Неделя № 5. КЛАССНАЯ РАБОТА.Графы II. Деревья и раскраски

Талашкевич Даниил Александрович

5 октября 2020 г.

Problems:

1. Дерево имеет 2020 вершин. Верно ли, что в нём найдется путь длины 3?

Решение:

Возьмем граф-звезду K_{2020}, которая является деревом. Максимальная длина пути будет равна 2. Приведен контр пример.

не верно

2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

Решение:

Предположим, что такое дерево G существует. Пусть U и V различные его вершины, со степенью 5. В G имеется ровно 5 различных ребер с концом в U. Не более чем $(5+5)-9=1$ из них имеет конец в V, так что найдется еще хотя бы 4 различных ребра,отличных от рассмотренных, с концом в V.

Итак, в G не менее девяти различных ребер, тогда вершин $V=|E|+1 \geqslant 10$. А так как $9<10$, то получаем противоречие.

не может

3. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т. е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

Решение:

Пусть всего в графе G вершин $V(G)=n$. (Так как наш граф – это дерево, то $1=V(G)-E \Rightarrow E=n-1$.

Обозначим кол-во вершин, степени 1 за k, тогда $k \leqslant n$. Тогда все вершины степени отличной от 1 обозначим за U_i, где $i=\{1,\ldots,n-k\}$.

А вершины степени 1 за U_j, где $j=\{n-k+1,\ldots,n\}$.

По лемме о рукопожатия получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n-k} U_i+k=2|E|=2(n-1)$. т.к. все вершины со степенью отличной от нуля не могу иметь степень 2, то их степень $deg(U_i) \geqslant 3 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n-k} U_i \geqslant 3(n-k)$.

Окончательно имеем $\sum\limits_{i=1}^{n-k} U_i+k \leqslant 3(n-k)+k \Rightarrow 3(n-k)+k \leqslant 2(n-1) \Rightarrow k \geqslant \frac{n}{2}+1 \Rightarrow k>\frac{n}{2}$.

Доказано

4. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево.

Решение:

Докажем индукцией по числу ребер n ($n \geqslant 0$).

База индукции $n = 0$. Очевидна, получаем множества не связных подграфов графа G,состоящих просто из 1 вершины. А так как 1 вершина – это дерево, то все выполняется.

Пусть при $n = k$ выполняется. Докажем для $n = k + 1$.

Если в графе G если ребро, после удаления которого граф G остается связным и ,получается, имеет кол-во ребер $|E| = n = k$, что по предположению индукции верно,тогда имеем граф $G(|E| = k + 1)$,который имеет остовое дерево и подходит для G.

Если такого ребра нет, то получаем после удаления несвязный граф и, соответсвенно, будет остовое дерево.

Доказано

5.

Решение:

Ответ:

6.

Решение:

Ответ:

7.

Решение:

Ответ:

8.

Решение:

Ответ:

9.

Решение:

Ответ:

10.

Решение:

Ответ: