

# Méthode de volumes finis pour l'équation de Poisson

**Mazen SAAD**

Ecole Centrale de Nantes  
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Cursus MACS, X3MA040

Nantes 2020

## Plan

- ① Méthode de volumes finis pour l'équation de Poisson
- ② Méthode de volumes finis pour l'équation de Poisson  
Résultats de compacité et théorème de Kolmogorov
- ③ Théorème de Lax-Wendroff sur un maillage triangulaire pour une équation hyperbolique non linéaire
- ④ Schémas combinés EF-VF pour une équation de diffusion-convection anisotrope
- ⑤ VF équation parabolique

- ① Maillage orthogonale admissible
- ② Construction du schéma numérique
  - Le schéma VF4
- ③ Outils d'analyse pour les méthodes volumes finis
- ④ Convergence du schéma VF4

# Maillage

Le but de ce chapitre est d'introduire la méthode des volumes finis pour l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(\sigma) = 0, \sigma \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

et  $f \in L^2(\Omega)$ .

Il s'agit de décrire la méthode des volumes finis sur le maillage le plus simple appelé **Maillage orthogonale**.

- méthode de base sur un maillage particulier
- outils d'analyse discrète
- même démarche pour analyser autres schémas



Eymard, Gallouet, Herbin . Finite volume method. 2000.



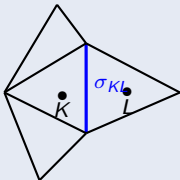
B. Andreianov, F. Boyer,

## Definition (Maillage orthogonale admissible)

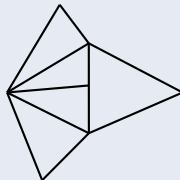
Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal borné de  $\mathbb{R}^2$ . Un maillage  $\mathcal{T}_h$  est admissible au sens des volumes finis si

$\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$ , les mailles  $K$  sont convexes et disjointes deux à deux.

- Le maillage est régulier c'est à dire  $\forall K, L \in \mathcal{T}_h$ , on suppose que  $\partial K \cap \partial L$  est un côté de chaque volume de contrôle. On note  $\sigma_{KL} = \partial K \cap \partial L$



maillage admissible



maillage inadmissible

- $\forall K \in \mathcal{T}_h$ , on associe un point  $x_K \in K$  (centre de  $K$ ). On note  $\mathcal{N}(K)$  l'ensemble des voisins de  $K$ :

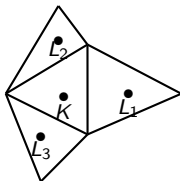
$$\mathcal{N}(K) = \{L \in \mathcal{T}_h \text{ telle que } \sigma_{KL} \text{ est une interface à } K \text{ et } L\}$$

$$\mathcal{N}_{int}(K) = \text{ensemble des voisins de } K \text{ localisés à l'intérieur } \mathcal{T}_h$$

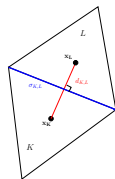
$$\mathcal{N}_{ext}(K) = \text{ensemble des interfaces de } K \text{ appartenant à } \partial\Omega = \partial K \cap \partial\Omega$$

On note de plus,

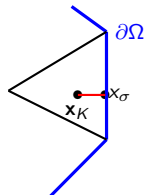
- ①  $\forall L \in \mathcal{N}_{int}(K)$ , on note  $d_{KL} = \text{distance}(x_K, x_L) = \|x_K x_L\|$
- ②  $\forall \sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)$ , on note  $d_{K\sigma} = \text{distance}(x_K, x_\sigma)$
- ③  $\forall K \in \mathcal{T}$ , on note  $|K| = \text{mesure de } K$ .



Les voisins de  $K$  sont :  $L_1, L_2, L_3$

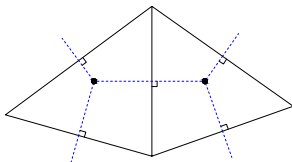


$$d_{KL} = \|x_K x_L\|$$



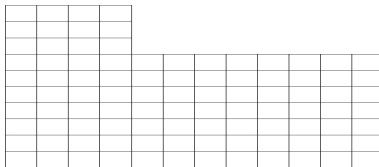
$$d_{K\sigma} = \|x_K x_\sigma\|$$

- Le maillage est **orthogonale** si pour tout  $L \in \mathcal{K}$ , on impose que l'interface  $\sigma_{KL}$  est orthogonale au segment joignant les centres  $x_K$  et  $x_L$ .

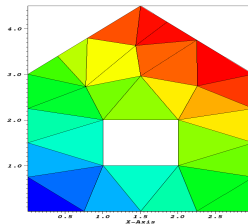
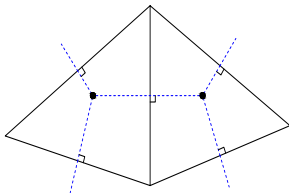


Exemples de maillage admissible.

- Maillage rectangulaire. C'est un maillage admissible, mais la géométrie est limitée.

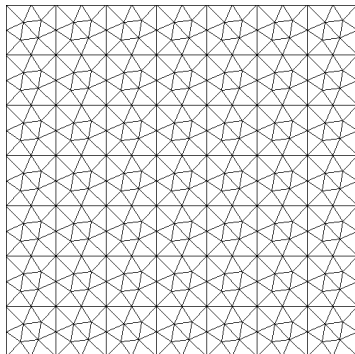


- Maillage triangulaire (actuaangle). Tous les triangles ont d'angles aigus les trois médiatrices sont concurrentes au centre du triangle circonscrit et le centre du cercle est à l'intérieur du triangle.



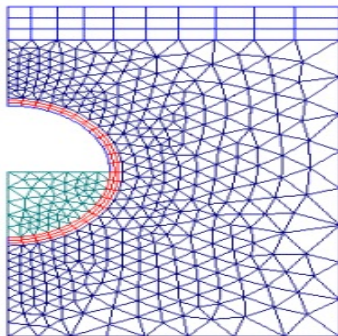
Un maillage formé par des triangles rectangles est orthogonale mais le centre est sur l'hypoténuse!!

## Exemples de maillage admissible.





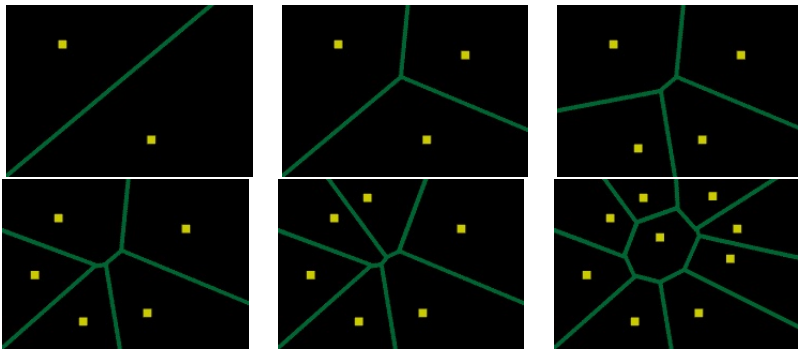
## Exemples de maillage admissible.



Les maillages admissibles

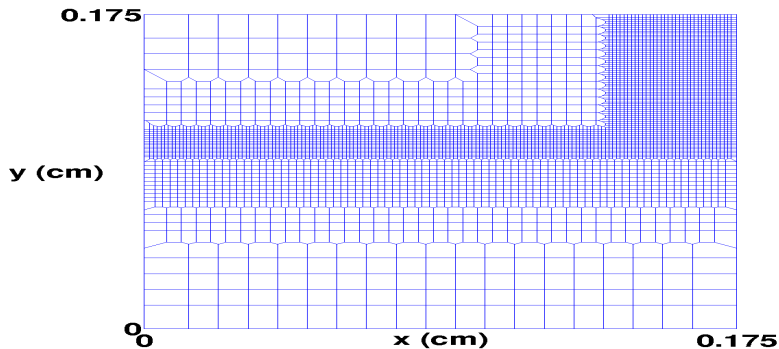
Exemples de maillage admissible.

Construction de **maillage de type Voronoi**. il s'agit d'un maillage distribué c'est-à-dire on se donne un ensemble de points  $(x_K)_K$  et on construit le maillage pour qu'il soit orthogonale.



La région de Voronoi est définie comme l'ensemble des points les plus proches de son centre que les autres centres. La région de Voronoi est construite en considérant l'intersection des demi-espaces formés par la médiatrice entre les centres.

Exemples de maillage admissible.



# Construction du schéma numérique

La méthode des **volumes finis** consiste à intégrer l'équation sur des volumes de contrôle et d'approcher les flux aux interfaces.

**Le maillage primal** est le maillage formé par volumes de contrôles, par exemple des triangles ou quadrangles ou ...

**Le maillage dual** est un autre maillage de  $\Omega$  formé à partir du maillage primal.

Il est à noter que le calcul de la solution sur un maillage primal ne convient pas en général pour l'approximation des flux.

Les volumes de contrôle ne sont pas forcément les mailles primales. Soit une triangulation de  $\Omega$  telle que  $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K}$

Voici quelques exemples :

- ① Volumes finis centre (Cell-Center).
- ② Volumes finis sommet (Cell Vertex).
- ③ Volumes finis interface (Celle Edge)

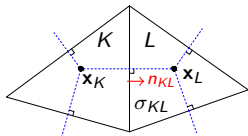
# Le schéma VF4

C'est un schéma volumes finis à 4 points sur un maillage triangulaire. On considère un volume de contrôle  $K$ , on intègre l'équation sur  $K$ , il vient :

$$-\int_K \Delta u(x) dx = \int_K f(x) dx$$

on applique la formule de Green :

$$-\int_{\partial K} \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\sigma_{KL}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{KL} d\sigma = \int_K f(x) dx$$



$\mathbf{n}_{KL}$  : normale orientée de  $K$  vers  $L$

$\mathbf{n}_{KL} = -\mathbf{n}_{LK}$

On note  $f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f(x) dx$  la moyenne de  $f$  sur  $K$ . Il reste à approcher de façon constante le flux  $\int_{\sigma_{KL}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{KL} d\sigma$ .

Grâce à la condition d'orthogonalité, on a  $\overrightarrow{x_K x_L} = d_{KL} \overrightarrow{n_{KL}}$

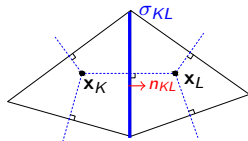
# Le schéma VF4

On peut approcher la dérivée normale de façon très simple

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}_{KL} = \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{KL}} + \mathcal{O}(h)$$

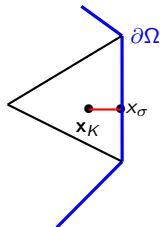
$$\int_{\sigma_{KL}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{KL} d\sigma \approx \frac{|\sigma_{KL}|}{d_{KL}} (u(x_L) - u(x_K))$$

Cette formule est valable si le triangle  $L \in \mathcal{N}(K)$  existe  $\iff L \in \mathcal{N}_{int}$ .



Pour traiter les **conditions aux limites**, on impose  $u = 0$  sur le bord, c'est à dire

$$\int_{\sigma \in \partial K \cap \partial \Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K\sigma} d\sigma \approx \frac{|\sigma_{K\sigma}|}{d_{K\sigma}} (0 - u(x_K))$$



# Le schéma VF4

Enfin, on note  $u_K$  une approximation de la solution exacte  $u(x_K)$

$$u_K \approx u(x_K)$$

La méthode VF4 s'écrit : Chercher  $u_h = (u_K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in \mathbb{R}^{\text{card} \mathcal{T}_h}$  telle que

## Schéma VF4

$$\sum_{L \in \mathcal{N}_{\text{int}}(K)} \frac{|\sigma_{KL}|}{d_{KL}} (u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{N}_{\text{ext}}(K)} \frac{|\sigma_{K\sigma}|}{d_{K\sigma}} u_K = |K| f_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (2)$$

# Système linéaire

Coefficient de transmissibilité  $\tau_{KL} > 0$ .

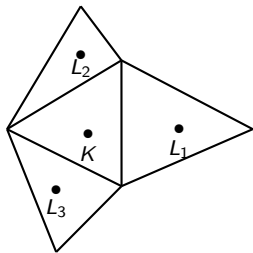
$$\tau_{KL} = \frac{|\sigma_{KL}|}{d_{KL}} \text{ si } L \in \mathcal{N}_{int}(K), \text{ et } \tau_{K\sigma} = \frac{|\sigma_{K\sigma}|}{d_{K\sigma}} \text{ pour } \sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)$$

Le schéma VF4 se réduit à un système linéaire sous la forme :

$$A_h U_h = f_h$$

où  $U_h = (u_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ ,  $f_h = (|K|f_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$

$A_h$  est une matrice creuse où le nombre d'éléments non nuls par ligne est le nombre des voisins.



$$A = (a_{KL})_{L, K \in \mathcal{T}_h}$$

$$a_{KL} = \begin{cases} -\tau_{KL} & \text{si } L \in \mathcal{N}_{int}(K) \\ 0 & \text{si } L \notin \mathcal{N}_{int}(K) \end{cases}$$

$$a_{KK} = \sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)} \tau_{KL} + \sum_{\sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)} \tau_{K\sigma}$$

Les seuls coefficients non nuls dans la ligne  $K$  sont :  $a_{KK}$ ,  $a_{KL_1}$ ,  $a_{KL_2}$ ,  $a_{KL_3}$ .



# Système linéaire

## Proposition (Propriétés de $A_h$ )

- ①  $A_h$  symétrique, à diagonale fortement dominante, définie positive
- ②  $A_h$  est monotone c'est à dire  $A_h^{-1} \geq 0$ .
- ③ (Principe du maximum discret). Si  $f_h \geq 0$ , alors  $U_h \geq 0$ .

# Retour au problème de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(\sigma) = 0, \sigma \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

**Solution faible.** Soit  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\exists ! u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  t.q.

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Pour montrer ce résultat, on a besoin d'effectuer les étapes suivantes :

- **Intégration par parties.** Multiplier l'équation par une fonction test  $v$  et intégrer par parties.
- **Inégalité de Poincaré :**

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

- Utiliser le théorème de **Lax Milgram**.

Pour montrer la convergence du schéma VF4, on est amené à effectuer les mêmes étapes mais sous forme discrète. Ainsi, des outils d'analyse discrète sont à définir.

# Espaces discrets

On définit  $L_h \in L^2(\Omega)$  l'espace de fonctions constants sur chaque volume  $K \in \mathcal{T}_h$

$$L_h = \{v_h \in L^2(\Omega), \quad v_h(x) = v_K \text{ p.p. } x \in K\}.$$

On lui associe le produit scalaire suivant :

$$\langle u_h, v_h \rangle_{L_h} = \sum_K |K| u_K v_K \quad \text{et} \quad \|u_h\|_{L_h} = \left( \sum_K |K| |u_K|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

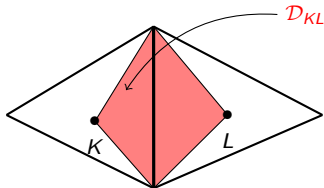
Une fonction  $v_h \in L_h$  est une fonction constante de maille, et écrire  $\nabla v_h(x)$  n'a pas de sens.

**Gradient discret.** Une dérivée est une variation et pour l'approcher il faut au moins deux points.

On définit  $\mathcal{D}_{KL}$  le diamond associé au segment  $\sigma_{KL}$  (**maillage dual**).

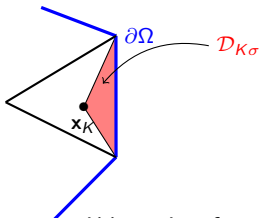
# Espaces discrets : le gradient discret

On définit le gradient discret  $\nabla_h v_h \in \mathbb{R}^\ell$ ,  $\ell \geq 2$ , associé à la fonction  $v_h$ , constant par diamond.



$$\nabla_h v_h(x) = \ell \frac{v_L - v_K}{d_{KL}} \mathbf{n}_{KL} \text{ si } x \in \mathcal{D}_{KL}$$

$\mathcal{D}_{KL}$  est formé par les sommets de  $\sigma_{KL}$  et les deux centres  $x_K, x_L$ .  $\mathcal{D}_{KL}$  est associé à  $\sigma_{KL}$  à l'intérieur de  $\Omega$



$$\nabla_h v_h(x) = \ell \frac{v_\sigma - v_K}{d_{K\sigma}} \mathbf{n}_{K\sigma} \text{ si } x \in \mathcal{D}_{K\sigma}$$

Ici,  $v_\sigma = 0$ .

$\mathcal{D}_{K\sigma}$  est associé à une interface du bord

# Espaces discrets : le gradient discret

La mesure du diamond  $\mathcal{D}_{KL} = \frac{1}{\ell} d_{KL} |\sigma_{KL}|$ .

On note

$$\mathcal{D}_{int} = \{\mathcal{D}_{KL}, K \in \mathcal{T}_h \text{ et } L \in \mathcal{N}_{int}(K)\}, \quad \mathcal{D}_{ext} = \{\mathcal{D}_{K\sigma}, K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)\}.$$

On a

$$\overline{\Omega} = \cup_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_{int}} \overline{\mathcal{D}_{KL}} \cup \cup_{\sigma_{K\sigma} \in \mathcal{D}_{ext}} \overline{\mathcal{D}_{K\sigma}}.$$

$$\|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{\mathcal{D}_{KL}} \int_{\mathcal{D}_{KL}} |\nabla_h v_h|^2 dx = \ell^2 \sum_{\mathcal{D}_{KL}} |\mathcal{D}_{KL}| \frac{|v_L - v_K|^2}{|d_{KL}|^2} = \ell \sum_{\mathcal{D}_{KL}} \tau_{KL} |v_L - v_K|^2$$

avec la convention :  $L = \sigma$  si  $\sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)$  et  $v_\sigma = 0$ . On note

$$\|v_h\|_{1,h}^2 = \sum_{\mathcal{D}_{KL}} \tau_{KL} |v_L - v_K|^2.$$

On verra plus loin que  $(\nabla_h v_h)_h$  converge faiblement dans  $L^2(\Omega)$ .

# Espaces discrets : propriétés

On va montrer quelques propriétés sur la solution discrète :

- Intégration par parties discrètes
- Convergence faible des gradients discrets
- Estimation d'énergie
- Convergence
- Estimation de l'erreur de convergence

# Intégration par partie discrete

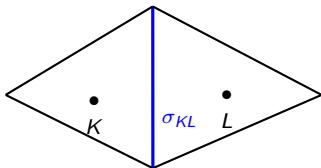
## Lemme (Intégration par parties discrètes 1)

Soit  $F_{KL} \in \mathbb{R}$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$  et  $L \in \mathcal{N}_{int}(K)$  telle que  $F_{KL} = -F_{LK}$  (antisymétrique).

Soit  $\phi_K \in \mathbb{R}$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ . Alors

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)} F_{KL} \phi_K = \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_{int}} F_{KL} (\phi_K - \phi_L)$$

**Preuve.** La somme  $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)}$  est reorganisée par interface. Chaque interface est vue deux fois. Il y a deux contributions pour l'interface  $\sigma_{KL}$ .



Contribution de  $K$  vers  $L$  :  $F_{KL} \phi_K$

Contribution de  $L$  vers  $K$  :  $F_{LK} \phi_L$

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)} F_{KL} \phi_K &= \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_{int}} (F_{KL} \phi_K + F_{LK} \phi_L) \\ &= \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_{int}} F_{KL} (\phi_K - \phi_L) \end{aligned}$$

car  $F_{KL} = -F_{LK}$ .

# Intégration par partie discrète

## Lemme (Intégration par parties discrètes 2)

Soit  $F_{KL} = a_{KL}(u_K - u_L)$ , avec  $a_{KL} = a_{LK}$  (symétrique). Soit  $\phi_K \in \mathbb{R}$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ . Alors

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)} a_{KL}(u_K - u_L)\phi_K = \sum_{\sigma_{KL}} a_{KL}(u_K - u_L)(\phi_K - \phi_L)$$

**Preuve.** On a

$$F_{LK} = a_{LK}(u_L - u_K) = -a_{KL}(u_K - u_L) = -F_{KL}.$$

**Remarques.**

- C'est la version discrète de  $-\int_{\Omega} \operatorname{div}(a(x)\nabla u)\phi = \int_{\Omega} a(x)\nabla u \cdot \nabla \phi$  (on verra plus loin comment définir la divergence discrète).
- La formule est générale et donne dans le cas des **conditions aux limites Dirichlet** :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} F_{KL}\phi_K &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)} F_{KL}\phi_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)} F_{K\sigma}\phi_K \\ &= \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_{int}} F_{KL}(\phi_K - \phi_L) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)} F_{K\sigma}\phi_K \end{aligned}$$

- Si  $\phi_{\sigma} = 0$  pour  $\sigma \in \mathcal{D}_{ext}$ , on écrit abusivement :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} F_{KL}\phi_K = \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} F_{KL}(\phi_K - \phi_L).$$



# Espaces discrets : dualité

Soit  $\vec{G}_{KL} \in \mathbb{R}^\ell$  un vecteur associé à l'interface  $\sigma_{KL}$  t.q.  $\vec{G}_{KL} = \vec{G}_{LK}$ . On note  $\mathcal{E}_h$  l'ensemble des interfaces  $\sigma_{K,L}$ . On associe à  $(\vec{G}_{KL})_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_h}$  un vecteur constant par diamond :

$$\vec{G}_h = \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_h} \vec{G}_{LK} \chi_{\mathcal{D}_{KL}}.$$

La divergence discrète associée à  $\vec{F}_h$

la fonction discrète  $w_h = \operatorname{div}_h \vec{G}_h$  est définie constante par triangle comme

$$\operatorname{div}_K \vec{G}_h := \frac{1}{|K|} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{KL}| \vec{G}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{KL}$$

C'est la version discrète de la formule :

$$\int_K \operatorname{div} \vec{G} \, dx = \int_{\partial K} \vec{G} \cdot \mathbf{n}, \text{ soit } |K|(\operatorname{div} \vec{G})_K \approx \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{KL}| (\vec{G} \cdot \mathbf{n})_{KL}$$

A key point of the analysis of the two-point finite volume schemes is the following kind of discrete duality property :

## Espaces discrets : dualité

## Lemma (Dualité discrete)

Pour toute fonction discrète  $w_h$  sur  $\Omega$  qui est nulle sur  $\partial\Omega$ , pour tout champs discret  $\vec{G}_h$  symétrique sur  $\Omega$  (i.e.  $G_{KL} = G_{LK}$ ), alors

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} |K| w_K \operatorname{div}_K \vec{G}_h = - \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_h} |\mathcal{D}_{KL}| \nabla_{KL} w_h \cdot \vec{G}_{KL}.$$

De façon équivalente,

$$\int_{\Omega} w_h \operatorname{div}_h \vec{G}_h \, dx = - \int_{\Omega} \nabla_h w_h \cdot \vec{G}_h \, dx.$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_h \operatorname{div}_h \vec{G}_h \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| w_K \operatorname{div}_K \vec{G}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{KL}| w_K \underbrace{\vec{G}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{KL}}_{\text{antisymétrique}} \\ &= - \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_h} |\sigma_{KL}| (w_L - w_K) \mathbf{n}_{K,L} \cdot \vec{G}_{KL} \\ &= - \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{\ell} |\sigma_{KL}| d_{KL} \underbrace{\ell \frac{(w_L - w_K)}{d_{KL}} \mathbf{n}_{KL}}_{\text{gradient discret}} \cdot \vec{G}_{KL} \\ &= - \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_h} |\mathcal{D}_{KL}| \nabla_{KL} w_h \cdot \vec{G}_{KL} = - \int_{\Omega} \nabla_h w_h \cdot \vec{G}_h \, dx \end{aligned}$$

# Convergence faible des gradients discrets

## Lemme (Convergence faible des gradients discrets)

Soient  $(u_h)_h$  une suite bornée dans  $L^2(\Omega)$  et

$(\nabla_h u_h)_h$  une suite bornée dans  $(L^2(\Omega))^\ell$ .

Alors, on peut extraire une sous suite telle que

$$u_h \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(\Omega)$$

$$\nabla_h u_h \rightharpoonup \nabla u \text{ faiblement dans } (L^2(\Omega))^\ell.$$

**Preuve.** Il existe  $u \in L^2(\Omega)$  et  $\xi \in (L^2(\Omega))^\ell$  telles que :

$$u_h \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(\Omega)$$

$$\nabla_h u_h \rightharpoonup \xi \text{ faiblement dans } (L^2(\Omega))^\ell.$$

Il reste à vérifier que  $\xi = \nabla u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Pour cela il suffit de montrer que pour tout  $\phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^\ell$ ,

$$E_h = \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \phi \, dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \phi \, dx \longrightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

car dans ce cas

$$E_h \longrightarrow \int_{\Omega} \xi \cdot \phi + \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi = \langle \xi, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0.$$

## Convergence faible des gradients discrets

Soit  $\phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^\ell$

$$E_h = \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \phi \, dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \phi \, dx$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \phi &= \sum_K u_K \int_K \operatorname{div} \phi = \sum_K \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \underbrace{\left( \int_{\sigma_{KL}} \phi \cdot \mathbf{n}_{KL} \right)}_{\mathbf{n}_{KL} = -\mathbf{n}_{LK}} u_K \\ &= \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} \left( \int_{\sigma_{KL}} \phi \cdot \mathbf{n}_{KL} \right) (u_K - u_L) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \phi &= \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} \int_{\mathcal{D}_{KL}} \nabla_h u_h \cdot \phi = \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} \ell \frac{u_L - u_K}{d_{KL}} \int_{\mathcal{D}_{KL}} \phi \cdot \mathbf{n}_{KL} \\ &= \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} |\sigma_{KL}| (u_L - u_K) \frac{1}{|\mathcal{D}_{KL}|} \int_{\mathcal{D}_{KL}} \phi \cdot \mathbf{n}_{KL} \quad \text{car } |D_{KL}| = \frac{|\sigma_{KL}| d_{KL}}{\ell}, \end{aligned}$$

## Convergence faible des gradients discrets

Soit  $\phi \in (\mathcal{D}(\Omega))^\ell$

$$E_h = \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \phi \, dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \phi \, dx$$

Alors,

$$E_h = \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} |\sigma_{KL}| (u_L - u_K) \underbrace{\left[ \frac{1}{|\sigma_{KL}|} \int_{\sigma_{KL}} \phi \cdot \mathbf{n}_{KL} - \frac{1}{|\mathcal{D}_{KL}|} \int_{\mathcal{D}_{KL}} \phi \cdot \mathbf{n}_{KL} \right]}_{\leq C(\phi)h \text{ car } \phi \in \mathcal{D}(\Omega)}$$

or  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $h = \max_{K, \mathcal{D}_{KL}} (\operatorname{diam}(K), \operatorname{diam}(\mathcal{D}_{KL}))$ , alors ainsi

$$E_h \leq Ch \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} |\sigma_{KL}| |u_L - u_K| = Ch \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} \sqrt{\frac{\ell |\sigma_{KL}|}{d_{KL}}} \sqrt{\frac{|\sigma_{KL}| d_{KL}}{\ell}} |u_L - u_K|$$

Par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} E_h &\leq Ch \left( \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} \frac{|\sigma_{KL}| d_{KL}}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{D}_h} \frac{\ell |\sigma_{KL}|}{d_{KL}} |u_L - u_K|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ch |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_h\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

# Inégalité de Poincaré discrète

## Lemme (Inégalité de Poincaré discrète)

Soient  $\Omega$  un ouvert borné polygonal de  $\mathbb{R}^\ell$ ,  $\ell = 2, 3$ ,  $\mathcal{T}_h$  un maillage admissible de  $\Omega$  et  $u_h \in L_h(\Omega)$ . Alors

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u_h\|_{1,h}$$

où  $\|u_h\|_{1,h} = \left( \sum_{\sigma_{KL}} \tau_{KL} |u_K - u_L|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  est la norme discrète sur  $H_0^1(\Omega)$ .

# Inégalité de Poincaré discrète

## Lemme (Inégalité de Poincaré discrète)

Soient  $\Omega$  un ouvert borné polygonal de  $\mathbb{R}^\ell$ ,  $\ell = 2, 3$ ,  $\mathcal{T}_h$  un maillage admissible de  $\Omega$  et  $u_h \in L_h(\Omega)$ . Alors

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u_h\|_{1,h}$$

où  $\|u_h\|_{1,h} = \left( \sum_{\sigma_{KL}} \tau_{KL} |u_K - u_L|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  est la norme discrète sur  $H_0^1(\Omega)$ .

**Preuve.** L'inégalité de Poincaré dans le cas continue sur  $(0, L)$

$$u(x) = \underbrace{u(0)}_{=0} + \int_0^x u'(x) \, dx$$

On a lié  $u(x)$  à sa dérivée. Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|u(x)| \leq \sqrt{L} \|u'\|_{L^2(0,L)} \text{ et } \|u\|_{L^2(0,L)} \leq L \|u'\|_{L^2(0,L)}$$

# Inégalité de Poincaré discrète

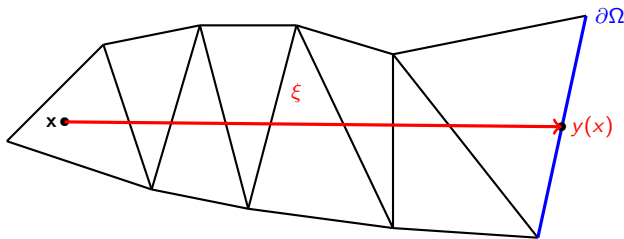
## Lemme (Inégalité de Poincaré discrète)

Soient  $\Omega$  un ouvert borné polygonal de  $\mathbb{R}^\ell$ ,  $\ell = 2, 3$ ,  $\mathcal{T}_h$  un maillage admissible de  $\Omega$  et  $u_h \in L_h(\Omega)$ . Alors

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u_h\|_{1,h}$$

où  $\|u_h\|_{1,h} = \left( \sum_{\sigma_{KL}} \tau_{KL} |u_K - u_L|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  est la norme discrète sur  $H_0^1(\Omega)$ .

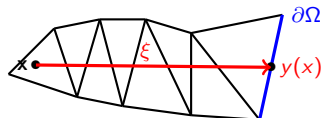
**Preuve.** Dans le cas discret. L'idée est de passer par le bord.



Pour tout  $x \in \Omega$ , on définit  $y(x)$  sur le bord comme étant sa projection dans une direction donnée  $\xi$



## Inégalité de Poincaré discrète : preuve



On fixe un vecteur unitaire  $\xi$ .

$y(x) \in \partial\Omega$  est la projection de  $x$  dans la direction  $\xi$ .

Pour toute arête  $\sigma \in \mathcal{E}$ , on note

$$\chi_\sigma(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x, y] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\sum_\sigma \chi_\sigma(x, y)$  compte le nombre de fois où le segment  $[x, y]$  coupe les arêtes.

On suppose que  $\forall x \in \Omega$ ,  $[x, y(x)]$  n'est tangente à aucune arête.

Soit  $x \in K \cap \Omega$ , Le segment  $[x, y(x)]$  rencontre un nombre fini de volume de contrôle  $(K_i)_{i=1, m}$ , avec  $K = K_1$  et  $K = K_m$  touche le bord.

On effectue une somme télescopique :

$$u_K = u_{K_1} = \sum_{i=1}^{m-1} (u_{K_i} - u_{K_{i+1}}) + u_{K_m}$$

Sur le bord  $u_\sigma = 0$  sur  $\partial\Omega$ ,

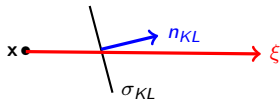
$$|u_K| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |u_{K_i} - u_{K_{i+1}}| + |0 - u_{K_m}| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |u_{K_i} - u_{K_{i+1}}| \chi_{\sigma_{K_i K_{i+1}}} + |0 - u_{K_m}| \chi_{\partial(K_m \cap \Omega)}$$

## Inégalité de Poincaré discrète : preuve

On écrit alors

relier  $u_K$  au gradient discret

$$|u_K| \leq \sum_{\sigma_{KL}} |u_K - u_L| \chi_{\sigma_{KL}}(x, y(x)) \quad (\text{en incluant le bord})$$



$C_{\sigma_{KL}} = \mathbf{n}_{KL} \cdot \xi > 0$  car  $\xi$  n'est pas orthogonale à  $\mathbf{n}_{KL}$ .

$$|u_K| \leq \sum_{\sigma_{KL}} d_{KL} \sqrt{C_{\sigma_{KL}}} \frac{|u_K - u_L|}{\sqrt{C_{\sigma_{KL}}} d_{KL}} \chi_{\sigma_{KL}}(x, y(x))$$

On utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$|u_K|^2 \leq \underbrace{\left( \sum_{\sigma_{KL}} d_{KL} C_{\sigma_{KL}} \chi_{\sigma_{KL}}(x, y(x)) \right)}_{\leq \text{diam}(\Omega)} \left( \sum_{\sigma_{KL}} \frac{|u_K - u_L|^2}{C_{\sigma_{KL}} d_{KL}} \chi_{\sigma_{KL}}(x, y(x)) \right)$$

On intègre sur  $K$  et on somme sur  $K$  :

## Inégalité de Poincaré discrète : preuve

$$\sum_K |K| |u_K|^2 \leq \text{diam}(\Omega) \sum_{\sigma_{KL}} \frac{|u_K - u_L|^2}{C_{\sigma_{KL}} d_{KL}} \int_{\Omega} \chi_{\sigma_{KL}}(x, y(x)) dx$$

$\chi_{\sigma}(x, y(x))$  ne peut valoir 1 que dans une bande de largeur  $|\sigma| C_{\sigma}$ .

en conclusion

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_K |K| |u_K|^2 \leq (\text{diam}(\Omega))^2 \sum_{\sigma_{KL}} \frac{|u_K - u_L|^2}{C_{\sigma_{KL}} d_{KL}} |\sigma_{KL}| C_{\sigma_{KL}} \\ &= (\text{diam}(\Omega))^2 \|u_h\|_{1,h}^2. \end{aligned}$$

# Estimations d'énergie sur le schéma VF4

Le schéma (VF4) pour l'équation de Poisson sur un maillage admissible :

$$\sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)} \tau_{KL}(u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)} \tau_{K\sigma} u_K = |K| f_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

$\tau_{KL} = \frac{|\sigma_{KL}|}{d_{KL}}$ ,  $\tau_{K\sigma} = \frac{|\sigma_{K\sigma}|}{d_{K\sigma}}$  : coefficients de transmissibilité.

On multiplie par  $u_K$  et on somme sur  $K$ , il vient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)} \tau_{KL}(u_K - u_L) u_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)} \tau_{K\sigma} |u_K|^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| f_K u_K$$

On intègre par partie la première somme avec  $F_{KL} = \tau_{KL}(u_K - u_L)$

$$\underbrace{\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{KL} |u_K - u_L|^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_{K\sigma} |u_K|^2}_{= \|u_h\|_{1,h}^2} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| f_K u_K$$

## Estimations d'énergie sur le schéma VF4

$$\begin{aligned}
\|u_h\|_{1,h}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| f_K u_K \leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |f_K|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |u_K|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{car } f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f(x) dx \\
&\leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{1,h} \quad \text{Poincaré discret}
\end{aligned}$$

alors

Estimation  $H_0^1$  discret

$$\|u_h\|_{1,h} \leq \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

# Convergence forte de $(u_h)_h$

L'estimation  $H_0^1$  discrete assure la convergence faible du gradient discret.

**A-t-on la limite  $u \in H_0^1(\Omega)$ ?** Soit  $\tilde{u}_h \in L^2(\Omega)$  le prolongement de  $u_h$  par 0 en dehors de  $\Omega$ .

Proposition (Estimation sur les translatés en espace)

$$\|\tilde{u}_h(\cdot + \eta) - \tilde{u}_h(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^\ell)}^2 \leq |\eta|(|\eta| + Ch)\|u_h\|_{1,h}^2, \text{ pour tout } \eta \in \mathbb{R}^\ell,$$

La preuve ressemble à celle de l'inégalité de Poincaré!!

On déduit alors :

- D'après le **théorème de Kolmogorov** il existe une sous-suite  $u_h \rightarrow u \in L^2(\Omega)$  avec  $u = 0$  en dehors de  $\Omega$ .
- $u \in H_0^1(\Omega)$  (voir EGH2000) (on reviendra!!)

# Passage à la limite sur le schéma VF4

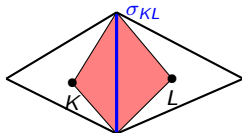
Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . On multiplie par  $\varphi(x_K)$  et on somme sur  $K$  :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in \mathcal{N}_{int}(K)} \tau_{KL}(u_K - u_L)\varphi(x_K) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{N}_{ext}(K)} \tau_{K\sigma} u_K \varphi(x_K) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| f_K \varphi(x_K)$$

on intègre par partie, il vient

$$\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{KL}(u_K - u_L)(\varphi(x_K) - \varphi(x_L)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_{K\sigma}(u_K - 0)(\varphi(x_K) - 0) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| f_K \varphi(x_K)$$

Sur chaque diamond  $\mathcal{D}_{KL}$ ,



$$\nabla_h u_h(x) = \ell \frac{u_L - u_K}{d_{KL}} \mathbf{n}_{KL}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x_L) - \varphi(x_K) &= \nabla \varphi(x_{KL}) \cdot (x_L - x_K), \text{ où } x_{KL} \in ]x_L, x_K[ \\ &= d_{KL} \nabla \varphi(x_{KL}) \cdot \mathbf{n}_{KL} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{KL}(u_K - u_L)(\varphi(x_K) - \varphi(x_L)) &= \frac{|\sigma_{KL}|}{\cancel{d_{KL}}} \cancel{d_{KL}} \nabla \varphi(x_{KL}) \cdot \underbrace{(u_L - u_K) \mathbf{n}_{KL}}_{= \frac{d_{KL}}{\ell} \nabla_h u_h} \end{aligned}$$

$$= |\mathcal{D}_{KL}| \nabla_h u_h(x) \cdot \nabla \varphi(x_{KL}), \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}_{KL}.$$

# Passage à la limite sur le schéma VF4

$$\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}_{int}} |\mathcal{D}_{KL}| \nabla_h u_h(x) \cdot \nabla \varphi(x_{KL})|_{\mathcal{D}_{KL}} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} |\mathcal{D}_{K\sigma}| \nabla_h u_h(x) \cdot \nabla \varphi(x_{K\sigma})|_{\mathcal{D}_{K\sigma}} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| f_K \varphi(x_K)$$

on définit  $(\nabla \varphi)_h$  constante par diamond  $\mathcal{D}_{KL}$

$$(\nabla \varphi(x))_h = \nabla \varphi(x_{KL}), \quad \forall x \in \mathcal{D}_{KL}$$

le schéma (VF4) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla_h u_h(x) \cdot (\nabla \varphi(x))_h dx = \sum_K \int_K f(x) \varphi(x_K) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi_h(x) dx$$

D'après la convergence faible des gradients discrets : il existe une sous-suite telle que

- la suite  $(u_h)_h$  converge **fortement** vers  $u$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$
- la suite  $(\nabla_h u_h)_h$  converge **faiblement** vers  $\nabla u$  dans  $(L^2(\Omega))^\ell$

De plus, pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

- la suite  $(\varphi_h)_h$  converge **fortement** vers  $\varphi$  dans  $L^2(\Omega)$
- la suite  $(\nabla \varphi)_h$  converge **fortement** vers  $\nabla \varphi$  dans  $(L^2(\Omega))^\ell$



# Passage à la limite sur le schéma VF4

## Théorème (convergence)

*La suite  $(u_h)_h$  l'unique solution de (VF4) converge vers l'unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , l'égalité a lieu pour  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .*

## Remarque

Aucune régularité n'est exigée sur la solution pour construire le schéma et montrer la convergence.

# Estimation de l'erreur de convergence

## Proposition ( $H^2$ -régularité)

Soit  $(u_h)_h$  solution de (VF4) et  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solution du problème de Poisson.  
Soit  $e_h = (e_K)_{K \in \mathcal{T}}$  l'erreur locale de convergence :

$$e_K = u(x_K) - u_K.$$

Alors, il existe  $C = C(\|u\|_{H^2}, \Omega)$  indépendante de  $h$ , alors

$$\|e_h\|_{1,h} \leq Ch$$

De plus, on a l'estimation d'ordre 2 sur les flux :

$$\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}} |\sigma_{KL}| d_{KL} \left( \frac{u_L - u_K}{d_{KL}} - \frac{1}{|\sigma_{KL}|} \int_{\sigma_{KL}} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_{KL} \right) \leq Ch^2.$$