Неделя 9. Комбинаторика III. Формула включений-исключений

Талашкевич Даниил Александрович

13 декабря 2020 г.

Problems:

1. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

Решение:

Обозначим за A – множество способов, где не закрашен верхний ряд, B – нижний ряд, а C – две средних вертикали. Тогда по формуле включений исключений имеем:

$$S = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 2^8 + 2^8 + 2^6 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 2^2 = 532$$

Ответ: 532 способа.

2. Для полета на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома. При этом в техническом задании указано, что каждой профессией из списка должно владеть ровно 6 человек в группе. Кроме того указано, что в группе должен найтись ровно один человек, владеющий всеми этими профессиями; каждой парой профессий должны владеть ровно 4 человека; каждой тройкой – ровно 2. Выполнимо ли такое техническое задание?

Решение:

Подсчитаем общее количество человек в группе через формулу включений и исключений. Всего есть 4 профессии, и каждой процессией должно владеть 6 человек. Поскольку каждый владеет хотя бы одной профессией, общее число равно $6 \cdot 4 - 4 \cdot C_4^2 + 2 \cdot C_4^3 - 1 = 7$. Здесь учтено, что двойных пересечений $C_4^2 = 6$, а тройных $C_4^3 = 4$. Тогда пусть 6 человек владеют первой профессией, как минимум другой профессией будут владеть $6 - (7 - 6) = 6 - 1 = 5$ человек, а по условию двумя процессиями могут владеть только 4 человека.

Ответ: задание не выполнимо

3. Пусть A и B – конечные непустые множества, и $|A| = n$. Известно, что число инъекций из A в B совпадает с числом сюръекций из A в B. Чему равно это число?

Решение:

Пусть $|B| = m$. Если можно построить инъекцию из A в B, то $n \leqslant m$. Аналогично, если существует сюръекция из A в B, то $m \leqslant n$. Значит $m = n$. Число инъекций из A в B равно

$$N = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Ответ: $n!$

4. Пусть $X = \{1, \ldots, n\}$. Найдите число способов взять k подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ множества X таких, что $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_k$.

Решение:

Рассмотрим упорядоченную последовательность из n символов (соответствуют элементам множества X): каждый элемент может принимать значение от 0 до k. Элемент последовотельности отвечает за то, в какое подножество он входит: равен 0, если ни в одно не входит, или принимает количество подножеств, в которые входит.

Заметим, что любая такая последовательность явно задаёт единственную комбинацию подножеств $X_1, X_2, ..., X_k$: элемент, входящий в подножества наибольшее количество раз m расставим в последние m подножеств. Если элемент входит $l < m$ раз, то расставим этот элемент в последние l подножеств. Таким образом некоторые подножества могут быть пустыми. Если же некоторые два подножества равны, то мы можем их переставить и ничего не изменится – считаем за 1 способ.

Значит имеем $(k+1)^n$ способов выбрать подножества.

Ответ: :$(k+1)^n$ **способов**

5. В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

Решение:

Для школьника существует всего 3 ситуации: либо он дружит с обоими из двух случайно выбранных школьников, либо только с одним. либо ни с кем. Выбрать оного ученика – 20 способов, выбрать его друга – 6 способов, не его друга – 13 способов. Учитывая, что такими комбинациями мы учли каждый способ выбора 2 раза, получаем, что есть $\frac{20\cdot13\cdot6}{2} = 780$ способов выбрать 3 школьника, не удовлетворяющих условиями.

Способов выбрать 3 школьника из 20 равно $C_{20}^3 = 1140$. Значит всего существует $1140 - 780 = 360$ способов выбрать таких 3 школьника, которые удовлетворяют условиям.

Ответ: 360 **компаний**

6. Найдите количество неубывающих отображений

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Решение:

Расставим перегородки между значениями функции. Значению между $(i-1)$-й и i-й перегородкой соответствует x_i, если между перегородками ничего нет, то x_i соответствует предыдущему значению. Так как у нас n аргументов и m значений, то нам нужно выбрать $m-1$ мест под перегородки из $m+n-1$ возможных. Что дает C_{n+m-1}^{m-1}.

Ответ: C_{n+m-1}^{m-1}**.**

7. Чего больше, разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств или разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно k подмножеств? Определение разбиения приведено в классной работе 7.

Решение:

разом построим инъекцию из множества разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств во множество разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно k подмножеств.

Рассмотрим разбиения n-элементного множества на $m \leqslant k$ частей. Пронумеруем эти части произвольным образом. У нас есть k дополнительных элементов. Поместим первый из них в первую часть, второй во вторую, и так далее до тех пора, пока не закончатся части. Из оставшихся дополнительных элементов сформируем одноэлементные части. Получится разбиение $n+k$ элементов на k частей. Из этого разбиения строим прообраз, убрав все вставленные дополнительные элементы.

Так как при $k \geqslant 2$ у нас не менее двух частей разбиения, то мы можем эти части перенумеровать другим образом так, чтобы при новом построении разбиения $n+k$ элементов на k частей выше описанным способом получилось разбиение, отличное от ранее построенного. В этом случае мы построили инъекцию из множества разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств во множество разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно k подмножеств.

Если же $k = 1$, то очевидно, что количество разбиений n-элементного множества на не более чем 1 подмножество меньше количества разбиений $(n+1)$-элементного множества на ровно 1 подмножеств.

Ответ: доказано

8. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом n пар влюблённых так, чтобы ни одна пара влюблённых не сидела рядом.

Решение:

Нам нужно рассадить ровно k пар влюбленных рядом.

Рассмотрим первую пару: посадить первого можно на $2n$ мест и на одно из 2 мест второго. Так как месте пронумерованы, то от их перестановки мы уже учли, значит посадить первую пару мы можем $4n$ способами.

Остальные пары (их $k-1$)мы будем рассматривать как единое целое,а остальных людей $2n-2k$ мы можем переставлять с $(k-1)$ парами способами $(2n-k-1)!$.

Так как в каждой паре у нас можно поменяться местами влюбленных, то еще получаем 2^{k-1} способов. Учитывая все выше получаем в итоге

$$4n \cdot (2n-k-1)! \cdot 2^{k-1} = 2n(2n-k-1)!2^k.$$

Каждую k-ую пару можно выбрать C_n^k способом.

Используя формулу включений,исключений, получаем

$$A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2n \cdot 2^k \cdot (2n-k-1)! \cdot C_n^k.$$

Ответ: $A = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2n \cdot 2^k \cdot (2n-k-1)! \cdot C_n^k.$

9. Есть n конфет и m коробок. Найдите число способов разместить конфеты по коробкам для каждого из условий (все конфеты должны быть разложены): **а)** и конфеты и коробки разные; **б)** конфеты одинаковые, коробки разные, не должно быть пустых коробок; **в)** конфеты одинаковые, коробки разные; **г)** и конфеты и коробки разные, не должно быть пустых коробок; **д)** конфеты разные, коробки одинаковые, не должно быть пустых коробок; **е)** конфеты разные, коробки одинаковые.

Решение:

а) Есть n способов выбрать конфету, которую можно положить в коробку, выбрать которую можно m способами. Значит имеем n^m способов.

б) Представим, что во множестве конфет нужно расставить $m-1$ перегородку так, чтобы вышло m непустых коробок с конфетами. Количество способов выбрать $m-1$ перегородок из $n-1$ возможных равно C_{n-1}^{m-1}

в) Снова воспользуемся аналогией с перегородками, но в этот раз коробки могут быть пустые – задаче эквивалентна задаче Муавра, значит есть C_{n+m-1}^{m-1} способов.

г) Пусть конфеты – аргументы некоторой функции, а коробки – её значения. Так как коробки непустые, нужно найти количество сюръекций из множества конфет во множество коробок. Значит ответом является

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$$

д) Та же идея с сюръекциями, что и в предыдущем пункте, только нужно учесть, коробки одинаковые, значит нужно поделить ответ на количество перестановок коробок:

$$\frac{\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k (m-k)^n}{m!}$$

е) Идея та же, что и в пункте а), только нужно учесть перестановки коробок, тогда ответ равен

$$\frac{m^n}{m!}$$

Ответ: Ответы в решении

10. Докажите справедливость равенства с помощью метода характеристических функций:

$$|A_1 \triangle \dots \triangle A_n| = \sum_n |A_i| - 2\sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + 4\sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

Решение:

Найдём, чему равна характеристическая функция множества $A \triangle B$, где A, B – какие-то множества.

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} = \chi_{A\cup B}(1-\chi_{A\cap B}) =$$

$$= (\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B)(1 - \chi_A \cdot \chi_B) = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

Теперь проделаем то же самое, добавив множество C:

$$\chi_{A\triangle B\triangle C} = \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C =$$

$$= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C$$

Из двух выражений можно сделать предположение, что

$$\chi_{A_1\triangle A_2\triangle \dots \triangle A_n} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} + (-2)^1 \sum_{i<j}^{n} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + (-2)^2 \sum_{i<j<p}^{n} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_p} + \dots$$

С помощью индукции проверим, выполняется ли эта формула. Если $n = 1$, то равенство очевидно. Пусть $n = k$ и выполняется равенство. Тогда для $n = k + 1$ имеем:

$$\chi_{A_1\triangle A_2\triangle \dots \triangle A_{k+1}} = \chi_{A_1\triangle A_2\triangle \dots \triangle A_k} + \chi_{A_{k+1}} - 2\chi_{A_1\triangle A_2\triangle \dots \triangle A_k}\chi_{A_{k+1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{A_i} + \Big((-2)^1 \sum_{i<j}^{k} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + (-2)^2 \sum_{i<j<p}^{k} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_p} + \dots\Big) -$$

$$-2\chi_{A_{k+1}}\Big(\sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} + (-2)^1 \sum_{i<j}^{k} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + (-2)^2 \sum_{i<j<p}^{k} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_p} + \dots\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{A_i} + (-2)^1\Big(\sum_{i<j}^{k} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + \sum_{i}^{k} \chi_{A_i}\chi_{A_{k+1}}\Big) +$$

$$+(-2)^2\Big(\sum_{i<j<p}^{k} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_p} + \sum_{i<j}^{k} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_{k+1}}\Big) + \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{A_i} + (-2)^1 \sum_{i<j}^{k+1} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + (-2)^2 \sum_{i<j<p}^{k+1} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_p} + \dots$$

Значит предположение было верно и равенство выполняется. Перейдём от характеристических функций с мощностью множеств:

$$|A_1\triangle A_2\triangle \dots \triangle A_n| = \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| + (-2)^1 \sum_{i<j}^{k+1} |A_i \cap A_j| + (-2)^2 \sum_{i<j<p}^{k+1} |A_i \cap A_j \cap A_p| + \dots$$

Ответ: Доказано