

A Matemática do Ensino Médio

Volume 2

Elon Lages Lima

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Eduardo Wagner

Augusto César Morgado



COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Capítulo 4

Combinatória

4.1 Princípios Básicos

O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1 , há y modos de tomar a decisão D_2 , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy .

Exemplo 1. Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Solução. Formar um casal equivale a tomar as decisões:

D_1 : Escolha do homem (5 modos).

D_2 : Escolha da mulher (5 modos).

Há $5 \times 5 = 25$ modos de formar um casal. □

Exemplo 2. Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

Solução. Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há 3 modos de escolher a cor da primeira listra e, a partir daí, 2 modos de escolher a cor de cada uma das outras 6 listras. A resposta é $3 \times 2^6 = 192$. □

Exemplo 3. Quantos são os números de três dígitos distintos?

Solução. O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0. O segundo dígito pode ser escolhido

de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro dígito. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígitos.

A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$. \square

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de Combinatória:

1) *Postura*. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No exemplo 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria escrever o número de três dígitos; no exemplo 2, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no exemplo 1, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria formar o casal.

2) *Divisão*. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Formar um casal foi dividido em escolher o homem e escolher a mulher; colorir a bandeira foi dividido em colorir cada listra; formar um número de três dígitos foi dividido em escolher cada um dos três dígitos.

Vamos voltar ao exemplo anterior – Quantos são os números de três dígitos distintos? – para ver como algumas pessoas conseguem, por erros de estratégia, tornar complicadas as coisas mais simples.

Começando a escolha dos dígitos pelo último dígito, há 10 modos de escolher o último dígito. Em seguida, há 9 modos de escolher o dígito central, pois não podemos repetir o dígito já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro dígito? A resposta é “depende”. Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro dígito, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois dígitos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito.

Um passo importante na estratégia para resolver problemas de Combinatória é:

3) *Não adiar dificuldades.* Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No exemplo 3, a escolha do primeiro dígito era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro dígito não pode ser igual a 0. Essa é portanto a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas. \square

Exemplo 4. O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

Solução. Há 2 palavras de uma letra. Há $2 \times 2 = 4$ palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda letra; analogamente, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ palavras de três letras e $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ palavras de 4 letras. O número total de palavras é $2 + 4 + 8 + 16 = 30$. \square

Exemplo 5. Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 360? Quantos desses divisores são pares? Quantos são ímpares? Quantos são quadrados perfeitos?

Solução. a) $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Os divisores inteiros e positivos de 360 são os números da forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, com

$$\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \beta \in \{0, 1, 2\} \text{ e } \gamma \in \{0, 1\}.$$

Há $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras de escolher os expoentes α , β e γ . Há 24 divisores.

- b) Para o divisor ser par, α não pode ser 0. Há $3 \times 3 \times 2 = 18$ divisores pares.
- c) Para o divisor ser ímpar, α deve ser 0. Há $1 \times 3 \times 2 = 6$ divisores ímpares. Claro que poderíamos ter achado essa resposta subtraindo (a)-(b).
- d) Para o divisor ser quadrado perfeito, os expoentes α , β e γ devem ser pares. Há $2 \times 2 \times 1 = 4$ divisores que são quadrados perfeitos. \square

Exemplo 6. Quantos são os números pares de três dígitos distintos?

Solução. Há 5 modos de escolher o último dígito. Note que comecemos pelo último dígito, que é o mais restrito; o último dígito só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro dígito. De quantos modos se pode escolher o primeiro dígito? A resposta é “depende”: se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito, pois não poderemos usar nem o 0 nem o dígito já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro dígito, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente. Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0.

Começamos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último dígito, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central. Há $1 \times 9 \times 8 = 72$ números terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último dígito, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números que não terminam em 0.

A resposta é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último dígito (só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro dígito (não podemos repetir o dígito usado na última casa; note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira

casa) e 8 modos de escolher o dígito central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro dígito (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2, 4, 6 ou 8 – lembre-se que os dígitos são distintos) e 8 modos de escolher o dígito central (não podemos repetir os dígitos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0.

A resposta é $360 - 32 = 328$.

É claro que este problema poderia ter sido resolvido com um truque. Para determinar quantos são os números pares de três dígitos distintos, poderíamos fazer os números de três dígitos distintos menos os números ímpares de três dígitos distintos.

Para os números de três dígitos distintos, há 9 modos de escolher o primeiro dígito, 9 modos de escolher o segundo e 8 modos de escolher o último. Há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números de três dígitos distintos.

Para os números ímpares de três dígitos distintos, há 5 modos de escolher o último dígito, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central. Há $5 \times 8 \times 8 = 320$ números ímpares de três dígitos distintos.

A resposta é $648 - 320 = 328$.

Exercícios

1. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com 5 alternativas por questão?
2. Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?
3. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?
4. De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar

em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

5. De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não-adjacentes de um tabuleiro 8×8 ? E se os reis fossem iguais?

6. De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro 8×8 , de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes?

7. De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se sucessivamente e sem reposição duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito se a primeira carta deve ser de copas e a segunda não deve ser um rei?

8. O conjunto A possui 4 elementos e, o conjunto B, 7 elementos. Quantas funções $f: A \rightarrow B$ existem? Quantas delas são injetoras?

9. a) De quantos modos o número 720 pode ser decomposto em um produto de dois inteiros positivos? Aqui consideramos, naturalmente, 8×90 como sendo o mesmo que 90×8 .

b) E o número 144?

10. Em um corredor há 900 armários, numerados de 1 a 900, inicialmente todos fechados. 900 pessoas, numeradas de 1 a 900, atravessam o corredor. A pessoa de número k reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplos de k . Por exemplo, a pessoa de número 4 mexe nos armários de números 4, 8, 12, ..., abrindo os que encontra fechados e fechando os que encontra abertos. Ao final, quais armários ficarão abertos?

11. Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma *linha* não podem receber a mesma cor?

12. De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra A deve figurar na palavra

mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

13. As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?

14. Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

15. Escrevem-se os inteiros de 1 até 2 222. Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?

16. Quantos são os inteiros positivos de 4 dígitos nos quais o algarismo 5 figura?

17. Em uma banca há 5 exemplares iguais da “Veja”, 6 exemplares iguais da “Manchete” e 4 exemplares iguais da “Isto é”. Quantas coleções não-vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

18. Uma turma tem aulas as segundas, quartas e sextas, de 13h às 14h e de 14h às 15h. As matérias são Matemática, Física e Química, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

19. O problema do exemplo 1 – Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal? – foi resolvido por um aluno do modo a seguir: “A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente da primeira pessoa. Há portanto $10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal”. Onde está o erro?

20. Escrevem-se números de 5 dígitos, inclusive os começados em 0, em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo

e como 6, de cabeça para baixo, se transforma em 9 e vice-versa, um mesmo cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de 5 dígitos?

21. Qual é a soma dos divisores positivos de 360?

Sugestões aos Exercícios

2. Para formar um subconjunto você deve perguntar a cada elemento do conjunto se ele deseja participar do subconjunto.

3. A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3.

4. A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2, de 1.

5. O tabuleiro de 64 casas possui 4 casas de canto (vértices), 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada casa de canto possui 3 casas adjacentes; cada lateral possui 5 casas adjacentes e cada central possui 8 casas adjacentes. Conte separadamente conforme o rei negro ocupe uma casa de canto, lateral ou central.

Se os reis fossem iguais, a resposta seria a metade da resposta anterior.

6. Haverá uma torre em cada linha. A torre da primeira linha pode ser colocada de 8 modos. A da segunda linha, de 7 modos, pois não pode ficar na mesma coluna da anterior, etc.

Se as torres são diferentes, devemos primeiramente escolher qual a torre que ficará na primeira linha (8 modos) e depois escolher onde colocá-la na primeira linha (8 modos). Há 8×8 modos de colocar a torre da primeira linha; analogamente, há 7×7 modos de colocar a torre da segunda linha etc.

7. Conte separadamente os casos em que a carta de copas é um rei e em que a carta de copas não é um rei.

8. Para construir uma função, você deve perguntar a cada elemento de A quem ele deseja flechar em B .

9a. $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ tem 30 divisores positivos.

9b. Note que $144 = 12 \times 12$.

10. O armário de número k é mexido pelas pessoas cujos números são divisores de k . Um armário ficará aberto se for mexido um número ímpar de vezes.

Lembre-se que o número de divisores positivos de $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times \dots$ é igual a $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots$

11. Conte separadamente os casos em que os quadrantes 1 e 3 têm cores iguais e cores diferentes.

12. Note que no caso em que são permitidas repetições, a condição da letra A figurar na palavra é terrível, pois ela pode figurar uma só vez, ou duas, etc... Por isso é melhor contar todas as palavras do alfabeto e diminuir as que não têm A e as que começam por A .

No caso sem repetição, você poderia também contar diretamente: há 4 modos de escolher a posição do A , 25 modos de escolher a letra da primeira casa restante, 24 para a segunda casa restante, etc.

15. Conte quantas vezes o 0 aparece nas unidades, some com o número de vezes que ele aparece nas dezenas, etc.

16. Note que como são permitidas repetições, a condição do 5 figurar no número é terrível, pois ele pode figurar uma só vez, ou duas, etc... É melhor fazer todos os números menos aqueles em que o 5 não figura.

17. Para formar uma coleção, você deve decidir quantas "Veja" farão parte da coleção, etc. Não se esqueça de retirar da sua contagem a coleção vazia.

18. Há 3 modos de escolher os dias de Matemática; escolhidos os dias, digamos segundas e quartas, há 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da segunda e 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da quarta. Há 2 modos de escolher os dias da Física (não podem ser os mesmos da Matemática senão a Química ficaria com as aulas no mesmo dia), etc.

20. Há três tipos de cartões: os que não podem ser virados de cabeça para baixo, os que virados de cabeça para baixo continuam representando o mesmo número e os que virados de cabeça para baixo passam a representar números diferentes. Se há x , y e z cartões de cada um desses tipos, respectivamente, a resposta é $x + y + \frac{z}{2}$. É fácil calcular y , $z + y$ e $x + y + z$.

4.2 Permutações e Combinações

Há alguns (poucos) problemas de Combinatória que, embora sejam aplicações do princípio básico, aparecem com muita freqüência. Para esses problemas, vale a pena saber de cor as suas respostas. O primeiro desses problemas é o:

Problema das permutações simples

De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n - 1$ modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n - 2$ modos, etc...; a escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo.

A resposta é $n(n - 1)(n - 2) \dots 1 = n!$.

Cada ordem que se dá aos objetos é chamada de uma permutação simples dos objetos. Assim, por exemplo, as permutações simples das letras a , b e c são (abc) , (acb) , (bac) , (bca) , (cab) e (cba) .

Portanto, o número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos distintos é $P_n = n!$. \square

Exemplo 1. Quantos são os anagramas da palavra “calor”? Quantos começam por consoante?

Solução. Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 5 letras. O número de anagramas é $P_5 = 5! = 120$.

Para formar um anagrama começado por consoante devemos primeiramente escolher a consoante (3 modos) e, depois, arrumar as quatro letras restantes em seguida à consoante ($4! = 24$ modos). Há $3 \times 24 = 72$ anagramas começados por consoante. \square

Exemplo 2. De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros diferentes de Física, de modo que livros de uma mesma

matéria permaneçam juntos?

Solução. Podemos escolher a ordem das matérias de $3!$ modos. Feito isso, há $5!$ modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhe foram destinados, $3!$ modos para os de Estatística e $2!$ modos para os de Física.

A resposta é $3!5!3!2! = 6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8\,640$. \square

Exemplo 3. Quantos são os anagramas da palavra “BOTA-FOGO”?

Solução. Se as letras fossem diferentes a resposta seria $8!$. Como as três letras O são iguais, quando as trocamos entre si obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama distinto, o que aconteceria se fossem diferentes. Isso faz com que na nossa contagem de $8!$ tenhamos contado o mesmo anagrama várias vezes, $3!$ vezes precisamente, pois há $3!$ modos de trocar as letras O entre si.

A resposta é $\frac{8!}{3!} = 6\,720$.

De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é

$$p_n^{\alpha, \beta, \gamma, \dots} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}.$$

\square

Exemplo 4. De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos e um de 3 objetos?

Solução. Um processo de fazer a divisão é colocar os objetos em fila; os 5 primeiros formam o grupo de 5 e os 3 últimos formam o grupo de 3.

Há $8!$ modos de colocar os objetos em fila.

Entretanto, note que filas como abcde | fgh e badce | ghf são filas diferentes e geram a mesma divisão em grupos. Cada divisão em grupos foi contada uma vez para cada ordem dos objetos dentro de cada grupo. Há $5!3!$ modos de arrumar os objetos em cada grupo. Cada divisão em grupos foi contada $5!3!$ vezes.

A resposta é $\frac{8!}{5!3!} = 56$. \square

O segundo problema importante é o:

Problema das combinações simples

De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Cada seleção de p objetos é chamada de uma combinação simples de classe p dos n objetos. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a, b, c, d, e são $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$ e $\{c, d, e\}$. Representamos o número de combinações simples de classe p de n elementos por C_n^p ou $\binom{n}{p}$. Assim, $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$.

Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de $n - p$ objetos, que são os não-selecionados.

Esse é o problema do exemplo 4 e a resposta é

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \square$$

Exemplo 5. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

Solução. Para formar a comissão devemos escolher 3 dos homens e 2 das mulheres. Há $C_5^3 \cdot C_4^2 = 10 \times 6 = 60$ comissões. \square

Exemplo 6. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução. Há comissões com: 3 homens e 2 mulheres, 4 homens e 1 mulher, 5 homens. A resposta é

$$C_5^2 \cdot C_4^2 + C_5^4 \cdot C_4^1 + C_5^5 = 10 \times 6 + 5 \times 4 + 1 = 81. \quad \square$$

Exemplo 7. Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R . Quantos triângulos e quantos quadriláteros convexos com vértices nesses pontos existem?

Solução. Para formar um triângulo ou você toma um ponto em R e dois pontos em R' , ou toma um ponto em R' e dois pontos em R . O número de triângulos é $5 \cdot C_8^2 + 8 \cdot C_5^2 = 140 + 80 = 220$.

Também se poderia pensar em tomar 3 dos 13 pontos e excluir dessa contagem as escolhas de pontos colineares, o que daria

$$C_{13}^3 - C_8^3 - C_5^3 = 286 - 56 - 10 = 220.$$

Para formar um quadrilátero convexo, devemos tomar dois pontos em R e dois pontos em R' , o que pode ser feito de $C_5^3 \cdot C_8^2 = 10 \cdot 28 = 280$ modos. \square

Exemplo 8. De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?

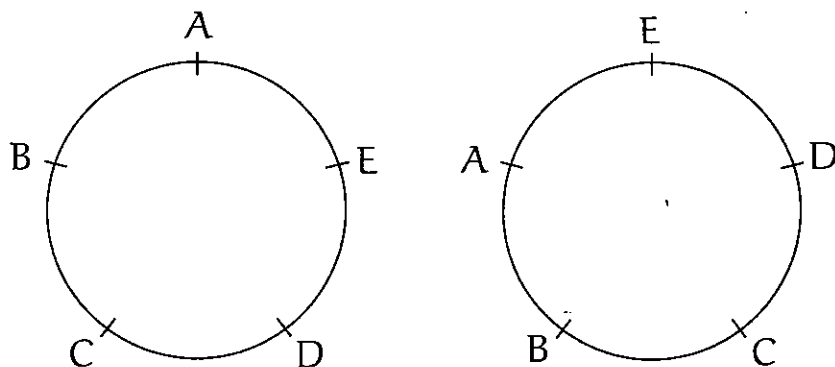


Figura 4.1

Solução. À primeira vista parece que para formar uma roda com as cinco crianças basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de $5! = 120$ modos. Entretanto, as rodas ABCDE e EABCD são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si e a roda ABCDE pode ser “virada” na roda EABCD. Como cada roda pode ser “virada” de cinco modos, a nossa contagem de 120 rodas contou cada roda 5 vezes e a resposta é $120/5 = 24$.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, de modo que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de n objetos é $(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. \square

O exemplo a seguir mostra um tipo de raciocínio que, apesar de inesperado, pode ser muito eficiente.

Exemplo 9. Quantos são os anagramas da palavra “BÚLGARO” que não possuem duas vogais adjacentes?

Solução. Vamos primeiramente arrumar as consoantes e, depois, vamos entremear as vogais. O número de modos de arrumar em fila as consoantes B, L, G, R é $P_4 = 4! = 24$. Arrumadas as consoantes, por exemplo na ordem BLGR, devemos colocar as vogais U, A, O nos 5 espaços da figura. Como não podemos colocar duas vogais no mesmo espaço, três dos espaços serão ocupados, cada um com uma vogal e dois dos espaços ficarão vazios. Temos $C_5^3 = 10$ modos de escolher os três espaços que serão ocupados e $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar as vogais nos espaços escolhidos.

_ B _ L _ G _ R _

A resposta é $24 \times 10 \times 6 = 1\,440$. □

Exemplo 10. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$?

Solução. A resposta deste problema é representada por CR_n^p .

Para determinar o valor de CR_n^p , vamos representar cada solução da equação por uma fila de sinais + e ||. Por exemplo, para a equação $x + y + z = 5$, as soluções (2,2,1) e (5,0,0) seriam representadas por ++ | ++ | + e +++++ ||, respectivamente. Nossa representação, as barras são usadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais + indica o valor de cada incógnita.

Para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila com $n - 1$ barras (as barras são para separar as incógnitas; para separar n incógnitas, usamos $n - 1$ barras) e p sinais +. Ora, para formar uma fila com $n - 1$ barras e p sinais +, basta escolher dos $n + p - 1$ lugares da fila os p lugares onde serão colocados os sinais +, o que pode ser feito de C_{n+p-1}^p modos. Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$. □

Exemplo 11. De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes em um bar que os oferece em 6 sabores distintos?

Solução. A resposta não é $C_6^3 = 20$. C_6^3 seria o número de modos de comprar 3 sorvetes diferentes.

Chamando de x_k o número de sorvetes do k -ésimo sabor que vamos comprar, devemos determinar valores inteiros e não-negativos para x_k $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, tais que $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 3$. Isso pode ser feito de $CR_6^3 = C_8^3 = 56$ modos. \square

Exercícios

- Quantos são os anagramas da palavra "CAPÍTULO".
 - possíveis?
 - que começam e terminam por vogal?
 - que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
 - que têm as letras c, a, p juntas nessa ordem?
 - que têm as letras c, a, p juntas em qualquer ordem?
 - que têm a letra p em primeiro lugar e a letra a em segundo?
 - que têm a letra p em primeiro lugar ou a letra a em segundo?
 - que têm p em primeiro lugar ou a em segundo ou c em terceiro?
 - nos quais a letra a é uma das letras à esquerda de p e a letra c é uma das letras à direita de p?
- Se A é um conjunto de n elementos, quantas são as funções $f: A \rightarrow A$ bijetoras?
- De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas?
- De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntas?
- Quantas são as permutações simples dos números

$$1, 2, 3, \dots, 10,$$

nas quais o elemento que ocupa o lugar de ordem k , da esquerda para a direita, é sempre maior que $k - 3$?

6. De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?

7. De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?

8. De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?

9. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

10. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine:

- a) que lugar ocupa o número 62 417.
- b) que número que ocupa o 66º lugar.
- c) qual o 166º algarismo escrito.
- d) a soma dos números assim formados.

11. De quantos modos é possível colocar r rapazes e m moças em fila de modo que as moças permaneçam juntas?

12. Quantos dados diferentes é possível formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces de um cubo?

- a) Suponha uma face de cada cor.
- b) Suponha as faces iguais.
- c) Suponha que as faces são iguais e que a soma dos pontos de faces opostas deva ser igual a 7.

13. Resolva o problema anterior, no caso b), para os outros 4 poliedros regulares.

14. Determine n para que $\sum_{k=1}^n k!$ seja um quadrado perfeito.

15. Quantos são os anagramas da palavra "ESTRELADA"?

16. O conjunto A possui n elementos. Quantos são os seus subconjuntos com p elementos?

17. Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com 4 matérias em cada dia. Este ano a divisão foi: Matemática, Português, Biologia e Inglês no primeiro dia e Geografia, História, Física e Química no segundo dia. De quantos modos pode ser feito o calendário de provas?

18. Qual é o erro da solução abaixo?

"Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução: Primeiramente vamos escolher 3 homens para a comissão, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos. Agora devemos escolher mais duas pessoas para a comissão, homens ou mulheres, entre as 6 pessoas restantes, o que pode ser feito de $C_6^2 = 15$. A resposta é $10 \times 15 = 150$."

19. Quantas diagonais possui:

- a) um octaedro regular?
- b) um icosaedro regular?
- c) um dodecaedro regular?
- d) um cubo?
- e) um prisma hexagonal regular?

20. Sejam $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f: I_m \rightarrow I_n$ estritamente crescentes?

21. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?

22. Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, com p elementos, nos quais:

- a) a_1 figura;
- b) a_1 não figura;
- c) a_1 e a_2 figuram;

- d) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura;
- e) exatamente um dos elementos a_1 e a_2 figura.

23. De um baralho de pôquer (7, 8, 9, 10, valete, dama, rei e ás, cada um desses grupos aparecendo em 4 naipes: copas, ouros, paus, espadas), sacam-se simultaneamente 5 cartas.

- a) Quantas são as extrações possíveis?

Quantas são as extrações nas quais se forma:

- b) um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três em três outros grupos diferentes)?
- c) dois pares (duas cartas em um grupo, duas em outro grupo e uma em um terceiro grupo)?
- d) uma trinca (três cartas em um grupo e as outras duas em dois outros grupos diferentes)?
- e) um "four" (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?
- f) um "full hand" (três cartas em um grupo e duas em outro grupo)?
- g) uma seqüência (5 cartas de grupos consecutivos, não sendo todas do mesmo naipe)?
- h) um "flush" (5 cartas do mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?
- i) um "straight flush" (5 cartas de grupos consecutivos, todas do mesmo naipe)?
- j) um "royal straight flush" (10, valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?

24. O conjunto A possui p elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções $f: A \rightarrow B$ sobrejetoras para: a) $p = n$; b) $p = n + 1$; c) $p = n + 2$.

25. Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então eles são pontos de C_1 . Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C ?

26. Uma fila de cadeiras no cinema tem 10 poltronas. De quan-

tos modos 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

27. Quantos são os anagramas da palavra "PARAGUAIO" que não possuem consoantes adjacentes?

28. De quantos modos podemos selecionar p elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ sem selecionar dois números consecutivos?

29. Onze cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?

b) Na situação do item a), quantas chaves cada cientista deve ter?

30. Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferecendo, durante 7 dias consecutivos, 7 jantares para 3 alunos cada. De quantos modos ele pode fazer os convites se ele não deseja que um mesmo par de alunos compareça a mais de um jantar?

31. Formam-se as combinações simples de classe 5 dos elementos a_1, a_2, \dots, a_{12} , as quais são escritas com os elementos em ordem crescente de índices. Quantas são as combinações nas quais o elemento a_8 ocupa o 3º lugar?

32. De quantos modos é possível colocar em fila h homens e m mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de alturas?

33. Em uma escola, x professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

a) Calcule x .

b) Determine quantos professores há em cada banca.

34. A partir de um conjunto de a atletas formam-se t times de k atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número de vezes. Determine:

- a) de quantos times cada atleta participa;
- b) em quantos times cada par de atletas fica junto.

35. De quantos modos podemos formar uma mesa de buraco com 4 jogadores?

36. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

37. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas delas, Vera e Isadora, não fiquem juntas?

38. Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x + y + z = 7$?

39. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas de $x + y + z \leq 6$?

40. Uma indústria fabrica 5 tipos de balas que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de caixas podem ser montados?

Sugestões aos Exercícios

1c. Os anagramas podem começar por vogal ou por consoante.

1d. Tudo se passa como se cap fosse uma letra só.

1e. Escolha inicialmente a ordem das letras c,a,p. Recai-se no item anterior.

1g. Ao somar os que têm p em primeiro com os que têm a em segundo, os que têm p em primeiro e a em segundo são contados duas vezes. Um diagrama de conjuntos ajuda.

1h. Um diagrama de conjuntos ajuda.

- 1i. Há $3! = 6$ ordens possíveis para essas letras. A resposta é $\frac{1}{6}$ do total de anagramas.
3. Faça o total menos aquelas nas quais elas ficam juntas. Não se esqueça que elas podem ficar juntas em $2!$ ordens possíveis.
4. Faça todas com Helena e Pedro juntos menos aquelas nas Helena e Pedro estão juntos e Vera e Paulo também estão juntos.
5. As posições mais restritas são as últimas.
6. Você deve escolher 5 jogadores para o Esporte, depois escolher 5 dos que sobraram para o Tupi e formar o Minas com os restantes. Ou então, ponha os 15 jogadores em fila: os 5 primeiros formam o Esporte, os 5 seguintes o Tupi, os 5 últimos o Minas. Note que, trocando a ordem dentro de cada bloco, você muda a fila mas não muda a divisão em times.
7. A resposta é a anterior dividida por $3!$, pois agora, trocando os times entre si, a divisão é a mesma.
9. Você pode colocar os 12 times em uma matriz 6×2 . Note que trocar as linhas entre si, ou trocar em uma linha a ordem dos elementos não altera a seleção dos jogos. Você também poderia pensar assim: Tenho 11 modos de escolher o adversário do Botafogo; depois tenho 9 modos de escolher o adversário do primeiro (em ordem alfabética) time que sobrou, depois tenho 7...
- 10a. Para descobrir o lugar do 62 417 você tem que contar quantos números o antecedem. Antecedem-no todos os números começados em 1, em 2, em 4, em 61, etc.
- 10c. O 166^{o} algarismo escrito é o 1^{o} algarismo do 34^{o} número.
- 10d. A soma das unidades dos números é $(1 + 2 + 4 + 6 + 7) \cdot 4!$, pois cada um dos algarismos 1,2,4,6,7 aparece como algarismo das unidades em $4!$ números. Determine analogamente a soma das dezenas, etc.
Um truque, bonito, mas truque, é agrupar os $5! = 120$ números em 60 casais do seguinte modo: o cônjuge de cada número é o número que dele se obtém trocando a posição do 1 com o 7 e a posição do 2 com o 6. Teremos 60 casais e a soma em cada casal é 88 888. A resposta é $88\,888 \times 60$.
- 12a. Devemos colocar 6 números em 6 lugares. A resposta é $6!$.

12b. Agora, quando mudamos o cubo de posição obtemos o mesmo dado. Por exemplo, um dado que tem o 1 e o 6 em faces opostas: Antes, colocar o 1 em cima, na face preta, e o 6 em baixo, na face branca, era diferente de colocar o 6 em cima e o 1 embaixo. Agora não, é o mesmo dado de cabeça para baixo. A resposta é a anterior dividida pelo número de posições de colocar um cubo. Há 6 modos de escolher a face que fica em baixo e 4 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente.

14. Se $k > 4$, $k!$ termina em 0.

19. Os segmentos que ligam dois vértices são diagonais, arestas ou diagonais de faces.

20. A função fica determinada quando se escolhem os m elementos de I_n que formarão a imagem.

21. Ignore o problema do 0 na primeira casa. Escolha os lugares dos 4, dos 8, preencha as casas restantes. Desconte os números começados em 0.

23b. Há 8 modos de escolher o grupo das suas cartas que formarão o par propriamente dito; há C_4^2 modos de escolher os naipes dessas cartas; há C_7^3 modos de escolher os grupos das outras três cartas e 4^3 modos de escolher seus naipes.

24a. Essas funções são bijetoras.

24b. Um elemento de B tem sua imagem inversa formada por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias.

24c. Há duas possibilidades: um elemento de B tem sua imagem inversa formada por três elementos e os demais têm imagens inversas unitárias ou dois elementos de B têm imagens inversas formadas por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias.

26. Escolhida a ordem em que cada casal vai se sentar (marido à direita, mulher à esquerda ou vice-versa), você tem que formar uma fila com 3 casais e 4 lugares vazios.

27. Arrume primeiramente apenas as vogais e depois entremeie as consoantes.

28. Marque, no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, com o sinal $+$ os elementos selecionados para o subconjunto e com o sinal $-$ os elementos não selecionados. Você

Observe que, numerando as linhas e colunas a partir de zero, C_n^p aparece na linha n e coluna p .

A propriedade que permite construir rapidamente o triângulo é a relação de Stifel³, que diz que somando dois elementos lado a lado no triângulo obtém-se o elemento situado embaixo do da direita. Assim, a próxima linha do triângulo seria

$$1, \quad 1+5 = 6, \quad 5+10 = 15, \quad 10+10 = 20, \quad 10+5 = 15, \quad 5+1 = 6, \quad 1.$$

Relação de Stifel. $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Prova. Considere um conjunto A de $n + 1$ elementos, um dos quais é x . O número de subconjuntos de A com $p + 1$ elementos é C_{n+1}^{p+1} . Esse número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais x não figura, C_n^{p+1} , com o número de subconjuntos nos quais x figura, C_n^p , cqd. \square

Outra relação importante é o:

Teorema das Linhas. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Prova. Basta observar que os dois membros são iguais ao número de subconjuntos de um conjunto com n elementos. \square

Exemplo 1. Um palácio tem 7 portas. De quantos modos pode ser aberto o palácio?

Solução. Há C_7^1 modos de abrir o palácio abrindo uma só porta, C_7^2 modos de abrir o palácio abrindo duas portas, etc.

A resposta é

$$C_7^1 + C_7^2 + \dots + C_7^7 = 2^7 - C_7^0 = 128 - 1 = 127. \quad \square$$

Finalmente, a relação que declara que, em cada linha, elementos equidistantes dos extremos são iguais.

Relação das Combinações Complementares. $C_n^p = C_n^{n-p}$.

³Stifel, Michael (1487?-1567), algebrista alemão.

Prova. Basta observar que o número de modos de escolher, entre n objetos, p objetos para usar é igual ao de escolher $n - p$ objetos para não usar. \square

4.4 O Binômio de Newton⁴

A fórmula do binômio de Newton é a fórmula que dá o desenvolvimento de $(x + a)^n$.

Para obtê-la basta multiplicar

$$(x + a) \cdot (x + a) \cdot \dots \cdot (x + a).$$

O termo genérico do produto é obtido tomando em p dos fatores, $p = 0, 1, 2, \dots, n$, a segunda parcela e tomando nos restantes $n - p$ fatores a primeira parcela. Como isso pode ser feito de C_n^p modos, o termo genérico do produto é $C_n^p a^p x^{n-p}$ e

$$\begin{aligned} (x + a)^n &= \sum_{p=0}^n C_n^p a^p x^{n-p} \\ &= C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n a^n x^0. \end{aligned}$$

Exemplo 1. Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^7.$$

Solução. O termo genérico do desenvolvimento é

$$C_7^p \left(\frac{-1}{x}\right)^p (x^4)^{7-p} = C_7^p (-1)^p x^{28-5p}.$$

O termo em x^3 é obtido se $28 - 5p = 3$, ou seja, se $p = 5$.

O termo procurado é $C_7^5 (-1)^5 x^3 = -21x^3$. O coeficiente é -21 . \square

Exemplo 2. Determine o termo máximo do desenvolvimento de

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{50}.$$

⁴Newton, Isaac (1642-1727), matemático e físico inglês.

Solução. O termo genérico do desenvolvimento é

$$t_p = C_n^p a^p x^{n-p} = C_{50}^p \left(\frac{1}{3}\right)^p.$$

Vamos descobrir para que valores de p os termos crescem. Para isso, calculamos

$$\begin{aligned} t_p - t_{p-1} &= C_{50}^p \left(\frac{1}{3}\right)^p - C_{50}^{p-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} \\ &= \frac{50!}{p!(50-p)!3^p} - \frac{50!}{(p-1)!(51-p)!3^{p-1}} \\ &= \frac{50!}{(p-1)!(50-p)!3^{p-1}} \left(\frac{1}{3p} - \frac{1}{51-p} \right) \\ &= \frac{50!}{(p-1)!(50-p)!3^{p-1}} \left(\frac{51-4p}{3p(51-p)} \right). \end{aligned}$$

Temos $t_p - t_{p-1}$ positivo, isto é, $t_p > t_{p-1}$ quando $51 - 4p > 0$ e temos $t_p < t_{p-1}$ quando $51 - 4p < 0$.

Portanto, $t_p > t_{p-1}$ quando $p \leq 12$ e $t_p < t_{p-1}$ quando $p \geq 13$. Logo, $t_0 < t_1 < \dots < t_{11} < t_{12} > t_{13} > t_{14} > \dots > t_{50}$. O termo máximo é

$$t_{12} = \frac{C_{50}^{12}}{3^{12}}.$$

Exercícios

- Com 7 vitaminas diferentes, quantos coquetéis de duas ou mais vitaminas podemos formar?
- Determine p para que seja máximo:
 - C_{10}^p
 - C_{21}^p
- Determine o termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}.$$

4. Determine o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1-x)^2 \cdot (x+2)^n$.
5. Determine o valor da soma $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^nC_n^n$.
6. Se $(1+x+x^2)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{2n}x^{2n}$, determine o valor de:
 - a) $A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{2n}$
 - b) $A_0 + A_2 + A_4 + \dots + A_{2n}$.
7. Determine o termo máximo do desenvolvimento de

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{100}.$$
8. Prove que $101^{50} > 99^{50} + 100^{50}$.

Sugestões aos Exercícios

3. O termo independente de x é o termo em x^0 .
5. A soma pedida é o desenvolvimento de um binômio de Newton.
- 6a. Faça $x = 1$.
- 6b. Faça $x = -1$.
8. $101 = 100 + 1$ e $99 = 100 - 1$. O melhor modo de mostrar que $a > b$ é mostrar que $a - b$ é positivo.

4.5 Sobre o Ensino de Combinatória

1. Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as idéias gerais e torna as coisas mais complicadas. Quem troca o princípio básico da contagem por fórmulas de arranjos, permutações e combinações tem dificuldade de resolver até mesmo o nosso segundo exemplo (o das bandeiras).
2. Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.

3. Você quer mostrar que é o bom ou quer que seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema. Sendo mais específico: no exemplo 6, da seção de princípios básicos, foram apresentados dois métodos e um truque. Não se deve mostrar o truque antes de mostrar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos.

Combinatória não é difícil; impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos.

4. Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contado indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos.

Por exemplo, no exemplo 7 da parte de combinações, a primeira solução apresentada é melhor do que a segunda para educar o raciocínio do aluno.

5. Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou de combinações? Como se resolveriam, por exemplo, os problemas dos exemplos 2, 3 e 5 da seção 2.1 e os problemas propostos números 10, 14, 17 e 19 da mesma seção? Aliás, para que servem arranjos?