Бонусная задача №1 по дискретному анализу

Талашкевич Даниил Александрович

27 сентября 2020 г.

Problems:

Бонусная задача. Найдите асимптотическую оценку количества функций от n переменных, которые зависят от всех своих аргументов существенно. Иначе говоря, надо придумать такие верхнюю и нижнюю оценки на это количество, чтобы их отношение стремилось к 1 при $n \to \infty$.

Решение:

Посчитаем общее количество всех булевых функций от n переменных. Всего разных наборов из n нулей и единиц будет 2^n штук, т.к. для каждой из n переменных будет 2 варианта. Иными словами, таблица истинности содержит 2^n строк. Поскольку на каждом из 2^n наборов функция может принимать одно из двух значений, то общее количество булевых функций составит 2^{2^n}.
И так имеет, что общее число булевских функций равно 2^{2^n}.
По условию задачи у всех этих функций все n переменных будут существенными. Если предположить, что n_i переменная фиктивна, то ее можно удалить и получаем б.ф. от $n-1$ переменной. Тогда отношение "неправильных"функций к общему количеству мало, то есть

$\frac{y(n)}{2^{2^n}} \to 0$, при $n \to \infty$. Значит отношение "правильных"функций к общему кол-ву:

$\frac{x(n)}{2^{2^n}} \to 1$, при $n \to \infty$. Ввиду того, что $x(n) + y(n) = 2^{2^n}$. Получаем асимптотически точную оценку. Она заключена между $2^{2^n} - n2^{2^{n-1}}$ и 2^{2^n}.

Ответ: между $2^{2^n} - n2^{2^{n-1}}$ и 2^{2^n}.