Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №5
по курсу «Численные методы»
«Решение задачи Коши методом Рунге-Кутта»
Вариант 9

Выполнил:
студент группы ИУ9-62Б
Егоров Алексей

Москва, 2022

1. Цель

Изучение классического метода Рунге-Кутта для численного решения задачи Коши.

2. Постановка задачи

Дано: Дифференциальное уравнение второго порядка на отрезке $[0, 1]$:

$$y'' + py' + qy = f(x), y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$$

Найти: Решение задачи Коши с погрешностью $\epsilon = 0.01$ классическим методом Рунге-Кутта

Индивидуальный вариант:

$$p = -2$$

$$q = 0$$

$$f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$$

$$y_0 = 2$$

$$y'_0 = 2$$

3. Теоретические сведения

Метод Рунге-Кутта применяется для задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) первого порядка:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ ... \\ y'_n = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

на отрезке $[x_0, x_end]$ с начальными условиями $y_1(x_0) = y_10, ..., y_n(x_0) = y_n0$.

Требуется приближенно найти решение системы $y_1(x_{end}), ..., y_n(x_{end})$ в конечной точке отрезка. Система в векторном виде:

$$Y' = f(x, Y), Y(x_0) = Y_0$$

Здесь $Y = (y_1(x), ..., y_n(x))$ и Y' - векторы неизвестных функция и их производных, $f =$

$(f_1(x,Y),...,f_n(x,Y))$ - вектор правых частей, а $Y_0 = (y_10,...,y_n0)$ - вектор начальных условий.

Методы Рунге-Кутта позволяют, зная решение системы Y в некоторой точке x отрезка $[x_0, x_{end}]$, продвинуться на шаг h, т.е. приближенно найти решение в точке $x + h$. Затем находят решение в следующей точке, например в $x + h$ и т.д., пока не доберутся до конца отрезка x_{end}.

Классический метод Рунге-Кутта заключается в последовательном нахождении вектор-коэффициентов K_1, K_2, K_3, K_4 по формулам:

$$K_1 = f(x, Y)$$

$$K_2 = f(x + \frac{h}{2}, Y + h\frac{K_1}{2})$$

$$K_3 = f(x + \frac{h}{2}, Y + h\frac{K_2}{2})$$

$$K_4 = f(x + \frac{h}{2}, Y + hK_3)$$

и построении риближения к решению СОДУ в точке $x + h$:

$$Y(x + h) \approx Y_h = Y + \frac{h}{6}(K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4)$$

Любое дифференциальное уравнение m-го порядка $y^(m) = f(x, y, y', ..., y^{(m-1)})$ можно свести к СОДУ путем следующих замен:

$$y_1 = y'$$

$$y_2 = y'' = y_1'$$

$$...$$

$$y_m = y^{(m)} = y'_{(m-1)}$$

Получается система следующего вида:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ ... \\ y_{(m-1)}' = f(x, y, y_1, ..., y_{m-1}) \end{cases}$$

Для дифференциального уравнения второго порядка из индивидуального варианта СОДУ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = e^x(x^2 + x - 3) + 2y_1 \end{cases}$$

Аналитическое решение: $y = e^x(-x^2 - x + e^x + 1)$

4. Практическая реализация:

Листинг 1. Решение задачи Коши методом Рунге-Кутта

```go
package main

import (
        "fmt"
        "math"
)

func f1(x, y, y1 float64) float64 {
        return math.Exp(x)*(x*x+x-3) + 2*y1 - 0*y
}

func f(x, y, y1 float64) []float64 {
        return []float64{y1, f1(x, y, y1)}
}
```

```go
func analyticalSolution(x float64) float64 {
        return math.Exp(x) * (-math.Pow(x, 2) - x + math.Exp(x) + 1)
}

func analyticalSolutiont(x float64) float64 {
        return math.Exp(x) * (-x*(x+3) + 2*math.Exp(x))
}

func step(h, x, y, y1 float64) (float64, float64, float64) {
        k1 := f(x, y, y1)
        k2 := f(x+h/2, y+h*k1[0]/2, y1+h*k1[1]/2)
        k3 := f(x+h/2, y+h*k2[0]/2, y1+h*k2[1]/2)
        k4 := f(x+h/2, y+h*k3[0], y1+h*k3[1])

        x += h
        y = y + h/6*(k1[0]+2*(k2[0]+k3[0])+k4[0])
        y1 = y1 + h/6*(k1[1]+2*(k2[1]+k3[1])+k4[1])
        return x, y, y1
}

func main() {
        a := 0.0
        b := 1.0
        h := 0.01

        x := a
        y := 2.0
        y1 := 2.0

        for x < b {
```

```
            x, y, y1 = step(h, x, y, y1)
    }

    fmt.Printf("y*(1)=%.16f,y'*(1)=%.16f, diff_y=%.16f, diff_y'=%.16f\n",
            y,
            y1,
            math.Abs(y-analyticalSolution(x)),
            math.Abs(y1-analyticalSolutiont(x)),
    )
}
```

5. Результат:

Результат сравнивался с анлитическим решением в точке $x_{end} = 1$ для разных длин шагов h:

$$h = 0.5, y^*(1) = 4.6847636463303868, y'^*(1) = 3.8840354563285846, diffy = 0.0139893758587828,$$

$$diffy' = 0.0209494276965341$$

$$h = 0.25, y^*(1) = 4.6871414887037064, y'^*(1) = 3.9222646300974882, diffy = 0.0163672182321024,$$

$$diffy' = 0.0172797460723695$$

$$h = 0.1, y^*(1) = 5.1001173897126364, y'^*(1) = 4.5126503825078474, diffy = 0.0105613816483441,$$

$$diffy' = 0.0114121516380203$$

$$h = 0.05, y^*(1) = 4.6757044407795991, y'^*(1) = 3.9132842344024219, diffy = 0.0049301703079934,$$

$$diffy' = 0.0082993503772997$$

$$h = 0.01, y^*(1) = 4.6718308769889756, y'^*(1) = 3.9068478393263866, diffy = 0.0010566065173663,$$

$$diffy' = 0.0018629553012626$$

6. Вывод:

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен "классический"метод Рунге-Кутта для решения задачи Коши и метод сведения дифференциального уравнения второго рода к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В процессе тестирования был сделан вывод о том, что метод Рунге-Кутта для дифференциального уравнения находит численное решение дифференциального уравнения из индивидуального варианта с погрешностью $\epsilon \leqslant 0.01$ при $h \leqslant 0.05$.