

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Устный экзамен по физике
Вопрос по выбору

Исследование поведения и особенностей Tippe top

Талашкевич Даниил Александрович
Группа Б01-009

Долгопрудный
2021

Содержание

1	Введение	1
1.1	Общие сведения о волчке Тірре Тор	1
1.2	Описание поведения волчка	1
1.3	Описание новых систем координат	2
2	Подробное описание поведения волчка	4
2.1	Небольшое вступление в теорию описания	4
2.2	Поиск внешних сил	5
2.3	Поиск общего внешнего крутящего момента τ_{ext} на вершине Тірре Тор'а относительно центра масс	5
2.4	Движение в точке касания (A)	6
2.5	Угловая скорость ω вращающегося волчка относительно его центра масс C	6
2.6	Полная энергия вращения волчка	7
2.7	Изменение момента импульса относительно оси z	7
2.8	Выражение для мгновенной скорости изменения энергии волчка	7
2.9	Построение и анализ графиков функций энергий от времени .	8
2.10	Связь компонентов углового момента L и угловой скорости ω	9
2.11	Интеграл Джеллетта	9
3	Заключение	10
4	Список используемой литературы	10

1 Введение

1.1 Общие сведения о волчке Тирре Тор

Волчок Тирре Тор - это особый вид волчка, который может самопроизвольно переворачиваться на свой стержень после того, как он будет запущен вращаться. Мы можем смоделировать волчок Тирре Тор как усеченную сферу радиуса R с добавленным стержнем. Этот волчок обладает вращательной симметрией относительно оси, проходящей через его стержень, которая находится под углом θ к вертикали. Как показано на Рисунке 1 (а), его центр масс C смещен относительно его геометрического центра O на αR вдоль оси симметрии. Тирре Тор соприкасается с поверхностью, на которую опирается в точке A , мы будем считать эту поверхность плоской и будем называть ее просто поверхностью. При определенных геометрических ограничениях и при достаточно быстром вращении волчок Тирре Тор наклонится так, что стержень будет все больше и больше направлен вниз, пока в конечном итоге он не начнет вращаться на своем стержне, а в конечном итоге остановиться.

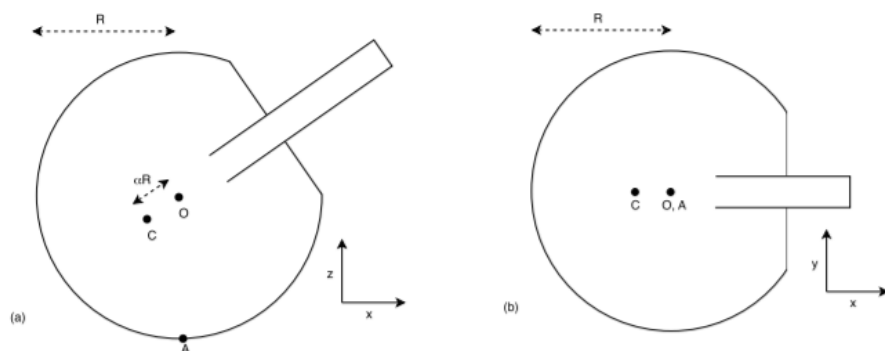


Рис. 1: Вид на Тирре Тор (а) сбоку и (б) сверху

1.2 Описание поведения волчка

Пусть $(x; y; z)$ – вращающаяся система отсчета, определенная таким образом, что \hat{z} неподвижна и направлена вверх, а вершина оси симметрии находится в плоскости xy . На рисунке 1 показаны два вида на волчок Тирре Тор: сбоку, и сверху. Как показано на Рисунке 1 (б), ось симметрии волчка совмещена с осью x , если смотреть сбоку.

На рисунке 2 показано движение волчка на нескольких этапах после начала вращения:

- (а) **фаза I**: сразу после ее первоначального запуска, при $\theta \sim 0$
- (б) **фаза II**: вскоре после этого, наклонившись на угол $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- (в) **фаза III**: когда стержень впервые касается пола, при $\theta > \frac{\pi}{2}$
- (г) **фаза IV**: после переворота, когда волчок вращается на своей ножке, с $\theta \sim \pi$
- (д) **фаза V**: в конечном состоянии, покоящийся на стержне, при $\theta = \pi$

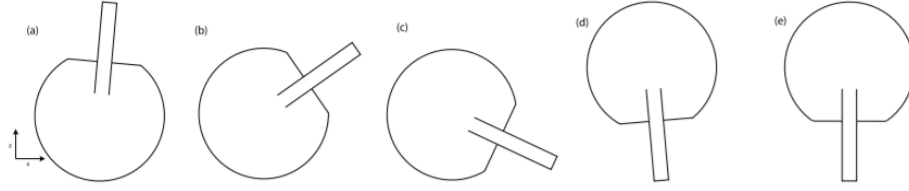


Рис. 2: Фазы с I по V движения волчка Тирре Тор, показанные в xy -плоскости

1.3 Описание новых систем координат

При будущем исследовании поведения волчка для удобства нам понадобятся новые системы координат, поэтому введем новую систему отсчета: пусть $(X; Y; Z)$ - инерциальная система отсчета, у которой поверхность, на которой находится вершина, полностью лежит в плоскости XY . Система отсчета xyz определяется, как указано выше, и достигается из XYZ посредством вращения вокруг оси Z на угол ϕ . Преобразование от системы отсчета XYZ к системе отсчета xyz показано на рисунке 3 (а). В частности, $\hat{z} = \hat{Z}$.

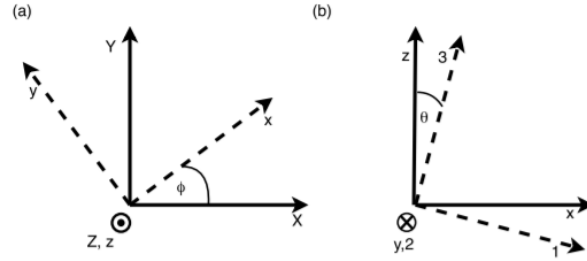


Рис. 3: Преобразования между системами отсчета: (а) в xyz из XYZ , и (б) из xyz в 123

Любое вращательное движение в трехмерном пространстве можно описать тремя углами Эйлера (θ, ϕ, ψ) . Преобразования между инерциальной системой отсчета XYZ , промежуточной системой отсчета xyz и системой отсчета вершин 123 можно объяснить в терминах этих углов Эйлера.

Небольшой экскурс : Сферическая система координат — трёхмерная система координат, в которой каждая точка пространства определяется тремя числами (r, θ, φ) , где r — расстояние до начала координат (радиальное расстояние), а θ и φ — зенитный и азимутальный углы соответственно.

Понятия зенит и азимут широко используются в астрономии. Зенит — направление вертикального подъёма над произвольно выбранной точкой (точкой наблюдения), принадлежащей фундаментальной плоскости. В качестве фундаментальной плоскости в астрономии может быть выбрана плоскость, в которой лежит экватор, или плоскость, в которой лежит горизонт, или плоскость эклиптики и т. д., что порождает разные системы небесных координат. Азимут — угол между произвольно выбранным лучом фундамен-

тальной плоскости с началом в точке наблюдения и другим лучом этой плоскости, имеющим общее начало с первым. Для простоты понятия приведем соответствующий рисунок, изображающий вышесказанное описание сферической системы координат.

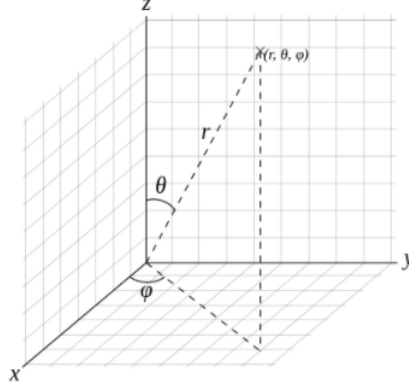


Рис. 4: Сферическая система координат наглядно

В нашем описании движения волчка Тирре Тор углы θ и ϕ являются стандартными зенитным и азимутальным углами соответственно в сферических полярных координатах. В системе координат XYZ они определяются следующим образом: θ – это угол оси симметрии волчка от вертикальной оси Z , показывающий, насколько далеко от вертикали его стержень есть, в то время как ϕ представляет угловое положение верха относительно оси Z и определяется как угол между плоскостью XY и плоскостью, проходящую через точки O, A, C (т.е. вертикальная проекция симметрии волчка ось).

Третий угол Эйлера ψ описывает вращение волчка вокруг собственной оси симметрии, то есть его «спин», который имеет угловую скорость $\dot{\psi}$.

Система отсчета волчка определяется как новая вращающаяся система координат $(1; 2; 3)$, которая достигается путем поворота xuz на θ вокруг \hat{y} : «наклон» оси \hat{z} вниз на θ , чтобы соответствовать оси симметрии волчка ($\hat{3}$). Преобразование от системы координат xuz в систему координат 123 показано на рисунке 3 (b). В частности, $\hat{2} = \hat{y}$.

Стоит сделать небольшое примечание: Для системы отсчета $\tilde{\mathbf{K}}$, вращающейся в инерциальной системе \mathbf{K} с угловой скоростью ω , производные по времени вектора \mathbf{A} в обеих системах \mathbf{K} и $\tilde{\mathbf{K}}$ связаны соотношением:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_{\mathbf{K}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_{\tilde{\mathbf{K}}} + [\vec{\omega} \times \vec{A}] \quad (1)$$

Движение волчка Тирре Тор является сложным и включает в себя изменение со временем трех углов Эйлера, а также поступательной скорости (или положения) и движение оси симметрии волчка. Все эти параметры связаны. Чтобы определить движение волчка Тирре Тор, можно использовать стандартные инструменты, включая Законы Ньютона для составления систем уравнений, а затем программирование компьютера для их численного решения с помощью моделирования.

Этим вопросом мы и будем заниматься в этой работе, исследуя физику волчка Тире Тор, чтобы составить систему уравнений. А в [заключении] исследуем полученные результаты.

Трение между волчком Тире Тор и поверхностью, по которой он движется, приводит в движение волчок. Предполагается, что верхняя часть остается в контакте с поверхностью в точке A до тех пор, пока стержень не коснется поверхности. Он движется в точке A со скоростью v_A относительно поверхности. Коэффициент трения μ_k между верхушкой и поверхностью, возникающий в результате движения, с $|\vec{F}_f| = \mu_k N$, где $\vec{F}_f = F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y}$ – сила трения, а $F_{f,x}\hat{x}$ и $F_{f,y}\hat{y}$ – это его проекции на оси x и y соответственно, N – величина нормальной силы. Предположим, что волчок изначально настроен только на вращение, т.е. нет поступательного импульса на волчок.

Пусть масса волчка Тире Тор равна m . Его моменты инерции: I_3 относительно оси симметрии, а $I_1 = I_2$ относительно взаимно перпендикулярных главных осей. Пусть \vec{s} – вектор положения центра масс, а $\vec{a} = \vec{CA}$ – вектор от центра масс к точке контакта.

2 Подробное описание поведения волчка

В данном разделе займемся уже более интересными вещами, а именно подробно опишем модель поведения волчка Тире Тор на плоскости при наличии силы трения.

Так же для простоты и краткости скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} будем обозначать просто как $\vec{a} \cdot \vec{b}$, а в тех местах, где не нужно скалярное произведение векторов, знак "." будем опускать.

2.1 Небольшое вступление в теорию описания

Так как при наличии некоторых данных о связи двух систем координат между собой мы умеем переходить от одной системы координат в другую, тогда выразим переход от системы координат XYZ в систему координат xuz :

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Аналогичным образом выразим переход в систему координат 123 от xuz :

$$\begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Положение точки A от центра масс в системах координат xuz и 123:

$$\vec{a} = \alpha R \hat{3} - R \hat{z} = \alpha R \theta \hat{x} + R(\alpha \cos \theta - 1) \hat{z} = R \sin \theta \hat{1} + R(\alpha - \cos \theta) \hat{3} \quad (4)$$

Так же можно получить полезное соотношение, которое нам понадобится в будущем:

$$\boxed{[\hat{z} \times \hat{3}] = \hat{y} \sin \theta} \quad (5)$$

Так же нам понадобится одно замечание, данное выше, уравнение (1). Производные, необходимые нам в дальнейшем, координат по времени:

$$\boxed{\dot{\hat{3}} = [\omega \times \hat{3}]} \quad (6)$$

$$\dot{\hat{x}} = \phi \hat{y} \quad (7)$$

$$\dot{\hat{y}} = -\phi \hat{x} \quad (8)$$

2.2 Поиск внешних сил

Диаграмма свободного тела, с изображенными силами, действующими на него:

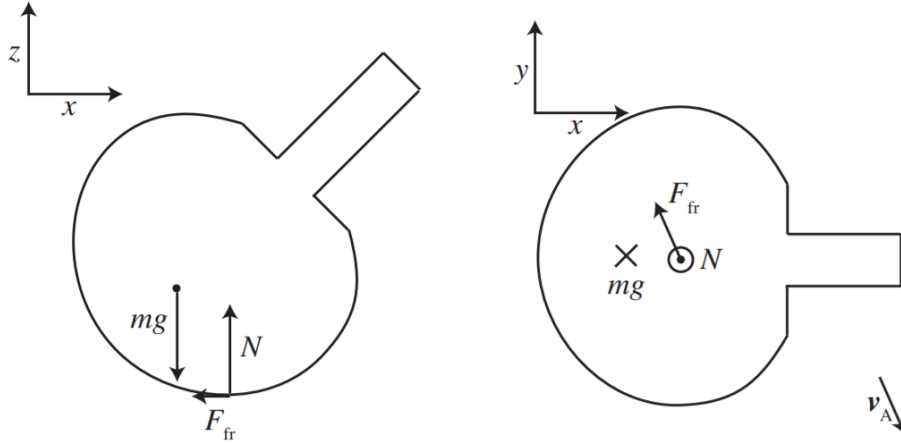


Рис. 5

Примечание: направление \vec{F}_f должно быть противоположным направлению \vec{v}_A . Сумма сил:

$$\vec{F}_{ext} = (\vec{N} - \vec{mg}) \cdot \hat{z} + \vec{F}_f = (\vec{N} - \vec{mg}) \cdot \hat{z} - \frac{\mu_k N}{|v_A|} \vec{v}_A \quad (9)$$

2.3 Поиск общего внешнего крутящего момента τ_{ext} на вершине Тірре Тор'а относительно центра масс

Сумма крутящих моментов:

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{\tau}_{ext} = [\vec{a} \times (N\hat{z} + \vec{F}_f)]} &= [(\alpha R \hat{3}) \times (N\hat{z} + F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y})] \\ &= [\alpha R N \hat{3} \times \hat{z}] + [\alpha R (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}) \times (F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y})] - [R \hat{z} \times (F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y})] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha RN \sin \theta \hat{y} + \alpha R \sin \theta F_{f,y} \hat{z} + \alpha R \cos \theta F_{f,x} \hat{y} - \alpha R \cos \theta F_{f,y} \hat{x} - RF_{f,x} \hat{x} - RF_{f,x} \hat{x} + RF_{f,x} \hat{x} \\
&= RF_{f,y} (1 - \alpha \cos \theta) \hat{x} + [RF_{f,x} (\alpha \cos \theta - 1) - \alpha RN \sin \theta] \hat{y} + \alpha R \sin \theta F_{f,y} \hat{z}
\end{aligned} \quad (11)$$

2.4 Движение в точке касания (A)

Движение в точке A удовлетворяет следующему уравнению:

$$\boxed{\vec{v}_A = \dot{\vec{s}} + [\vec{\omega} \times \vec{a}]} \quad (12)$$

где ω - полная угловая скорость волчка в системе центра масс (это определяется в следующей части). Хочу показать, что $\vec{v}_A \cdot \hat{z} = 0$.

Чтобы показать это, возьмем производную по времени от условия контакта в системе координат XYZ или xyz (примечание: подходит любой вариант, поскольку нам нужна только компонента \hat{z} , а $\hat{z} = \hat{Z}$).

Условия контакта:

$$\begin{aligned}
(\vec{s} + \vec{a}) \cdot \hat{z} &= 0 && \text{всегда, то есть в любой момент времени} \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{s} + \vec{a}) \cdot \hat{z} &= 0 && \text{аналогично в любой момент времени}
\end{aligned} \quad (13)$$

Обратим внимание, что нас интересует только z -компонента, и $(\omega \times \hat{z}) \cdot \hat{z} = 0$. Тогда, используя (12), (4) и (5) получаем:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_A \cdot \hat{z} &= (\dot{\vec{s}} + [\vec{\omega} \times \vec{a}]) \cdot \hat{z} \\
&= (\dot{\vec{s}} + [(\alpha R \vec{\omega}) \times \hat{3}]) \cdot \hat{z} \\
&= (\dot{\vec{s}} + \alpha R \frac{d\hat{3}}{dt}) \cdot \hat{z} \\
&= (\dot{\vec{s}} + \dot{\vec{a}}) \cdot \hat{z} = 0
\end{aligned} \quad (14)$$

2.5 Угловая скорость ω вращающегося волчка относительно его центра масс C

Найдем полную угловую скорость ω вращающегося волчка относительно его центра масс C через производные по времени от углов Эйлера: $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$, $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$.

Общая угловая скорость волчка ω складывается из трех различных вращений.

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{2} + \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\psi} \hat{3} \quad (15)$$

Используем преобразования, показанные на рисунке 3, чтобы преобразовать в систему координат xyz или 123:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \sin \theta \hat{x} + \dot{\theta} \hat{y} + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \hat{z} \quad (16)$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{1} + \dot{\theta} \hat{2} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{3}} \quad (17)$$

2.6 Полная энергия вращения волчка

Найдем полную энергию вращающегося волчка в терминах производных по времени от углов Эйлера, u_x , и u_y .

\mathbf{I} – тензор инерции:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Стоит отметить, что $I_2 = I_1$ в силу симметрии нашего тела (будем в дальнейшем обозначать I_2 как I_1). Таким образом имеем

$$E_T = K_T + K_R + U_G = \frac{1}{2}(\vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \vec{\omega}) + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgR(1 - \alpha \cos \theta) \quad (19)$$

Пользуясь уравнением (12) получим следующее:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{s}} &= \vec{v}_A - [\vec{\omega} \times \vec{a}] \\ &= \vec{v}_a - [(\dot{\theta}\hat{2} + \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3}) \times (\alpha R\hat{3} - R\hat{z})] \\ &= u_x\hat{x} + u_y\hat{y} - (\dot{\theta}\alpha R\hat{1} - \dot{\theta}R\hat{z} + [\dot{\phi}\alpha R\hat{z} \times \hat{3}] - [\dot{\psi}R\hat{3} \times \hat{z}]) \\ &= (u_x + \dot{\theta}R(1 - \alpha \cos \theta))\hat{x} + (u_y - R \sin \theta(\alpha\dot{\phi} + \dot{\psi}))\hat{y} + \dot{\theta}\alpha R \sin \theta \hat{z} \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, используя уравнение (5), получаем:

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{2} [I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2] + \\ &+ \frac{m}{2} \left[\left(u_x + \dot{\theta}R(1 - \alpha \cos \theta) \right)^2 + \left(u_y - R \sin \theta(\alpha\dot{\phi} + \dot{\psi}) \right)^2 + \dot{\theta}^2 \alpha^2 R^2 \sin^2 \theta \right] + \\ &+ mgR(1 - \alpha \cos \theta) \end{aligned} \quad (21)$$

2.7 Изменение момента импульса относительно оси z

Из (10) уравнения получаем:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{z} = \sum \vec{\tau} \cdot \hat{z} = \alpha R \sin \theta F_{f,y}} \quad (22)$$

2.8 Выражение для мгновенной скорости изменения энергии волчка

Изменения в энергии: так как $h = \vec{s} \cdot \hat{z}$ увеличивается, поэтому $\dot{U}_G > 0$.

В начале и в конце (фазы **I** и **V**) есть небольшая трансляция, поэтому $K_T \sim 0$ в **I** и **V**. Таким образом, энергия переводится из K_R в U_G .

Нормальная сила не работает, то есть не вносит вклад в работу. В точке A работает сила трения, а направление $-v_A$:

$$W = \int \vec{F}_f \cdot \vec{v}_A dt < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} E_T = -\mu_k N |\vec{v}_A| \quad (23)$$

Таким образом мы определили, что \vec{F}_f монотонно уменьшает полную энергию.

(22) уравнение подразумевает, что только $\vec{F}_f \cdot \hat{y}$ уменьшает $\vec{L} \cdot \hat{z}$. Передача энергии от K_R к U_G , вызванная составляющей силы трения в направлении \hat{y} , поэтому составляющая результирующего крутящего момента находится в направлении результирующего вектора $[\vec{a} \times \hat{y}]$.

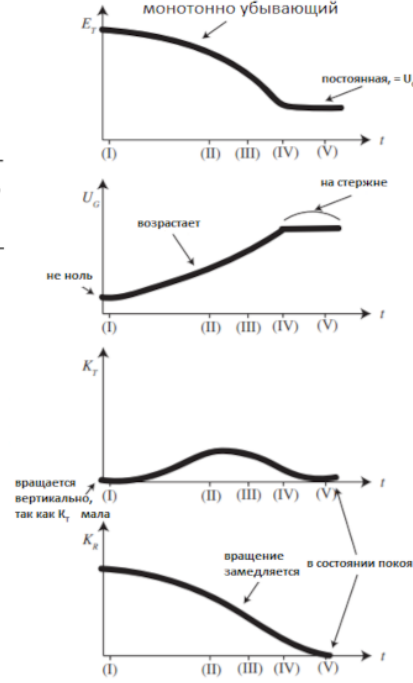
2.9 Построение и анализ графиков функций энергий от времени

Теперь уже мы можем качественно изобразить следующие энергетические термины как функцию времени движения волчка в пяти фазах ($\mathbf{I} - \mathbf{V}$), показанных на рисунке (2):

1. Полная энергия E_T .
2. Гравитационная потенциальная энергия U_G .
3. Поступательная кинетическая энергия K_T .
4. Кинетическая энергия вращения K_R .

Ожидание (см. Рисунок 5):

- E_T монотонно убывает.
- K_R : монотонно убывает; ноль при V.
- K_T : ноль в I и V; выше между ними; близко к нулю при IV.
- U_G : плоская (константа) на старте и финише; выше в конце; увеличивается с I до IV, затем константа; увеличиваться примерно в то же время, когда K_{rot} уменьшается.



2.10 Связь компонентов углового момента L и угловой скорости ω

Покажем, что компоненты углового момента L и угловой скорости ω , которые перпендикулярны направлению вектора $\hat{3}$, пропорциональны и выполняются:

$$[\vec{L} \times \hat{3}] = k [\vec{\omega} \times \hat{3}], \quad (24)$$

Так же найдем этот коэффициент пропорциональности.

Из соотношения (17):

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = I_1(-\dot{\phi} \sin \theta \hat{1} + \dot{\theta} \hat{2}) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{3} \quad (25)$$

Возьмем векторное произведение обеих частей с $\hat{3}$:

$$\boxed{[\vec{L} \times \hat{3}] = I_1(\dot{\phi} \sin \theta \hat{2} + \dot{\theta} \hat{1}) = I_1 [\vec{\omega} \times \hat{3}]} \quad (26)$$

2.11 Интеграл Джеллетта

Объединение полученных результатов дает нам следующие:

1. Величину N нормальной силы.
2. Системы уравнений, связывающих углы Эйлера, компоненты u_x и u_y скорости в точке A , единичный вектор для оси симметрии \hat{z} , и их производные по времени.

Эта система не интегрируема, то вместо этого может быть решена численно.

Интегралы движения – это величины, которые остаются постоянными и могут уменьшить размерность системы (то есть количество одновременных уравнений, которые необходимо решить, аналитически или численно). Обычно такие величины, как энергия, импульс и угловой момент, сохраняются в закрытых системах, и значительно упрощают задачу.

Как мы увидели, ни энергия, ни угловой момент не сохраняются для Тирре Тор – из-за рассеивающей силы и внешнего крутящего момента. Однако есть связанная величина, известная как интеграл Джеллетта λ , которая представляет собой компонент, который сохраняет угловой момент, т.е. некоторый вектор v такой, что $\lambda = \vec{L} \cdot \vec{v}$ постоянна во времени.

Используем наше понимание Тирри Тир и полученный результат, чтобы дать выражение для такого вектора v . Так же покажем, что производная по времени равна нулю, то есть λ постоянна во времени.

Для любой оси, проходящей через центр масс справедливо следующее:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{\tau}_{ext} \neq 0 \quad (27)$$

Внешний крутящий момент получим из (10):

$$\vec{\tau}_{ext} = \left[\vec{a} \times (N\hat{z} + \vec{F}_f) \right] \Rightarrow \vec{\tau}_{ext} \cdot \vec{a} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{a} = 0 \quad (29)$$

Таким образом, угловой момент в направлении \vec{a} должен быть постоянным, поэтому $\vec{v} = \vec{a}$.

Продемонстрировать это математически позволяют уравнения (6), (10), (26):

$$-\dot{\lambda} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{a} + \alpha R \vec{L} \cdot \frac{d\hat{z}}{dt} = \left[\vec{a} \times (N\hat{z} + \vec{F}_f) \right] \cdot \vec{a} + \frac{\alpha R}{I_1} \vec{L} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{L}] = 0 \quad (30)$$

3 Заключение

Изучена поставленная нами задача о движении волчка Тирре Тор на плоскости с трением. Рассмотрена модель сферического волчка.

4 Список используемой литературы

- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — 5-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 224 с. — 500 экз. — ISBN 978-5-9221-0819-5

- Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: [учеб. для вузов]
- Зобова А.А., Карапетян А.В. Анализ стационарных движений волчка тип-топ // ПММ. 2009. Т. 73, № 6. С. 867-877
- [\[EN\] Wiki \(Tippe Top\)](#)
- [\[RU\] Wiki \(Китайский волчок\)](#)