Preuves diverses

Alexis Houssard

June 2021

1 Prix du Call dans le modèle displaced log-normal

On considère un sous jacent S qui suit la dynamique suivante

$$\mathrm{d}S(t) = \sigma\big(S(t) - \theta\big)\ \mathrm{d}W_t$$

où W est un mouvement Brownien sous la probabilité risque neutre considérée.

On a donc

$$S(t) = \theta + (S(0) - \theta)e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t}$$

ce qui implique que le sous jacent prend ses valeurs dans $]\theta, +\infty[$.

On veut montrer que le prix d'un call dans ce modèle peut dépasser la limite supérieure du modèle Black Scholes. C'est à dire $\exists K > 0, \mathbb{E}\big[(S(T) - K)^+\big] > S(0)$

Si $\theta < 0$ et $K = 0$, on a:

$$\mathbb{E}\big[(S(T)^+\big] = \int_0^{+\infty} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x$$

où $f_{S(T)}$ est la densité de probabilité de $S(T)$.

Or

$$S(0) = \mathbb{E}\big[S(T)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x$$

.

Comme $f_{S(T)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$, il faudrait que $\forall x \in]-\infty, 0[, f_{S(T)}(x) = 0$ pour que $\int_{-\infty}^0 x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x = 0$.

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\big(S(T) < 0\big) &= \mathbb{Q}\Big(\mathcal{N}(0,1) < \frac{\log(\frac{-\theta}{S(0)-\theta}) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{\log(\frac{-\theta}{S(0)-\theta}) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) \\ &= \int_{-\infty}^0 f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x\ >\ 0 \end{aligned}$$

Cela prouve que $\exists x \in]-\infty, 0[,\ f_{S(T)}(x) \neq 0$ et que $\int_{-\infty}^{0} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x < 0$

Donc
$$Call(S(0), 0) > S(0)$$
. Le Call étant une fonction décroissante et continue du strike, on en déduit
$$\boxed{\exists K > 0,\ Call(S(0), K) > S(0)}$$

2 Différence de distribution entre probabilité risque neutre et terminale

Sous la probabilité risque neutre, le payoff du swaption se note
$$\big(S(T_0, T_N, x(T_0), y(T_0)) - K\big)^+$$
. On a vu que sous cette probabilité, la dynamique de x s'écrit sous la forme
$$\mathrm{d}x(t) = (y(t) - \chi(t)x(t))\ \mathrm{d}t\ +\ \sigma_r(t)\ \mathrm{d}Wt$$
où W est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.

Le payoff conserve la même expression, à un facteur indépendant de x près, sous la probabilité terminale $\mathbb{Q}^{T_N}$. Néanmoins, la dynamique de x peut se réécrire sous la forme
$$\mathrm{d}x(t) = \big(y(t) - \sigma_r(t)^2 G(t, T_N) - \chi(t)x(t)\big)\ \mathrm{d}t\ +\ \sigma_r(t)\ \mathrm{d}W_t^{T_N}$$
où W^{T_N} est également un mouvement Brownien mais sous la probabilité terminale.

On veut montrer ici que la probabilité que le payoff s'annule est plus grande sous la mesure terminale.

On note
$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \big(y(t) - \chi(t)x(t)\big) \\ \mu_2(t) &= \big(y(t) - \sigma_r(t)^2 G(t, T_N) - \chi(t)x(t)\big) \end{aligned}$$
et $\epsilon(t) \geq 0$ telle que $\mu_1(t) = \mu_2(t) + \epsilon(t)$.

Comme W sous $\mathbb{Q}$ a la même loi que W^{T_N} sous $\mathbb{Q}^{T_N}$, on a:
$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \qquad & \mathbb{Q}\big(\int_0^{T_0} \mu_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t\ \in A\big) \\ & = \mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0} \mu_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N}\ \in A\big) \\ & = \mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0} (\mu_2(t) + \epsilon(t))\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N}\ \in A\big) \end{aligned}$$

Hypothèse: Si on considère que ϵ est déterministe, la quantité précèdente se réécrit:

$$\mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0} \mu_2(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N} \ \in \{x - \int_0^{T_0} \epsilon(t)\mathrm{d}t\ ,\ x \in A\}\big)$$

On note

$$O = S(T_0, T_N, \cdot, y(T_0))^{-1}(] - \infty, K])$$

, qui est un fermé car image réciproque d'un fermé par une application continue.

On sait que S est une fonction monotone croissante et continue de x.
De plus, $\lim_{x\to\infty} S(T_0, T_N, x, y(T_0)) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} S(T_0, T_N, x, y(T_0)) = -\infty$ par croissance de $T \to G(t, T)$.

On en déduit que $O =]-\infty, S(T_0, T_N, \cdot, y(T_0))^{-1}(K)]$. Donc $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(] - \infty, b],\ b \in \mathbb{R}\big)$ et $\tilde{O} = \{x - \int_0^{T_0} \epsilon(t)\mathrm{d}t\ ,\ x \in O\} \subset O$.

Ce qui implique que

$$\mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0} \mu_2(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N} \ \in \{x - \int_0^{T_0} \epsilon(t)\mathrm{d}t\ ,\ x \in O\}\big)$$

$$\leq \mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0} \mu_2(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N} \ \in O\big)$$

Enfin

$$\boxed{\mathbb{Q}\big(\int_0^{T_0} \mu_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t \ \in O\big) \leq \mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0} \mu_2(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N} \ \in O\big)}$$

Il reste à montrer le résultat si ϵ n'est pas déterministe. Si ϵ est un processus aléatoire, il n'en reste pas moins que

$$\forall(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+,\ \epsilon(\omega, t) \geq 0 \implies \forall\omega \in \Omega,\ \int_0^{T_0} \epsilon(\omega, t)\ \mathrm{d}t \geq 0$$

Si on note $Y = \int_0^{T_0} \mu_2(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\ \mathrm{d}W_t$. On a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}^{T_N}\big(Y + \textstyle\int_0^{T_0} \epsilon(t)\ \mathrm{d}t \in O\big) \\
&= \mathbb{Q}^{T_N}\big(\{\omega,\ Y(\omega) + \textstyle\int_0^{T_0} \epsilon(\omega, t)\ \mathrm{d}t \in O\}\big) \\
&= \mathbb{Q}^{T_N}\big(\big\{\omega,\ Y(\omega) + \textstyle\int_0^{T_0} \epsilon(\omega, t)\ \mathrm{d}t \in]-\infty, S(T_0, T_N, \cdot, y(T_0))^{-1}(K)]\big\}\big) \\
&= \mathbb{Q}^{T_N}\big(\big\{\omega,\ Y(\omega) \in]-\infty, S(T_0, T_N, \cdot, y(T_0))^{-1}(K) - \textstyle\int_0^{T_0} \epsilon(\omega, t)\ \mathrm{d}t]\big\}\big)
\end{aligned}$$

Or

$$\forall\omega \in \Omega,\quad \big]{-\infty}, S(T_0, T_N, \cdot, y(T_0))^{-1}(K) - \int_0^{T_0} \epsilon(\omega, t)\ \mathrm{d}t\big] \subset \big]{-\infty}, S(T_0, T_N, \cdot, y(T_0))^{-1}(K)\big]$$

Donc

$$\begin{aligned}&\{\omega, Y(\omega) \in]-\infty, S(T_0, T_N, \cdot, y(T_0))^{-1}(K) - \textstyle\int_0^{T_0} \epsilon(\omega, t)\ \mathrm{d}t]\}\\ &\subset \{\omega, Y(\omega) \in]-\infty, S(T_0, T_N, \cdot, y(T_0))^{-1}(K)]\}\end{aligned}$$

Et on conclut de manière analogue au cas ϵ déterministe.

3 Signe du skew dans le modèle normal avec des prix dans le modèle displaced log-normal

On definit la volatilité implicite ici par $\tilde{\sigma}$ telle que

$$V_0^N(S(0), K, \tilde{\sigma}, T) = V_0^{LD}(S(0), K, T, \sigma, \theta)$$

où V_0^N est le prix du call dans le modèle normal et V_0^{LD} le prix du call dans le modèle displaced log-normal.

On veut prouver ici que la pente de la volatilité implicite, définit comme ci dessus, par rapport au strike K est positive

<u>**Tentative de Preuve directe:**</u>

Si on note

$$\tilde{x} = \frac{S(0) - K}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}$$

, il vient:

$$\begin{aligned} V_0^{LD} &= (S(0) - K)\left(\tfrac{1}{\tilde{x}}\phi(\tilde{x}) + \Phi(\tilde{x})\right) \\ &= (S(0) - K)\tilde{\Phi}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

On note $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{x}\phi(x) + \Phi(x)$.

Donc

$$\tilde{\sigma} = \frac{S(0) - K}{\tilde{x}\sqrt{T}}$$

et

$$\tilde{x} = \tilde{\Phi}^{-1}\left(\frac{V_0^{LD}}{S(0) - K}\right)$$

On en déduit

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial K} = \frac{-1}{\tilde{x}^2\sqrt{T}}\left[\tilde{x} + (S(0) - K)\frac{\partial \tilde{x}}{\partial K}\right]$$

Or

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \tilde{x}}{\partial K} &= \tfrac{\partial}{\partial K}\left(\tfrac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\right) \times \tfrac{1}{\tilde{\Phi}'(\tilde{x})} \\ &= \tfrac{\partial}{\partial K}\left(\tfrac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\right) \times \tfrac{-\tilde{x}^2}{\phi(\tilde{x})} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial K} = \frac{-1}{\tilde{x}^2\sqrt{T}}\Big[\tilde{x} - (S(0)-K)\frac{\tilde{x}^2}{\phi(\tilde{x})}\frac{\partial}{\partial K}\big(\frac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\big)\Big]$$

On rappelle que

$$\begin{cases} V_0^{LD} = (S(0)-\theta)\Phi(d^+) - (K-\theta)\Phi(d^-) \\ \frac{\partial V_0^{LD}}{\partial K} = -\Phi(d^-) \end{cases}$$

où $d^{+/-} = \frac{\log\left(\frac{S(0)-\theta}{K-\theta}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + / - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial K}\big(\tfrac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\big) &= -\tfrac{1}{S(0)-K}\Phi(d^-) + \tfrac{1}{(S(0)-K)^2}V_0^{LD} \\ &= \tfrac{1}{(S(0)-K)^2}\Big[(S(0)-\theta)\Phi(d^+) - (S(0)-\theta)\Phi(d^-)\Big] \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial K} = \frac{-1}{\sqrt{T}}\Big[\frac{1}{\tilde{x}} - \frac{(S(0)-\theta)}{\phi(\tilde{x})(S(0)-K)}(\Phi(d^+) - \Phi(d^-))\Big]}$$

En substituant par l'expression de $\tilde{x}$, il vient:

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial K} = \frac{-1}{\sqrt{T}(S(0)-K)}\Big[\tilde{\sigma}\sqrt{T} - (S(0)-\theta)\sqrt{2\pi}(\Phi(d^+) - \Phi(d^-))e^{\frac{1}{2}\frac{(S(0)-K)^2}{\tilde{\sigma}^2 T}}\Big]$$

Il reste à prouver que cette expression est positive dans tous les cas, ce qui est plus complexe puisque cette dernière fait intervenir tous les paramètres du modèle.

Autre angle de preuve: On se propose de démontrer le résultat en se placant dans le cadre suivant:

Le pricing se fait dans le modèle displaced log-normal où le sous-jacent suit la dynamique

$$\mathrm{d}S(t) = \sigma\big(S(t)-\theta\big)\ \mathrm{d}W_t \quad \Big(S(0) > 0, S(0) > \theta \quad \sigma > 0\Big).$$

On définit cette fois la volatilité implicite calculée dans le modèle displaced log-normal, c'est-à-dire σ_{LD} telle que

$$\forall K, T \geq 0, \quad C^{LD}\big(T, K, \sigma_{LD}(T,K), \theta_{LD}\big) = C^{LD}\big(T, K, \sigma, \theta\big) \qquad (\star)$$

Or on remarque que si S suit une dynamique displaced log-normal définie comme ci-dessus, le processus $(S(t)-\theta)_t$ suit une dynamique log-normal de volatilité σ.
On a donc

$$C^{LD}(T,K,\sigma,\theta)=\mathbb{E}\big[(S(T)-K)^+\big]=\mathbb{E}\big[\big(S(T)-\theta-(K-\theta)\big)^+\big]=C^{BS}(S(0)-\theta,K-\theta,\sigma,T)$$

L'équation $(\star)$ devient alors

$$C^{BS}\big(S(0)-\theta_{LD},K-\theta_{LD},\sigma_{LD}(T,K),T\big)=C^{BS}(S(0)-\theta,K-\theta,\sigma,T)$$

On pose

$$\begin{cases} \tilde{S(0)}=S(0)-\theta_{LD} \\ \tilde{K}=K-\theta_{LD} \end{cases}$$

Il vient:

$$\boxed{C^{BS}\big(\tilde{S(0)},\tilde{K},\sigma_{LD}(T,K),T\big)=C^{BS}\big(\tilde{S(0)}-(\theta-\theta_{LD}),\tilde{K}-(\theta-\theta_{LD}),\sigma,T\big)}$$

D'après **Théorème 1** de "Displaced Lognormal Volatility Skews: Analysis and Applications to Stochastic Volatility Simulations, R. Lee",

$$\forall T>0,K>0 \quad s.t\ C^{BS}(S(0)-\theta,K-\theta,\sigma,T)<S(0),$$

$$sgn\frac{\partial\sigma_{LD}}{\partial K}(T,K)=sgn(\theta-\theta_{LD})$$

Dans notre cas, les dynamique log-displaced sont sous la forme $\mathrm{d}S(t)=\lambda\big(bS(t)+(1-b)S(0)\big)\ \mathrm{d}W_t$

On pose donc $(b_1,b_2)\in]0,1]^2$ tels que

$$\begin{cases} \theta=-\frac{1-b_1}{b_1}S(0) \\ \theta_{LD}=-\frac{1-b_2}{b_2}S(0) \end{cases}$$

Donc

$$\theta-\theta_{LD}=S(0)\big[\frac{1-b_2}{b_2}-\frac{1-b_1}{b_1}\big]$$

Comme $x\to\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$sgn(\theta-\theta_{LD})=sgn\big(\frac{1-b_2}{b_2}-\frac{1-b_1}{b_1}\big)=sgn(b_1-b_2)$$

Conclusion: Initialement, nous voulions impliciter la volatilité dans un modèle normal, soit un modèle displaced log-normal avec $b_2=0$ et avec des prix sous un modèle displaced log-normal $b_1\in[0,1]$. On en déduit finalement que si $b_2\to 0^+$, la pente de la volatilité implicite est bien positive.