Rapport d'avancement

Première partie

On considère le problème aux limites donné sur le domaine $\Omega = [0, L] \times [0, D]$

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \dfrac{1}{\rho}\nabla p = f & dans \quad \Omega \\ divu = 0 & dans \quad \Omega \\ u = \phi_1 & sur \quad \Gamma \\ \dfrac{1}{\rho}pn - Nu = \phi_2 & sur \quad \Gamma \end{cases}$$

où $\partial\Omega = \Gamma \cup \Sigma$, $Nu = \nu(\nabla u + \nabla u^T)n$.

On s'intéresse à résoudre ce problème de reconstruction de données sur la partie du bord Σ par la méthode itérative avec relaxation qui consiste à résoudre itérativement :

• Pour les itérations k paires :

$$\begin{cases} \nu\Delta u_1^k = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp^k}{dx} & \Omega \\ \nu\Delta u_2^k = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp^k}{dy} & \Omega \\ \dfrac{du_1^k}{dx} + \dfrac{du_2^k}{dy} = 0 & \Omega \\ u_1^k(0,y) = 0\,, \left(\dfrac{du_1^k}{dy} + \dfrac{du_2^k}{dx}\right)(0,y) = 0 & 0 \le y \le D \\ u_1^k(L,y) = 0\,, \left(\dfrac{du_1^k}{dy} + \dfrac{du_2^k}{dx}\right)(L,y) = 0 & 0 \le y \le D \\ u_1^k(x,0) = 0\,, \left(-p^k + 2\dfrac{du_2^k}{dy}\right)(x,0) = 0 & 0 \le x \le L \\ -\left(\dfrac{du_1^k}{dy} + \dfrac{du_2^k}{dx}\right)(x,D) = \varphi_1^k(x)\,, u_2^k(x,D) = \varphi_2^k(x) & 0 \le x \le L \end{cases}$$

où φ_1^0, φ_2^0 sont arbitraires, $\varphi_1^k(x) = \theta\left(-\dfrac{du_1^{k-1}}{dy} - \dfrac{du_2^{k-1}}{dx}\right)(x,D) + (1-\theta)\varphi_1^{k-1}(x)$

$\varphi_2^k = \theta u_2^{k-1}(x,D) + (1-\theta)\varphi_2^{k-1}(x)$ pour $k \ge 2$

• Pour les itérations k impaires :

$$\begin{cases} \nu \Delta u_1^k = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp^k}{dx} & \Omega \\ \nu \Delta u_2^k = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp^k}{dy} & \Omega \\ \dfrac{du_1^k}{dx} + \dfrac{du_2^k}{dy} = 0 & \Omega \\ u_1^k(0,y) = 0 \;, \left(\dfrac{du_1^k}{dy} + \dfrac{du_2^k}{dx}\right)(0,y) = 0 & 0 \leq y \leq D \\ u_1^k(L,y) = 0 \;, \left(\dfrac{du_1^k}{dy} + \dfrac{du_2^k}{dx}\right)(L,y) = 0 & 0 \leq y \leq D \\ \left(\dfrac{du_1^k}{dy} + \dfrac{du_2^k}{dx}\right)(x,0) = 0 \;, u_2^k(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq L \\ u_1^k(x,D) = h_1^k(x) \;, \left(p^k - 2\dfrac{du_2^k}{dy}\right)(x,D) = h_2^k(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

où
$$h_1^k(x) = u_1^{k-1}(x,D)$$
$$h_2^k(x) = \left(p^{k-1} - 2\frac{du_2^{k-1}}{dy}\right)(x,D) \text{ pour } k \geq 1.$$

La solution analytique des équations de Stokes par la méthode de la séparation des variables :

$$u_1 = \quad (a\, cos(\omega x) + b\, sin(\omega x)) \left[(\alpha\, e^{\omega y} + \beta\, e^{-\omega y}) + \tfrac{\omega}{2} y (c\, e^{\omega y} - d\, e^{-\omega y})\right]$$

$$u_2 = \quad (b\, cos(\omega x) - a\, sin(\omega x)) \left[(-\alpha + \tfrac{c}{2}) e^{\omega y} + (\beta - \tfrac{d}{2})\, e^{-\omega y} - \tfrac{\omega}{2} y (c\, e^{\omega y} + d\, e^{-\omega y})\right]$$

$$p = \quad \omega\, (a\, sin(\omega x) - b\, cos(\omega x))\, (c\, e^{\omega y} + d\, e^{-\omega y})$$

En utilisant l'algorithme décrit ci-dessus on trouve

- Pour k paire

$$u_1 = \quad \textstyle\sum_n B_n^k \left(2\beta_n^k sh(w_n y) + w_n y cosh(w_n y)\right) sin(w_n x)$$

$$u_2 = \quad \textstyle\sum_n B_n^k \left(-2\beta_n^k cosh(w_n y) + cosh(w_n y) - w_n y sh(w_n y)\right) cos(w_n x)$$

$$p = \quad \textstyle\sum_n -2B_n^k w_n sh(w_n y) cos(w_n x)$$

- Pour k impaire

$$u_1 = \quad \textstyle\sum_n A_n^k \left(2\alpha_n^k cosh(w_n y) + w_n y sh(w_n y)\right) sin(w_n x)$$

$$u_2 = \quad \textstyle\sum_n A_n^k \left(-2\alpha_n^k sh(w_n y) + sh(w_n y) - w_n y cosh(w_n y)\right) cos(w_n x)$$

$$p = \quad \textstyle\sum_n -2A_n^k w_n cosh(w_n y) cos(w_n x)$$

où

$w_n = \frac{n\pi}{L},\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\varphi_1(x) = \sum_n K_n sin(w_n x),\ Kn = \frac{2}{L}\int_0^L \psi_1 sin(w_n x) dx$

$\varphi_2(x) = \sum_n L_n cos(w_n x),\ Ln = \frac{2}{L}\int_0^L \psi_2 cos(w_n x) dx$

pour $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$B_n^{2m} = \frac{(2L_n w_n - K_n)}{2w_n cosh(w_n D)} (\theta tgh^2(w_n D) + (1-\theta))^m,$$

$$\beta_n^{2m} = \frac{-K_n}{2(2w_nL_n - K_n)} - \frac{w_nDtgh(w_nD)}{2} + \frac{w_nD}{2cosh(w_nD)sh(w_nD)} \left(\frac{2m\theta tgh^2(w_nD)}{\theta tgh^2(w_nD) + (1-\theta)} \right),$$

pour $k = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$:

$$A_n^{2m} = \frac{(2L_nw_n - K_n)}{2w_ncosh(w_nD)}(\theta tgh^2(w_nD) + (1-\theta))^m tgh(w_nD),$$

$$\alpha_n^{2m} = \frac{-K_n}{2(2w_nL_n - K_n)} - \frac{w_nDtgh(w_nD)}{2} + \frac{w_nD}{2cosh(w_nD)sh(w_nD)} \left(\frac{(2m+1)\theta tgh^2(w_nD) + (1-\theta)}{\theta tgh^2(w_nD) + (1-\theta)} \right),$$

En utilisant l'identité de Parseval on montre que

$$\|u_1^k\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{L}{2} \sum_n \quad \frac{\left[\left(\frac{2L_nw_n - K_n}{2w_ncosh(w_nD)} \right)^2 \int_0^D (2\beta_n^{2m} sh(w_ny) + w_nycosh(w_ny))^2 dy) \right]}{(\theta tgh^2(w_nD) + (1-\theta))^{2m}}$$

$$\begin{aligned}
|\theta tgh^2(w_nD) + (1-\theta)| \leq 1 \quad & \Longleftrightarrow -1 \leq \theta tgh^2(w_nD) + (1-\theta) \leq 1 \\
& \Longleftrightarrow 0 \leq \theta\,(1 - tgh^2(w_nD)) \leq 2 \\
& \Longleftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{2}{1 - tgh^2(w_nD)}
\end{aligned}$$

Deuxième partie

Numérique

On considère le problème de reconstruction d'une inclusion ω immergée dans un fluide contenu dans un plus grand domaine borné Ω, par une mesure sur le bord $\partial\Omega$. Le mouvement du fluide est gouverné par les équations de Stokes. On étudie le problème inverse de reconstruction de ω grâce aux méthodes d'optimisation de forme en définissant la fonctionnelle cout de Kohn-Vogelius.
Sur un ouvert Ω borné connexe et Lipschitzien de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega = \Sigma$. Pour $\omega \in O_{ad}$ $\partial\omega = \Gamma$, on considère le problème aux limites surdéterminé de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = 0 & dans \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \\ divu = 0 & dans \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \\ u = 0 & sur \quad \Gamma \\ u = f & sur \quad \Sigma \\ -\mu\partial_n u + pn = g & sur \quad \Sigma \end{cases}$$

On considère la fonctionnelle cout de Kohn-Vogelius suivante :

$$J(\omega) := \frac{1}{2}\mu \int_{\Omega\setminus\bar{\omega}} |\nabla(u - v)|^2,$$

où $(u,p) \in H^1(\Omega \setminus \bar{\omega}) \times L^2_0(\Omega \setminus \bar{\omega})$ est l'unique solution du problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = 0 & dans \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \\ divu = 0 & dans \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \\ u = 0 & sur \quad \Gamma \\ u = f & sur \quad \Sigma \end{cases}$$

et $(v,q) \in H^1(\Omega \setminus \bar{\omega}) \times L^2(\Omega \setminus \bar{\omega})$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -\mu\Delta v + \nabla q = 0 & dans \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \\ divv = 0 & dans \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \\ v = 0 & sur \quad \Gamma \\ -\mu\partial_n v + qn = g & sur \quad \Sigma \end{cases}$$

La dérivée de la fonctionnelle en ω dans la direction V s'écrit

$$DJ(\omega).V = -\int_{\partial\omega} (\mu(\partial_n u - \partial_n v) - (pn - qn)).\partial_n u V_n + \frac{1}{2}\mu \int_{\partial\omega} |\nabla u - \nabla v|^2 V_n$$

où le champ de déformation V est solution du problème au limite

$$\begin{cases} -\Delta V + V = 0 & dans \quad \Omega \setminus \bar{\omega} \\ V = 0 & sur \quad \partial\Omega \\ \partial_n V = -\nabla J & sur \quad \partial\omega \end{cases}$$

Pour reconstruire numériquement l'objet ω solution du problème d'optimisation, nous avons utilisé l'algorithme suivant

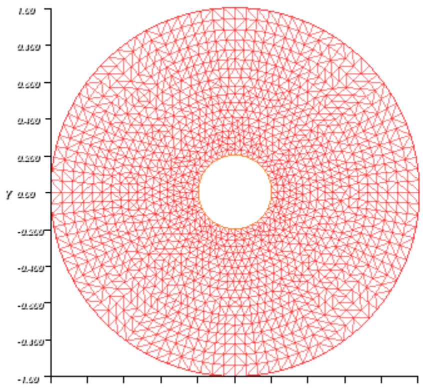
- Choisir un domaine initial ω_0, une precision ε et un nombre maximale d'itérations N_{max},
- initialiser le nombre d'itération $k \leftarrow 0$,
- tant que $\|\nabla J(\omega_k)\| \geq \varepsilon$ et le nombre d'itérations$\leq N_{max}$ faire,
- Résoudre le problème de Dirichlet, le problème de Neumann et le problème du champ de déformation sur ω_k,
- Calculer $\nabla J(\omega_k)$,
- Déplacer les coefficients associés à la forme : $\omega_{k+1} = (I + \alpha_k V)\omega_k$.

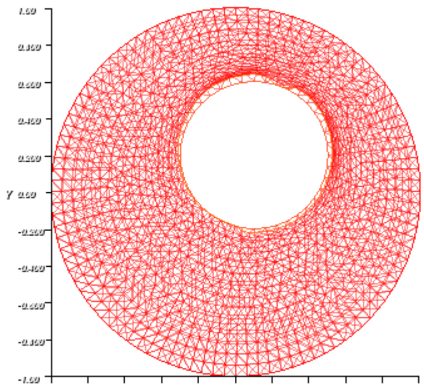
Le pas optimal est déterminé à chaque itération à l'aide de l'algorithme de recherche linéaire de Frank-Wolf.

Dans l'exemple suivant, nous supposons que le domaine Ω est le disque unité de $\mathbb{R}^2$. On considère une donnée g sur Σ, la donnée f est obtenue par la formule $v|_\Sigma = f$ où v est la solution du problème de Neumann sur le domaine exact avec Γ donné. Une fois f est construite, on essai de retrouver Γ à partir de f et g en partant d'un domaine initial quelconque.

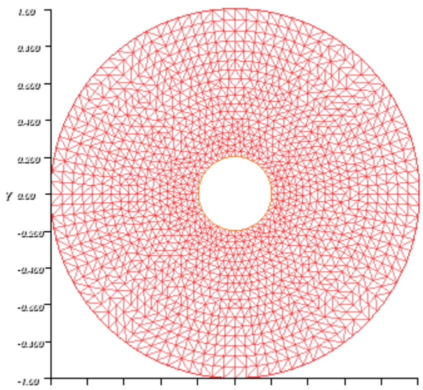
Les simulations numériques sont représentés dans les figures suivantes.

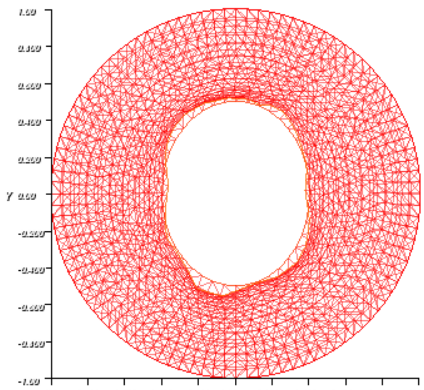
Domaine initial — Domaine approché et domaine exact





$J(\omega) = 6.38772$
$\nabla J(\omega) = 0.990476$
$iterations = 42$





$J(\omega) = 5.64227$
$\nabla J(\omega) = 1.25082$
$iterations = 40$

FIGURE 1 –