Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Parcial 2
Nombre: Alexis Ovalle
Curso: EDO 2
Carne: 202031064
Fecha: 18 de octubre de 2023

Problema 1. *Dado el Sistema Lineal*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - \frac{2}{3}y + t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}x - y + 1$$

1. *Muestre que la EDO satisface las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad. Utilice las iteraciones de Picard para encontrar una aproximación a la solución*
2. *Resuelva el sistema con el método de matrices.*

1. Bueno en este caso vamos a proboar con existencia unicidad, para ello vamos a definir unas cosas, la forma de ver este sistema sera: $f(T,t) = A(t)T + g(t)$, gracias a lo siguiente:

$$\overline{T}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}}_{A} * \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{T} + \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}_{g}$$

Primero que sea de lipschitz.

$$||f(X,t) - f(Y,t)|| = ||A(t)X + g(t) - A(t)Y - g(t)||$$

$$||A(t) * (x - y)|| \leq |A(t)|||x - y|| = A||x - y||$$

Ahora con eso como es de lipschitz(gracias a Cauchy-schwarz), es uniformemente continua y debera se continua. BUeno y con Picard

$$y_{1,0} = x_0; y_{2,0} = y_0$$

$$y_{1,1} = x_0 + \int_0^\tau y_{1,0}(n) - \frac{2}{3}y_{2,0}(n) + tdn$$

$$y_{2,1} = y_0 + \int_0^t \frac{4}{3}y_{1,0}(n) - y_{2,0}(n) + 1dn$$

$$y_{1,1} = x_0 + x_0\tau - \frac{2}{3}y_0\tau + t\tau$$

$$y_{2,1} = y_0 + \frac{4}{3}x_0\tau - y_0\tau + \tau$$

$$y_{1,2} = x_0 + \int_0^t y_{1,1}(n) - \frac{2}{3}y_{2,1}(n) + ndn$$

$$y_{2,2} = y_0 + \int_0^t \frac{4}{3}y_{1,1}(n) - y_{2,1}(n) + 1dn$$

$$y_{1,2} = x_0 + \int_0^t x_0 - \frac{2}{3}y_0 + \frac{1}{9}x_0n + tn - \frac{2}{3}ndn$$

$$y_{1,2} = x_0 + x_0\tau - \frac{2}{3}y_0\tau + \frac{1}{18}x_0\tau^2 + \frac{t\tau^2}{2} - \frac{\tau^2}{3}$$

$$y_{2,2} = y_0 + \int_0^t \frac{4}{3}x_0 - y_0 + \frac{1}{9}y_0 + \frac{4}{3}tn - ndn$$

$$y_{2,2} = y_0 + \frac{4}{3}x_0\tau - y_0\tau + \frac{1}{18}y_0\tau^2 + \frac{2}{3}t\tau^2 - \frac{\tau^2}{2}$$

Donde mi funcion debe de tender a $y_{1,n}$

2. Bueno al ser no homogenea, entonces hacemos variacion de parametros, en este caso la forma matricial seria, donde X es la matriz de variables diferenciadas:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{con el polinomio caracteristico:} P_A(x) = x^2 - \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \tag{1}$$

Ambos con multiplicidad Algebraica de 1.

- λ_1

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -1-\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$x = y \to span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$Dim(E(\lambda_1)) = 1$$

- λ_2

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -1+\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$2x = y \to span\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}$$

$$Dim(E(\lambda_2)) = 1$$

Gracias a que ambos tienen misma cantidad de ambas multiplicidades (algebraica y geometrica) con esto solo tendremos un bloque de Jordan (el general vaya).

$$y = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{\frac{t}{3}} + C_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{\frac{-t}{3}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}e^{\frac{t}{3}} & e^{\frac{-t}{3}}\\ e^{\frac{t}{3}} & 2e^{\frac{-t}{3}}\end{pmatrix}}_{\Phi}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

$$|\Phi| = 1$$

$$adj(\Phi)^t = \begin{pmatrix}2e^{\frac{-t}{3}} & -e^{\frac{-t}{3}}\\ -e^{\frac{t}{3}} & e^{\frac{t}{3}}\end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1} = |\Phi| * adj(\Phi)^t = \begin{pmatrix}2e^{\frac{-t}{3}} & -e^{\frac{-t}{3}}\\ -e^{\frac{t}{3}} & e^{\frac{t}{3}}\end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1} * \overline{F} = \begin{pmatrix}2e^{\frac{-t}{3}} & -e^{\frac{-t}{3}}\\ -e^{\frac{t}{3}} & e^{\frac{t}{3}}\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$$

$$\int\begin{pmatrix}2te^{\frac{-t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}}\\ -te^{\frac{t}{3}} + e^{\frac{t}{3}}\end{pmatrix}dt$$

$$\begin{pmatrix}-15e^{\frac{-t}{3}} - 6te^{\frac{-t}{3}}\\ 12e^{\frac{t}{3}} - 3te^{\frac{t}{3}}\end{pmatrix}$$

$$\Phi * \int \Phi^{-1} * \overline{F}$$

$$\begin{pmatrix}e^{\frac{t}{3}} & e^{\frac{-t}{3}}\\ e^{\frac{t}{3}} & 2e^{\frac{-t}{3}}\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-15e^{\frac{-t}{3}} - 6te^{\frac{-t}{3}}\\ 12e^{\frac{t}{3}} - 3te^{\frac{t}{3}}\end{pmatrix}$$

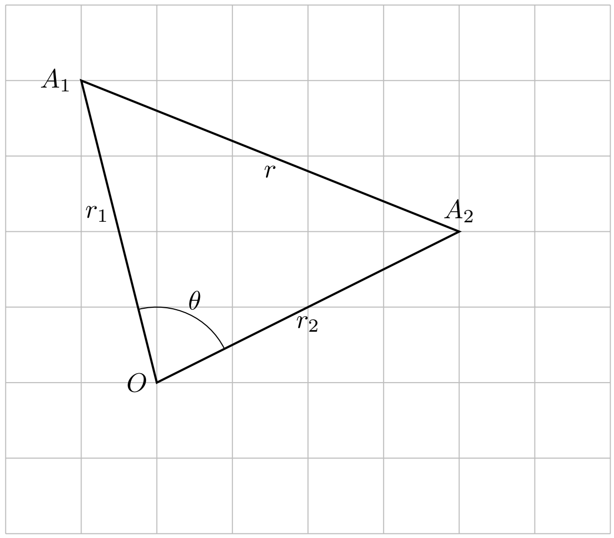
$$\begin{pmatrix}-3-9t\\9-12t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix}t$$

$$y = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{\frac{t}{3}} + C_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix}t \blacksquare$$

Problema 2. *Considere dos puntos A1 y A2, r1 la distancia del origen al punto A1, r2 la distancia del origen al* *punto A2 , ambas rectas forman un ángulo θ con vértice en el origen. Si r es la distancia de A1 a A2 , muestre que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$



AHora con esto usemnos la funcion generatriz

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$\frac{1}{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n = \frac{1}{r_2} * \frac{1}{\sqrt{1-2\cos(\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{r_2} * \frac{1}{\sqrt{r_2^2 - 2\cos(\theta) r_1 * r_2 + (r_1)^2}} * r_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_2^2 - 2\cos(\theta) r_1 * r_2 + (r_1)^2}}$$

por ley de cosenos

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\cos(\theta) r_1 r_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2}} \longrightarrow \frac{1}{||r||_1}$$

por geometria todo es positivo

$$\frac{1}{\sqrt{r^2}} \longrightarrow \frac{1}{r} \blacksquare$$

Problema 3. *Utilizando series, resuelva la EDO*

$$y'' + (e^x - 9)y = 0$$

Para este caso, pues acoplare la serie de taylor en base a todos los valores que tengo de las series, antes de eso hay que percatarse que como no tiene puntos singulares, no se usa Frobenius, simplemente serie de potencias. Y recordando que Euler es:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

AHora si con esto podemos comenzar

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n) a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n) * (n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n) * (n-1) a_n x^{n-2} + e^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 9 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\underbrace{(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots)}_{y''} + \underbrace{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)}_{e^x} * \underbrace{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)}_{y} - 9 \underbrace{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)}_{y} = 0$$

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 x & a_2 x & \cdots \\ & a_0 x & a_1 x^2 & \cdots \\ & & \frac{a_0}{2!} x^2 & \cdots \\ & & & \ddots \\ \hline \end{array}$$

$$a_0 + (a_1 + a_0)x + (a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2!})x^2 + \cdots + \left(\frac{a_n}{0!} + \frac{a_{n-1}}{1!} + \frac{a_{n-2}}{2!} + \frac{a_0}{n!}\right) x^n$$

$$2a_2 + a_0 + (6a_3 + a_1 + a_0)x + (12a_4 + a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2!})x^2 + \cdots - 9a_0 - 9a_1 x - \dots$$

$$2a_2 - 8a_0 + (6a_3 - 8a_1 + a_0)x + (12a_4 - 8a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2!})x^2 + \cdots = 0$$

al final se puede hacer todo eso por Independencia Lineal :)

$$\begin{cases} a_2 = 4a_0 \\ a_3 = \frac{8a_1 - a_0}{6} \\ a_4 = \frac{63}{24} a_0 - \frac{a_1}{12} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1 x + 4a_0 x^2 + \frac{4}{3} a_1 x^3 - \frac{1}{6} a_0 x^3 + \frac{21}{8} a_0 x^4 - \frac{a_1}{12} x^4 + \dots \\ &= (1 + 4x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{21}{8} x^4) a_0 + (x + \frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{12} x^4) a_1 \blacksquare \end{aligned}$$

Problema 4. *Muestre que los polinomios de Legendre $P_n(x)$ satisfacen la recurrencia*

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$$

Podemos usar la funcion generatriz de Legendre para esto, esto porque aqui si la puedo derivar mejor, a comparacion de usar Rodrigues(aunque imagino que jala tambien)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) = \frac{t}{\sqrt{(1-2xt+t^2)^3}}$$

$$P_{n-1}'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}'(x)t^n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^{n+1}$$

$$P_{n-1}'(x) = t\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n \longrightarrow tP'n$$

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = xP_n'(x) - tP_n'(x) \longrightarrow (x-t)P'n(x)$$

$$(x-t)\frac{t}{\sqrt{(1-2xt+t^2)^3}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n = \frac{1}{\sqrt{(1-2xt+t^2)^3}} * \frac{2x-2t}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n = \frac{x-t}{\sqrt{(1-2xt+t^2)^3}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x)$$

$$(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) * \sqrt{(1-2xt+t^2)^3}$$

$$(x-t)\frac{t}{\sqrt{(1-2xt+t^2)^3}} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) * \sqrt{(1-2xt+t^2)^3} * \frac{t}{\sqrt{(1-2xt+t^2)^3}}$$

$$t\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nt^nP_n(x) = nP_n(x)\blacksquare$$