Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Parcial 1
Nombre: Alexis Ovalle
Curso: EDO 2
Carne: 202031064
Fecha: 18 de agosto de 2023

Problema 1. *Resolver*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

$$\frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{x^2}, x = 0 \in A'$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) * (n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) * (n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$m = n | m = n + 2 \longrightarrow n = m - 2$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) * (m+r-1) a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r} + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

$$m = 0, 1$$

$$(r * (r-1) a_0 x^r + (r) a_0 x^r - a_0 x^r) + ((1+r) * (r) a_1 x^{1+r} + (1+r) a_1 x^{1+r} - a_1 x^{1+r}) = 0$$

y por independencia lineal

$$\begin{cases} (r * (r-1) + (r) - 1) = 0 \longrightarrow \pm 1 \\ ((1+r) * (r) + (1+r) - 1) = 0 \longrightarrow r_1 = 0, r_2 = -2 \end{cases} \tag{1}$$

Como $a_0 \neq 0$ entonces nos podemos dar la libertad de definir el siguiente factor a_1 como cero, asi siendo la serie y nuevamente por independencia lineal.

$$[(m+r) * (m+r-1) + (m+r) - 1] a_m + a_{m-2} = 0$$

$$a_m = \frac{-a_{m-2}}{[(m+r)*(m+r-1)+(m+r)-1]}$$

$$a_m = \frac{-a_{m-2}}{[(m+r)^2-1]}$$

$$r_1 = 1$$

$$a_m = \frac{-a_{m-2}}{[(m+1)^2-1]}$$

$$m >= 2$$

$$\begin{cases} a_2 = \frac{-a_0}{8} \\ a_3 = 0 \\ a_4 = \frac{a_0}{192} \\ a_5 = 0 \\ a_6 = \frac{-a_0}{9216} \end{cases} \tag{2}$$

$$y_1 = Ax(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} - \frac{x^6}{9216} + \cdots)$$

$$y_1 = Ax(1 - \frac{x^2}{2^2(1+1)} + \frac{x^4}{2^5(1+1)(1+2)} - \cdots)$$

$$y_1 = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0 x^{2k}}{k! * 4^k * (p+k) \cdot (p+1)}$$

este es la funcion de Bessel con x = 1, asi usamos la otra respuesta del punto, que es -1.

$$y_2 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0 x^{2k}}{k! * 4^k * (-p+k) \cdot (-p+1)}$$

$$Y = y_1 + y_2 = J_1(x) + J_{-1}(x) \blacksquare$$

Problema 2. *La ecuación*

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

con α, β, γ constantes, se conoce como ecuación hipergeométrica o ecuación de Gauss.

- *Muestre que $x = 0$ es un punto singular regular.*
- *Los valores de r en la serie de Frobenius son $r = 0$ y $r = 1 - \gamma$*
- *Muestre que*

$$a_{n+1} = \frac{(n+r+\alpha)(n+r+\beta)}{(n+r+1)(n+r+\gamma)} a_n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

- Primero para ver los puntos singulares regulares, debemos ver que las funciones P(x) y Q(x), Serán ambas analíticas en una vecindad otorgada por algún cambio que las vuelva analíticas.

$$P(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} x \frac{[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]}{x(1-x)} = \gamma$$

$$Q(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} x^2 \frac{-\alpha\beta}{x(1-x)} = 0$$

Así siendo cero un punto singular regular

- $$x(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)*(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)*(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)*(n+r-1)a_n x^{n+r}$$

$$+\gamma\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

$$u = n-1$$

$$\sum_{u=-1}^{\infty}(u+r)*(u+r+1)a_{u+1}x^{u+r} - \sum_{u=0}^{\infty}(u+r)*(u+r-1)a_u x^{u+r}$$

$$+\gamma\sum_{u=-1}^{\infty}(u+1+r)a_{u+1}x^{u+r} - (\alpha+\beta+1)\sum_{u=0}^{\infty}(u+r)a_u x^{u+r} - \alpha\beta\sum_{u=0}^{\infty}a_u x^{u+r} = 0$$

Por independencia lineal

$$a_0(r-1)(r)x^{r-1} + \gamma(r)a_0 x^{r-1} = 0$$

$$(r-1)(r) + \gamma * r = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1-\gamma \end{cases} \tag{3}$$

- Nuevamente por independencia lineal

$$((u+r)*(u+r+1) + \gamma(u+r+1))a_{u+1} + (-(u+r)*(u+r-1) - (\alpha+\beta+1)(u+r) - \alpha\beta)a_u = 0$$

$$((u+r)*(u+r+1) + \gamma(u+r+1))a_{u+1} = ((u+r)*(u+r-1) + (\alpha+\beta+1)(u+r) + \alpha\beta)a_u$$

$$a_{u+1} = \frac{((u+r)*(u+r-1) + (\alpha+\beta+1)(u+r) + \alpha\beta)}{((u+r)*(u+r+1) + \gamma(u+r+1))}a_u$$

$$a_{u+1} = \frac{((u+r+\alpha)+(u+r+\beta))}{((u+r+1)+(u+r+\gamma))}a_u$$

esta serie desde u = 0, con $u \in I | I = \{0, 1, \cdots\}$■

Problema 3. *Denotemos a la solución y_1 para $r = 0$ y $a_0 = 1$ de la ecuación hipergeométrica como $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$*

- *Muestre que*
$$F(1, \beta, \beta, x) = \frac{1}{1-x}$$
- *Muestre que*
$$F(\alpha, \beta, \beta, x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$$
- *Muestre que*
$$xF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2) = \arcsin(x)$$

- bueno en este caso tenemos que

$$F_a = a_{u+1} = \frac{((u+1))}{((u+1))}a_u$$

donde debe de converger la susecion por $\frac{(n)}{(k)}$ asi generando

$$\frac{1}{k}$$

, sea este valor maximo, con lo cual

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{n!}x^n = \frac{1}{1-x}$$

, esto debera ser igual a la serie geometria. Esto tambien se aprecia bien con la extension en serie.

$$F = 1 + \frac{1*\beta}{\beta*1}x + + \frac{1*\beta*(1+1)*(1+\beta)}{\beta*(1+\beta)*1*2}x^2 + \cdots$$

$$F = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$$

- Con lo anterior podemos ver que si ahora en vez de tener $\alpha = 1$, empleamos el propio valor de alpha, nos dara casi lo mismo, solo que en vez de ser esa serie geometrica, esta sera

$$F = 1 + \frac{\alpha*\beta}{\beta*1}x + \frac{\alpha*\beta*(\alpha+1)*(1+\beta)}{\beta*(1+\beta)*1*2}x^2 + \cdots$$

$$F = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha*(\alpha+1)}{1*2}x^2 + \cdots$$

Esta forma es de $(a+b)^n = a^n + n*a^{n-1}b + \cdots n*a*b^{n-1} + b^n$, solo que con los valores estipulados asi, siendo

$$F = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$$

- Tratemos de llevarlo con pura funcion Gamma

$$x\sum \frac{(\frac{1}{2})_n^2}{(\frac{3}{2})} * \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\sum \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)^2\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2\Gamma(\frac{3}{2})+n} * \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$\sum \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)^2}{(2n+1)\sqrt{\pi}} * \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$\sum \frac{(2n)!}{(2^{2n}n!)} * \sqrt{\pi} * \frac{1}{2n+1\sqrt{\pi}} * \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$\sum \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} * \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arcsin(x)\blacksquare$$