Projet de Modélisation ou Programmation

Résolution des équations de l'élasticité linéaire 2D sur grille cartésienne – Application au morphing.

Étudiants : Valentin PANNETIER (M2 MNCHP)
Alexis TARDIEU (M2 MNCHP)

Enseignant : Angelo Iollo (IMB)

Semestre 9, année scolaire 2020/2021

Table des matières

1 Les équations de l'élasticité linéaire

1.1 Théorie générale

On étudie le système de l'élasticité linéaire suivant, à résoudre dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$-\mathrm{div}(\sigma(\vec{u})) = \vec{f}$$

dont l'inconnue est le déplacement :

$$\vec{u} : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \vec{u}(x,y) := [u(x,y), v(x,y)]^T \end{array} \right.$$

Le tenseur des contraintes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{bmatrix}$$

est donné par la loi suivante :

$$\sigma_{i,j} = 2\mu[\varepsilon(\vec{u})]_{i,j} + \lambda \mathrm{div}(\vec{u})\delta_{i,j}$$

Le tenseur des déformations est défini par :

$$\varepsilon(\vec{u}) := \frac{1}{2}[\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} & 2\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, le tenseur des contraintes est :

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2\mu+\lambda)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & (2\mu+\lambda)\dfrac{\partial v}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le système d'EDP (très) couplées est alors, en notant le second membre $\vec{f} = [f_1, f_2]^T$:

$$\left| \begin{array}{l} -\left(\dfrac{\partial \sigma_{1,1}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial y}\right) = f_1 \\ -\left(\dfrac{\partial \sigma_{2,1}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{2,2}}{\partial y}\right) = f_2 \end{array} \right.$$

1.2 Discrétisation des dérivées en DF

Compte tenu de la « taille » des termes à discrétiser, traitons-les un par un et voyons comment assembler les matrices à la fin. Il faut donc étudier 4 termes :

— $\partial_x \sigma_{1,1}$:

$$\frac{\partial \sigma_{1,1}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right] = (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

En différences finies en 2D, on approche cette quantité à l'ordre 2 avec :

$$\frac{\partial \sigma_{1,1}}{\partial x} \approx (2\mu+\lambda)\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \lambda\frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

— $\partial_y \sigma_{1,2}$:

$$\frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

En différences finies en 2D, on approche cette quantité à l'ordre 2 avec :

$$\frac{\partial \sigma_{1,2}}{\partial y} \approx \mu\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \mu\frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

— $\partial_x \sigma_{2,1}$:

$$\frac{\partial \sigma_{2,1}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

En différences finies en 2D, on approche cette quantité à l'ordre 2 avec :

$$\frac{\partial \sigma_{2,1}}{\partial x} \approx \mu\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + \mu\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

— $\partial_y \sigma_{2,2}$:

$$\frac{\partial \sigma_{2,2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right] = (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

En différences finies en 2D, on approche cette quantité à l'ordre 2 avec :

$$\frac{\partial \sigma_{2,2}}{\partial y} \approx (2\mu+\lambda)\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \lambda\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

2 Mise sous forme matricielle

2.1 Les opérateurs différentiels

L'inconnue est le vecteur déplacement $\vec{u} = [u, v]^T$. Sur une grille cartésienne de $Nx \times Ny$ points, il y a donc autant d'inconnues pour u et pour v. On note ces inconnues aux nœuds comme suit :

$$U = (u_k) \in \mathbb{R}^{Nx \times Ny} \qquad\qquad V = (v_k) \in \mathbb{R}^{Nx \times Ny}$$

où pour tous $0 \leq i \leq Nx - 1$ et $0 \leq j \leq Ny - 1$:

$$w_{j \cdot Nx + i} = w(x_i, y_j)$$

Seuls 3 opérateurs différentiels sont rencontrés dans ce problème :

— la dérivée partielle seconde par rapport à x. On la note sous forme matricielle :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \equiv L_x W$$

où le Laplacien en direction x est la matrice de $\mathcal{M}_{Nx \times Ny}(\mathbb{R})$ suivante :

$$L_x = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{matrix} & & & \\ \hline
 & \begin{matrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{matrix} & & \\ \hline
 & & \ddots & \\ \hline
 & & & \begin{matrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{matrix}
\end{array} \right]$$

— la dérivée partielle seconde par rapport à y. On la note sous forme matricielle :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \equiv L_y W$$

où le Laplacien en direction y est la matrice de $\mathcal{M}_{Nx \times Ny}(\mathbb{R})$ suivante :

$$
L_y = \frac{1}{\Delta y^2}
\left[
\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} -2 & & & \\ & -2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2 \end{matrix} &
\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} & & \\
\hline
\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} &
\begin{matrix} -2 & & & \\ & -2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2 \end{matrix} & \ddots & \\
\hline
 & \ddots & \ddots &
\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} \\
\hline
 & &
\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} &
\begin{matrix} -2 & & & \\ & -2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2 \end{matrix}
\end{array}
\right]
$$

— la dérivée partielle seconde croisée par rapport à x et y. On la note sous forme matricielle :

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \equiv HW
$$

où l'opérateur de dérivées croisées est la matrice de $\mathcal{M}_{Nx \times Ny}(\mathbb{R})$ suivante :

$$
H = \frac{1}{4\Delta x \Delta y}
\left[
\begin{array}{c|c|c|c}
 &
\begin{matrix} & 1 & & \\ -1 & & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ & & -1 & \end{matrix} & & \\
\hline
\begin{matrix} & -1 & & \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & -1 \\ & & 1 & \end{matrix} & & \ddots & \\
\hline
 & \ddots & &
\begin{matrix} & 1 & & \\ -1 & & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ & & -1 & \end{matrix} \\
\hline
 & &
\begin{matrix} & -1 & & \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & -1 \\ & & 1 & \end{matrix} &
\end{array}
\right]
$$

2.2 Assemblage des matrices

On vient de définir les 3 opérateurs différentiels qui apparaissent dans le système d'EDP de l'élasticité linéaire en 2D. Si on réécrit les équations avec ces notations, on a :

$$\left|\begin{array}{l} -\left(\dfrac{\partial\sigma_{1,1}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{1,2}}{\partial y}\right)=f_1 \\ -\left(\dfrac{\partial\sigma_{2,1}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{2,2}}{\partial y}\right)=f_2 \end{array}\right.$$

soit en version matricielle (après discrétisation par DF), et en notant respectivement F_1 et F_2 les vecteurs des valeurs des seconds membres f_1 et f_2 sur les nœuds de la grille :

$$\left|\begin{array}{l} [(2\mu+\lambda)L_xU+\lambda HV]+\left[\mu L_yU+\mu HV\right]=-F_1 \\ [\mu HU+\mu L_xV]+\left[(2\mu+\lambda)L_yV+\lambda HU\right]=-F_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \left[(2\mu+\lambda)L_x+\mu L_y\right]U+[(\lambda+\mu)H]\,V=-F_1 \\ [(\lambda+\mu)H]\,U+\left[(2\mu+\lambda)L_y+\mu L_x\right]V=-F_2 \end{array}\right.$$

On peut alors mettre le problème sous une forme matricielle par blocs comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2\mu+\lambda)L_x+\mu L_y & (\lambda+\mu)H \\ (\lambda+\mu)H & (2\mu+\lambda)L_y+\mu L_x \end{bmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \end{bmatrix}}_{B}$$

On se ramène donc à un problème matriciel implicite $AX=B$, que l'on peut résoudre avec le gradient conjugué. L'inconnue $X=[U,V]^T$ est de taille $2\times Nx\times Ny$, tout comme le second membre $B=-[F_1,F_2]$. Reste à expliciter la matrice carrée A de taille $(2\times Nx\times Ny)^2$.

2.3 Implémentation rapide avec Eigen

2.3.1 Les blocs élémentaires

On utilise la bibliothèque Eigen pour les matrices creuses. Les 3 précédentes matrices de discrétisation L_x, L_y et H s'écrivent en effet de manière compacte avec des matrices creuses :

— Pour L_x : si on note $M_x\in\mathcal{M}_{Nx\times Ny}(\mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure contenant des 1 sur sa sur-diagonale (sauf en début et fin de blocs), alors on remarque que :

$$L_x=\frac{1}{\Delta x^2}[-2\cdot I_{Nx\times Ny}+M_x+M_x^T]=\frac{1}{\Delta x^2}[M_x-I_{Nx\times Ny}]+\frac{1}{\Delta x^2}[M_x-I_{Nx\times Ny}]^T$$

— Pour L_y : si on note $M_y\in\mathcal{M}_{Nx\times Ny}(\mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure contenant des 1 sur sa diagonale décalée de Nx rangs vers la droite, alors on remarque que :

$$L_y=\frac{1}{\Delta y^2}[-2\cdot I_{Nx\times Ny}+M_y+M_y^T]=\frac{1}{\Delta y^2}[M_y-I_{Nx\times Ny}]+\frac{1}{\Delta y^2}[M_y-I_{Nx\times Ny}]^T$$

— Pour H : si on note $Q \in \mathcal{M}_{Nx \times Ny}(\mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure contenant des -1 sur sa diagonale décalée de $Nx - 1$ rangs vers la droite (sauf en début et fin de blocs), et des 1 sur sa diagonale décalée de $Nx + 1$ rangs vers la droite (sauf en début et fin de blocs), alors on remarque que :

$$H = \frac{1}{4\Delta x \Delta y}[Q + Q^T]$$

2.3.2 Construction de la matrice A

La matrice A est symétrique : il suffit de construire sa partie triangulaire supérieure A^+ par exemple (en ne comptant la diagonale qu'une demie fois), puis de lui ajouter sa transposée $(A^+)^T$ – ce qui est prévu avec Eigen. Mais avant de construire la matrice A, écrivons d'abord les 3 sous-matrices présentes, en ne considérant bien sûr que leur partie triangulaire supérieure :

— $(2\mu + \lambda)L_x + \mu L_y$. Avec les remarques précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\left[(2\mu + \lambda)L_x + \mu L_y\right]^+ &= \frac{2\mu + \lambda}{\Delta x^2}[M_x - I_{Nx \times Ny}] + \frac{\mu}{\Delta y^2}[M_y - I_{Nx \times Ny}] \\
&= \left(\frac{2\mu + \lambda}{\Delta x^2}\right) M_x + \left(\frac{\mu}{\Delta y^2}\right) M_y - \left(\frac{2\mu + \lambda}{\Delta x^2} + \frac{\mu}{\Delta y^2}\right) I_{Nx \times Ny} \\
&= a \cdot M_x + b \cdot M_y - (a + b) \cdot I_{Nx \times Ny}
\end{aligned}$$

où on a défini les coefficients :

$$a = \frac{2\mu + \lambda}{\Delta x^2} \qquad b = \frac{\mu}{\Delta y^2}$$

— $(2\mu + \lambda)L_y + \mu L_x$. Avec les remarques précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\left[(2\mu + \lambda)L_y + \mu L_x\right]^+ &= \frac{2\mu + \lambda}{\Delta y^2}[M_y - I_{Nx \times Ny}] + \frac{\mu}{\Delta x^2}[M_x - I_{Nx \times Ny}] \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta x^2}\right) M_x + \left(\frac{2\mu + \lambda}{\Delta y^2}\right) M_y - \left(\frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{2\mu + \lambda}{\Delta y^2}\right) I_{Nx \times Ny} \\
&= c \cdot M_x + d \cdot M_y - (c + d) \cdot I_{Nx \times Ny}
\end{aligned}$$

où on a défini les coefficients :

$$c = \frac{\mu}{\Delta x^2} \qquad d = \frac{2\mu + \lambda}{\Delta y^2}$$

— $(\lambda+\mu)H$. Cette matrice est entièrement présente dans la patrie triangulaire supérieure de A, donc il faut l'expliciter en totalité. Avec les remarques précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)H &= \frac{\lambda+\mu}{4\Delta x\Delta y}[Q+Q^T] \\
&= \frac{\lambda+\mu}{4\Delta x\Delta y}\cdot Q + \frac{\lambda+\mu}{4\Delta x\Delta y}\cdot Q^T \\
&= e\cdot Q + e\cdot Q^T
\end{aligned}$$

où on a défini le coefficient :

$$e = \frac{\lambda+\mu}{4\Delta x\Delta y}$$

Finalement, on peut donc écrire $A = A^+ + (A^+)^T$ avec une simple instruction dans le code, en ayant uniquement construit sa partie triangulaire supérieure ci-dessous :

$$A^+ = \begin{bmatrix} A'_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A'_{2,2} \end{bmatrix}$$

où les 3 blocs de A^+ sont les suivants, dans l'ordre $A'_{1,1} - A'_{2,2} - A_{1,2}$:

$$A'_{1,1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
-(a+b) & a & & b & & & & & \\
a & -(a+b) & a & & b & & & & \\
 & a & -(a+b) & & & b & & & \\
\hline
b & & & -(a+b) & a & & b & & \\
 & b & & a & -(a+b) & a & & b & \\
 & & b & & a & -(a+b) & & & b \\
\hline
 & & & b & & & -(a+b) & a & \\
 & & & & b & & a & -(a+b) & a \\
 & & & & & b & & a & -(a+b)
\end{array}\right]$$

$$A'_{2,2} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
-(c+d) & c & & d & & & & & \\
c & -(c+d) & c & & d & & & & \\
 & c & -(c+d) & & & d & & & \\
\hline
d & & & -(c+d) & c & & d & & \\
 & d & & c & -(c+d) & c & & d & \\
 & & d & & c & -(c+d) & & & d \\
\hline
 & & & d & & & -(c+d) & c & \\
 & & & & d & & c & -(c+d) & c \\
 & & & & & d & & c & -(c+d)
\end{array}\right]$$

$$
A_{1,2} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & & e & & & & \\
 & & & -e & & e & & & \\
 & & & & -e & & & & \\
\hline
 & -e & & & & & & e & \\
e & & -e & & & & -e & & e \\
 & e & & & & & & -e & \\
\hline
 & & & & -e & & & & \\
 & & & e & & -e & & & \\
 & & & & e & & & &
\end{array}\right]
$$