ZC_curve

May 7, 2021

1 Zero coupon curve building

1.1 1. Linear swap rate

Etant donné le taux forward F_1 entre T_1 et T_2, on a

$$\frac{P(0,T_1)}{P(0,T_2)} = 1 + F_1 * (T_2 - T_1)$$

Si on a des valeurs de swap rate pour différentes maturités, par exemple: $S_{2Y} = 2,7\%, S_{5Y} = 3,6\%, S_{10Y} = 4,6\%$

On utilise cela et la formule du taux swap

$$102,7P(0,T_2) = 100 - 2,7P(0,T_1)$$

de laquelle on déduit les valeurs de $P(0,T_1)$ et $P(0,T_2)$.

Donc

$$P(0,T_1) = \frac{100}{\frac{100+S_{2Y}}{1+F_1} + S_{2Y}}$$

Ensuite, on considère que le taux swap est linéaire entre deux dates où il est connu. Ainsi pour calculer $P(0,T_3)$, on procède ainsi:

$$S_{T_3} = S_{T_2} + (T_3 - T_2) * \frac{S_{T_5} - S_{T_2}}{T_5 - T_2} = 3\%$$

Et enfin

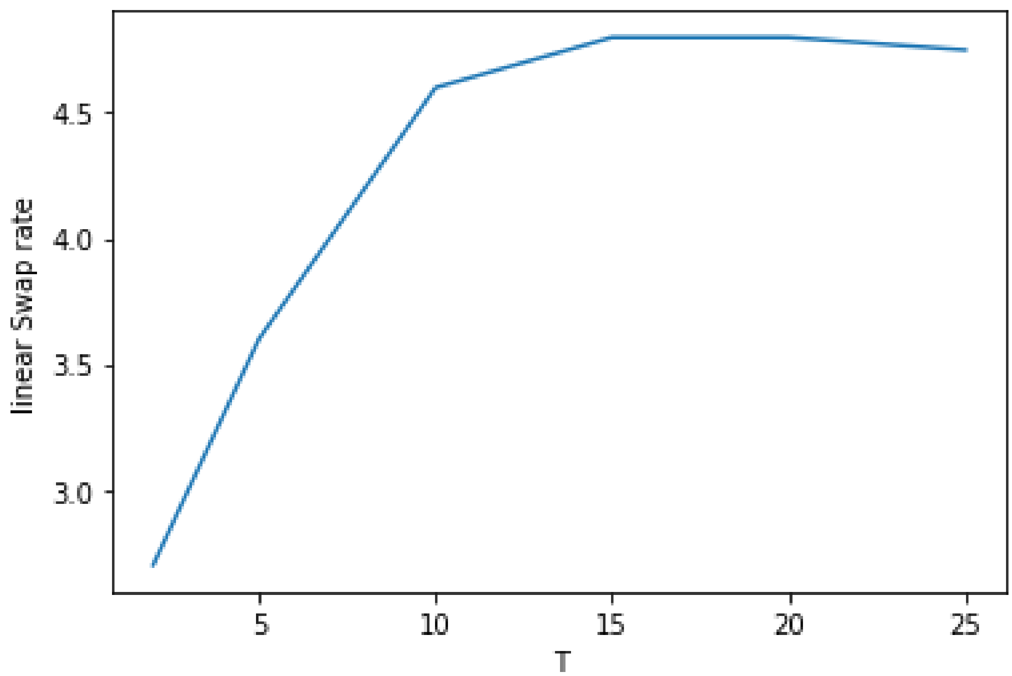
$$103 * P(0,T_3) = 100 - 3\sum_{i=1}^{2} P(0,T_i)$$

Et ainsi de suite pour les zero coupons de maturités T_4 et T_5

[75]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

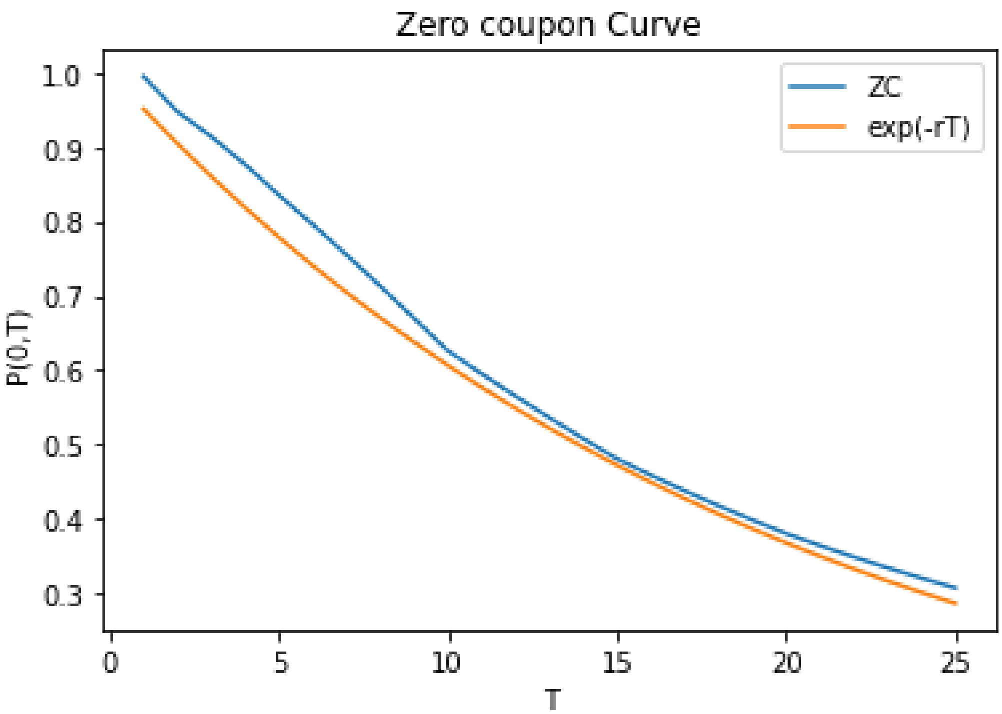
[51]:
```
Swap_rates = [2.7,3.6,4.6,4.8,4.8,4.75]
dates = [2,5,10,15,20,25]
forward_1 = 0.05

#construction linéaire du taux swap
```

```
linear_swap = [Swap_rates[0]]
for i in range(1,len(dates)):
    coef = (Swap_rates[i]-Swap_rates[i-1])/(dates[i]-dates[i-1])

    for j in range(dates[i-1]+1,dates[i]):
        linear_swap.append(Swap_rates[i-1] + coef*(j-dates[i-1]))
    linear_swap.append(Swap_rates[i])

plt.figure()
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('linear Swap rate')
plt.plot(np.arange(dates[0],dates[-1]+1),linear_swap)
plt.show()
```



[53]:
```
# calcul des zeros coupons à chaque année

P1 = 100/((100+Swap_rates[0])/(1+forward_1) + Swap_rates[0])
ZC = [P1]

for i in range(len(linear_swap)):
    Pi = (100 - linear_swap[i]*sum(ZC))/(100 + linear_swap[i])
    ZC.append(Pi)
```

```
plt.figure()
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('P(0,T)')
plt.title('Zero coupon Curve')
T = np.arange(dates[0]-1,dates[-1]+1)
plt.plot(T,ZC,label='ZC')
plt.plot(T,[np.exp(-0.05*t) for t in T],label='exp(-rT)')
plt.legend()
plt.show()
```



1.2 2. Constant forward rate

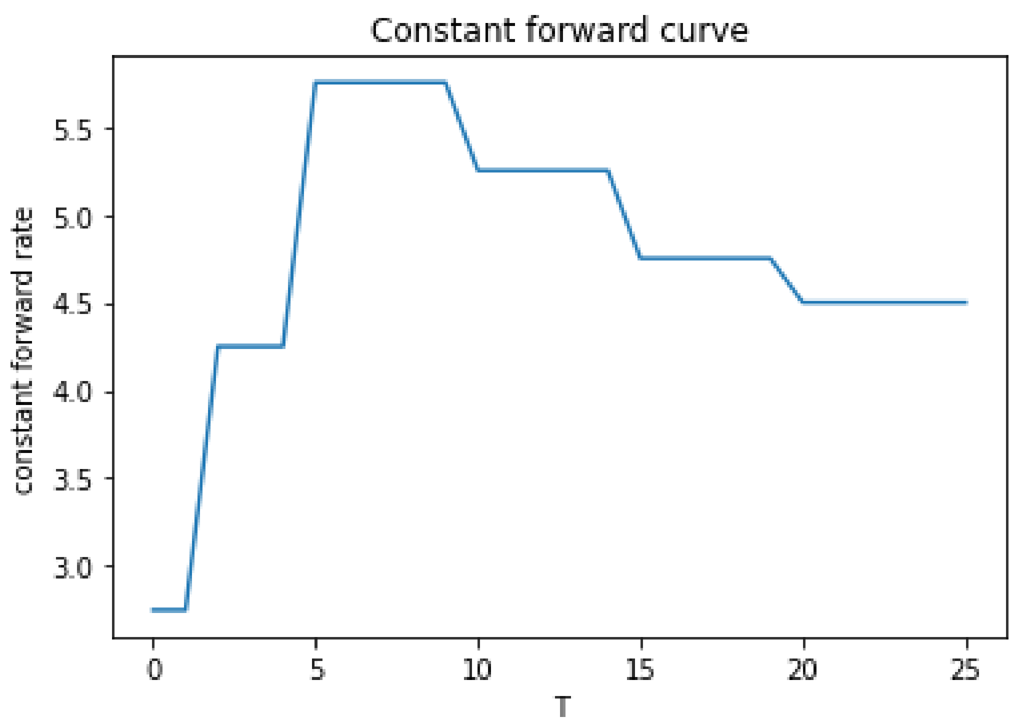
On considère cette fois que l'on connait le taux forward annuel aux dates T_2, T_5, T_{10} et que celui ci est constant entre T_2 et T_4, puis entre T_5 et T_9.

Si l'on connaît $P(0, T_5)$ par exemple, la deuxième étape consiste en les calculs suivants (si le temps écoulé entre chaque coupon est constant egale à Δ)

$$P(0, T_6) = \frac{P(0, T_5)}{\left(1 + F\Delta\right)} \quad P(0, T_7) = \frac{P(0, T_5)}{\left(1 + F\Delta\right)^2}$$

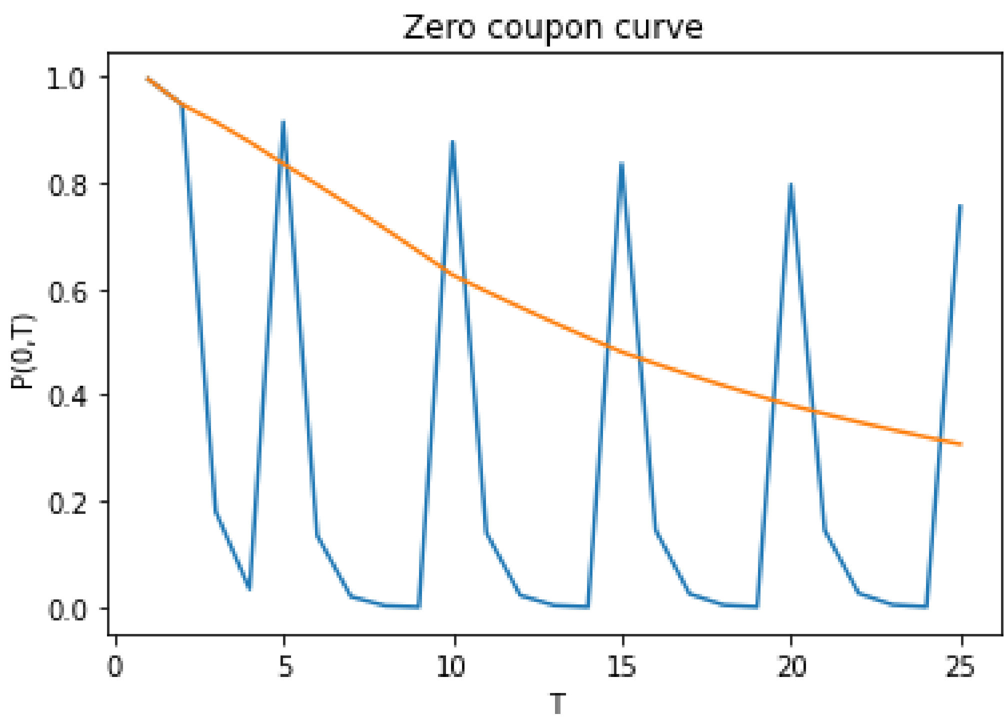
et ainsi de suite.

[57]:
```
dates = [1,2,5,10,15,20,25]
forward = [2.75,4.25,5.75,5.25,4.75,4.5]

#construction du taux forward constant
constant_forward = [forward[0]]
for i in range(1,len(dates)):
    for j in range(dates[i-1],dates[i]):
        constant_forward.append(forward[i-1])
constant_forward.append(forward[-1])

plt.figure()
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('constant forward rate')
plt.title('Constant forward curve')
plt.plot(np.arange(0,dates[-1]+1),constant_forward)
plt.show()
```



[74]:
```
#on reprend la courbe ZC précèdente pour P(0,T2),P(0,T5), P(0,T10)
ZC_bis = []
for i in range(1,len(dates)):
    Pi = ZC[i-1]
    ZC_bis.append(Pi)
    for j in range(dates[i-1]+1,dates[i]):
```

```
        Pj = Pi/ (1 + constant_forward[dates[i-1]])**(j-dates[i-1])
        ZC_bis.append(Pj)
ZC_bis.append(ZC[i])

plt.figure()
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('P(0,T)')
plt.title('Zero coupon curve')
T = np.arange(dates[0],dates[-1]+1)
plt.plot(T,ZC_bis)
plt.plot(T,ZC)
plt.show()
```



!!Méthode à revoir!

On fixe une structure de tenors sur laquelle on a des données de taux swap $T_1, T_2, T_3..., T_N$

Etape 1: Récupérer la courbe des taux swaps ou certains points et interpoler si besoin. Si on connait les taux swap $(S(T_i))_{i=1,n}$, les taux swap manquants seront:

$$S(T_j) = \frac{(T_{i+1} - T_j) * S(T_i) \ + \ (T_j - T_i) * S(T_{i+1})}{T_{i+1} - T_i}$$

Etape 2: Calcul des zero coupons pour les dates du tenor. En commencant par $i = 1$, on itère en résolvant à chaque étape

$$\Big(100 + S(T_i) * 100\Delta_i\Big) * P(0,T_i) = 100 - 100 * S(T_i)\sum_{j=1}^{i-1} P(0,T_j)\Delta_j$$

Etape 3: On calcule le taux forward entre T_i et T_{i+1}:

$$\forall i, \quad F(0,T_i,T_{i+1}) = \frac{1}{T_{i+1}-T_i}\Big(\frac{P(0,T_i)}{P(0,T_{i+1})} - 1\Big)$$

On obtient ainsi une courbe du taux forward en interpolant les points de la courbes calculés ci dessus.

Etape 4: On calcule les zero coupons à des dates t intermédiaires

$$t \in [T_i, T_{i+1}], \quad P(0,t) = P(0,T_i)\Big(1 + F(0,T_i,t) * (t - T_i)\Big)^{-1}$$

où $F(0,T_i,t)$ est calculé avec la méthode d'interpolation choisie à l'étape précédente.

1.3 3. Linear forward rate

Le but de cette méthode est de construire une courbe du taux forward simple de sorte que ce soit une courbe linéaire par morceaux. Sur chaque segment $[T_i, T_{i+1}]$, on cherche un taux forward de la forme $F_i(t) = F_0^{(i)} + K_i * t$. Il faut donc 2 contraintes sur chaque segment pour déterminer la courbe.

(1) Pour que la courbe soit continue, il faut que la première extrémité de chaque segment coïncide avec la seconde du segment précèdent. Soit $F_{i-1}(T_i) = F_i(T_i)$

(2)

$$F_i(T_{i+1}) = F_0 + K_i * T_i$$

Une fois la courbe des taux forward construite, on calcule le prix des zeros coupons suivant:

$$F_i(t) = F_0^{(i)} + K_i * t = \frac{1}{t - T_i}\Big(\frac{P(0,T_i)}{P(0,t)} - 1\Big) \quad , t \in [T_i, T_{i+1}]$$

Par exemple,

$$P(0,T_1) = \Big(1 + F_0(T_1) * T_1\Big)^{-1} P(0,T_2) = P(0,T_1)\Big(1 + F_1(T_2) * (T_2 - T_1)\Big)^{-1}$$

Considérons que l'on a calculé la courbe des zeros coupons jusqu'à la date T_5 et que l'on a la courbe forward décrite ci-dessus entre T_5 et T_10. Alors on va calculer le prix du zero coupon $P(0,T_{10})$ comme ceci:

$$4,6\sum_{i=6}^{9}\frac{P(0,T_i)}{P(0,T_5)} + 104,6\frac{P(0,T_{10})}{P(0,T_5)} = \frac{1}{P(0,T_5)}\Big(100 - 4,6\sum_{i=1}^{5} P(0,T_i)\Big) \iff 4,6\sum_{i=6}^{9}\frac{1}{(1 + F_0^{(5)} + K_5)...(1 + F_0^{(i-1)} + K_i}$$

1.4 Zero coupon Interpolation

```
[ ]:
```