Неделя 4. Графы I. Неориентированные графы

Талашкевич Даниил Александрович

4 октября 2020 г.

Problems:

Задача 1

Вершина степени 1 соединена только с какой-то одной другой вершиной. Тогда должен существовать граф с 7 вершинами и 22 рёбрами.

Если граф полный, то количества его вершин равно $\frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{7\cdot(7-1)}{2} = 21$. Значит при количестве вершин 7 максимальное число ребёр достигается при полном графе и равно 21, тогда рассматриваемого графа с 22 вершинами не существует и условие не выполняется.

Ответ: не выполняется

Задача 2

Число, составленное из цифр-названий городов делится на 3, если сумма этих цифр кратна 3.

Если цифра-название города кратна 3, то она соединяется только с городами, чьи цифры-названия кратны 3. Значит города $3, 6$ и 9 всегда соединены между собой и не соединены ни с какими другими городами. Тогда из 9 можно попасть только в 3 или 6, а в 1 попасть нельзя.

Ответ: нельзя

Задача 3

Очевидно, что в любом несвязном графе существуют рёбра, не имеющие общий конец. Тогда рассмотрим только связные графы.

Пусть некоторая вершина A соединяется с n вершинами графа X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Если $n = 2$, то пусть вершины X_1 и X_2 соединены (другой случай см. в след. абзаце). При этом ни одна из трёх вершин A, X_1, X_2 не может быть соединена с какими-то другими вершинами: если существует какая-то вершина Y, соединённая с X_i (или A) вершиной, то всегда найдётся ребро, не имеющее общий конец с ребром $Y - X_i$ $(Y - A)$ (особенно очевидно, если нарисовать рисунок). Получили граф-треугольник.

Если $n \geqslant 3$ и ни одна из вершин X_i не соединена ни с одной другой, кроме A, то получим граф-звезду. Докажем, что других ситуаций в таком случае нет.

Пусть вершины X_i и X_j соединены, тогда как минимум рёбра $X_i - X_j$ и $X_{i+1} - A$ не имеют общий конец (если $i = n$, то вместо $i + 1$ берём 1), значит этот случай сразу отбрасываем.

Пусть вершины X_i не соединены друг с другом, но в графе есть хотя бы одна вершина B, соединённая с какой-то вершиной X_i. Тогда, очевидно, можно взять ребро $X_j - X_k$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant n, i \neq j, i \neq k)$, которое не имеет общий конец с ребром $X_i - B$ – такое ребро существует всегда при $n \geqslant 3$.

Итого получаем, что условиям удовлетворяют связные графы вида треугольник и звезда.

Задача 4

Цикл длины 3 – треугольник. Значит нужно доказать, что в графе с 400 вершинами, где степень каждой равна 201, есть хотя бы один треугольник.

Рассмотрим произвольную вершину графа Y. По условию она соединяется ещё с 201 вершинами X_i $(1 \leqslant i \leqslant 201)$. Предположим, что в рассматриваемом графе нет подграфа-треугольника. Значит вершины X_i не могут быть соединены друг с другом, иначе образовался бы подграф-треугольник. Если X_i не соединены друг с другом, то степень таких вершин максимум равняется $400 - 200 = 200$, но по условию степень всех вершин равна 201, значит предположение о том, что вершины X_i не соединены друг с другом неверно и существует хотя бы одно ребро $X_i - X_j$ $(x \neq j)$ – образуется треугольник.

Значит из условий задачи следует, что существует хотя бы один цикл длины 3.

Доказано

Задача 5

Если пересечение подграфов – непустое множество, то существует хотя бы одна общая вершина для этих подграфов.

Пусть эта вершина – единственная общая для двух подграфов, тогда она является пересечением этих графов. По определение граф является связным, если он содержит ровно одну компоненту связности – между любой парой вершин существует по крайней мере 1 путь. Значит для связности графа требуется хотя бы наличие одной пары вершин, что для пересечения рассматриваемых подграфов это не выполняется.

Ответ: в общем случае неверно

Задача 6

С одного города можно попасть как минимум в 7 других. Обозначим эти города $1, 2, ..., 8$. Подграф, состоящий из этих 8 вершин – связный.

Рассмотрим вершину графа, не рассмотренную ранее. Обозначим её 9. Она связана как минимум с 7 городами: либо только с городами 1-8, либо частично с $1 - 8$ и с $10 - 15$ (только с $10 - 15$ невозможно, так как это только 6 городов). То есть в любом случае город 9 связан с каким-то из городов $1 - 8$, значит подграф $1 - 9$ – связный.

Аналогично с вершиной 10: она либо связана с вершинами $1 - 9$, либо частично с $1 - 9$ и частично с $11 - 15$, значит город 10 связан с каким-то из $1 - 9$ и он – связный.

Так продолжаем рассуждения до тех пор, пока не доберёмся до 15 вершины. Она в любом случае связана с $1 - 14$ городами, значит подграф $1 - 15$ – связный, а этот подграф и является исходным графом. Тогда из любого города можно добраться в любой другой город.

Доказано

Задача 7

Утверждение на языке теории графов: в каждом неориентированном графе существует две вершины одинаковой степени (если граф не пустой и не состоит из 1-ой вершины).

Доказательство: пусть граф состоит из $n \geqslant 2$. Пусть у каждой вершины разная степень: $0, 1, 2, ..., n - 1$. Значит должна существовать вершина со степенью $n - 1$, то есть это вершина связана со всеми вершинами графа, но так как существует вершина со степенью 0, которая не связана ни с одной вершиной, получаем противоречие.

Доказано

Задача 8

Заметим, что у графа-цикла или графа-пути степень любой вершины равна 1 или 2. У дополнений этих графов степень вершин должна снова стать 1 или 2.

Пусть в графе n вершин, если у вершины степень 1 или 2, то у дополнения графа у этой вершины степень равна $n-2$ или $n-3$. Максимальное число вершин графа реализуется при ситуации, когда у вершины дополнения графа степень $n-3$, а у графа степнь у этой же вершины 2: $n-3=2 \Rightarrow n=5$. Итак, в графе не более 5 вершин.

Если $n=1$, то граф не является графом-циклом или графом-путём.

Если $n=2$, то дополнение графа – изолированные друг от друга вершины.

Если $n=3$, возможны 2 ситуации: граф-путь $X_1-X_2-X_3$, тогда в его дополнеии вершина X_2 изолированна от остальных, и когда граф – граф-цикл $X_1-X_2-X_3-X_1$, тогда дополнение графа – 3 изолированные вершины.

Если $n=4$, возможны 2 ситуации: граф-путь $X_1-X_2-X_3-X_4$, тогда его дополнение – граф-путь $X_2-X_4-X_1-X_3$, и когда граф – граф-цикл $X_1-X_2-X_3-X_4-X_1$, тогда дополнение графа – объединение графов X_1-X_4 и X_2-X_3, что не удовлетворяет условиям.

Если $n=5$, возможны 2 ситуации: граф-путь $X_1-X_2-X_3-X_4-X_5$, тогда в его дополнении вершины X_1 и X_5 связаны двумя способами: напрямую X_1-X_5 и через вершину X_3: $X_1-X_3-X_5$, значит в дополнении графа содержится подграф-цикл, не равный самому графу – не удовлетворяет условям. Вторая ситуация: граф-цикл $X_1-X_2-X_3-X_4-X_5-X_1$, тогда в дополнении графа степени вершин равны $5-2=3$, но из условий следует, как было написано раньше, что максимальная степень вершин – 2.

Подводя итоги, получаем следующие графы: <u>граф-путь из 4 вершин и граф-цикл из 5 вершин</u>.

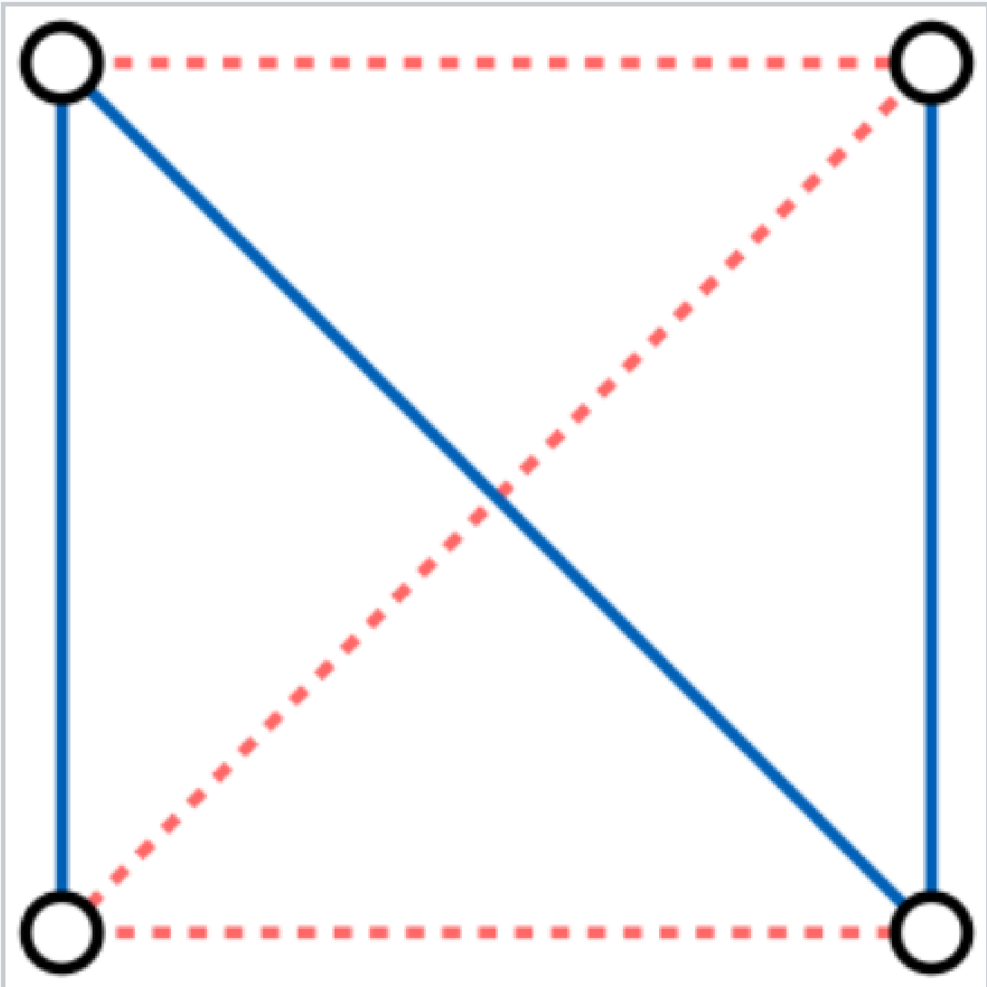
Задача 9

Всего числа имею число разрядов $= n$, тогда всего номеров будет $2 \cdot 2 \ldots 2 = 2^n$. Очевидно, что у нас число ребер $\frac{2^n}{2}$, так как любому числу $\ldots 0110010 \ldots$ соответствует одно противоположное, где 1 заменены на 0 и наоборот. Тогда получаем, что 2 такие вершины создают одну компоненту связности и всего связных компонент будет $\frac{2^n}{n}$.

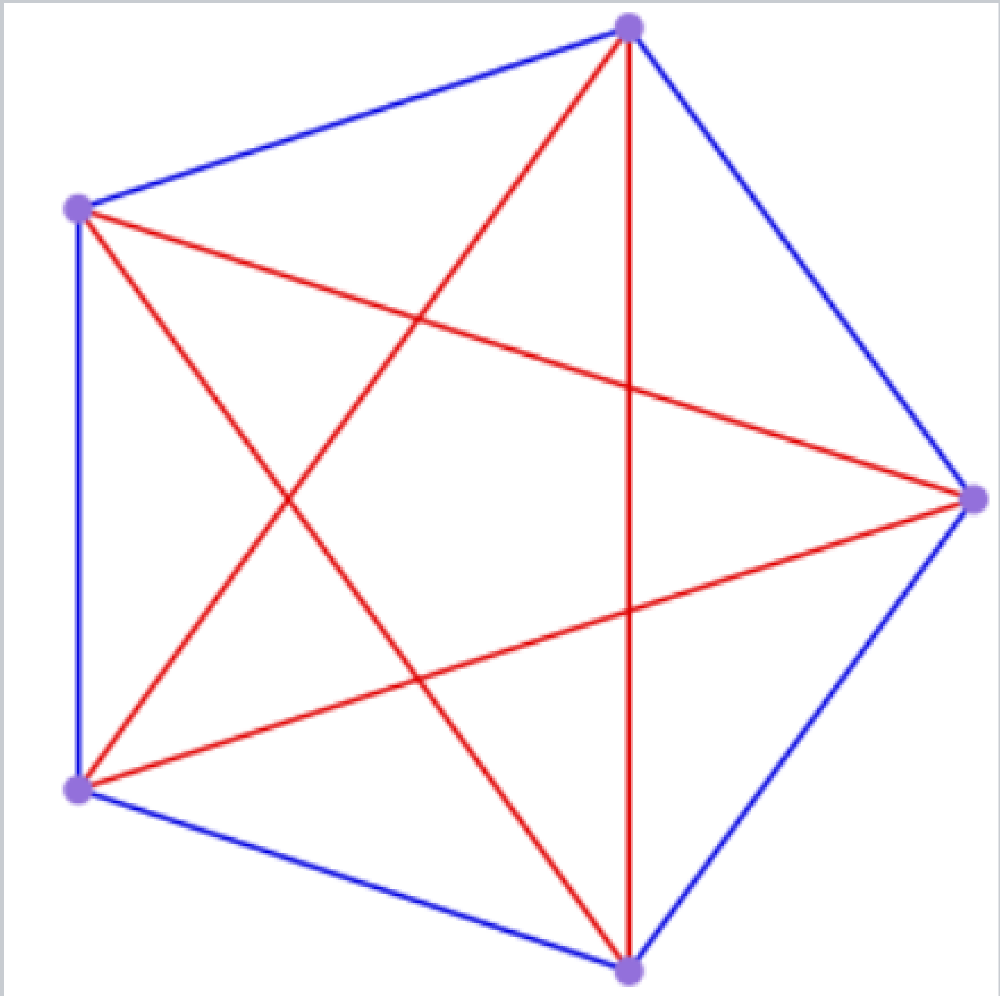
связных компонентов $- \frac{2^n}{n}$

Задача 10

Примеры рисунков приведены ниже.



Самодополнительный граф: голубой граф N изоморфен своему дополнению, красному графу Z.



Самодополнительный граф: голубой граф изоморфен своему дополнению, красному графу.