

# Accromath

Volume 17 • hiver-printemps 2022

## Huit dames et un échiquier

### Autres articles

- Le paradoxe de Saint-Pétersbourg
- Paver l'espace avec des cubes
- Le système de notation Elo
- Comparaison d'aires
- 1. La règle et le compas

Rubrique des  
**Paradoxes**

Encore  
une histoire  
de chapeaux

# Éditorial

Ce numéro présente une belle diversité d'articles.

Les domaines couverts dans les articles de ce numéro sont la notion de probabilité, la combinatoire, le pavage de l'espace, le calcul du niveau relatifs des participants à un jeu de somme nulle et la méthode de comparaison d'aires par les Grecs de l'Antiquité.

**Le paradoxe de Saint-Pétersbourg**, article présenté par Michel Adès, Jean-François Plante et Serge B. Provost, concerne une variable aléatoire qui prend des valeurs finies, mais dont l'espérance est infinie. Quelle décision prendre dans un tel cas?

**Le problème des huit dames** présenté par Alexis Langlois-Rémillard, requiert un échiquier, huit dames et une contrainte. Ce problème est étudié depuis plus de 170 ans, entre autres par Carl Friedrich Gauss, et nous suivons les traces de ce grand mathématicien pour en connaître les secrets.

**Le système de notation Elo**, présenté par Christian Genest et Julien Fageot, bien qu'il soit dorénavant employé un peu partout, a quand même ses origines dans le monde échiquéen, auquel il reste fortement associé.

Pour pavir le plan avec des carrés congruents, ceux-ci doivent avoir une arête commune. Pour pavir l'espace avec des cubes congruents, certains doivent partager une face commune. En 1930, Ott-Heinrich Keller a conjecturé que c'est le cas en toute dimension. En fait, la conjecture est vraie jusqu'en dimension 7 et fausse en dimension supérieure à 7. Christiane Rousseau, dans **Paver l'espace avec des cubes**, nous présente les grandes lignes de cette aventure mathématique.

Les Grecs de l'Antiquité comparaient les aires de deux surfaces en cherchant à construire à la règle non graduée et au compas un carré de même aire que chacune des surfaces. L'article **Comparaison d'aires** nous explique comment ils procédaient.

Dans un groupe de neuf joueurs portant des chapeaux de trois couleurs – noir, rouge et blanc – tirés au hasard, comment deviner la couleur de son chapeau si on ne voit que celui porté par les autres joueurs? C'est le problème posé par Jean-Paul Delahaye dans le paradoxe **Encore une histoire de chapeaux**.

Bonne lecture!

André Ross

## Rédacteur en chef

**André Ross**

Professeur de mathématiques

## Comité éditorial

**France Caron**

Professeure de didactique  
des mathématiques  
Université de Montréal

**Christian Genest**

Professeur de statistique  
Université McGill

**Frédéric Gourdeau**

Professeur de mathématiques  
Université Laval

**Bernard R. Hodgson**

Professeur de mathématiques  
Université Laval

**Christiane Rousseau**

Professeure de mathématiques  
Université de Montréal

**Robert Wilson**

Professeur de mathématiques  
Cégep de Lévis-Lauzon

## Production et Iconographie

**Alexandra Haedrich**

Institut des sciences mathématiques

## Conception graphique

**Pierre Lavallée**

Néograf Design inc.

## Illustrations de scientifiques et caricatures

**Noémie Ross**

## Illustrations mathématiques

**André Ross**

## Révision linguistique

**Robert Wilson**

Professeur de mathématiques  
Cégep de Lévis-Lauzon

# Accromath

Institut des sciences mathématiques  
Université du Québec à Montréal  
Case postale 8888, succ. Centre-ville  
Montréal (Québec)  
H3C 3P8 Canada

[redaction@accromath.ca](mailto:redaction@accromath.ca)

[www.accromath.ca](http://www.accromath.ca)

# Accromath

Volume 17 • hiver – printemps 2022

## Sommaire

### Dossier *Applications des mathématiques*

#### **Le paradoxe de Saint-Pétersbourg**

Michel Adès  
Jean-François Plante  
Serge Provost

2

#### **Huit dames et un échiquier**

Alexis Langlois-Rémillard

8

#### **Le système de notation Elo**

Christian Genest  
Julien Fageot

14

### Dossier *Géométrie*

#### **Paver l'espace avec des cubes**

Christiane Rousseau

20

### Dossier *Histoire*

#### **Comparaison d'aires: 1. la règle et le compas**

André Ross

26

### Rubrique des **Paradoxes**

#### **Encore une histoire de chapeaux**

Jean-Paul Delahaye

30

#### **Solution du paradoxe précédent**

Jean-Paul Delahaye

30

### Section problèmes

32



Accromath  
Vol. 17 • hiver – printemps 2022

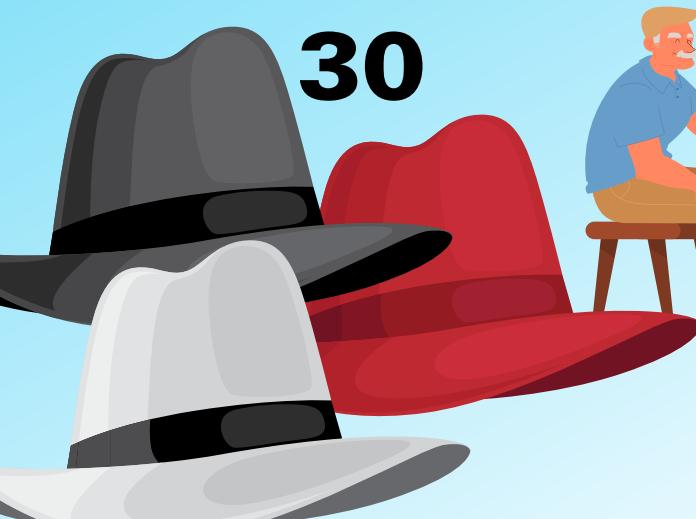
1



30

14

20



# Le paradoxe de Saint-P

Pendant la pandémie, Georges s'est trouvé un nouveau passe-temps : il joue de l'argent virtuel dans des casinos en ligne. Il en profite pour faire quelques calculs à l'occasion afin de déterminer à quel point le casino propose des jeux qui lui sont favorables. Dans le cas d'un jeu étrange de pile ou face qui pourrait s'étirer à l'infini, Georges est toutefois médusé. Pour trancher son dilemme, il devra en fait résoudre le *paradoxe de Saint-Pétersbourg*.

**Michel Adès**  
UQAM

**Jean-François Plante**  
HEC Montréal

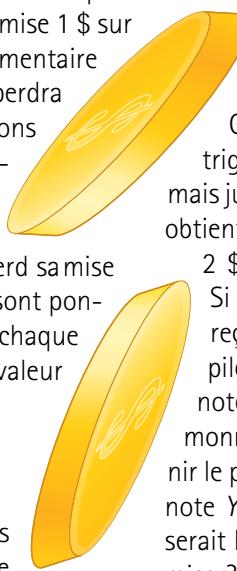
**Serge B. Provost**  
Université Western Ontario

## Pile ou face à l'infini

Considérons l'un des jeux de hasard les plus simples : pile ou face. Si Georges mise 1 \$ sur pile, alors il gagnera 1 \$ supplémentaire si la pièce tombe sur pile, mais perdra 1 \$ si on obtient plutôt face. Notons  $P$  le montant que le croupier remet à Georges à la fin du jeu. En pratique, soit Georges gagne un dollar de plus ( $P=2$ ), soit il perd sa mise ( $P=0$ ). En moyenne, ces valeurs sont pondérées par les probabilités de chaque événement, et on appelle cette valeur l'espérance de  $P$  notée par :

$$E(P) = 2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = 1$$

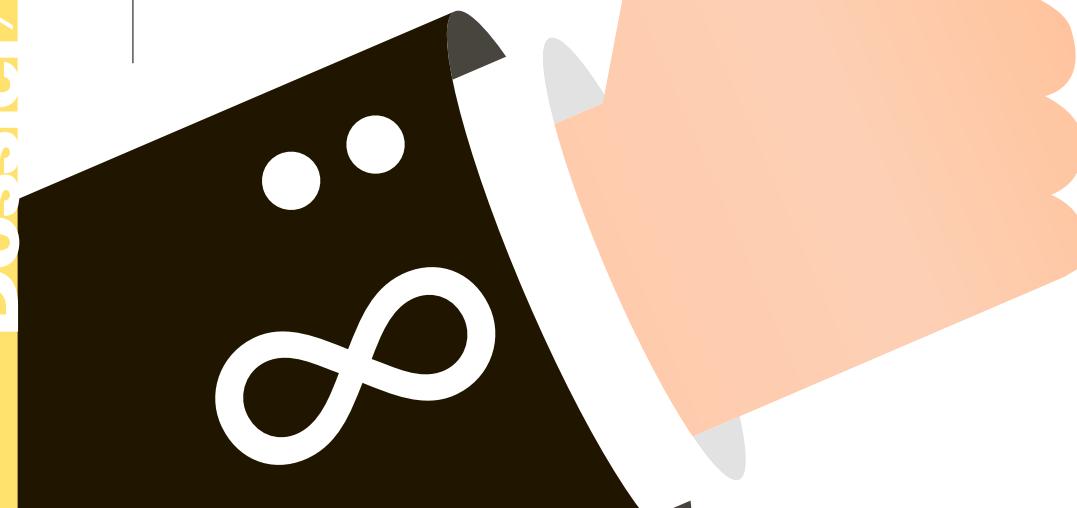
Comme le montant moyen remis par le croupier est égal à la mise de Georges, ni le casino, ni Georges ne sont favorisés. En effet, la moyenne que le casino verse à même ses fonds lors de chaque jeu est 0 \$ et le gain moyen de Georges, en sus de sa mise, est nul. La mise de 1 \$ est le montant « juste » pour jouer à ce jeu. Évidemment, tous les vrais



casinos s'assurent que l'espérance joue en leur faveur, par exemple en demandant plus de 1\$ pour ce pari, ce qui leur garantit de faire des profits à long terme.

Georges s'intéresse à une variante intrigante du jeu. La même pièce est lancée, mais jusqu'à l'obtention du premier pile. Si on obtient pile au premier lancer, le joueur reçoit 2 \$ du croupier, comme précédemment. Si on obtient face, puis pile, le joueur reçoit alors 4 \$. Avec deux faces puis un pile, il reçoit 8 \$. De façon générale, on note  $X$  le nombre de lancers de la pièce de monnaie qui furent nécessaires afin d'obtenir le premier pile. Le montant remis, que l'on note  $Y$ , est alors égal à  $2^X$ . Pour ce jeu, quel serait le montant juste que Georges pourrait miser?

Comme précédemment, il serait pertinent de calculer la valeur espérée du montant remis à Georges. On a une



# étersbourg

chance sur deux d'avoir pile en partant. La probabilité d'obtenir face, puis pile, est de

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

De façon générale, la probabilité d'obtenir le premier pile au  $x^{\text{ème}}$  lancer est de  $\frac{1}{2^x}$ .

Ainsi, l'espérance de l'argent remis par le croupier est maintenant:

$$E(Y) = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} + \dots \\ = 1 + 1 + 1 + \dots,$$

une somme qui diverge clairement vers l'infini! Georges devra-t-il miser un montant infini d'argent pour participer à un tel jeu?

Étant donné ce résultat mathématique, il serait nécessaire de disposer d'un temps infini et de réserves monétaires infinies de la part du casino, ce qui est paradoxal compte tenu de la limite de notre temps et la finitude de nos moyens. D'ailleurs, il est assez improbable que le jeu dure très longtemps. Regardons la probabilité de parties courtes:

$$P(X \leq 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$P(X \leq 4) = \frac{15}{16},$$

$$P(X \leq 6) = \frac{63}{64}.$$

En général,

$$P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

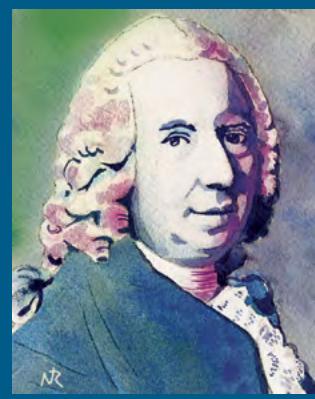
Georges note alors que les longues parties sont très rares. Si  $X = 25$ , les 24 premiers essais furent face, et la probabilité d'un tel événement est alors

$$P(X = 25) = \frac{1}{2^{25}} = \frac{1}{33\,554\,432}.$$

Imaginez une partie encore plus longue, par exemple de plus de 30 lancers, alors la probabilité de cet événement correspond à:

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30)$$

$$= \frac{1}{1\,073\,741\,824}.$$



## Daniel Bernoulli (1700-1782)

Daniel Bernoulli a été dix fois récipiendaire du prix de l'Académie de Paris. L'ensemble de ses travaux est surtout en physique mais il a également apporté des contributions en mathématiques, en économie et en médecine.

Avec une probabilité inférieure à un sur un milliard, on n'est pas près de voir cette partie survenir! Pourtant, peu importe la mise que Georges peut envisager, la théorie dicte que l'espérance du montant remis est  $E(Y) = \infty$ . Où se trouve alors le juste équilibre pour que le jeu soit équitable?

Daniel Bernoulli fut le premier, en 1738, à présenter un exposé sur ce paradoxe dans les *Transactions de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*. Mais en réalité, ce paradoxe fut proposé à l'origine en 1713 par Nicolas Bernoulli, l'oncle de Daniel qui l'a repris et modifié. Depuis lors, ce problème est connu comme étant le *paradoxe de Saint-Pétersbourg*. L'historique du paradoxe et son aspect moderne sont savamment décrits par Peterson (2019) et Samuelson (1977).

## Même Crésus n'est pas assez riche

Les casinos ne disposent pas d'une quantité infinie de fonds. Si un montant maximum est imposé aux gains, le montant gagné en moyenne sera nécessairement fini. Disons que le casino dispose de 1 000 000 \$. Si on atteint 20 lancers ou plus, le montant initialement prévu au jeu excédera ce maximum puisque  $2^{20} = 1\,048\,576$ . Dans ce cas, le montant remis en moyenne sera

$$E(Y) = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + \dots \\ + 1\,000\,000 \times P(X \geq 20) \\ = 19 + 1000000 \left( \frac{1}{2^{19}} \right) = 20,91.$$



Cathédrale Saint-Sauveur-sur-le-Sang-Versé de Saint-Pétersbourg

Le juste prix pour participer à ce jeu s'élèverait donc à 20,91\$. De même, si le casino dispose de 1 000 000 000 \$ qu'il est prêt à verser dans le cadre de ce jeu, il atteindra son plafond à 30 lancers, avec  $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ , et alors:

$$E(Y) = 29 + 1\,000\,000\,000 \left( \frac{1}{2^{29}} \right)$$

$$= 30,86.$$

Pour permettre d'allonger le jeu, au-delà de 30 lancers, le casino devrait disposer d'une fortune colossale. Pour un chanceux obtenant le premier pile au centième lancer, il devrait verser la somme vertigineuse de  $1,27 \times 10^{30}$ \$, plus d'un quintillion de dollars. Cette somme dépasse largement toutes les richesses de la terre, estimées présentement à un demi billiard par le Crédit suisse.

### Le test empirique du Comte de Buffon

Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788), connu pour l'estimation du nombre  $\pi$  par des lancers successifs d'une aiguille sur un plancher de lattes (Rousseau et Roy-Fortin, 2015). Il a également testé empiriquement le paradoxe de Saint-Pétersbourg<sup>1</sup>. Selon la rumeur, Buffon aurait engagé un enfant pour tirer à pile ou face, et il a enregistré les résultats de 2 048 parties. Les résultats sont reproduits au Tableau 1.

Un total de 20 114 \$ aurait ainsi été versé aux joueurs, ce qui revient à 9,82 \$ en moyenne par partie.

Nombre de lancers ( $k$ )	Gain ( $2^k$ )	Nombre d'occurrences	Pourcentage
1	2	1 061	0,518
2	4	494	0,241
3	8	232	0,113
4	16	137	0,067
5	32	56	0,027
6	64	29	0,014
7	128	25	0,012
8	256	8	0,004
9	512	6	0,003
Total	2 048	1,000	

Tableau 1: Les données de l'expérience de Buffon, telles que rapportées dans sa publication de 1777.



### Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788)

Le comte de Buffon est un naturaliste, mathématicien, biologiste, cosmologiste, philosophe et écrivain français.

L'expérience de Buffon est *stochastique* (aléatoire) : si on la répète, on n'obtient pas exactement la même valeur à chaque fois. De nos jours, les ordinateurs permettent de la répéter très rapidement, à de nombreuses reprises, sans avoir recours au travail d'enfants ! Le Tableau 2 présente d'ailleurs les quantiles des montants moyens obtenus en répétant l'expérience de Buffon 100 000 fois. La moyenne de ces 100 000 gains moyens est de 28,08 \$. Évidemment, même avec un très grand nombre d'expériences, il demeure improbable d'observer les événements très rares qui eux, coûtent très chers au casino.

En répétant la simulation originale de Buffon, on constate qu'une valeur de 9,82 \$ est somme toute assez petite. En effet, seulement 7 543 des 100 000 expériences ont conduit à un retour moyen aussi petit.

1. Il existe des variations dans la description du Paradoxe de Saint-Pétersbourg. Dans les écrits originaux de Buffon, il semble que le paiement au joueur était de  $2^{x-1}$  si l'on obtenait un premier face au lancer  $x$ , alors que nous utilisons une remise de  $2^x$  si on obtient le premier pile au lancer  $x$ . Ces variations par rapport à la décision ne changent en rien la nature du paradoxe.

Quantiles									
Min	1 %	5 %	25 %	50 %	75 %	95 %	99 %	Max	
7,26	8,65	9,51	11,37	13,61	18,15	44,43	145,41	131 081,33	

Tableau 2:

Quantiles du gain moyen obtenus dans le cadre de 100 000 expériences de Buffon comportant chacune 2 048 parties.

### Le combat des infinis

Dans son expérience, le comte de Buffon a observé une cagnotte maximale de 512\$. Pourtant, en répétant son expérience 100 000 fois, nous avons généré un total de  $100\,000 \times 2\,048 = 204\,800\,000$  parties comportant davantage d'événements rares, notamment une séquence de 28 lancers conduisant à un prix d'un quart de milliard! C'est dans cet esprit que William Feller (1906-1970), un des grands probabilistes du 20<sup>e</sup> siècle, propose de tenir compte du nombre de fois où le jeu sera joué. En effet, plus on joue souvent, plus on sera certain d'observer des événements coûteux. Pour arriver à sa réponse, il considère même un nombre infini de parties!

Après  $n$  parties, notons  $S_n$  le montant cumulatif gagné par le joueur et  $e_n$  le total des mises qu'il a effectuées à date. Plutôt que de référer au gain moyen, que nous savons infini, il est possible de regarder le ratio des sommes gagnées et misées. *Même si ces deux sommes vont vers l'infini*, leur ratio, lui, peut être maîtrisé. Pour que le jeu soit équitable  $s_n/e_n$  doit tendre vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Grâce à des opérations mathématiques et à la loi faible des grands nombres, les mathématiciens Feller, Gorroochurn et Székely démontrent que le choix de mise donné par  $e_n = n \log_2 n$  permet d'obtenir un quotient  $s_n/e_n$  qui tend vers 1, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , plus précisément:

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{s_n}{e_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

### William Feller (1906-1970)

Mathématicien croate, né à Zagreb, naturalisé américain, spécialiste de la théorie des probabilités.



Le Tableau 3 donne une indication de la mise requise pour chaque partie, selon le nombre de parties jouées de manière consécutive. Évidemment, il est peu probable de trouver un casino solvable et suffisamment déraisonnable pour se lancer dans de tels paris!

### L'argent n'a pas la même valeur pour tous

Un lot de 100 000 \$ fait rêver la plupart des gens, mais pour les milliardaires, il en va autrement. Dans les approches précédentes, la valeur de l'argent était la même pour le casino et le joueur, mais en pratique, le capital n'a pas la même utilité pour tous. En laissant de côté les bénéfices possibles générés pour le casino, peut-on mesurer l'importance des gains possibles du point de vue du joueur?

Nombre de parties	5	10	20	50	100	200	500	1000
Mise par partie	2,32\$	3,32\$	4,32\$	5,64\$	6,64\$	7,64\$	8,96\$	9,96\$

Tableau 3:  
 Mise équitable par nombre de parties selon Feller.

Suivant la pensée de Daniel Bernoulli, si le capital  $c$  s'accroît par  $dc$ , alors l'accroissement de l'utilité est inversement proportionnel au capital. En termes mathématiques, on peut représenter ce principe par une équation différentielle liant l'utilité ( $u$ ) au capital ( $c$ ):

$$du = k \frac{dc}{c},$$

qu'il est possible d'intégrer pour trouver

$$u(c) = k \ln(c) + \text{constante}.$$

Pour fin d'illustration, on peut fixer la constante d'intégration à 0 et choisir  $k=1$ , ce qui donne  $u(c) = \ln(c)$ , une fonction qui croît plutôt lentement.

Revenons à notre jeu de hasard. Même s'il est possible d'atteindre des cagnottes considérables, l'utilité que Georges pourra en tirer connaîtra certaines limites. Un montant juste pourrait ainsi être établi au montant d'argent dont l'utilité pour Georges correspond à l'utilité moyenne de son gain. Comme  $u(c)$  croît lentement, l'espérance de l'utilité pourrait être finie, même si l'espérance du gain lui-même diverge vers l'infini. En effet, si  $C$  est la variable aléatoire donnant le capital gagné, alors l'espérance de l'utilité correspondante est donnée par:

$$\begin{aligned} E\{u(c)\} &= \sum_{c=1}^{\infty} \ln(2^c) P(C=c) \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \ln(2^c) 2^{-c} \\ &= \ln(2) \sum_{c=1}^{\infty} c 2^{-c} \\ &= 2 \ln(2) < \infty. \end{aligned}$$

on admettra sans preuve la toute dernière égalité<sup>2</sup>.

2. Pour les plus ambitieux, cette preuve peut être obtenue en dérivant une série géométrique et l'expression de sa somme.

Pour Georges, l'utilité moyenne du jeu correspond à un montant  $M$  qui peut être trouvé en résolvant:

$$u(M) = E\{u(C)\} = 2 \ln(2).$$

Comme  $u(M) = \ln(M)$ , alors

$$M = e^{2 \ln(2)} = 2^2 = 4,$$

et Georges pourrait miser jusqu'à 4 \$. Le Tableau 4 (page suivante) présente une partie du calcul de cette espérance.

Notez que la somme cumulative de l'espérance de l'utilité du gain converge vers  $2 \ln(2) = 1,386\,294$ . Il est intéressant de noter que les montants astronomiques mais improbables contribuent peu à l'utilité espérée. Même si le casino limitait les parties à 10 lancers pour éviter la faillite, le joueur serait déjà prêt à payer  $e^{1,373\,442} = 3,95 \$$ . À 15 lancers, on arrondit déjà à 4 \$.

Le montant proposé de 4 \$ convient à Georges, en autant que sa fonction d'utilité soit  $u(c) = \ln(c)$ . Pour un autre individu, le montant sera différent. Disons que pour Gisèle,

$$u(c) = \begin{cases} c & \text{si } c \leq 2^{19} \\ 2^{19} + \log_2(c/2^{19}) & \text{si } c > 2^{19} \end{cases}$$

Alors la mise équitable pour elle sera d'environ 20 \$. En effet, en développant et en simplifiant les sommes, on peut trouver

$$\begin{aligned} E\{u(c)\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u(2^i)}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{19} \frac{2^i}{2^i} + \sum_{i=20}^{\infty} \left[ \frac{2^{19} + \log_2(2^i/2^{19})}{2^i} \right] \\ &= 19 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} + 2^{-19} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log_2(2^i)}{2^i} \\ &= 20 + 2^{-19} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = 20 + 2^{-18}. \end{aligned}$$

<i>n</i> <sup>ième</sup> lancer	Probabilité d'obtenir face au <i>n</i> <sup>ième</sup> lancer	Gain	Utilité du gain	Contribution à l'espérance de l'utilité du gain	Somme cumulative de l'espérance de l'utilité
1	1/2	2 \$	0,693 147	0,346 573	0,346 573
2	1/4	4 \$	1,386 294	0,346 573	0,693 146
:	:	:	:	:	:
10	1/1024	1 024 \$	6,931 471	0,006 769	1,373 442
11	1/2048	2 048 \$	7,624 618	0,003 722 9	1,380 198
:	:	:	:	:	:
15	1/32 768	32 768 \$	10,397 20	0,000 317 2	1,385 930
16	1/65 536	65 536 \$	11,090 35	0,000 169 2	1,386 100
:	:	:	:	:	:
20	1/1 048 576	1 048 576 \$	13,862 94	0,000 013 22	1,386 275

Tableau 4:  
 Espérance de l'utilité du gain.

On vient d'utiliser des changements de variables pour les sommes et les propriétés assez connues des sommes géométriques selon lesquelles :

$$\text{pour } 0 \leq a < 1, \sum_{i=1}^{\infty} a^i = 1/(1-a) \text{ et}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} ia^i = a/(1-a)^2.$$

Selon la fonction d'utilité, les calculs peuvent s'avérer plus ou moins compliqués. Bien souvent, un calcul numérique pourrait également s'avérer adéquat. En économie, des approches empiriques ont d'ailleurs été développées pour éliciter la fonction d'utilité d'un individu, permettant ainsi de la déterminer grâce à un certain nombre de questions.

## Conclusion

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est l'un de plus marquants en théorie des jeux, et ses conséquences en économie ont été largement étudiées. À travers le temps, plusieurs mathématiciens de renom ont contribué à la discussion, notamment Euler en découvrant une des propriétés de ce qu'on appelle aujourd'hui la fonction d'utilité (Euler 1862)

et von Neumann. En outre, von Neumann a développé la théorie de l'utilité espérée qui a résolu de nombreuses particularités liées au comportement des gens en regard de l'incertitude.

En mathématiques, il est souvent plus simple de résoudre un problème pour des éléments infiniment petits ou infiniment grands. Ces outils très élégants, dits *asymptotiques*, sont d'une utilité indéniable. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg nous rappelle toutefois que nous vivons dans un monde fini, avec un temps et des ressources finis, du moins à l'échelle humaine. Parfois, une solution pratique doit tenir compte de cette finitude !

En cherchant davantage (*En savoir +*), Georges note que des articles scientifiques récents se penchent encore sur le paradoxe de Saint-Pétersbourg en proposant d'autres approches à sa résolution. Le constat que cette énigme fait encore couler beaucoup d'encre de nos jours, inspire Georges qui se met à rêver à une façon moderne d'illustrer le paradoxe afin de partager son savoir avec les masses sur les réseaux sociaux. Saura-t-il en faire un TikTok viral ? (*En savoir +*)



# Huit dames et un

*Un échiquier, huit dames et une contrainte, voilà tout ce que requiert le problème des huit dames. Pourtant, il continue à être étudié depuis plus de 170 ans. Suivons les traces d'un des plus grands mathématiciens pour dévoiler ses secrets.*

Alexis  
Langlois-Rémyillard  
Université de Gand

## Un problème bien spécial

Le problème des huit dames a été publiquement posé pour la première fois en 1848 par Max Bezzel (1824-1871) dans la revue allemande *Schachzeitung* (la revue des échecs). Il a été ensuite repris à maintes reprises dans plusieurs revues d'échecs et autres journaux.

## Le problème des huit dames

*Combien de façons y a-t-il de placer huit dames sur un échiquier sans qu'elles se menacent mutuellement ?*

Une dame se déplace sur l'échiquier le long des diagonales, des colonnes et des rangées (voir figure 1).

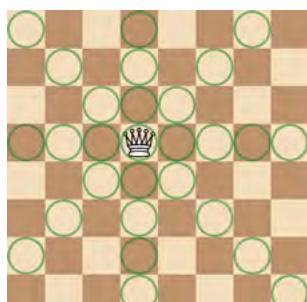


Figure 1: Une dame et les cases qu'elle menace.

Une dame en menace une autre si elle peut atteindre la case que l'autre occupe (voir figure 2).

S'il est (relativement) facile de trouver une solution, comment s'assurer de toutes les trouver ? Si vous avez un échiquier sous la main, c'est un bon moment pour déposer le magazine et essayer !

## La solution du prince des mathématiciens : Gauss

Pour donner la solution de ce problème, nous suivrons l'exemple de l'astronome Heinrich Christian Schumacher (1780-1850).

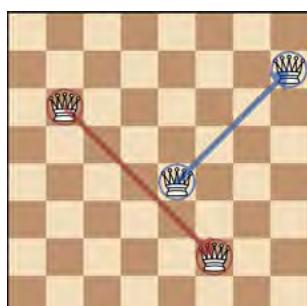


Figure 2: En rouge, deux dames se menacent sur une diagonale SE et en bleu, deux sur une diagonale NE.

Schumacher était un passionné des énigmes, des échecs, un mathématicien amateur et un correspondant assidu. Parmi ses relations épistolaires les plus distinguées se trouvait le grand mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), vers qui il se tournait souvent pour discuter de science et d'énigmes. Faisons de même ici !

Le problème apparaît dans la correspondance de Gauss et Schumacher en septembre 1850 après que Gauss eut vu le problème dans un article de Franz Nauck dans la gazette *Illustrierten Zeitung* de Leipzig. Nauck y annonçait 60 solutions, mais Gauss put rapidement en trouver davantage. Il incita donc son ami Schumacher à considérer le problème. Quand Nauck corrigea son erreur quelques mois plus tard et donna les 92 solutions, Gauss fournit à Schumacher une méthode pour vérifier le résultat en lui laissant le soin de finir ses calculs; dans ses mots : « Par ces tâtonnements méthodiques, il ne devrait pas être difficile de trouver les solutions à ce problème si on est prêt à y passer une ou deux heures. » L'histoire ne dit pas si Schumacher releva le défi avant sa mort, mais la méthode de Gauss vaut certainement encore la peine d'être présentée.

La voici décomposée point par point :

- Le mouvement d'une dame est l'intersection de quatre droites : une verticale, une horizontale, et deux diagonales, une Nord-Est de pente 1 et l'autre Sud-Est de pente -1.
- Il faut une et une seule dame sur chaque colonne, et une et une seule dame sur chaque rangée, donc toutes les droites verticales et horizontales doivent être distinctes.
- De ce constat, on note la position des dames par des listes de huit chiffres

$$(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8),$$

où  $D_i$  donne la rangée de la dame sur la

# échiquier

colonne  $j$  en comptant du bas vers le haut. Ceci assure qu'il y ait une seule dame par colonne. Lorsqu'il y a une seule dame par rangée, tous les  $D_j$  sont distincts et on nomme une telle liste une permutation des chiffres de 1 à 8. Toutes les solutions doivent être des permutations, mais toutes les permutations ne sont pas des solutions. Pour s'assurer de cela, il faut vérifier les diagonales.

- Deux dames en positions  $(j, D_j)$  et  $(k, D_k)$  sont sur la même diagonale Nord-Est si les deux paires de coordonnées respectent la même équation  $y = x + b$ , donc si les différences  $D_j - j$  et  $D_k - k$  sont égales. Par exemple, sur la figure 2, les dames en bleu sont en position (5, 4) et (8, 7). Les deux sont sur la droite  $y = x - 1$  puisque  $7 - 8 = -1 = 4 - 5$ .
- Les diagonales Sud-Est suivent le même raisonnement, mais pour la droite  $y = -x + b$ , donc si les sommes  $D_j + j$  et  $D_k + k$  sont égales. Encore sur la figure 2, les dames en rouge (2, 6) et (6, 2) sont sur la droite  $y = -x + 8$ .
- La condition pour qu'une permutation soit une solution est donc : toutes les sommes  $D_k + k$  doivent être distinctes pour tout  $1 \leq k \leq 8$ , tout comme toutes les différences  $D_k - k$ .

Exemples : Pour la figure 3 correspondant à la permutation (6,1,5,2,8,3,7,4), tous les nombres sont différents dans la différence (A) ainsi que dans la somme (B). C'est donc une solution.

6	1	5	2	8	3	7	4
-	1	2	3	4	5	6	7
A	5	-1	2	-2	3	-3	0
B	6	1	5	2	8	3	7
	+ 1	2	3	4	5	6	7
	7	3	8	6	13	9	14
							12

Cependant, pour l'exemple fautif de la figure 4 correspondant à la permutation (1,7,4,6,2,8,5,3), dans la différence (C) il y a deux « 7 », donc les dames (3,4) et (5,2) sont

## À l'intersection des maths et des échecs

D'où vient donc cette association entre le monde des échecs et celui des mathématiques dans l'imaginaire collectif ? À regarder l'histoire, on peut comprendre ! Seulement dans les seize champions du monde depuis 1862, on retrouve deux mathématiciens professionnels : Emanuel Lasker (champion de 1894 à 1921) et Machgielis (Max) Euwe (champion de 1935 à 1937), et un ingénieur et informaticien : Mikhaël Botvinnik (champion de 1948 à 1957, de 1958 à 1960 et de 1961 à 1963). Encore aujourd'hui, beaucoup de joueurs et de joueuses de très haut calibre ont étudié ou travaillé en mathématiques, par exemple les grands maîtres John Nunn, Thomas Ernst, Jonathan Speelman, Jonathan Mestel et Karsten Müller, pour en nommer quelques-uns, ont tous un doctorat en mathématiques. D'autre part, le jeu des échecs, avec ses règles entourant le mouvement des pièces sur son espace de 64 cases, a inspiré au fil des années plusieurs problèmes mathématiquement riches. Au dix-huitième siècle, Leonhard Euler (1707-1783) étudia à l'aide de la théorie des graphes le tour du cavalier, un célèbre problème où on demande à faire le tour de l'échiquier avec un cavalier en visitant chaque case une et une seule fois. Le mathématicien allemand Ernst Zemerlo (1871-1953) quant à lui utilisa les échecs pour poser les fondements de la théorie des jeux en définissant mathématiquement le concept de position gagnante en 1913.

Vers le milieu du vingtième siècle, le jeu inspira beaucoup de mathématiciens et de mathématiciennes à appliquer leur expertise pour créer des programmes pour jouer aux échecs. Alan Turing (1912-1954) conçut, en 1948 avec un autre collègue statisticien, David G. Champernowne (1912-2000), un programme pour jouer. Fait remarquable, les ordinateurs de l'époque n'avaient pas la puissance requise pour effectuer les calculs, qui devaient donc être faits à la main. Le jeu resta longtemps un laboratoire pour tester l'intelligence artificielle. Par exemple, quand la mathématicienne et informaticienne Barbara Liskov (1939-) développa des heuristiques de recherche optimale pour sa thèse de doctorat en 1968, elle les appliqua à un programme spécifiquement créé pour jouer les fins de parties d'échecs.

sur la même droite SE et dans la somme (D), il y a deux « 2 », donc les dames (4,6) et (6,8) sont sur la même droite NE. Ce n'est pas une solution.

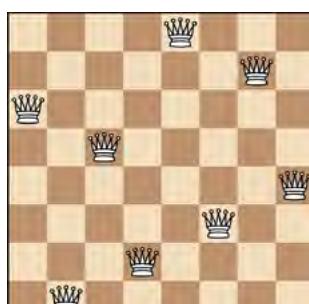


Figure 3:  
Une solution  
au problème  
des 8 dames.

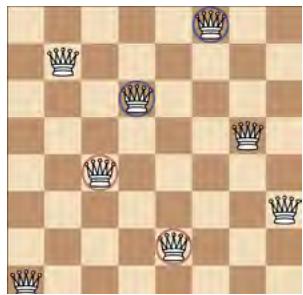


Figure 4: Presque solution (1, 7, 4, 6, 2, 8, 5, 3).

	1	7	4	6	2	8	5	3
+	1	2	3	4	5	6	7	8
C	2	9	7	10	7	14	12	11
	1	7	4	6	2	8	5	3
-	1	2	3	4	5	6	7	8
D	0	5	1	2	-3	2	-2	-5

- Après de longues vérifications, nous arrivons à 92 solutions que nous pouvons ensuite classer en 12 familles. Onze familles de huit solutions sont données par une solution de la famille ainsi que ses images sous les rotations de 90°, 180° et 270°, et sous les quatre réflexions par rapport aux axes vertical, horizontal et diagonaux. Une dernière famille de quatre solutions est donnée par une solution quelconque de la famille ainsi que ses images sous la rotation de 90° et sous les deux réflexions par rapport aux axes vertical et diagonal NE.

Il y a en tout

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$$

permutations des nombres de 1 à 8. Gauss était peut-être un peu optimiste quand il disait qu'il serait possible de tout vérifier en une heure ou deux... Mais on peut se douter que Gauss avait quelques astuces pour réduire les calculs !

## Un pas en arrière, deux en avant

Disons que vous vouliez relever le défi de Gauss et trouver à la main toutes les solutions du problème des huit dames. Comme lui, vous dénicheriez certainement très vite des façons de vous économiser du travail. Par exemple, il est clair que si une permutation commence par (1, 2, x, x, x, x, x), alors il n'y a pas de solution, peu importe les six autres dames, comme les deux premières dames sont sur la même diagonale. Déjà ainsi, vous auriez réduit de  $6! = 720$  le nombre de permutations à vérifier, pas mal !

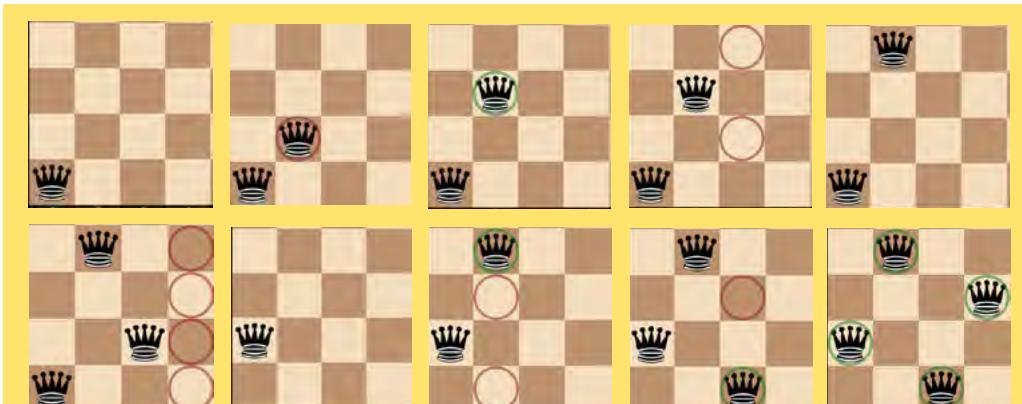


Figure 5: Algorithme de retour sur trace en images pour un échiquier 4 × 4.

- On place la première dame (1, x, x, x).
- La position (1, 2, x, x) est testée et est invalide.
- On passe donc à (1, 3, x, x).
- Aucune des possibilités (1, 3, 2, x) ou (1, 3, 4, x) ne fonctionne.
- On revient et on passe à (1, 4, x, x).
- Alors, (1, 4, 2, x) passe le test, mais (1, 4, 2, 3) non.
- On revient en arrière et il faut changer le premier choix : (2, x, x, x).
- On passe à (2, 4, x, x) après avoir testé (2, 1, x, x) et (2, 3, x, x).
- De là on arrive à la solution (2, 4, 1, 3) de la figure 7.
- L'algorithme continue pour (3, x, x, x) et trouvera rapidement l'autre solution (3, 1, 4, 2), qui est une rotation de 180 degrés de celle qu'on a trouvée. Ceci donne les deux seules positions possibles.

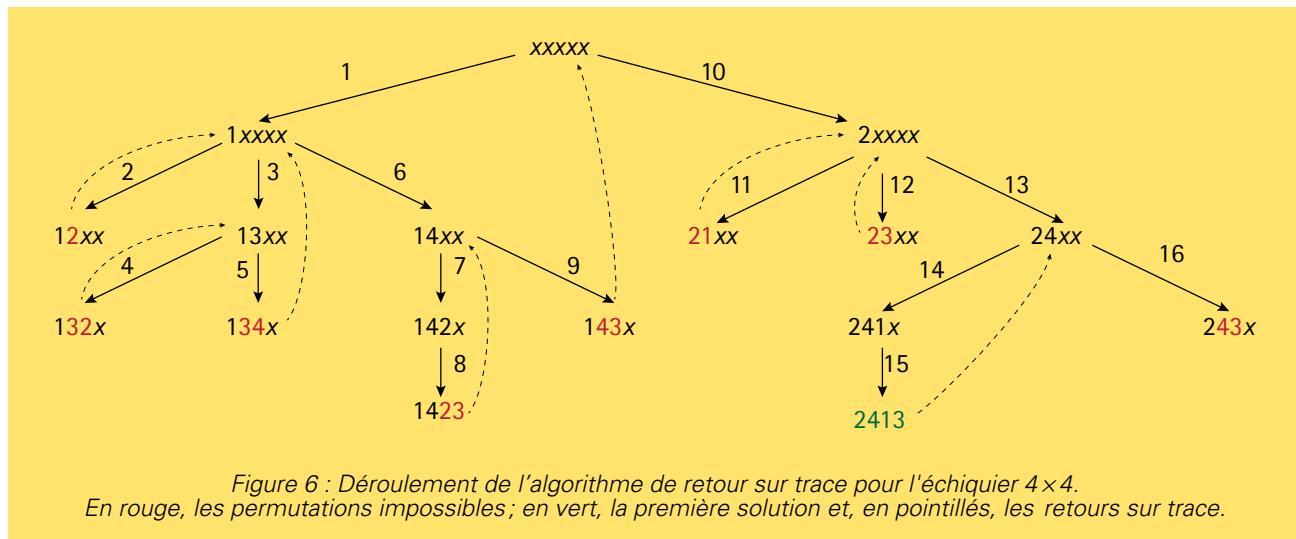


Figure 6 : Déroulement de l'algorithme de retour sur trace pour l'échiquier  $4 \times 4$ .

En rouge, les permutations impossibles ; en vert, la première solution et, en pointillés, les retours sur trace.

Cela est bien, mais comment trouver et appliquer systématiquement ces heuristiques, et surtout, s'assurer de trouver toutes les solutions sans en oublier ? C'est une question communément étudiée en informatique et une des façons de la résoudre est connue sous le nom d'*algorithme de retour sur trace*. Le problème des huit dames est le classique par excellence pour illustrer cet algorithme.

Dans celui-ci, l'idée de l'algorithme est d'utiliser le fait qu'il faille que les  $k$  premières dames ne se menacent pas sur l'échiquier partiel  $k \times n$ . En pratique, au lieu de générer toutes les permutations et d'ensuite les vérifier, on les génère plutôt en plaçant une dame à la fois. La vérification se fait alors à chaque placement, seulement pour la nouvelle dame ajoutée. Si la position partielle est incorrecte, on revient en arrière et on place différemment la nouvelle dame si possible, ou on retourne à la précédente sinon. De cette façon, on ne vérifie jamais deux permutations contenant la même erreur, tout en s'assurant de bien trouver toutes les solutions.

## Et pour plus grand ?

### Le problème des $n$ dames

*Combien de façons y a-t-il de placer  $n$  dames sur un échiquier  $n \times n$  sans qu'elles se menacent mutuellement ?*

Maintenant, pour paraphraser Gauss, il suffirait à une personne qui s'y connaît un peu en programmation de seulement une heure ou deux pour écrire un algorithme de retour sur trace permettant de trouver toutes les solutions pour un échiquier  $n \times n$ . Il y a un petit problème de taille cependant. Malgré les améliorations apportées par l'algorithme, il faut tout de même vérifier un nombre considérable de positions. En fait, on ne connaît le nombre exact de solutions du problème des  $n$  dames que jusqu'à  $n = 27$ . La complexité de l'algorithme est exponentielle.

On pourrait essayer de trouver de meilleurs algorithmes ou étudier plus profondément le problème pour trouver plus d'idées, mais on n'arrivera jamais à connaître la réponse pour tout  $n$ . Il a été prouvé par Hsiang, Hsu et Shieh au début des années 2000 qu'il n'est pas possible de trouver une « formule » qui donnerait le nombre de solutions pour tout  $n$ . En informatique, c'est une version modifiée du problème qui est étudiée. On y demande de trouver une seule solution, plutôt que de toutes les trouver. Plusieurs algorithmes très sophistiqués ont été originellement créés à cette fin. L'intérêt de tels problèmes est d'inspirer des méthodes applicables ensuite à d'autres contextes ; le résultat est moins intéressant que la manière d'y arriver.

Pour le problème des  $n$  dames, en fait, on sait depuis longtemps comment construire une solution, sans algorithme : déjà en 1873, le mathématicien amateur allemand Emil Pauls donna une construction pour  $n > 3$ .



Figure 7:  
Solution fondamentale pour un échiquier  $4 \times 4$ .



Figure 8:  
Solution de Pauls pour  $n = 5$ .

Elle n'est peut-être pas utile ailleurs que pour ce problème, mais elle est simple et élégante alors présentons-la. Elle dépend du reste de la division de  $n$  par 6.

- Pour  $n = 6k$  ou  $n = 6k+4$ . La permutation où la première moitié est constituée des nombres pairs et la deuxième des nombres impairs, soit

$$(2, 4, \dots, n, 1, 3, \dots, n-1),$$

est une solution. (La figure 7 pour  $n = 4$  en est un exemple.)

- $n = 6k+1$  ou  $n = 6k+5$ . On place une dame dans le coin supérieur gauche, et on prend la solution précédente dans l'échiquier  $n-1 \times n-1$ . (La figure 8 est un exemple pour  $n=5$ .)
- $n = 6k+2$ . C'est le cas le plus complexe, suivons-le sur la figure 9. Tout d'abord, aux deux extrémités, on place les dames

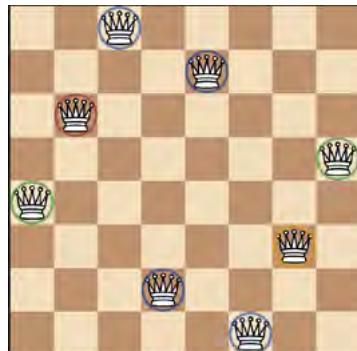


Figure 9: Solution de Pauls pour  $n = 8$ .

(en vert) en  $(1,4)$  et  $(n, n-3)$ . Ensuite au milieu (en bleu), on place  $(n/2-1, n)$ ,  $(n/2, 2)$ ,  $(n/2+1, n-1)$  et  $(n/2+2, 1)$ . Dans la partie de gauche (en rouge), on place ensuite une dame à  $(i, n-2(i-1))$  pour  $i$  de 2 à  $n/2-2$ . Dans la partie de droite (en jaune), les dames  $(j, 2n-2j+1)$  pour  $j$  de  $n/2+3$  à  $n-1$ .

## La complexité algorithmique

Un ordinateur a une grande puissance de calcul, mais elle n'est pas illimitée. Le domaine de l'informatique s'est intéressé à définir la complexité des algorithmes par le nombre d'opérations qu'ils doivent accomplir selon la taille de la tâche. On divise les algorithmes selon le type de croissance qu'ils ont. Les meilleurs croissent lentement.

Le problème des  $n$  dames contient plusieurs exemples de complexité. D'astucieux algorithmes ont été créés afin de trouver une solution au problème en temps polynomial. Trouver toutes les solutions avec l'algorithme de retour sur trace demande un temps exponentiel. La méthode de Gauss suit un temps factoriel. Ce n'est pas la pire, la méthode par force brute dans laquelle on choisit,

parmi les  $n^2$  cases de l'échiquier,  $n$  où placer les dames à un temps plus que factoriel. Pour celle-ci, le nombre de positions à vérifier est donné par la formule combinatoire :  $\binom{n^2}{n} = \frac{n^2!}{n!(n^2-n)!}$ .

S'il est possible de résoudre ainsi le problème des 8 dames ainsi sur un ordinateur de bureau, le problème des 20 dames demanderait de vérifier plus de  $2,78 \times 10^{33}$  positions, ce qui serait impossible au courant d'une vie humaine, même avec tous les superordinateurs de la planète !

Voici quelques comparaisons du nombre nécessaire de positions à vérifier selon la taille de l'échiquier pour les méthodes pour donner une idée de la croissance des différentes familles.

$N$	Brute	Gauss	Retour sur trace avec symétries	Trouver une solution (polynomial)
1	1	1	1	1
2	6	2	1	2
3	84	6	4	6
4	1 820	24	9	Environ 10
5	53 130	120	35	Environ 20
8	4 426 165 368	40 320	~1 096	Environ 50
10	17 310 309 456 440	3 628 800	~18 000	En moyenne 350
14	$\sim 8,71 \times 10^{20}$	87 178 291 200	~13 679 276	Environ 2 000
$n$	$n^2 / (n! (n^2 - n)!)$	$n!$	$a^n$ pour un certain $a$	Entre $n \log(n)$ et $n^3$

- $n=6k+3$ . On place la solution pour  $n-1=6k+2$  et on ajoute une dame au coin supérieur droit comme la solution précédente n'occupe pas la grande diagonale NE.

## Conclusion

Il y a encore beaucoup à dire autour de ce problème. Si nous avons jusque là considéré seulement le problème de placer le plus grand nombre de dames possible sur l'échiquier, un autre problème, appelé «domination des dames», demande le nombre minimal de dames requis pour couvrir tout l'échiquier, c'est-à-dire que toute case de l'échiquier est menacée ou occupée par une dame.

On s'est aussi intéressé à considérer des échiquiers rectangulaires, ou même des polygones à angles droits quelconques. On peut aussi changer le pavage pour des hexagones par exemple. Plus encore, qu'arriverait-il si on changeait l'échiquier dans sa nature profonde, en le plaçant sur un cylindre, ou sur un beigne par exemple? Un mathématicien hongrois, Georg Pólya (1887-1985), s'est intéressé précisément à cette dernière question et nous verrons dans un prochain épisode l'impact que ce nouvel échiquier a sur le problème.

## Toutes les solutions pour l'échiquier $8 \times 8$

Les onze premières solutions génèrent chacune sept autres solutions en appliquant les rotations de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  et  $270^\circ$ , et les quatre réflexions par rapport aux axes vertical, horizontal et diagonaux.



Solution 1:  
(6, 1, 5, 2, 8, 3, 7, 4)



Solution 2:  
(1, 7, 4, 6, 8, 2, 5, 3)



Solution 3:  
(1, 7, 5, 8, 2, 4, 6, 3)



Solution 4:  
(4, 1, 5, 8, 2, 7, 3, 6)



Solution 5:  
(5, 1, 8, 4, 2, 7, 3, 6)



Solution 6:  
(3, 1, 7, 5, 8, 2, 4, 6)



Solution 7:  
(5, 1, 4, 6, 8, 2, 7, 3)



Solution 8:  
(7, 1, 3, 8, 6, 4, 2, 5)



Solution 9:  
(5, 1, 8, 6, 3, 7, 2, 4)



Solution 10:  
(5, 7, 1, 4, 2, 8, 6, 3)



Solution 11:  
(6, 3, 1, 8, 4, 2, 7, 5)



Solution 12:  
(4, 6, 8, 2, 7, 1, 3, 5)

La dernière solution est égale à sa rotation de  $180^\circ$  et génère donc seulement trois autres solutions en appliquant la rotation de  $90^\circ$ , ainsi que les réflexions par rapport aux axes vertical et diagonal NE. Il y a donc onze familles de huit solutions et une de quatre, pour un total de 92 solutions.

# Le système de notation Elo

*Quand des joueurs ou des équipes s'affrontent, leurs chances de gagner dépendent de leur force respective. Le système de notation Elo est une méthode de calcul du niveau de compétence relatif des participants à un jeu à somme nulle qui permet d'évaluer l'issue probable d'un match.*

**Christian Genest**

Université McGill

**Julien Fageot**

École polytechnique fédérale de Lausanne

Du 24 novembre au 16 décembre 2021 s'est déroulé à Dubaï le match de championnat du monde d'échecs. Il opposait le Norvégien Magnus Carlsen, détenteur du titre depuis 2013, au Russe Ian Nepomniachtchi, vainqueur du tournoi des candidats. Une bourse de 1,2 millions d'euros (soit environ 1,75 millions de dollars canadiens) était destinée au vainqueur.

Le championnat était disputé au meilleur de 14 parties. Une victoire valait 1 point, une défaite 0 point et une partie nulle ½ point à chacun des deux concurrents. Au final, Carlsen l'a emporté 7½ à 3½, avec 4 gains, aucun revers et 7 nulles en 11 parties, les trois dernières n'étant pas nécessaires pour couronner le champion. Carlsen a ainsi obtenu son 5<sup>e</sup> titre mondial consécutif.

Ce résultat est conforme au système de notation Elo que la Fédération internationale des échecs (FIDE) utilise depuis 1970 pour coter les joueurs en fonction de leur niveau de compétence relatif. En effet, Carlsen était classé au départ premier joueur mondial avec une cote Elo de 2856, alors que son adversaire, meilleur joueur russe, était classé 5<sup>e</sup> avec une cote de 2782.

Lors d'une partie entre des joueurs  $A$  et  $B$  dont les cotes sont  $\theta_A$  et  $\theta_B$ , le score moyen de  $A$  prédit par la méthode Elo est

$$s_{AB} = \frac{1}{1 + 10^{-(\theta_A - \theta_B)/400}}, \quad (1)$$

sachant que  $A$  marquera un point s'il gagne, aucun s'il perd, et ½ point en cas de partie nulle. Par voie de conséquence, le score moyen de  $B$  est simplement  $s_{BA} = 1 - s_{AB}$ .

Au début du championnat, on avait  $\theta_A = 2856$  pour Carlsen et  $\theta_B = 2782$  pour Nepomniachtchi, d'où  $s_{AB} \approx 0,60$ , laissant présager

que le Norvégien prendrait éventuellement l'ascendant sur son adversaire puisque a priori, il marquerait en moyenne 8½ points en 14 parties et que le Russe n'en ferait que 5½.

## Fondement mathématique de la méthode

Pour déterminer le score moyen  $s_{AB}$  d'un joueur  $A$  contre un joueur  $B$ , une méthode naïve consisterait à prendre la moyenne des points marqués par le premier dans les parties l'opposant au second. Or, dans un jeu comme les échecs, la vaste majorité des centaines de milliers de joueurs ne se sont jamais rencontrés et même lorsqu'ils l'ont fait, le nombre de parties qu'ils ont disputées est presque toujours trop petit pour une estimation de qualité. Le système Elo pallie cette difficulté en s'appuyant sur un modèle mathématique permettant de classer les joueurs et, par là même, d'estimer le résultat escompté lors de leur affrontement.

L'expression (1) est inspirée d'un modèle conçu dans les années 1920 par le mathématicien allemand Ernst Zermelo et raffiné dans les années 1950 par le statisticien canadien Ralph Bradley et son collègue Milton Terry. Dans ces travaux et dans la suite de cet article, on suppose que toute partie fait un gagnant et un perdant. Il s'agit donc d'un modèle simplifié, en particulier aux échecs où la nulle est le résultat le plus souvent observé entre joueurs de l'élite mondiale.

Lorsque toute partie se solde par une victoire (1) ou une défaite (0), le score moyen s'interprète alors comme la probabilité que le joueur  $A$  l'emporte sur le joueur  $B$ , que l'on note  $p_{AB}$ . Le modèle de Bradley-Terry-Elo suppose que cette probabilité peut s'exprimer sous la forme

$$p_{AB} = G(\theta_A - \theta_B), \quad (2)$$

où  $G: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$  est une fonction continue et strictement croissante telle que  $G(-x) + G(x) = 1$  pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$  et  $G(x) \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Un cas particulier d'une telle fonction est illustré à la figure 1. On retrouve ainsi que

$p_{AB} + p_{BA} = G(\theta_A - \theta_B) + G(\theta_B - \theta_A) = 1$ , les nulles étant exclues. Puisque  $G(0) = 1/2$ , deux adversaires de même calibre ont ainsi la même probabilité a priori de l'emporter ; plus  $\theta_A - \theta_B$  augmente, plus une victoire de  $A$  sur  $B$  a des chances de se produire, jusqu'à devenir certaine à la limite.

Le choix le plus commun de  $G$  est la loi logistique de paramètre  $\beta > 0$ , définie en tout réel  $x \in \mathbb{R}$  par l'expression

$$L(x) = 1/(1 + e^{-\beta x}). \quad (3)$$

En prenant  $G = L$  et  $\beta = \ln(10)/400$ , on tombe sur la formule (1) employée par la FIDE. Dans ses travaux initiaux, le physicien hongro-américain Arpad Elo, qui a promu cette modélisation dans le monde des échecs, avait plutôt privilégié l'emploi d'une fonction de répartition normale centrée mais non réduite pour  $G$ , ce qui mène toutefois à une expression moins explicite pour  $s_{AB}$ .

### Propriétés du modèle probabiliste

Le modèle de Bradley-Terry-Elo est avantageux en ce qu'il permet de classer tous les concurrents à un jeu en fonction de leur force relative, même s'ils ne se sont jamais affrontés directement. On peut aussi s'en servir pour faire de la prévision, notamment au moyen de simulations.

Toutefois, le fait de supposer que la probabilité que  $A$  ait le meilleur sur  $B$  s'exprime sous la forme (2) n'est pas anodin. Comme on l'a déjà mentionné, il sous-entend tout d'abord qu'il n'y a pas de parties nulles. Si tel n'est pas le cas, des ajustements doivent être apportés au modèle.

L'expression (2) présuppose aussi que l'issue d'un affrontement entre  $A$  et  $B$  ne dépend que de leur force relative,  $\theta_A - \theta_B$ , mesurée sur une échelle linéaire. En particulier, le fait de jouer en premier (comme les blancs aux échecs), d'être plus reposé que son adversaire ou d'évoluer devant ses partisans n'influe pas sur le résultat (ce qui est contestable dans le sport professionnel).

De plus, il est important de comprendre que la cote Elo d'un joueur n'a aucune valeur intrinsèque : elle ne s'interprète qu'en fonction de celle de ses adversaires puisque l'on peut à loisir translater toutes les cotes par la même constante sans affecter les différences. De même, toutes les cotes peuvent être multipliées par une constante  $c > 0$  au choix sans changer les probabilités de gain, à condition de remplacer  $G(x)$  par  $G(x/c)$ .

Dans le cas de la formule (1), tracée à la figure 1 pour des valeurs de  $\theta_A - \theta_B$  entre  $-400$  et  $+400$ , le choix du paramètre  $\beta$  a été conçu pour qu'un écart de 100 points entre deux joueurs  $A$  et  $B$  donne au meilleur des deux environ 64% des chances de gain. Si l'écart est de 200 points, la probabilité passe à 75% et elle est d'environ 91% quand l'écart est de 400 points.

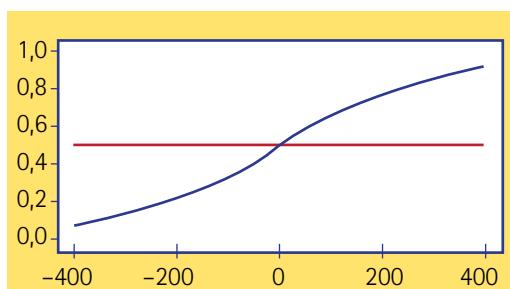


Figure 1. Graphe de la fonction de répartition logistique  $L(x)$  définie en (3) lorsque  $\beta = \ln(10)/400$  pour les valeurs de  $x$  variant entre  $-400$  et  $+400$ .



Aux échecs, la cote de la grande majorité des joueurs classés par la FIDE varie entre 1000 et 3000. La distribution des cotes est généralement asymétrique et varie aussi beaucoup de pays en pays. Par ailleurs, il existe plusieurs variantes du système et celui-ci a en outre été adapté à d'autres jeux et sports, notamment le go et le scrabble, divers jeux en ligne, mais aussi le football, le tennis et – on le verra plus loin – le hockey sur glace.

### Actualisation des cotes

La force relative des concurrents à un jeu fluctue bien sûr au fil du temps. Certains d'entre eux s'améliorent à mesure qu'ils prennent de l'expérience ; d'autres faiblissent avec l'âge ou, dans le cas des équipes sportives, en raison de blessures, de retraites ou d'échanges défavorables.

Pour tenir compte de cette dynamique, la méthode Elo propose une règle de mise à jour des cotes après chaque partie. Appelons  $\theta_{A,n}$  et  $\theta_{B,n}$  les cotes des joueurs A et B au temps n où ils s'apprêtent à s'affronter. Elo a proposé qu'à l'issue de la rencontre, la différence  $\theta_{A,n} - \theta_{B,n}$  de leurs forces relatives leur soit réattribuée proportionnellement en fonction du « degré de surprise » du résultat et d'un nombre réel positif k appelé coefficient de développement.

Ainsi, appelons s le score de la partie opposant A à B avec  $s = 1$  en cas de victoire de A,  $s = 0$  en cas de défaite aux mains de B et  $s = 1/2$  pour une nulle. La nouvelle cote Elo de A sera alors

$$\theta_{A,n+1} = \theta_{A,n} + k(s - s_{AB,n}),$$

où  $s_{AB,n}$  est le score attendu calculé selon la formule (1) à partir des cotes  $\theta_{A,n}$  et  $\theta_{B,n}$ . On vérifie aisément que cette cote augmente lorsque  $s = 1$ , et ce d'autant plus que  $s_{AB,n}$  est petit. Ainsi, une victoire de A contre un joueur de grande force est mieux récompensée. De même, la cote de A diminue en cas de défaite, soit quand  $s = 0$ . Enfin, la cote de A est rehaussée en cas de partie nulle à la condition que le joueur B ait une meilleure cote initiale, soit lorsque  $s_{AB,n} < 1/2$ .

Pour les joueurs professionnels, la FIDE a fixé  $k = 10$ , de sorte que durant le championnat du monde, chaque victoire de Carlsen lui a rapporté  $10 \times (1 - 0,60) \approx 4$  points sur l'échelle Elo, tandis que chaque partie nulle lui faisait perdre  $10 \times (0,5 - 0,60) \approx 1$  point. Après le championnat, sa cote est donc passée à

$$2856 + 4 \times 4,0 - 7 \times 1,0 = 2865,$$

tandis que celle de Nepomniachtchi a chuté de 2782 à 2773.

D'autres valeurs de  $k$  sont utilisées en fonction du niveau des joueurs. Par exemple, on prend  $k = 40$  pour les nouveaux joueurs jusqu'à leur trentième partie ou pour les jeunes joueurs avant leurs 18 ans, ce qui leur permet de progresser rapidement jusqu'à leur niveau réel. Puis  $k$  est fixé à 20 tant que leur classement reste inférieur à 2400 points.

### Propriétés de la méthode d'actualisation

Dans le cas particulier où toutes les parties font un vainqueur, on voit que de façon générale, la méthode de mise à jour proposée par Elo fait intervenir une fonction  $M: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  continue et strictement décroissante telle que  $M(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Cette fonction permet d'actualiser la cote des joueurs A et B comme suit :

Si A bat B, alors

$$\begin{aligned}\theta_{A,n+1} &= \theta_{A,n} + M(\theta_{A,n} - \theta_{B,n}), \\ \theta_{B,n+1} &= \theta_{B,n} - M(\theta_{A,n} - \theta_{B,n}).\end{aligned}$$

Si B bat A, alors

$$\begin{aligned}\theta_{A,n+1} &= \theta_{A,n} - M(\theta_{B,n} - \theta_{A,n}), \\ \theta_{B,n+1} &= \theta_{B,n} - M(\theta_{B,n} - \theta_{A,n}).\end{aligned}$$

Pour la méthode employée par la FIDE, on a  $M(x) = kL(-x)$  pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ .

Cette formule de mise à jour a une interprétation probabiliste heuristique. En effet, soient  $\theta_A$  et  $\theta_B$  les forces relatives réelles mais inconnues des joueurs A et B. Supposons que  $G(\theta_A - \theta_B)$  soit la véritable probabilité que A l'emporte sur B. La valeur espérée du changement de cote du joueur A au temps n est alors donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}&M(\theta_{A,n} - \theta_{B,n})G(\theta_A - \theta_B) \\ &- M(\theta_{B,n} - \theta_{A,n})G(\theta_B - \theta_A).\end{aligned}$$

Si la méthode d'actualisation est bonne, on s'attendrait à ce que cette espérance soit nulle si  $\theta_{A,n} - \theta_{B,n} = \theta_B - \theta_A$ . Sachant que la fonction  $M$  est décroissante, on souhaiterait aussi qu'à l'issue de la partie opposant  $A$  à  $B$ , la différence  $(\theta_{A,n+1} - \theta_{B,n+1}) - (\theta_A - \theta_B)$  soit plus près de zéro que  $(\theta_{A,n} - \theta_{B,n}) - (\theta_A - \theta_B)$ , qui était sa valeur avant leur affrontement.

Le même raisonnement vaut pour le joueur  $B$  et on peut vérifier que ces attentes seront comblées si les fonctions  $G$  et  $M$  satisfont, pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$M(x)/M(-x) = G(-x)/G(x). \quad (4)$$

Partant de cette équation d'équilibre, on peut aussi montrer, au prix de certains efforts, que pour une fonction  $M$  préétablie, la seule solution  $G$  possible est donnée, en tout  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$G(x) = \frac{M(-x)}{M(x) + M(-x)}.$$

La règle d'actualisation spécifiquement proposée par Elo sous-tend donc au départ une probabilité de gain logistique, c'est-à-dire le fait de prendre  $G = L$ .

Notons ici une subtilité : si on commence par fixer la fonction  $G$ , il existe une infinité de fonctions  $M$  obéissant à la relation

(4). En effet, quelle que soit la constante  $k > 0$ , on obtient déjà une solution en posant  $M(x) = k G(-x)$  pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ . Toutefois, on peut aussi prendre  $M(x) = k G(-x) S(|x|)$ , où  $S$  est une fonction telle que  $S(0) = 1$  et  $S(x) = S(-x)$  pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ . Il faut cependant s'assurer que le choix de  $S$  garantit la décroissance de la fonction  $M$ .

## Un résultat de convergence

Il est possible de faire un rapprochement entre la méthode d'actualisation de Elo et la méthode itérative du gradient stochastique employée en apprentissage automatique dans le cadre d'un modèle de régression logistique.

Imaginons qu'il y ait au total  $N$  joueurs et que le vecteur  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  de leurs forces respectives soit inconnu mais fixe. Imaginons aussi qu'au départ, on dispose de cotes approximatives pour ces concurrents, disons  $(\theta_{1,0}, \dots, \theta_{N,0})$ , et qu'une suite infinie de parties soient disputées, chacun d'elles opposant deux individus choisis uniformément au hasard. Enfin, imaginons qu'après chaque rencontre, le vecteur des forces respectives soit actualisé par la méthode Elo en modifiant ses composantes  $i$  et  $j$  correspondant aux deux joueurs qui se sont affrontés.



### Arpad Elo

Né le 25 août 1903 à Egyházaskeszö, en Autriche-Hongrie, Arpad Elo (Élö Árpád en hongrois) a émigré aux États-Unis en 1913 avec ses parents

d'origine modeste. Après avoir étudié la physique à l'Université de Chicago, il a enseigné à l'Université Marquette de Milwaukee, au Wisconsin.

Joueur d'échecs doué, Elo a remporté huit fois le championnat d'échecs de son état et a présidé la Fédération américaine des échecs de 1935 à 1937. Il est mondialement connu pour la mise au point du système de notation éponyme, qu'il a conçu dans les années 1950 après que des critiques aient été formulées à l'encontre d'un premier système développé par Kenneth Harkness.

La nouvelle approche a été adoptée par la Fédération internationale des échecs (FIDE) en 1970 et Elo a été fait membre honoraire de cet organisme en 1981.

Une première analyse détaillée du système de notation Elo (parfois écrit à tort en majuscules, ELO, comme s'il s'agissait d'un acronyme) a été proposée par Elo lui-même dans son ouvrage paru en 1978, *The Rating of Chessplayers, Past and Present*. Sa méthode fait aujourd'hui partie intégrante du monde des échecs. Elle sert à déterminer comment s'affrontent les joueurs dans les opens d'échecs du monde entier et chaque joueur suit scrupuleusement son évolution au classement qui mesure ses progrès et le positionne dans la hiérarchie échiquier.

Arpad Elo est décédé le 5 novembre 1992 (à 89 ans) à Brookfield (Wisconsin).

En supposant que les fonctions  $G$  et  $M$  obéissent aux conditions déjà mentionnées, et en supposant de plus que la première dérivée de  $M$  est bornée en valeur absolue, le probabiliste britannique David Aldous a démontré que la suite de vecteurs de terme  $(\theta_{1,n}, \dots, \theta_{N,n})$  atteindra éventuellement, quand  $n$  tendra vers l'infini, une distribution stationnaire. La question de savoir si cette loi stationnaire constitue ou non une bonne approximation de  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  reste théoriquement ouverte, bien qu'elle soit confirmée par de nombreuses simulations et les dizaines d'année d'expérience des joueurs d'échecs eux-mêmes dans l'usage du classement Elo. Cependant, bien qu'un résultat de convergence comme celui d'Aldous puisse inspirer confiance dans la méthode d'Elo, il est peu probable qu'il existe un vecteur  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  sous-jacent d'aptitudes réelles des concurrents. Après tout, les joueurs évoluent au fil du temps et les équipes sportives sont en constante transformation. Le vecteur des niveaux réels, s'il existe, est donc dynamique. Ce qui fait le succès de la méthode d'Elo, c'est son habileté à suivre cette évolution sans pour autant s'appuyer sur un modèle stochastique bien précis. C'est un fait avéré dans le domaine des échecs, mais aussi dans de nombreux autres contextes où, bien sûr, le choix du paramètre  $\beta$  et celui du coefficient de développement  $k$  doivent être adaptés.

### Le système Elo au hockey

Pour illustrer la méthode Elo et sa capacité prédictive dans un contexte plus familier aux lecteurs d'Accromath que celui des échecs, considérons brièvement son utilisation dans le domaine du hockey sur glace, où diverses adaptations ont été élaborées pour exploiter les résultats de tous les matchs réguliers et éliminatoires disputés dans la Ligue nationale de hockey (LNH) depuis sa création à Montréal en 1917. Ces données sont stockées sur le site [hockey-reference.com](http://hockey-reference.com).

À titre d'exemple, les analystes Ryan Best et Neil Paine du site Web américain *FiveThirtyEight* ont proposé d'attribuer un classement Elo qui tient compte des paramètres suivants :

- Chaque équipe se voit attribuer initialement une cote Elo de 1380.
- La règle de mise à jour utilise un facteur de développement de  $k = 6$ .
- On tient compte de « l'avantage de la glace » de sorte qu'à cotes égales, le club qui joue à domicile a 57,1 % de l'emporter, plutôt que 50 %.
- L'ajustement de cotes est majoré de 25 % lors des matchs éliminatoires.
- En début de saison, la cote de chaque équipe est révisée par la formule

$$0,7 \times \text{cote finale de la saison précédente} + 0,3 \times 1505.$$

Ainsi, la cote Elo moyenne de la ligue oscille bon an mal an autour de 1500.

En outre, le modèle de Best et Paine tient compte de la différence de buts de chaque partie et d'une dépendance temporelle (appelée autocorrélation) entre les matchs successifs.

La figure 2 montre l'évolution de la cote Elo des Canadiens de Montréal fondée sur le modèle de Best et Paine. Le pic de la courbe se situe dans la seconde moitié des années 1970, époque pendant laquelle l'équipe a remporté quatre Coupes Stanley d'affilée.

On observe d'autres sommets dans la seconde moitié des années 1940 et au milieu des années 1990, ainsi qu'un long plateau d'excellence à la fin des années 1950, alors que l'équipe a raflé cinq championnats

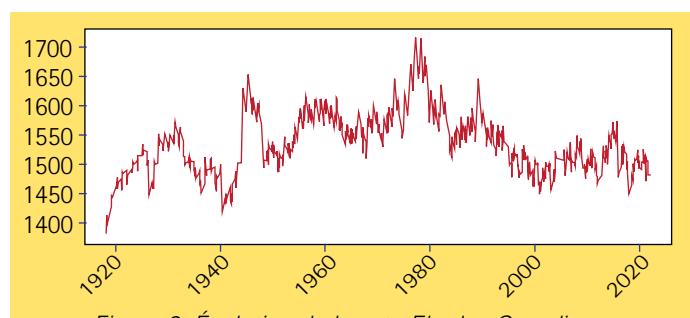


Figure 2. Évolution de la cote Elo des Canadiens de Montréal depuis la saison 1917-18.

consécutifs (1956 à 1960). En revanche, la cote Elo du club oscille autour de la moyenne depuis le début des années 2000. Sa participation à la finale de la Coupe Stanley en 2021 constitue donc un exploit qui a, hélas !, peu de chances de se reproduire dans un proche avenir.

Les cotes Elo étant comparatives, il est plus instructif encore de comparer leur évolution pour différents clubs. C'est ce qui est fait à la figure 3 pour les Canadiens de Montréal (en rouge), les Maple Leafs de Toronto (en bleu) et les cinq équipes qui ont remporté la Coupe Stanley entre 2008 et 2017, soit les Bruins de Boston (orange), les Red Wings de Détroit (vert), les Black Hawks de Chicago (noir), les Kings de Los Angeles (mauve) et les Penguins de Pittsburgh (jaune).

Dans la figure 3, le club champion est indiqué par un cercle. En 2018, la coupe a été remportée par les Capitals de Washington, dont la courbe Elo n'est pas incluse. Comme la figure le montre bien, ce n'est pas toujours la meilleure équipe qui l'emporte en finale<sup>1</sup>.

1. Voir l'article intitulé « Que le meilleur gagne ! » dans le numéro d'hiver/printemps 2020 (vol. 15, no 1) d'Accromath.

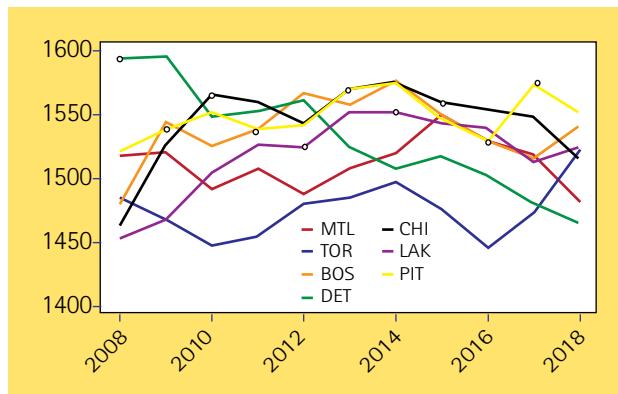


Figure 3. Évolution de la cote Elo de sept équipes de la LNH de 2008 à 2018; le récipiendaire annuel de la Coupe Stanley est indiqué par un cercle pour les années 2008 à 2017.

## Conclusion

Élément incontournable du monde des échecs mais s'appliquant au cas bien plus général d'un jeu à somme nulle entre deux joueurs, le système de notation Elo permet d'évaluer la force relative des concurrents même dans le cas où ceux-ci ne se sont jamais affrontés. Ses mises à jour successives au fur et à mesure des parties constituent une façon simple et efficace de capturer la dynamique d'évolution des joueurs ou des équipes, comme on l'a illustré dans le cas de la LNH.

## La cote Elo des joueurs d'échecs

Un débutant a aujourd'hui une cote Elo d'environ 1000, là où 2000 constitue le classement d'un bon joueur amateur. Les membres du groupe sélect des grands maîtres internationaux doivent avoir atteint au moins un Elo de 2500. Ce groupe coïncide plus ou moins avec les joueurs professionnels et compte aujourd'hui plus de 1000 joueurs dans le monde. À peine une quinzaine de joueurs sont parvenus jusqu'ici à dépasser la barre symbolique des 2800 Elo dans leur carrière.

Les logiciels d'échecs ont aussi une cote Elo. Le meilleur programme actuel, *Stockfish*, a un classement d'environ 3700, ce qui montre à quel point la machine surpasse l'humain aux échecs : la valeur de  $p_{AB}$  entre *Stockfish* (A) et Magnus Carlsen (B) avoisine 0,992... (soit une moyenne de 992 victoires et 8 défaites pour l'ordinateur en 1000 parties, sans match nul). C'est le même écart qu'entre Carlsen et un bon joueur amateur de 2000 Elo, un niveau atteint par 30 000 joueurs.

On peut aussi se demander si le classement Elo peut servir à comparer les joueurs de différentes époques. Par exemple, est-ce qu'un joueur évalué à 2700 Elo dans les années 1980 a un niveau comparable à un joueur de 2700 aujourd'hui ? La question est complexe, notamment car le jeu lui-même a évolué. Par exemple, les joueurs, des professionnels jusqu'aux amateurs les plus motivés, ont intégré les logiciels d'échecs dans leur pratique. Mais des phénomènes d'inflation ont aussi été observés qui sont induits par la façon même dont le calcul du Elo est effectué. Ainsi, au début des années 2000, le classement moyen du Top 50 a augmenté de quelques dizaines de points, ce qui fait qu'un classement de 2700 aurait vraisemblablement moins de valeur en 2010 qu'en l'an 2000.

**Christiane Rousseau**  
Université de Montréal

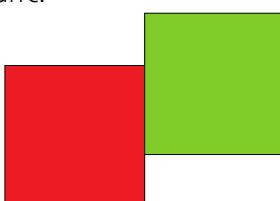
*Si on veut pavier le plan avec des carrés congruents, il est impossible de le faire sans que des carrés partagent une arête commune. En dimension 3, si on pave l'espace avec des cubes congruents, certains doivent partager une face commune. Ott-Heinrich Keller a conjecturé en 1930 que c'est le cas en toute dimension. Une annonce que la conjecture de Keller a été résolue a été faite en 2020<sup>1</sup> : la conjecture est vraie jusqu'en dimension 7 et fausse en dimension supérieure à 7.*

## La dimension 2

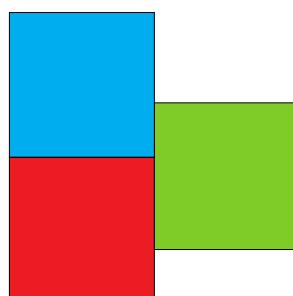
Essayons de pavier le plan avec des carrés congruents sans qu'ils partagent un côté.

Tentons de couvrir l'espace autour du coin supérieur droit du carré rouge.

On n'a pas beaucoup de choix en plaçant un premier carré.

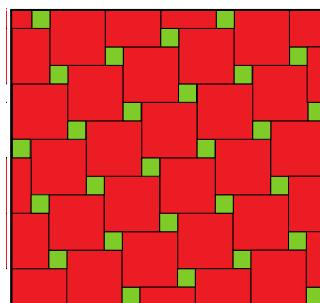


Et maintenant un deuxième carré va nécessairement partager une arête avec le carré rouge. On dira qu'il est *jumeau* du carré rouge.



Donc la conjecture est vraie en dimension 2. Remarquons que l'hypothèse que les carrés sont congruents est essentielle, car il existe des pavages pythagoriciens avec des carrés de différentes tailles et tels que deux carrés n'ont jamais de côtés communs.

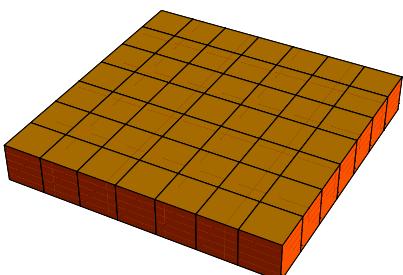
1. L'annonce a été faite lors de la conférence International Joint Conference on Automated Reasoning 2020 (IJCAR 2020) et le résultat publié dans les Comptes rendus de IJCAR 2020.



## Les dimensions supérieures

Commençons par regarder la dimension 3. Déjà, il y a une différence avec la dimension 2. Tous les carrés d'un pavage du plan ont leurs côtés parallèles à deux axes. Ce n'est plus le cas avec un pavage de l'espace par des cubes.

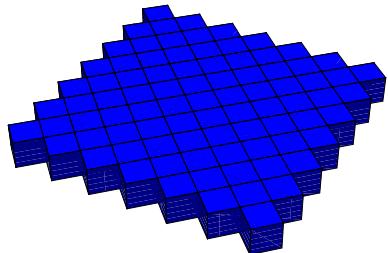
En effet, on peut effectuer un tel pavage par couches successives :



**PAVE**



Mais rien n'empêche d'effectuer une rotation dans le plan horizontal avant d'appliquer la deuxième couche, et une autre avant d'appliquer la troisième. On aurait alors des arêtes de cubes dans plus de trois directions.



Cet exemple est beaucoup plus profond qu'il n'en a l'air. Regardons le processus de construction. Chaque couche est un pavage d'un plan avec des carrés que l'on a ensuite épaissi pour les transformer en cubes. Si on avait pu pavier le plan avec des carrés, sans paires de carrés jumeaux, alors la construction avec une rotation entre les différentes couches nous aurait donné un pavage de l'espace avec des cubes ne partageant aucune face entière, donc sans paires de cubes jumeaux.

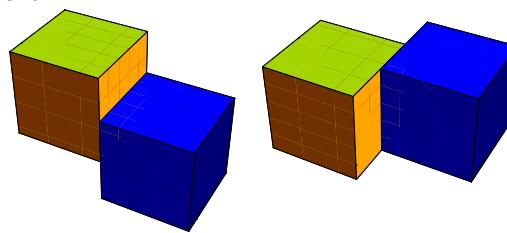
*Autrement dit, si la conjecture de Keller est fausse en dimension  $d$ , elle est fausse dans toutes les dimensions supérieures à  $d$ .*

Jeffrey Lagarias et Peter Schor ont montré en 1992 que la conjecture est fausse en dimension 10. On peut donc en conclure qu'elle est fausse en toute dimension supérieure à 10.

### Retour à la dimension 3

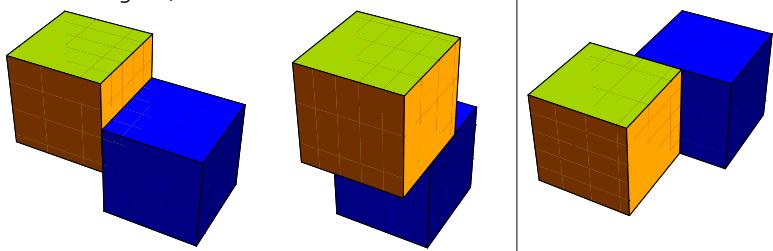
Il existe une autre différence avec la dimension 2. En dimension 2, on ne pouvait recouvrir le voisinage d'un coin d'un carré sans introduire un carré jumeau du carré initial. En dimension 3, on peut entourer un cube par 12 cubes ne partageant aucune face avec lui.

Jouer avec un jeu de cubes aide à se convaincre des arguments. Commençons par entourer le coin avant gauche supérieur du cube bleu. Il nous faudra trois cubes. Pour couvrir le côté gauche du coin, on a trois choix:



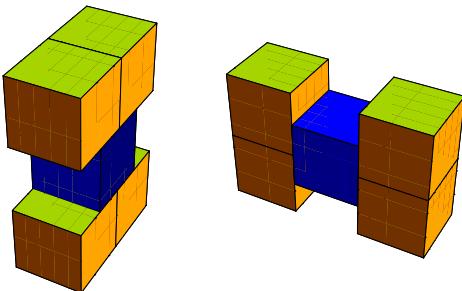
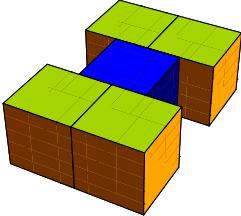
La figure de droite nous ramène au problème en dimension 2 pour les deux autres faces, dont on sait qu'il est impossible. Les deux autres cas sont symétriques l'un de l'autre. Donc, on se limite au premier.

Ceci force les choix suivants pour les deux autres cubes (pour que les figures soient claires, on ne mettra pas les trois cubes sur la même figure) :

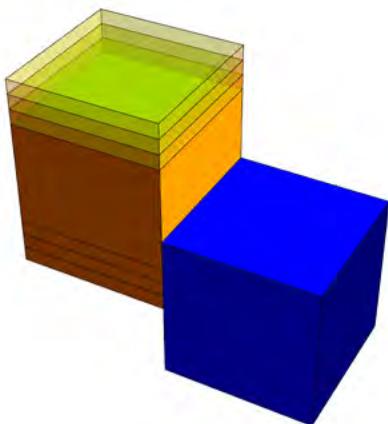




On peut continuer le processus et entourer le cube bleu de 12 cubes jaunes ne partageant aucune face avec lui. Voici les 12 cubes présentés quatre par quatre.



Mais, bien sûr, on a introduit des paires de cubes jumeaux. On n'a pas eu beaucoup de jeu pour couvrir le premier sommet. Le seul jeu possible aurait consisté à glisser un peu les trois cubes jaunes le long du cube bleu.



Même chose pour les trois cubes autour du sommet opposé. Ensuite, on n'aurait plus eu aucun choix pour les six derniers cubes : le seul jeu est donc de faire glisser les paires de cubes jaunes.

Ceci assure que la conjecture de Keller est vraie en dimension 3.

## Les dimensions 4, 5 et 6

En 1940, Oskar Perron a montré la conjecture en dimensions 4, 5 et 6. Ce qu'il a montré est que, quelle que soit la manière dont on essaie de pavier l'espace, il existera toujours une paire d'hypercubes jumeaux.

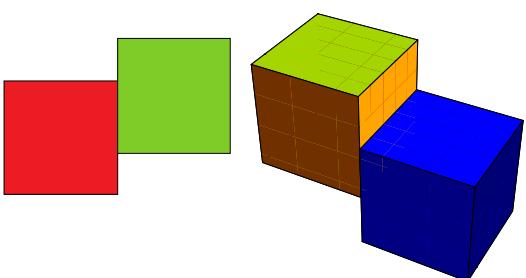
## Invalider la conjecture en grandes dimensions

Remarquons qu'invalider la conjecture en dimension  $d$  revient à montrer l'existence d'un pavage de l'espace sans hypercubes jumeaux.

Pour pouvoir invalider la conjecture dans certaines dimensions, on y va par simplifications successives du problème. Une première simplification est la suivante : si la conjecture est fausse en dimension  $d$ , alors il existe un pavage sans hypercubes jumeaux dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées, ce qui n'est pas trivial au vu de l'exemple des couches successives en dimension 3.

Pour la deuxième simplification, on fait l'hypothèse que les arêtes des hypercubes ont longueur 2 (ce choix jouera un rôle plus bas). Sándor Szabó a montré en 1988 que si la conjecture est fausse en dimension  $d$ , alors il existe un pavage sans hypercubes jumeaux qui est périodique de période 4 dans chacune des  $d$  directions des axes. Cette simplification est très loin d'être triviale. Mais c'est une percée très significative : elle ouvre la voie à une solution par ordinateur.

Regardons encore une fois nos exemples en dimension 2 et en dimension 3 :



Dans le premier cas nous aurions pu glisser le carré vert le long du carré rouge, et dans le deuxième cas le cube jaune le long du cube bleu. Donc, le carré vert ou le cube jaune auraient pu occuper une infinité de positions. La troisième simplification pour infirmer la conjecture consiste à remarquer qu'il suffit de considérer des pavages dans lesquels le chevauchement des faces des hypercubes doit être de la forme  $1/2$  fois la longueur de l'arête. Avec cette troisième simplification, on s'est vraiment ramené à un problème fini.

Le génie de Sándor Szabó, dans un article conjoint avec Kerestzély Corrádi en 1990, a ensuite été de transformer ce problème en un problème de théorie des graphes. Ici encore, nous allons considérer des hypercubes d'arête 2. En effet, pour infirmer la conjecture, il suffit de trouver un pavage sans hypercubes jumeaux qui soit périodique de période 4 dans la direction de chaque axe de coordonnées. On peut alors supposer que les centres des hypercubes du pavage sont des points de coordonnées entières.

$$(x_1, \dots, x_d) \in \{0, 1, 2, 3\}^d.$$

En effet, à translation près on peut supposer qu'on aura un hypercube centré en  $(0, \dots, 0)$  d'arête 2. Alors, ses faces sont dans les hyperplans  $x_i = \pm 1$ . Donc, un deuxième hypercube centré en  $(y_1, \dots, y_d)$  qui partage une portion de face avec cet hypercube doit avoir une face dans un des hyperplans  $x_j = \pm 1$ , et par suite son centre doit être dans l'hyperplan  $x_j = \pm 2$ : on a  $y_j = \pm 2$ .

Pour les autres coordonnées du centre du deuxième hypercube on a deux choix:

1.  $y_i = 0$  pour tout  $i \neq j$ . Alors ce deuxième hypercube est jumeau et partage avec le premier la face dans l'hyperplan  $x_j = \pm 1$ .
2.  $y_i \in [-2, 2]$  pour tout  $i \neq j$  et, pour au moins un  $i$ ,  $y_i \neq \pm 2$  (pour éviter que les hypercubes ne se touchent par le coin). Comme on se limite à des chevauchements de demi-arêtes, alors on a  $y_i \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ .

Alors, pourquoi permet-on des valeurs  $y_i = 3$ ? C'est parce qu'on cherche un pavage périodique de période 4 dans la direction de chacun des axes. Donc, si on a un hypercube centré en  $(0, \dots, 0)$ , on aura aussi des hypercubes du pavage centrés en tous les points  $(x_1, \dots, x_d) \in \{0, 4\}^d$ .

## La définition du graphe

### Sommets :

Les points de  $\{0, 1, 2, 3\}^d$  seront les sommets du graphe.

### Arêtes :

On aura une arête entre deux sommets  $(x_1, \dots, x_d)$  et  $(y_1, \dots, y_d)$  si il existe  $i$  tel que  $x_i - y_i = \pm 2$  et il existe  $j \neq i$  tel que  $x_j \neq y_j$ .

Au vu de ce qui précède deux sommets  $(x_1, \dots, x_d)$  et  $(y_1, \dots, y_d)$  sont joints par une arête dans

le graphe si

- soit les hypercubes associés ou leurs translatés partagent une portion de face sans être jumeaux,
- ou encore les hypercubes associés ou leurs translatés se touchent par le coin.

Pour que la conjecture de Keller soit fausse en dimension  $d$  il faut qu'il y ait suffisamment d'hypercubes qui se touchent sans être jumeaux.

Le graphe ainsi défini est appelé graphe de Keller. Comme on est en dimension  $d$  et qu'on a considéré des chevauchements de  $1/2$  arête, on le notera  $G_{d,2}$ .

L'affirmation (non triviale) de Corrádi et Szabó est que, si la conjecture de Keller est fausse, alors on peut trouver  $2^d$  sommets du graphe dans  $\{0, 1, 2, 3\}^d$ , telle que chaque paire de ces sommets partage une arête. Les  $2^d$  hypercubes formeront le bloc répété périodiquement pour paver l'espace.

Dans le langage de la théorie des graphes,

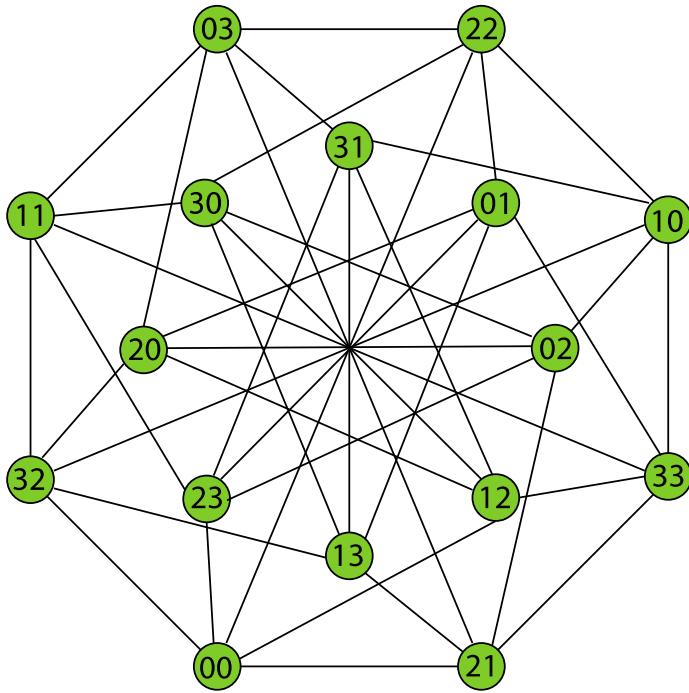
*la conjecture de Keller en dimension  $d$  est fausse si il existe un sous-graphe à  $2^d$  sommets, dont tous les sommets sont deux à deux joints par une arête, c'est-à-dire que le sous-graphe est complet. Un tel sous-graphe est appelé une clique.*

Réfléchissons un peu à cette affirmation. Supposons qu'il existe une clique de taille  $2^d$ .

Alors les  $2^d$  hypercubes associés et leurs translatés ne se chevauchent pas. Donc, à eux tous, ils occupent un volume de  $4^d$ . Et les translatés de ce volume ne se chevauchent pas non plus. Donc, en prenant leurs translatés par des multiples de 4 le long de chaque axe, on va remplir tout l'espace. De plus, comme il y a des arêtes entre tous les sommets, ceci exclut toute paire d'hypercubes jumeaux parmi les  $2^d$  hypercubes et leurs translatés. On a donc construit un contre-exemple à la conjecture de Keller.

Regardons le cas  $d = 2$ . Le graphe  $G_{2,2}$  a 16 sommets :

$$00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, \dots, 33.$$



Dans ce graphe, chaque sommet est relié à cinq autres sommets.

Mais il n'y a même pas de sous-graphe complet à trois sommets. Donc, la taille maximum d'une clique est 2. Le critère de Corrádi-Szabó n'est pas vérifié. Ceci reflète le fait qu'il n'est pas possible de disposer trois carrés dans le plan de telle manière que chaque paire de carrés partage une demie arête sans être jumeaux. Cela ne suffit pas à confirmer la conjecture car le critère n'est pas un « si et seulement si » mais, ici, on sait que la conjecture est vraie.

C'est ce critère de Corrádi-Szabó qui a été utilisé par Lagarias et Shor en 1990 dans leur preuve que la conjecture est fausse en dimension 10. À l'aide de l'ordinateur, ils ont pu montrer l'existence d'une clique de taille  $2^{10} = 1024$ . La même méthode a été utilisée par John Mackey en 2002 : il a exhibé une clique de taille  $2^8 = 256$ , ce qui garantit que la conjecture est fausse en dimension 8 et, par suite, en dimension 9.

Il ne restait donc que la dimension 7. On aurait pu penser que la dimension 7 était plus facile que les dimensions 8 et 10, puisque le graphe a beaucoup moins de sommets. Mais, en dimensions 8 et 10, le graphe a beaucoup de symétries qui ont été exploitées dans la recherche d'une clique de taille  $2^d$ , lesquelles symétries sont inexistantes en dimension 7, puisque 7 est premier.

## La dimension 7

Cette dernière dimension a résisté jusqu'à l'automne 2020. Le critère de Corrádi-Szabó énoncé plus haut ne fonctionne que pour infirmer la conjecture en une dimension  $d$ . Or la conjecture de Keller se révélera vérifiée en dimension 7. Il fallait donc une nouvelle idée pour l'attaquer. Celle-ci sera une généralisation de la précédente.

Rappelons que pour infirmer la conjecture il suffit de considérer des pavages dans lesquels le chevauchement des faces des hypercubes doit être de la forme  $1/2$  fois la longueur de l'arête. Pour confirmer la conjecture en dimension  $d$ , il suffira de se limiter à des pavages dans lesquels le chevauchement des côtés des carrés ou des faces des hypercubes doit être de la forme  $p/q$  fois la longueur de l'arête, pour un certain entier  $q$ . Dans le cas de la dimension 7, il a été montré en 2017 par Andrzej Kisielewicz que l'on peut prendre pour entier  $q = 3$ . Pour traiter ce cas et travailler avec des nombres entiers, nous allons donc considérer des hypercubes d'arête 3 et travailler avec la période 6. On peut alors supposer que les centres des hypercubes du pavage sont des points de coordonnées entières et, comme on cherche des pavages périodiques de période 6 dans la direction de chaque axe, on prendra des centres d'hypercubes aux points

$$(x_1, \dots, x_d) \in \{0, 1, \dots, 5\}^7.$$

Comme précédemment les points de  $\{0, 1, \dots, 5\}^7$  seront les sommets du graphe de Keller associé qui sera désigné  $G_{7,3}$  pour mettre en évidence la dimension  $d = 7$  et l'entier  $q = 3$ . Et on aura une arête entre deux sommets du graphe chaque fois que les hypercubes correspondants ou leurs translatés partagent une portion de face sans être jumeaux ou encore se touchent par le coin.

Un résultat d'Andrzej Kisielewicz et Małgorzata Łysakowska affirme que la conjecture de Keller est vraie en dimension 7 s'il n'existe pas de clique de taille  $2^7$  dans le graphe de Keller  $G_{7,3}$ . C'est la non-existence d'une telle clique qui vient d'être annoncée, fin 2020, par Joshua Brakensiek, Marijn Heule, John Mackey et David Narváez, et qui terminerait, après

90 ans, la preuve de la conjecture de Keller. Cette démonstration est une preuve assistée par ordinateur. Remarquons qu'elle est beaucoup plus difficile à vérifier que les preuves en dimensions 8 et 10. En effet, prenons la dimension 8. La preuve que la conjecture est fausse revient à montrer l'existence d'une clique de taille  $2^8 = 256$  dans le graphe  $G_{8,2}$ . Pour cela, il suffit de donner les 256 sommets de la clique et de vérifier que ces sommets sont deux à deux liés par une arête. Et en dimension 10, la clique a  $2^{10} = 1024$  sommets, donc 523 776 paires de sommets, ce qui n'est pas encore énorme pour un ordinateur. Par

contre, en dimension 7, comme la conjecture est vraie, il faut montrer qu'il n'existe aucune clique de taille  $2^7 = 128$  dans le graphe  $G_{7,3}$  qui a  $6^7 = 279\,936$  sommets. Cela fait

$$\binom{279\,936}{128}$$

sous-ensembles de sommets de taille 128 dont il faut vérifier s'ils forment une clique.

Les idées de la méthode utilisée par Brabensiek-Heule-Mackey-Naváez pour simplifier cette vérification apparaissent dans l'encadré.

## La conjecture de Keller est vraie en dimension 7

Les idées de la preuve font appel à la logique propositionnelle. Dans cette logique, on considère des variables propositionnelles  $p_i$  qui peuvent prendre les valeurs VRAI (V) et FAUX (F). On construit ensuite des formules plus compliquées appelées *formules propositionnelles* à l'aide des connecteurs logiques OU ( $\vee$ ), ET ( $\wedge$ ), NON ( $\neg$ ), IMPLIQUE ( $\rightarrow$ ). On sait que toute formule qui n'est pas toujours vraie quand on assigne des valeurs de vérité aux variables propositionnelles peut être transformée sous la forme d'une conjonction de disjonctions de variables propositionnelles ou leur négation, par exemple :

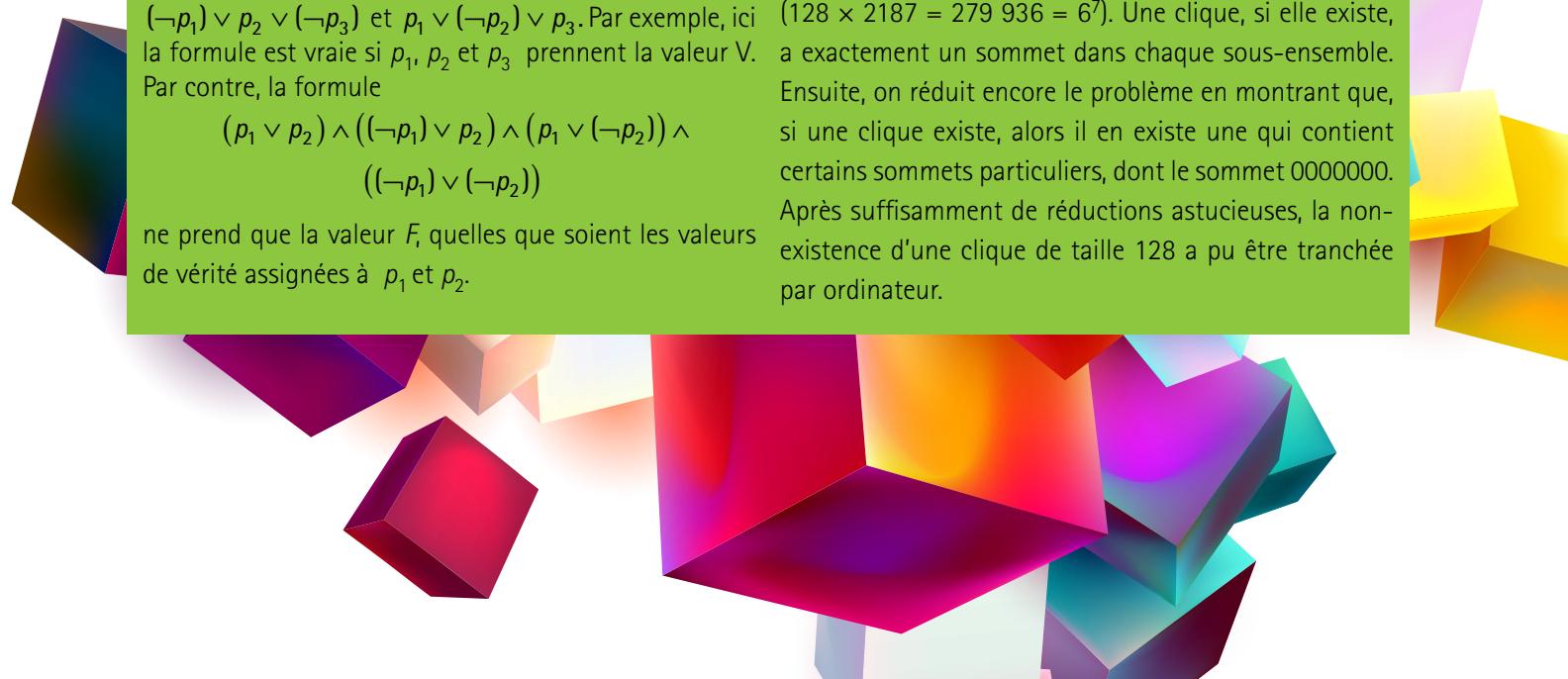
$$(p_1 \vee p_2 \vee (\neg p_3)) \wedge ((\neg p_1) \vee p_2 \vee (\neg p_3)) \wedge (p_1 \vee (\neg p_2) \vee p_3).$$

Pour vérifier si on peut satisfaire à la formule, on assigne des valeurs de vérité V ou F à  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  et on cherche s'il existe qui donnent la valeur V à toute la formule. Une telle assignation de valeurs de vérité doit donc donner la valeur V à chacun des trois morceaux  $p_1 \vee p_2 \vee (\neg p_3)$ ,  $(\neg p_1) \vee p_2 \vee (\neg p_3)$  et  $p_1 \vee (\neg p_2) \vee p_3$ . Par exemple, ici la formule est vraie si  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  prennent la valeur V. Par contre, la formule

$$(p_1 \vee p_2) \wedge ((\neg p_1) \vee p_2) \wedge (p_1 \vee (\neg p_2)) \wedge ((\neg p_1) \vee (\neg p_2))$$

ne prend que la valeur F, quelles que soient les valeurs de vérité assignées à  $p_1$  et  $p_2$ .

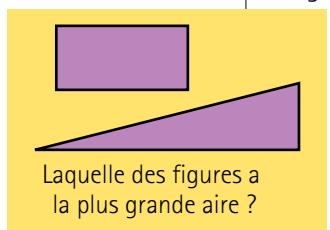
L'idée centrale de la preuve est de construire une formule propositionnelle à laquelle des valeurs de vérité peuvent satisfaire s'il existe une clique de dimension 128 dans  $G_{7,3}$  et de montrer que cette formule ne prend jamais la valeur V, pour aucune assignation de valeurs de vérité aux variables propositionnelles. Ceci demande un bon choix de variables propositionnelles qui prennent les valeurs V ou F selon des propriétés d'un sous-ensemble de 128 sommets du graphe. Vérifier si une formule propositionnelle donnée comme conjonction de disjonctions peut prendre la valeur V est un problème très étudié en informatique théorique. Par contre, c'est un calcul qui peut être très long et gourmand en mémoire. Pour pouvoir conclure, Brabensiek, Heule, Mackey et Narváez ont dû commencer par simplifier le problème. Ainsi, il existe une partition des sommets du graphe en 128 sous-ensembles ayant chacun 2187 sommets ( $128 \times 2187 = 279\,936 = 6^7$ ). Une clique, si elle existe, a exactement un sommet dans chaque sous-ensemble. Ensuite, on réduit encore le problème en montrant que, si une clique existe, alors il en existe une qui contient certains sommets particuliers, dont le sommet 0000000. Après suffisamment de réductions astucieuses, la non-existence d'une clique de taille 128 a pu être tranchée par ordinateur.



# Comparaison d'aires : 1. la règle et le compas

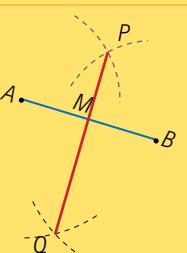
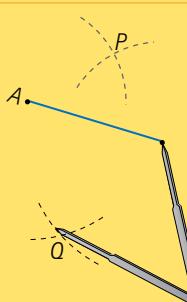
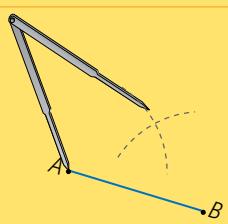
*La règle non graduée et le compas figuraient parmi les instruments géométriques utilisés par les Grecs de l'Antiquité pour comparer les aires de figures. Comment procédaient-ils au juste ?*

**André Ross**  
Professeur retraité



On fait remonter les origines de la géométrie grecque à Thalès de Milet (-624 à -548). Cependant, le principal texte de cette époque qui nous est parvenu est les *Éléments d'Euclide* (vers -325 à -265). Au V<sup>e</sup> siècle avant notre ère, la règle et le compas ont été adoptés comme instruments pour comparer l'aire de deux figures géométriques.

## Exploration à la règle et au compas



La comparaison d'aires géométriques de formes différentes pouvait s'effectuer en construisant pour chacune des figures un carré ayant même aire. Le plus grand carré permettait de déterminer la plus grande aire.

Il est à noter que la construction à la règle est introduite dans la démarche mathématique par le truchement du premier postulat d'Euclide :

*«qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point»,*

alors que la construction au compas correspond au troisième postulat :

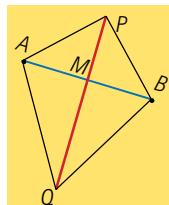
*«et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle<sup>1</sup>».*

Sur cette base axiomatique proposée par Euclide, la géométrie élémentaire s'est cristallisée comme étant la géométrie des droites et des cercles.

## Notions préliminaires

Faisons un peu d'exploration à la règle et au compas, en considérant un segment de droite  $AB$ . En prenant successivement les points  $A$  et  $B$  comme centres et en conservant la même ouverture au compas, on trace deux arcs de cercles qui se coupent en  $P$ . En modifiant l'ouverture du compas et en prenant à nouveau les points  $A$  et  $B$  successivement comme centres, on trace des arcs de cercle qui se coupent en  $Q$ . À l'aide de la règle, traçons maintenant le segment de droite  $PQ$ <sup>2</sup>. Ce segment de droite coupe le segment  $AB$  en un point  $M$ . Que peut-on dire de plus sur cette droite et ce point ?

Pour répondre à cette question, traçons les segments de droite joignant les points  $P$  et  $Q$  aux extrémités du segment  $AB$ .



Les côtés  $AP$  et  $BP$  des triangles  $PAQ$  et  $PBQ$  sont congruents par construction au compas. Il en est de même pour les côtés  $AQ$  et  $BQ$ . De plus, le côté  $PQ$  est commun aux deux triangles. Ceux-ci sont donc congruents, en vertu du (célèbre) cas de congruence de triangles CCC (côté-côté-côté)<sup>3</sup>.

2. On remarque que le premier postulat des *Éléments*, qui revient à l'idée que par deux points passe une et une seule droite, est indispensable pour pouvoir conclure que la droite est bien celle cherchée.
3. Par exploration à la règle et au compas, on « voit » qu'on ne peut construire qu'un seul triangle à l'aide de trois longueurs données. Cette observation mène au théorème suivant : deux triangles qui ont leur trois côtés homologues congruents chacun à chacun sont congruents.

La démonstration donnée par Euclide (*propositions 7 et 8 du Livre I*) consiste à superposer les deux triangles l'un sur l'autre et à montrer que les côtés et les sommets s'ajustent les uns sur les autres. Une telle approche prend appui sur la notion commune 7 d'Euclide :

*Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles* (*ibid*, p. 178).

1. Voir Bernard Vitrac, *Euclide, Les Éléments*, vol. 1. Introduction générale, Livres I à IV. PUF, 1990, pp. 167, 169.

Il en découle que les angles  $APM$  et  $BPM$  sont congrus comme angles homologues des triangles  $PAQ$  et  $PBQ$ . Mais ce sont également des angles homologues dans les triangles  $APM$  et  $BPM$ . De plus, dans ces triangles, les côtés  $AP$  et  $BP$  sont congrus par construction et le côté  $PM$  est commun aux deux triangles. Par conséquent, les triangles  $APM$  et  $BPM$  sont congrus, en raison du cas de congruence CAC (côté-angle-côté)<sup>4</sup>. Les angles  $AMP$  et  $BMP$  sont donc congrus, comme angles homologues dans ces deux triangles. De plus, puisque leurs côtés extérieurs forment une droite – la droite  $AMB$  –, ce sont deux angles droits. On observe enfin que les segments  $AM$  et  $BM$  sont congrus.

On en conclut que la droite  $PQ$  est perpendiculaire au segment  $AB$  et qu'elle coupe ce segment en son point milieu  $M$ . La droite  $PQ$  est donc ce qu'on appelle la *médiatrice* du segment  $AB$ . On peut de plus montrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment si et seulement si elle est le lieu géométrique des points équidistants des extrémités de ce segment (voir la *Section problèmes*).

En pratique, la construction à la règle et au compas de la médiatrice d'un segment peut se faire de sorte que le quadrilatère  $APBQ$  soit un losange (voir la *Section problèmes*).

On peut adapter la procédure de construction de la médiatrice d'un segment de droite de sorte à effectuer les constructions suivantes (voir la *Section problèmes*) :

1. Abaisser une perpendiculaire à une droite à partir d'un point  $P$  hors de cette droite.
2. Élever une perpendiculaire à une droite à partir d'un point de cette droite.

Ces quelques exemples illustrent qu'en utilisant la règle et le compas, les Grecs de l'Antiquité ont tout d'abord identifié intuitivement des propriétés des figures, pour ensuite les démontrer et obtenir les théorèmes présentés par Euclide.

Voyons maintenant comment ces constructions interviennent dans la comparaison d'aires.

4. Proposition I.4 des *Éléments d'Euclide*.

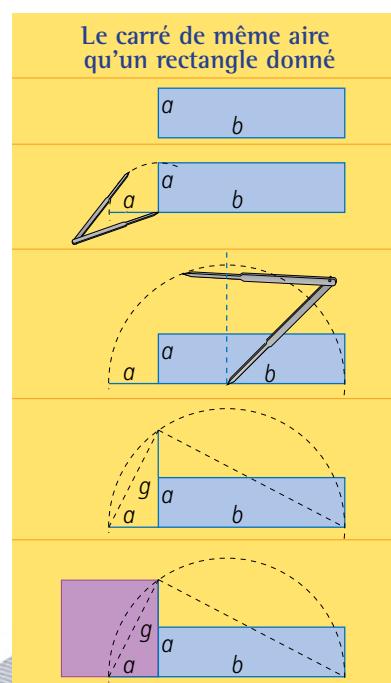
## De la quadrature

Un problème de quadrature consiste à construire, à la règle et au compas, un carré dont l'aire est la même que celle d'une figure géométrique donnée. Le plus simple des problèmes de quadrature consiste à construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle donné. Voici comment procéder.

À l'aide du compas, on reporte les longueurs  $a$  et  $b$  bout à bout sur une même droite. On détermine ensuite le point milieu du segment de longueur  $a + b$ . C'est l'intersection de la médiatrice et du segment de droite.

En prenant un compas dont l'ouverture est la distance de ce point milieu à l'une des extrémités du segment de droite, on trace le demi-cercle dont le diamètre est de longueur  $a + b$ . On élève alors la perpendiculaire au point de jonction des segments de longueurs  $a$  et  $b$ .

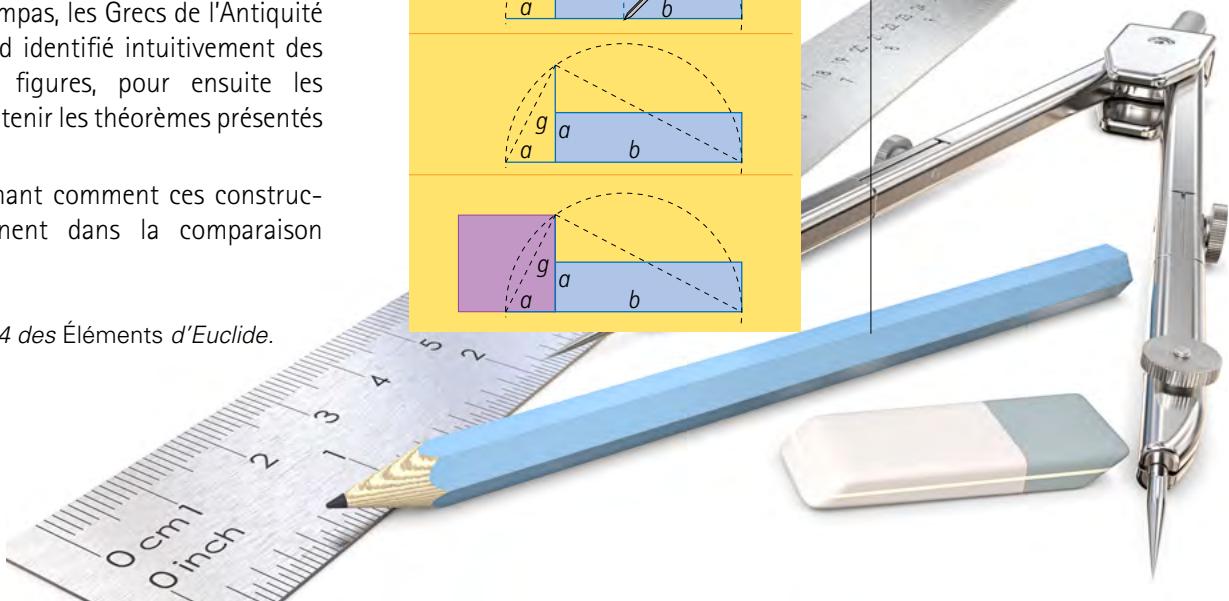
En joignant le point d'intersection du demi-cercle et de la perpendiculaire, on forme un triangle rectangle dont le diamètre,  $a + b$ , est l'hypoténuse.



## La quadrature du cercle

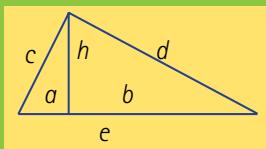
L'appellation *quadrature du cercle* est apparue à la fin du XVI<sup>e</sup> siècle. Elle consiste à construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle donné. Ferdinand von Lindemann a démontré en 1882 que cette construction est impossible à exécuter à la règle et au compas, parce que  $\pi$  est un nombre transcendant. L'expression a alors pris un sens nouveau : « résoudre la quadrature du cercle » signifie *perdre son temps ou s'attaquer à un problème insoluble*.

La quadrature du cercle fait partie des trois *grands problèmes de l'Antiquité*, avec la trisection de l'angle et la duplication du cube.



## La hauteur comme moyenne proportionnelle

Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux triangles semblables au premier.



On peut donc écrire

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{c}{d}.$$

De la première égalité, on tire :

$$h^2 = ab.$$

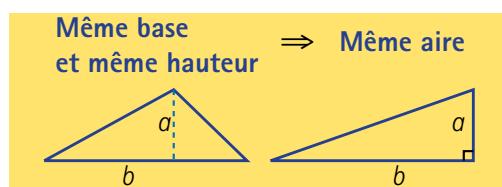
Puisque tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle<sup>5</sup> et que, dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse (voir encadré), on a donc  $h^2 = ab$ .

C'est donc dire que  $h$  est la longueur du côté du carré dont l'aire est égale à celle du rectangle de côtés  $a$  et  $b$ .

À noter que par cette même construction, on détermine la moyenne proportionnelle de  $a$  et  $b$ , de même que la racine carrée du produit  $ab$ .

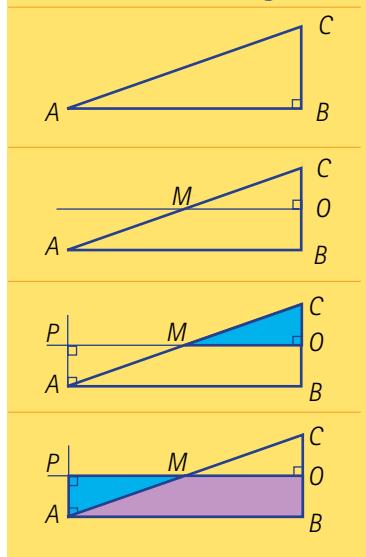
## Et le triangle ?

Pour déterminer un carré ayant même aire qu'un triangle quelconque, on peut simplifier le problème en se servant du fait que deux triangles ayant même base et même hauteur ont la même aire.



Grâce à cette propriété des triangles, il suffit d'effectuer la quadrature du triangle rectangle.

## Comparaison d'un triangle et d'un rectangle



On trace la médiatrice de  $BC$ , qui coupe ce segment en  $O$  et l'hypoténuse  $AC$  en  $M$ . Puis, du point  $A$ , on élève une perpendiculaire au côté  $AB$ , qui rencontre la médiatrice en  $P$ . Le rectangle  $BOPA$  est donc de même aire que le triangle  $ABC$ , comme on peut le voir aisément en examinant la longueur de ses côtés ou encore en comparant les triangles  $MOC$  et  $MPA$ .

On peut alors appliquer la démarche vue précédemment pour effectuer la quadrature de ce rectangle.

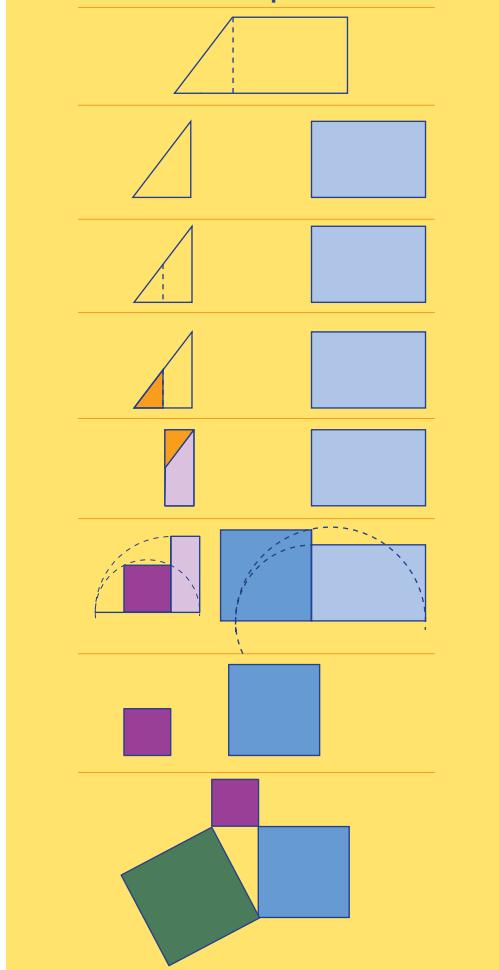
Il est à noter que les théorèmes sur la congruence des triangles – rectangles ou scalènes – permettent d'alléger la tâche de justifier cette démarche.

5. Voir la Section problèmes pour démontrer cette propriété des triangles rectangles.

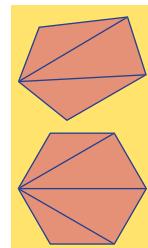
## Et le trapèze ?

Un trapèze est formé d'un rectangle et d'un ou deux triangles. On peut le scinder en ses composantes et effectuer la quadrature de chacune des composantes. Pour déterminer la quadrature de la somme des composantes, on utilise le théorème de Pythagore, comme l'illustre l'encadré suivant.

### Un trapèze



Plus généralement, comme tout polygone est décomposable en une somme de triangles, on peut ainsi effectuer la quadrature de n'importe quelle figure plane délimitée par des droites.

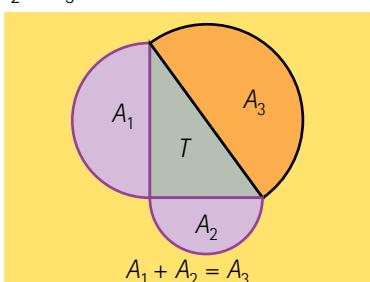


Dès -440, les constructions consistant à pavier un polygone à l'aide de triangles, construire un carré de même aire que chacun des triangles et construire le carré équivalent à deux carrés donnés, étaient devenues élémentaires pour les géomètres.

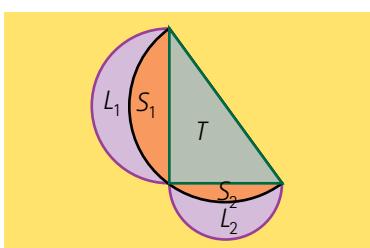
## Qu'en est-il pour les courbes ?

Lorsque la frontière d'une figure est courbe, les choses se compliquent. Le seul cas connu est celui des lunules d'Hippocrate de Chios (~470 à ~410).

Une lunule est une figure délimitée par deux cercles non concentriques de rayons différents, formant une région ressemblant à un croissant de lune. Les lunules étudiées par Hippocrate sont des figures délimitées par des demi-cercles dont les côtés d'un triangle rectangle sont les diamètres. Par une généralisation du théorème de Pythagore, l'aire d'une figure construite sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des figures semblables<sup>6</sup> construites sur les côtés de l'angle droit. Ce qui donne  $A_1 + A_2 = A_3$ .



En faisant subir au demi-cercle ayant l'hypoténuse comme diamètre une réflexion par rapport à cette hypoténuse, on obtient la figure suivante.



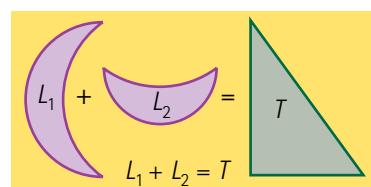
6. Figures « semblables et semblablement décrites », dans le vocabulaire d'Euclide, proposition 31 du Livre VI des Éléments. Voir Bernard Vitrac, ibid., vol 2, Livres V à IX, p. 236.

Puisque le triangle rectangle est inscrit dans le demi-cercle, le sommet de l'angle droit est sur la circonférence du demi-cercle ayant subi cette réflexion. Cette construction a pour effet de diviser en deux régions les demi-cercles ayant les côtés de l'angle droit comme diamètres et en trois régions le demi-cercle ayant l'hypoténuse comme diamètre. Puisque le tout est égal à la somme des parties, cela donne :

$$L_1 + S_1 + L_2 + S_2 = T + S_1 + S_2.$$

En simplifiant cette égalité, on obtient :

$$L_1 + L_2 = T.$$



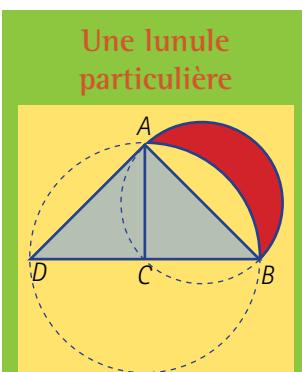
C'est le seul cas de figures délimitées par des lignes courbes dont on peut comparer les aires à la règle et au compas.

Il est à noter que les notations et règles de manipulations algébriques utilisées dans cette présentation sur les lunules n'étaient pas connues à l'époque d'Hippocrate.

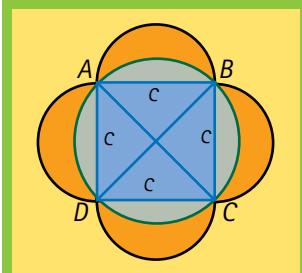
## Conclusion

On peut étendre l'étude des lunules en déterminant, par exemple, la relation entre l'aire d'un hexagone régulier de côté  $r$  et la somme des aires des lunules construites sur ses côtés, et déduire en corollaire une relation entre l'aire d'un triangle équilatéral et la lunule construite sur un de ses côtés (voir Section problèmes).

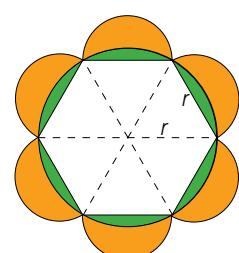
Sans délaisser la règle et le compas, les mathématiciens vont obtenir, par une autre approche, des avancées intéressantes dans la quête de la quadrature du cercle. Cette autre approche est ce que l'on appelle aujourd'hui la *méthode d'exhaustion*.

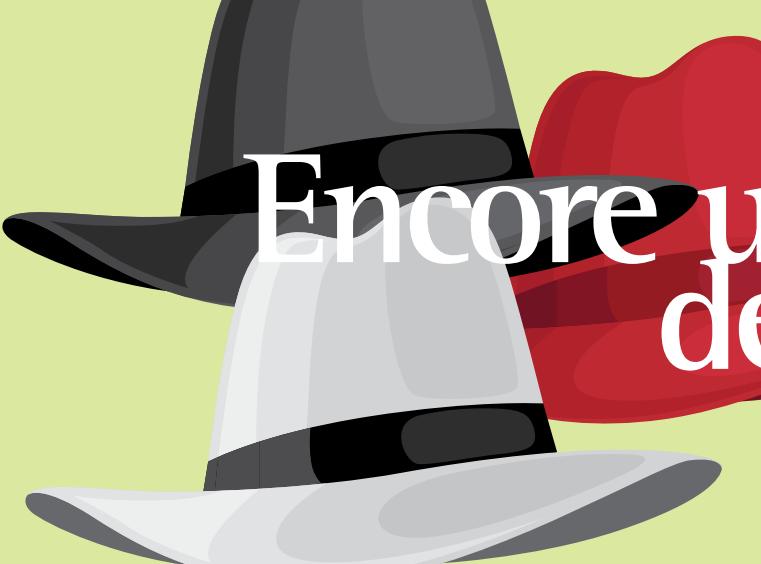


On a un cas particulier du résultat d'Hippocrate lorsque le triangle rectangle est également isocèle. Les deux lunules sont égales et l'aire de chacune d'elles est celle de la moitié du triangle. C'est-à-dire que l'aire du triangle  $ABC$  est égale à celle de la lunule  $AB$ .



Comme conséquence, on peut dire que la somme des aires des quatre lunules construites sur les côtés d'un carré est égale à l'aire du carré.





# Encore une histoire de chapeaux

## Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye

Université des Sciences  
et Technologies de Lille

Neuf joueurs portent des chapeaux dont la couleur est rouge, noire ou blanche. Chacun peut voir tous les autres chapeaux mais pas le sien. Les chapeaux ont été tirés au hasard à l'aide d'un dé (1 et 2 donnent noir, 3 et 4 donnent rouge, 5 et 6 donnent blanc).

L'arbitre annonce que chaque joueur doit essayer de deviner la couleur de son chapeau, et que, si au moins trois d'entre eux donnent

la bonne réponse, alors ils ont gagné un voyage à Londres tous ensemble. Les joueurs ont pu convenir d'une stratégie collective avant que les chapeaux soient disposés sur leurs têtes, mais ils donnent leur réponse simultanément sans avoir plus aucun échange entre eux une fois les chapeaux en place.

En répondant au hasard les joueurs auront une chance non négligeable de perdre. Précisément, ils perdent si 7, 8 ou 9 joueurs se trompent, ce qui en menant un petit calcul donne :

$$(36 \times 2^7 + 9 \times 2^8 + 2^9) / 3^9 = 37,7\%.$$

Même si cela vous semble paradoxal, ils peuvent réduire leur risque de perdre à 0, en convenant avant d'une stratégie audacieuse qui les fera gagner de manière certaine quelle que soit la répartition des chapeaux sur leur tête.

Quelle est cette stratégie ?

### Solution du paradoxe précédent

## S'opposer au hasard des naissances

Dans un pays lointain, les femmes ont des enfants qui sont de sexe masculin dans 50 % des cas exactement et, bien sûr, de sexe féminin dans 50 % des cas. Aucun biais d'aucune sorte n'a jamais été observé chez aucune femme ou catégorie de femmes. Autrement dit, tout se passe comme si le sexe d'un enfant à naître était tiré au hasard avec une pièce de monnaie non truquée. Le gouvernement décide que seuls les couples ayant eu au moins une fille toucheront leur retraite. En réaction à cette mesure, chaque couple adopte alors la stratégie suivante :

- si leur premier enfant est une fille, il n'en a pas d'autres ;
- si le premier enfant est un garçon, le couple a un second enfant qui sera le dernier si c'est une fille ;

- et ainsi de suite, chaque couple ayant des enfants jusqu'à avoir une fille qui est alors leur dernier enfant.

Cette stratégie a en particulier deux conséquences :

- a) il n'y a aucune famille sans fille ;
- b) une famille sur deux n'a pas de garçon.

Cela favorise donc clairement les filles. Pourtant, au bout de quelques années, lorsque le ministère des statistiques évalue le rapport [nombre de filles]/[nombre de garçons] depuis que la mesure a été adoptée, il trouve qu'à très peu de chose près il y a eu autant de garçons que de filles.

Comment expliquer ce paradoxe ?

## Solution du paradoxe précédent (suite)

### Solution

Les stratégies des familles n'ont aucune influence sur la proportion de filles et, d'ailleurs, il en serait de même si la probabilité de naissance des filles était différente de 50%. Aussi surprenant que cela paraisse, au premier abord, les stratégies familiales appliquées par les couples n'ont absolument aucun effet sur la rapport garçon/filles. On peut s'en rendre compte sans faire le moindre calcul, car si l'on s'interroge sur la probabilité qu'a un enfant à naître d'être une fille, il est clair que :

- quel que soit son rang dans une famille, cette probabilité est 1/2 ; le passé n'influe pas sur la naissance à venir (c'est du moins l'hypothèse qu'on a adoptée et que l'énoncé explicitait en disant qu'aucun biais n'avait jamais été observé).

Tout enfant à naître ayant une probabilité de 50% d'être une fille, il naît donc en moyenne une fille pour deux naissances. Quelles que soient les règles adoptées par les familles pour cesser d'avoir des enfants en fonction des précédentes naissances dans la famille, les proportions de filles et de garçons restent inchangées. C'est encore vrai si le ratio des naissances fille/garçon n'est pas 1, et c'est vrai encore pour toute autre stratégie familiale : toutes se valent et aucune n'a le moindre effet perturbateur.

Il se peut que vous ayez des doutes. Pour vous convaincre, nous allons étudier un calcul où, pour simplifier, nous supposerons que les familles n'ont jamais plus de quatre enfants (mais vous pouvez reprendre le calcul avec 5, 6 ou  $n$  enfants ou même sans limitation de nombres d'enfants).

- Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : 1/2. La famille est alors du type : [fille].
- Probabilité qu'une famille possède deux enfants : 1/4. La famille est du type [garçon, fille].
- Probabilité qu'une famille possède trois enfants : 1/8. La famille est du type [garçon, garçon, fille].

- Probabilité qu'une famille possède quatre enfants : 1/16. La famille est une fois sur deux du type [garçon, garçon, garçon, fille] et une fois sur deux du type [garçon, garçon, garçon, garçon].

Donc sur 16 familles, il y a en moyenne 8 familles du type [fille], 4 du type [garçon, fille], 2 du type [garçon, garçon, fille], 1 du type [garçon, garçon, garçon, fille] et 1 du type [garçon, garçon, garçon, garçon]. Cela fait au total  $8 + 4 + 2 + 1 = 15$  filles et  $4 + 4 + 3 + 4 = 15$  garçons.

L'effort fait par chaque famille pour avoir une fille ne change pas la proportion de garçons et de filles, mais conduit cependant à une situation où la plupart des familles sont satisfaites, car elles ont au moins une fille (dans notre exemple, 15 familles sur 16 ont une fille).

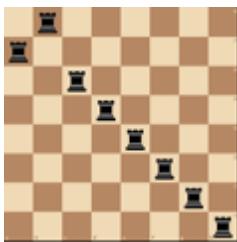
Signalons que, dans la réalité d'aujourd'hui en Inde et en Chine, les règles traditionnelles sur les dots et d'autres raisons socioculturelles font que les familles souhaitent avoir en priorité des garçons. Il en résulte que la proportion de filles à la naissance est nettement inférieure aux garçons. Cela n'est pas la conséquence de stratégies analogues à celle envisagée plus haut mais est dû à des avortements sélectifs organisés par les familles qui, grâce aux échographies, savent au bout de quelques semaines de grossesse le sexe de l'enfant à naître. Ces comportements sont combattus par les autorités car ils conduisent à un déséquilibre entre hommes et femmes susceptibles à terme de créer des problèmes sociaux. Dans plusieurs régions d'Inde, on compte déjà plus de 110 garçons pour 100 filles.



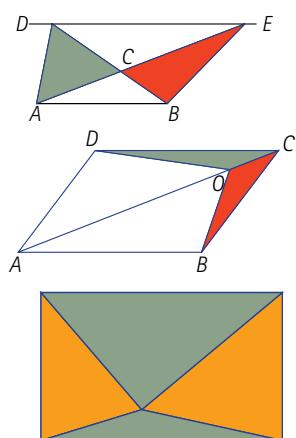
# Section problèmes

## Huit dames et un échiquier

13	25	7	19	1
17	4	11	23	10
21	8	20	2	14
5	12	23	6	18
9	16	3	15	22



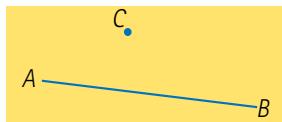
Position de tours reliées à  
(2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8)



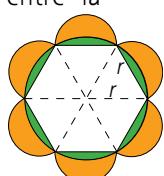
## Comparaison d'aires

- Dans la figure ci-contre,  $AB$  et  $DE$  sont parallèles. Comparer les aires des deux triangles coloriés.
- Dans le parallélogramme  $ABCD$ , on trace la diagonale  $AC$  et on prend un point  $O$  sur celle-ci. Comparer les aires des deux triangles coloriés.
- Soit un rectangle et un point quelconque à l'intérieur de celui-ci. En joignant ce point aux quatre sommets du rectangle, on obtient la figure ci-contre. Comparer l'aire colorée en vert à celle en orange.
- Abaïsser une perpendiculaire à une droite  $AB$  à partir d'un point  $P$  hors de cette droite.
- Élever une perpendiculaire à une droite  $AB$  à partir d'un point  $P$  de cette droite.

- Construire à la règle et au compas une droite parallèle à la droite  $AB$  et passant par le point  $C$  hors de cette droite.



- Quelles propriétés suggère la méthode de construction de la médiatrice d'un segment de droite, si on conserve la même ouverture au compas lorsqu'on détermine les points  $P$  et  $Q$ ?
- Étant donné un segment de droite  $AB$  et un point  $X$  du plan, montrer que  $X$  est sur la médiatrice de  $AB$  si et seulement si  $X$  est équidistant de  $A$  et de  $B$ .
- Construire, à la règle et au compas, un triangle dont les spécifications sont données. En déduire le théorème de congruence correspondant.
  - Triangle quelconque dont les trois côtés sont donnés.
  - Triangle dont deux côtés et l'angle entre ces deux côtés sont donnés.
  - Triangle dont un côté et les deux angles adjacents sont donnés.
  - Triangle rectangle dont un côté de l'angle droit et l'hypoténuse sont donnés.
  - Triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont donnés.
- Montrer que : *la mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté.*
- En déduire que : *tout triangle inscrit dans un demi-cercle est un triangle rectangle.*
- Déterminer à la règle et au compas la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté est donné sans construire le carré.
- Établir la relation numérique entre la somme des aires des six lunules et les côtés de l'hexagone régulier de côté  $r$ . En tirer une relation entre chaque lunule et le triangle équilatéral correspondant.



# Pour en savoir plus!

## Applications des mathématiques

### Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

En cherchant davantage, Georges note que des articles scientifiques récents se penchent encore sur le paradoxe de Saint-Pétersbourg en proposant d'autres approches à sa résolution. Le constat que cette énigme fait encore couler beaucoup d'encre de nos jours, inspire Georges qui se met à rêver à une façon moderne d'illustrer le paradoxe. Saura-t-il en faire un TikTok viral ?

- BERNOULLI, Daniel, *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 5, 175–192, 1738, Traduction anglaise, *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*, *Econometrica*, 22, 23–36, 1954.
- BUFFON, G. Le Clerc, Comte de, *Essai d'arithmétique morale*, Supplément à l'Histoire Naturelle, 4, 46–148, 1777.
- EULER, Leonhard, *Vera aestimatio sortis in ludis* (E811) in Opera postuma 1, (1862) pp. 315–318; Traduction anglaise par Richard Pulskamp intitulé *The true valuation of the risk in games*; disponible à <http://www.cs.xu.edu/math/Sources/Euler/E811.pdf> et en ligne sur l'Archive d'Euler (<http://eulerarchive.maa.org/>).
- FELLER, William, « *An Introduction to Probability Theory and its Applications* », volume 1, Wiley, 1968.
- GORROOCHURN, Prakash, *Classic Problems of Probability*, Wiley, 2012.
- PETERSON, Martin, *The St. Petersburg Paradox*, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/paradox-stpetersburg/>
- ROUSSEAU, Christiane, ROY-FORTIN, Guillaume, *Géométrie intégrale*, Accromath 10.2, 2015.
- SAMUELSON, Paul A., *St. Petersburg Paradoxes: Defanged, Dissected, and Historically Described*, Journal of Economic Literature, 15, 24–55, 1977.
- SZÉKELY, Gbor J., *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, D. Reidel Publishing Company, 1986.

### Huit dames et un échiquier

- RIVIN, I., VARDI, I., and ZIMMERMANN, P., *The n-queens problem*. The American Mathematical Monthly 101, 7 (1994), 629–639.
- WATKINS, J.J. *The mathematics of chessboard problems*. Princeton University Press (2004)  
Pour jouer aux échecs : le site gratuit sans publicité et en logiciel libre [lichess.org](https://lichess.org) est un bon choix

## Géométrie

### Paver l'espace avec des cubes

- HARTNETT, Kevin, *Paver l'espace avec des cubes : la conjecture de Keller résolue*, Pour la Science, 7 avril 2021.

## Histoire des mathématiques

### Comparaison d'aires

- VITRAC, Bernard, *Euclide*, vol. 1. *Introduction générale, Livres I à IV*. PUF, 1990.  
Bibliothèque d'histoire des sciences.

**Accromath** est une publication de l'*Institut des sciences mathématiques (ISM)* et du *Centre de recherches mathématiques (CRM)*. La revue s'adresse surtout aux étudiantes et étudiants d'école secondaire et de cégep ainsi qu'à leurs enseignantes et enseignants.



L'*Institut des sciences mathématiques* est une institution unique dédiée à la promotion et à la coordination de l'enseignement et de la recherche en sciences mathématiques au Québec. En réunissant huit départements de mathématiques des universités québécoises (Concordia, Université Laval, McGill, Université de Montréal, UQAM, UQTR, Université de Sherbrooke, Bishop's), l'*Institut* rassemble un grand bassin d'expertises en recherche et en enseignement des mathématiques. L'*Institut* anime de nombreuses activités scientifiques, dont des séminaires de recherche et des colloques à l'intention des professeurs et des étudiants avancés, ainsi que des conférences de vulgarisation données dans les cégeps. Il offre également plusieurs programmes de bourses d'excellence.

L'*ISM* est financé par le Ministère de l'Enseignement supérieur et par ses huit universités membres.



Le *Centre de recherches mathématiques* est un centre national pour la recherche fondamentale en mathématiques et ses applications. Les scientifiques du CRM comptent plus d'une centaine de membres réguliers et de stagiaires postdoctoraux. Lieu privilégié de rencontre, le *Centre* est l'hôte chaque année de nombreux visiteurs et d'ateliers de recherche internationaux.

Les activités scientifiques du CRM comportent deux volets principaux : les projets de recherche qu'entreprendent ses laboratoires, et les activités thématiques organisées à l'échelle internationale. Ces dernières, ouvertes à tous les domaines, impliquent des chercheurs du CRM et d'autres universités. Afin d'assurer une meilleure diffusion des résultats de recherches de ses collaborateurs, le CRM a lancé en 1989 un programme de publications en collaboration avec l'American Mathematical Society et avec Springer.

Le CRM est principalement financé par le CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), le FQRNT (Fonds québécois de recherche sur la nature et les technologies), l'Université de Montréal, et par six autres universités au Québec et en Ontario.

**Accromath** bénéficie de l'appui de la Dotation Serge-Bissonnette du CRM.

