

Fractales et dimension de Hausdorff

Mechineau Alexandre

16 mars 2016

Table des matières

I	Introduction sur les fractales	2
II	Définitions des fractales	4

Première partie

Introduction sur les fractales

Le mot fractale a été introduit par Benoît Mandelbrot en 1974 pour décrire des objets dits brisés ou irréguliers, à la différence des objets géométriques classiques tels que les droites, les sphères, ... Cependant, ces objets avaient déjà été “découverts” et cela dès l’antiquité par Apollonius de Pergée avec la figure nommée “la baderne d’Apollonius”

Image

On remarque que si l’on agrandit une zone de la fractale, le même motif se répète. C’est une propriété des fractales que l’on verra par la suite.

Par la suite, en 1520, Dürer dessine une fractale qui sera nommée Pentagone de Dürer.

image

Il existe trois manières de définir une fractale :

1. Par un système de fonction itérée (IFS)
2. Par une relation de récurrence
3. Par des processus stochastiques et non déterministes

Dans ce projet, je vais étudier les fractales de type IFS. C’est à dire que je définit un ensemble de départ E et j’applique mon ensemble de fonction définissant ma fractale sur E . L’ensemble des points générés converge alors vers la fractale désirée.

Je vais donc, alors étudier dans un premier temps les fonctions définissant une fractale et l’ensemble de départ. Puis, dans un second temps, j’étudierais la **dimension de Hausdorff** permettant de calculer la dimension d’une fractale. Enfin, je présenterais de manière succincte, comment j’ai écrit le programme permettant de tracer des fractales.

Deuxième partie

Définitions des fractales

Definition 1. *Un objet auto-similaire (self-similarity) est un objet qui conserve sa forme qu'elle que soit l'échelle.*

Definition 2. *Une fractale est un ensemble auto-similaire.*

Definition 3. *Soit $P \in \mathbb{R}^n$, soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$, $P \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(P) \\ f_2(P) \\ \vdots \\ f_i(P) \end{pmatrix}$ est contractante*

$\iff \forall j \in \llbracket 1, i \rrbracket, \quad f_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ est contractante}$

Definition 4. *Soit S une similitude alors l'image d'un segment est un segment.*

Démonstration. Soit S une similitude de rapport k , soit AB un segment $A, B \in \mathbb{R}^n$ muni de la distance d alors $S(A)=A'$ et $S(B)=B'$.

On a donc $d(A', B') = k \cdot d(A, B)$.

La longueur du segment $A'B'$ est proportionnelle à la longueur de AB .

Donc les deux segments sont semblables. □

Proof of important theorem. Here is my important proof □