SIMULACIÓN DE SISTEMAS
Cuarto Curso del Grado en Informática
Problemas de modelos de Montecarlo

1. Supongamos que un dique está medio lleno, y que la afluencia diaria de líquido $I_1, I_2, \ldots$ es una secuencia de variables uniformes independientes $U(0, 50)$. La evaporación es de 6 unidades por día, y la capacidad total del dique es de 400 unidades. Sea D el número de días que pasan hasta que el dique sobrepasa su capacidad. Estimar la media de D y la probabilidad $P(D > 8)$ mediante un modelo de simulación apropiado.

2. Una partícula se mueve en un plano, viajando sólo por los puntos $\{(i, j) \mid 0 \leq j \leq i, 0 \leq i \leq 10\}$.

   Cada salto a un nuevo punto se hace eligiendo al azar uno de los puntos vecinos del actual, en horizontal o en vertical. La partícula comienza su recorrido en el punto $(10, 0)$. Calcular la probabilidad de que la particula alcance la línea diagonal ($\{(0, 0), (1, 1), \ldots, (10, 10)\}$) en no más de 15 saltos.

3. Supongamos que el tiempo de vida de una batería de cierta marca tiene una distribución exponencial de media 100 horas. Si las baterías se venden con una garantía de 300 horas, ¿qué porcentaje de las mismas se espera que sean devueltas? Calcular ese porcentaje analíticamente y por muestreo.

4. Se lanza un par de dados legales, se observa la suma de los resultados, y se repite este proceso hasta que todos los valores posibles para la suma (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12) han aparecido al menos una vez. Desarrollar un modelo de Monte Carlo para estudiar el número medio de lanzamientos necesario.

5. En un juego uno de los jugadores, A, lanza una moneda al aire varias veces consecutivas, hasta que la diferencia entre el número de caras y de cruces que van saliendo sea igual a tres, momento en que termina el juego. Por cada lanzamiento el jugador A debe pagar 10 euros al otro jugador, B, y cuando termina el juego A recibirá 100 euros de B. Construir un modelo de simulación para estudiar el beneficio esperado que obtendrá cada jugador.

6. Un juego de azar consiste en que se lanza repetidamente una moneda (no trucada), ganándose 10 euros cada vez que sale cara, y perdiéndose 10 euros si sale cruz. Supóngase que se empieza con $s * 10$ euros, y que continua el juego hasta que o bien se obtienen $g * 10$ euros, o se pierde todo. Para valores dados de s, g y t, calcular:

   a.- La probabilidad de obtener $g * 10$ euros.

   b.- La probabilidad de que se realicen menos de t lanzamientos de la moneda.

7. Se baraja un conjunto de 100 cartas (numeradas del 1 al 100) y luego se van sacando de una en una. Decimos que ocurre un 'éxito'si la carta i es la i-ésima carta sacada, para cada $i = 1, \ldots, 100$. Se pretende estimar la media y la varianza del número total de éxitos, mediante un modelo de Monte Carlo. Determinar los valores exactos y compararlos con las estimaciones. Obsérvese que se necesita un método para barajar las cartas (o sea, un método de obtener permutaciones aleatorias).

8. Un juego de dados denominado Craps consiste en lo siguiente: se lanzan dos dados (no trucados); si la suma de los resultados es 2, 3 o 12, el jugador pierde lo que haya apostado; si la suma es 7 u 11, gana lo que haya apostado; si la suma es 4, 5, 6, 8, 9 o 10, esta suma se denomina 'punto', y el jugador continua lanzando los dos dados hasta que la suma vuelva a ser el punto, o sea igual a 7. En el primer caso el jugador gana lo apostado, y en el segundo caso (la suma es 7) pierde lo apostado. Construir un modelo de Monte Carlo (incluyendo los generadores de datos necesarios) que permita determinar la probabilidad de ganar el juego.

9. Construir un modelo de simulación apropiado para estimar la probabilidad de que al lanzar n veces seguidas un dado (de seis caras, con números del 1 al 6), la suma de los valores obtenidos en cada lanzamiento sea mayor que $3 * n$.

10. Un jugador paga 10 unidades monetarias para poder lanzar 4 dados. Si la suma de los resultados de los dados es menor que 9, el jugador recibe 100 unidades monetarias, y en otro caso pierde su inversión. Construir un modelo de Monte Carlo para determinar si es beneficioso jugar a este juego de dados.

11. Supongamos que tenemos n objetos unidimensionales, que queremos almacenar en cajas de longitud 1. La longitud L de cada objeto tiene una densidad de $f(t) = 2(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$. Tenemos n objetos de longitudes independientes $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Los n objetos deben almacenarse en cajas consecutivas, según el orden de sus índices (o sea, el objeto 1 se almacena en la primera caja, después el objeto 2 se almacena también en la primera caja, si cabe, si no se almacena en la segunda caja, y así sucesivamente). Ningún objeto puede partirse. Esta condición implica que vamos a desperdiciar gran cantidad de espacio en las cajas. Sea W la cantidad total de espacio desperdiciado, y B el número de cajas empleadas. Diseñar un modelo de Monte Carlo para calcular la media y varianza de B y también la proporción esperada de espacio vacío (es decir, la media de W/B).

12. Una pequeña compañía aérea realiza 15 vuelos diarios, cada uno con un único piloto. La compañía tiene la política de mantener 3 pilotos más (o sea, 18 pilotos en total) para reemplazar a los pilotos enfermos. Se ha estimado que la distribución de probabilidad del número diario de pilotos enfermos es la siguiente (puede aplicarse cada día, independientemente del número de pilotos enfermos del día anterior):

Número de pilotos enfermos	Probabilidad
0	0.20
1	0.25
2	0.20
3	0.15
4	0.10
5	0.10

Construir un modelo de Monte Carlo (incluyendo los generadores de datos necesarios) para estimar el número medio de pilotos de reserva que es necesario utilizar cada día, y el número medio de vuelos cancelados cada día por falta de piloto. Determinar estas cantidades también de forma analítica.

13. El juego de la vida pretende modelizar las leyes de nacimiento, supervivencia y muerte de alguna colonia de organismos vivos. Se juega en un tablero cuadrado de casillas, de dimensiones arbitrarias. Cada casilla (excepto las de los bordes del tablero) tiene 8 casillas vecinas, y puede estar vacía o contener un organismo. Cada nueva generación se determina de acuerdo a las siguientes reglas:

   1.- Nacimiento: nacerá un nuevo organismo en una casilla libre que tenga exactamente 3 vecinos ocupados.

   2.- Muerte: un organismo con 4 ó más vecinos morirá por superpoblación.

   3.- Supervivencia: un organismo con exactamente 2 ó 3 vecinos sobrevivirá a la siguiente generación.

   Simular la vida de una colonia durante varias generaciones.

14. En la ciudad de Atuan, en su grandioso coliseo, se celebran anualmente los 'Juegos de la Simulación'. Una de las principales atracciones se celebra de acuerdo al siguiente ritual: En la arena forman en línea los gladiadores. Hay seis puertas, tres de las cuales ocultan fieras salvajes, mientras que las otras tres guardan riquezas. El primer gladiador elige una puerta. Si hay una fiera, el gladiador lucha con ella, pero termina muriendo y siendo devorado. Entonces la fiera es devuelta a su jaula (los otros gladiadores no han visto cual fue la puerta elegida). Si el gladiador escoge una puerta de las que guardan tesoros, éstos son para él y es puesto en libertad. Además, una (aleatoria) de las fieras es sacrificada a los dioses. Hay entonces una puerta menos para elegir. Los gladiadores continuan eligiendo puertas, hasta que todas las fieras o todos los gladiadores hayan muerto. Después, si quedan gladiadores vivos, son vendidos como esclavos.

Simular esta situación muchas veces. ¿Cuántos gladiadores puede esperarse que mueran, que sean liberados o esclavizados después de cada espectáculo?

15. Las dos ciudades gemelas de Tic y Tac, situadas en el sur del 'Mundo de la Simulación', están muy orgullosas de su vieja tradición relojera. En ambas ciudades, los relojes marcan la hora correcta, oscilando entre un minuto de atraso y un minuto de adelanto por día.

    Los maestros relojeros, de los que hay exactamente 100 en cada ciudad, están tan orgullosos que lucen su propio reloj colgado del cuello con una cadena de oro. Cuando dos maestros relojeros se encuentran en la plaza de la ciudad, lo que ocurre frecuentemente, realizan la 'ceremonia de los relojes'. En Tic, cada maestro relojero ajusta su reloj a la media del tiempo de los dos relojes. En Tac, cada uno ajusta su reloj al tiempo del reloj del otro.

    En Fin de Año todos los maestros relojeros de cada ciudad se reunen en la plaza y comparan su reloj con el de la torre del ayuntamiento, que siempre marca la hora correcta con exactitud. Todo maestro cuyo reloj muestre un error de más de una hora queda deshonrado y marcha al exilio. Su lugar es ocupado por un aprendiz, y todo el mundo ajusta su reloj a la hora correcta.

    Diseñar un modelo de simulación, donde las tasas de desviación de la hora correcta están uniformemente distribuidas entre -1 y +1 minutos por día. En el momento en que se produzca un encuentro de maestros, todos los relojes se actualizan y dos de ellos se seleccionan al azar. Supóngase que los encuentros se producen igualmente espaciados a lo largo del año. Al final del año producir un informe con el número de relojes que presentan una desviación de más de 1 hora.

    Realizar experimentos con 150, 300 y 600 encuentros por año en ambas ciudades. ¿En cuál de ellas cabe esperar mayor número de tragedias?

16. El sistema de memoria de muchos ordenadores está dividido en unidades llamadas *páginas*. En cualquier momento las páginas están marcadas bien como 'vacíasó 'en uso', y el sistema operativo mantiene una lista con el status de cada página. Cuando un nuevo programa se carga en memoria, el sistema operativo necesita encontrar suficientes páginas vacías para almacenarlo. Supongamos que la probabilidad de que una página esté vacía es p, y que un determinado programa require m páginas, y que el status de cada una de las páginas es independiente del resto. Supóngase también que el sistema operativo chequea su lista de páginas secuencialmente hasta que encuentra un total de m páginas libres. Sea X la variable que representa el número de páginas que necesita chequear el sistema operativo.

    Construir un generador de datos para este tipo de variable.

17. Supongamos que trabajamos en un gran almacén informático, y que nos piden consejo para decidir sobre el número de licencias de un determinado sistema operativo que conviene adquirir − las licencias se suministrarán con los ordenadores que se vendan durante el próximo trimestre, y es lógico pensar que en pocos meses habrá un nuevo sistema operativo en el mercado de características superiores. Cada licencia de sistema operativo le cuesta al almacén un total de 75 dólares, mientras que el precio al que la vende es de 100 dólares. Cuando salga al mercado la nueva versión del sistema operativo, el almacén podrá devolver al distribuidor las licencias sobrantes, obteniendo a cambio un total del 25 dólares por cada una. Basándose en los datos históricos de los últimos meses, los responsables del almacén han sido capaces de determinar la siguiente distribución de probabilidad por lo que a las ventas de licencias del nuevo sistema operativo se refiere:

lic.	100	150	200	250	300
prob.	0.30	0.20	0.30	0.15	0.05

    ¿Qué recomendación debería hacerse al almacén respecto a cuántas licencias adquirir?

18. Consideremos el problema de estimar cuántos peces de una especie concreta existen en un lago. Un método común consiste en capturar n peces, marcarlos (de alguna forma no traumática) y devolverlos al agua. Posteriormente se capturan de nuevo n peces (y se

liberan después), y si k de ellos se encuentran marcados, entonces puede obtenerse una estimación del número de peces del lago mediante la siguiente aproximación:

$$\frac{\text{total de peces marcados}}{\text{total de peces en el lago}} \equiv \frac{\text{peces marcados encontrados en la muestra}}{\text{total de peces de la muestra}}$$

Para mejorar esta estimación, todos los peces no marcados capturados pueden a su vez ser marcados y liberados. Repitiendo este proceso una y otra vez, podemos ir mejorando la estimación del número de peces. ¿Realmente así mejoramos la estimación?

Diseñar un modelo de MonteCarlo para simular, a partir de un número dado de peces (que supuestamente contiene el lago), el proceso antes comentado, y poder así verificar experimentalmente si las estimaciones del número total de peces van mejorando conforme se va repitiendo el proceso de capturar, contar, marcar y liberar los peces.

19. Una pequeña fábrica alimenticia se dedica a la producción de caramelos y huevos de Pascua. Todos los años, durante la primera semana de diciembre, la empresa recibe pedidos de huevos de Pascua de distintas confiterías. La demanda total de huevos varia año tras año, pero en líneas generales sigue una distribución triangular con valor más probable = 2600 unidades, menor = 2000 unidades y mayor = 3000 unidades.

    Debido a razones estacionales, resulta más barato comprar el chocolate necesario para la producción de los huevos durante el mes agosto. Por este motivo, la política de la empresa consiste en adquirir una gran cantidad de chocolate en agosto, y luego, si después de recibir los pedidos de diciembre resulta necesario comprar más chocolate, se ordena una cantidad adicional que le permita satisfacer en forma exacta toda la demanda. Por otra parte, si el chocolate comprado en agosto supera las necesidades de producción, la cantidad sobrante es donada a comedores de escuelas. Se sabe además que:

    - Cada huevo de pascua emplea 250 gramos de chocolate.
    - El precio del chocolate en agosto es de 1 euro por kilo.
    - El precio del chocolate en diciembre es de 1.5 euros por kilo.
    - El precio de venta de los huevos de pascua es de 0.60 euros la unidad.

    Construir un modelo de simulación para este sistema que permita determinar cuántos kilos de chocolate se deberían comprar en el mes de agosto para optimizar el nivel de ganancias de la empresa.

20. Un lechería produce diariamente 1000 litros de leche. Todas las mañanas, la leche es extraída y envasada en latas de 10 litros, las cuales son almacenadas en los depósitos de la empresa. Los pedidos de latas de leche por parte de los clientes sólo se reciben durante la mañana. Por la tarde, toda la leche vendida durante la mañana es retirada del depósito y despachada a los clientes que efectuaron la compra. Debido a que la lechería tiene una capacidad muy limitada de almacenamiento, tan solo 200 latas, el precio de venta de la leche varía en función del nivel de stock. Si al final del día, el stock contiene:

    - más de 125 latas, al día siguiente la lata se vende a 1 euro.
    - menos de 75 latas, al día siguiente la lata se vende a 2 euros.
    - en cualquier otro caso, al día siguiente se vende a 1.50 euros.

    Por otra parte, la demanda diaria de leche varía según el precio, según se muestra en la siguiente tabla de distribución de probabilidades:

1 euro	1.50 euros	2 euros	Demanda
0.10	0.15	0.30	50
0.20	0.30	0.40	90
0.30	0.35	0.20	130
0.40	0.20	0.10	170

    Finalmente, los días en que el stock inicial de latas más la producción del día supera la capacidad del almacenamiento del depósito, la cantidad excedente de latas es donada a instituciones de caridad.

Construir un modelo de simulación para un período de 30 días de este sistema, suponiendo que el precio de la lata de leche el primer día es de 1.50 euros y que el stock inicial es de 20 latas. Estimar el número medio de días en que la capacidad de almacenamiento es insuficiente para contener el stock, y el número medio de días que el stock no alcanzó para satisfacer la demanda. ¿Qué recomendaría a los propietarios de la lechería en función de los resultados observados en la simulación?

21. Una compañía, especializada en el reciclaje industrial de papel, está planificando abrir una nueva planta de reciclado. La estructura de la nueva fábrica dispondrá de una planta de reciclaje y dos depósitos denominados rojo y verde. En el depósito rojo se almacenará todo el papel donado a la empresa para ser reciclado, mientras que en el depósito verde se guardará el stock del papel que ya ha sido reciclado y se encuentra disponible para vender.

Se proyecta que la planta recicle 300 kilos de papel usado por día. Por cada 3 kilos de papel usado se obtiene 1 kilo de papel reciclado. Asimismo, la capacidad de almacenamiento prevista para los depósitos rojo y verde es de hasta 1000 y 300 kilos de papel respectivamente. El funcionamiento diario de la planta es el siguiente:

- Por la mañana:
  - *a*) Se extraen del depósito rojo 300 kilos de papel usado para procesar. Si la cantidad de papel en el depósito es inferior a 300 kilos, se extrae todo el papel que esté disponible.
  - *b*) El papel usado es procesado, y el papel reciclado obtenido se almacena en el depósito verde.
- Por la tarde:
  - *a*) Se almacena en el depósito rojo todo el papel usado que llegó durante el día.
  - *b*) Se retiran del depósito verde los kilos de papel reciclado vendido a los clientes.

La empresa recibe todos los días una cantidad de papel que varia entre los 150 y 400 kilos según la siguiente distribución de probabilidad:

Papel usado	150 kg	200 kg	250 kg	300 kg	350 kg	400 kg
Probabilidad	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Asimismo, la demanda de papel reciclado oscila entre los 30 y 180 kilos por día, de acuerdo con la siguiente distribución:

Papel vendido	30 kg	60 kg	90 kg	120 kg	150 kg	180 kg
Probabilidad	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

La empresa desea hacer un estudio para determinar las respuestas a las siguientes cuestiones:

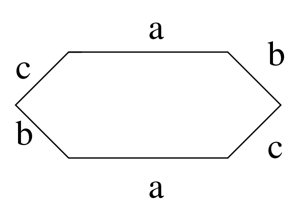
- ¿El depósito rojo tiene la capacidad suficiente para almacenar el papel usado que se va acumulando a lo largo de un año?
- ¿El depósito verde tiene la capacidad suficiente para almacenar el papel reciclado que se va acumulando a lo largo de un año?
- ¿Resulta necesario aumentar la capacidad de reciclado de la planta para satisfacer la demanda de papel reciclado? Si la respuesta es sí, ¿cuántos kilos más por día se deberían procesar?

Construir un modelo de simulación que simule un año de procesamiento de la planta, para responder a las preguntas anteriores. Se supone que el stock inicial de papel usado almacenado en el depósito rojo es de 300 kilos y que inicialmente el depósito verde está vacío.

22. Cada semana, un técnico en reparaciones de equipos electrónicos viaja a cinco ciudades consecutivamente, una cada día laborable. En cada una de las ciudades puede ser necesario reemplazar ciertas piezas cruciales de un equipo electrónico. La distribución de probabilidad del número de reemplazamientos requerido en cada una de las visitas a la ciudad j es $\{p_j(k), k \geq 0\}$, para $j = 1, \ldots, 5$. El técnico es capaz de transportar como máximo M piezas. En caso de que el número de piezas que transporta el técnico no sea suficiente para satisfacer la demanda en una ciudad, hay que enviar otro técnico al día siguiente a esa ciudad para completar el trabajo. El costo de este viaje a la ciudad j es K_j. Al final de cada día, el técnico puede decidir que le envíen piezas de repuesto (hasta completar su máximo M) a la ciudad en la que se encuentra (concretamente, la decisión del técnico puede ser: estando en la ciudad j, que me envíen piezas si me quedan menos de (o igual a) s_j piezas; en caso contrario, que no me envíen nada). El costo de hacer este envío a la ciudad j es a_j. Desarrollar un modelo de simulación para encontrar una política de actuación óptima (de mínimo costo en promedio). Resolver el problema para los datos: $M = 5$, $K_j = 200\ \forall j$, $a_1 = 60$, $a_2 = 30$, $a_3 = 50$, $a_4 = 25$, y las probabilidades $p_j(k)$ son las que aparecen en la tabla siguiente. Obsérvese que no tiene sentido enviar piezas a la ciudad 5, puesto que es la última del circuito. Encontrar también la solución exacta (sin el empleo de un modelo de Monte Carlo) para este problema, y comparar los resultados.

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
0	0.5	0.25	0.375	0.3	0.5
1	0.3	0.5	0.375	0.5	0.25
2	0.2	0.25	0.25	0.2	0.25

23. Una máquina estampadora produce planchas con seis esquinas de la siguiente forma:



La máquina tiene tres pares de cuchillas ajustables. En la figura estos tres pares se denotan a, b y c. Cada par de cuchillas puede desviarse de la posición correcta durante el estampado de una plancha. Pueden ocurrir las siguientes cinco situaciones:

1 Los tres pares están en la posición correcta.
2 Sólo los pares b y c están en la posición correcta.
3 Sólo el par b está en la posición correcta.
4 Sólo el par c está en la posición correcta.
5 Ningún par está en la posición correcta.

Las probabilidades q_{ij} de que durante el estampado se produzca un cambio de la situación i a la situación j vienen dadas en la siguiente tabla:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	0.75	0.25	0	0	0
2	0	0.5	0.25	0.25	0
3	0	0	0.75	0	0.25
4	0	0	0	0.5	0.5
5	0	0	0	0	1

Después de cada estampado es posible ajustar la máquina de modo que todos los pares de cuchillas se pongan en la posición correcta, lo que supone un costo de 10. Por otro lado, cada plancha producida cuando j pares ($j = 1, 2, 3$) de cuchillas están incorrectamente colocados tiene un costo de $4j$.

Determinar, empleando un modelo de Monte Carlo cual es la regla de mantenimiento óptima, en el sentido de minimizar el costo promedio por estampado. La regla de mantenimiento se refiere a en qué estado debe encontrarse la máquina para proceder al ajuste de las cuchillas.

Suponiendo que no es posible observar el estado de la máquina para determinar si se procede o no al ajuste, la regla de mantenimiento en este caso sería ajustar las cuchillas cuando se hayan realizado un número dado, n, de estampaciones. Determinar la política óptima en este caso (el valor de n que minimiza el costo promedio).