_2(x) = 8 + 5x$$

$$u_2'(x) = 5$$

$$u_2''(x) = 0$$

$$\tau_2(x) = 0$$

c)

$$u_3(x) = \sqrt{x+5}$$

$$u_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$u_3^{''(x)} = -\frac{1}{4(x+5)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tau_3(x) = -\frac{-\frac{1}{4(x+5)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}} = O(x^{-\frac{1}{2}})$$

d)

$$u_4(x) = x^3 + 3x$$

$$u_4^{'(x)} = 3x^2 + 3$$

$$u_4^{''(x)} = 6x$$

$$\tau_4(x) = -\frac{6x}{3x^2+3} = -\frac{2x}{x^2+1} = -O(x^{-1})$$

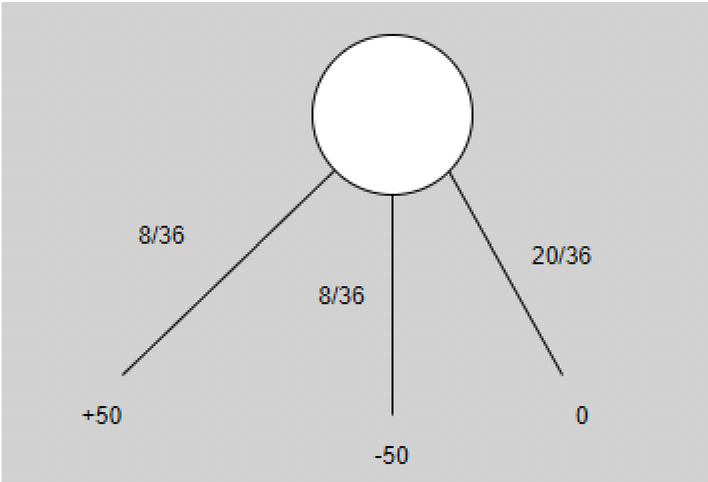
Συγκρίνουμε τις $\tau(x)\ και\ έχουμε\ \tau_4(x) < \tau_2(x) < \tau_3(x) < \tau_1(x)$

Άρα η 4 είναι η πιο ριψοκίνδυνη και η 1 η πιο συντηρητική.

Πρόβλημα 5:

Το παιχνίδι είναι συμμετρικό, οι πιθανότητες κάθε παίχτη είναι ίδιες για να κερδίσει αφού έχει ίδιο αριθμό συνδυασμών και ίδιο αριθμό διπλών ζαριών. Εφόσον η συμπεριφορά μας είναι ελαφρώς ριψοκίνδυνη, θα δεχτούμε το στοίχημα, αν υποθέσουμε ότι θα κερδίσουμε 50 ευρώ σε περίπτωση νίκης.

Με την συγκεκριμένη συνάρτηση ωφέλειας είμαστε διατεθειμένοι να ρισκάρουμε μέχρι και 60 ευρώ για το συγκεκριμένο στοίχημα αξίας 50 ευρώ.



Πρόβλημα 6:

i)

Ομοιόμορφη κατανομή, άρα $g(r) = \frac{1}{b-a}$

Χρησιμότητα $u(x) = \sqrt{x}$

Μέση χρησιμότητα $E\big(u(x)\big) = g(r)\ \int_a^b u(x)$= $\frac{1}{(b-a)}\ \int_{-0.05}^{0.1} \sqrt{x}\, dx$

Για $x = K + r * K$

$$\frac{1}{(b-a)} \int_{-0.05}^{0.1} \sqrt{K + r * K}\, dr = \frac{1}{0.15} 0.15182..* \sqrt{K} = 1.012\sqrt{K}$$

Οπότε θα κερδίσουμε κάτι παραπάνω από το 1% την αρχικής επένδυσης.

ii)

Χρησιμότητα $u(x) = x$

$$E\big(u(x)\big) = E(x) = \mu * K$$

Πρόβλημα 7:

$$u(xq) = p * u(q) + (1-p) * u(0) => q = 0$$

Η συνάρτηση εκδηλώνει συντηρητική συμπεριφορά και κατά μέσο όρο ο ασφαλισμένος χάνει λιγότερο από 1% της επένδυσης του, άρα περιμένουμε ότι το q δεν θα είναι κοντά στο 0.