# Outils mathématiques et numériques en physique des plasmas

Mehdi Badsi, Anais Crestteto

February 5, 2019

# Préambule

Ces notes de cours constitue une introduction à la modélisation mathématique et à l'étude de méthodes numériques utilisées en physique des plasmas. Le fil conducteur de ce cours est l'étude des propriétés mathématiques des modèles et des méthodes numériques employés pour leur simulation numérique. Nous commencerons par l'étude d'un modèle simple de particule chargée pour illustrer quelques propriétés élémentaires des plasmas. Nous introduirons ensuite deux grandes classes de modèles qui prennent la forme d'équations aux dérivées partielles. A cet effet, nous nous poserons essentiellement deux questions classiques qui sont au coeur de l'*Analyse Numérique* :

- Les modèles présentés sont-ils bien posés : existe-t-ils des solutions mathématiques, ces solutions sont elles uniques ?

- Peut-on approcher les solutions de ces modèles et avec quelle efficacité (précision et coût) ?

In fine, l'objectif du cours est de familiariser les étudiants avec quelques problématiques liées à la modélisation et à la simulation numérique en physique des plasmas.

**Avertissement**: Ce cours peut contenir des imprécisions qui ont échappé au regard vigilant de ses auteurs. Le lecteur attentif qui souhaite faire part de ses remarques permettant d'améliorer la qualité de ce document peut le faire en envoyant un mail à l'adresse mehdi.badsi@univ-nantes.fr.

**Quelques références**:


- E. Sonnendrucker, cours M2 : Modèles cinétiques pour la fusion.

- B. Després, cours M2 : méthodes mathématiques et numériques pour les plasmas.

- F. Chen : Introduction to Plasma Physics, Plenum Press 1974.

- J-M Rax, Physique des plasmas, Dunod, 2005.

- H. Brézis : Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications, Dunod.

- F. Golse, Cours M2 : Modèles cinétiques.

# Introduction

Lorsqu'un gaz est porté à une température suffisamment élevée, les électrons des atomes qui le composent quittent leurs orbites autour des noyaux. Le mélange ainsi obtenu appelé plasma [6] est composé de particules ionisées et d'électrons dont la dynamique est due aux intéractions électromagnétiques. Bien que trés peu présent à l'état naturel sur Terre, les plasmas représentent 99 % de la matière de notre univers. En effet, l'atmosphère des étoiles et les vents soufflant dans l'espace interstellaire sont en grande partie composés d'atomes ionisés et d'électrons. Sur Terre, la majorité des plasmas sont fabriqués en laboratoire et obtenu en provoquant un mécanisme d'ionisation à faible densité.

Les applications industrielles utilisant les plasmas sont nombreuses : canon à électrons, sondes de Langmuir, ou encore les réacteurs nucléaires à fusion par confinement magnétiques, appelés *tokamaks*. En ce qui concerne la dernière application, le contrôle de la fusion par confinement magnétique est un défi scientifique et technique majeur du 21-ème siècle dont la portée dépasse largement le cadre de la science. Motivées par le projet international ITER [3], les recherches scientifiques sur la fusion nucléaire par confinement magnétique constituent un socle nécessaire et essentiel au dimensionnement et à la mise en service d'une machine à fusion tel que le *tokmak* ITER.

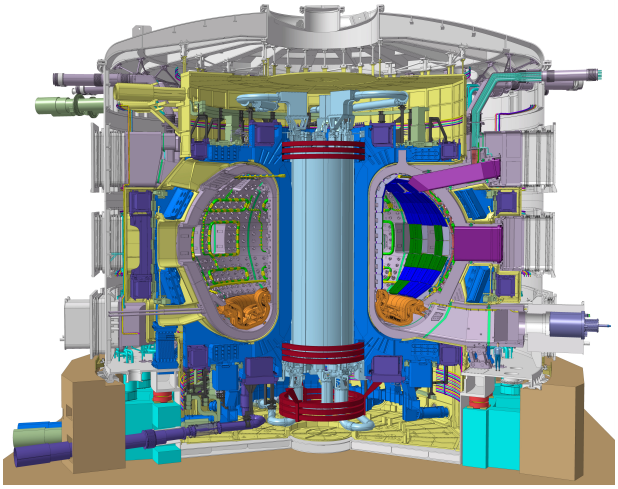

Figure 1: Tokamak ITER, source : www.iter.org

Parallèlement, l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs combinée avec le développement de nouveaux outils mathématiques a permis des avancés conséquentes dans les domaines de la *modélisation*, de la *simulation numérique* et du *calcul scientifique*. Ainsi, la simulation numérique est devenue un enjeu central dans la conception de nouvelles technologies utilisant les plasmas. Pour autant, la description des plasmas à l'aide de *modèles mathématiques* et leurs simulations numériques à l'aide d'*algorithmes* efficaces posent des difficultés théoriques et pratiques que seule une collaboration étroite entre ingénieurs, physiciens et mathématiciens peut lever.

# Chapter 1

# Modèles

Considérons une particule chargée de charge $q$, non relativiste de masse $m$, sous l'effet d'un champ électromagnétique $(E, B) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. La seconde loi de Newton permet de calculer la trajectoire de cette particule. Sa position $x(t) \in \mathbb{R}^3$ et sa vitesse $v(t) \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t$ vérifient le système d'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ mv'(t) = F(t, x(t), v(t)) \end{cases} \tag{1.1}$$

où $F(t, x(t), v(t)) := q\left(E(t, x(t))\right) + v(t) \wedge B(t, x(t)))$ est la force de Lorentz. Sous des hypothèses de régularité suffisante du champ $(E, B)$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour toute donnée initiale $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution $(x(t), v(t)) \in C^1([0, +\infty); \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ solution de (1.1) et vérifiant $(x(0), v(0)) = (x_0, v_0)$. Dans le cas d'un champ $(E, B)$ constant, il est possible de déterminer explicitement la solution du système (1.1). Choisissons pour simplifier, le champ magnétique $B$ de la forme $B = (b, 0, 0)^t$ avec $b > 0$ et introduisons l'inconnue auxiliaire $w(t) = v(t) - \frac{E \wedge B}{b^2}$. On a

$$w'(t) = \frac{q}{m}\left(E_{\parallel} + w(t) \wedge B\right)$$

où $E_{\parallel} := E + \frac{(E \wedge B) \wedge B}{b^2}$ est un vecteur parallèle au champ magnétique. En effet, soit $C \in \mathbb{R}^3$ tel que $C \cdot B = 0$ alors

$$E_{\parallel} \cdot C = E \cdot C + \frac{(E \wedge B) \wedge B}{b^2} \cdot C = E \cdot C - \frac{b^2 E \cdot C}{b^2} = 0.$$

On en donc déduit qu'il existe un réel $\alpha$ tel que $E_{\parallel} = (\alpha, 0, 0)^t$ et que l'équation différentielle sur $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))^t$ se ré-écrit composante par composante sous la forme

$$\begin{cases} w_1'(t) = \frac{q\alpha}{m}, \\ w_2'(t) = \omega_c w_3(t), \\ w_3'(t) = -\omega_c w_2(t), \end{cases}$$

où $\omega_c := \frac{qb}{m}$ est la fréquence cyclotron (i.e la fréquence de gyration de la particule autour des lignes de champ magnétique). On déduit alors que $w_1(t) = w_1(0) + \frac{q\alpha}{m}t$ et qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $w_2(t) = \gamma\cos(\omega_c t), w_3(t) = -\gamma\sin(\omega_c t)$ (à une phase près). La solution est donnée par :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + tv_1(0) + \frac{q\alpha}{m}\frac{t^2}{2}, \\ x_2(t) = x_2(0) + \frac{E\wedge B}{b^2}|_2 t + \frac{\gamma}{\omega_c}\sin(\omega_c t), \\ x_3(t) = x_3(0) + \frac{E\wedge B}{b^2}|_3 t + \frac{\gamma}{\omega_c}\cos(\omega_c t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Ce calcul simple permet déjà d'illustrer l'effet d'un champ électromagnétique constant sur la trajectoire d'une particule:

- Dans la direction parallèle au champ magnétique, la particule subit une accélération d'intensité $\frac{|q\alpha|}{m}$ dont le sens dépend du signe de $q$. En particulier deux particules de charge opposée subissent une accélération parallèle de direction opposée l'une de l'autre.
- Dans un plan perpendiculaire au champ magnétique, la particule subit une dérive de vitesse $\frac{E\wedge B}{b^2}$ et sa position est sur un cercle de rayon $|\frac{\gamma}{\omega_c}|$ dont le centre est mobile.
- La facteur $\frac{\gamma}{\omega_c}$ est la rayon de gyration de la particule autour des lignes de champ magnétique. Il est arbitraire car il dépend de la vitesse initiale de la particule.
- A paramètre $\gamma$ fixé, le rayon de gyration de la particule est d'autant plus petit que le champ magnétique est grand. Pour autant, les particules subissent toujours une dérive orthogonale dû à la présence du champ électrique. Ces observations pourtant simples sont à l'origine de la configuration géométrique du champ magnétique imposé dans un tokamak, ce dernier possède une composante supplémentaire qui vise à compenser en moyenne la dérive.

## 1.1 Equation de Vlasov

Considérons un ensemble de $N \in \mathbb{N}$ particules non relativistes de masse $m$ et de charge $q$ où chacune d'elles possède à l'instant $t$ une position et une vitesse $(x_i(t), v_i(t))_{i=1,\dots N} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Supposons dans un premier temps que ces particules sont soumises à l'effet d'un champ électromagnétique donné $E(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $B(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et que les interactions entre particules sont négligeables (forces Coulombiennes, collisions binaires). Les équations de la dynamique des particules s'écrivent alors pour tout $i \in \{1, ..., N\}$ :

$$\begin{cases} x_i'(t) = v_i(t), \\ mv_i'(t) = q(E(t, x_i(t)) + v_i(t) \wedge B(t, x_i(t))). \end{cases} \tag{1.3}$$

Ces équations permettent de déterminer entièrement les trajectoires de l'ensemble des particules lorsque les champs $E$ et $B$ sont connus. Il s'agit d'une description Lagrangienne du système de particules où positions et vitesses jouent un rôle central.

En général, un plasma contient un très grand nombre de particules (de l'ordre de $10^{10}$ voire plus). Le coût de calcul des trajectoires est trop important pour être utilisable en pratique. Pour simuler

numériquement un plasma, on a plutôt recourt à des modèles approchées, qui tout en offrant une description acceptable du système présentent un coût de calcul raisonnable. La brique de base de tout modèle de plasma repose sur une description statistique : les positions et vitesses des particules sont initialement tirées aléatoirement suivant une loi de densité $f_0(x,v) \geq 0$ où positions et vitesses jouent le rôle de variables de l'espace $(x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Au lieu d'étudier la dynamique de chaque particule comme c'est le cas pour le modèle microscopique (1.3), on s'intéresse plutôt à l'évolution de la densité $f_0$ sous l'action du flot induit par la force de Lorentz. La densité $f(t,x,v) \geq 0$ qui représente la probabilité qu'une particule à l'instant $t$ occupe la position $x \in \mathbb{R}^3$ et ait une vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ vérifie l'équation de Vlasov:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t,x,v) \cdot \nabla_v f = 0 \text{ dans } (0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{1.4}$$

où $F(t,x,v) = \frac{q}{m}(E(t,x) + v \wedge B(t,x))$. Il s'agit d'une description Eulerienne du plasma où positions et vitesses jouent le rôle de variable de l'espace des phases (position-vitesse).

Une propriété remarquable de cette équation est qu'elle admet aussi une forme conservative dû au fait que le champ $F$ est à divergence nulle en vitesse. En effet,

$$\operatorname{div}_v F(t,x,v) = \operatorname{div}_v(v \wedge B(t,x)) = (\nabla_v \wedge v) \cdot B = 0.$$

Par conséquent, on peut ré-écrire (1.4) sous la forme

$$\partial_t f + \operatorname{div}_{x,v}(A(t,x,v)f) = 0$$

où $A(t,x,v) = (v, F(t,x,v))^t$. Cela permet en particulier de donner un sens faible à l'équation de Vlasov (1.4).

Pour comprendre d'où vient cette équation, considérons la distribution associée aux $N$ particules :

$$f^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{(x_i(t),v_i(t))}, \tag{1.5}$$

où $\delta_{(x_i(t),v_i(t))}$ désigne la distribution de Dirac de support le point $(x_i(t), v_i(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

**Proposition 1.** *La distribution* (1.5) *satisfait l'équation de Vlasov au sens des distributions i.e dans* $\mathcal{D}'((0+\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

*Proof.* Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}((0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ on a:

$$\langle \partial_t f^N + v \cdot \nabla_x f^N + F(t,x,v) \cdot \nabla_v f^N, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle f^N, \partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi + F(t,x,v) \cdot \nabla_v \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

car $F$ est à divergence nulle en vitesse. Et par définition de la distribution de Dirac on a donc :

$$\langle \partial_t f^N + v \cdot \nabla_x f^N + F(t,x,v) \cdot \nabla_v f^N, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} =$$

$$-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_0^{+\infty} \partial_t \varphi(t,x_i(t),v_i(t)) + v_i(t) \cdot \nabla_x \varphi(t,x_i(t),v_i(t)) + F(t,x_i(t),v_i(t)) \cdot \nabla_v \varphi(t,x_i(t),v_i(t)) dt$$

$$= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \varphi(t,x_i(t),v_i(t)) dt.$$

Or le support de $\varphi$ est inclus dans $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ donc la dernière intégrale est nulle. □

On a également le résultat suivant qui est laissé en guise d'exercice.

**Exercice 1.** *La distribution $f^N$ définie par* (1.5) *vérifie l'équation de Vlasov* (1.4) *au sens des distributions mais uniquement en espace-vitesse, i.e, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.*

- *On commencera par donner un sens à l'équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.*

Une démarche naturelle lorsqu'on étudie des modèles réduits déduits de modèles plus riches, est de se poser la question de la justification mathématique rigoureuse du modèle réduit. Typiquement, une question importante dans le cas de l'équation de Vlasov est la suivante : si $(x_i(0), v_i(0))_{i=1,\dots,N}$ sont tirées suivant une loi de densité $f_0$, la distribution $f^N$ définie par (1.5) converge-t-elle lorsque $N$ tend vers l'infini vers une solution de l'équation de Vlasov (1.4) de donnée initiale $f_0$ ? Cette question non entièrement résolue dans le cas où la Force de Lorentz prend en compte les interactions entre particules, a fait l'objet de nombreux travaux [4, 5, 2]. Une réponse affirmative permet entre autres de justifier l'utilisation de l'équation de Vlasov pour décrire les plasmas. Montrer la convergence de $f^N$ et identifier sa limite, c'est établir ce qu'on appelle la limite de champ moyen.

## 1.2 Moments et fermeture fluide de l'équation de Vlasov

L'équation de Vlasov est posé dans un espace des phases à six dimensions. Les solutions renseignent sur la distribution en espace et vitesse des particules, pour autant leur simulation numérique reste coûteuse. Il est parfois utile de sacrifier un niveau detail supplémentaire pour décrire uniquement des quantités macroscopiques observables. A cet effet, les modèles fluides sont souvent utilisées pour décrire des plasmas proche de l'équilibre thermodynamique. La dérivation de modèle fluide repose sur la prise de moments en vitesse de la fonction distribution. On définit les trois premiers moments en vitesse d'une fonction de distribution $f(t, x, v)$ :

$$\text{(densité de charge)} : \; n(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)dv, \tag{1.6}$$

$$\text{(quantité de mouvement)} : \; n(t,x)u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)vdv, \tag{1.7}$$

$$\text{(énergie cinétique)} : \; n(t,x)e(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)\frac{v^2}{2}dv, \tag{1.8}$$

Il s'agit de quantités moyennés en vitesse qui ne dépendent que de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^3$. Ces quantités jouent un rôle important dans l'obtention d'un modèle fluide. En effet on a le résultat suivant :

**Proposition 2.** *Soit $f \in C^1((0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ une solution de l'équation de Vlasov* (1.4) *tel qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $(t, x, v) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$*

$$|f(t,x,v)| + |\partial_t f(t,x,v)| + |\nabla_x f(t,x,v)| + |\nabla_v f(t,x,v)| \leq \frac{C}{1+|v|^p} \text{ avec } p > 6,$$

*Alors on a :*

$$\begin{cases} \partial_t n + \operatorname{div}(nu) = 0, \\ \partial_t (nu) + \operatorname{div}(nu \otimes u + P) = \frac{q}{m}\left(nE + nu \wedge B\right), \\ \partial_t (ne) + \operatorname{div} Q = \frac{q}{m} nu \cdot E, \end{cases}$$

*où*

$$P(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)(v - u(t,x)) \otimes (v - u(t,x))dv, \quad Q(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v^2 v f(t,x,v)}{2} dv$$

*désigne le tenseur de pression et le flux d'énergie.*

*Proof.* On commence par justifier l'existence des diverses quantités macroscopiques définies plus haut $(n, nu, ne, P, Q)$. A cet effet, il suffit d'établir que les moments d'ordre 3 en vitesse de la distribution $f$ sont toujours bien définis. En effet on a par hypothèse :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)|v|^3 dv \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^3}{1+|v|^p} dv.$$

En passant en coordonnées sphériques, on en déduit il existe une constante $C' > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^3}{1+|v|^p} dv \leq C' \int_0^{+\infty} \frac{r^5}{1+r^p} dr.$$

Cette dernière intégrale est convergente dés que $p > 6$. Nous allons maintenant établir le système d'équations sur les quantités $(n, nu, ne, P, Q)$. Formellement, il suffit de multiplier l'équation (1.4) par $1, v, \frac{v^2}{2}$ et d'intégrer en vitesse pour l'obtenir. Nous allons cependant le justifier rigoureusement (au moins pour la première équation), à cet effet soit $R > 0$.

**Equation de la masse:** intégrons en vitesse l'équation de Vlasov sur la boule de centre l'origine et de rayon $R$. On a :

$$\underbrace{\int_{|v|<R} \partial_t f dv}_{:=A_R} + \underbrace{\int_{|v|<R} \operatorname{div}_x (vf) dv}_{:=B_R} + \underbrace{\int_{|v|<R} (\operatorname{div}_v F(t,x,v) f) dv}_{:=C_R} = 0 \tag{1.9}$$

D'après l'hypothèse $f$ est de classe $C^1$, $f$, $\partial_t f$, $vf$ sont intégrables sur $\{v \in \mathbb{R}^3, |v| < R\}$. On peut appliquer un théorème de différentiation sous le signe intégrale :

$$\int_{|v|<R} \partial_t f dv = \partial_t \int_{|v|<R} f dv, \quad \int_{|v|<R} \operatorname{div}_x (vf) dv = \operatorname{div}_x \int_{|v|<R} vf dv.$$

Justifions alors le passage à la limite dans ces égalités on a pour $A_R$ :

$$\partial_t \left( \int_{|v|<R} f dv - \int_{\mathbb{R}^3} f dv \right) = \partial_t \int_{|v|\geq R} f dv = \int_{|v|\geq R} \partial_t f dv.$$

car $f$ et $\partial_t f$ sont à décroissance rapide en vitesse. Or en utilisant la décroissance en vitesse de $\partial_t f$ et en passant en coordonnées sphériques on a qu'il existe une constante $C'' > 0$ tel que :

$$\left| \int_{|v| \geq R} \partial_t f dv \right| \leq C'' \int_R^{+\infty} \frac{r^2}{1+r^p} dr \underset{R \to +\infty}{\to} 0.$$

On a donc $\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f dv = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f dv$. Un raisonnement analogue pour le deuxième terme $B_R$ donne $\mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^3} v f dv = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}_x (vf) dv$. Pour $C_R$ on a d'après une formule de Green :

$$\int_{|v|<R} (\mathrm{div}_v F(t,x,v) f) dv = \int_{|v|=R} (F(t,x,v) \cdot n(v)) f d\sigma(v),$$

où $n(v) \in \mathbb{R}^3$ désigne la normale sortante de la boule et $d\sigma(v)$ la mesure surfacique. Remarquons ensuite que pour $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $|v| = R$ on a $F(t,x,v) \cdot n(v) = \frac{q}{m} E(t,x) \cdot n(v) + \frac{q}{m}(v \wedge B(t,x)) \cdot n(v)$ or le deuxième terme est nulle car $v$ et $n(v)$ sont colinéaire donc

$$\int_{|v|=R} (F(t,x,v) \cdot n(v)) f d\sigma(v) = \frac{q}{m} \int_{|v|=R} E(t,x) \cdot n(v) f d\sigma(v).$$

On a donc la majoration :

$$\left| \int_{|v|=R} (F(t,x,v) \cdot n(v)) f d\sigma(v) \right| \leq \frac{C|q|}{m} \|E\|_{L^\infty} \frac{1}{1+R^p} \int_{|v|=R} dv = \frac{C|q|}{m} \|E\|_{L^\infty} \frac{4\pi R^2}{1+R^p} \underset{R \to +\infty}{\to} 0.$$

Et finalement en passant à la limite dans l'équation (1.9), on obtient bien $\partial_t n + \mathrm{div}_x(nu) = 0$.

**Equation du moment:** La justification rigoureuse peut se faire suivant le même raisonnement que précédemment. Elle est laissé à titre d'exercice. On se contente d'un argument formelle. On multiplie (1.4) par $v$ et on intègre en vitesse. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f v dv + \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla_x f) v dv + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}_v (F(t,x,v) f) v dv = 0.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f v dv = \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f v dv$$

Et

$$\int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla_x f) v dv = \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^3} f v \otimes v dv = \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^3} f u \otimes u dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^3} f (v-u) \otimes (v-u) dv +$$
$$\mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^3} f((v-u) \otimes u + u \otimes (v-u)) dv.$$

La dernière intégrale est nulle car $\int_{\mathbb{R}^3} f(v-u)dv$ est le vecteur nul. On obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla_x f) v dv = \mathrm{div}_x(nu \otimes u + P).$$

Pour le dernière terme, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}_v(F(t,x,v)f)vdv = -\int_{\mathbb{R}^3} F(t,x,v)fdv = -\frac{q}{m}\left(\int_{\mathbb{R}^3} E(t,x)fdv + \int_{\mathbb{R}^3} v \wedge B(t,x)fdv\right)$$
$$= -\frac{q}{m}(nE + nu \wedge B).$$

d'où finalement,

$$\partial_t(nu) + \mathrm{div}_x(nu \otimes u + P) = \frac{q}{m}(nE + nu \wedge B).$$

**Equation d'énergie :** On multiplie l'équation (1.4) par $\frac{v^2}{2}$ et on intègre en vitesse. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \frac{fv^2}{2} dv + \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla_x f)\frac{v^2}{2} dv + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}_v(F(t,x,v)f)\frac{v^2}{2} dv = 0.$$

Pour le premier terme on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f \frac{v^2}{2} dv = \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v^2}{2} dv = \partial_t(ne).$$

Pour le deuxième terme, $v\frac{v^2}{2}$ est un vecteur indépendant de la variable d'espace on a donc $v \cdot \nabla_x f \frac{v^2}{2} = \mathrm{div}_x(fv\frac{v^2}{2})$. En permutant l'opérateur divergence en espace et l'intégrale en vitesse on en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla_x f)\frac{v^2}{2} dv = \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^3} fv\frac{v^2}{2} dv = \mathrm{div}_x\, Q.$$

Enfin pour le dernier terme, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}_v(F(t,x,v)f)\frac{v^2}{2} dv = -\int_{\mathbb{R}^3} (F(t,x,v) \cdot v)fdv = -\frac{q}{m} nu \cdot E$$

car $v$ et $v \wedge B$ sont orthogonaux. D'où finalement,

$$\partial_t(ne) + \mathrm{div}\, Q = \frac{q}{m} nu \cdot E$$

□

Le système obtenu à partir des moments de $f$ en vitesse, n'est pas fermé. Il y a plus d'inconnues que d'équations : chaque équation décrivant l'évolution d'un moment fait intervenir une dérivée spatiale d'un moment d'ordre supérieur. Pour fermer le système, il faut une relation de fermeture. Une hypothèse souvent utilisée, est que la distribution $f$ prend la forme:

$$f(t,x,v) = n(t,x)\left(\frac{m}{2\pi T(t,x)}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-m\frac{|v-u(t,x)|^2}{2}}. \tag{1.10}$$

**Exercice 2.** *On rappelle que* $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. *En utilisant la relation de fermeture* (1.10) *montrer que:*

*a)* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f dv = n, \int_{\mathbb{R}^3} f v dv = nu.$

*b) le tenseur de pression s'écrit* $P = \frac{q}{m} p \mathbf{I}_d$ *où* $p = nT$ *et* $\mathbf{I}_d$ *désigne la matrice identité.*

*c) l'énergie cinétique et le flux d'énergie s'écrivent :*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{fv^2}{2} dv = \frac{3p}{2m} + \frac{nu^2}{2}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} fv\frac{v^2}{2} dv = \frac{5p}{2m} + \frac{nu^2 u}{2}.$$

*d) En déduire que le système de la proposition 2 se réecrit sous la forme :*

$$\begin{cases} \partial_t n + \mathrm{div}(nu) = 0, \\ \partial_t(nu) + \mathrm{div}(nu \otimes u) + \frac{\nabla p}{m} = \frac{q}{m}\left(nE + nu \wedge B\right), \\ \partial_t(ne) + \mathrm{div}(ne + \frac{p}{m}u) = \frac{q}{m} nu \cdot E, \\ e = \epsilon + \frac{u^2}{2}, \\ \epsilon = \frac{3p}{2mn}, \\ p = (\gamma - 1) nm\epsilon. \end{cases}$$

## 1.3 Equation des champs : Maxwell et Poisson

L'équation de Vlasov (1.4) (ou sa fermeture fluide cf exercice 2 ) décrivent l'évolution d'une densité de particules chargées (ou de certains de ses moments) sous l'effet d'un champ électromagnétique $(E, B)$ donné. Cette description, ne prend pas en compte l'intéraction électromagnétique entres les particules. Pour modéliser cette interaction, on fait dépendre les champs $(E, B)$ de la densité de $f(t, x, v)$ solution de (1.4) (où des moments $(n, nu, e)$). Cette dépendance se traduit à l'aide des équations de Maxwell:

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2}\partial_t E + \mathrm{rot} B = -\mu_0 J, \quad J = nu = \int_{\mathbb{R}^3} f v dv. \\ \partial_t B + \mathrm{rot} E = 0, \\ \mathrm{div}_x B = 0, \\ \mathrm{div}_x E = \frac{q}{\varepsilon^0} n, \end{cases} \tag{1.11}$$

où $c^2$, $\mu_0$,$\varepsilon_0$ sont des constantes physiques. On obtient donc un système d'équations aux dérivées partielles couplées d'inconnues $(f, E, B)$ qu'on nomme système de Vlasov-Maxwell.

**Exercice 3.** *Montrer en appliquant l'opérateur divergence à la première équation, que l'on retrouve l'équation de continuité* $\partial_t n + \mathrm{div}_x(nu) = 0$. *On utilisera la relation* $c^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1$.

Lorsque les particules sont non relativistes, il est courant d'utiliser l'hypothèse d'un champ $(E, B)$ quasi-statique, les équations de Maxwell prennent alors la forme:

$$\begin{cases} \mathrm{rot} B = -\mu_0 J, \quad J = nu = \int_{\mathbb{R}^3} f v dv. \\ \mathrm{rot} E = 0, \\ \mathrm{div}_x B = 0, \\ \mathrm{div}_x E = \frac{q}{\varepsilon^0} n, \end{cases} \tag{1.12}$$

Une étape de simplification supplémentaire consiste à supposer que le champ $B$ est négligeable, dés lors il nous reste

$$\mathrm{rot} E = 0, \quad \mathrm{div}_x E = \frac{q}{\varepsilon^0} n.$$

Puisque $E$ est à rotationnel nul, on peut le faire dériver d'un potentiel. On cherche donc $E$ sous la forme $E = -\nabla\phi$ où $\phi$ vérifie l'équation de Poisson :

$$-\Delta\phi = \frac{qn}{\varepsilon^0}. \tag{1.13}$$

On obtient alors un modèle simplifié (1.4),(1.13) d'inconnue $(f, \phi)$ qu'on nomme système de Vlasov-Poisson. C'est sur ce système que nous allons nous concentrer par la suite.

# Chapter 2

# Equation de transport et système de Vlasov-Poisson

Par soucis de simplicité, nous fixons les constantes physiques égales à un, et nous considérons un plasma fait d'électrons mobiles plongés dans un bain d'ions immobiles de densité macroscopique égale à un. Toute simplification physique faite, nous nous intéressons au système de Vlasov-Poisson d'inconnues $f$ : $[0,T] \times [0,1]_{per} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $E : [0,T] \times [0,1]_{per} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f - E(t,x)\partial_v f = 0 \text{ dans } (0,T) \times [0,1]_{per} \times \mathbb{R}, \\ \partial_x E = 1 - \int_{\mathbb{R}} f dv \text{ dans } (0,T) \times [0,1]_{per} \\ \int_{[0,1]_{per}} E dx = 0 \text{ dans } (0,T), \\ f(t=0,x,v) = f_0(x,v). \end{cases} \tag{2.1}$$

où $T > 0$ est un temps (éventuellement normalisé) d'observation du plasma, $[0,1]_{per} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ désigne le segment périodique [1], $f_0 : [0,1]_{per} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ correspond à une densité initiale de particules. Le système couplé (2.1) est non linéaire, en effet le champ électrique $E$ dépend de $f$ à travers l'équation de Poisson et intervient lui même dans l'équation de Vlasov dans la terme $E\partial_v f$. En revanche lorsque $E$ est fixé, l'équation de Vlasov est linéaire et sa structure correspond à une équation de transport qu'il est possible de résoudre par la méthode des caractéristiques. C'est l'objet de la section qui suit.

## 2.1 Equation de transport linéaire

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$ et $A : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ on s'intéresse à l'équation d'inconnue $u : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u = 0 \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

[1] On rappelle que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble quotient sur $\mathbb{R}$ muni de la relation d'équivalence $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Il s'identifie à un intervalle semi-ouvert de longueur un. On fait le choix de l'identifier au segment $[0,1[$.

**Definition 2.1.1.** Soient $s \in [0,T]$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, on considère le problème de Cauchy

$$C_{s,\mathbf{x}} : \begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t, \mathbf{X}(t)) \\ \mathbf{X}(s) = \mathbf{x} \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour $s \in [0,T]$ et $\mathbf{x}$ fixé, on dit que $\mathbf{X}(.; s, \mathbf{x})$ est la caractéristique issue de $\mathbf{x}$ au temps $s$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de justifier l'existence locale et l'unicité des caractéristiques. Lorsque le champ $A$ est globalement Lipschitz, les caractéristiques sont définies globalement. En effet, on a le

**Theorem 2.1.2.** *Soit $k \geq 1$, supposons que $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{k-1}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, $\mathbf{JacA} \in \mathcal{C}^{k-1}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ et qu'il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout $(t, \mathbf{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ $|\mathbf{A}(t, \mathbf{x})| \leq \kappa(1 + |\mathbf{x}|)$. Alors pour tout $(s, \mathbf{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution $\mathbf{X}(.; s, \mathbf{x}) \in \mathcal{C}^k([0,T]; \mathbb{R}^d)$ de $C_{s,\mathbf{x}}$.*

On trouvera une preuve de ce théorème dans [1].

**Remark 1.**

- L'hypothèse de majoration affine du champ $A$ est suffisante pour assurer l'existence globale, i.e sur $[0,T]$ tout entier, des caractéristiques.
- En toute généralité, il se peut que les caractéristiques ne soient définies que localement en temps comme le montre le contre exemple qualitatif suivant :

$$x'(t) = -x(t)^2, x(0) = x_0 < 0.$$

La solution est définie pour pour $t \in [0, -\frac{1}{x_0}[$ par $x(t) = \frac{x_0}{tx_0+1}$.

**Definition 2.1.3.** Soient $(s,t) \in [0,T]^2$, l'application $\mathcal{F}_{t,s} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \mathcal{F}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(t; s; \mathbf{x}) \end{array} \right.$ où $\mathbf{X}$ est solution de $C_{s,\mathbf{x}}$ est appelée flot. Quand $t > s$, on dit qu'il s'agit du flot avant et quand $t \leq s$ on dit qu'il s'agit du flot arrière.

On a également les propriétés suivantes du flot.

**Proposition 3.** *Sous les hypothèses du théorème 2.1.2 on a*

- $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^1([0,T]_t \times [0,T]_s \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$
- $\forall (t,s) \in [0,T]^2, \mathcal{F}_{t,s}$ *est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'inverse* $\mathcal{F}_{t,s}^{-1} = \mathcal{F}_{s,t}$.
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \, \forall (t_1, t_2, t_3) \in [0,T]^3 \; \mathbf{X}(t_3; t_2; \mathbf{X}(t_2; t_1; \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t_3; t_1; \mathbf{x})$
- *Le jacobien* $J(t; s; \mathbf{x}) := \det \mathbf{JacX}(t; s; \mathbf{x})$ *vérifie* $\frac{d}{dt} J(t; s; \mathbf{x}) = div\mathbf{A}(t; \mathbf{X}(t; s; \mathbf{x}))J$. *En particulier si* $div\mathbf{A} \equiv 0$ *alors* $J(t; s; \mathbf{x}) = 1$.

Quelques remarques sur la proposition précédente:

- Pour un champ d'advection $A$ suffisamment régulier, le flot associé est régulier par rapport aux conditions initiales.
- L'inverse du flot avant est le flot arrière.
- Si le champ $A$ est à divergence nulle alors il préserve le volume. En particulier si $\mathbf{X}$ représente la trajectoire d'une particule de fluide sous l'effet d'un champ de vitesse $\mathbf{A}$, alors la contrainte $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ traduit l'incompressibilité du fluide.

**Theorem 2.1.4.** *Sous les hypothèses du théorème 2.1.2, pour tout $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ solution de 2.2. De plus on a pour tout $(t, \mathbf{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ $u(t,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{X}(0;t;\mathbf{x}))$.*

*Proof.* Comme $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^1([0,T]_t \times [0,T]_s \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ alors $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ entant que fonction composé. Et, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $u(0,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{X}(0;0;\mathbf{x})) = u_0(\mathbf{x})$. On a par ailleurs par la règle de dérivation en chaine

$$\partial_t u(t,\mathbf{x}) := \partial_t (u \circ \mathbf{X})(0;t;\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(0;t;x) \cdot \nabla u_0(\mathbf{X}(0;t;\mathbf{x})) \tag{2.4}$$

et pour tout $i \in \{1..d\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial u \circ \mathbf{X}}{\partial x_i}(0;t;\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(\mathbf{X}(0;t;\mathbf{y}))\frac{\partial X_j}{\partial x_i}(0;t;\mathbf{y}) \tag{2.5}$$

En posant $\mathbf{JacX}(0;t;.) := (\frac{\partial X_i(0;t;.)}{\partial x_j})_{(i,j)\in\{1..d\}^2}$ la matrice jacobienne du flot, on obtient

$$\nabla u(t,\mathbf{x}) = \mathbf{JacX}(0;t;\mathbf{x})^t \nabla u_0(\mathbf{X}(0;t;\mathbf{x})) \tag{2.6}$$

On obtient donc

$$\partial_t u(t,\mathbf{x}) + \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla u(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(0;t;\mathbf{x}) \cdot \nabla u_0(\mathbf{X}(0;t;\mathbf{x})) + \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cdot \mathbf{JacX}(0;t;\mathbf{x})^t \nabla u_0(\mathbf{X}(0;t;\mathbf{x})) \tag{2.7}$$

Remarquant que pour tout $t \in [0,T]$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\mathbf{X}(t;0;\mathbf{X}(0;t;\mathbf{x})) = \mathbf{x}. \tag{2.8}$$

En dérivant par rapport à $t$ cette dernière relation on obtient:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t,0,\mathbf{X}(0,t,\mathbf{x})) + \mathbf{JacX}(t,0,\mathbf{X}(0,t,\mathbf{x}))^t \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(0,t,\mathbf{x}) = 0_{\in \mathbb{R}^d}$$

donc

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(0,t,\mathbf{x}) = -(\mathbf{JacX}(t,0,\mathbf{X}(0,t,\mathbf{x}))^t)^{-1}\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \tag{2.9}$$

Et en dérivant (2.8) par rapport à $\mathbf{x}$ on a :

$$\mathbf{JacX}(t,0,\mathbf{X}(0,t,\mathbf{x}))^{-1} = \mathbf{JacX}(t,0,\mathbf{x}).$$

et finalement

$$\partial_t u(t,\mathbf{x}) + \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla u(t,\mathbf{x}) = -\mathbf{JacX}(0,t,\mathbf{x})^t \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla u_0(\mathbf{X}(0;t;\mathbf{x})) + \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cdot \mathbf{JacX}(0;t;\mathbf{x})^t \nabla u_0(\mathbf{X}(0;t;\mathbf{x})) = 0$$

donc $u$ est bien solution de 2.2. Supposons qu'il existe $u_1$ et $u_2$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ solutions de 2.2, alors la différence $e := u_1 - u_2$ est également de classe $C^1$ et satisfait à l'équation

$$\partial_t e(t,\mathbf{x}) + \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla e(t,\mathbf{x}) = 0$$

avec condition initiale $e(0,\mathbf{x}) = 0$. On remarque alors que $e$ est constante le long des caractéristiques et que pour tout $(t,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ $e(t,\mathbf{X}(t;0;\mathbf{x})) = 0$ et donc $u_1 = u_2$ ce qui achève la preuve. $\square$

## 2.2 Le système de Vlasov-Poisson

Nous allons maintenant construire une solution au système de Vlasov-Poisson (2.1). Nous rappelons que le problème est de trouver $f : [0,T] \times [0,1]_{per} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $E : [0,T] \times [0,1]_{per} \to \mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f - E(t,x)\partial_v f = 0 \text{ dans } (0,T) \times [0,1]_{per} \times \mathbb{R}, \\ \partial_x E = 1 - \int_{\mathbb{R}} f dv \text{ dans } (0,T) \times [0,1]_{per} \\ \int_{[0,1]_{per}} E dx = 0 \text{ dans } (0,T), \\ f(t=0,x,v) = f_0(x,v). \end{cases}$$

où $f_0 : [0,1]_{per} \times \mathbb{R}$ est une densité initiale de particules qui est une donnée du problème.

Pour ce faire, nous allons procéder suivant une démarche classique lorsqu'on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles non linéaire. Elle se résume ainsi :

1) On collecte toutes les estimations a priori utiles en supposant l'existence de solutions suffisamment régulières du système.

2) On "gèle" la non linéarité en fixant une des inconnues du système, et on construit une solution au problème linéaire.

3) On vérifie que les solutions du problème linéaire vérifient les estimations obtenues en 1).

4) On établit l'existence d'une solution au problème non linéaire par un argument de point fixe,compacité.

### 2.2.1 Estimations a priori

Dans cette section on suppose que le système de Vlasov-Poisson (2.1) a des solutions régulières, de sorte que toutes les manipulations algébriques soient licites.

**Proposition 4 (Conservation).** *Soit* $f_0 : [0,1]_{per} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *telle que* $\int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x,v)vdv = 0$, *et* $(f,E)$ *une solution régulière de* (2.1). *Alors on a pour tout* $t > 0$ :

- $f(t,x,v) \geq 0$.
- $\int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dvdx = 1$.
- $\int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)vdv = 0$.
- *Pour tout* $p \in [1,+\infty]$,
$$\|f(t)\|_{L^p([0,1]_{per}\times\mathbb{R})} = \|f_0\|_{L^p([0,1]_{per}\times\mathbb{R})}.$$
-
$$\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}} \left(\frac{E^2(t,x)}{2} + \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t,x,v)v^2}{2}dv\right)dx = 0.$$

*Proof.* Pour le premier point, il suffit de remarquer que $f$ est constante le long des caractéristiques. En effet soit $x(t,(s,x,v)), v(t,(s,x,v))$ la solution du système :

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ v'(t) = -E(t,x(t)), \\ x(s) = x, v(s) = v. \end{cases}$$

On a pour tout $t > 0$ $(x,v) \in [0,1]_{per} \times \mathbb{R}$, $f(t,x,v) = f_0(x(0,t,x,v), v(0,t,x,v)) \geq 0$ car $f_0$ est positive. De la même façon $\|f(t)\|_{L^\infty([0,1]_{per}\times\mathbb{R})} = \|f_0\|_{L^\infty([0,1]_{per}\times\mathbb{R})}$. Pour le deuxième point on intègre en espace l'équation de Poisson et les conditions de périodicité donnent le résultat. Le troisième point est laisser à titre d'exercice. Pour le quatrième point, on multiplie l'équation de Vlasov par $\text{sign}(f)|f|^{p-1}$ et on intègre sur tout le domaine. Pour la conservation de l'énergie, on calcule la variation de l'énergie électrique :

$$\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}} \frac{E^2(t,x)}{2}dx = \int_{[0,1]_{per}} \partial_t E(t,x)E(t,x)dx.$$

En dérivant l'équation de Poisson par rapport au temps, on a $\partial_x(\partial_t E(t,x) - \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)vdv) = 0$ donc la fonction $x \mapsto \partial_t E(t,x) - \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)vdv$ est constante. Or la valeur moyenne de cette fonction est nulle car $\int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)vdv = 0$ et $\int_{[0,1]_{per}} E(t,x)dx = 0$ d'où $\partial_t E(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)vdv$ et donc

$$\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}} \frac{E^2(t,x)}{2}dx = \int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)vdvE(t,x)dx.$$

On a par ailleurs,

$$\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t,x,v)v^2}{2}dvdx = \int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial_t f(t,x,v)v^2}{2}dvdx$$
$$= \int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}\frac{(-v\partial_x f(t,x,v)+E(t,x)\partial_v f(t,x,v))v^2}{2}dvdx = \int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}E(t,x)\frac{\partial_v f(t,x,v)v^2}{2}dvdx$$
$$= -\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}E(t,x)f(t,x,v)vdvdx.$$

En sommant cette dernière égalité avec celle obtenue pour l'énergie électrique on obtient le résultat. □

Les estimations précédentes montrent la conservation de la positivité de la densité, des normes $L^p$, du courant total et de l'énergie totale. En particulier le fait que la charge totale du plasma est nulle, i.e $\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dvdx = 1$ traduit la neutralité globale du plasma, il y a autant d'ions que d'électrons. Le fait que l'énergie totale (qui est positive) soit conservée traduit le fait que les seules échanges d'énergies possible au sein du système se font par conversion de l'énergie cinétique en énergie électrique (et réciproquement). Nous allons maintenant montrer un résultat de propagation de la régularité.

**Proposition 5 (Propagation de la régularité).** *Soit $p > 1$, $f_0 \in W^{1,p}([0,1]_{per}\times\mathbb{R})$ et $(f,E)$ une solution régulière de (2.1) tel que $\partial_x E \in L^\infty([0,T]\times[0,1]_{per})$ alors il existe une constante $C(T) > 0$ tel que pour tout $t > 0$:*

$$|f(t)|_{W^{1,p}([0,1]_{per}\times\mathbb{R})} \leq C(T)|f_0|_{W^{1,p}([0,1]_{per}\times\mathbb{R})},$$

*où $|.|_{W^{1,p}([0,1]_{per}\times\mathbb{R})}$ est la semi-norme $W^{1,p}$.*

*Proof.* On dérive en espace

$$\partial_t(\partial_x f) + v\partial_x(\partial_x f) - \partial_x(E\partial_v f) = 0,$$

donc

$$\partial_t(\partial_x f) + v\partial_x(\partial_x f) - E\partial_v(\partial_x f) = \partial_x E\partial_v f.$$

Multiplions par $\text{sign}(\partial_x f)|\partial_x f|^{p-1}$ et intégrons en espace-vitesse on a alors :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x f|^p dxdv = \int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}\partial_x E\partial_v f\,\text{sign}(\partial_x f)|\partial_x f|^{p-1}dxdv.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder au membre de droite on obtient :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x f|^p dxdv \leq \left(\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x E|^p|\partial_v f|^p dvdv)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x f|^p dvdx\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Puisque $\partial_x E$ est essentiellement bornée, on peut majorer l'intégrale à droite de l'inégalité pour obtenir

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x f|^p dxdv \leq \|\partial_x E\|_{L^\infty}\left(\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_v f|^p dxdv\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x f|^p dxdv\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

ce qui donne après simplification :

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x f\|_{L^p([0,1]_{per}\times\mathbb{R})} \leq \|\partial_x E\|_{L^\infty}\|\partial_v f\|_{L^p([0,1]_{per}\times\mathbb{R})}.$$

On dérive maintenant en vitesse l'équation :

$$\partial_t(\partial_v f) + v\partial_x(\partial_v f) - E\partial_v(\partial_v f) = -\partial_x f.$$

On multiplie cette équation par $\text{sign}(\partial_v f)|\partial_v f|^{p-1}$ et on intègre en espace-vitesse, on a alors :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_v f|^p dxdv = -\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}\partial_x f\,\text{sign}(\partial_v f)|\partial_v f|^{p-1}dxdv.$$

On applique encore une fois l'inégalité de Hölder au membre de droite et on obtient :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_v f|^p dxdv \leq \left(\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x f|^p dvdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{[0,1]_{per}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_v f|^p dvdx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

ce qui donne après simplification :

$$\frac{d}{dt}\|\partial_v f\|_{L^p([0,1]_{per}\times\mathbb{R})} \leq \|\partial_x f\|_{L^p([0,1]_{per}\times\mathbb{R})}.$$

En sommant les deux inégalités différentielles, on récupère :

$$\frac{d}{dt}|f(t)|_{W^{1,p}([0,1]_{per}\times\mathbb{R})} \leq \|\partial_x E\|_{L^\infty}\|\partial_v f\|_{L^p} + \|\partial_x f\|_{L^p} \leq \max(1, \|\partial_x E\|_{L^\infty})|f(t)|_{W^{1,p}([0,1]_{per}\times\mathbb{R})}.$$

On conclut en utilisant un lemme de Gronwall. □

Ce résultat traduit le fait que la régularité de la donnée initiale est propagée au cours du temps par l'équation de Vlasov. Il s'agit d'un résultat remarquable qu'il convient de replacer dans un contexte mathématique approprié :

- L'équation de Vlasov est de nature hyperbolique et lorsqu'elle est couplée avec l'équation de Poisson, elle est non linéaire. Pour les équations hyperboliques non linéaires, il faut être vigilant car les solutions peuvent perdent en régularité au cours du temps (un exemple typique est l'équation de Burgers). Il est donc naturel de se demander ce qui prévient ici cette perte de régularité.

- Dans cette preuve, la pierre angulaire est le fait que le champ électrique soit de dérivée spatiale bornée. Il s'agit dans cette proposition d'une hypothèse mais nous allons en faire la preuve. C'est l'équation de Poisson (qui est de nature elliptique) qui prévient ici la perte de régularité du champ électrique.

Pour prouver que la dérivée du champ électrique est bien essentiellement bornée, nous voyons en utilisant l'équation de Poisson qu'il suffit d'estimer la densité de charge

$$\rho(t,x) := \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dv. \tag{2.10}$$

A cet effet considérons pour une solution $(f,E)$ de (2.1), le nombre

$$w(t) := \inf\{r > 0 \ : \ f(t,x,v) = 0 \text{ for all } x \in [0,1]_{per}, |v| \geq r\}. \tag{2.11}$$

On a alors :

**Proposition 6** (Contrôle uniforme de la charge et du champ électrique)**.** *Soit $f_0 \in C^1_c([0,1]_{per} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$, $(f,E)$ une solution régulière de (2.1) et supposons que $\sup_{t\in[0,T]} w(t) < +\infty$. Alors $\rho \in L^\infty([0,T] \times [0,1]_{per})$, $E \in L^\infty([0,T] \times [0,1]_{per})$.*

*Proof.* Pour la densité de charge on a pour tout $(t,x) \in [0,T] \times [0,1]_{per}$ :

$$|\rho(t,x)| = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dv = \int_{|v|\leq w(t)} f(t,x,v)dv \leq w(t)\|f_0\|_{L^\infty([0,1]_{per}\times\mathbb{R})}.$$

On obtient donc $\|\rho\|_{L^\infty([0,T]\times[0,1]_{per})} \leq \sup_{t\in[0,T]} w(t)\|f_0\|_{L^\infty([0,1]_{per}\times\mathbb{R})}$. Pour le champ électrique, on a par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger que pour tout $t \in [0,T]$ :

$$\|E(t)\|_{L^\infty([0,1]_{per})} = \|E(t) - \int_{[0,1]_{per}} E(t,x)dx\|_{L^\infty([0,1]_{per})} \leq C\|\partial_x E(t)\|_{L^\infty([0,1]_{per})},$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que du segment $[0,1]$. Puis l'équation de Poisson donne $\partial_x E(t,x) = 1 - \rho(t,x)$ d'où le résultat. □

**Proposition 7.** *Soit $f_0 \in C^1_c([0,1]_{per} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$, $(f,E)$ une solution régulière de (2.1) et supposons que pour tout $t \in [0,T]$, $\quad w(t) < +\infty$ on a :*

- *$|v| < w(t) \Rightarrow \exists x \in [0,1]_{per} \ : |V(0,t,x,v)| < w(0)$ où $(X(0,t,x,v), V(0,t,x,v))$ désigne la caractéristique au temps $t = 0$ issue de $(x,v)$ au temps $t$.*
- *$w(t) \leq w(0) + Ct + C\int_0^t w(\tau)d\tau$ où $C$ est une constante indépendante de $t$.*

*Proof.* Premier point : Par défintion de $w(t)$, si $|v| < w(t)$ alors il existe $x \in [0,1]_{per}$ tel que $f(t,x,v) \neq 0$. Or $f(t,x,v) = f_0(X(0,t,x,v), V(0,t,x,v)) \neq 0$ donc nécessairement $|V(0,t,x,v)| < w(0)$.

Deuxième point : Soit $t \in [0,T]$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $x_0 \in [0,1]_{per}$ et une unique caractéristique tel que $V(t,0,x_0,w(0)) = w(t)$. Or $V'(t,0,x_0,v_0) = -E(t,X(t,0,x_0,v_0)$ en intégrant sur $[0,t]$ on a :

$$w(t) = w(0) - \int_0^t E(\tau, X(\tau,0,x_0,w(0)))d\tau.$$

On déduit alors par inégalité triangulaire et en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger il existe une consante $C > 0$ telle que

$$w(t) \leq w(0) + \int_0^t |E(\tau, X(\tau, 0, x_0, w(0)))|\, d\tau \leq w(0) + C \int_0^t |\partial_x E(\tau, X(\tau, 0, x_0, w(0)))|\, d\tau$$
$$\leq w(0) + C \int_0^t |1 - \rho(\tau, X(\tau, 0, x_0, w(0))|\, d\tau.$$

Or on a (voir preuve proposition 6)

$$|\rho(\tau, X(\tau, 0, x_0, w(0)))| \leq w(\tau) \|f_0\|_{L^\infty([0,1]_{per} \times \mathbb{R})}.$$

d'où finalement, $w(t) \leq w(0) + Ct + C\|f_0\|_{L^\infty([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} \int_0^t w(\tau) d\tau$. □

On en déduit finalement un résultat important de cette section dont la preuve s'appuie sur les résultats de la proposition précédente. Sa preuve est laissé à titre d'exercice.

**Theorem 2.2.1.** *Soit $f_0 \in C_c^1([0,1]_{per} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$ et $(f, E)$ une solution régulière de (2.1) alors pour tout $t \in [0, T]$, $f(t, ., .)$ est à support compact.*

Ce théorème permet entre autres de boucler les estimations de la densité de charge et de montrer in fine que la dérivée spatiale du champ électrique est bien bornée.

### 2.2.2 Existence et unicité d'une solution

Nous allons montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour des densités initiales $f_0 \in C_c^1([0,1]_{per} \times \mathbb{R})$. L'essentiel de la preuve repose sur la construction d'une suite $(f_n, E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de solutions du problème de Vlasov-Poisson retardé:

$$\begin{cases} \partial_t f_{n+1}(t, x, v) + v \partial_x f_{n+1}(t, x, v) - E_n(t, x) \partial_v f_{n+1}(t, x, v) = 0, \\ \partial_x E_n(t, x) = 1 - \rho_n(t, x), \\ \int_{[0,1]_{per}} E_n(x) dx = 0. \\ f_{n+1}(t = 0, x, v) = f_0(x, v). \end{cases}$$

**Exercice 4.** *Soit $f_0 \in C_c^1([0,1]_{per} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$, montrer que la suite $(f_n, E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle vérifie toutes les estimations a priori obtenues en section 2.2.1 avec des bornes uniformes en $n$, à l'exception de la conservation de l'énergie. En particulier montrer qu'il existe deux constantes positives $C_1(T), C_2(T)$ tel que pour tout $p > 1$,*

$$\|f_n(t)\|_{W^{1,p}([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} \leq C_1(T) \|f_0\|_{W^{1,p}([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\|E_n(t)\|_{W^{1,\infty}([0,1]_{per})} \leq C_2(T).$$

On a finalement le résultat d'existence suivant dont la preuve sera vue en exercice :

**Theorem 2.2.2.** *Soit $f_0 \in C_c^1([0,1]_{per} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$, alors il existe $(f, E) \in W^{1,p}([0,1]_{per} \times \mathbb{R}^+) \times W^{1,\infty}([0,1]_{per})$ solution faible du système de Vlasov-Poisson. De plus, l'équation de Vlasov est vérifié au sens fort, i.e presque partout dans $(0, +\infty) \times [0,1]_{per} \times \mathbb{R}$.*

Nous finissons cette partie avec un résultat d'unicité.

**Proposition 8.** *Soit $f_0 \in C_c^1([0,1]_{per} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$, $(f_1, E_1)$ $(f_2, E_2)$ deux solutions dans $W^{1,p}([0,1]_{per} \times \mathbb{R}^+) \times W^{1,\infty}([0,1]_{per})$ du système de Vlasov-Poisson de même donnée initiale $f_0$ alors $f_1 = f_2$.*

*Proof.* Posons $e := f_1 - f_2$ alors par soustraction on a :

$$\partial_t e + v\partial_x e - E_1 \partial_v e = (E_1 - E_2)\partial_v f_2.$$

On multiplie par $e$ et on intégre sur $[0,1]_{per} \times \mathbb{R}$ on a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} e^2 dxdv = 2 \int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} (E_1 - E_2)\partial_v f_2 e dxdv.$$

On a donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|^2_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} \leq 2\|(E_1 - E_2)(t)\|_{L^\infty[0,1]_{per}} \|\partial_v f_2(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} \|e(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})},$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} \leq \|(E_1 - E_2)(t)\|_{L^\infty[0,1]_{per}} \|\partial_v f_2(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})},$$

Or en utlisant l'équation de Poisson, il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $t \in [0,T]$ $\|(E_1 - E_2)(t)\|_{L^\infty[0,1]_{per}} \leq C_0 \|e(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})}$. Puisque $f_2$ est régulière, il existe une consante $C_1(T) > 0$ tel que

$$\|\partial_v f_2(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} \leq C_1(T)$$

et finalement pour tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} \leq C_0 C_1(T) \|e(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})},$$

On conclut à l'aide d'un lemme de Gronwall que $\|e(t)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} = 0$ car $\|e(0)\|_{L^2([0,1]_{per} \times \mathbb{R})} = 0$. $\square$

# Chapter 3

# Approximation numérique

# Bibliography


[1] H. Amman. *Ordinary diffrential equaions*. De Gruyter, 1990.

[2] M. Hauray and P.-E. Jabin. "N-Particles approximation of the Vlasov Equations with Singular Potential". In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 183.3 (2006), pp. 489–524.

[3] ITER. *ITER Organization*.

[4] M. Kac. "Foundations of kinetic theory". In: *Proceedings of the third Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 3 (1956).

[5] P.-L. Lions. "Théorie des jeux de champ moyen et applications". In: *Cours du Collège de France* ().

[6] H Mott-Smith and I Langmuir. In: *Physical review* 28 (1926).