Неделя 12. Булевы функции

Талашкевич Даниил Александрович

25 ноября 2020 г.

Problems:

1. Укажите существенные и несущественные (фиктивные) переменные функции $f(x1, x2, x3) = 00111100$ и разложите её в ДНФ и КНФ.

Решение:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$$

Разложим булеву функцию в ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee$$

$$\vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)$$

Заметим, что значения конъюнкции в первых двух скобках и в последних двух скобках не зависят от значения x_3 – фиктивная переменная. Значит можно убрат её из рассмотрения:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2})$$

Теперь разложим эту функцию в КНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) =$$

$$= ((\overline{x_1} \vee x_1) \wedge (x_1 \vee x_2)) \wedge ((\overline{x_2} \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee x_2)$$

Ответы в решении

2. Вычисляется ли константа 0 в базисе $\{\neg(x_1 \to x_2)\}$?

Решение:

Для того, чтобы константа 0 вычислялась в базисе $\{\neg(x_1 \to x_2)\}$ необходимо и достаточно, чтобы подобранная функция f принимала 0 для любых наборов $\{x_1, x_2\}$.

Рассмотрим значения базиса для разных наборов x_1, x_2:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Исходя из данных таблицы можем получить, каким образом вычисляется константа 0 в исходном базисе $f(x_1, x_2)$. Для этого можем взять $f \to f$, тогда получим, что это выражение истинно для любых наборов (x_1, x_2). Теперь, чтобы получить 0 просто возьмем дизъюнкцию от этого выражения, что соответствует следующему выражению:

$$f(f(x_1, x_2), f(x_1, x_2)) = 0.$$

Ответ: вычисляется.

3. Вычислите $MAJ(x, y, z)$ схемой в базисе Жегалкина $\{1, \wedge, x_1 + x_2\}$.

Решение:

Полином Жегалкина функции от 3 переменных формально представим в виде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3$$

В формуле 7 операций $\oplus$. Для различных значений аргументов имеем:

$$f(0,0,0) = a_0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = a_0 \oplus 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$f(0,0,1) = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_3 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = a_0 \oplus 0 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

Из симметрии функции относительно переменных следует, что $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3$$

$$f(1,1,0) = 0 \oplus a_{12} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$$

Из симметрии функции относительно переменных следует, что $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$.

$$f(1,1,1) = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{123} = 1 \Rightarrow a_{123} = 0$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus 0 = 0 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$$

Ответ: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$

4. Сколько ненулевых коэффициентов в многочлене Жегалкина, который равен $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$?

Решение:

Выразим многочлен в базисе Жегалкина:

$$x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n = \neg(\neg(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n)) = \neg(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge ... \ \wedge \overline{x_n}) =$$

$$= \neg((1+x_1)(1+x_2) \cdot ... \cdot (1+x_n)) = \neg(1+A) = A.$$

Так как $1+A$ содержит всего 2^n одночленов, то A содержит $2^n - 1$ одночлен.

Ответ: $2^n - 1$

5. Докажите полноту базиса, состоящего из одной функции $x|y$, которая по определению равна $\neg(x \wedge y)$ (штрих Шеффера, она же NAND).

Решение:

Докажем полноту базиса от противного – если бы это было не так, то этот базис относился бы к одному из следующих классов, согласно критерию Поста:

1) T_0: но функция может принимать значение 1 при $x = y = 0$.

2) T_1: но функция может принимать значение 0 при $x = y = 1$.

3) Проверим функцию на самодвойственность: $\overline{f(\overline{x}, \overline{y})} = \overline{\neg(\overline{x} \wedge \overline{y})} = \overline{x} \wedge \overline{y} \neq \overline{x} \vee \overline{y}$ – не самодвойственна

4) Линейность: штрих Шеффера представим через полином Жегалкина в виде $1 \oplus xy$, что уже противоречит линейности.

5) Монотонность: на значениях $x = y = 1$ функция принимает значение 0 – убывает, что противоречит монотонности.

Доказано

6. Является ли полным базис $\{\wedge, \to\}$?

Решение:

Можно заметить, что набор функций замнут на классе T_1, так как выполняются следующие выражения:

1) $1 \wedge 1 = 1$;

2) $1 \to 1 = 1$.

Получили, что набор функций замкнут на классе T_1, значит этот набор не является полным базисом.

Ответ: нет, не является.

7. Является ли полным базис $\{\neg, MAJ(x_1, x_2, x_3)\}$?

Решение:

Рассмотрим функцию MAJ на 3 аргументах. Если $MAJ(x_1, x_2, x_3) = 1$, то $\neg MAJ(x_1, x_2, x_3) = 0$ и $MAJ(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = 0$, то есть $MAJ(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = \neg MAJ(x_1, x_2, x_3)$, полученный результат не зависит от того, какое значение принимало функция $MAJ(x_1, x_2, x_3)$. Отсюда следует, что функция MAJ – самодвойственная. Аналогично можно сказать про унарную функцию отрицания: $\neg x_1 = \neg(\neg \overline{x_1})$ – самодвойственная функция. Значит каждая функция базиса $(MAJ(x_1, x_2, x_3), \neg)$ самодвойственная и по критерию Поста базис не является полным.

Ответ: не является.

8. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ – немонотонная функция. Докажите, что $\neg x_i$ вычисляется в базисе $\{0, 1, f\}$.

Решение:

[f– немонотонная функция] $\stackrel{\text{def}}{=}$ [$\exists$ такой набор из $\{0, 1\}$ для $\vec{A}$, что $f(\vec{A}) = 1$]$\wedge$[$\exists \vec{B} : f(\vec{B}) = 0$]$\wedge$[$B$ можно получить из A заменой некоторого нуля на единицу].

Последнее в свою очередь означает, что:

1) $\vec{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n\}$, где $\alpha_i = 0$;

2) $\vec{B} = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i, ..., \beta_n\}$, где $\beta_i = \overline{\alpha_i} = 1$.

Теперь, если $x_i = 1$, то $\neg x_i = 0$ и наоборот, тогда заметим, что $\neg x_i$ получается в базисе $\{0, 1, f\}$ следующим образом:

$$\neg x_i = f(\vec{C}), \text{а } \vec{C} = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., x_i, ..., \gamma_n\}.$$

Тогда, при $x_i = 1$ получаем, что $\vec{C}$ соответствует $\vec{B}$, а в свою очередь $f(\vec{B}) = 0 = \neg x_i$.

Аналогично при $x_i = 0$ получаем, что $\vec{C}$ соответствует $\vec{A}$, а в свою очередь $f(\vec{A}) = 1 = \neg x_i$.

Доказано

9. Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной схемой (с базисом $\wedge, \vee, 1, 0$).

Решение:

Нужно доказать, что всякая монотонная булева функция выражается в ДНФ без связки $\neg$, так как с этой связкой базис являлся бы полным. Пусть случайная монотонная булева функция принимает n аргументов.

Рассмотрим такой набор переменных, что значение функции равно 1, при этом количество аргументов, равных 1, минимально. Так как функция монотонная, то существуют другие наборы переменных, значение функции на которых равно 1, которые отличаются от рассматриваемой только тем, что некоторая переменная, принимающая 0, теперь принимает 1. В ДНФ эти два набора будут иметь вид $... \vee (\neg a_i \wedge a_{i+1} \wedge ...) \vee (a_i \wedge a_{i+1} ...) \vee ...$

Эта дизъюнкция двух наборов равна $(a_{i+1} \wedge ...)$, то есть перерь не зависит от a. Таким образом, любую дизъюнкцию конъюнкций с отрицанием можно сократить до конъюнкции без отрицания, значит, ДНФ представление любой монотонной функции можно сократить до представления ДНФ без отрицания. что и требовалось доказать.

Доказано

10. Булева функция $PAR(x_1, x_2, ..., x_n)$ равна 1, если количество единиц среди значений $x_1, x_2, ..., x_n$ нечётно и нулю, если чётно.

Решение:

1) Вполне очевидно, что $PAR(x_1, x_2, \ ... \ , x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$. И вправду, ведь $PAR(x_1, x_2, \ ... \ , x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n = k \cdot 1 + 0 \cdot (n - k) = k \cdot 1 = 1$, для $k -$ нечетного.

2) Докажем, что фукнция задается в виде ДНФ без отрицаний только если она монотонна.

В действительности, любую функцию можно представить в виде $f = x_n \varphi \vee \overline{x_n} \cdot \psi$. Действительно, в зависимости от значения x_n мы имеем значение функции $f = \varphi$ или $f = \psi$, а они уже задаются остальными $n-1$ переменными. Рассмотрим некоторые случаи и покажем зависимости между ϕ и φ.

- $x_n = 0 : f = \psi$,
- $x_n = 1 : f = \varphi$.

Наша функция f должна быть монотонной, так что

- $\varphi = 1, \psi = 0$,
- $\varphi = \psi$.

Теперь докажем, что $x_n \cdot \varphi \vee \overline{x_n} \cdot \psi = \varphi \cdot x_n \vee \psi$. Действительно, если $\varphi = 1$, $\psi = 0$, то очевидно, что функции эквивалентны, так как второе слагаемое больше ничего не решает.

В случае, если $\varphi = \psi$, то по закону поглощения функции так же равны.

Таким образом, при $<$расширении$>$ функции на одну переменную мы показали, что ДНФ можно представить и без отрицания вовсе. Для одной переменной это очевидно, а далее по аксиоме индукции, с учетом доказательства, указанного выше, мы имеем, что монотонной функция является тогда и только тогда, когда представима в ДНФ без отрицаний, что и требовалось доказать.

Теперь, так как функция задается в виде ДНФ без отрицаний только если она монотонна, получаем, что при $n > 1$ PAR – немонотонна (она немонотонна, так как $\exists$ набор такой, что $PAR(1, 0, 0, \ \ldots \ , 0) = 1$ и $PAR(1, 1, 0, \ \ldots \ , 0) = 0$ – значит PAR немонотонна) $\Rightarrow n \leqslant 1$, а так как $n \geqslant 1 \Rightarrow$ единственное возможное значение $n = 1$.

Ответ: 1) $PAR(x_1, x_2, \ \ldots \ , x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.
2)$n = 1$.

11. Булева функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется линейной, если она представляется в виде

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 + (a_1 \wedge x_1) + \cdots + (a_n \wedge x_n).$$

для некоторого набора $(a_1, ..., a_n) \in \{0, 1\}^n$ булевых коэффициентов.

Докажите, если $f(x_1, ..., x_n)$ – нелинейная функция, то конъюнк- ция $x_1 \wedge x_2$ вычисляется схемой в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$.

Решение:

Представим нелинейную функция в виде полинома Жегалкина:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus ... \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus ...$$

Полином будет как содержать как минимум одно слагаемое-конъюнкцию вида $x_ix_j...$. Возьмём это слагаемое. Тогда на i-ую и j-ую позиции поставим x_i и x_j – аргументы требуемой конъюнкции, и рассмотрим значение функции:

$$f(0, 0, ..., x_i, ..., 0, 0, ..., x_j, ..., 0, 0, ...) = 0 \oplus 0 \oplus ... \oplus x_ix_j \oplus ... \oplus 0 \oplus 0 \oplus ...$$

Учитывая, что $0 \oplus 0 = 0$, получим:

$$f(0, 0, ..., x_i, ..., 0, 0, ..., x_j, ..., 0, 0, ...) = 0 \oplus x_ix_j$$

Если $x_i x_j = 1$, то $f(0, 0, ..., x_i, ..., 0, 0, ..., x_j, ..., 0, 0, ...) = 1$, если $x_i x_j = 0$, то $f(0, 0, ..., x_i, ..., 0, 0, ..., x_j, ..., 0, 0, ...) = 0$, значит

$$f(0, 0, ..., x_i, ..., 0, 0, ..., x_j, ..., 0, 0, ...) = x_i x_j$$

Значит на i-ую и j-ую позиции поставим x_1 и x_2:

$$x_1 \wedge x_2 = f(0, 0, ..., x_1, ..., 0, 0, ..., x_2, ..., 0, 0, ...)$$

Доказано

12. Докажите теорему Поста.

Решение:

Теорема Поста: $\{f_1...f_n\}$ полная $\Leftrightarrow$ среди $f_1...f_n$ найдется по функции, которые не принадлежат каждому из 5 классов (т. е. хотя бы одна из них не лежит в T_0, хотя бы одна $\notin T_1$ ... хотя бы одна $\notin M$).

Доказательство:

($\Rightarrow$) если все $f_1...f_n$ лежат в одной из этих классов,то замыкание не может быть больше этого класса $\Rightarrow$ система не полна.

($\Leftarrow$) Первый шаг: получим $0, 1, \neg$

Пусть $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, g \notin S, h \notin M, k \notin L$.

• $f_0(0...0) = 1$. Если $f_0(1...1) = 0$, то $f(p...p) = \neg p$. Если же $f(1...1) = 1$, $f(p...p) = 1$.

• $f_1(1...1) = 0$. Если $f_1(0...0) = 0$, то $f_1(p...p) = 0$, иначе $f_1(p...p) = \neg p$.

Три случая:

1) В одном случае $\neg$, в другом константа $\Rightarrow$ получаем другую константу (и g и h даже не нужны)

2) Если получили 0 и 1, то берем h: есть набор, на котором $h(a_1...a_{i-1}; 0; a_{i+1}...a_n) = 1$ и $h(a_1...a_{i-1}; 1; a_{i+1}...a_n) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \neg p = h(a_1...a_{i-1}; p; a_{i+1}...a_n)$.

3) Если получена $\neg$ в обоиэ случаях : $g \notin S \Rightarrow \exists \vec{a} : g(\vec{a}) = g(\overline{\vec{a}})$.

Первый шаг закончен.

Второй шаг: берем $0, 1, \neg$ и функция K. У функции K многочлен Жегалкина содержит нелинейность. Без ограничения общности, есть произведение $\alpha \cdot x_1 \cdot x_2$, где α – какой-то коэффициент, а x_1, x_2 – разложение самого многочлена.

Представим $K(x_1...x_n) = x_1 x_2 \cdot A(x_3...x_n) + x_1 B(x_3...x_n) + x_2 C(x_3...x_n) + D(x_1...x_n)$, причем $A(x_3...x_n) \neq 0$.

Берем набор $\alpha_3...\alpha_n$ такой, что $A(\alpha_3...\alpha_n) = 1 \Rightarrow$ подставим и получим $x_1 x_2 + bx_1 + cx_2 + d$. Взяв от этого отрицание, если $\alpha = 1$, сведем к $x_1 x_2 + bx_1 + cx_2$.

Если $b = c = 0$, то имеем $x_1 \wedge x_2$ и $\neg$.

Если $b = c = 1$, то $x_1x_2 + x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2$, а также есть $\neg$.

Если $b = 1, c = 0$, то получим $x_1x_2 + x_1 = x_1(x_2 + 1) = x_1\overline{x_2} = \overline{x_1 \to x_2} \Rightarrow$ получим суперпозиции $\overline{x_1 \to \overline{x_2}} = x_1 \wedge x_2$.

Доказано