

1. CONJUNTOS

1.1. TEORIA DE CONJUNTOS

1.1.1. DEFINIÇÃO DE CONJUNTO

Definição: **Conjunto** é toda coleção de objetos.

Exemplos:

Uma coleção de números é um conjunto.

Uma coleção de letras é um conjunto.

Uma coleção de nomes é um conjunto.

Notação: Usualmente (mas não exclusivamente) notamos conjuntos com letras maiúsculas. Os objetos de um conjunto são relacionados entre chaves e separados por vírgulas ou outro separador.

Exemplos:

O conjunto A, coleção dos números 1, 2 e 3, é notado por $A = \{1, 2, 3\}$

O conjunto B, coleção das letras a, b, c e d, é notado por $B = \{a, b, c, d\}$

O conjunto Família, coleção dos nomes Jesus, Maria e José, é notado por $Família = \{Jesus, Maria, José\}$

Definição: Todo objeto parte de um conjunto é denominado **elemento**.

Exemplo:

Nos exemplos anteriores, os objetos 1, 2 e 3 são elementos do conjunto A; os objetos a, b, c e d são elementos do conjunto B e os objetos Jesus, Maria e José são elementos do conjunto Família.

Definição: Conjuntos com um número finito de elementos são denominados **conjuntos finitos**. Conjuntos com um número infinito de elementos são denominados **conjuntos infinitos**.

Notação: Em conjuntos infinitos, usamos reticências para notar a relação infinita de elementos.

Exemplo:

Um conjunto de números inteiros pares pode ser notado na forma $A = \{0, 2, 4, 6, 8 \dots\}$

A ordem ou a repetição de elementos em um conjunto é irrelevante.

Exemplo:

O conjunto $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ é equivalente ao conjunto $\{1, 2, 3\}$

O conjunto $\{2, 3, 1\}$ é equivalente ao conjunto $\{1, 2, 3\}$

O conjunto $\{d, c, a, d, c, c, b\}$ é equivalente ao conjunto $\{a, b, c, d\}$

Conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos.

Exemplo:

Os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ são 1, 2, 3 e $\{1, 2\}$. Este último elemento, por sua vez, também é um conjunto.

1.1.2. RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Definição: Quando um dado objeto b é elemento de um conjunto B , dizemos que b **pertence** a B .

Notação: Empregamos o símbolo \in , chamado de **símbolo de pertinência**, para notar a relação de pertinência entre um elemento e um conjunto. Para o contrário da pertinência, empregamos o símbolo \notin .

Exemplo:

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, então $1 \in A$, $2 \in A$ e $3 \in A$. Também podemos dizer que $4 \notin A$, já que 4 não é elemento de A .

É importante observar que a relação de pertinência expressa pelo símbolo \in envolve um elemento e um conjunto apenas, nunca dois elementos ou dois conjuntos, a não ser que se trate de um conjunto que atue como elemento.

Exercício resolvido:

Determine a falsidade ou veracidade das afirmativas abaixo:

- a) $2 \in \{a, b, c\}$
- b) $3 \in \{1, -2, 3, -4\}$
- c) $4 \in \{2, 3, 4\}$
- d) $\{4\} \in \{2, 3, 4\}$
- e) $\{4\} \in \{2, 3, \{4\}\}$

Resolução:

- a) é falsa, pois 2 não é elemento do conjunto $\{a, b, c\}$
- b) é verdadeira, pois 3 é elemento do conjunto $\{1, -2, 3, -4\}$
- c) é verdadeira, pois 4 é elemento do conjunto $\{2, 3, 4\}$
- d) é falsa, pois o conjunto unitário $\{4\}$ não é elemento do conjunto $\{2, 3, 4\}$, que tem como elemento apenas o número 4.
- e) é verdadeira, pois o conjunto unitário $\{4\}$ é elemento do conjunto $\{2, 3, \{4\}\}$

1.1.3. CONJUNTOS ESPECIAIS

a) **Conjunto vazio.** É o conjunto sem elementos. É notado pelo símbolo \emptyset .

Conjuntos vazios devem ser explicitados com o par de chaves sem elementos.

Exemplos:

$$\emptyset = \{\}$$

Se A é um conjunto vazio, então $A = \{\}$.

b) **Conjunto unitário.** É o conjunto com um único elemento.

Exemplos:

$$A = \{1\}$$

$$B = \{a\}$$

$$C = \{\text{João}\}$$

c) **Conjuntos numéricos.** São conjuntos constituídos de números.

Exemplos:

Conjunto dos números naturais (inteiros não negativos) ou $N = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$

Conjunto dos números inteiros ou $Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$

Conjunto dos números racionais ou Q (números racionais são aqueles que podem ser expressos na forma de uma razão de inteiros, como $1/3$, $-7/11$ etc. Dízimas periódicas como $0,445544\dots$ também são racionais)

Conjunto dos números reais ou R (conjunto dos números racionais e irracionais)

Conjunto dos números complexos ou C

d) **Conjunto Universo.** Denotado por U , é o conjunto que contém todos os elementos de interesse para um determinado problema.

e) **Conjunto complementar** de um conjunto A em relação a U . É o conjunto de todos os elementos do conjunto universo U que não pertencem a A .

1.1.4. DEFINIÇÃO DE CONJUNTO POR PROPRIEDADES

Um conjunto pode ser definido por uma propriedade P que seus elementos devem possuir. Nesse caso, notamos o conjunto conforme

$$A = \{ x \mid P(x) \}$$

Lemos essa expressão da seguinte forma: “ A é o conjunto dos elementos x tal que a propriedade P é satisfeita para todos os elementos”. O símbolo “ \mid ” significa “tal que”.

Exemplo:

O conjunto dos números pares dado acima, $A = \{0, 2, 4, 6, 8 \dots\}$, pode ser definido por propriedades conforme

$$A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

Lemos essa expressão da seguinte forma:

“A é conjunto dos elementos x tal que todo x tem a forma $x = 2k$, em que k pertence ao conjunto dos números naturais”.

Isto é, k é um número inteiro não negativo e pode assumir os valores 0, 1, 2, 3 e assim por diante, e isso significa que a propriedade $x = 2k$ nos indica que os elementos x assumem os valores 0, 2, 4, 6, e assim por diante. O conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8 \dots\}$ é a forma explícita do conjunto definido.

Exercício resolvido:

Defina por propriedade o conjunto de números inteiros ímpares maiores que 4 e explicita a relação de elementos.

Resolução:

Se nomearmos o elemento de A, podemos defini-lo como

$$A = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \text{ e } x > 3\}.$$

Sua forma explícita é $A = \{5, 7, 9, 11 \dots\}$.

Obs.: Note a propriedade $x = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$; como k assume os valores 0, 1, 2 etc, então $x = 2k + 1$ assume os valores 1, 3, 5, 7, 9, 11 etc. Para excluir os valores 1 e 3, que são menores de 4 e não pertencem ao conjunto, incluímos também a propriedade $x > 3$.

1.1.5. SUBCONJUNTOS, CONTINÊNCIA E IGUALDADE DE CONJUNTOS

Definição: Se todo elemento de um conjunto A pertence a um conjunto B, então A é denominado **subconjunto** de B.

A definição de subconjunto denota uma **relação de continência** entre conjuntos. Se A é subconjunto de B, podemos dizer de forma equivalente que A **está contido** em B, B **contém** A, ou ainda B **é parte** de A.

Notação: Se A é subconjunto de B (ou “A está contido em B”, ou “B contém A”), então notamos $A \subset B$. Caso contrário, notamos $A \not\subset B$. O símbolo “ \subset ” é chamado de **símbolo de continência**.

Exemplo:

Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \subset B$, pois os elementos 1 e 2 de A pertencem a B. Por outro lado, temos $B \not\subset A$, pois nem todos os elementos de

B pertencem a A (há, neste caso, uma exceção, o elemento 3).

É importante observar que a relação de continência expressa pelo símbolo \subset envolve dois conjuntos apenas, nunca um elemento e um conjunto ou dois elementos.

Definição: Se A é subconjunto de B e B é subconjunto de A, então dizemos que A e B são **conjuntos iguais**, isto é, se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$

Exercício resolvido:

Determine se os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 2, 2, 1, 1, 1\}$ são iguais.

Resolução:

Devemos determinar primeiramente se A e B são um subconjunto do outro. Vemos que todos os elementos de A (que são 1, 2 e 3) pertencem a B, logo A é subconjunto de (ou está contido em) B. Por outro lado, vemos que todos os elementos de B (que são 1, 2 e 3, ignorando ordem e repetição) pertencem a A, logo B é subconjunto de (ou está contido em) A. Como $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Observações importantes:

- a) Todo conjunto é subconjunto dele mesmo ($A \subset A$).
- b) O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto ($\emptyset \subset A$).
- c) Se $A \subset B$ mas $A \neq B$, dizemos que A é **subconjunto próprio** de B (este é o caso em que B tem elementos que A não tem).

Definição: **Conjunto potência** de A ou **conjunto das partes** de A, notado por $P(A)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto A (isto é, os subconjuntos de A são elementos de $P(A)$). Se A possui n elementos, então $P(A)$ possui 2^n elementos, pois esse é o número de subconjuntos de A.

Exemplo:

Se $A = \{1, 2, 3\}$, então

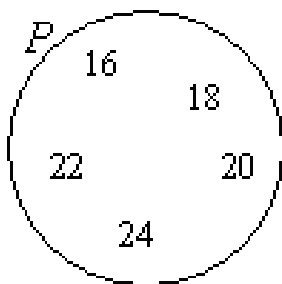
$$P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}.$$

Note que há $n = 3$ elementos em A e $2^n = 2^3 = 8$ elementos em $P(A)$.

1.1.6. DIAGRAMAS DE EULER-VENN

Conjuntos podem ser representados graficamente por diagramas de Euler-Venn, que são regiões planas delimitadas por curvas fechadas. Eventualmente os elementos podem ser explicitados no interior do diagrama.

Exemplo: O conjunto $P = \{16, 18, 20, 22, 24\}$ pode ser representado pelo diagrama abaixo:



(fonte da imagem: <http://image.wistatutor.com/content/feed/u2230/venn4.PNG>)

1.2. OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

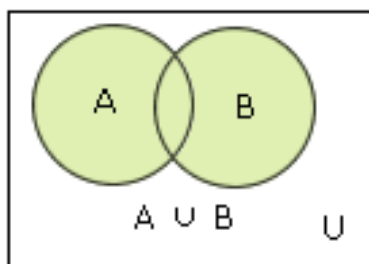
As operações entre conjuntos são binárias, isto é, envolvem dois conjuntos e têm como resultado um terceiro conjunto.

1.2.1. UNIÃO DE CONJUNTOS

A união dos conjuntos A e B , notada por $A \cup B$ (lê-se “ A união B ”), é o conjunto dos elementos que pertencem a A **ou** que pertencem a B , isto é,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

A união de conjuntos pode ser representada graficamente pela parte hachurada nos diagramas de Venn-Euler abaixo:



(fonte da imagem: <http://img90.imageshack.us/img90/5262/fig02au3.gif>)

Exemplos:

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c\}$.

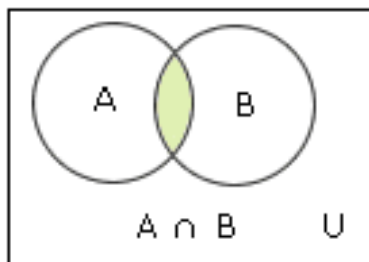
Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. Neste caso em particular, contabilizamos os elementos 2 e 3 apenas uma vez, pois a repetição de elementos é irrelevante em conjuntos.

1.2.2. INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

A intersecção de conjuntos A e B, notada por $A \cap B$ (lê-se “A intersecção B”), é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B, isto é,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A intersecção de conjuntos pode ser representada graficamente pela parte hachurada nos diagramas de Venn-Euler abaixo:



(fonte da imagem: <http://img87.imageshack.us/img87/851/fig03rg7.gif>)

Exemplos:

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, então $A \cap B = \{2, 3\}$, pois os elementos 2 e 3 são os únicos presentes em ambos os conjuntos.

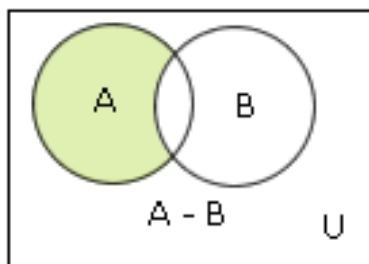
Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, então $A \cap B = \emptyset$, isto é, a intersecção de A e B é um conjunto vazio pois não há elementos em comum em A e B.

1.2.3. DIFERENÇA DE CONJUNTOS

A diferença entre o conjunto A e o conjunto B, notada por $A - B$ (lê-se “A diferença B”), é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas **não** pertencem a B, isto é,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

A diferença $A - B$ em geral **não** é igual à diferença $B - A$. A intersecção de conjuntos pode ser representada graficamente pela parte hachurada nos diagramas de Venn-Euler abaixo:



(fone da imagem: <http://img87.imageshack.us/img87/1516/fig04ni9.gif>)

Exemplo:

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, então $A - B = \{1\}$, pois o elemento 1 é o único que pertence a A e não pertence a B. Além disso, $B - A = \{4\}$, pois o elemento 4 é o único que pertence a B e não pertence a A.

Exercício resolvido:

Sejam os conjuntos $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$ e $C = \{4,5,6\}$. Determine:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) $A \cap C$
- d) $B - C$
- e) $A \cup (B \cap C)$
- f) $A \cap (C - B)$

Resolução:

- a) $A \cup B = \{1,2,3,4\}$; basta reunir todos os elementos de A e B, ignorando repetições.
- b) $A \cap B = \{2\}$, pois o elemento 2 é o único pertencente a ambos os conjuntos.
- c) $A \cap C = \emptyset$, pois não há elementos em comum a ambos os conjuntos.
- d) $B - C = \{2,3\}$, pois 2 e 3 pertencem a B mas não a C.
- e) note que $B \cap C = \{4\}$, logo $A \cup (B \cap C) = A \cup \{4\} = \{1,2,4\}$.
- f) note que $C - B = \{5,6\}$, pois 5 e 6 pertencem a C mas não a B; logo $A \cap (C - B) = A \cap \{5,6\} = \emptyset$.

1.3. RELAÇÕES E FUNÇÕES

1.3.1. PRODUTO CARTESIANO

Definição: O **produto cartesiano** entre dois conjuntos A e B, notado por $A \times B$ (lê-se “A cartesiano B”) é o conjunto de **pares ordenados** (x,y) tais que os elementos x pertencem a A e os elementos y pertencem a B.

O produto cartesiano é também um conjunto, porém seus elementos são pares ordenados construídos com elementos dos conjuntos operados. Observamos que o par ordenado (x,y) é diferente do par (y,x). Isto ocorre porque a ordem dos elementos do par é importante, razão pela qual empregamos a expressão **par ordenado**. Decorre disso também que, em geral, $A \times B$ é diferente de $B \times A$.

Exemplo:

Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então $A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$. Observamos aqui que os pares ordenados construídos compõem todas as combinações possíveis envolvendo os elementos de A e de B. Conforme a definição de produto cartesiano, o primeiro elemento dos pares são elementos de A (isto é, 1 e 2) e o segundo elemento dos pares são elementos de B (isto é,

a, b e c). Um par (a, 1), por exemplo, não é elemento de $A \times B$, mas é elemento de $B \times A$. De fato, temos $B \times A = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$.

1.3.2. RELAÇÕES

Definição: O subconjunto de um produto cartesiano $A \times B$ é denominado **relação** de A em B.

Isto é, se chamarmos R uma relação de A em B, então, por definição temos $R \subset A \times B$.

Notação: Uma relação R de A em B é notada $R : A \rightarrow B$.

Exemplo:

No exemplo anterior apresentamos $A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$. Considere agora os conjuntos de pares ordenados abaixo:

$$R1 = \{(1,a)\}$$

$$R2 = \{(1,c), (2,b)\}$$

$$R3 = \{(2,c), (1,b), (2,a)\}$$

$$R4 = \{(1,a), (b,1)\}$$

Note que os conjuntos R1, R2 e R3 são subconjuntos de $A \times B$ (reveja a definição de subconjunto na seção 1.1.5!), pois os seus elementos pertencem a $A \times B$, isto é, $R1 \subset A \times B$, $R2 \subset A \times B$ e $R3 \subset A \times B$. Logo, R1, R2 e R3 são relações de A em B.

Por outro lado, o conjunto R4 tem pelo menos um elemento – o par (b,1) – que não pertence a $A \times B$ (não se esqueça que $(b,1) \neq (1,b)$), não se encaixando na definição de subconjunto. Logo, $R4 \not\subset A \times B$, e, portanto, não é uma relação de A em B.

1.3.3. FUNÇÕES

Definição: Uma **função** de A em B é uma relação de A em B tal que para cada elemento de A existe **um único** elemento de B associado.

Notação: Uma função f de A em B é notada por $f : A \rightarrow B$.

Exemplo:

Mais uma vez, tomemos $A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$, o produto cartesiano do exemplo anterior. Lembramos ainda que $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Agora considere as seguintes relações de A em B:

$$R1 = \{(1,a), (2,b)\}$$

$$R2 = \{(1,c), (2,c)\}$$

$$R3 = \{(2,a), (2,b)\}$$

Notamos que no conjunto R1 os elementos 1 e 2 dos pares, provenientes do conjunto A, estão associados, cada um, a um único elemento de B (no caso, a e b, respectivamente, formando os pares (1,a) e (2,b)). Logo, R1 é uma função de A em B.

No caso do conjunto R2, os elementos 1 e 2 dos pares, provenientes de A, estão associados, cada um, a um único elemento de B (no caso, c, em ambos os pares, (1,c) e (2,c)). Logo, R2 também é uma função de A em B.

Por sua vez, no conjunto R3 o elemento 2 dos pares proveniente de A está associado a mais de um elemento de B (neste caso, a e b, formando os pares (2,a) e (2,b)). Logo R3 não é função de A em B.