Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Устный экзамен по физике
Вопрос по выбору

Исследование поведения и особенностей Tippe top

Талашкевич Даниил Александрович
Группа Б01-009

Долгопрудный
2021

Содержание

1 Введение

1.1 Общие сведения о волчке Tippe Top

Волчок Tippe Top - это особый вид волчка, который может самопроизвольно переворачиваться на свой стержень после того, как он будет запущен вращаться. Мы можем смоделировать волчок Tippe Top как усеченную сферу радиуса R с добавленным стержнем. Этот волчок обладает вращательной симметрией относительно оси, проходящей через его стержень, которая находится под углом θ к вертикали. Как показано на Рисунке 1 (а), его центр масс C смещен относительно его геометрического центра O на αR вдоль оси симметрии. Tippe Top соприкасается с поверхностью, на которую опирается в точке A, мы будем считаем эту поверхность плоской и будем называть ее просто поверхностью. При определенных геометрических ограничениях и при достаточно быстром вращении волчок Tippe Top наклонится так, что стержень будет все больше и больше направлен вниз, пока в конечном итоге он не начнет вращаться на своем стержне, а в конечном итоге остановиться.

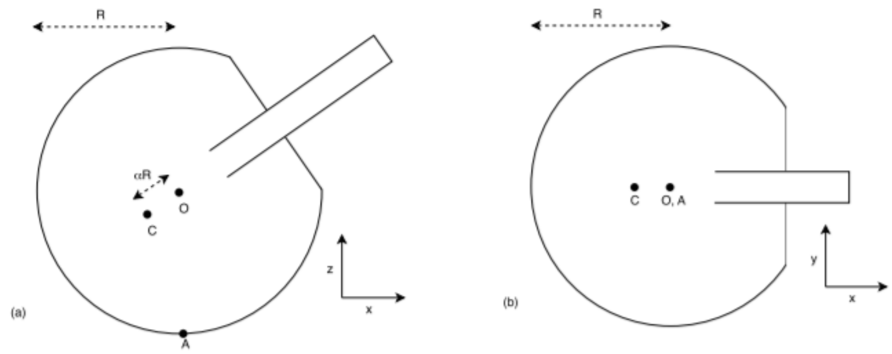


Рис. 1: Вид на Tippe Top (а) сбоку и (б) сверху

1.2 Описание поведения волчка

Пусть $(x; y; z)$ – вращающаяся система отсчета, определенная таким образом, что $\hat{z}$ неподвижна и направлена вверх, а вершина оси симметрии находится в плоскости xy. На *рисунке 1* показаны два вида на волчок Tippe Top: сбоку, и сверху. Как показано на Рисунке 1 (б), ось симметрии волчка совмещена с осью x, если смотреть сбоку.

На рисунке 2 показано движение волчка на нескольких этапах после начала вращения:

(а) **фаза I**: сразу после ее первоначального запуска, при $\theta \sim 0$

(б) **фаза II**: вскоре после этого, наклонившись на угол $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(в) **фаза III**: когда стержень впервые касается пола, при $\theta > \frac{\pi}{2}$

(г) **фаза IV**: после переворота, когда волчок вращается на своей ножке, с $\theta \sim \pi$

(д) **фаза V**: в конечном состоянии, покоющийся на стержне, при $\theta = \pi$

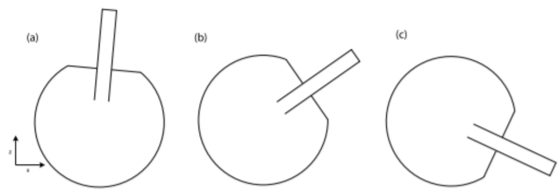


Рис. 2: Фазы с I по V движения волчка Tippe Top, показанные в xy- плоскости

1.3 Описание новых систем координат

При будущем исследовании поведения волчка для удобства нам понадобятся новые системы координат, поэтому введем новую систему отсчета: пусть $(X; Y; Z)$ - инерциальная система отсчета, у которой поверхность, на которой находится вершина, полностью лежит в плоскости XY. Система отсчета xyz определяется, как указано выше, и достигается из XYZ посредством вращения вокруг оси Z на угол ϕ. Преобразование от системы отсчета XYZ к системе отсчета xyz показано на рисунке 3 (а). В частности, $\hat{z} = \hat{Z}$.

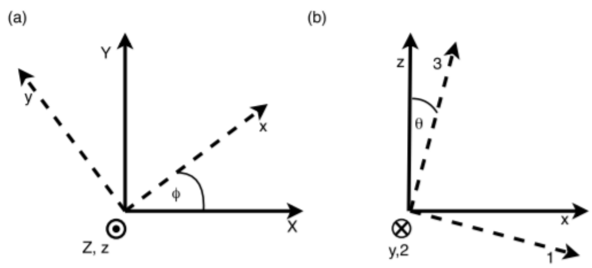


Рис. 3: Преобразования между системами отсчета: (а) в xyz из XYZ, и (б) из xyz в 123

Любое вращательное движение в трехмерном пространстве можно описать тремя углами Эйлера (θ, ϕ, ψ). Преобразования между инерциальной системой отсчета XYZ, промежуточной системой отсчета xyz и системой отсчета вершин 123 можно объяснить в терминах этих углов Эйлера.

Небольшой экскурс : Сферическая система координат — трёхмерная система координат, в которой каждая точка пространства определяется тремя числами (r, θ, φ), где r – расстояние до начала координат (радиальное расстояние), а θ и φ – зенитный и азимутальный углы соответственно.

Понятия зенит и азимут широко используются в астрономии. Зенит – направление вертикального подъёма над произвольно выбранной точкой (точкой наблюдения), принадлежащей фундаментальной плоскости. В качестве фундаментальной плоскости в астрономии может быть выбрана плоскость, в которой лежит экватор, или плоскость, в которой лежит горизонт, или плоскость эклиптики и т. д., что порождает разные системы небесных координат. Азимут – угол между произвольно выбранным лучом фундаментальной плоскости с началом в точке наблюдения и другим лучом этой плоскости, имеющим общее начало с первым. Для простоты понятия приведем соответствующий рисунок, изображающий вышесказанное описание сферической системы координат.

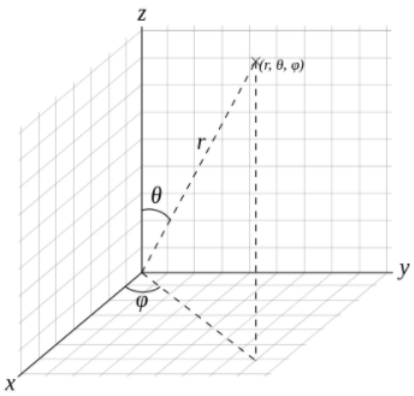


Рис. 4: Сферическая система координат наглядно

В нашем описании движения волчка Tippe Top углы θ и ϕ являются стандартными зенитным и азимутальным углами соответственно в сферических полярных координатах. В системе координат XYZ они определяются следующим образом: θ – это угол оси симметрии волчка от вертикальной оси Z, показывающий, насколько далеко от вертикали его стержень есть, в то время как ϕ представляет угловое положение верха относительно оси Z и определяется как угол между плоскостью XY и плоскостью, проходящую через точки O, A, C (т.е. вертикальная проекция симметрии волчка ось).

Третий угол Эйлера ψ описывает вращение волчка вокруг собственной оси симметрии, то есть его «спин», который имеет угловую скорость $\dot{\psi}$.

Система отсчета волчка определяется как новая вращающаяся система координат $(1; 2; 3)$, которая достигается путем поворота xyz на θ вокруг $\hat{y}$: «наклон» оси $\hat{z}$ вниз на θ, чтобы соответствовать оси симметрии волчка $(\hat{3})$. Преобразование от системы координат xyz в систему координат 123 показано на рисунке 3 (b). В частности, $\hat{2} = \hat{y}$.

Стоит сделать небольшое примечание: Для системы отсчета $\widetilde{\mathbf{K}}$, вращающейся в инерциальной системе $\mathbf{K}$ с угловой скоростью ω, производные по времени вектора $\mathbf{A}$ в обеих системах $\mathbf{K}$ и $\widetilde{\mathbf{K}}$ связаны соотношением:

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\mathbf{K}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\widetilde{\mathbf{K}}} + \left[\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{A}\right]} \tag{1}$$

Движение волчка Tippe Top является сложным и включает в себя изменение со временем трех углов Эйлера, а также поступательной скорости (или положения) и движение оси симметрии волчка. Все эти параметры связаны. Чтобы определить движение волчка Tippe Top, можно использовать стандартные инструменты, включая Законы Ньютона для составления систем уравнений, а затем программирование компьютера для их численного решения с помощью моделирования.

Этим вопросом мы и будем заниматься в этой работе, исследуя физику волчка Tippe Top, чтобы составить систему уравнений. А в [заключении] исследуем полученные результаты.

Трение между волчком Tippe Top и поверхностью, по которой он движется, приводит в движение волчок. Предполагается, что верхняя часть остается в контакте с поверхностью в точке A до тех пор, пока стержень не коснется поверхности. Он движется в точке A со скоростью v_A относительно поверхности. Коэффициент трения μ_k между верхушкой и поверхностью, возникающий в результате движения, с $|\overrightarrow{F_f}| = \mu_k N$, где $\overrightarrow{F_f} = F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y}$ – сила трения, а $F_{f,x}\hat{x}$ и $F_{f,y}\hat{y}$ – это его проекции на оси x и y соответственно, N – величина нормальной силы. Предположим, что волчок изначально настроен только на вращение, т.е. нет поступательного импульса на волчок.

Пусть масса волчка Tippe Top равна m. Его моменты инерции: I_3 относительно оси симметрии, а $I_1 = I_2$ относительно взаимно перпендикулярных главных осей. Пусть $\vec{s}$ – вектор положения центра масса, а $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ – вектор от центра масс к точке контакта.

2 Подробное описание поведения волчка

В данном разделе займемся уже более интересными вещами, а именно подробно опишим модель поведения волчка Tippe Top на плоскости при наличии силы трения.

Так же для простоты и краткости скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать просто как $\vec{a}\cdot\vec{b}$, а в тех местах, где не нужно скалярное произведение векторов, знак "$\cdot$" будем опускать.

2.1 Небольшое вступление в теорию описания

Так как при наличии некоторых данных о связи двух систем координат между собой мы умеем переходить от одной системы координат в другую, тогда выразим переход от системы координат XYZ в систему координат xyz:

$$\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{X}\\ \hat{Y}\\ \hat{Z}\end{pmatrix} \tag{2}$$

Аналогичным образом выразим переход в систему координат 123 от xyz:

$$\begin{pmatrix}\hat{1}\\ \hat{2}\\ \hat{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix} \tag{3}$$

Положение точки A от центра масс в системах координат xyz и 123:

$$\boxed{\vec{a} = \alpha R\hat{3} - R\hat{z} = \alpha R\theta\hat{x} + R(\alpha\cos\theta - 1)\hat{z} = R\sin\theta\hat{1} + R(\alpha - \cos\theta)\hat{3}} \tag{4}$$

Так же можно получить полезное соотношение, которое нам понадобится в будущем:

$$\boxed{\left[\hat{z} \times \hat{3}\right] = \hat{y}\sin\theta} \tag{5}$$

Так же нам понадобится одно замечание, данное выше, уравнение (1).
Производные, необходимые нам в дальнейшем, координат по времени:

$$\boxed{\dot{\hat{3}} = \left[\omega \times \hat{3}\right]} \tag{6}$$

$$\dot{\hat{x}} = \phi\hat{y} \tag{7}$$

$$\dot{\hat{y}} = -\phi\hat{x} \tag{8}$$

2.2 Поиск внешних сил

Диаграмма свободного тела, с изображенными силами, действующими на него:

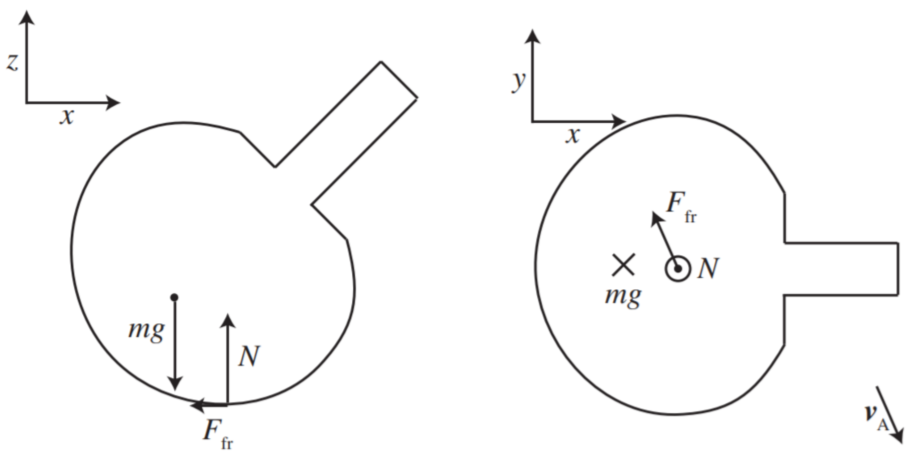


Рис. 5

Примечание: направление $\overrightarrow{F_f}$ должно быть противоположным направлению $\overrightarrow{v_A}$. Сумма сил:

$$\overrightarrow{F_{ext}} = (\overrightarrow{N} - \overrightarrow{mg}) \cdot \hat{z} + \overrightarrow{F_f} = (\overrightarrow{N} - \overrightarrow{mg}) \cdot \hat{z} - \frac{\mu_k N}{|v_A|}\overrightarrow{v_A} \tag{9}$$

2.3 Поиск общего внешнего крутящего момента τ_{ext} на вершите Tippe Top'а относительно центра масс

Сумма крутящих моментов:

$$\boxed{\overrightarrow{\tau_{ext}} = \left[\vec{a} \times (N\hat{z} + \overrightarrow{F_f})\right] = \left[(\alpha R\hat{3}) \times (N\hat{z} + F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y})\right]} \tag{10}$$

$$= [\alpha RN\hat{3} \times \hat{z}] + [\alpha R(\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z}) \times (F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y})] - [R\hat{z} \times (F_{f,x}\hat{x} + F_{f,y}\hat{y})]$$

$$= -\alpha RN\sin\theta\hat{y} + \alpha R\sin\theta F_{f,y}\hat{z} + \alpha R\cos\theta F_{f,x}\hat{y} - \alpha R\cos\theta F_{f,y}\hat{x} - RF_{f,x}\hat{x} - RF_{f,x}\hat{x} + RF_{f,x}\hat{x}$$
$$= RF_{f,y}(1-\alpha\cos\theta)\hat{x} + [RF_{f,x}(\alpha\cos\theta - 1) - \alpha RN\sin\theta]\,\hat{y} + \alpha R\sin\theta F_{f,y}\hat{z} \tag{11}$$

2.4 Движение в точке касания (A)

Движение в точке A удовлетворяет следующему уравнению:

$$\boxed{\overrightarrow{v_a} = \dot{\vec{s}} + [\overrightarrow{\omega} \times \vec{a}]} \tag{12}$$

где ω - полная угловая скорость волчка в системе центра масс (это определяется в следующая часть). Хочу показать, что $\overrightarrow{v_A}\cdot\hat{z} = 0$.

Чтобы показать это, возьмем производную по времени от условия контакта в системе координат XYZ или xyz (примечание: подходит любой вариант, поскольку нам нужна только компонента $\hat{z}$, а $\hat{z} = \hat{Z}$).

Условия контакта:

$$(\vec{s}+\vec{a})\cdot\hat{z} = 0 \qquad \text{всегда, то есть в любой момент времени}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{s}+\vec{a})\cdot\hat{z} = 0 \qquad \text{аналогично в любой момент времени} \tag{13}$$

Обратим внимание, что нас интересует только z–компонента, и $(\omega\times\hat{z})\cdot\hat{z} = 0$. Тогда, используя (12), (4) и (5) получаем:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_A}\cdot\hat{z} &= (\dot{\vec{s}} + [\overrightarrow{\omega}\times\vec{a}])\cdot\hat{z} \\
&= (\dot{\vec{s}} + [(\alpha R\overrightarrow{\omega})\times\hat{3}])\cdot\hat{z} \\
&= (\dot{\vec{s}} + \alpha R\frac{d\hat{3}}{dt})\cdot\hat{z} \\
&= (\dot{\vec{s}} + \dot{\vec{a}})\cdot\hat{z} = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

2.5 Угловая скорость ω вращающегося волчка относительно его центра масс C

Найдем полную угловая скорость ω вращающегося волчка относительно его центра масс C через производные по времени от углов Эйлера: $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}, \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$.

Общая угловая скорость волчка ω складывается из трех различных вращений.

$$\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\hat{2} + \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3} \tag{15}$$

Используем преобразования, показанные на рисунке 3, чтобы преобразовать в систему координат xyz или 123:

$$\overrightarrow{\omega} = \dot{\psi}\sin\theta\hat{x} + \dot{\theta}\hat{y} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\hat{z} \tag{16}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\hat{1} + \dot{\theta}\hat{2} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{3}} \tag{17}$$

2.6 Полная энергия вращения волчка

Найдем полную энергию вращающегося волчка в терминах производных по времени от углов Эйлера, u_x, и u_y.

I – тензор инерции:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Стоит отметить, что $I_2 = I_1$ в силлу симметрии нашего тела (будем в дальнейшем обозначать I_2 как I_1). Таким образом имеем

$$E_T = K_T + K_R + U_G = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\omega} \cdot \mathbf{I}\overrightarrow{\omega}) + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgR(1 - \alpha\cos\theta) \tag{19}$$

Пользуясь уравнением (12) получим следующее:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{s}} &= \overrightarrow{v_A} - [\overrightarrow{\omega} \times \vec{a}] \\ &= \overrightarrow{v_a} - \left[(\dot{\theta}\hat{2} + \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3}) \times (\alpha R\hat{3} - R\hat{z})\right] \\ &= u_x\hat{x} + u_y\hat{y} - (\dot{\theta}\alpha R\hat{1} - \dot{\theta}R\hat{z} + \left[\dot{\phi}\alpha R\hat{z} \times \hat{3}\right] - \left[\dot{\psi}R\hat{3} \times \hat{z}\right]) \\ &= (u_x + \dot{\theta}R(1 - \alpha\cos\theta))\hat{x} + (u_y - R\sin\theta(\alpha\dot{\phi} + \dot{\psi}))\hat{y} + \dot{\theta}\alpha R\sin\theta\hat{z} \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, используя уравнение (5), получаем:

$$\begin{aligned} E_T = \frac{1}{2}\left[I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2\right] + \\ + \frac{m}{2}\left[\left(u_x + \dot{\theta}R(1 - \alpha\cos\theta)\right)^2 + \left(u_y - R\sin\theta(\alpha\dot{\phi} + \dot{\psi})\right)^2 + \dot{\theta}^2\alpha^2R^2\sin^2\theta\right] + \\ + mgR(1 - \alpha\cos\theta) \end{aligned} \tag{21}$$

2.7 Изменение момента импулься относительно оси z

Из (10) уравнения получаем:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{z} = \sum \overrightarrow{\tau} \cdot \hat{z} = \alpha R\sin\theta F_{f,y}} \tag{22}$$

2.8 Выражение для мгновенной скорости изменения энергии волчка

Изменения в энергии: так как $h = \vec{s} \cdot \hat{z}$ увеличивается, поэтому $\dot{U_G} > 0$.

В начале и в конце (фазы **I** и **V**) есть небольшая трансляция, поэтому $K_T \sim 0$ в **I** и **V**. Таким образом, энергия переводится из K_R в U_G.

Нормальная сила не работает, то есть не вносит вклад в работу. В точке A работает сила трения, а направление $-v_A$:

$$W = \int \overrightarrow{F_f} \cdot \overrightarrow{v_A} dt < 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt} E_T = -\mu_k N |\overrightarrow{v_A}| \tag{23}$$

Таким образом мы определили, что $\overrightarrow{F_f}$ монотонно уменьшает полную энергию.

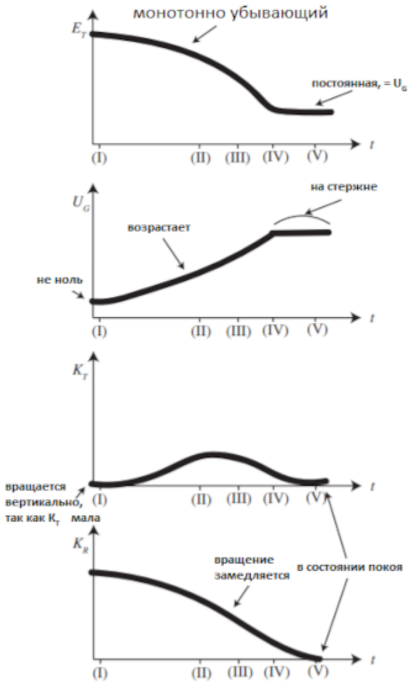
(22) уравнение подразумевает, что только $\overrightarrow{F_f} \cdot \hat{y}$ уменьшает $\overrightarrow{L} \cdot \hat{z}$. Передача энергии от K_R к U_G, вызванная составляющей силы трения в направлении $\hat{y}$, поэтому составляющая результирующего крутящего момента находится в направлении результирующего вектора $[\vec{a} \times \hat{y}]$.

2.9 Построение и анализ графиков функций энергий от времени

Теперь уже мы можем качественно изобразить следующие энергетические термины как функцию времени движения волчка в пяти фазах ($\mathbf{I} - \mathbf{V}$) , показанных на рисунке (2):

1. Полная энергия E_T.
2. Гравитационная потенциальная энергия U_G.
3. Поступательная кинетическая энергия K_T.
4. Кинетическая энергия вращения K_R.

Ожидание (см. Рисунок 5):
• E_T монотонно убывает.
• K_R : монотонно убывает; ноль при V.
• K_T : ноль в I и V; выше между ними; близко к нулю при IV.
• U_G : плоская (константа) на старте и финише; выше в конце; увеличивается с I до IV, затем константа; увеличиваться примерно в то же время, когда K_{rot} уменьшается.



2.10 Связь компонентов углового момента L и угловой скорости ω

Покажем, что компоненты углового момента L и угловой скорости ω, которые перпендикулярны направлению вектора $\hat{3}$, пропорциональны и выполняется:

$$[\vec{L} \times \hat{3}] = k\left[\overrightarrow{\omega} \times \hat{3}\right], \tag{24}$$

Так же найдем этот коэффициент пропорциональности.
Из соотношения (17):

$$\vec{L} = \mathbf{I}\overrightarrow{\omega} = I_1(-\dot{\phi}\sin\theta\hat{1} + \dot{\theta}\hat{2}) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{3} \tag{25}$$

Возьмем векторное произведение обоих частей с $\hat{3}$:

$$\boxed{\left[\vec{L} \times \hat{3}\right] = I_1(\dot{\phi}\sin\theta\hat{2} + \dot{\theta}\hat{1}) = I_1\left[\overrightarrow{\omega} \times \hat{3}\right]} \tag{26}$$

2.11 Интеграл Джеллетта

Объединение полученных результатов дает нам следующие:

1. Величину N нормальной силы.

2. Системы уравнений, связывающих углы Эйлера, компоненты u_x и u_y скорости в точке A, единичный вектор для оси симметрии $\hat{3}$, и их производные по времени.

Эта система не интегрируема, то вместо этого может быть решена численно.

Интегралы движени – это величины, которые остаются постоянными и могут уменьшить размерность системы (то есть количество одновременных уравнений, которые необходимо решить, аналитически или численно). Обычно такие величины, как энергия, импульс и угловой момент, сохраняются в закрытых системах, и значительно упрощают задачу.

Как мы увидели, ни энергия, ни угловой момент не сохраняются для Tippe Top – из-за рассеивающей силы и внешнего крутящего момента. Однако есть связанная величина, известная как интеграл Джеллетта λ, которая представляет собой компонент, который сохраняет угловой момент, т.е. некоторый вектор v. такой, что $\lambda = \vec{L} \cdot \vec{v}$ постоянна во времени.

Используем наше понимание Tippi Tip и полученный результаты, чтобы дать выражение для такого вектора v. Так же покажем, что производная по времени равна нулю, то есть λ постоянна во времени.

Для любой оси, проходящей через центр масс справедливо следующее:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\tau_{ext}} \neq 0 \tag{27}$$

Внешний крутящий момент получим из (10):

$$\overrightarrow{\tau_{ext}} = \left[\vec{a} \times (N\hat{z} + \vec{F_f})\right] \Rightarrow \overrightarrow{\tau_{ext}} \cdot \vec{a} = 0 \tag{28}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{a} = 0 \tag{29}$$

Таким образом, угловой момент в направлении $\vec{a}$ должен быть постоянным, поэтому $\vec{v} = \vec{a}$.

Продемонстрировать это математически позволяют уравнения (6), (10), (26):

$$-\dot{\lambda} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{a} + \alpha R \vec{L} \cdot \frac{d\hat{3}}{dt} = \left[\vec{a} \times (N\hat{z} + \overrightarrow{F_f})\right] \cdot \vec{a} + \frac{\alpha R}{I_1} \vec{L} \cdot \left[\overrightarrow{\omega} \times \vec{L}\right] = 0 \tag{30}$$

3 Заключение

Изучена поставленная нами задача о движении волчка Tippe Top на плоскости с трением. Рассмотрена модель сферического волчка.

4 Список используемой литературы

• Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — 5-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 224 с. — 500 экз. — ISBN 978-5-9221-0819-5

• Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: [учеб. для вузов]

• Зобова А.А., Карапетян А.В. Анализ стационарных движений волчка тип-топ // ПММ. 2009. Т. 73, № 6. С. 867-877

• [EN] Wiki (Tippe Top)

• [RU] Wiki (Китайский волчок)