Занятие 5. Лекция

План

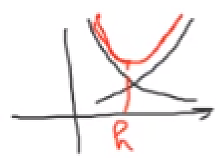
1. Возвращаем долги
2. Тестирование гипотез

Jackknife (=перочинный ножик)

- метод, позволяющий улучшить нахавляву оценку

На прошлом занятии обсуждали bias-variance-tradeof

$$MSE(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \underbrace{Bias(\hat{\theta}_n)}_{=(\mathbb{E}\hat{\theta}_n - \theta)^2} + \underbrace{Var(\hat{\theta}_n)}_{=\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \mathbb{E}\hat{\theta}_n)^2]}$$



- как уменьшить смещение?
  - jackknife
- как уменьшить разброс?
  - методы монте-карло

В теории хочется сделать так:

$$\hat{\theta}_n^0 = \hat{\theta}_n - \mathbb{E}\hat{\theta}_n d$$

Тогда получается $\mathbb{E}\hat{\theta}_n^0 = 0$, т.е. оценка несмещенная. Но как найти это матожидание?

Пример

$\theta = \sigma^2$: $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1} (x_i - \bar{X})^2$ – смещ оц. для θ

$\mathbb{E}\hat{\theta}_n = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$

Хочется вычесть, но вычесть не можем:

$\hat{\theta}_n^0 = \hat{\theta}_n - \frac{n-1}{n}\sigma^2$, но мы не знаем σ^2

Идея: вычесть два раза θ:

$$\hat{\theta}_n^0 = \hat{\theta}_n - Bias(\hat{\theta}_n)$$

$$\hat{\theta}_n^0 - \theta = \hat{\theta}_n - \theta - Bias(\hat{\theta}_n) \quad \Big| \, \mathbb{E}[\cdot]$$

$$Bias(\theta_n^1) = Bias(\hat{\theta}_n) - Bias(\hat{\theta}_n) = 0$$

Значит θ_n^1 несмещенная. Но мы не знаем $Bias(\hat{\theta}_n)$. Поэтому берем оценку (она называется jackknife):

$$\widehat{Bias(\hat{\theta}_n)} = (n-1)\Big(\frac{1}{n}\sum_i^n \hat{\theta}_{(-i)} - \hat{\theta}_n\Big)$$

Тогда $\mathbb{E}[\widehat{Bias(\hat{\theta}_n)}] = Bias(\hat{\theta}_n) + O(\frac{1}{n^2})$

Пример

$$\theta = \sigma^2 \; ; \quad \hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1} (X_i - \bar{X})^2$$

$$\mathbb{E}\hat{\theta}_n = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \Rightarrow bias(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}\hat{\theta}_n - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Метод jacknife:

$$\mathbb{E}[\widehat{bias}(\hat{\theta}_n)] = (n-1)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{(-i)} - \theta) - (\hat{\theta}_n - \theta)\Big)$$

$$= (n-1)\Big(bias(\hat{\theta}_{(-1)}) - bias(\hat{\theta}_n)\Big)$$

$$= (n-1)\Big(-\frac{\sigma^2}{n-1} + \frac{\sigma^2}{n}\Big) = \underset{\text{оценка несмещ.}}{-\frac{\sigma^2}{n}} = bias(\hat{\theta}_n), \text{ т.е.}$$

Получаем несмещенную оценку!!!

Типовая ситуация

Есть члены порядка $1/n, 1/n^2$

$$Bias(\hat{\theta}_n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \dots$$

Тогда

$$\mathbb{E}[\widehat{bias}(\hat{\theta}_n)] \overset{(2)}{=} (n-1)\Big(\frac{a}{n-1} + \frac{b}{(n-1)^2} - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} + \dots\Big) = \frac{a}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

В итоге получаем:

$$\hat{\theta}_n^0 := \hat{\theta}_n - \widehat{bias}(\hat{\theta}_n)$$

$$bias(\hat{\theta}_n^0) = \mathbb{E}\hat{\theta}_n - \mathbb{E}[\widehat{bias}(\hat{\theta}_n)] - \theta = bias(\hat{\theta}_n) - \mathbb{E}[\widehat{bias}(\hat{\theta}_n)] =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

В случае типовой ситуации получаем

$$bias(\hat{\theta}_n^0) = O(\frac{1}{n^2})$$

Статистические тесты

- основной инструмент в матстатистике, чтобы доказать факт по данным

Основные вещи

Есть выборка взятая из закона распределения:

$$X_1, \dots X_n \sim \mathcal{P}_\theta$$

Проверяем гипотезу:

$$\mathcal{H}_0 = \theta = \theta_0$$

Нужно найти C - критическую область, т.ч.

$$\mathbb{P}_{\theta_0}\{(X_0, \dots X_n) \in C\} = \alpha = 0.05$$

Если мы попали в это множество, то отвергаем гипотезу

Пример (Нераскрытие парашуты)

Тестируем парашют с номером i:

$$X_1, \dots X_n = \begin{cases} 1, & \text{парашют раскрылся}, & p = \theta \\ 0, & \text{иначе}, & p = 1 - \theta \end{cases}$$

Гипотеза:

$$\mathcal{H}_0 : \theta = 0.0001$$

Критическое множество:

$$C = \{X_1 + \dots + X_n \geqslant t_\alpha\}$$

(число нераскрытых парашутов больше альфа).

$$\mathbb{P}_{\theta_0}\{X_1 + \dots X_n \geqslant t_\alpha\} = \alpha$$
$$= \sum_{k=\lceil t_\alpha \rceil}^{n} C_n^k \theta_0^k (1 - \theta_0)^{n-K} = \alpha$$

Нужно решить это уравнения относительно α. Можно с помощью R. Но есть другой способ, спомощью ЦПТ:

$$\mathbb{P}_{\theta_0}\{X_1 + \dots X_n \geqslant t_\alpha\} = \mathbb{P}_{\theta_0}\left\{\underbrace{\frac{X_1 + \dots X_n - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}}_{\sim N(0,1)} \geqslant \frac{t_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right\} = \alpha$$

Значит,

$$\frac{t_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}} = z_{1-\alpha} \Rightarrow t_\alpha = n\theta_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}$$

Мы считаем количество раз, сколько раскрылся парашют, с числом t_α. Если больше, то отклоняем. Иначе **не отклоняется**, но не принимается.

Но тогда что мы принимаем?

Число a, которые было выше, называется ошибкой 1 рода. Еще есть ошибки второго рода

Ошибки второго рода

$$\mathbb{P}_{\theta_0}\{(X_0, \dots X_n) \in C\} = \alpha = 0.05$$

Идеально:

$$\mathbb{P}_{\theta_1}\{(X_1, \dots, X_n) \in C\} = 1 - \beta$$

где β - малое число. Оно является вероятностью ошибки второго рода.

А может ли быть так, что и $\alpha = \beta = 0$?

Пример

$X_1, \dots X_n$ $\quad H_0$: норм. распр

H_0: распр Пуассона

$$\mathcal{P}_\Theta = \{ \underset{\text{норм}}{\mathbb{P}_0}, \underset{\text{Пуасс}}{\mathbb{P}_1} \}$$

Для этой задачи есть тест, для которого оба числа равны нулю

$$C = \{ X_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$$

Тогда:

$$\mathbb{P}_0\{X_1 = 0, 1, 2, \dots\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\mathbb{P}_1\{X_1 = 0, 1, 2, \dots\} = 1 \Rightarrow \beta = 0.$$

Но это математическая экзотика

Какой размер выборки брать для эксперимента?

Максимально прикладной вопрос (вспоминаем тинек). Можно решить с помощью чисел α, β.

Пример про парашюты (продолжение)

$$\mathbb{P}_{\theta_0}\left\{\frac{X_1+\dots+X_n-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}} \geq \frac{t_\alpha-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right\} = \alpha$$

$$\xi \sim N(0,1)$$

$$\mathbb{P}_{\theta_1}\left\{\frac{X_1+\dots+X_n-n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}} \geq \frac{t_\alpha-n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}}\right\} = 1-\beta$$

Мы ранее вывели

$$\begin{cases} \dfrac{t_\alpha-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}} = z_{1-\alpha} \\ \dfrac{t_\alpha-n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}} = z_\beta \end{cases}$$

Откуда (приравниваем t_α)

$$n\theta_0 + \sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}\, z_{1-\alpha} = n\theta_1 + \sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}\, z_\beta$$

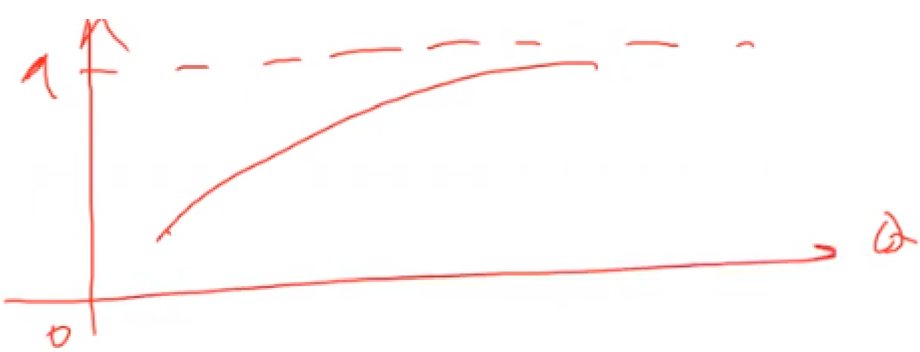
$$n = \left(\frac{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}\, z_\beta - \sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}\, z_{1-\alpha}}{\theta_0-\theta_1}\right)^2$$

Графическая иллюстрация ошибок первого и второго рода

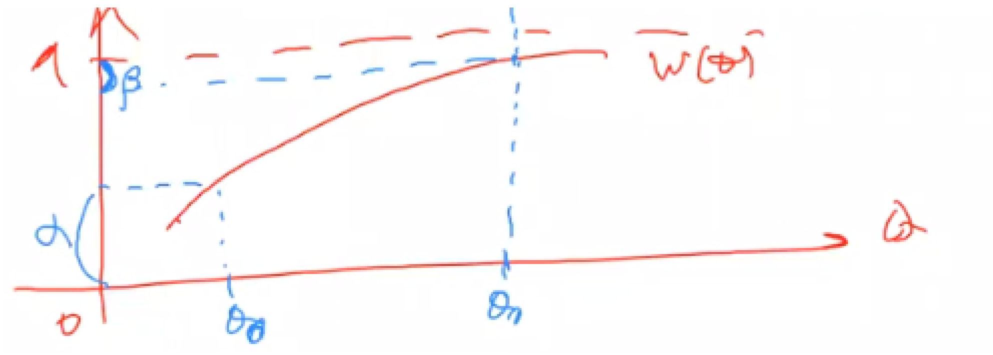
Функция мощности:

$$W(\theta) = \mathbb{P}_\theta\{(x_1,\dots,x_n) \in C\}$$

Типичный график:



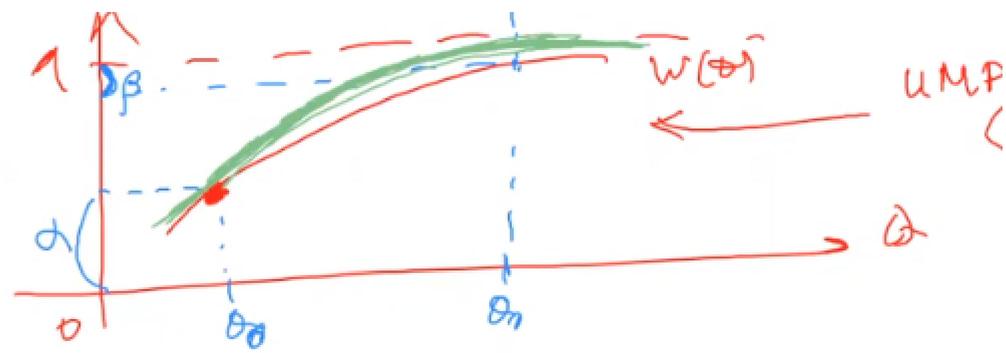
Вот так выглядят ошибки первого и второго рода:



- по параметру α понять как делать тест
- по параметру β можем понять длякаких гипотез метод эфективный

Можно придумать тест, у которого α фиксирована, а кривая оптимальна?

> Да, это называется UMP tests (uniformly most powerful)



Такие тесты можно строить благодаря теореме Неймана Пирсона

UMP тесты

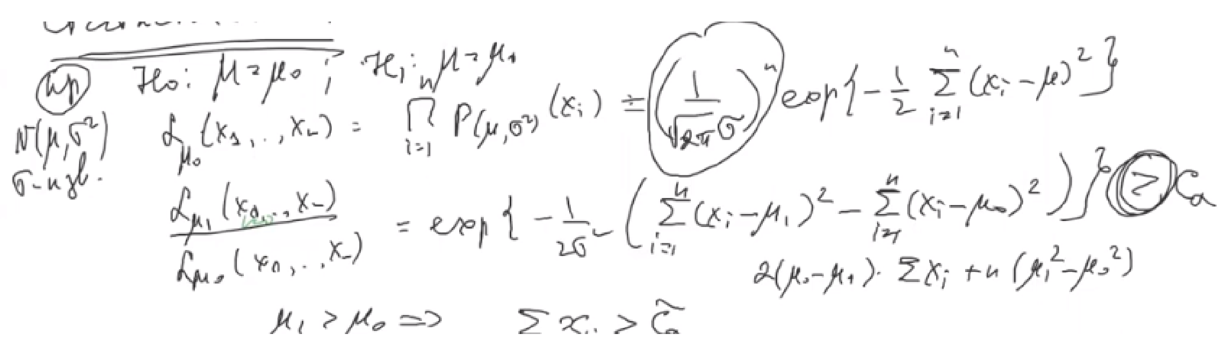
Теорема Неймана Пирсона

Есть две гипотезы $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$. Тогда следующее критическое множество дает UMP тест:

$$C = \left\{ \frac{L_{\theta_1}(X_1, \dots X_n)}{L_{\theta_0}(X_1, \dots X_n)} > C_\alpha \right\}$$

где L - функция правдоподобия

Пример



Методика построения теста:

$$\underbrace{\sum X_i}_{\sim N(\mu_0 n,\, n^2\sigma^2)}$$

$$\mathbb{P}_{\mu_0}\left\{\sum X_i > \hat{c}_\alpha\right\} = \alpha$$

Тогда

$$\xi \sim N(0,1) \Rightarrow \left\{\sum x_i > \hat{c}_\alpha\right\} = \left\{\mu_0 n + n\sigma\xi > \hat{c}_\alpha\right\}$$

$$\left\{\xi > \underbrace{\frac{\hat{c}_\alpha - \mu_0 n}{n\sigma}}_{= z_\alpha}\right\}$$

(Нейман–Пирсон)

И в итоге

$$\hat{c}_\alpha = \mu_0 n + n\sigma z_\alpha$$

$\sum x_i > \hat{c}_\alpha$ — откл. гип.

$\sum x_i \le \hat{c}_\alpha$ — не откл. гип.

И опять экспоненциальное распределение

Оно идеально подходит под теорию.

Мы свели неравенство из теоремы НП к неравенству с суммоу X_i . В случае эксп. распр. так будет всегда

Экспоненциальное семейство:

$$p(x,\theta) = g(x)\, e^{x\theta - d(\theta)}$$

Посчитаем:

Статистич. тесты

Эксп. семейство: $p(x,\theta) = g(x)\, e^{x\theta - d(\theta)}$

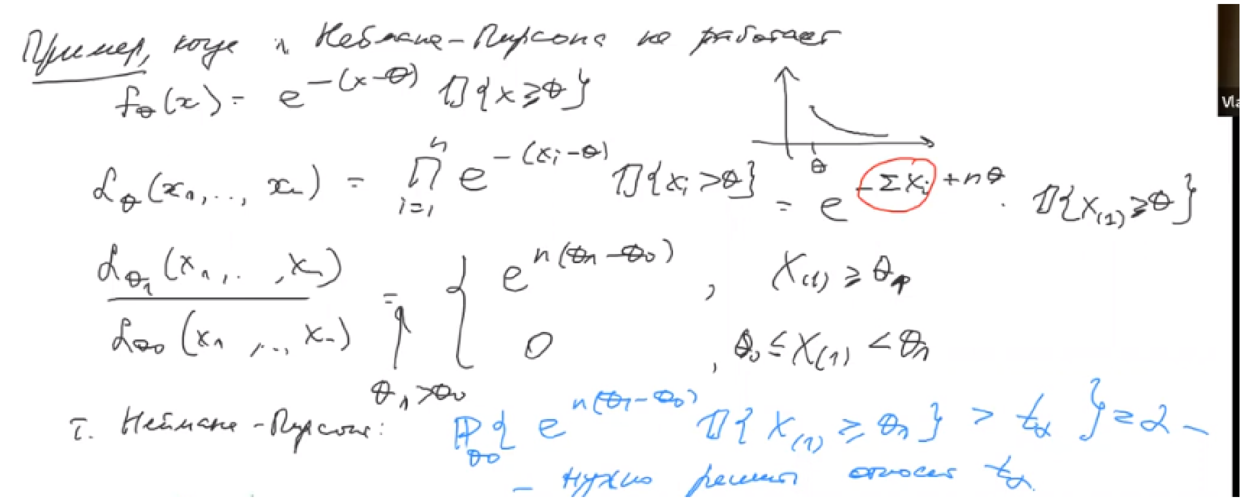
$$L_\theta(x_1,\dots,x_n) = g(x_1)\cdots g(x_n)\, e^{\sum_{i=1}^n x_i\theta - n d(\theta)}$$

$$\frac{L_{\theta_1}(x_1,\dots,x_n)}{L_{\theta_0}(x_1,\dots,x_n)} = e^{\sum x_i(\theta_1-\theta_0) - n(d(\theta_1) - d(\theta_0))} > c_\alpha$$

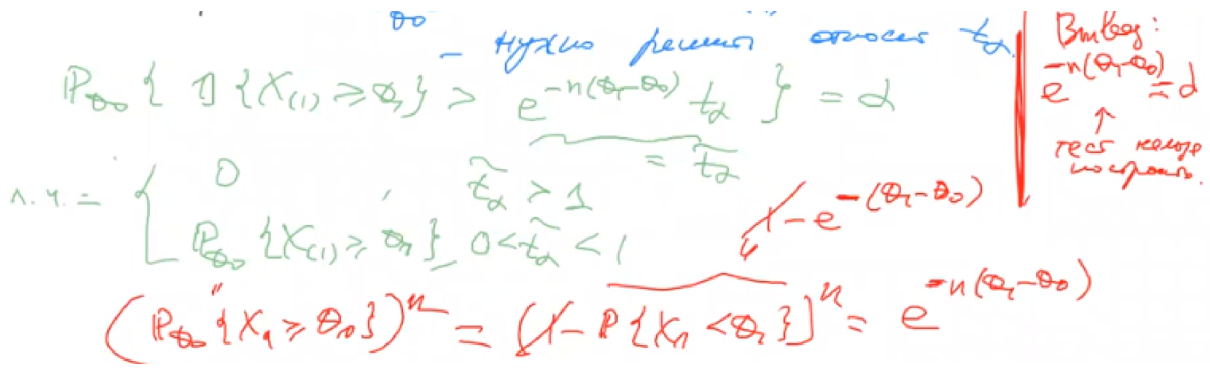
$$\theta_1 > \theta_0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n x_i > \hat{c}_\alpha}$$

Метод постр. UMP test: fix α; $\mathbb{P}_{\theta_0}\left\{\sum x_i > \hat{c}_\alpha\right\} = \alpha$ — реш. относит. $\hat{c}$

Пример, когда лемма Немлана-Пирсона не работает



Последнее уравнение решить невозможно:



Получили в конце странное равенство $\Rightarrow$ тест построить не удается

Позже обсудим, что делать

Рандомизированный статистический тест

- не является тестов в строгом смысле этого слова

Обычный тест:

$$\mathbb{P}_{\theta_0}\{(X_1, \ldots X_n) \in C\} = \alpha$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[\mathbb{I}\{(X_1, \ldots X_n) \in C\}]$$

Рандомизированный тест: вводим функция d:

$$d(X_1, \ldots X_n) \in [0, 1]$$
$$\mathbb{E}_{\infty}[d(X_1, \ldots X_n)] = \alpha$$

Интерпретация:

- $d(X_1, \ldots X_n) = 1$ - отклоняем
- $d(X_1, \ldots X_n) = 0$ - не отклоняем
- $d(X_1, \ldots X_n) \in (0, 1)$ - отклоняем с вероятностью $d(X_1, \ldots X_n)$

Аналог леммы Неймана-Пирсона:

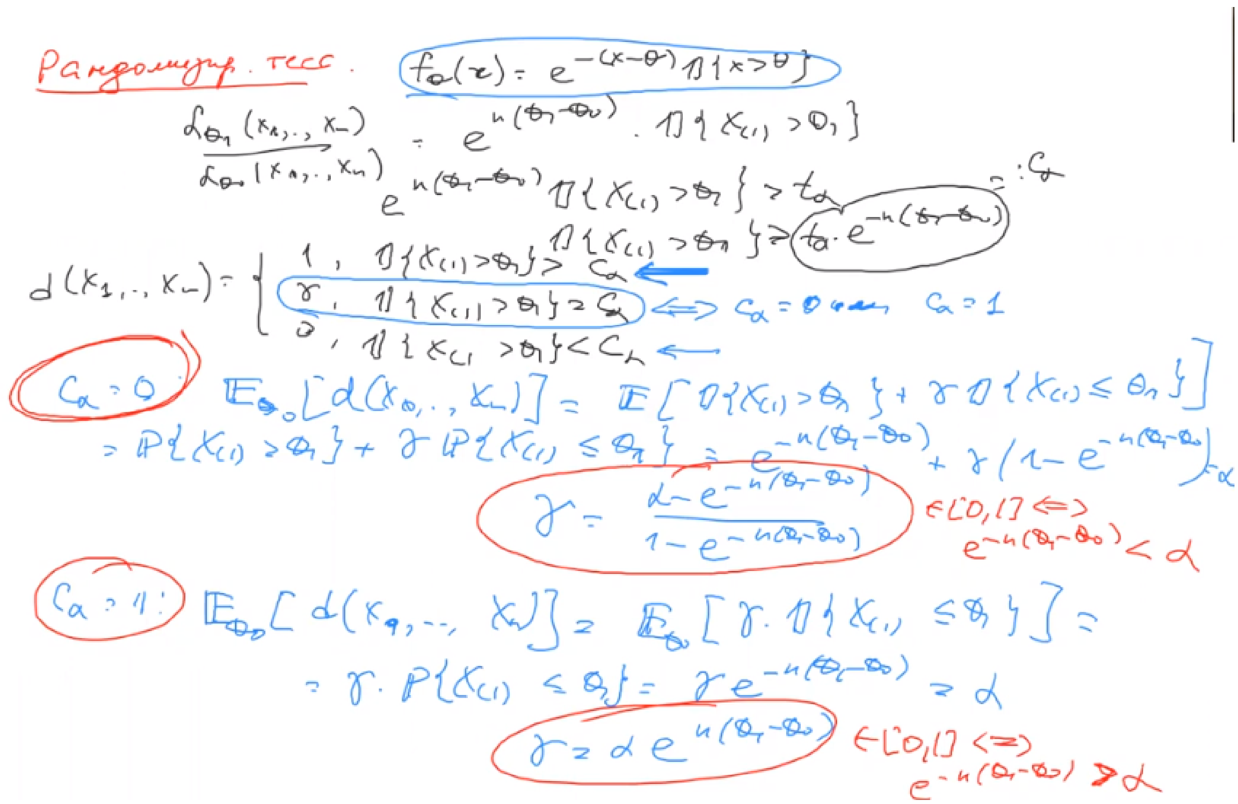
$$
d(X_1, \dots X_n) = \begin{cases} 1, & \frac{L_{\theta_0}(X_1, \dots, X_n)}{L_{\theta_1}(X_1, \dots, X_n)} > t_\alpha \\ \gamma, & (\dots) = t_\alpha \\ 0, & (\dots) < t_\alpha \end{cases}
$$

Тогда

1. $\exists ! \gamma, t_\alpha : \ \mathbb{E}_{\theta_0}[d(X_1, \dots X_n)] = \alpha$
2. Такой тест самый мощный среди всех тестов с вероятностью ошибки первого рода α, т.е.

$$
\forall d^* : \mathbb{E}_{\theta_0}[d^*(X_1, \dots X_n)] = \alpha \mid \mathbb{E}_\theta[d^*(X_1, \dots X_n)] \underset{\forall \theta}{\leqslant} \mathbb{E}_\theta[d(X_1, \dots X_n)]
$$

Пример



Когда $(\dots) = \alpha$, то используем обычную лемму НП

LR-тесты

У нас были очень простые гипотезы: параметр равен одному числу или другому. Обычно тесты другие: параметр равен заданному числу или нет:

$$
\mathcal{H}_0 : \ \theta \in \Theta_0 \subset \Theta
$$
$$
\mathcal{H}_1 : \ \theta \in \Theta_1 \subset \Theta
$$

Очень хочется обобщить лемму НП:

$$\left\{ \frac{\max_{\theta\in\Theta_1} L_\theta(x_1,\dots,x_n)}{\max_{\theta\in\Theta} L_\theta(x_1,\dots,x_n)} > C \right\}$$

Класс таких тестов называется LR.

Самый важные результат в этой области:

Теорема Уилкса

Пусть $\Theta_0 \subset \Theta$. Тогда

$$2\log\left(\frac{\max_{\theta\in\Theta} L_\theta(X_1,\dots X_n)}{\max_{\theta\in\Theta_0} L_\theta(X_1,\dots X_n)}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{X}^2_{\dim\Theta - \dim\Theta_0}$$

где $X_p^2 = \xi_1^2 + \xi_p^2,\ \xi_i \sim N(0,1)$

У этой теоремы есть предположения, но опустим их - условия регулряности. Но они почти всегда выполнены.

Пример

пр. $X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 - изв. $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu\neq\mu_0$ $\xi_1,\dots,\xi_p \sim N(0,1)$

$$L_\mu(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\log\left(\max_\mu L_\mu(x_1,\dots,x_n)\right) = \max_\mu\left(-n\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = -n\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}$$

$$\log\left(\max L_\mu(x_1,\dots,x_n)\right) = -n\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{\sum(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$$

$$2\log(\dots) = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2 \xrightarrow{d} \chi^2_1$$

В нашем примере тут вообще равенство, а не стремление

Теорема Пирсона (1900-ый год)

Теорема Пирсона $X_1,\dots,X_n$ — i.i.d. $\xi_1,\dots,\xi \sim N(0,1)$

$D_1, D_2, D_3, \dots, D_k$ $\bigsqcup_{i=1}^k D_i = \mathbb{R}$ $P\{X\in D_i\} = q_i,\ i=1..k$

$N_i = \{$кол-во элем. выборки $\in D_i\}$

Ут: $\boxed{\sum_{i=1}^k \frac{(N_i - nq_i)^2}{nq_i} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \chi^2_{k-1}}$

Прим.: $X\sim F \leftarrow$ fixed $q_i = P\{X\in D_i\} = F(u_{i+1}) - F(u_i)$, χ^2_{k-1}

$D_i = (u_i, u_{i+1}]$ α: $P\{\eta > t_\alpha\} = 1-\alpha$

Трудность: 1) $\xrightarrow{d}$. $\sum\frac{(N_i - nq_i)^2}{nq_i} > t_\alpha$ — гип. откл.

Ивченко, Медведева (1984): $\begin{cases} nq_i \geq 5\ \forall i \\ n \geq 50 \end{cases}$

2) $F \to F_\theta$ с неизв. θ

Решение первой проблемы - эмпирические улосвия. Решение второй проблемы (через матан):

метод минимума χ^2: $q_i = F(u_{i+1}) - F(u_i) = q(\theta)$

$$\hat{\theta}_n = \arg\min_{\theta} \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - nq_i(\theta))^2}{nq_i(\theta)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - nq_i(\hat{\theta}_n))^2}{nq_i(\hat{\theta}_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \chi^2_{k-1-\dim\Theta}$$

Почему из теоремы Уилкса следует теорема Пирсона?

- просто полезная техника, характерная для этой области матанализа

Теорема Уилкса (Wilks thm)

$\Theta_0 \subset \Theta$

$$2\log\left(\frac{\max_{\theta\in\Theta} L_\theta(x_1,\ldots,x_n)}{\max_{\theta\in\Theta_0} L_\theta(x_1,\ldots,x_n)}\right) \xrightarrow{d} \chi^2_{\dim\Theta - \dim\Theta_0}$$

$\chi^2_p: \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2$, $\xi_1,\ldots,\xi_p \sim N(0,1)$

Теорема Пирсона $X_1,\ldots,X_n$ — i.i.d.

$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_k$, $\bigsqcup_{i=1}^{k} D_i = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\{X \in D_i\} = q_i$, $i=1..K$

$N_i = \{$кол-во элем. выборки $\in D_i\}$

Утв:
$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - nq_i)^2}{nq_i} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \chi^2_{k-1}}$$

Док. $\mathbb{P}\{N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k\} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}$ — мультином. расп.

Θ_0: $p_i = q_i$, $\dim\Theta_0 = 0$

Θ: $p_1 + \ldots + p_k = 1$, $\dim\Theta = k-1$

$$\log(\max L_\theta(x_1,\ldots,x_n)) = \log \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1}\ldots\left(\frac{n_k}{n}\right)^{n_k}$$

В конце использовали

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\{n_1\log p_1 + \ldots + n_k \log p_k - \lambda(p_1 + \ldots + p_k - 1)\} = \frac{n_i}{p_i} - \lambda \Rightarrow p_i = \frac{n_i}{\lambda}, \quad \lambda = n$$

Ок, идем дальше. Подставляем в формулу из теоремы Уилкса:

$$2\log\left(\frac{\left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{n_k}{n}\right)^{n_k}}{q_1^{n_1}\cdots q_k^{n_k}}\right) = 2\sum_{i=1}^{k} n_i \log\left(\frac{n_i}{nq_i}\right)$$

Разложим в ряд Тейлора:

Ф. Тейлора:
$$x\log\left(\frac{x}{x_0}\right) = (x-x_0)\left(x\log\frac{x}{x_0}\right)' + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(x\log\frac{x}{x_0}\right)'' = \ldots = (x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2x_0} + \ldots$$

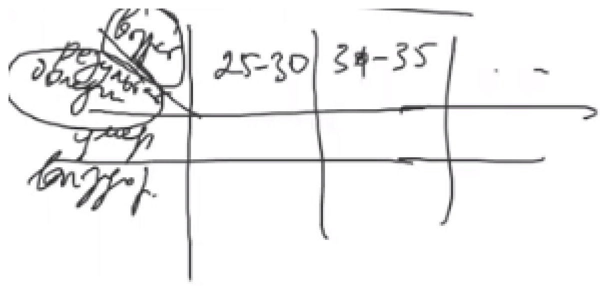
$$= \cancel{2}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{k}(n_i - nq_i}_{\sum n_i - n\sum q_i = 0} + \frac{(n_i - nq_i)^2}{\cancel{2}nq_i}\Big) = \sum\frac{(n_i - nq_i)^2}{nq_i} \quad \square$$

$\sum n_i = n$, $\sum q_i = 1$

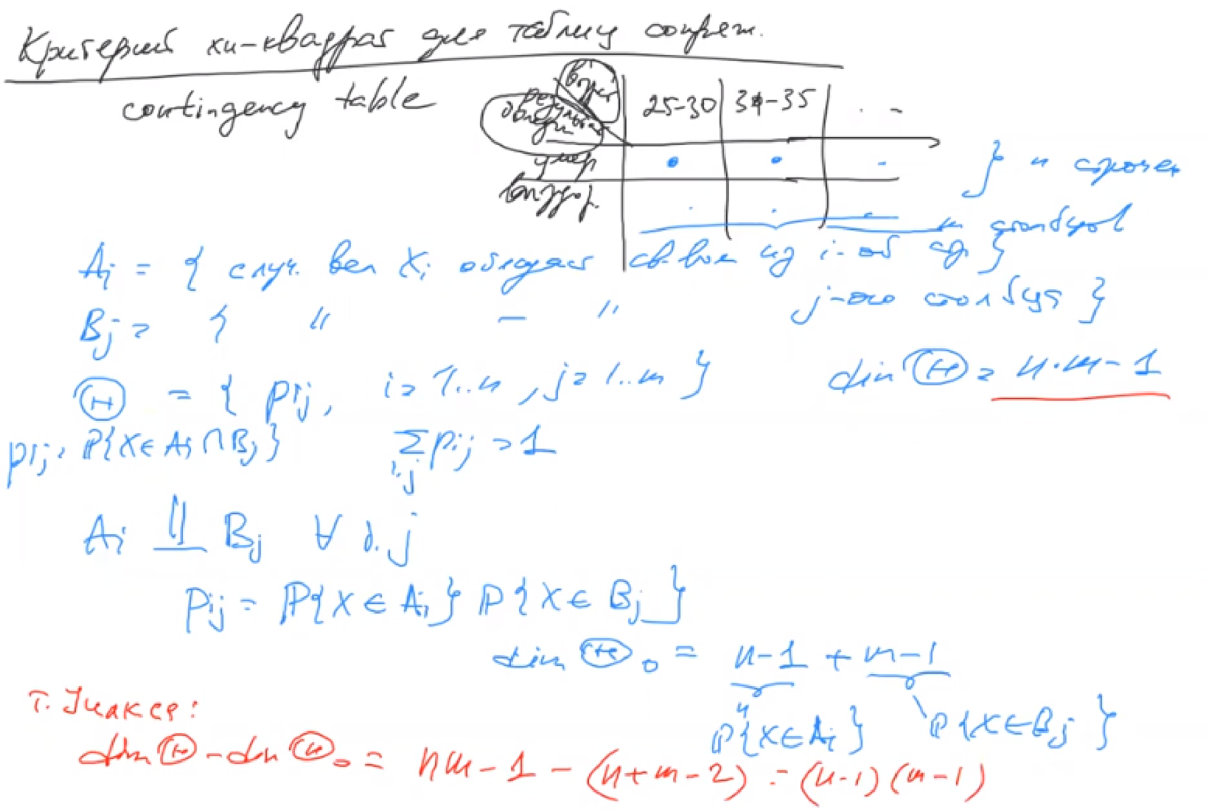
С теоремой Пирсона будет работать на семинарах.

Критерий хи-кварат для таблиц сопряженности

Таблица сопряженности (contingency table):



Можно было бы использовать корреляцию Пирсона. Но это предпологает, что распределение величин нормальное

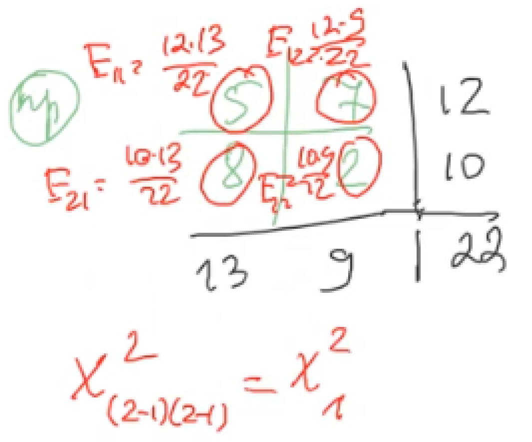


Непосредственно сам критерий:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{(N_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \xrightarrow{d} \chi^2_{(n-1)(m-1)}$$

$$\underset{\text{expected}}{E_{ij}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} N_{ik}}{N}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n} N_{kj}}{N}$$

Пример



Выводы

- поговоририли про тесты, рандомизированные тесты
- перешли к теореме Уилкса
    - если где-то видим сходимость к кси-квадрату, скорее всего корень лежит в этой теореме
    - поговорили про два применения
        - теорема Пирсона
        - таблица сопряженности