Résolution des équations de l'élasticité linéaire sur grille cartésienne 2D – Application au morphing.

Valentin Pannetier – Alexis Tardieu

Vendredi 29 Janvier 2020

M2 *Modélisation Numérique & Calcul Haute Performance* - Univeristé de Bordeaux

Plan de l'exposé

Introduction

Introduction

Introduction

Les équations de l'élasticité linéaire en 2D

Les équations de l'élasticité linéaire en 2D

- Équations de l'élasticité linéaire sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$-\mathrm{div}(\sigma(\vec{u})) = \vec{f}$$

où l'inconnue est le déplacement $\vec{u} = [u, v]^T \in \mathbb{R}^2$.

- Le tenseur des contraintes :

$$\sigma(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{bmatrix}$$

est donné par la loi suivante :

$$[\sigma(\vec{u})]_{i,j} = 2\mu[\varepsilon(\vec{u})]_{i,j} + \lambda \mathrm{div}(\vec{u})\delta_{i,j}$$

Les équations de l'élasticité linéaire en 2D

- Tenseur des déformations :

$$\varepsilon(\vec{u}) := \frac{1}{2}[\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} & 2\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Expression du tenseur des contraintes :

$$\sigma(\vec{u}) = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & (2\mu + \lambda)\dfrac{\partial v}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Les équations de l'élasticité linéaire en 2D

- Obtention d'un système d'EDP couplées, où $\vec{f} = [f_1, f_2]^T$:

$$-\left[\frac{\partial \sigma_{1,1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial y}\right] = f_1$$
$$-\left[\frac{\partial \sigma_{2,1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2,2}}{\partial y}\right] = f_2$$

soit en extension :

$$\left[(2\mu + \lambda) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right](u) + \left[(\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right](v) = -f_1$$
$$\left[(\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right](u) + \left[(2\mu + \lambda) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right](v) = -f_2$$

Les équations de l'élasticité linéaire en 2D

- Mise sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (2\mu+\lambda)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mu\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2} & (\lambda+\mu)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ (\lambda+\mu)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & (2\mu+\lambda)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\mu\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix}$$

- Formellement : système linéaire à résoudre !

$\Rightarrow$ 3 opérateurs à discrétiser en différences finies :

$$L_x \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad L_y \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad H \equiv \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

La méthode des différences finies

La méthode des différences finies

Schéma grille cartésienne : $Nx, Ny, \Delta x, \Delta y$ + un stencil complet (9 pts)

La méthode des différences finies

Vecteur d'inconnues + explication tailles L_x, L_y, H

La méthode des différences finies

- L'opérateur $L_x \equiv \partial_x^2$:

$$L_x(w_{i,j}) = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

soit sous forme matricielle :

$$L_x = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 1 & & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & & \\ & 1 & -2 & & & & & & \\ \hline & & & -2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & & 1 & -2 & & & \\ \hline & & & & & & -2 & 1 & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 \end{array}\right]$$

La méthode des différences finies

- L'opérateur $L_y \equiv \partial_y^2$:

$$L_y(w_{i,j}) = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

soit sous forme matricielle :

$$L_y = \frac{1}{\Delta y^2} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
-2 & & & 1 & & & & & \\
 & -2 & & & 1 & & & & \\
 & & -2 & & & 1 & & & \\
\hline
1 & & & -2 & & & 1 & & \\
 & 1 & & & -2 & & & 1 & \\
 & & 1 & & & -2 & & & 1 \\
\hline
 & & & 1 & & & -2 & & \\
 & & & & 1 & & & -2 & \\
 & & & & & 1 & & & -2
\end{array}\right]$$

La méthode des différences finies

- L'opérateur $H \equiv \partial^2_{x,y}$:

$$H(w_{i,j}) = \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

soit sous forme matricielle :

$$H = \frac{1}{4\Delta x \Delta y}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & -1 & & 1 & & & \\
 & & & & -1 & & & & \\
\hline
 & -1 & & & & & & 1 & \\
1 & & -1 & & & & -1 & & 1 \\
 & 1 & & & & & & -1 & \\
\hline
 & & & & -1 & & & & \\
 & & & 1 & & -1 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}\right]$$

La méthode des différences finies

- Mise sous forme matricielle $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2\mu + \lambda) \cdot L_x + \mu \cdot L_y & (\lambda + \mu) \cdot H \\ (\lambda + \mu) \cdot H & (2\mu + \lambda) \cdot L_y + \mu \cdot L_x \end{bmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{= X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \end{bmatrix}}_{= B}$$

- Système de taille $N = 2 \cdot Nx \cdot Ny$... mais essentiellement creux

$\Rightarrow$ utilisation de la bibliothèque **Eigen** pour les *SparseMatrix*

- Résolution : gradient conjugué d'Eigen (en $\mathcal{O}(N)$)

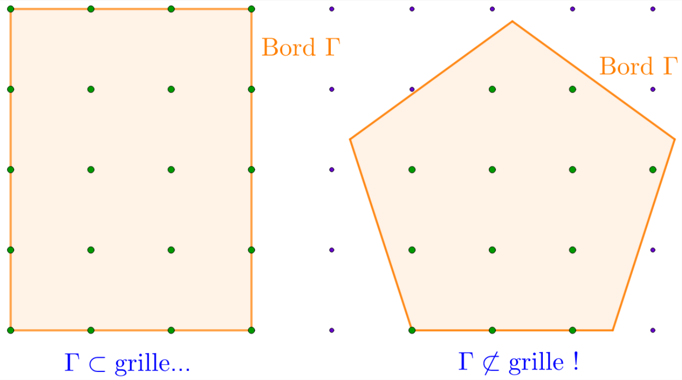
La méthode des différences finies

La méthode des différences finies

Un point sur les méthodes level-set

Un point sur les méthodes level-set

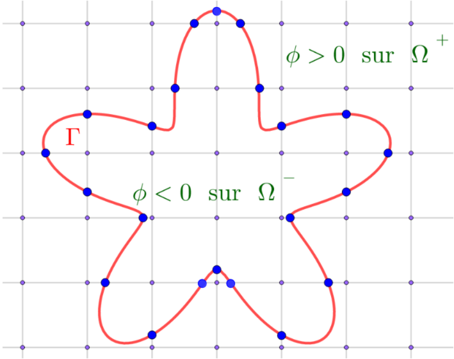
Problème : résolution d'EDP sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ non cartésien $\Rightarrow$ la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ ne coïncide pas avec des points de la grille.



$\Rightarrow$ Comment distinguer efficacement les points intérieurs à Ω ?

Un point sur les méthodes level-set

- Point de départ : domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bord Γ quelconque.



- Fonction *level-set* = fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ régulière telle que :

$$\phi(P) = \left| \begin{array}{l} +d(P,\Gamma) \text{ si } P \in \Omega^+ \\ -d(P,\Gamma) \text{ si } P \in \Omega^- \end{array} \right.$$

Un point sur les méthodes level-set

$\Rightarrow \phi$ est une fonction *distance algébrique*. Caractérisation évidente :

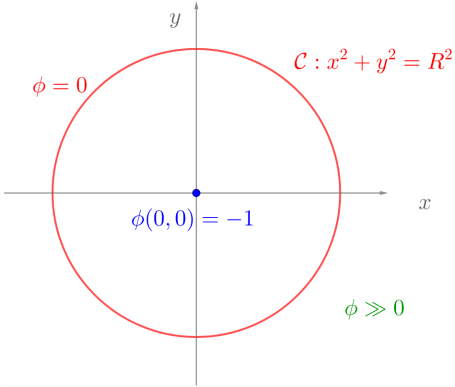
$$\left| \begin{array}{l} \phi(P) > 0 \;\text{ si } P \in \Omega^+ \\ \phi(P) = 0 \;\text{ si } P \in \Gamma \\ \phi(P) < 0 \;\text{ si } P \in \Omega^- \end{array} \right.$$

- 2 façons de définir une level-set ϕ :
  - Forme *implicite* : $\phi(x, y) = \cdots$ (expression déjà connue)
  - Forme *paramétrique* : $x(\theta) = \cdots$ et $y(\theta) = \cdots$ (on ne connaît pas ϕ a priori, ou on ne peut pas l'expliciter)

Un point sur les méthodes level-set

- Cas implicite : cercle centré en $(0,0)$ et de rayon $R = 1$:

$$\phi(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - R$$

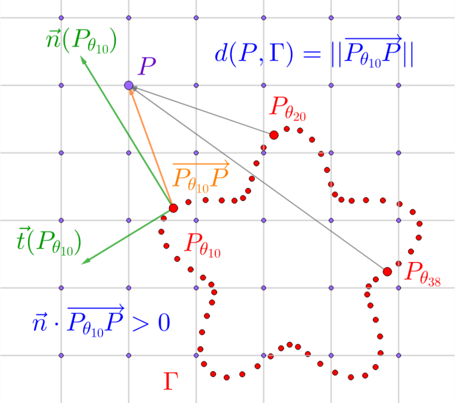


... ou bien $x(\theta) = R\cos(\theta)$ et $y(\theta) = R\sin(\theta)$?

Un point sur les méthodes level-set

- Cas paramétrique : étoile de mer à 5 branches :

$$x(\theta) = [R + k\sin(5\theta)]\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y(\theta) = [R + k\sin(5\theta)]\sin(\theta)$$



... ou bien $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - R[1 + k\sin(5\theta)]$?

Application au morphing

Application au morphing

Application au morphing

Application au morphing

Application au morphing

Conclusion

Conclusion