Неделя № 10. Бинарные отношения и их графы. Отношения эквивалентности

Талашкевич Даниил Александрович

15 ноября 2020 г.

Problems:

1. Ответьте на следующие вопросы для бинарного отношения $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$. Является ли R рефлексивным? симметричным? транзитивным? отношением эквивалентности? Для каждого отношения R нарисуйте соответствующий граф. Используйте неориентированный граф для симметричных бинарных отношений, в случае нерефлексивных бинарных отношений используйте петли.

а) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(3,2)\}$.

б) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

Решение:

а) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(3,2)\}$;

Так как $R \subseteq (1,2,) \times (1,2,3)$, то R является рефлексивным благодаря первым трем парам. Так же не является симметричным хотя бы потому, что нет пары $(2,1)$ для пары $(1,2)$. И так же является транзитивным. Значит отношением эквивалентности не является.

б) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

Не рефлексивно, потому что нет пары $(3,3)$. Симметрично и транзитивно , значит это отношение эквивалентности.

Ответ: а) отношение эквивалентности. б) нет.

2. Выразите отношение «племянник(-ца)» через отношения «отец» и «мать» и операции над отношениями.

Решение:

$\exists C, D$: A племянник $B \Leftrightarrow ((B$ брат $C) \vee (B$ сестра $C)) \wedge ((C$ отец $A) \vee (C$ мать $A)) \Leftrightarrow \exists C, D : (((D$ отец $B) \wedge (D$ отец $C)) \vee ((D$ мать $B) \wedge (D$ мать $C))) \wedge ((C$ отец $A) \vee (C$ мать $A))$.

Ответ: $\exists C, D$: $(((D$ **отец** $B) \wedge (D$ **отец** $C)) \vee ((D$ **мать** $B) \wedge (D$ **мать** $C))) \wedge ((C$ **отец** $A) \vee (C$ **мать** $A))$.

3. Пусть бинарные отношения $P_1, P_2 \subseteq A \times A$ транзитивны. Будут ли $\overline{P_1}, P_1 \cap P_2, P_1 \cup P_2, P_1 \circ P_2$ обладать теми же свойствами.

Решение:

1) $\overline{P_1}$. Приведем контрпример, когда P_1 транзитивно, а $\overline{P_1}$ нет:

Транзитивность можно изобразить как граф-треугольник K_3 и изолированная вершина. Транзитивность будет выполнятся если есть путь длины 1 между вершинами a, b, а с b до другой вершины c существует путь длины 1, то тогда должен существовать путь длины 1 между вершинами a, c. В свою очередь дополнение этого графа будет не транзитивно, потому что найдутся в этом дополнении две вершины, между которыми на будет прямого пути.

Отсюда ответ: $\overline{P_1}$ не обладает транзитивностью

2) $P_1 \cap P_2$. Рассмотрим x, y, z: если $(x; y)$ и $(y; z)$ входит и в P_1 и в P_2(мы рассматриваем числа, которые принадлежат $P_1 \cap P_2$), то по транзитивности следует, что $(x; z)$ входит. Но тогда будет справедливо, что и $(x; z)$ входит и в P_1 и в P_2 (по транзитивность), тогда и $(x; z)$ входит в $P_1 \cap P_2$.

$P_1 \cap P_2$ – обладает транзитивностью, если P_1 и P_2 обладают.

3) $P_1 \cup P_2$. контрпример: возьмем P_1, P_2 такие же, как и в пункте 1, которые пересекаются в одной вершине, тогда получаем: $(1; 2) \wedge (2; 3) \to (1; 3)$. Но для $P_1 \cup P_2$ транзитивность не выполняется, потому что нет пути длины 1 между вершинами (1,3).

4) $P_1 \circ P_2$. Приведем контрпример. $P_1 = \{(1, 2), (3, 4)\}$ – транзитивность выполняется, $P_2 = \{(2, 3), (4, 5)\}$ – транзитивность так же выполнятся. Рассчитаем тогда их композицию $P_1 \circ P_2 = \{(1, 3), (3, 5)\}$ – транзитивность не выполняется, т.к. нет пары $((1, 5))$. Приведен контрпример , значит транзитивность не выполняется.

Ответ: ответы в решении.

4. Бинарное отношение на множестве из 6 элементов содержит 33 пары. Может ли оно быть **а)** симметричным; **б)** транзитивным?

Решение:

а) В частном случае да, могут. Всего пар $6^2 = 36$, из них вида (a, a), где $a \in A$ всего 6 по условию, тогда остается 30 пар. Если мы всех их используем, то получается, то будет выполнятся симметричность для 30 пар. А в качестве остальных 3 можем взять любых 3 пары вида (a, a).

б) Аналогичный пример как и в пункте **а)**. Берем все пары, кроме 3 вида (a, a).

Ответ: а,б) да.

5. Какие из следующих бинарных отношений на множестве $\mathbb{N}$ — отношения эквивалентности?

а) xPy: у чисел x и y одинакова последняя цифра (здесь и далее в десятичной записи).

б) xQy : числа x и y отличаются в ровно одной цифре.

в) xRy : разница между суммой цифр S_x и S_y четна. Формально: пусть $\overline{x_n x_{n-1} ... x_1 x_0}$ – десятичная запись числа x; тогда $S_x = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.

Решение:

а) рефлексивность: так как у одинаковых чисел одинаковые числа на конце $\Rightarrow$ выполняяется рефлексивность. Симметричность : если a и b имею одинаковые числа на конце, то очевидно, что выполняется симметричность. Транзитивность: если a,b имеют одинаковое числа на конце,пусть это число x, тогда, если выполняется, что у числа c на конце x, то,очевидно, что $\Rightarrow$ выполняется транзитивность.

Получаем, что это отношение эквивалентно.

б) рефлективность: у двух одинаковых чисел не могут быть разные числа на конце $\Rightarrow$ рефлективность не выполняется $\Rightarrow$ это отношение не эквивалетно.

в) Рефлективность, очевидно, выполняется, так как $(S_x - S_y = 0)$ – четное число. Симметричность: Если $(S_x - S_y)$ – четное, то, очевидно, что и $(S_y - S_x)$ – четное, так как оба числа x и $-x$ могут быть четными. Транзитивность: если $(S_y - S_x)$ – четное и пусть равняется $2k$, $k \in \mathbb{N}$ и $S_z - S_x$ – четное и пусть равно $2p \Rightarrow 2p - 2k = 2(p-k)$ – что, очевидно, четное число $\Rightarrow$ выполняется транзитивность, а значит это отношение эквивалентно.

Ответ: а),б) – эти отношения эквиваленты; в) нет.

6. Найдите число отношений эквивалентности на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.

Решение:

Общее количество отношений эквивалентности на $\{1, 2, 3, 4\}$= количество разделов набора $\{1, 2, 3, 4\}$ на классы эквивалентности (непустые подмножества) такие, что их пересечение пусто и их объединение дает $\{1, 2, 3, 4\}$.

Количество возможных перегородок в комплекте A = Номер Белла, $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$ – Сумма чисел Стирлинга второго рода. Тогда получаем ответ для $n = 4$ число отношений эквивалентности на множестве $\{1, 2, 3, 4\} = 15$.

Ответ: 15

7. Об отображениях (всюду определенных функциях) f, g из множества A в себя известно, что $f \circ g \circ f = id_A$. Верно ли, что f – биекция? (Множество A не обязательно конечное.)

Решение:

От противного: пусть f – не биекция, тогда так как функция всюду определенная, то она сюръекция, а значит существеют такие x_1, x_2, что выполняется $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда из первого условия композиции имеем:

$$x_1 = id_A(x_1) = (f \circ g \circ f)(x_1) = f(g(f(x_1))) = f(g(f(x_2))) =$$

$$= (f \circ g \circ f)(x_2) = id_A(x_2) = x_2.$$

Значит функция инъективна. Получено противоречие $\Rightarrow f$ биекция.

Ответ: верно.

8. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Докажите, что существуют такие множество B и отображение $f : A \to B$, что каждый класс эквивалентности C представим в виде $C = f^{-1}(b)$ для некоторого элемента $b \in B$.

Решение:

Разобьем A на части, где каждая часть – это класс эквивалентности. Возьмем множество B такое, что каждому классу соответствует ровно один элемент b. Тогда для каждого класса эквивалентности верно, что $C = f^{-1}(b)$, для некоторого элемента $b \in B$.

Ответ: доказано.

9. Множество A состоит из семи элементов. Найдите количество отображений $f : A \to A$, таких что $f \circ f = id_A$.

Решение:

Обозначим элемент x подвижным, если $f(x) = x$, при этом всегда $f(f(x)) = x$ действует на x тождественно по условию. Пусть $f(x) = y$, где y не равно x. Тогда $f(y) = x$, то есть остальные элементы разбиваются на пары переходящих друг в друга элементов, а пары всегда являются чётным количеством элементов.

Не неподвижных элементов всегда чётное число, значит неподвижных – нечётное. Могут быть 1 неподвижное число, 3, 5 и 7, так как всего есть 7 элементов. В последнем случае отображение одно (все 7 элементов неподвижны) Во третьем случае выбираем 2 подвижных элемента из семи, которые будут переходить друг в друга, при этом из 2 подвижных элементов можно составить только одну пару. Это $C_7^2 = 21$ способ. При 3 неподвижных, выбираем их $C_7^3 = 35$ способами, при этом остаётся 4 подвижных элемента, которые 3 способами разбиваются на пары. Итого 105 вариантов. Наконец, для первого случая есть 7 способов выбрать неподвижный элемент. Остаётся 6 элементов, которые разбиваются на пары 15 способами (для первого элемента есть 5 способов выбрать какой-то элемент, с учётом этого для второго элемента есть 4 способа, для третьего 3 способа и т. д., значит $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$). Итого 105 способов, как и в прошлом случае.

В ответе будет $1 + 21 + 105 + 105 = 232$ отображения.

Ответ: 232.

10. Пусть f отображение из $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{Z}$ такое, что

$$f(a, b) = a - b.$$

Инъективно ли f? Сюръективно ли f? Верно ли, что прообраз числа 5 содержит три элемента из $\mathbb{Z}^2$?

Решение:

1)Инъективно? Если f инъективно, то каждому $c = f(a, b)$ соответствует не более, чем один набор из a, b. Приведем контрпример:

$a = b = 1 \Rightarrow f(a, b) = 0$ и $a = b = 2 \Rightarrow f(a, b) = 0$. Значит получаем, что f – не инъекция.

2)Сюръективно? Если f сюъективно, то $\forall c\ \exists a, b : f(a, b) = c$. Рассмотрим данную ситуацию:

Чтобы получить c должно выполняться, что $a - b = c$. Так как $A \in \mathbb{Z}$, то возьмем $a = 2$, тогда по принципу Архимеда найдется b такое, что $b = 2 - c$. Значит f – сюръективно.

3) Рассмотрим как можно получить число 5 в этом случае:

$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 0 + 5 = 6 + (-1)...$ Получаем, что прообраз числа 5 содержит элементы : $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ....

Значит прообраз числа 5 не содержит ровно 3 элемента из $\mathbb{Z}^2$.

Ответ: ответы в решении.