

Dualité de Schur–Weyl et algèbres de Temperley–Lieb

avec un rappel de théorie des représentations

Notes du mini-cours donné lors de l'École Mathématique africaine
Théorie des représentations et applications en sciences physiques 2024

Alexis Langlois-Rémillard
Hausdorff Center for Mathematics, Bonn

Dernière mise à jour : 14 juin 2024

Table des matières

1	Introduction	5
2	Notions préliminaires	7
2.1	Notions de base	7
2.1.1	Résultats fondamentaux	7
2.1.2	Groupes diédraux	11
2.2	Groupe symétrique	11
3	Dualités de Schur–Weyl	13
3.1	Dualité de Schur–Weyl classique	13
3.2	Dualité de Schur–Weyl quantique	15
3.2.1	Un groupe quantique	15
3.2.2	Algèbres d’Iwahori–Hecke	15
3.2.3	Dualité	16
4	Algèbres de Temperley–Lieb	17
4.1	Définitions des algèbres de Temperley–Lieb	17
4.1.1	Représentations des algèbres de Temperley–Lieb	19
4.2	Semisimplicité	20

Chapitre 1

Introduction

Avertissement

Ceci est un travail en cours. Si vous y trouvez des erreurs, vous pouvez les faire parvenir par courriel à alexislr@tuta.com.

La dernière version se trouvera à l'adresse suivante : https://alexislr.github.io/teaching/EMA_TRASP2024/.

Cette version : 14 juin 2024.

Ces notes de cours complètent le mini-cours *Dualité de Schur–Weyl et algèbres de Temperley–Lieb* donné du 27 au 31 mai 2024 lors de l'École Mathématique Africaine *Théorie des représentations et applications aux sciences physiques (TRASP 2024)* à l'Université Thomas Sankara, Ouagadougou, Burkina Faso.

Les ressources principales pour ces notes sont données dans la bibliographie. Principalement, nous avons utilisé les deux manuels suivants pour le matériel de théorie des représentations

- W. FULTON et J. HARRIS. *Representation theory : a first course*. T. 129. Springer Science & Business Media, 2013 ;
- G. D. JAMES et M. W. LIEBECK. *Representations and characters of groups*. Cambridge university press, 2001 ;

la section sur les dualités de Schur–Weyl doit beaucoup aux sources

- P. I. ETINGOF et al. *Introduction to representation theory*. T. 59. American Mathematical Soc., 2011 ;
- L. POULAIN D'ANDECY. *Centralisers and Hecke algebras in Representation Theory, with applications to Knots and Physics*. 2023. arXiv : [2304.00850](https://arxiv.org/abs/2304.00850) [[math.RT](#)] ;

et le traitement des algèbres de Temperley–Lieb est tiré de

- D. RIDOUT et Y. SAINT-AUBIN. “Standard modules, induction and the structure of the Temperley–Lieb algebra”. *Adv. Theor. Math. Phys.* 18.arXiv : 1204.4505 (2014), p. 957-1041.

Je tiens aussi à remercier Yvan Saint-Aubin et Alexis Leroux-Lapierre pour leur aide et le partage de leur matériel pour préparer ce cours, ainsi qu'Ibrahim Nonkané pour l'invitation à donner ce cours. Finalement, bien sûr, je remercie les participantes et participants de l'école ÉMA pour leurs questions et leur intérêt.

Alexis Langlois-Rémillard,
14 juin 2024

Chapitre 2

Notions préliminaires

Notions de théorie des représentations -- Théorème de Maschke -- Lemme de Schur -- Caractères -- Représentations des groupes diédraux -- Représentations du groupe symétrique

2.1 Notions de base

Nous noterons l'ensemble des matrices prenant valeur dans un corps \mathbb{F} par $\mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(n)$. Pour tout ce chapitre, nous travaillerons, sauf indication contraire, sur les complexes \mathbb{C} ; en ce cas, nous noterons $\mathrm{GL}(n) := \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$.

Nous oscillerons souvent dans le vocabulaire et parlerons autant d'une représentation $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ de G que du $\mathbb{C}G$ -module V , et il est bon d'être flexible à ce niveau. En rappel, voici un petit tableau d'équivalence de vocabulaire :

site web personnel.	Représentation	Module
	sous-représentation	sous-module
	représentation irréductible	module simple
	morphisme de représentations	morphisme de modules

TAB. 2.1 : Équivalence de vocabulaire entre module et représentation.

Avant de présenter les premiers résultats utiles, rappelons certaines représentations utiles : elles existent toujours et sont un bon départ pour l'étude de tout groupe.

Définition 2.1.1. La représentation triviale est la représentation donnant valeur 1 à tous les éléments du groupe.

La représentation régulière est la représentation sur $\mathbb{C}[G]$ avec l'action à gauche $g \cdot v = gv$ avec $g, v \in G$ et où gv est la multiplication usuelle dans G . Elle est notée ${}_G G$. Lorsque l'action est à droite, elle est notée plutôt G_G .

2.1.1 Résultats fondamentaux

Théorème 2.1.2 (Maschke). Soit G un groupe fini et $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G . Si $W \subset V$ est une sous-représentation de V , alors il existe U une sous-représentation de V

telle que $V = W \oplus U$.

Démonstration. En tant qu'espace vectoriel, il est aisé de trouver un sous-espace complémentaire W' de W de sorte que $V = W \oplus W'$, par exemple en explicitant les bases de V et W . En tant qu'espace vectoriel, il y a une projection $\psi : V \rightarrow V$ telle que $\ker \psi = W'$ et $\text{Im } \psi = W$. Malheureusement, ceci n'est pas suffisant pour prouver le théorème.

Le point crucial est de montrer que nous pouvons trouver un complément tel que l'égalité soit aussi respecté en tant que représentation.

Pour ce faire, nous allons construire une projection $\pi : V \rightarrow V$ qui respectera les propriétés suivantes

1. π est un morphisme de représentations de G ;
2. $\text{Im } \pi = W$;
3. $\pi^2 = \pi$.

Si ces trois conditions sont respectées, alors $U = \ker \pi \subset V$ sera une sous-représentation telle que $V = W \oplus U$.

Considérons la projection d'espaces vectoriels $\psi : V \rightarrow V$. Nous définissons la projection $\pi : V \rightarrow V$ sur $v \in V$ par

$$\pi(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \psi(g \cdot v). \quad (2.1)$$

Comme $\text{Im } \psi = W$, il est clair que $\text{Im } \pi \subset W$, et comme ψ est une application linéaire, alors π l'est aussi. Nous allons montrer que π est un morphisme de représentations de G . Pour ce faire, il faut montrer que $\pi(hv) = h\pi(v)$. Développons

$$\begin{aligned} \pi(hv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \psi(g \cdot hv) \\ &\stackrel{g' := gh}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} hg'^{-1} \cdot \psi(g' \cdot v) \\ &= h\pi(v). \end{aligned}$$

Nous prouvons maintenant que pour $w \in W$ alors $\pi(w) = w$. La clef est ici que ψ est une projection. Comme W est une sous-représentation de G , alors $gw \in W$ et donc $\psi(gw) = gw$. Par conséquent

$$\pi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \psi(g \cdot w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot g \cdot w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = w. \quad (2.2)$$

L'exercice suivant couvre le petit saut que nous faisons.

Ceci conclut la preuve. □

Exercice 2.1.3. Compléter les dernières étapes de la preuve précédente, c'est-à-dire, donner succinctement l'argument pour prouver les points 2 et 3. (Pas plus de trois lignes.)

Ceci prouve que, pour les groupes finis sur un corps de caractéristique 0, toute les représentations sont, en fait, complètement réductible. Donc, dans ce cas, trouver toutes les représentations irréductible d'un groupe donnera, d'une sorte, les éléments indivisibles des représentations de ce groupe.

Remarque 2.1.4. Attention ! Hors du cas des groupes finis, les représentations ne sont pas, en général, complètement irréductible. Nous verrons dans la dernière section un exemple intéressant hors de ce cas : celui des algèbres de Temperley–Lieb en régime non-semi-simple. Les exercices suivants donnent cependant déjà des exemples de ce qu’il advient lorsque les conditions ne sont pas remplies.

Nous passons à un autre résultat remarquable de la théorie des représentations : le Lemme de Schur.

Lemme 2.1.5 (Lemme de Schur). Soit V une représentation irréductible d’un groupe G sur un corps \mathbb{F} . Si W est une autre représentation irréductible de G alors tout morphisme de représentation $\phi : V \rightarrow W$ est soit un isomorphisme soit nul.

Si de plus \mathbb{F} est algébriquement clos, alors $\text{End}_{\mathbb{F}G}(V) \simeq \mathbb{F}$ si V est irréductible.

Remarque 2.1.6. Ce lemme tient même lorsque G n’est pas un groupe fini. En particulier, il tient aussi pour les représentations d’algèbres. La deuxième partie vient du fait que pour un corps algébriquement clos, tout endomorphisme admet des valeurs propres. Cela veut dire que pour tout $f \in \text{End}_{\mathbb{F}G}(V)$, et pour $v \in V$ il existe un $\lambda \in \mathbb{F}$ tel que $f(v) - \lambda(v) = 0$ et donc le morphisme $f' : V \rightarrow V$ défini par $v \mapsto f(v) - \lambda v$ est 0 par la première partie du Lemme de Schur.

Il est parfois utile d’avoir en tête le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.7. Soit $f : V \rightarrow W$ un morphisme non-nul de représentations de G . Les énoncés suivants sont vérifiés

1. si V est irréductible, alors f est un monomorphisme ;
2. si W est irréductible, alors f est un épimorphisme ;
3. si V et W sont irréductibles, alors f est un isomorphisme.

Le Lemme de Schur est un outil très puissant en théorie des représentations.

Corollaire 2.1.8. Soit A un groupe fini abélien. Tous les $\mathbb{C}A$ -modules simples sont de dimension 1.

Démonstration. Soit $a \in A$ et V un $\mathbb{C}A$ -module simple. L’application linéaire $\phi_a : V \rightarrow V$ définie par $v \mapsto av$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}A$ -modules puisque A est abélien. Ce morphisme est inversible d’inverse $\phi_{a^{-1}}$. Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, alors c’est un multiple de l’identité. Cela veut dire que pour tout $v \in V$, $\text{span}(v) \subset V$ est un sous-module de V . Comme V est irréductible, cela veut dire forcément que $\dim V = 1$. \square

Exercice 2.1.9. Considérer le groupe des matrices carrées 2×2 triangulaires supérieures de forme

$$T_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}. \quad (2.3)$$

Ce groupe infini admet une représentation sur $V = \mathbb{C}^2$ par action matricielle (vérifier). Le sous-espace vectoriel $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{C} \right\} \subset V$ est une sous-représentation de V (vérifier). Existe-t-il une sous-représentation W telle que $V = U \oplus W$?

Exercice 2.1.10. Construire une représentation d’un groupe fini G sur $\text{GL}_{\mathbb{F}}(n)$ pour \mathbb{F} un corps de caractéristique p , pour $p \in \mathbb{N}$ premier qui ne soit pas irréductible, mais qui ne se décompose pas en somme directe de représentations irréductibles. On appelle une telle représentation, une représentation indécomposable, mais non irréductible.

Mon superviseur de recherche allait même jusqu’à dire qu’à chaque fois qu’il était bloqué, il se demandait : “Puis-je utiliser le Lemme de Schur ici”. Une réponse positive lui permettait de progresser, et une réponse négative menait à la question suivante : “Comment pourrais-je utiliser le Lemme de Schur ici ?” !

Indice : prenez $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$ le corps à deux éléments de caractéristique 2 et le groupe cyclique à deux éléments $G = C_2$.

Nous passons maintenant à un survol des caractères d'un groupe.

Définition 2.1.11. Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation d'un groupe fini G . L'application

$$\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C} \quad \chi_V(g) = \text{tr } \rho(g) \quad (2.4)$$

est nommée le caractère de la représentation V .

Exercice 2.1.12. Soit le groupe symétrique S_3 . Il est normalement généré par les transpositions (12) et (23), mais aussi par (12) et (123). Définissons trois représentations V_1, V_{sg} et V_{st} par

$$\langle v \rangle = V_1 : g \cdot v \mapsto v, \dots g \in S_3 \quad (\text{représentation triviale})$$

$$\langle v \rangle = V_{\text{sg}} : g \cdot v \mapsto \text{sg}(g)v, g \in S_3 \quad (\text{représentation signature})$$

$$\langle v, w \rangle = V_{\text{st}} : \begin{cases} (12) \cdot v \mapsto w & (12)w \mapsto v \\ (123)v \mapsto e^{\pi i/3}v & (123)w \mapsto e^{-\pi i/3}w \end{cases} \quad (\text{représentation standard})$$

1. Montrer que ce sont trois représentations irréductibles de S_3 .

2. Calculer les caractères de ces représentations

Soit $\mathcal{F}(G)$, l'ensemble des fonctions invariantes sur les classes d'équivalences, c'est-à-dire $f \in \mathcal{F}(G)$ respecte $f(g) = f(hgh^{-1})$ pour tout $g, h \in G$. L'ensemble $\mathcal{F}(G)$ a un produit scalaire

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g). \quad (2.5)$$

Théorème 2.1.13. L'ensemble $\{\chi_V \mid V \text{ représentations irréductibles de } G\}$ forme une base orthogonale de $\mathcal{F}(G)$ pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$.

En particulier, les corollaires suivants sont fondamentaux.

Corollaire 2.1.14. Soient V, W deux représentations d'un groupe fini G . Alors les énoncés suivants tiennent

1. le nombre de représentations irréductibles de G est donné par le nombre de classe de conjugaison de G ;
2. $V \simeq W$ si et seulement si $\chi_V = \chi_W$;
3. V est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$;
4. la représentation régulière V_{reg} de G se décompose comme

$$V_{\text{reg}} = \bigoplus_{V \text{ irrep}} V^{\oplus \dim V}; \quad (2.6)$$

5. si V est irréductible, alors la multiplicité de V dans la décomposition de W en représentations irréductibles est donné par $\langle \chi_V, \chi_W \rangle$.

Notons que le point 4. donne une superbe formule :

$$|G| = \sum_{V \text{ irrep}} (\dim V)^2. \quad (2.7)$$

Montrer que les deux présentations génèrent le même groupe.

C'est facile en regardant les matrices.

2.1.2 Groupes diédraux

Les exercices suivants donnent une intuition des techniques de base pour les représentations de groupes finies. Ils se concentrent sur une famille importante de groupes : les groupes diédraux, qui sont les groupes de symétrie associés aux polygones réguliers.

Soit

$$D_{2m} := \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^m = 1 \rangle = \langle a, b \mid a^m = b^2 = baba = 1 \rangle$$

Objectif Construire toutes les représentations irréductibles du groupe diédral D_{2m} .

Étape 1 : nombre de représentations irréductibles On sait qu'il y aura autant de représentations irréductibles qu'il y a de classes de conjugaison de G . Donc, en première étape il faut donner toutes les classes de conjugaison de D_{2m} . (Attention : cela change entre m pair et m impair.)

Étape 2 : borne sur les dimensions Le groupe D_{2m} a $2m$ éléments. Ses représentations irréductibles sont de dimension au plus $\sqrt{2m}$. Peut-on faire mieux ? Borner la dimension des représentations irréductibles. (Indice : considérer une représentations irréductible V , et voir la taille de $\text{span}(v, sv)$ pour $v \in V$.)

Pourquoi est-ce que les représentations irréductibles sont de dimension au plus \sqrt{n} si $|G| = n$?

Étape 3 : un truc de valeur propre L'élément $a = st$ est d'ordre m . Il y a donc un vecteur propre de a sur V et sa valeur propre doit être une racine m -ième de l'unité. Analyser ce qu'il se passe sur la sous-représentations engendrée par v et sv .

Étape 4 : construire toutes les représentations Construire toutes les représentations irréductibles restantes et s'assurer qu'elles soient toutes non-équivalentes.

Indice : regarder les caractères.

Étape 5 : vérification Se vérifier ! On vérifie deux choses :

1. est-ce que le nombre de représentations irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison ?
2. avons-nous $|D_{2m}| = 2m = \sum_{V \text{ irrep}} (\dim V)^2$?

2.2 Groupe symétrique

Notation Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons S_n le groupe de permutations de $\{1, \dots, n\}$. Notons la transposition de i et $i+1$ par $s_i := (i, i+1)$. Notons $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ l'ensemble des transpositions de S_n .

Comme groupe de Coxeter, S_n est généré par les s_i sous les relations :

$$\begin{aligned} & s_i^2 = 1; \\ \text{relations de tresse} \quad & \begin{cases} s_i s_j = s_j s_i & 1 \leq i < j-1 \leq n-2; \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous n'allons pas faire toute la théorie du groupe symétrique, c'est un sujet en soi. Nous allons simplement extraire le mimimum.

Définition 2.2.1. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ une série de nombres naturels. Si $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ alors on dit que λ est une partition de $n = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i$ et on note $\lambda \vdash n$.

Théorème 2.2.2. Les représentations irréductibles de S_n sont indexées par les partitions de n . Nous les notons donc V_λ pour $\lambda \vdash n$.

Plutôt que de faire la preuve de ce théorème, qui est assez corsée et faite dans beaucoup de références classiques, nous allons montrer quelques exemples.

On peut écrire les permutations comme des diagrammes de Young : on empile λ_1 boîtes sur λ_2 boîtes et ainsi de suite.

Dans ces diagrammes de Young, il est possible d'inclure les nombres de 1 à n . Cela donne ensuite une action du groupe S_n sur le tableau en permutant les nombres.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad (2.8)$$

On note ensuite deux sous-groupes du groupe symétrique pour chaque tableau T :

$$P(T) = \{\omega \in S_n \mid \omega \text{ fixe les lignes de } T\}$$

$$Q(T) = \{\omega \in S_n \mid \omega \text{ fixe les colonnes de } T\}$$

On définit ensuite deux éléments

$$a_T := \sum_{\sigma \in P(T)} \sigma \quad b_T := \sum_{\omega \in Q(T)} \text{sign}(\omega) \omega \quad c_T := a_T b_T$$

En fait, on peut voir que le choix de tableau pour un diagramme donné, n'influence pas c_T et, en fait, on peut le noter c_λ pour la partition initiale.

Testons-le pour la partition $(2, 1)$. Prenons

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad (2.9)$$

Alors avec ce tableau, on a $a_{(2,1)} = 1 + (12)$, $b_{(2,1)} = 1 - (13)$ et $c_{(2,1)} = 1 + (12) - (13) - (132)$. En regardant $c_T S_3$ comme $\mathbb{C} S_3$ module, on trouve deux éléments linéairement indépendants qui forment donc une base d'une représentation irréductible de dimension 2.

Exercice 2.2.3. Trouver a_T , b_T et c_T pour toutes les autres partitions de 3 sur S_3 .

Exercice 2.2.4. Trouver a_T , b_T et c_T pour le tableau suivant et construire la représentation $c_T S_4$ correspondante de S_4

$$T := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (2.10)$$

Théorème 2.2.5. Les représentations irréductibles de S_n sont données par $V_\lambda := c_\lambda S_n$.

Chapitre 3

Dualités de Schur–Weyl

Base d'algèbre associative -- Dualité de Schur--Weyl -- Groupe quantique
-- Une dualité de Schur--Weyl quantique

Les résultats de cette section sont du folklore d'une certaine façon. Le traitement suit en partie [8] et [2]. Les résultats sont présentés pour le moment (14 juin 2024) et les preuves, qui nécessitent plus de matériel pour être aisément suivies, seront faites dans une version ultérieure des notes.

3.1 Dualité de Schur–Weyl classique

Ce chapitre introduit la dualité de Schur–Weyl classique.

Rappelons tout d'abord la notion de semisimplicité. Jusqu'à présent, les algèbres que nous avons vues, c'est-à-dire les algèbres de groupes, ont toujours été semi-simples : c'est une conséquence du théorème de Maschke.

Définition 3.1.1. Une algèbre A est dite *semi-simple* si sa représentation régulière A_A est complètement réductible.

Un critère pour déterminer la semisimplicité d'une algèbre est de trouver tous ses modules simples L et de vérifier qu'alors

$$\dim A = \sum_{L \text{ simple}} (\dim L)^2. \quad (3.1)$$

Une conséquence de la semisimplicité d'une algèbre est que tous ses modules sont complètement réductibles.

La dualité de Schur–Weyl peut être vue comme une conséquence de la semisimplicité de certaines algèbres. Nous la déduirons du théorème général suivant :

Théorème 3.1.2 (Théorème du double centralisateur). Soient $A, B \in \text{End}(V)$, deux sous-algèbres. Si A est semi-simple et $B = \text{End}_A(V)$ alors

1. $A = \text{End}_B(V)$
2. B est semi-simple

3. V se décompose comme $A \otimes B$ -module

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes W_i$$

où V_i et W_i sont les représentations irréductibles de A et de B respectivement.

Nous allons étudier le cas de l'action du groupe linéaire $GL(n)$ et du groupe symétrique S_d agissant sur $V = (\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$. L'action de $GL(n)$ est par multiplication matricielle sur \mathbb{C}^n , étendue diagonalement sur tous les composantes du produit tensoriel, et l'action de S_d est par permutation sur les composante du produit tensoriel.

La dualité de Schur–Weyl est un résultat sur des algèbres. Nous passons donc aux algèbres associées à ces groupes. Pour le groupe symétrique, cela est simplement son algèbre de groupe. Pour le groupe linéaire, cela passe à son algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n)$, et comme nous voulons une algèbre associative, plutôt à l'algèbre universelle enveloppante $U(\mathfrak{gl}(n))$.

$U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre associative générée par tous les générateurs et respectant les relations de commutation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Par exemple, \mathfrak{sl}_2 est générée par E, F, H et a dimension 3 comme espace vectoriel. Mais $U(\mathfrak{sl}_2)$ est générée par tous les polynômes en E, F, H et est donc un espace vectoriel de dimension infinie.

Soit $V = \mathbb{C}^N$

$$U(\mathfrak{gl}(V)) \xrightarrow{\phi} \text{End}(V^{\otimes d}) \xleftarrow{\pi} \mathbb{C}S_d$$

L'action de $U(\mathfrak{gl}(V))$ est diagonale et est donnée par

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_d) = (g \cdot v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_d) + (v_1 \otimes g \cdot v_2 \otimes \dots \otimes v_d) + \dots + (v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes g \cdot v_d).$$

Théorème 3.1.3.

$$\text{End}_{U(\mathfrak{gl}(V))}(V^{\otimes d}) = \pi(\mathbb{C}S_d) \quad \text{End}_{\mathbb{C}S_d}(V^{\otimes d}) = \phi(U(\mathfrak{gl}(V)))$$

La décomposition de $V^{\otimes d}$ est

$$V^{\otimes d} = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash d \\ \ell(\lambda) \leq N}} W_\lambda \otimes V_\lambda$$

On a que si $d \leq N$ alors $\ker \pi = \{0\}$ et $\text{End}_{U(\mathfrak{gl}(V))}(V^{\otimes d}) \simeq (\mathbb{C}S_d)$

Si $d > N$ alors $\ker \pi$ est généré par P_{N+1} pour l'antisymétriseur

$$P_m = \frac{1}{m!} \sum_{\omega \in S_m} \text{sgn}(\omega) \omega$$

Remarque 3.1.4. Le noyau de ϕ est souvent étudié : cela revient à étudier l'algèbre de Schur.

Pour $N = 2$, la situation est plus simple. En effet, $P_3 = 0$ revient donc à

$$1 - s_1 - s_2 + s_1 s_2 + s_2 s_1 - s_1 s_2 s_1 = 0.$$

Exercice 3.1.5. Montrer que cela implique aussi que $1 - s_2 - s_3 + s_2 s_3 + s_3 s_2 - s_2 s_3 s_2 = 0$ sur S_4 .

Exercice 3.1.6. Montrer que le changement de variable $t_i := s_i - 1$ donne la présentation suivante de l'algèbre de Temperley–Lieb standard

$$\text{TL}_n(-2) = \langle 1, t_1, \dots, t_{n-1} \mid t_i^2 = -2t_i, t_i t_{i \pm 1} = t_i, t_i t_j = t_j t_i \text{ si } |i - j| > 1 \rangle. \quad (3.2)$$

Cet argument fonctionnera pour tous les $i, i + 1$ sur S_n .

Les relations de S_n sont $s_i^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ et $s_i s_j = s_j s_i$ si $|i - j| > 1$.

3.2 Dualité de Schur–Weyl quantique

Cette section est une généralisation de la dualité de Schur–Weyl. L'idée est de déformer la dualité de Schur–Weyl pour une déformation de l'algèbre universelle enveloppante $U(\mathfrak{sl}_n)$. Cette déformation s'appelle "groupe quantique". Une grande littérature sur les groupes quantiques s'est développée, mais nous n'aurons besoin ici que d'un exemple : $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Pour plus, nous suggérons [1, 6, 5].

3.2.1 Un groupe quantique

Soit $q \in \mathbb{C}^\times$. Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est l'algèbre générée par quatre générateurs E, F, K, K^{-1} assujettis aux relations

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= 1 = K^{-1}K, \\ KE &= q^2 EK, \\ KF &= q^{-2} FK, \\ [E, F] &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Le nom "groupe quantique" est très mal choisi : c'est une algèbre.

3.2.2 Algèbres d'Iwahori–Hecke

Définition 3.2.1 (Algèbres d'Iwahori–Hecke). Soient \mathbb{F} un corps et $q \in \mathbb{F}^\times$. L'algèbre unifère $\mathcal{H}_q(S_n)$ est générée par T_1, \dots, T_{n-1} respectant les relations

$$\begin{aligned} (T_i - q)(T_i + 1) &= 0 & i &= 1, \dots, n-1, \\ T_i T_j &= T_j T_i & 1 \leq i < j-1 \leq n-2, \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} & i &= 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Cette algèbre est une q -déformation de l'algèbre de groupe $\mathbb{F}S_n$. En mettant $q = 1$ on retrouve les relations usuelles de S_n .

Soit $\omega \in S_n$. Une décomposition $\omega = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_d}$ pour $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_d \leq n-1$ en transpositions est minimale s'il n'existe pas une autre décomposition $s_{j_1} \dots s_{j_{d'}}$ avec $d' < d$. On note alors $\ell(\omega) = d$. On définit $T_\omega \in \mathcal{H}_q(S_n)$ comme $T_\omega = T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_d}$.

Lemme 3.2.2. Soient $s \in S$ et $\omega \in S_n$. On a que

$$T_\omega T_s = \begin{cases} T_{\omega s} & \text{si } \ell(\omega s) > \ell(\omega) \\ q T_{\omega s} + (q-1) T_\omega & \text{si } \ell(\omega s) < \ell(\omega) \end{cases} \quad (3.3)$$

De plus,

$$T_s T_\omega = \begin{cases} T_{s\omega} & \text{if } \ell(s\omega) > \ell(\omega) \\ q T_{s\omega} + (q-1) T_\omega & \text{if } \ell(s\omega) < \ell(\omega) \end{cases} \quad (3.4)$$

Théorème 3.2.3. $\mathcal{H}_q(S_n)$ est une \mathbb{F} -algèbre de base $\{T_\omega \mid \omega \in S_n\}$.

3.2.3 Dualité

Soit $V = \mathbb{C}^2$. Nous nous intéressons au partenaire dual de l'action diagonale sur $V^{\otimes n}$ de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Comme le groupe quantique est une q -déformation de $U(\mathfrak{sl}_2)$, il serait intuitif d'espérer y trouver une q -déformation de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}S_n$. C'est en fait exactement ce qui se passe.

Tout d'abord, définissons l'action de l'algèbre de Hecke sur le produit tensoriel de $V \otimes V$. Soit la base canonique $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ de \mathbb{C}^2 . Définissons un opérateur R sur $V \otimes V$ par

$$R(b_i \otimes b_j) = \begin{cases} qb_i \otimes b_i & i = j \\ b_2 \otimes b_1 + (q - q^{-1})b_1 \otimes b_2 & (i, j) = (1, 2) \\ b_1 \otimes b_2 & (i, j) = (2, 1) \end{cases}$$

Cela s'étend à $V^{\otimes n}$ en envoyant $T_i \mapsto R_i$, avec $R_i = \text{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes R \otimes \text{id}_{V^{\otimes n-i-1}}$.

Exercice 3.2.4. Donner l'action de R sur $V \otimes V$ sous forme matricielle pour la base $\mathcal{B}_{V \otimes V} = \{b_1 \otimes b_1, b_1 \otimes b_2, b_2 \otimes b_1, b_2 \otimes b_2\}$.

Exercice 3.2.5. Montrer que les R_i forment une représentation de $H_n(q)$.

Avec cette action, nous avons une situation

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) \xrightarrow{\phi} \text{End}(V^{\otimes n}) \xleftarrow{\pi} \mathcal{H}_n(q). \quad (3.5)$$

Théorème 3.2.6. L'algèbre centralisatrice $\text{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V^{\otimes n})$ est l'image $\text{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V^{\otimes n}) = \pi(H_n(q))$, et la décomposition de $V^{\otimes n}$ comme représentation de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et $H_n(q)$ est donnée par

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ l(\lambda) \leq 2}} W_\lambda \otimes V_\lambda. \quad (3.6)$$

De plus, quand $n \leq 2$ alors $\ker \pi = \{0\}$ et lorsque $n > 2$ alors $\ker \pi = \langle 1 - q^{-1}T_1 - q^{-1}T_2 + q^{-2}T_1T_2 + q^{-2}T_2T_1 - q^{-3}T_1T_2T_1 \rangle$.

Nous allons étudier l'algèbre donnée par $H_n(q)/\ker \pi$ au prochain chapitre. En fait, nous verrons qu'elle est une q -déformation de l'algèbre centralisatrice vue à la section précédente.

Durant le mini-cours, nous avons fait en détails $\text{TL}_n(-2)$. Dans les notes nous faisons plutôt une seule fois $\text{TL}_n(\beta)$ pour ne pas répéter.

Chapitre 4

Dualité de Schur–Weyl quantique et algèbres de Temperley–Lieb

Définitions par générateurs et relations -- Définition diagrammatique --
Modules -- Forme bilinéaire -- Semisimplicité -- Exemple non-semisimple

4.1 Définitions des algèbres de Temperley–Lieb

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}^\times$. Notons $\beta = -q - q^{-1}$. Nous étudions dans cette section l’algèbre de Temperley–Lieb $TL_n(\beta)$ définie à la section précédente comme le quotient $H_n(q)/\ker \pi$. Elle peut être définie dans une présentation similaire à celle présentée à l’exercice 3.1.6. Dans cette section, nous suivons les notes de David Ridout et d’Yvan Saint-Aubin en rétablissant la convention plus usuelle de lire les diagrammes horizontalement [9].

Définition 4.1.1 (Temperley–Lieb par générateurs et relations). *L’algèbre $TL_n(\beta)$ est l’algèbre associative et unifère générée par t_1, \dots, t_{n-1} respectant les relations*

$$t_j^2 = \beta t_j, \quad (4.1)$$

$$t_j t_{j \pm 1} t_j = t_j, \quad (4.2)$$

$$t_j t_k = t_k t_j \quad |j - k| > 1. \quad (4.3)$$

Exercice 4.1.2. Montrer que cette présentation suit de celle de $H_n(q)/\ker \pi$ en posant $t_j = s_i - q$.

Exercice 4.1.3. Donner tous les mots de $TL_3(\beta)$. (Indice : il y en a 5.)

Donner ensuite tous les mots de $TL_4(\beta)$. (Indice : il y en a 14.)

Par mot on entend les éléments de l’algèbre exprimés avec les t_j .

Un des points essentiels de l’algèbre de Temperley–Lieb est qu’elle admet une présentation diagrammatique. Nous définissons donc une autre algèbre $DTL_n(\beta)$, l’algèbre diagrammatique de Temperley–Lieb.

Définition 4.1.4. *L’algèbre diagrammatique de Temperley–Lieb est l’espace vectoriel constitué des sommes formelles de digrammes constitué de deux droites parallèles une au-dessus de l’autre sur lesquelles sont placées en mettant n points sur la droite du haut et n autres sur celle du bas et où tous les points sont reliés deux à deux par des courbes comprises dans le rectangle formé par les deux droites sans intersection. La multiplication $a \cdot b$ est donnée en plaçant a sous b , en identifiant les n points du milieu du nouveau diagramme et en remplaçant les boucles contractibles par β .*

Il est compliqué d'énoncer à l'écrit cette définition, montrons plutôt un exemple.

Exemple 4.1.5. Tous les diagrammes de TL_4 sont donnés par

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array}, \quad (4.4)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array}, \quad (4.5)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array}, \quad (4.6)$$

Un exemple de multiplication est donné ci-bas.

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} = \beta \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \end{array}$$

Exercice 4.1.6. Donner tous les diagrammes de $DTL_3(\beta)$.

Déjà on peut voir une concordance des dimensions des deux algèbres. Nous la formalisons en définissons un morphisme d'algèbres.

Soit l'application linéaire $\phi : TL_n(\beta) \rightarrow DTL_n(\beta)$ définie sur les générateurs par

$$1 \mapsto \begin{array}{c} \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \end{array} \quad t_i \mapsto \begin{array}{c} \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \end{array} \quad (4.7)$$

Proposition 4.1.7. L'application linéaire $\phi : TL_n(\beta) \rightarrow DTL_n(\beta)$ est un morphisme d'algèbres associatives.

Démonstration. Exercice. (Il faut vérifier que les relations de $TL_n(\beta)$ sont respectées par les diagrammes. Le faire pour $n = 4$ est suffisant pour l'exercice.) \square

Les deux algèbres sont isomorphes en fait.

Proposition 4.1.8 ([9, Theorem 2.4]). Le morphisme $\phi : TL_n(\beta) \rightarrow DTL_n(\beta)$ défini par (4.7) est un isomorphisme d'algèbres associatives.

Démonstration. La preuve revient à prouver que le morphisme est surjectif, puis à montrer que la dimension des deux algèbres est la même. Elle est longue et fait appel à plusieurs arguments que nous n'utilisons pas et nous ne la ferons donc pas. Elle se trouve dans [9, Section 2]. \square

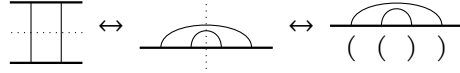
Proposition 4.1.9. *La dimension de $\text{DTL}_n(\beta)$ est donnée par le nombre de Catalan*

$$\dim \text{DTL}_n(\beta) = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Démonstration. Nous notons que le nombre de Catalan donne, entre autres, le nombre de façons de mettre n paires de parenthèses pour une expression donnée.

Un diagramme de $\text{TL}_n(\beta)$ peut être “mis à plat” pour devenir un demi-diagramme à $2n$ sites. À chaque ouverture de boucle, nous associons alors une parenthèse ouvrante et chaque fermeture de boucle, une parenthèse fermante. Cela donne la bijection. \square

Par exemple,



Dès lors, nous ne ferons plus la distinction entre les deux présentations de l'algèbre de Temperley-Lieb et les noterons toute deux $\text{TL}_n(\beta)$.

4.1.1 Représentations des algèbres de Temperley-Lieb

Nous voulons étudier les algèbres de Temperley-Lieb via leurs représentations. Nous débutons en exercice avec la représentation régulière.

Exercice 4.1.10. *Donner l'action des deux générateurs t_1, t_2 sur la représentation régulière $\text{TL}_3(\beta)$, c'est-à-dire l'algèbre vu comme module sur elle-même.*

Exercice 4.1.11. *Une fois la représentation régulière donnée, trouver un changement de base diagonalisant par bloc les deux matrices. Le paramètre β devrait être vu comme une indéterminée quelconque, ou bien $\beta = -2$. (Difficile.)*

Nous définissons maintenant une famille naturelle de modules.

Définition 4.1.12. Soit \mathcal{B}_n^d un ensemble donné par les demi-diagrammes à n sites avec d lignes transverses (donc $(n-d)/2$ arcs). On définit le module \mathcal{V}_n^d comme l'espace vectoriel de base \mathcal{B}_n^d avec l'action diagrammatique induite par concaténation définie ci-bas

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline v \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline v \\ \hline a \\ \hline \end{array}, \quad (4.8)$$

où le résultat est 0 si le nombre de ligne transverses diminue et où les boucles contractibles sont réduites à des facteurs β .

Sur TL_4 , il y a seulement trois telles familles de modules : \mathcal{V}_4^0 , \mathcal{V}_4^2 et \mathcal{V}_4^4 . Leurs bases respectives \mathcal{B}_4^0 , \mathcal{B}_4^2 et \mathcal{B}_4^4 sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_4^0 &= \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \text{arc} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \text{arc} \\ \hline \end{array} \right\} \\ \mathcal{B}_4^2 &= \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \text{arc} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \text{arc} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \text{arc} \\ \hline \end{array} \right\} \\ \mathcal{B}_4^4 &= \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \text{arc} \\ \hline \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

La décomposition devrait résulter en $\text{TL}_3(\beta) \simeq V \oplus W \oplus W$ avec $\dim V = 1$ et $\dim W = 2$.

Quelques exemples de l'action de TL_4 sont présentés ci-dessous :

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \cdot \text{Diagram 2} = \beta \cdot \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \cdot \text{Diagram 5} = 0 \end{array}$$

où la dernière action est nulle puisque deux lignes transverses sont reliées. Nous donnons les représentations correspondantes dans les bases \mathcal{B}_4^0 , \mathcal{B}_4^2 et \mathcal{B}_4^4 ci-dessus en donnant la valeur de chaque générateur :

$$\begin{aligned} \rho_0 : \text{TL}_4 &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{V}_4^0) \\ \text{id} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad t_2 \mapsto \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 : \text{TL}_4 &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{V}_4^2) \\ \text{id} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \mapsto \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \rho_4 : \text{TL}_4 &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{V}_4^4) \\ \text{id} &\mapsto (1), \quad t_1 \mapsto (0), \quad t_2 \mapsto (0), \quad t_3 \mapsto (0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

On voit quelque chose d'intéressant peut-être déjà : les représentations dépendent de la valeur de β .

Encore plus intéressant, la dimension des modules $\mathcal{V}_{n,d}$ est donnée par

$$\dim \mathcal{V}_{n,d} = \binom{n}{\frac{n-d}{2}} - \binom{n}{\frac{n-d-2}{2}}. \quad (4.12)$$

Maintenant, on peut remarquer une coïncidence fort intéressante :

$$\dim \text{TL}_n(\beta) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \sum_{\substack{d=0 \\ d \equiv 2n}}^n \left(\binom{n}{\frac{n-d}{2}} - \binom{n}{\frac{n-d-2}{2}} \right)^2 = \sum_{\substack{d=0 \\ d \equiv 2n}}^n (\dim \mathcal{V}_{n,d})^2. \quad (4.13)$$

Cela veut dire que dès lors que nous pouvons montrer que les modules $\mathcal{V}_{n,d}$ sont des modules simples non-équivalents, alors nous aurons montré que l'algèbre de Temperley-Lieb est semi-simple.

4.2 Semisimplicité

L'exemple de $\text{TL}_4(\beta)$ a montré quelque chose : la valeur de β influence la réductibilité des représentations. Nous allons voir une façon concrète de voir cet effet. Cela fonctionne sur une famille plus grande d'algèbres que simplement $\text{TL}_n(\beta)$, mais ceci dépasse, pour

le moment, le cadre du cours. Cette famille se nomme *algèbre cellulaire* et a été introduite par Graham et Lehrer [7].

L'idée de base de l'étude de la structure de cette algèbre passera par une forme bilinéaire sur les modules que nous avons définis à la section précédente. L'idée sera ensuite d'étudier cette forme. Son radical sera un sous-module. S'il est nul, en fait, le module sera simple.

Définition 4.2.1. Une forme bilinéaire $\langle -, - \rangle_{n,d}$ est définie sur \mathcal{V}_n^d diagrammatiquement par la règle suivante : $\langle v, w \rangle_{n,d} = \beta^{N(v^*w)}$ où v^* est le diagramme réfléchi horizontalement de v et $o'N(v^*w)$ compte le nombre de boucles du diagramme v^*w , avec la règle que si un arc ferme deux lignes transverses dans v^*w , alors le résultat est 0.

Quelques exemples rendront cela évident.

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_{4,0} &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = \beta, \\ \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_{4,2} &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = 1, \\ \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle_{4,2} &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = 0. \end{aligned}$$

Définition 4.2.2. La matrice $\mathcal{G}_{n,d} = (\langle v, w \rangle_{n,d})_{v,w \in \mathcal{B}_{n,d}}$ est nommée la matrice de Gram de la forme bilinéaire.

Proposition 4.2.3. La forme bilinéaire $\langle -, - \rangle_{n,d}$ est

1. symétrique ($\langle v, w \rangle_{n,d} = \langle w, v \rangle_{n,d}$ pour $v, w \in \mathcal{V}_{n,d}$);
2. invariante ($\langle av, w \rangle_{n,d} = \langle v, a^*w \rangle_{n,d}$ pour $a \in \text{TL}_n(\beta)$ et $v, w \in \mathcal{V}_{n,d}$).

Définition 4.2.4. Le radical $\mathcal{R}_{n,d}$ de $\langle -, - \rangle_{n,d}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{V}_{n,d}$ donnée par $\mathcal{R}_{n,d} = \{v \in \mathcal{V}_{n,d} \mid \langle v, w \rangle_{n,d} = 0, \forall w \in \mathcal{V}_{n,d}\}$.

Proposition 4.2.5. Le radical $\mathcal{R}_{n,d}$ est un sous-module de $\mathcal{V}_{n,d}$ et le quotient $\mathcal{L}_{n,d} = \mathcal{V}_{n,d}/\mathcal{R}_{n,d}$ est simple si $\langle -, - \rangle_{n,d} \not\equiv 0$.

Exercice 4.2.6. Vérifier que les matrices de Gram suivantes sont correctes

$$\mathcal{G}_{4,4} = (1), \quad \mathcal{G}_{4,2} = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_{4,0} = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{pmatrix},$$

et trouver toutes les valeurs de $\beta = -q - q^1$ qui les rendent singulières.

Avec l'exercice 4.2.6, on peut trouver déjà un résultat fort intéressant : hors des valeurs de β trouvées, l'algèbre de Temperley–Lieb est semi-simple.

Remarque 4.2.7. Attention ! Il y a des cas où la forme est dégénérée. Précisément, le cas où $\beta = 0$ et n est pair, pour le module $\mathcal{V}_{n,0}$. C'est un cas difficile, mais il suffit de savoir pour le moment que le module $\mathcal{V}_{n,0}$ est simple dans ce cas, mais qu'il est isomorphe à $L_{n,2}$. Cela est fait dans [9].

Ceci est une conséquence de la cellularité de $\text{TL}_n(\beta)$, mais on peut aussi le voir en montrant que tout élément de $\mathcal{V}_{n,d} \setminus \mathcal{R}_{n,d}$ est un générateur de $\mathcal{V}_{n,d}$ par des arguments diagrammatiques.

On peut en fait généraliser l'observation faite sur $TL_4(\beta)$ et calculer par induction le déterminant de la matrice de Gram. L'idée est de montrer qu'elle se décompose en matrice bloc-diagonale.

Proposition 4.2.8. *Il existe un nombre $\alpha_{n,d}$ et une matrice de changement de base unitaire $U_{n,d}$ tels que*

$$\mathcal{G}_{n,d} = U_{n,d}^T \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{n-1,d-1} & 0 \\ 0 & \alpha_{n,d} \mathcal{G}_{n-1,d+1} \end{pmatrix} U_{n,d}. \quad (4.14)$$

De plus, on peut exprimer la valeur de $\alpha_{n,d}$ en fonction de q par l'entremise de q -nombre

$$[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}. \quad (4.15)$$

Proposition 4.2.9. *Lorsque $[d+1]_q \neq 0$ alors*

$$\alpha_{n,d} = \frac{[d+2]_q}{[d+1]_q}. \quad (4.16)$$

Cela veut dire que nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.2.10. *Lorsque q n'est pas une racine de l'unité, l'algèbre de Temperley-Lieb est semi-simple et les modules $\mathcal{V}_{n,d}$ forment un ensemble complet de modules simples non-isomorphes.*

Dans le cas où q est une racine de l'unité, certains des $\mathcal{V}_{n,d}$ sont réductibles et l'algèbre de Temperley-Lieb n'est plus semi-simple.

L'étude des algèbres non semi-simples est bien plus avancée, mais aussi bien plus intéressante! Pour Temperley-Lieb, on peut faire toute la théorie en étudiant les composantes indécomposables plutôt que les composantes irréductibles, mais en général ça peut être un problème très difficile.

Nous terminons avec un dernier exercice.

Exercice 4.2.11. *Donner les modules simples de l'algèbre $TL_4(-\sqrt{2})$.*

Bibliographie

- [1] B. DENG, J. DU, B. PARSHALL et J. WANG. *Finite Dimensional Algebras and Quantum Groups*. Mathematical Surveys and Monographs 150. American Mathematical Soc., 2008.
- [2] P. I. ETINGOF et al. *Introduction to representation theory*. T. 59. American Mathematical Soc., 2011.
- [3] W. FULTON et J. HARRIS. *Representation theory : a first course*. T. 129. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] G. D. JAMES et M. W. LIEBECK. *Representations and characters of groups*. Cambridge university press, 2001.
- [5] J. C. JANTZEN. *Lectures on quantum groups*. T. 6. American Mathematical Soc., 1996.
- [6] C. KASSEL. *Quantum groups*. T. 155. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] G. I. LEHRER et J. J. GRAHAM. "Cellular algebras." *Inventiones Mathematicae* 123 (1996), p. 1-34.
- [8] L. POULAIN D'ANDECY. *Centralisers and Hecke algebras in Representation Theory, with applications to Knots and Physics*. 2023. arXiv : [2304.00850](#) [[math.RT](#)].
- [9] D. RIDOUT et Y. SAINT-AUBIN. "Standard modules, induction and the structure of the Temperley-Lieb algebra". *Adv. Theor. Math. Phys.* 18.arXiv : 1204.4505 (2014), p. 957-1041.