Problema NP-Completo

Ejercicio 1m - Relación 6

Alejandro Manzanares Lemus

Numeración Grundy en Grafos (GRUNDY):
Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, ¿existe una numeración $L : V \to N$, donde el mismo número puede asignarse a más de un vértice y tal que cada L(u) es igual al mínimo de todos los valores enteros que no están en $\{L(v) : (u, v) \in A\}$.

1 GRUNDY está en NP

Para demostrar que el problema **GRUNDY** pertenece a NP, diseñaremos una Máquina de Turing (MT) no determinista tal que $MT \in L$.
El procedimiento de la MT será el siguiente: Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, elegiremos un vértice k de forma no determinista. Si k no tiene valor asignado, asignaremos el valor entero mínimo distinto de todo valor L(v) tal que existe una arista (v,k) —asignaremos a k el valor entero mínimo distinto a el valor de todos sus vecinos—. Una vez asignado el valor de k, comprobaremos para todo vértice w tal que existe la arista (k,w), que el valor L(w) es menor o igual que el valor L(k). Si esto no se cumple, la numeración L no es una numeración grundy y MT rechaza. Si hemos seleccionado todos los vértices, entonces L es una numeración grundy y MT acepta.

1.1 Máquina de turing

```
Entrada: Conjunto de (V,A) con n vertices:

    Seleccionar un vertice k de manera no determinista:
        Si k no tiene valor asignado:
            Asignar el valor entero minimo distinto
            de todo valor L(v) tal que existe (k,v)

            Comprobar todos los vertices w
            para los que existe una arista (w,k)

            Si L(w) <= L(k):
                Rechazar
    No quedan vertices sin valor asignado:
        Aceptar
```

La MT previamente definida pertenece a L, dado que, solo es necesario almacenar el valor de la asignación L para cada vértice k, por tanto, como máximo se almacenarán log(n) números y esto nos lleva a que $MT \in L$.

2 Reducción de un problema NP-Completo

Para demostrar que **GRUNDY** es un problema NP-Completo, estableceremos una reducción de un problema que sabemos que es NP-Completo. En nuestro caso estableceremos la reducción del problema **3-SAT exacto**.

3-SAT exacto:
Dado un conjunto de variables U y un conjunto de cláusulas C de longitud exactamente igual a 3, determinar si se le puede asignar un valor de verdad a cada variable, de tal forma que en cada cláusula haya un literal que es cierto.

Primero, veamos una manera de convertir una instancia del problema **3-SAT** en una instancia del problema **GRUNDY**. Dada una instancia α del problema 3-SAT con n variables y m clausulas, generaremos un grafo $(G_\alpha) = (V, A)$ tal que $|V| = 8n + 3m$. Para cada variable x_i de α generaremos el grafo H_i:

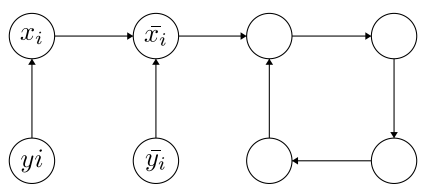

Figure 1: Grafo H_i

El valor de $y_i = \bar{x}_i$, por tanto, las unicas posibles numeraciones grundy para H_i con $x_i = 0$ o $x_i = 1$ son:

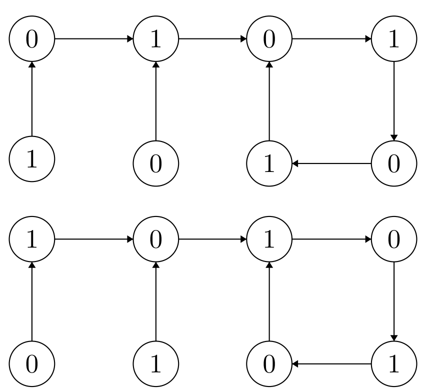

Figure 2: Numeraciones grundy para H_i

Además, para cada clausula C_j de creamos el siguiente grafo:

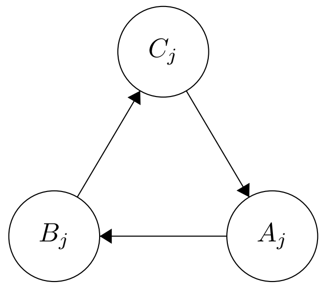

Figure 3: Subgrafo correspondiente a cada C_j

Crearemos una arista que una C_j con y_i si en C_j aparece x_i o $\bar{y_1}$ si en C_j aparece $\bar{x}_i$.
En la siguiente figura puede verse un ejemplo del procedimiento para transformar la instancia α de **3-SAT** en la instancia G_α de **GRUNDY** con
$\alpha = (\bar{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3})$.

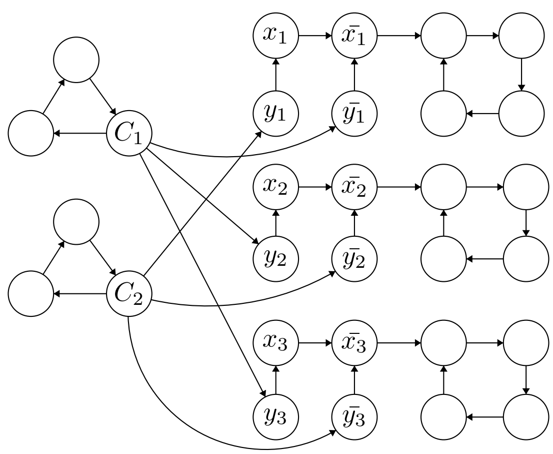

Figure 4: G_α correspondiente a $(\bar{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3})$

Un caso positivo para **3-SAT** implica que α es satisfacible. Si construimos el grafo G_α, tendremos tantos subgrafos H_i como variables x_i distintas haya en α. Estos subgrafos H_i serán de la forma que se pudo ver en la figura 2, dependiendo de la asignación verdadero-falso que hace a α ser satisfacible (la numeración de grundy de cada H_i no se ve afectada por los arcos procedentes de cada C_j). Cada clausula C_j de α debe contener al menos un literal cierto, es decir, que al menos un x_i o $\bar{x}_i$ debe ser 1. Por tanto, cada vértice C_j de G_α esta conectado con un vértice cuya numeración es L = 0 (dado que $y_i = \bar{x}_i$).
Por tanto, se puede establecer una numeración grundy para el subgrafo correspondiente a cada C_j de manera que $L(C_j) = 2$ dado que C_j puede estar conectado con vertices con $L = 1$ o $L = 0$ (como minimo uno debe ser L = 0 y por tanto $L(C_j) \neq 0$).
Siendo $L(C_j) = 2$, solo cabe que $L(A_j) = 1$ y $L(B_j) = 0$ y por tanto, existe una numeración grundy para el grafo G_α si y solo si α es satisfacible.

Un caso positivo para **GRUNDY** implica que para un grafo G_α existe una numeración grundy. Supongamos que cada nodo C_j esta conectado con vertices L = 1.
Si $L(A_j) = 0$ entonces $L(C_j) = 2$ y $L(B_j) = 0$, lo que nos lleva a que la numeración L no constituye una numeración grundy.
Si $L(A_j) \geq 1$ encontes $L(C_j) = 0$ y $L(B_j) = 1$, lo que nos lleva a que $L(A_j)$ debe ser 0 para que L constituya una numeración grundy.
Como no es posible establecer una numeración grundy en el subgrafo asociado a C_j, la suposición de que cada nodo C_j esta conectado con vertices L = 1 es falsa. Al ser falsa esta afirmación, esto quiere decir que al menos un vertice conectado a C_j debe ser L = 0. Esto quiere decir que al menos un literal de cada clausula C_j debe ser verdadero (debe ser 1) y por tanto α es satisfacible si y solo si existe una numeración grundy para el grafo G_α.

Una vez visto que un caso positivo de **3-SAT** se transforma en un caso positivo de **GRUNDY** y viceversa. El problema **GRUNDY** se reduce a **3-SAT** y como sabemos que **3-SAT** es un problema NP-Compelto, queda demostrado que **GRUNDY** es un problema NP-Completo.