Домашнее задание по дискретному анализу. Неделя 1. Алгебра логики. Введение

Талашкевич Даниил Александрович

18 октября 2020 г.

Задача 1

Согласно условию задачи,

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \to (2z > x)) \wedge ((x < y) \to (x > 2z)) = 1$$

Так как это выражение - истина, тогда истине равны:

$a)$ $\neg(x = y) = 1$
$b)$ $(y < x) \to (2z > x) = 1$
$c)$ $(x < y) \to (x > 2z) = 1$

Из пункта а) следует, что $x \neq y$, то есть $x \neq 16$.
Пункт б) выполняется всегда, кроме случая:

$$\begin{cases} (y < x) = 1 \\ (2z > x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > y \\ x \geqslant 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 16 \\ x \geqslant 14 \end{cases}$$

$$x > 16$$

То есть пункт б) выполняется, если

$$x \leqslant 15$$

Пункт в) отличается от б) только знаками неравенств:

$$x \geqslant 15$$

В итоге получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x \geqslant 15 \\ x \leqslant 15 \\ x \neq 16 \end{cases}$$

$$x = 15$$

Ответ: 15

Задача 2

$$f(x, y, z) = \neg((x \wedge \neg y) \wedge z)$$

Найдём все значения функции для построения таблицы истинности:

$$f(0,0,0) = \neg((0 \wedge \neg 0) \wedge 0) = \neg(0 \wedge 0) = 1$$

$$f(0,0,1) = \neg((0 \wedge \neg 0) \wedge 1) = \neg(0 \wedge 1) = 1$$

$$f(0,1,0) = \neg((0 \wedge \neg 1) \wedge 0) = \neg(0 \wedge 0) = 1$$

$$f(0,1,1) = \neg((0 \wedge \neg 1) \wedge 1) = \neg(0 \wedge 1) = 1$$

$$f(1,0,0) = \neg((1 \wedge \neg 0) \wedge 0) = \neg(1 \wedge 0) = 1$$

$$f(1,0,1) = \neg((1 \wedge \neg 0) \wedge 1) = \neg(1 \wedge 1) = 0$$

$$f(1,1,0) = \neg((1 \wedge \neg 1) \wedge 0) = \neg(0 \wedge 0) = 1$$

$$f(1,1,1) = \neg((1 \wedge \neg 1) \wedge 1) = \neg(1 \wedge 0) = 1$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Задача 3

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)$$

Для доказательства рассмотрим, когда (в каких случаях) оба выражения равны истине:

1) $f_1(x_1, x_2) = (1 \oplus x_1) \oplus x_2 = 1$
a) если $x_1 = 0$, то $x_2 = 0$,
b) если $x_1 = 1$, то $x_2 = 1$, То есть $x_1 = x_2$, если $f_1(x_1, x_2) = 1$

2) $f_2(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) = 1$
Заметим, что $x_1 = x_2 = 0$ или $x_1 = x_2 = 1$, иначе возникает ситуация $1 \to 0 = 0$, то есть $x_1 = x_2$, если $f_2(x_1, x_2) = 1$

Оба выражения равны истине только тогда, когда $x_1 = x_2$, в остальных случаях ($x_1 \neq x_2$) они равны нулю (лжи), то есть булевы функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ ведут себя одинаково при различных x_1 и x_2, значит они эквивалентны.

Доказано

Задача 4

a) $x \wedge (y \to z) = (x \wedge y) \to (x \wedge z)$

Пусть $x = 0$, тогда выражение слева в a) всегда равно нулю

$$(0 \wedge (y \to z)) = 0$$

Значит

$$(x \wedge y) \to (x \wedge z) = 0$$

$$\begin{cases} x \wedge y = 1 \\ x \wedge z = 0 \end{cases}$$

$$x = y = 1$$

Получили, что $x = 1$, предполагая, что $x = 0$. Противоречие. Дистрибутивность не выполяне
b) $x \oplus (y \leftrightarrow z) = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$

Предположим, что выражение слева ($x \oplus (y \leftrightarrow z)$) равно истине, тогда:

$$x \oplus (y \leftrightarrow z) = 1 \tag{1}$$

$$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z) = 1 \tag{2}$$

Рассмотрим решение уравнения (1): случай 1:

$$\begin{cases} x \oplus y = 1 \\ x \oplus z = 1 \end{cases}$$

$$y = z \neq x$$

Рассмотрим случай 2:

$$\begin{cases} x \oplus y = 0 \\ x \oplus z = 0 \end{cases}$$

$$y = z = x$$

В любом случае в решении $(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z) = 1$ выполняется $y = z$.

Решением уравнения (2) являются 2 системы:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y \neq z \end{cases} \tag{4}$$

То есть одно из решений содержит $y \neq z$, но в решении уравнения (1) всегда $y = z$. Противоречие. Дистрибутивность не выполянется.

Задача 5

a) Коммутативность для импликации $x \to y = y \to x$ не выполняется, так как если $x = 0, y = 1$, то $0 \to 1 = 1$, но $1 \to 0 = 0$

b) Ассоциативность $(x \to y) \to z = x \to (y \to z)$ не выполняется, так как при если $x = 0$, то $x \to (y \to z) = 1$ при любых y и z, при этом $x \to y = 1$, но если $z = 0$, то $(x \to y) \to z = 0$, в то время как $x \to (y \to z) = 1$

Задача 6

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$

Для наглядности составим таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Заметим, что при $x_1 = x_2$ выходит $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, а в других случаях $f(x_1, x_2, x_3) = 1$, значит x_1 и x_2 - существенные переменные, а x_3 - фиктивная.

b) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$

Если $x_1 = 1$, то $(x_1 \to (x_1 \vee x_2)) = (1 \to 1) = 1$.

Если $x_1 = 0$, то $(x_1 \to (x_1 \vee x_2)) = (0 \to (0 \vee x_2)) = 1$.

Получили, что $(x_1 \to (x_1 \vee x_2)) = 1$ не зависит от x_1 и тем более от x_2, значит $g(x_1, x_2, x_3) = 1 \to x_3$. Итак, x_1 и x_2 - фиктивные переменные, а x_3 - существенная пе

Задача 7

$$f(x_1, ..., x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, ..., x_n)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, ..., x_n))$$

1) Пусть $f(0, x_2, ..., x_n) = 0$, тогда:

$$f(0, x_2, ..., x_n) = (0 \vee f(0, x_2, ..., x_n)) \wedge (1 \vee f(1, x_2, ..., x_n)) = 0 \wedge 1 = 0$$

Выражение выполняется.

2) Пусть $f(0, x_2, ..., x_n) = 1$, тогда:

$$f(0, x_2, ..., x_n) = (0 \vee f(0, x_2, ..., x_n)) \wedge (1 \vee f(1, x_2, ..., x_n)) = 1 \wedge 1 = 1$$

Выражение выполняется.

3) Пусть $f(1, x_2, ..., x_n) = 0$, тогда:

$$f(1, x_2, ..., x_n) = (1 \vee f(0, x_2, ..., x_n)) \wedge (0 \vee f(1, x_2, ..., x_n)) = 1 \wedge 0 = 0$$

Выражение выполняется.

4) Пусть $f(1, x_2, ..., x_n) = 1$, тогда:

$$f(0, x_2, ..., x_n) = (1 \vee f(0, x_2, ..., x_n)) \wedge (0 \vee f(1, x_2, ..., x_n)) = 1 \wedge 1 = 1$$

Выражение выполняется.

Итак, исходное равенство выполняется для любых функций с любыми значениями x_1. Интересно также отметить, что равенство выполняется для любого аргумента x_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, так как аргументы являются независимыми.

Задача 8

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n} = 1$$

Равенство возможно только в одном случае: $x_i^{\alpha_i} = 1$ ($1 \leqslant i \leqslant n$). Значение $x_i^{\alpha_i}$ зависит от x_i и α_i: если $x_i = 0$, то $\alpha_i = 0$, чтобы $x_i^{\alpha_i} = 1$ и если $x_i = 1$, то $\alpha_i = 1$, чтобы $x_i^{\alpha_i} = 1$. Определённому значению x_i соответсвует определённое α_i, значит если выбран определённый набор $x_1, ..., x_n$, ему будет соответствовать единственный набор $\alpha_1, ..., \alpha_n$

Доказано

Задача 9

$$\bigvee_{i,j}(x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ... \vee \overline{x_n})$$

1) $\bigvee\limits_{i,j}(x_i \oplus x_j) = 1$, если хотя бы одна комбинация x_i и x_j отличается по значениям. В этом же случае $(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) = 1$, так как среди x_i будет по крайней мере одна единица, и $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ... \vee \overline{x_n}) = 1$, так как по крайней мере найдётся одно значение $x_i = 0$, а значит $\overline{x_i} = 1$. Значит

$$\bigvee_{i,j}(x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ... \vee \overline{x_n}) = 1$$

Получается, что равенство в условии выполняется.

2) $\bigvee\limits_{i,j}(x_i \oplus x_j) = 0$, если все значения x_i равны (0 или 1), значит либо $(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) = 0$, либо $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ... \vee \overline{x_n}) = 0$, тогда

$$\bigvee_{i,j}(x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ... \vee \overline{x_n}) = 0$$

Равенство в условии снова выполняется, значит оно справедливо для любых значений x_i.

Задача 10

Пусть булева функция выражается только через связки $\vee$ и $\wedge$. Заметим, что эти связки могут только либо сохранять предыдущие значения выражений (переменных), либо увеличивать их до 1, значит функции, использующие только эти связки - нестрого возрастающие. Получается, что нестрого или строго убывающую функцию эти связки описать не могут (перевести 1 в 0), для этого как минимум требуется использовать связку $\neg$. Значит существует убывающая функция, которая не может быть описана только связками $\vee$ и $\wedge$.