

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (государственный
университет)

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ»
ПРИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЦЕНТРЕ ИМ. А. А. ДОРОДНИЦЫНА РАН

Котов Александр Евгеньевич

**Разработка методов сверхразрешения
изображений заданного класса объектов
с помощью выделения локальных
признаков.**

010900 — Прикладные математика и физика

БАКАЛАВРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Гнеушев Александр Николаевич

Москва

2021 г.

Аннотация

В работе исследуется задача повышения разрешения монохроматических спутниковых изображений на основе анализа локальных признаков изображения и построения аналитических моделей. Существующие подходы в основном используют нейросетевые модели для этой задачи, однако они не гарантируют восстановление потерянных деталей и направлены на увеличение визуального качества. Они не позволяют контролировать появление несуществующих деталей на увеличенном изображении. В работе предлагается разработать аналитические модели увеличения разрешения на основе построения модели искажения и модели восстановления. Модель искажения является композицией функций регистрации оптической системой и дискретизации сенсором. Модель реконструкции является композицией функций интерполяции потерянных точек и компенсации искажений локальной структуры вследствие искажений оптической системы и проектирования на сенсор изображения объектов. Разработаны методы анизотропной интерполяции и компенсации искажения локальных областей изображения для модели реконструкции. Проведено сравнение с базовыми подходами, бикубической интерполяцией, винеровской фильтрацией, нейросетевой моделью SRCNN. Результаты показали, что точность предложенных методов не уступает лучшим нейросетевым моделям для спутниковых снимков. Так же реализован метод генерации изображений, моделирующий необходимые дефекты для модели регистрации.

Ключевые слова: суперразрешение, сверхразрешение, увеличение разрешения спутниковых снимков, SRCNN, реконструкция изображений, анизотропная интерполяция.

Содержание

1	Введение	4
2	Обзор основных подходов к увеличению разрешения и реставрации изображения	7
2.1	Методы интерполяции	8
2.2	Методы компенсации искажений локальной структуры изображения	11
3	Постановка задачи	17
3.1	Определения и обозначения	17
3.2	Модель и постановка задачи	18
4	Методы увеличения разрешения изображений заданного класса объектов	20
4.1	Модель регистрации изображений	20
4.2	Модель реконструкции изображений	23
4.2.1	Метод анизотропной интерполяции промежуточных точек	23
4.3	Метод компенсации искажений локальной структуры изображения	25
5	Вычислительный эксперимент	28
5.1	Меры качества	28
5.1.1	PSNR	28
5.1.2	SSIM	29
5.2	Численные результаты	30
6	Заключение	33

1 Введение

Увеличение разрешения изображений на протяжении долгого времени является одной из самых актуальных проблем компьютерного зрения. Необходимость разработки программных методов увеличения разрешения обусловлена дороговизной качественных систем видео регистрации и их большими габаритами. Конкуренция на рынке спутниковых снимков земли способствует исследованию в области реконструкции и улучшения качества изображения для задач анализа Земной инфраструктуры. Методы увеличения качества спутниковых снимков позволяют использовать дешевые или устаревающие спутниковые системы предыдущих поколений, которые еще работают на орбите, в качестве источника исходного материала, который можно переработать в конкурентоспособный продукт. Более того, разрабатываемые методы позволяют проводить более точный последующий анализ объектов на изображениях.

Камеры на спутниках имеют ограниченное пространственное разрешение, неудовлетворительное для современных приложений, поэтому появляется необходимость в увеличении разрешения снимков и их последующей реставрации. Также, решение данной задачи поможет решить проблему, связанную с обработкой исторических изображений, полученных спутниками, имеющими низкое разрешение.

Разработка методов повышения разрешения изображений началась в 1984 году, когда Цай и Хуан [1] вывели метод объединения нескольких изображений низкого разрешения для получения одного изображения с высоким разрешением. Хотя в начале к развитию методов данной области не проявлялся особый интерес, со временем вопрос улучшения качества стал актуален, что привело к разработке многих доступных в настоящее время методов суперразрешения (SR). Методы суперразрешения подразделяются на многокадровые (классический подход) и од-

покадровые. В многокадровых методах набор изображений низкого качества, полученных с одной и той же сцены, объединяется для восстановления одного изображения высокого разрешения.

Однако решение задачи сверхразрешения для одного кадра стала более актуальной. Для ее решения существуют классические подходы : алгоритмы увеличения разрешения, основанные на интерполяции (билинейная, бикубическая [2]), метод ближайших соседей [3], методы фильтрации искажений, такие как регуляризация[4], спектральное разложение[5], Винеровская фильтрация[6]. Они неплохо работают для целевых изображений, но имеют ограниченную степень применимости, не адаптивны.

Для решения данных проблем были разработаны нейросетевые модели, осуществившие прорыв в решении многих современных задач. На сегодняшний день существуют модели, основанные на сверточных нейронных сетях SRCNN, с механизмами Pre-Upsampling, Post-Upsampling, Progressive Upsampling [7, 8], сверточные сети с добавлением остаточных блоков SRResNET [9, 10], с применением генеративно-состязательных нейронных сетей SRGAN [9]. Но такие подходы требуют наличия большой вычислительной мощности для обучения и большого объема обучающей выборки, которая должна быть специально подготовлена. Существующие нейросетевые модели не гарантируют восстановление потерянных деталей и направлены на увеличение визуального качества. Они не позволяют контролировать появление несуществующих деталей на увеличенном изображении. Для таких ответственных областей как дистанционное зондирование или медицинские приложения необходимо гарантировать релевантность восстановленного изображения.

В работе предлагается разработать модели увеличения разрешения изображения на основе анализа локальных признаков и построения моделей локальной реконструкции. Ставится задача реконструкции изображения на основе построения модели искажения и модели восстанов-

ления. Модель искажения является композицией функций регистрации оптической системой и дискретизации сенсором. Модель реконструкции является композицией функций интерполяции промежуточных точек и компенсации искажений локальной структуры вследствие искажений оптической системы и проектирования на сенсор. Разработаны методы анизотропной интерполяции и компенсации искажения локальных областей изображения для модели реконструкции.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является разработка метода увеличения разрешения и реконструкции текстурной информации монохроматических изображений, полученных со спутника.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

- исследовать существующие подходы восстановления изображений;
- исследовать существующие подходы реконструкции изображений;
- реализовать существующие меры качества реконструкции;
- разработать методы интерполяции яркостных значений пикселей с учетом анизотропной структуры свойств изображения;
- разработать и реализовать основные методы реконструкции и повышения качества изображений;
- провести вычислительный эксперимент и анализ полученных результатов.

Научная новизна. Поставлена задача увеличения разрешения изображения как моделирование процесса искажения изображения объектов, проецируемых через оптическую систему на сенсор ограниченного разрешения и построения модели реконструкции на основе композиции функций интерполяции и коррекции текстурных искажений, вследствие

дискретизации яркостного поля на сенсоре. Предложен метод анизотропной интерполяции промежуточных точек изображения на основе анализа градиентного поля яркости и построения анизотропной интерполяционной функции. Предложен подход рассмотрения областей объектов на изображении как реализации с субпиксельным сдвигом изображений типичных неуникальных элементов. На основе этого подхода разработана модель коррекции яркости на основе разложения локальных признаков в каждой области изображения в линейную комбинацию по признакам областей всего изображения.

Практическая ценность Численные результаты показали, что точность предложенных методов не уступает лучшим нейросетевым моделям для спутниковых снимков. Результаты исследования могут быть широко востребованы во многих областях: системы видеонаблюдения, биомедицинские приложения, дистанционное зондирование, распознавание объектов (таких как лицо, отпечаток пальца, радужная оболочка, номерной знак транспортного средства или текст) и улучшение качества видео.

2 Обзор основных подходов к увеличению разрешения и реставрации изображения

В последние годы задача сверхразрешения изображений и видео получило особенное внимание среди исследователей, занимающихся компьютерным зрением. Большинство подходов, предлагаемых в исследовательских работах можно разделить на интерполяцию и фильтрацию искажений.

2.1 Методы интерполяции

Существует множество различных методов интерполяции, сложность и качество которых зависит от количества актуальных соседних пикселей, используемых для оценки яркости между ними. Наиболее часто используемые методы интерполяции включают методы ближайшего соседа, билинейные и бикубические методы [11, 12].

Метод *k* - *ближайших соседей* самый простой для интерполяции, который выбирает *k* ближайших пикселей, окружающих интерполируемую точку, и по их значениям рассчитывается среднее значение яркости, которое присваивается неизвестной промежуточной. Данный метод прост в реализации и интуитивно понятен, но часто приводит к появлению на изображении артефактов, в виде ступеньки. Что делает его редко применяемым в реальных задачах.

Другой алгоритм *билинейной интерполяции* (линейна по каждой переменной), в котором для присвоения значения яркости элементам нового изображения, используются четыре ближайшие к исследуемому пикселю точки. Пусть (x, y) — координаты точки нового изображения, которой нужно присвоить значение яркости (эта точка выбирается среди точек, образовавшихся после разреживания). Обозначим этот уровень яркости $I(x, y)$. В случае билинейной интерполяции он задается соотношением : $\tilde{I}(x, y) = a_1x + a_2y + a_3xy + a_4$, где a_1, a_2, a_3, a_4 находятся из системы четырех линейных уравнений, для четырех ближайших точек к определяемой.

Метод *Бикубической интерполяции*, в которой участвуют 16 ближайших соседей рассматриваемой точки. Значение яркости, которое будет приписано точке (x, y) , определяется соотношением:

$$\tilde{I}(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij}x_iy_j, \quad (2.1)$$

где шестнадцать коэффициентов a_{ij} находятся из системы 16 уравнений с 16 неизвестными, выписанной для шестнадцати ближайших соседей точки (x, y) . В общем случае, при бикубической интерполяции мелкие детали изображения сохраняются лучше, чем при билинейной, благодаря чему первая уже нередко используется в рабочих проектах, например в Photoshop.

Классическим подходом реконструкции дискретизированного изображения, увеличения его разрешения является Теорема Котельникова.

Теорема Котельникова: Пусть аналоговый сигнал $I(x, y)$ имеет спектр $I(w_x, w_y)$. Если полоса частот сигнала строго ограничена, т.е. $I(w_x, w_y) = 0$, $w_x^2 + w_y^2 > w_u$. То сигнал можно восстановить со сколь угодно высокой точностью по его дискретным отчетам $I(w_x, w_y) = I(k_x\Delta, k_y\Delta)$, при условии, что частота дискретизации достаточно велика $w_d > 2w_u, 0 < \Delta < \frac{1}{w_u}$

Тогда формула восстановления :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_B = B(x, y, \theta_B) = \sum_{k_x}^{\infty} \sum_{k_y}^{\infty} \tilde{I}_S(\Delta k_x, \Delta k_y) \times \\ \times \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta}(x - k_x\Delta)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta}(y - k_y\Delta)\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Вследствие того, что условия ограничения спектра не всегда выполняются при регистрации изображения, нельзя применять теорему Котельникова ко всем изображениям, иначе возникает наложение спектра, которое приводил к эффекту Гиббса, серьезному артефакту.

Для выполнения условий, описанных выше, используют фильтры низких частот с потерей высокочастотной информации.

Алгоритм **Ланцоша** [13] использует интерполяцию полиномов Котельникова.

Идея фильтра основана на применении нормированной функции $\text{sinc}(x)$ с растянутым по оси x главным лепестком и равной нулю вне заданного параметром ширины a интервала.

Отфильтрованная функция $\tilde{I}_B(x, y)$ является дискретной сверткой исходной дискретной функции $\tilde{I}_S(x, y)$ с функцией называемой ядром Ланцоша:

$$\tilde{I}_B(x, y) = \sum_{i=x-a}^{x+a} \sum_{j=y-a}^{y+a} \tilde{I}_S(x, y) L(x-i, y-j). \quad (2.4)$$

Ядро Ланцоша (Рис.1) представляет собой произведение нормированного синуса на оконную функцию Ланцоша, по определению равную нулю вне заданного параметром носителя функции a :

$$L(x, y) = \begin{cases} \text{sinc}(x) \text{sinc}(\frac{x}{a}) \text{sinc}(y) \text{sinc}(\frac{y}{a}) & \text{при } -a < x < a, -a < y < a \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}. \quad (2.5)$$

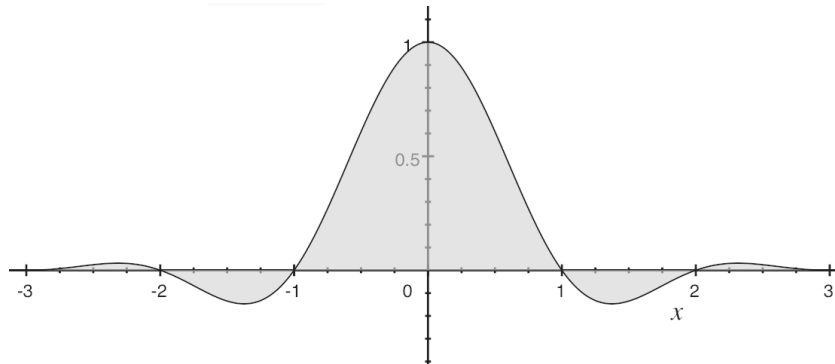


Рис. 1. График ядра функции Ланцоша

2.2 Методы компенсации искажений локальной структуры изображения

Модель формирования наблюдаемого изображения может быть записана в следующем общем виде: $I = HX + \eta$ в пространственной области или в частотной области: $G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + \eta(u, v)$, где H – линейный трансляционноинвариантный оператор, $\eta(u, v)$ – аддитивный гауссовский шум:

- равномерной на всех частотах спектральной плотностью мощности;
- нормально распределёнными пространственными значениями;
- является аддитивным с сигналом – суммируемым с полезным сигналом и статистически не связан со значениями пикселей;

Данный шум является хорошей моделью для шума в системах фотофиксации, а также неплохо отражает шум атмосферы. Более того, в большинстве случаев и в предложенных моделях, он будет считаться аддитивным белым гауссовским шумом. Заметим, однако, что предположение об аддитивности шума не всегда выполняется, и, например, в случае очень слабого сигнала на пороге чувствительности радиометра, предложенная модель не будет работать и нужно рассматривать более сложные модели, использующие пуассоновский шум, но в нашей работе ограничимся гауссовским в силу параметров выборки.

Представленная выше модель шума в области пространственных частот может быть записана в Фурье представлении, с заменой соответствующих величин их Фурье-образами. После преобразования эффект, вызванный $H(u, v)$, вырождается к фильтрации низких пространственных частот, при которой большие (начиная с определенной верхней частоты) пространственные частоты затухают, а низкочастотные несущественно мало изменяются.

В работе предлагается рассмотреть несколько методов шумовой фильтрации изображений.

Цель методов :

- решить проблемы размытия, полученного из-за конечного разрешения системы;
- восстановить пространственные частоты, ослабленные в процессе измерения;
- найти такое $\tilde{I}_{HR} : L(\tilde{I}_{HR}, I_{HR}) \rightarrow \min$;

Решать задачу восстановления будем на пространственных частотах. Запишем в Фурье-образах :

$$\begin{aligned} G(w_x, w_y) &= H(w_x, w_y)F(w_x, w_y) + \eta(w_x, w_y) \\ \tilde{F}(w_x, w_y) &= R(w_x, w_y)G(w_x, w_y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$R(w_x, w_y)$ -оператор реконструкции.

В работе сравнивались несколько методов реконструкции :

Базовым подходом является метод обращения, основанный на минимизацию функционала среднеквадратичной ошибки

$$||H(w_x, w_y)\tilde{F}(w_x, w_y) - G(w_x, w_y)||^2 \rightarrow \min. \quad (2.7)$$

Тогда

$$\tilde{F}(w_x, w_y) = \frac{H^*(w_x, w_y)G(w_x, w_y)}{H^*(w_x, w_y)H(w_x, w_y)} = \frac{G(w_x, w_y)}{H(w_x, w_y)}. \quad (2.8)$$

$$R(w_x, w_y) = \frac{1}{H(w_x, w_y)} \quad (2.9)$$

Но такой оператор реконструкции не определен в окрестностях при $H(w_x, w_y) = 0$ и ненулевом шуме в данных областях $G(w_x, w_y) \neq 0$.

Поэтому в работе был применен данный подход с добавленной регуляризацией, ограничивающей рост шума в выделенных областях.

Будем решать задачу минимизации сглаженного функционала при наличии ограничений(**регуляризация Тихонова**):

$$||H(w_x, w_y)\tilde{F}(w_x, w_y) - G(w_x, w_y)||^2 = ||\eta(w_x, w_y)||^2 \quad (2.10)$$

$$\sum (\nabla^2 F(w_x, w_y))^2 \rightarrow \min \quad (2.11)$$

Получаем:

$$\tilde{F}(w_x, w_y) = R(w_x, w_y)G(w_x, w_y) = \left(\frac{H^*(w_x, w_y)}{|H(w_x, w_y)|^2 + \gamma|P(w_x, w_y)|^2} \right) G(w_x, w_y), \quad (2.12)$$

здесь γ — параметр регуляризации, выбирается так, чтобы выполнялось ограничение из постановки оптимизационной задачи, $P(w_x, w_y)$ — Фурье - преобразование функции, определяющей оператор Лапласа. Метод регуляризации с ограничением наименьших квадратов априори использует ограничения гладкости. В этом случае R - это фильтр высоких частот, который минимизирует количество высокочастотного содержимого в реконструированном изображении. Параметр регуляризации γ управляет высокочастотной информацией. Большие значения γ могут сгладить восстановленное изображение, что является подходящим выбором, если доступно только небольшое количество изображений $G(w_x, w_y)$ и имеется много шума. Меньшие значения γ могут привести к зашумленному решению, которое применимо, когда доступно большое количество изображений $G(w_x, w_y)$ и количество шума невелико [14]. Регуляризованная оценка наименьших квадратов Тихонова использует l2-норму производной второго порядка реконструкции $F(w_x, w_y)$ в качестве члена

регуляризации [15]. Норма l2 не гарантирует уникального решения. Вес зависит от предварительного знания изображения. Алгоритм присваивает более высокие веса изображениям $G(w_x, w_y)$ с более высоким SNR(отношение сигнал - шум). При различных весах проблема сводится к общей оценке наименьших квадратов.

$$SNR = \frac{\sum \tilde{F}(w_x, w_y)^2}{\sum (\tilde{F}(w_x, w_y) - F(w_x, w_y))^2} \quad (2.13)$$

Продолжение указанных выше рассуждений и добавление условий:

- шум и изображение - случайные переменные;
- шум и неискаженное изображение не скореллированы друг с другом;
- или шум, или неискаженное изображение имеют нулевое среднее значение яркости ;
- оценка линейно зависит от искаженного изображения ;
- сигнал и шум являются стационарными гауссовскими случайными процессами с известными статистическими свойствами ;

Оценка также будет находится из решения задачи оптимальности:

$$\mathbb{E}(\tilde{F}(w_x, w_y) - F(w_x, w_y))^2 \rightarrow \min. \quad (2.14)$$

При всех, выше указанных, условиях минимум доставляется функцией :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(w_x, w_y) &= \left(\frac{H^*(w_x, w_y) S_F(w_x, w_y)}{S_F(w_x, w_y) |H(w_x, w_y)|^2 + S_\eta(w_x, w_y)} \right) G(w_x, w_y) = \\ &= \left(\frac{H^*(w_x, w_y)}{|H(w_x, w_y)|^2 + S_\eta(w_x, w_y)/S_F(w_x, w_y)} \right) G(w_x, w_y) = \\ &= \left(\frac{1}{H(w_x, w_y)} \frac{|H(w_x, w_y)|^2}{|H(w_x, w_y)|^2 + S_\eta(w_x, w_y)/S_F(w_x, w_y)} \right) G(w_x, w_y). \end{aligned} \quad (2.15)$$

–Винеровский фильтр

где $H(w_x, w_y)$ - частотное представление искажающей функции

$S_\eta(w_x, w_y) = |\eta(w_x, w_y)|^2$ - энергетический спектр шума.

$S_F(w_x, w_y) = |F(w_x, w_y)|^2$ - энергетический спектр неискаженного изображения.

Данный фильтр не имеет проблем с нулями в спектре.

SRCNN. В этой части рассмотрим еще одну классическую технику сверхразрешения, Сверточная нейронная сеть Сверхразрешения[7, 8]. В глубоком обучении сверточные нейронные сети (CNN) обычно используются для классификации изображений. В SRCNN он используется для синтеза картинки высокого разрешения по одному изображению.

Рассмотрим структуру **SRCNN**.

В *SRCNN* содержится только три слоя Рис.(2)

- извлечение и представление входных данных;
- нелинейное отображение;
- реконструкция;

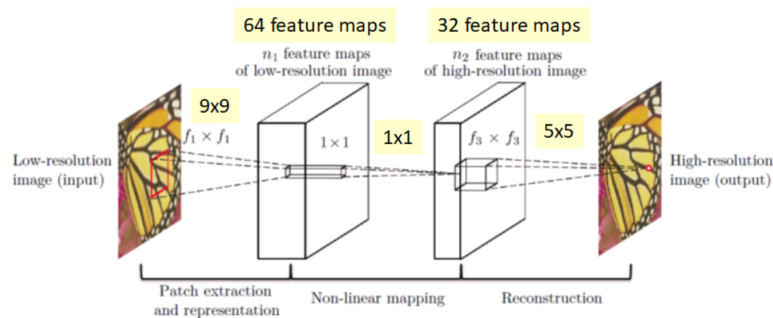


Рис. 2. Схема слоев SRCNN

Первый - **Извлечение и представление входных данных**. Важно знать, что входные данные с низким разрешением сначала масшта-

бируются до желаемого размера с использованием бикубической интерполяции или иных методов, описанных в модуле про интерполяцию. И только потом увеличенная картинка подается в сеть. Первый слой выполняет стандартное преобразование с *Relu*, чтобы получить

$$F_1(\tilde{I}_B) = \max(0, W_1 \cdot \tilde{I}_B + B_1), \quad (2.16)$$

где размерность $W_1 : C \cdot f_1 \cdot f_1 \cdot n_1$

n_1 - число фильтров.

f_1 - размер фильтра.

Вторым идет **нелинейное отображение** n_1 -мерного вектора в n_2 -мерный вектор (новая размерность). Когда $n_1 > n_2$, образуется что-то вроде продуктов *PCA*, но нелинейным образом.

$$F_2(\tilde{I}_B) = \max(0, W_2 \cdot F_1(\tilde{I}_B) + B_2), \quad (2.17)$$

где размерность $W_2 : n_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot n_2$

Третий. **Реконструкция**. После сопоставления нужно восстановить изображение. Следовательно, снова выполняем сверку.

$$F(\tilde{I}_B) = W_3 \cdot F_2(\tilde{I}_B) + B_3, \quad (2.18)$$

где размерность $W_3 : n_2 \cdot f_3 \cdot f_3 \cdot c$

В сети используется **функция потерь**.

$$L(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ||F(\tilde{I}_B, \theta) - X_i||^2 \quad (2.19)$$

Для сверхразрешения функция потерь представляет собой среднее значение среднеквадратичной ошибки *MSE* для обучающих выборок.

В *SRCNN* применяется разреженное кодирование. Для разреженного кодирования, с точки зрения свертки, входное изображение преобразуется в f_1 и проецируется в 1-мерный словарь. Затем отображение n_1

в n_2 выполняется с той же размерностью без уменьшения. Это похоже на отображение вектора низкого разрешения в вектор высокого разрешения. Затем каждый блок восстанавливается с помощью f_3 . И перекрывающиеся участки усредняются вместо сложения с различными весами путем свертки Рис.3.

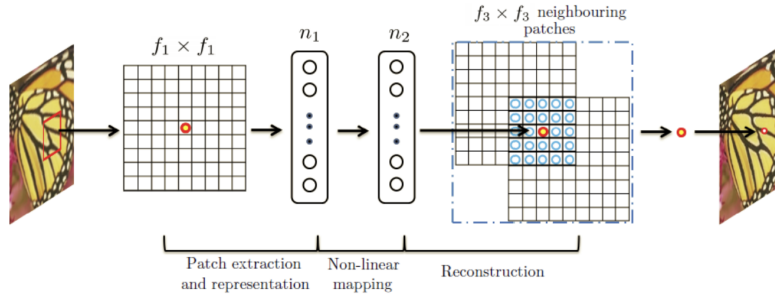


Рис. 3. Механизм процесса наложения

3 Постановка задачи

3.1 Определения и обозначения

ставится задача разработки двух моделей (см. Рис.4): модели регистрации изображений и модели реконструкции изображений.

Под разрешением во работе будем понимать количество пикселей приходящихся на линейный размер объекта на изображении.

I_{HR} - матрица значений пикселей исходного изображения высокого разрешения

I_{LR} - матрица значений пикселей изображения низкого разрешения, зарегистрированной картинке.

I_B - матрица значений пикселей изображения высокого разрешения, искаженного оптической системой.

I_S - матрица значений пикселей дискретизованного изображение высокого разрешения, искаженного оптической системой.

\tilde{I}_{HR} - матрица значений пикселей восстановленного изображения высокого разрешения.

\tilde{I}_B - матрица значений пикселей интерполированного изображения низкого разрешения.

\tilde{I}_S - матрица значений пикселей разреженного изображения низкого разрешения.

θ_i - вектор настраиваемых параметров i -ой модели.

3.2 Модель и постановка задачи

Рассмотрим решение задачи как построение двух моделей (Рис.4), модели регистрации и модели реконструкции изображений.

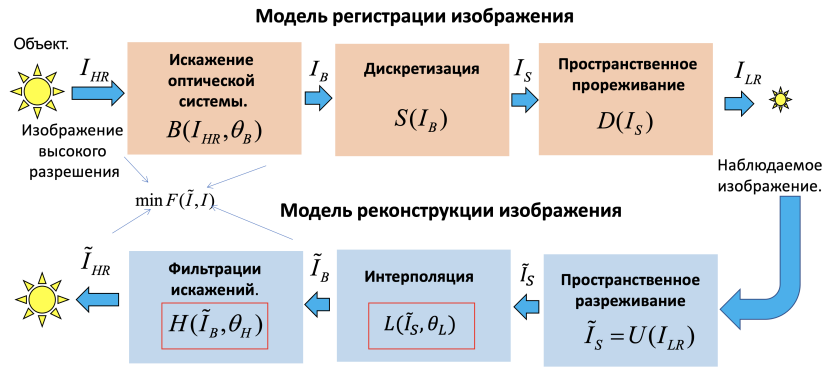


Рис. 4. Обзорная схема на модели регистрации и реконструкции.

Свет от наблюдаемого объекта формирует входное изображение I_{HR} , которое подается на вход в *регистрирующий блок*, где исходное изображение проходит через этапы, моделирующие искажение оптической системы $I_B = B(I_{HR}, \theta_B)$, дискретизацию $I_S = S(I_B)$, пространственное прореживание $I_{LR} = D(I_S)$.

Модель регистрации задается выражением:

$$I_{LR} = (D \circ S \circ B)(I_{HR}), \quad (3.1)$$

где $(F \circ G)$ – суперпозиция преобразований F и G .

Изображение низкого качества I_{LR} подается в блок реконструкции проходит через этапы: пространственного разрежения $\tilde{I}_S = U(I_{LR})$, интерполяции $\tilde{I}_B = L(\tilde{I}_S, \theta_L)$, фильтрации искажений $\tilde{I}_{HR} = H(\tilde{I}_B, \theta_H)$. Модель реконструкции имеет вид:

$$\tilde{I}_{HR} = (H \circ L \circ U)(I_{LR}) \quad (3.2)$$

Ставится задача реконструкции изображения путем решения двух подзадач:

- **интерполяции:** $L(\tilde{I}_S, \theta_L) = \tilde{I}_B$, решение которой имеет вид:

$$\min_{\theta_L} F(\tilde{I}_B, I_B), \quad (3.3)$$

где $F(I, \tilde{I})$ - мера сходства изображений.

- **компенсации искажений:** $H(\tilde{I}_B, \theta_B) = \tilde{I}_{HR}$, решение которой имеет вид:

$$\min_{\theta_B} F(\tilde{I}_{HR}, I_{HR}). \quad (3.4)$$

4 Методы увеличения разрешения изображений заданного класса объектов

Рассмотрим каждую моделирующую часть и блоки, входящие в них.

4.1 Модель регистрации изображений

Модель регистрации (3.1) (Рис.5) описывает способ получения наблюдаемых I_{LR} - изображений. Он моделирует параметры, которые ухудшают исходное изображение I_{HR} до наблюдаемых изображений I_{LR} .

Рассмотрим величины, описывающие преобразование структуры изображения объекта при прохождении оптической системы.

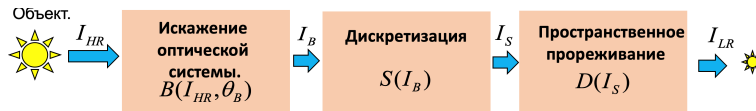


Рис. 5. Модель регистрации изображений

Выделим три этапа такого преобразования : изменение структуры предмета, дискретизацию, пространственное прореживание и представим, что процесс преобразования осуществляется тремя независимыми блоками [12, 16]. Первый блок выполняет преобразование структуры. Которое состоит в том, что каждая точка объекта заменяется пятном рассеяния, таким способом моделируется искажение оптической системы и определяется оно заданием функции рассеяния точки(ФРТ).

Проанализируем изменения ФРТ под влиянием основных факторов, определяющих качество выходного изображения. На данные изменения влияют: форма апертурной диафрагмы, неравномерность амплитудного пропускания, aberrации оптической системы, размытие, создаваемое либо расфокусировкой, либо вибрацией, либо движением камеры, собственный шум естественных изображений, шум атмосферы.

Рассмотрим ФРТ идеальных оптических систем(безаберрационная система с равномерным по зрачку амплитудным пропусканием ($\tau(\rho) = 1$)). Пусть апертурная диафрагма имеет форму круга, что верно для большинства объективов. Тогда зрачковая функция удобнее всего выражается в полярных координатах: $f(\rho) = circ(\rho)$.

$$circ(\rho) = \begin{cases} 1 & \rho < 1 \\ 0 & \rho > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Для определения Фурье-образа такой функции можно воспользоваться преобразованием Ганкеля [17, 18]. В результате ФРТ определяется следующим выражением:

$$h(\eta') = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{J_1(2\pi\eta')}{\eta'} \right)^2 = Bessinc^2(2\pi\eta'), \quad (4.2)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка[19] В модели рассматриваются подходы с аппроксимацией данной функции. Для этого применяется функция Гаусса:

$$F(B(x, y, \theta_B))(w_x, w_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{w_x^2 + w_y^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.3)$$

На Рис.6 можно сравнить графики ФРТ.

Преобразования второго блока состоят в пространственной дискретизации $S(I_B)$ - замене значения интенсивности в точке изображения (Рис.7), которая произвольно изменяется в координатах X и Y , изображением, значением составленным из отдельных участков - пикселей, в пределах которых она усреднена.

Третий блок осуществляет пространственное прореживание $D(I_s)$ Рис.8. Такие блоки необходимы для сжатия изображения и, как следствие, уменьшения требуемой для ее хранения памяти.

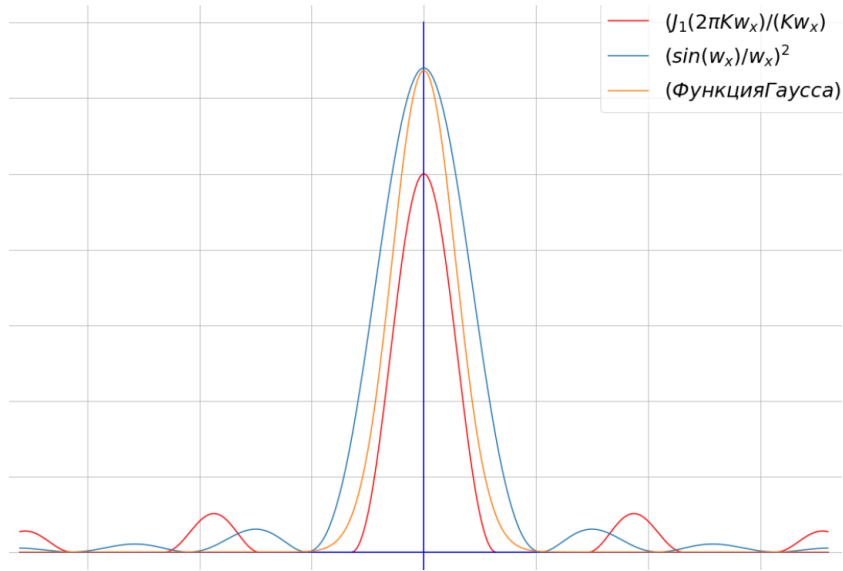


Рис. 6. Сравнение ФРТ.

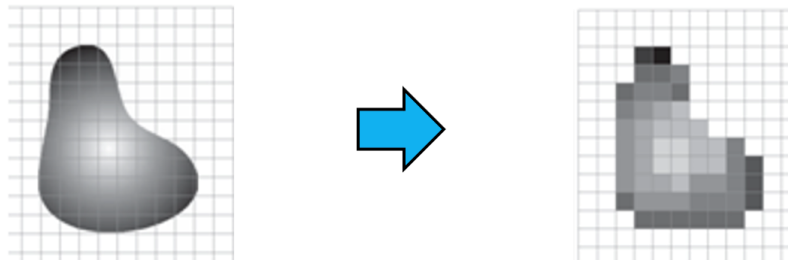


Рис. 7. Демонстрация результата функции дискретизации.

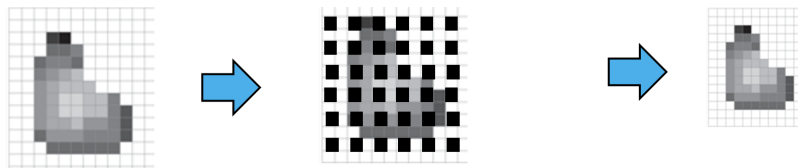


Рис. 8. Модель прореживания изображения.

В нашей модели коэффициент уменьшения по вертикали и горизонтали равен 2.

4.2 Модель реконструкции изображений

Существуют разные способы восстановления изображений, одни используют серию снимков одного объекта, по которым собирается изображение высокого разрешения, другие используют обученные на большом количестве данных нейронные сети, третьи используют аналитические методы восстановления структуры и яркостного портрета изображения.

В данной работе будут рассматриваться методы, работающие по одному снимку.

Модель реконструкции (3.2) (Рис.9) разделим на несколько этапов, каждый из которых будет своего рода обратным к соответствующим операциям в модели регистрации. Три этапа : пространственное разреживание $\tilde{I}_S = U(I_{LR})$, интерполяция интенсивности на образовавшиеся пропущенные пиксели $\tilde{I}_B = L(\tilde{I}_S, \theta)$, фильтрация искажений $H(\tilde{I}_B, \theta_H)$.

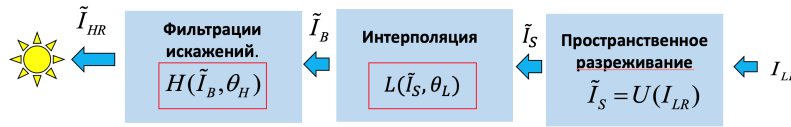


Рис. 9. Модель реконструкции изображений.

4.2.1 Метод анизотропной интерполяции промежуточных точек

Рассмотрим предлагаемый метод интерполяции на основе анизотропной интерполяции. [20, 21]

Нелинейная Анизотропная интерполяция, основанная на сохранении контуров объектов и перепадов яркости позволяет обойти условие ограниченности Фурье - спектра в теореме Котельникова и использовать информацию, хранящуюся в контурах. Интерполяция производится на отношении направлений и градиентов.[22]

Рассмотрим предлагаемую реализацию поближе. В основе метода лежит вычислительный метод подсчета градиента значения яркости пикселя в каждой точке. Для этого используется разностная схема первого порядка [23, 24]:

$$grad(\tilde{I}_S(x, y)) = \left(\frac{\frac{d(\tilde{I}_S(x, y))}{dx}}{\frac{d(\tilde{I}_S(x, y))}{dy}} \right) = \left(\frac{\frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}}{\frac{f(y+1) - f(y-1)}{2}} \right). \quad (4.4)$$

По градиентам определим границы предметов, часто характеризующиеся резкими перепадами яркости[25]. Такие рассуждения приводят к идее, что интерполяция должна распространяться в направлении, перпендикулярном направлению градиента более охотно, относительно ориентации, сонаправленной с градиентом.

Тогда для каждого интерполируемого $\tilde{I}_B(x_r, y_r)$ пикселя введем набор весов, каждый элемент которого будет отвечать за меру схожести восстанавливаемого значения пикселя и ближайших 8 опорных пикселей (x_i, y_i) . (опорные пиксели - пиксели из I_{LR} , прореженные на этапе пространственного разрежения).

Логично предположить, что веса с большими мерами схожести должны располагаться внутри контура одного объекта, т.е. мера должна иметь большие значения для пикселей вдоль направления, перпендикулярного градиенту в точке (x_r, y_r) , определяющего границу изменения яркости пикселя.

В работе используется мера соответствия направлений :

$$w(x_r, y_r, x_i, y_i) = e^{-\frac{|\langle \mathbf{r}_{ir}, grad(\tilde{I}_B(x_r, y_r)) \rangle|}{\sigma_1^2}}. \quad (4.5)$$

$$\mathbf{r}_{ir} = \begin{pmatrix} x_i - x_r \\ y_i - y_r \end{pmatrix}$$

Она равна единице, когда \mathbf{r}_{ir} ортогонален градиенту, и экспоненциально убывает относительно значения скалярного произведения.

$\sigma_1 - const$, определяющая степень сглаженности.

Кроме того нужно учитывать длину вектора \mathbf{r}_{ir} , отражающую близость опорного и восстанавливаемого значения. Для этого добавим к весу коэффициент Гауссовского размытия : $\exp(-\frac{(x_i-x_r)^2+(y_i-y_r)^2}{\sigma_2^2})$.

$$w(x_r, y_r, x_i, y_i) = e^{-\frac{|\langle \mathbf{r}_{ir}, \text{grad}(\tilde{I}_B(x_r, y_r)) \rangle|}{\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x_i-x_r)^2+(y_i-y_r)^2}{\sigma_2^2}} \quad (4.6)$$

Яркостное значение :

$$\tilde{I}_B(x_r, y_r) = \frac{1}{\sum_{(x_i, y_i) \in U(x_r, y_r)} |w(x_r, y_r, x_i, y_i)|} \sum_{(x_i, y_i) \in U(x_r, y_r)} w(x_r, y_r, x_i, y_i) \tilde{I}_S(x_r, y_r). \quad (4.7)$$

Предложенный способ восстановления направлен на сохранение структуры изображения и позволяет восстановить четкие контура объектов и свето-теневых границ.

4.3 Метод компенсации искажений локальной структуры изображения

В сравнение к приведенным выше классическим подходам предлагается метод **Субпиксельной реконструкции на основе корреляции фрагментов изображения**

Идея заимствована из адаптивной временной фильтрации. Только теперь создадим «временное» окно, заданной размерности и будем проходить им по всему изображению, собирая тем самым варианты его наполнения. На основе этих вариантов создается список объектов.

В этот список можно еще добавить значения модуля градиента для каждой точки и набор дескрипторов, полученных на выходе сверточного слоя.

Предполагаемый факт : объекты состоят из не уникальных фрагментов, которые с различными субпиксельными сдвигами проецируются на

матрицу сенсора. То есть можно утверждать, что в списке будут лежать близкие или даже одинаковые элементы.

Тогда для каждого варианта окна решается задача :

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{j \neq k}^{N-1} a_{k,j} \mathbf{x}_j, \quad k = 1..N, \quad \mathbf{a}_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,N-1})^T, \quad (4.8)$$

$$\delta = |\mathbf{e}|_2^2 \xrightarrow{a_k} \min, \quad k = 1..N. \quad (4.9)$$

Условие минимума :

$$\frac{d\sigma}{da_{k,i}} = -2\mathbf{x}_i^T (\mathbf{x}_k - \sum_{j \neq k}^{N-1} a_{k,j} \mathbf{x}_j) = 0, \quad k = 1..N, i \neq k. \quad (4.10)$$

$$\sum_{j \neq k}^{N-1} a_{k,j} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k \rangle, \quad (4.11)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение.

Введем обозначения :

$R_{i,j} = (\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle)$ - матрица ковариаций, $\tilde{R}_k = R_{i,j}|_{i \neq k, j \neq k}$ - матрица ковариаций с вырезанной k строкой и k столбцом, $\mathbf{r}_k = R_{i,j=k}|_{i \neq k}$ - вектор похожести.

Тогда (4.11) перепишется в виде :

$$\tilde{R}_k \mathbf{a}_k = \mathbf{r}_k, \quad k = 1..N. \quad (4.12)$$

Такое уравнение уже можно решить, но это не имеет смысла и вычислительно очень сложно, поэтому применим SVD разложение для матрицы \tilde{R}_k .

$$\tilde{R}_k = U S V^T, \quad U^T U = V^T V = I, \quad S = \text{diag}(S_0, \dots, S_N) \quad (4.13)$$

После разложения нетрудно найти обратную матрицу к \tilde{R}_k :

$$\tilde{R}_k^* = V \text{diag}\left(\frac{1}{S_{ii}}\right) U^T. \quad (4.14)$$

- обобщенная обратная матрица. При $s < \text{rank}(\tilde{R}_k)$, начиная с какого-то номера, все элементы на диагональной матрицы S зануляются. Кроме того, нет смысла решать задачу, используя все элементы списка, они явно не все похожи. Отбор произведем относительной сортировкой элементов на диагонали матрицы S по убыванию и в соответствии с этим переставляем строки матриц U, V . После этого среди значений диагональных элементов выбираются максимальные top процентов, остальные зануляются и не участвуют в усреднении.

$$\tilde{R}_k^* = V S_{top}^{-1} U^T, S_{top} = \text{diag}\left(\frac{1}{S_0}, \dots, \frac{1}{S_{top}}, 0, \dots, 0\right) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{a}_k = \tilde{R}_k^* \mathbf{r}_k = V S_{top}^{-1} U^T \mathbf{r}_k \quad (4.16)$$

$$\mathbf{X}_k \approx \mathbf{a}_k^T \{\mathbf{x}_i\}_{i \neq k} \quad (4.17)$$

Пусть $R_{i,j} = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{x}}_j \rangle$, где f - функция сравнения в признаковом подпространстве. $\mapsto \tilde{\mathbf{x}}_i$ - признаковое описание дескриптора.

Тогда (4.8) решается для дескрипторов, а применяется для исходных \mathbf{x}_k .

5 Вычислительный эксперимент

В эксперименте в качестве тестовых данных использовались синтетические монохроматические изображения контрастных полос под разными углами, окружности с резкой границей, 50 монохроматических снимков объектов РЖД со спутника, 25 монохроматических снимков акватории Нью-Йорка со спутника. Все изображения имеют размер 512×512 пикселей и *png* формат.

Участвующая в сравнении *SRCNN* использует предобученные параметры и не нуждается в тренировочной выборке.

5.1 Меры качества

Для оценки качества подходов используют различные меры схожести $F(I, \tilde{I})$ идеального изображения и изображений, полученных после реконструкции .

5.1.1 PSNR

Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR (пиковое отношение сигнала к шуму) оценивает отношение максимально возможного значения яркости пикселя - L к среднеквадротичной ошибке между эталонным I и сгенерированным изображениями \tilde{I} - MSE .

$$PSNR(\tilde{I}, I) = \log \left(\frac{L^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (I(i) - \tilde{I}(i))^2} \right) \quad (5.1)$$

Будем использовать 8-битные изображения, тогда $L \in [0..255]$.

В случае, если в изображении больше, чем один канал, то MSE считается по всем компонентам и усредняется по суммарному количеству значений яркости.

Данная мера оценивает похожесть на пиксельном уровне, учитывая только среднеквадратичную ошибку, отсюда следует частое несоответствие данной оценки объективному человеческому восприятию. [26]

5.1.2 SSIM

Structural Similarity Index, SSIM (индекс структурного сходства) учитывает структуру изменения информации, оценивает взаимосвязь между соседними пикселями.

SSIM рассчитывается на различных окнах исходного изображения размера N .

Для оценки находятся следующие параметры :

Яркость оценивается средним значением пикселей на изображении

$$\mu_I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(i), \quad (5.2)$$

контрастность - среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_I = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (I(i) - \mu_I)^2 \right)^{0.5}. \quad (5.3)$$

Для изображений с тремя каналами параметры усредняются сразу по всем значениям (по $3N$)

Для каждого окна высчитываются :

компонента сравнения по яркости

$$C_l(I, \tilde{I}) = \frac{2\mu_I\mu_{\tilde{I}} + C_l}{\mu_I^2 + \mu_{\tilde{I}}^2 + C_l}, \quad (5.4)$$

компонента сравнения по контрасту

$$C_c(I, \tilde{I}) = \frac{2\sigma_I\sigma_{\tilde{I}} + C_c}{\sigma_I^2 + \sigma_{\tilde{I}}^2 + C_c}, \quad (5.5)$$

$$C_c, C_l = const, C_l = (k_l L)^2, C_c = (k_c L)^2.$$

$$SSIM(I, \tilde{I}) = \frac{(2\mu_I\mu_{\tilde{I}} + (k_l L)^2)(2\sigma_I\sigma_{\tilde{I}} + (k_c L)^2)}{(\mu_I^2 + \mu_{\tilde{I}}^2 + (k_l L)^2)(\sigma_I^2 + \sigma_{\tilde{I}}^2 + (k_c L)^2)} \quad (5.6)$$

5.2 Численные результаты

Был проведен эксперимент по подбору оптимального значения параметров метода анизотропной интерполяции. В таблице 2 представлены значения меры PSNR изображений при различных значениях параметра σ_1 при фиксированном значении $\sigma_2 = 2.0$. Из приведенной таблицы

Таблица 1. Подбор параметра σ_1 для метода анизотропной интерполяции, $\sigma_2 = 2.0$

Метод	PSNR
0.5	26.80
0.6	27.60
0.7	27.82
0.8	27.85
0.9	27.79
1.0	27.68

следует, что лучшее значение параметра $\sigma_1 = 0.8$ при $\sigma_2 = 2.0$.

Результаты работы метода анизотропной интерполяции промежуточных точек представлены на Рис.10.

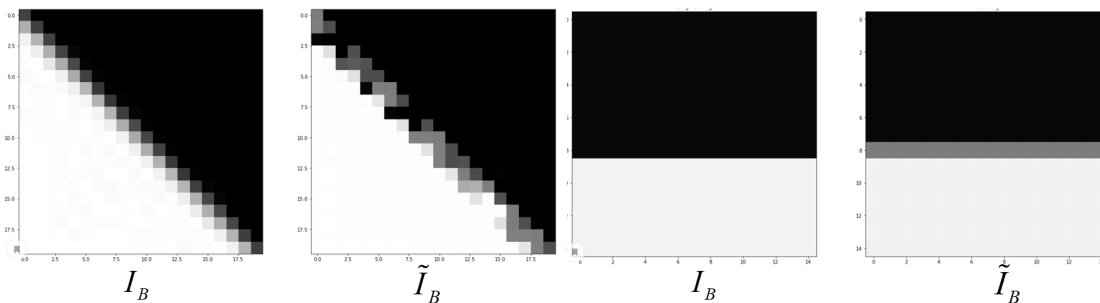


Рис. 10. Результаты интерполяции синтетического изображения из тестовой выборки методом Анизотропной интерполяции (справа), в сравнении с размытой.

Сравнения различных методов интерполяции представлены на Рис.11.

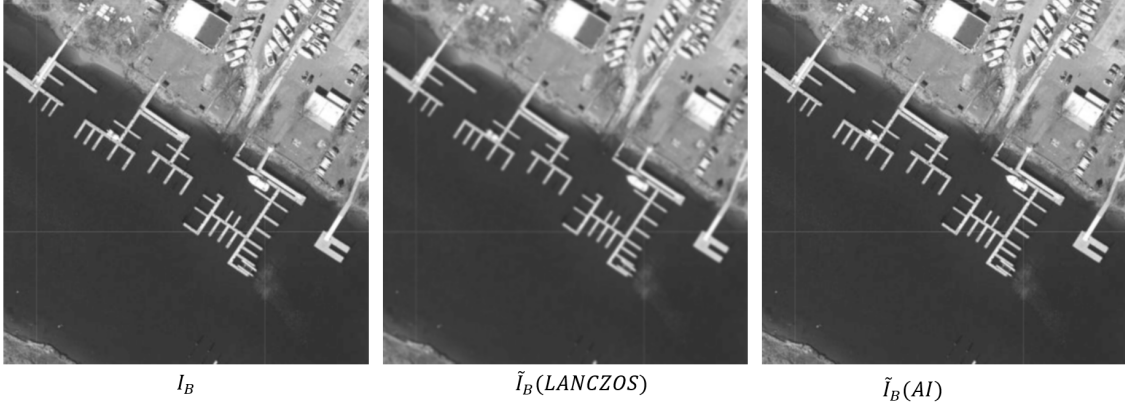


Рис. 11. Результаты интрерполяции изображения из тестовой выборки методом Ланцоша (в центре) и методом Анизотропной интерполяции (справа).

На стадии реконструкции все методы использовали интерполированные изображения низкого разрешения \tilde{I}_B , полученные анизотропной интерполяцией промежуточных точек. Результаты работы метода субпиксельная реконструкция на основе корреляции фрагментов изображения(SRF) с сравнении с результатом нейросетевой модели $SRCNN$ представлены на Рис.12 :

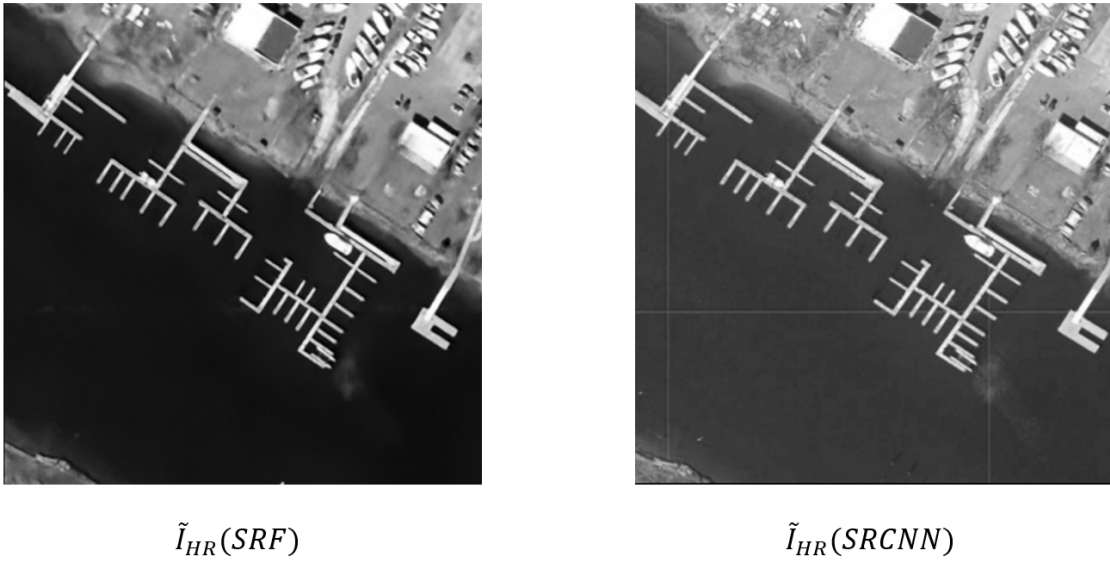


Рис. 12. Результаты реконструкции изображения из тестовой выборки методом SRF (слева) и методом SRCNN (справа).

В таблице 2 представлены результаты интерполяции изображе-

ния низкого разрешения $\tilde{I}_B = L(U(I_{LR}), \theta_L)$ методами Бикубической(Bicubic), Ланцошевой(Lanzos) и Анизотропной интерполяции(AI).

В таблице 3 приведены результаты реконструкции интерполированного изображения низкого разрешения $\tilde{I}_{HR} = H(\tilde{I}_B, \theta_H)$, полученные суперпозицией Анизотропной интерполяции и Винеровской фильтрации(Viner filtration), *SRCNN*, субпиксельной реконструкции на основе корреляции фрагментов изображения(SRF).

Таблица 2. Точность реконструкции изображений по тестовой выборке $F(\tilde{I}_B, I_B)$

Метод	PSNR	SSIM
Bicubic	20.84	0.858
Lanzos	20.83	0.856
AI(новый)	27.85	0.887

Таблица 3. Точность реконструкции изображений по тестовой выборке $F(\tilde{I}_{HR}, I_{HR})$

Метод	PSNR	SSIM
AI(новый)+Viner filtration	24.65	0.91
AI(новый)+SRCNN	33.65	0.96
AI(новый)+SRF(новый)	31.28	0.85

Если для реконструкции рассмотреть суперпозицию бикубической интерполяции и *SRCNN*, то значения мер будут: $PSNR = 33.63$, $SSIM = 0.96$.

Из значений мер качества, приведенных в таблицах 2, 3, следует, что метод анизотропной интерполяции дает на тестовой выборке существенный прирост в качестве восстановления по сравнению с классическими методами, метод субпиксельная реконструкция на основе корреляции фрагментов изображения способен показать сопоставимый результат

качества с нейросетевой моделью *SRCNN*, при этом данный метод не нуждается в предобучении и большом числе качественных данных.

6 Заключение

В процессе исследования был предложен и реализован метод увеличения разрешения и четкости изображений на основе анизотропной интерполяции и субпиксельного оценивания яркостей точек с допущением о субпиксельных сдвигах фрагментов на изображении. Проведено сравнение результатов с существующими решениями. Результаты показали, что точность предложенных методов не уступает лучшим нейросетевым моделям для спутниковых снимков. Так же установлено, что предложенные меры не всегда достоверно отображают качество результата. Выявлено, что реализованный метод хорошо и эффективно справляется с образцами, на которых есть явные перепады яркости.

Дальнейшие пути исследований. Разработать нейросетевую реализацию предложенных подходов, добиться хорошей работы алгоритмов с разными типами границ.

Список литературы

- [1] Tsai R.Y., Huang T.S. Multiframe image restoration and registration // Adv Comput Vis Image Process. 1984. P. 317-339.
- [2] Домненко В.М., Бурсов М.В. Моделирование Формирования Оптического Изображения // Учебное пособие. 2005. С. 62.
- [3] Kang M.G., Park S.C., Park M.K. Super-resolution image reconstruction: a technical overview // IEEE Signal Processing Magazine. 2003. P. 21–36.
- [4] Пирогов Ю.А., Гладун В.В., Тищенко Д.А., Тимановский А.Л., Шлемин И.В., Джен С.Ф. Сверхразрешение в системах радиовидения миллиметрового диапазона // Журнал Радиоэлектроники. 2004 No. 3.
- [5] Гонсалес Р.С., Вудс Р.Е. Цифровая обработка изображений // Техносфера. 2012.
- [6] Артюхина Н.К. Параметры внеосевых пучков // Основы Компьютерного Моделирования Оптических Систем Различных Классов. 2016.
- [7] Dong C., Loy C.C., He K., Tang X. Image Super-Resolution Using Deep Convolutional Networks // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2016. Vol. 38, No. 2. P. 295-307.
- [8] Lin M., Qiang C., Shuicheng Y. Network In Network // IEEE Explore. 2018.
- [9] Ledig C. et al. Photo-Realistic Single Image Super-Resolution Using a Generative Adversarial Network // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2017. P. 105-114.

- [10] Szegedy C., Liu W., Jia Y., Sermanet P., Reed S., Anguelov D., Erhan D., Vanhoucke V., Rabinovich A. Going Deeper with Convolutions // IEEE Explore.2015.
- [11] Cambridge in colour. Digital image interpolation. <http://www.cambridgeincolour.com/tutorials/image-interpolation.htm>. 2012.
- [12] Родионов С.А. Теория оптического изображения // Конспект лекций.ЛИТМО.1972.
- [13] Duchon Cl. Lanczos Filtering in One and Two Dimensions // Journal of Applied Meteorology.
- [14] Park S.C., Park M.K., Kang M.G. Super-resolution image reconstruction: a technical overview // IEEE Signal Process Mag. 2003. P. 21-36.
- [15] Plenge E., Poot D.H., Bernsen M., Kotek G., Houston G., Wielopolski P. Super-resolution methods in MRI: can they improve the trade-off between resolution, signal-to-noise ratio, and acquisition time? // Magn Reson Med. 2012. Vol. 68, P. 1983-1993.
- [16] Thapa D., Raahemifar K., Bobier W.R., Lakshminarayanan V. A performance comparison among different super-resolution techniques // Computers & Electrical Engineering.2016. Vol. 54, P. 313-329.
- [17] Гудмен Дж. // Введение в фурье-оптику. 1972.
- [18] Папулис А. // Теория систем и преобразований в оптике. 1971.
- [19] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. // Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. 1980.

- [20] Perona P., Malik J. Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion // IEEE Transaction on pattern analysis and machine intelligence. 1990. Vol. 12, No. 7.
- [21] Кypprianidis J.E. Image and Video Abstraction bu Multi-scale Anisotropic Kuwahara Filtering // Hasso-Plattner-Institut, Germany.
- [22] Гнеушев А.Н., Мурынин А.Б. Адаптивный градиентный метод выделения контурных признаков объектов на изображениях реальных сцен // Известия Академии Наук. Теория и Системы Управления. 2003. № 6. С. 128-135.
- [23] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics // Texts in Applied Mathematics. New York: Springer. 2007.
- [24] Durran D. R. Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics // New York: Springer. 1999.
- [25] Samsonov N.A., Gneushev A.N., and Matveev I.A. Training a Classifier by Descriptors in the Space of the Radon Transform // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. Vol. 59. No.3.P. 415–429.
- [26] Wang Z., Chen J., Hoi S. C. H. Deep Learning for Image Super-resolution: A Survey // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. doi: 10.1109/TPAMI.2020.2982166.
- [27] Manson J., Schaefer S. Cardinality-Constrained Texture Filtering // Texas A&M University.