Неделя 8. Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты

Талашкевич Даниил Александрович

28 октября 2020 г.

Problems:

1. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на 1 или обе координаты на 2. Сколько есть способов переместить Робота из точки (0, 0) в точку (4, 5)?

Решение:

В какую-либо точку с координатами $x, y \geqslant 2$ можно попасть $P(x, y) = P(x-1, y) + P(x, y-1) + P(x-2, y-2)$ способами, где $\forall x, y \in \mathbb{N} \mapsto P(0, y) = P(x, 0) = 1$. В итоге получим, что $P(4, 5) = 189$. Наглядно это видно на следующей картинке:

x/y	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	7	12	18	25
3	1	4	12	26	47	76
4	1	5	18	47	101	189

Ответ: 189

2. В магазине продается 10 видов пирожных. Сколькими способами можно купить 100 пирожных (порядок покупки не важен)?

Решение:

Сопоставим вид пирожного со слагаемым x_1. У нас есть 10 видов пирожных, значит у нас есть 10 сопоставленных им слагаемым X_i ($1 \leqslant i \leqslant 10$).

Значение слагаемого x_i означает количество выбранных пирожных этого вида i. Значит получаем следуюущю эквивалентную задачу, учитывая, что нужно выбрать 100 пирожных: найти количество решений уравнения в целых неотрицательных числах:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 100$$

Эта задача – задача Муавра и имеет следующий ответ: количество решений равно C_{109}^{9}. Значит и исходная задача имеет такой же ответ

Ответ: C_{109}^{9}

3. Какое слагаемое в разложении $(1+2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

Решение:

$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^n \cdot b^n$. В данной задаче $a = 1$, тогда $(1+2)^n = C_n^0 \cdot 1 + C_n^1 \cdot 2^1 + \cdots + C_n^n \cdot 2^n$. Рассмотрим $k-$ый и $k+1-$ член в разложении по формуле бинома Ньютона: $\frac{x_k}{x_{k+1}} < 1$ – условие, чтобы член разложения возрастал. Тогда $\frac{2^k n!(k+1)!(n-k-1)!}{2^{k+1}(n-k)!n!} < 1 \Rightarrow k < \frac{2n-1}{3}$.

Для $n = 0$ наибольший член – первый.

Для $n = 1$ наибольший член – второй.

Для всех остальных $n \geqslant 2$ имеем, что наибольший член под номером $\left[\frac{2n-1}{3}\right] + 1$.

Ответ: для $n \geqslant 2$ номер равен $\left[\frac{2n-1}{3}\right] + 1$, частные случаи описаны в решении.

4. Найдите число слов длины n над алфавитом $\{0, 1\}$, в которых нет двух единиц подряд.

Решение:

Рассмотрим последнюю цифру слова. Если она равна 1, то предпоследняя цифра равна 0 и нам нужно посчитать количество слов длины $n-2$. Если же она равна 0, то ограничений на предпоследнее число нет, значит нужно найти количество слов длины $n-1$. Значит количество слов длины n без двух единиц подряд $K(n)$ равно $K(n-1) + K(n-2)$.

Получили рекуррентную формулу, значит нужно задать начальные условия: у нас есть только 1 слово без цифр и 2 слова, состоящих из одной цифры. Значит получаем следующее: $K(n) = K(n-1) + K(n-2)$, $K(0) = 1, K(1) = 2$. очевидно, что $K(n) = F_{n+2}$, где F_n – n-ое число Фибоначии.

Ответ: F_{n+2} слов без двух единиц подряд

5. Дать комбинаторное доказательство тождества

а) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

б) $\binom{n}{m} = \binom{n-2}{m} + 2\binom{n-2}{m-1}\binom{n-2}{m-2}$.

Решение:

а) Так как выбрать m элементов из n элементов тоже самое, что выбрать $n-m$ элементов из n элементов, потому что если мы выберем $n-m$,то оставшиеся m элементов будут однозначно определены и наоборот. Тогда $C_n^m = C_n^{n-m}$. Распишем что означает левая часть в исходном равенстве: сначала мы выбираем m элементов из n элементом, а потом из этих m выбираем k элементов. Это тоже самое, как показано выше, что и выбрать сначала $n-m$ элементов,а потом из оставшихся k элементов.

Правая часть равенства: количество способов из n выбрать k элементов, а из оставшихся выбрать $m-k$. Это то же самое, что $C_n^k \cdot C_{n-k}^{n-m}$, опираясь на док-во в первой части решения.

Тогда имеем, что в первом случае мы сначала выбрали $n-m$ элементов, а потом k из оставшихся, а во втором сначала выбрали k элементов, а из оставшихся $n-m$, что одно и тоже.

б) Воспользуемся тождеством Вандермонда:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Докажем его: Предположим, что комитет состоит из m мужчин и n женщин. Сколькими способами можно сформировать подкомитет из r членов? Ответом является

$$\binom{m+n}{r}.$$

Это число является суммой по всем возможным значениям k числа комитетов, состоящим из k мужчин и $r-k$ женщин:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Отсюда следует и доказательство исходного равенства.

Ответ: доказано.

6. Какое из чисел больше $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$.

Решение:

Нам нужно сравнить два числа $C_{F_{1000}}^{F_{998}+1}$ и $C_{F_{1000}}^{F_{999}+1}$. Раскроем эти числа по определению:

$$\frac{1000!}{(F_{998}+1)!(F_{1000}-F_{998}-1)!} \text{ или } \frac{1000!}{(F_{999}+1)!(F_{1000}-F_{999}-1)!}$$

$$(F_{999}+1)!(F_{1000}-F_{999}-1)! \text{ или } (F_{998}+1)!(F_{1000}-F_{998}-1)!$$

$$(F_{999}+1)!(F_{998}-1)! \text{ или } (F_{998}+1)!(F_{999}-1)!$$

$$\frac{(F_{999}+1)!(F_{998}+1)!}{F_{998}(F_{998}+1)} \text{ или } \frac{(F_{999}+1)!(F_{998}+1)!}{F_{999}(F_{999}+1)}$$

$$F_{999}(F_{999}+1) \text{ или } F_{998}(F_{998}+1)$$

$$F_{999}(F_{999}+1) > F_{998}(F_{998}+1)$$

Значит изначальное число слева было больше.

Ответ: $C_{F_{1000}}^{F_{998}+1} > C_{F_{1000}}^{F_{999}+1}$

7. Приведите комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{k=0}^{(n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

Решение:

Рассмотрим множество последовательностей длины n, состоящих из 0 и 1, в которых не бывает двух 1 стоящих рядом. Докажем, что количество таких последовательностей равно F_{n+2} (придадим числам Фибоначчи комбинаторный смысл):

Предположим, что имеется лента, разбитая на клетки и уходящая вправо до бесконечности. На первой клетке этой ленты сидит кузнечик. Из любой клетки кузнечик может перепрыгнуть либо на одну, либо на две клетки вправо. Тогда a_n – кол-во способов, которыми кузнечик может добраться до n-ой клетки. Тогда $a_1 = a_2 = 1$. Кроме того, в $n+1$-ую клетку кузнечик может попасть либо из n-ой клетки, либо перепрыгнув n-ую клетку. Поэтому $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$. Отсюда $a_n = F_{n-1} \Rightarrow F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Тогда, если каждую клетку обозначит за 1 или 0 в соответствии с тем, как прыгай заяй от этой клетки: 1 – если через 1 клетку и 0 если на следующую соответственно получаем, что 2 стоящие рядом единицы не могут быть, потому что если в одной стоит единица, то на следующей клетке заяц не мог оказаться и, соответсвенно, там не может стоять единица.

Теперь, когда мы придали числам Фибоначчи комбинаторный смысл докажем равенство:

Число единиц в последовательности обозначим через k. Ясно, что $0 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}$. При фиксированном $k \geqslant 1$ поступаем так: для всех единиц, кроме последней, следующее число равно нулю. Вычеркнем эти нули в количестве $k-1$ штуки. Останется $n-k+1$ член, среди которых k единиц. Таких последовательностей C_{n-k+1}^{k}. Для каждой из них можно однозначно вернуться назад, вписав нули после каждой из единиц кроме самой последней. При $k = 0$ эта же формула также даёт верный результат, равный единице. Остаётся просуммировать сочетания по всем возможным k таким, что $0 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}$, что дает такое результат:

$$\sum_{k=0}^{(n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

Ответ: доказано

8. Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.

Решение:

Задачу можно свести к такой: у нас есть 20 книг и 4 разделителя и нам нужно по порядку расставить книги и разделители и посчитать количество таких расстановок. Ограничений на то, что разделители не могут находится рядом, нет, так как в полке могут и не находится книги.

Так как нам важен порядок книг, но все разделители считаются одинаковыми, то нам нужно посчитать количество перестановок 24 объектов с учётом того, что нам не важен порядок разделителей, так как они все эквивалентны. Отсюда получаем $\frac{24!}{4!}$ способов, где 4! и есть поправка на разделители.

Ответ: $\frac{24!}{4!}$ способа

9. Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования – число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?

Решение:

Представим, что у нас есть 8 единиц и нам нужно выбрать 7 мест, куда поставить палочки между ними, таким образом разграничим их на 8 целых слагаемых, не меньше нуля. Выбрать 7 позиций палочек можно следующим образом: добавим 7 позиций, тогда нужно расставить 7 палочек среди $7 + 8$ позиций, тогда итоговый ответ C_{15}^{7}.

Ответ: C_{15}^{7}

10. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ», так чтобы две буквы «О» не стояли рядом?

Решение:

В слове "ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ" всего 18 букв, 7 из которых – буква "О".

Рассмотрим для начала слово без букв "О". Количество перестановок равно

$$k = \frac{11!}{2!2!3!}$$

Далее включим в это слово все буквы. Наша цель – расставить их между буквами слова таким образом, чтобы у нас не стояли две буквы "О" подряд, то есть нельзя ставить больше одной буквы между словами. У нас есть 11 букв в слове, то есть 12 мест, куда можно вставить буквы "О". Из этих 12 мест нам нужно выбрать 7 – C_{12}^{7} способов.

Итого получим $kC_{12}^{7} = \frac{11!12!}{2!2!3!5!7!}$ способов.

Ответ: $\frac{11!12!}{2!2!3!5!7!}$ **способов**

11. Вы купили в магазине набор из 30 бусинок. Бусинки бывают 15 разных цветов, каждого цвета по две штуки. Сколькими способами можно составить, используя все бусинки, круглое ожерелье, если ожерелья, которые совмещаются вращением в пространстве, считать одинаковыми. Более формально, два ожерелья одинаковые, если одно можно совместить с другим так, чтобы они совпали.

Решение:

Для начала разорвём ожерелье в некотором месте, представив его в виде линии из 30 бусинок. Найдём количество всех возможных комбинаций рамещения бусинок, учитывая, что есть по 2 бусинки 15 различных цветов. Очевидно, что количество таких размещений равно

$$S_0 = \frac{30!}{(P_2)^{15}} = \frac{30!}{(2!)^{15}}$$

Теперь соберём начало и конец лнии вместе – получим ожерелье. Теперь нам нужно учесть, что мы посчитали некоторые одинаковые комбинации более одного раза, так как мы не учитывали поворот ожерелья в пространстве. Учтём, что мы посчитали одну и ту же комбинацию 30 раз, так как можно получить 30 сдвигов в линии из 30 бусинок.

Теперь учтём, что можно зеркально отразить некоторое ожерелье, получив другое или то же самое ожерелье. Мы получим другое ожерелье только в том случае, если исходное ожерелье хирально.

Найдём количество нехиральных комбинаций. Рассмотрим две произвольные бусинки одинакового цвета. Пусть кратчайшее расстояние между ними k бусинок, то есть на этом расстоянии между двумя бусинками находятся $k-1$ других бусинок, причём их цвет отличается от выбранных ранее двух бусинок. При отзеркаливании рассматриваемой комбинации нумерация этих $k-1$ бусинок меняется на обратную, так как направление по часовой стрелке изменилось на направление против часовой, но по обоим направлениям должны быть одни и те же бусинки. Отсюда сразу следует, что $k-1$ – чётное число и нехиральная комбинация имеет следующий вид: берём случайную комбинацию из 15 бусинок различных цветов, дублируем эту комбинацию, а затем соединяем концы и начала эти одинаковых комбинаций. Очевидно, что при отражении такой комбинации в зеркале получается та же самая комбинация.

Теперь подсчитаем количество таких нехиральных комбинаций: у нас есть 15! способов собрать комбинацию из 15! бусинок различного цвета. Значит и количество нехиральных комбинаций равно 15!.

С учётом всего ранее написанного имеем следующее количество комбинаций бусинок в ожерелье:

$$S_1 = \frac{15!}{2} + \frac{S_0}{30} - 15! = \frac{29!}{2^{15}} - \frac{15!}{2}$$

Ответ: $\frac{29!}{2^{15}} - \frac{15!}{2}$ способов