Неделя 7.Комбинаторика I. Правила суммы и произведения

Талашкевич Даниил Александрович

25 октября 2020 г.

Problems:

1. Есть 6 кандидатов на 6 вакансий. Сколькими способами можно заполнить вакансии? (Каждая вакансия должна быть заполнена.)

Решение:

Выбираем первого кандидата, всего это можно сделать 6 способами. Дальше выбираем пятого из пяти оставшихся, всего это можно сделать 5 способами. Продолжая так далее получим $6! = 720$ вариантов.

Ответ: 720 **способов.**

2. а) Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть единица или тех, в записи которых её нет?

б) Тот же вопрос для первых 10 миллионов чисел.

Решение:

а) Рассмотрим числа от 0 до 999.999, представим это число в виде $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Рассмотрим все числа с единицами в записи, всего единиц в таком числа может быть от 1 до 6: 1 единица – $C_6^1 \cdot 9^5$, 2 единицы – $C_5^2 \cdot 9^4 \cdots \Rightarrow$ всего чисел с единицами в своей записи: $6 \cdot 59049 + 15 \cdot 6561 + 20 \cdot 729 + 15 \cdot 81 + 6 \cdot 9 + 1 = 468559 < 500000$, значит среди первого миллиона чисел с единицей меньше, чем без нее.

б) Аналогично первому пункту имеем: $C_7^1 \cdot 9^6 + C_7^2 \cdot 9^5 + C_7^3 \cdot 9^4 + C_7^4 \cdot 9^3 + C_7^5 \cdot 9^2 + C_7^6 \cdot 9^1 + C_7^7 \cdot 9^0 = 4685597 + 1 = 7 \cdot 531441 + 21 \cdot 59049 + 35 \cdot 6561 + 35 \cdot 729 + 21 \cdot 81 + 7 \cdot 9 + 1 = 5217031$. Значит среди первых 10 миллионов чисел с единицей больше чем без неё.

Ответ: а) без единиц больше, б) с единицами больше.

3. Найдите вероятность того, что в десятичной записи случайного шестизначного числа, в записи будет хотя бы две одинаковые цифры?

Решение:

Для начала найдём вероятность того, что в шестизначном числе все цифры разные. Первую цифру в числе можно выбрать 9 способами (всё, кроме нуля). Вторую цифру можно поставить 9 способами (всё, кроме первого), третью цифру 8 способами (всё, кроме первой и второй цифры), и т.д. Значит всего $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 5$.

Всего есть $9 \cdot 10^5$ (первая цифра не равна нулю) свособов выбрать шестизначное число, значит вероятность того, что все цифры в шестизначном числе различаются, равна

$$P = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 5}{9 \cdot 10^5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 5}{10^5}$$

Во всех остальных числах хотя бы две цифры будут совпадать. Полная вероятность выбора шестизначного числа равна 1, значит вероятность выбора шестизначного числа такого, что хотя бы две цифры совпадают, равна

$$P_0 = 1 - P = 1 - \frac{9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 5}{10^5}$$

Ответ: $1 - \frac{9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 5}{10^5}$

4. Из 36-карточной колоды карт на стол равновероятно и случайно выкладывается последовательность из 4 карт. Какова вероятность того, что две из них красные, а две черные?

Решение:

Всего карт 36, а каждого цвета по 18(всего 4 масти и по 2 масти на 1 цвет, значит 18 карт красного и 18 карт черного цвета). Отсюда вариантов выбрать два красные или 2 черные карты $= C_{18}^2$. В свою очередь всего вариантов выбрать 4 карты C_{36}^4. Значит шанс выбрать 4 карты так, чтобы 2 карты из них были красные и 2 черные $= \frac{C_{18}^2 \cdot C_{18}^2}{C_{36}^4} = 0,397$.

Ответ: 0,397.

5. Сколько существует 6-значных чисел, в которых чётных и нечётных цифр поровну?

Решение:

Так как всего 6 цифр, то всего должно быть 3 чётные и 3 нечётные цифры.

Выберем первую цифру произвольным образом – 9 способов. Значит из пяти оставшихся цифр ровно 2 чётных и 3 нечётных или 3 чётных и 2 нечётных. Для каждой из 5 цифр есть 5 вариантов выбора цифры в зависимости от того, какое число – чётное или нечётное, также надо учесть, что цифры могут быть переставлены $C_5^3 = C_5^2$ способами.

Значит по итогу получаем в этом случае $9 \cdot 5^5 \cdot C_5^3 = 90 \cdot 5^5$ чисел.

Ответ: $90 \cdot 5^5$ **чисел**

6. Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

Решение:

Число состоит из $3-x$ нечётных цифр, $2-x$ чётных и $2-x$ нечётных перед ними. Объединим чётную и стоящую перед ней нечётную цифру в одну. Тогда можно выбрать все места как они могут распологаться всего способами $4+3+2+1=10$ или же нам нужно выбрать 2 места из 5 возможных для псевдоцифры: $C_5^2 = 10$.
Выбрать 3 цифры из 5 нечётных: 5^3 способами. Выбрать одну нечётную и одну чётную цифру для псевдоцифры: $5 \cdot 5$. В итоге выходит таких чисел: $C_5^2 \cdot 5^3 \cdot (5 \cdot 5)^2 = 781250$.

Ответ: 781250.

7. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

Решение:

Выберем для начала 4 человека для проживания в четырёхместной комнате. Нам не важен порядок людей, важен только набор из четырёх людей. Значит количество способов из выбрать равно C_7^4. Далее нужно из трёх оставшихся людей выбрать двух для проживания в двухместной комнате – C_3^2 способа. Остался 1 человек и 1 комната – 1 способ.

Итого получаем $C_7^4 \cdot C_3^2 = 105$ способов расставить 7 человек в четырёхместную, двухместную и одноместную комнаты.

Ответ: 105 **способов**

8. Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве ранга n.

Решение:

Если ранг отсчитывается от $n = 1$, то в самом последнем уровне дерева будет 2^{n-1} вершин. Диаметр – $d = max\ max\ \rho(u, v)$, для $\forall u, v$. Тогда диаметр – это расстояние между любой нижней точкой из "левой" части дерева и любой нижней точкой из "правой" части дерева. Одну такую точку можно выбрать слева 2^{n-1} способами и ,соответственно, справа 2^{n-1} способами. Значит число диаметров $|d| = (2^{n-1})^2 = 2^{2n-2}$.

Ответ: $|d| = 2^{2n-2}$.

9. Разбиением числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$, что что $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых?

Решение:

Обозначим количество разбиений числа N на k слагаемых за $S(N, k)$. Тогда, согласно условиям, нужно сравнить два числа: количество разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{k} S(N, i) \ ? \ S(N + k, k)$$

Для решения задачи воспользуемся следующим: требуемые разбиения чисел являются неупорядоченным разбиением числа n на k слагаемых. Если обозначить число n за n-элементное множество, то его разбиение равно разбиению множества на k непустых подмножеств, где за подмножества мы обозначим числа, на которые разбивается число n. Так мы показали, что требуемые разбиения числа N на k слагаемых соответствует числу Стирлинга II рода: количество неупорядоченных разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств.

Для чисел Стирлинга II рода выполняется рекуррентное соотношение, которое мы будем использовать для разбиений:

$$S(N, k) = S(N - 1, k - 1) + k \cdot S(N - 1, k)$$

Из этого соотношения следует, что

$$S(N + k, k) - S(N + k - 1, k - 1) = k \cdot S(N + k - 1, k)$$

$$S(N + k - 1, k - 1) - S(N + k - 2, k - 2) = (k - 1) \cdot S(N + k - 2, k - 1)$$

$$...$$

$$S(N + 1, 1) - S(N, 0) = S(N, 1)$$

Сложим теперь все равенства:

$$S(N + k, k) - S(N, 0) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot S(n + (i - 1), i)$$

Для граничных условий имеем $S(N, 0) = 0$, тогда

$$S(N+k, k) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot S(N+(i-1), i)$$

Значит по условию нужно сравнить две суммы:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot S(N+(i-1), i) \ ? \ \sum_{i=1}^{k} S(N, i)$$

Очевидно, что $S(N+(i-1), i) > S(N, i)$, так как для разбиений $S(N, i)$ как минимум можно для первых $i-1$ слагаемых можно прибавить к ним единицу, тогда получим разбиения для числа $N+(i-1)$ на k слагаемых. Также можно составить разбиение такое, что первые $i-2$ слагаемых увеличиваем на единицу, а $i-1$ слагаемое на 2. Получили ещё одно дополнительное разбиение для числа $N+(i-1)$ на k слагаемых, значит $S(N+(i-1), i) > S(N, i)$.

Получаем такую цепочку неравенств:

$$i \cdot S(N+(i-1), i) > S(N+(i-1), i) > S(N, i)$$

Отсюда сразу получаем, что

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot S(N+(i-1), i) \ > \ \sum_{i=1}^{k} S(N, i)$$

Значит разбиений числа N на не более чем k слагаемых меньше, чем разбиений числа $N+k$ на ровно k слагаемых.

Ответ: разбиений числа $N+k$ на ровно k слагаемых больше

10. Чего больше, правильных скобочных последовательностей из n пар скобок или последовательностей $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ с элементами ± 1, таких что $\sum\limits_{i=1}^{2n} = 0$?

Решение:

Обозначив ")" за $+1$, а "(" за -1 получим, что любой последовательности из пар скобок можно поставить в соответствие точно такую же последовательность из ± 1 (мы можем это сделать потому что кол-во

")"равно кол-ву "("и тогда будет выполняться условие $\sum\limits_{i=1}^{2n} = 0$ для последовательности из ± 1), однако в обратную сторону это не сработает, т.к. на последовательность из ± 1 ограничений в расположении нет,а на скобки есть(они должны располагаться правильными парами).

Таким образом каждому эл-ту из множества X (множества скобок) соответствует один элемент из Y , но существуют элементы из Y , для которых не существует элемента из X. Иными словами мы получили инъекцию из X в Y . Значит последовательностей $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ с элементами ± 1, таких что $\sum\limits_{i=1}^{2n} = 0$ больше.

Ответ: последовательностей $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ с элементами ± 1, таких что $\sum\limits_{i=1}^{2n} = 0$ – больше.