Preuves diverses

Alexis Houssard

June 2021

1 Prix du Call dans le modèle displaced log-normal

On considère un sous jacent S qui suit la dynamique suivante

$$\mathrm{d}S(t) = \sigma\big(S(t) - \theta\big)\ \mathrm{d}W_t$$

où W est un mouvement Brownien sous la probabilité risque neutre considérée.

On a donc

$$S(t) = \theta + (S(0) - \theta)e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t}$$

ce qui implique que le sous jacent prend ses valeurs dans $]\theta, +\infty[$.

On veut montrer que le prix d'un call dans ce modèle peut dépasser la limite supérieure du modèle Black Scholes. C'est à dire $\exists K > 0, \mathbb{E}\big[(S(T) - K)^+\big] > S(0)$

Si $\theta < 0$ et $K = 0$, on a:

$$\mathbb{E}\big[(S(T)^+\big] = \int_0^{+\infty} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x$$

où $f_{S(T)}$ est la densité de probabilité de $S(T)$.

Or

$$S(0) = \mathbb{E}\big[S(T)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x$$

.

Comme $f_{S(T)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$, il faudrait que $\forall x \in]-\infty, 0[, f_{S(T)}(x) = 0$ pour que $\int_{-\infty}^0 x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x = 0$.

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\big(S(T) < 0\big) &= \mathbb{Q}\big(\mathcal{N}(0,1) < \tfrac{\log(\frac{-\theta}{S(0)-\theta}) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\big) = 1 - \Phi\Big(\tfrac{\log(\frac{-\theta}{S(0)-\theta}) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) \\ &= \int_{-\infty}^0 f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x \ > \ 0\end{aligned}$$

Cela prouve que $\exists x \in]-\infty, 0[,\ f_{S(T)}(x) \neq 0$ et que $\int_{-\infty}^{0} x f_{S(T)}(x)\mathrm{d}x < 0$

Donc

$$Call(S(0), 0) > S(0)$$

. Le Call étant une fonction décroissante et continue du strike, on en déduit

$$\boxed{\exists K > 0,\ Call(S(0), K) > S(0)}$$

2 Différence de distribution entre probabilité risque neutre et terminale

Sous la probabilité risque neutre, le payoff du swaption se note

$$\big(S(T_0, T_N, x(T_0), y(T_0)) - K\big)^+$$

. On a vu que sous cette probabilité, la dynamique de x s'écrit sous la forme

$$\mathrm{d}x(t) = (y(t) - \chi(t)x(t))\ \mathrm{d}t\ +\ \sigma_r(t)\ \mathrm{d}Wt$$

où W est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.

Le payoff conserve la même expression, à un facteur indépendant de x près, sous la probabilité terminale $\mathbb{Q}^{T_N}$. Néanmoins, la dynamique de x peut se réécrire sous la forme

$$\mathrm{d}x(t) = \big(y(t) - \sigma_r(t)^2 G(t, T_N) - \chi(t)x(t)\big)\ \mathrm{d}t\ +\ \sigma_r(t)\ \mathrm{d}W_t^{T_N}$$

où W^{T_N} est également un mouvement Brownien mais sous la probabilité terminale.

On veut montrer ici que la probabilité que le payoff s'annule est plus grande sous la mesure terminale.

On note

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \big(y(t) - \chi(t)x(t)\big) \\ \mu_2(t) &= \big(y(t) - \sigma_r(t)^2 G(t, T_N) - \chi(t)x(t)\big) \end{aligned}$$

et $\epsilon(t) \geq 0$ telle que $\mu_1(t) = \mu_2(t) + \epsilon(t)$.

Comme W sous $\mathbb{Q}$ a la même loi que W^{T_N} sous $\mathbb{Q}^{T_N}$, on a:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \qquad & \mathbb{Q}\big(\textstyle\int_0^{T_0} \mu_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t\ \in A\big) \\ & = \mathbb{Q}^{T_N}\big(\textstyle\int_0^{T_0} \mu_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N}\ \in A\big) \\ & = \mathbb{Q}^{T_N}\big(\textstyle\int_0^{T_0} (\mu_2(t) + \epsilon(t))\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} \sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N}\ \in A\big) \end{aligned}$$

Hypothèse: Si on considère que ϵ est déterministe, la quantité précèdente se réécrit:

$$\mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0}\mu_2(t)\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N}\ \in\{x-\int_0^{T_0}\epsilon(t)\mathrm{d}t\ ,\ x\in A\}\big)$$

On note

$$O=S(T_0,T_N,\cdot,y(T_0))^{-1}(]-\infty,K])$$

, qui est un fermé car image réciproque d'un fermé par une application continue.

On sait que S est une fonction monotone croissante et continue de x.
De plus, $\lim_{x\to\infty}S(T_0,T_N,x,y(T_0))=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}S(T_0,T_N,x,y(T_0))=-\infty$ par croissance de $T\to G(t,T)$.

On en déduit que $O=]-\infty,S(T_0,T_N,\cdot,y(T_0))^{-1}(K)]$. Donc $O\in\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma\big(]-\infty,b],\ b\in\mathbb{R}\big)$ et $\tilde{O}=\{x-\int_0^{T_0}\epsilon(t)\mathrm{d}t\ ,\ x\in O\}\subset O$.

Ce qui implique que

$$\mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0}\mu_2(t)\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N}\ \in\{x-\int_0^{T_0}\epsilon(t)\mathrm{d}t\ ,\ x\in O\}\big)$$

$$\le\mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0}\mu_2(t)\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N}\ \in O\big)$$

Enfin

$$\boxed{\mathbb{Q}\big(\int_0^{T_0}\mu_1(t)\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\sigma_r(t)\mathrm{d}W_t\ \in O\big)\le\mathbb{Q}^{T_N}\big(\int_0^{T_0}\mu_2(t)\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\sigma_r(t)\mathrm{d}W_t^{T_N}\ \in O\big)}$$

Il reste à montrer le résultat si ϵ n'est pas déterministe.

3 Signe du skew dans le modèle normal avec des prix dans le modèle displaced log-normal

On definit la volatilité implicite ici par $\tilde{\sigma}$ telle que

$$V_0^N(S(0),K,\tilde{\sigma},T)=V_0^{LD}(S(0),K,T,\sigma,\theta)$$

où V_0^N est le prix du call dans le modèle normal et V_0^{LD} le prix du call dans le modèle displaced log-normal.

On veut prouver ici que la pente de la volatilité implicite, définit comme ci dessus, par rapport au strike K est positive

Si on note

$$\tilde{x}=\frac{S(0)-K}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}$$

, il vient:

$$\begin{aligned} V_0^{LD} &= (S(0)-K)\left(\tfrac{1}{\tilde{x}}\phi(\tilde{x})+\Phi(\tilde{x})\right) \\ &= (S(0)-K)\tilde{\Phi}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

On note $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{x}\phi(x) + \Phi(x)$.
Donc

$$\tilde{\sigma} = \frac{S(0)-K}{\tilde{x}\sqrt{T}}$$

et

$$\tilde{x} = \tilde{\Phi}^{-1}\left(\frac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\right)$$

On en déduit

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial K} = \frac{-1}{\tilde{x}^2\sqrt{T}}\Big[\tilde{x} + (S(0)-K)\frac{\partial \tilde{x}}{\partial K}\Big]$$

Or

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \tilde{x}}{\partial K} &= \tfrac{\partial}{\partial K}\left(\tfrac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\right) \times \tfrac{1}{\tilde{\Phi}'(\tilde{x})} \\ &= \tfrac{\partial}{\partial K}\left(\tfrac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\right) \times \tfrac{-\tilde{x}^2}{\phi(\tilde{x})} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial K} = \frac{-1}{\tilde{x}^2\sqrt{T}}\Big[\tilde{x} - (S(0)-K)\frac{\tilde{x}^2}{\phi(\tilde{x})}\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\right)\Big]$$

On rappelle que

$$\begin{cases} V_0^{LD} = (S(0)-\theta)\Phi(d^+) - (K-\theta)\Phi(d^-) \\ \frac{\partial V_0^{LD}}{\partial K} = -\Phi(d^-) \end{cases}$$

où $d^{+/-} = \frac{\log\left(\frac{S(0)-\theta}{K-\theta}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + / - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial K}\left(\tfrac{V_0^{LD}}{S(0)-K}\right) &= -\tfrac{1}{S(0)-K}\Phi(d^-) + \tfrac{1}{(S(0)-K)^2}V_0^{LD} \\ &= \tfrac{1}{(S(0)-K)^2}\Big[(S(0)-\theta)\Phi(d^+) - (S(0)-\theta)\Phi(d^-)\Big] \end{aligned}$$

Donc
$$\boxed{\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial K} = \frac{-1}{\sqrt{T}}\Big[\frac{1}{\tilde{x}} - \frac{(S(0)-\theta)}{\phi(\tilde{x})(S(0)-K)}(\Phi(d^+)-\Phi(d^-))\Big]}$$

En substituant par l'expression de $\tilde{x}$, il vient:
$$\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial K} = \frac{-1}{\sqrt{T}(S(0)-K)}\Big[\tilde{\sigma}\sqrt{T} - (S(0)-\theta)\sqrt{2\pi}(\Phi(d^+)-\Phi(d^-))e^{\frac{1}{2}\frac{(S(0)-K)^2}{\tilde{\sigma}^2 T}}\Big]$$

Il reste à prouver que cette expression est positive, peut être peut on procéder à une étude de fonction.