Бонусная задача. Неделя № 6

Талашкевич Даниил Александрович

14 октября 2020 г.

БОНУСНАЯ ЗАДАЧА № 6

(*) а) Доказать теорему Форда-Фалкерсона; б)доказать теорему Кенига.

Решение:

а) Теорема Форда-Фалкерсона – величина максимального потока в графе путей равна величине пропускной способности его минимального разреза.

Для начало проясним, что такое поток:
Пусть дана транспортная сеть $N = (V, E)$ с источником $s \in V$, стоком $t \in V$ и пропускными способностями c.
Величиной поток называется сумма потоков из источника $|f| = \sum_{v \in V} f_{sv}$

А разрез графа в свою очередь:
Разрез графа в задачах о потоке — такая пара множеств вершин (S, T), что:

1)$S \cup T = V$, где V – множество вершин графа

2)$S \cap T = \emptyset$

3)$s \in S, t \in T$, где s – исток, t – сток.

Если неформально, то разрез графа — множество рёбер, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых, в частности, может быть отдельным узлом.

А величиной разреза называется сумма пропускных способностей таких рёбер (i, j), что $i \in S, j \in T$.

Доказательство: любой поток$f(u, v)$ между вершинами t и s по определению меньше или равен величине любого сечения. Пусть дан некоторый потокf и некоторое сечение. Величина данного потока складывается из величин «грузов», перевозимых по всем возможным путям из вершины s(source, источник) в t(sink, сток) . Каждый такой путь обязан иметь общее ребро с данным сечением. Так как по каждому ребру сечения суммарно нельзя перевести «груза» больше, чем его пропускная способность($f(u, v) \leqslant c(u, v)$), поэтому сумма всех грузов меньше или равна сумме всех пропускных способностей рёбер данного сечения ($\sum\limits_{i=1}^{|E|} c_i$).

Утверждение доказано.

б)Теорема Кёнига – в любом двудольном графе число рёбер в наибольшем паросочетании равно числу вершин в наименьшем вершинном покрытии.

Доказательство: Пусть задан двудольный граф $G = (X, Y, E)$, а M – наибольшее паросочетание в G.

Сначала рассмотрим случай, когда паросочетание M насыщает все вершины доли X, то есть размер паросочетания M равен $|X|$. Очевидно, что вся доля X является вершинным покрытием* в графе G, следовательно, она является и наименьшим вершинным покрытием, и в этом случае утверждение теоремы выполняется.

(*) Вершинное покрытие – это множество его вершин S, такое, что, у каждого ребра графа хотя бы один из концов входит в вершину из S.

Иначе возьмём все вершины доли X, не насыщенные паросочетанием M, и запустим из них обход в ширину($*$) по следующему правилу:

($*$)Поиск в ширину – один из методов обхода графа. Пусть задан граф $G = (V, E)$ и выделена исходная вершина s. Алгоритм поиска в ширину систематически обходит все ребра G для «открытия» всех вершин, достижимых из s, вычисляя при этом расстояние (минимальное количество рёбер) от s до каждой достижимой из s вершины. Алгоритм работает как для ориентированных, так и для неориентированных графов.)

1. Слева направо переходим только по рёбрам, не входящим в M (будем называть их чёрными).

2. Справа налево переходим только по рёбрам, входящим в M (будем называть их голубыми).

Пусть X^+ и Y^+ — подмножества вершин левой и правой доли, посещённых во время обхода, а X^- и Y^- — соответственно, подмножества не посещённых вершин (см. рисунок 1).

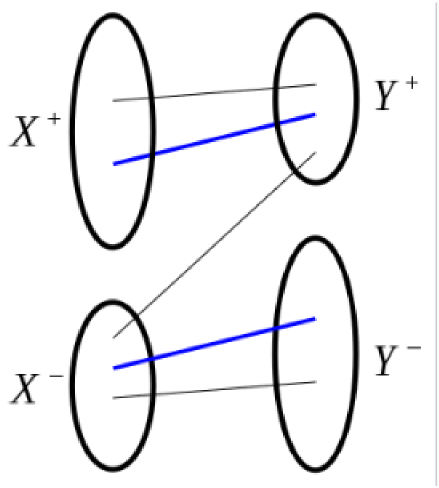

Рис. 1

Между множествами X^+ и Y^- нет чёрных рёбер, поскольку иначе во время обхода мы бы посетили вершины из множества Y^-. По аналогичной причине, между множествами X^- и Y^+ нет голубых рёбер.

Докажем, что между множествами X^+ и Y^- нет также и голубых рёбер. От противного, пусть такое ребро $\{x^+, y^-\}$ есть. Вершина x^+ не могла являться стартовой для обхода в ширину, поскольку она насыщена паросочетанием M. Следовательно, обход в ширину пришёл в x^+ из какой-то вершины y^+ по голубому ребру, что означает, что вершине x^+ инцидентны два голубых ребра $\{x^+, y^-\}$ и $\{x^+, y^+\}$. Но это невозможно, поскольку голубые рёбра образуют паросочетание.

Следовательно, любое ребро графа G инцидентно или вершине из X^- или вершине из Y^+, то есть $X^- \cup\ Y^+$ является вершинным покрытием. Покажем, что все вершины в $X^- \cup\ Y^+$ насыщены паросочетанием M. Для вершин из X^- – это очевидно, поскольку все ненасыщенные вершины левой доли по построению лежат в X^+. Если вY^+ есть ненасыщенная вершина, то существует M –чередующая цепь, заканчивающаяся в ней, что противоречит тому, что паросочетание M является наибольшим. Теперь осталось вспомнить, что между множествами X^- и Y^+ нет рёбер из M, то есть каждому ребру паросочетания инцидентна в точности одна вершина из вершинного покрытия $X^- \cup\ Y^+$. Следовательно, $|M| = |X^- \cup Y^+|$, и вершинное покрытие $X^- \cup Y^+$ является наименьшим.

Доказано