Devoir Maison

Ce problème est constitué de deux parties :

- La première étudie quelques estimations a priori qui sont des conséquences de l'identité d'énergie pour une équation de Vlasov-Poisson.
- La deuxième partie est dediée à l'étude d'un schéma de discrétisation qui respecte ces estimations.

Le modèle On considère le domaine d'étude $(x, v) \in \Omega = [0, 1]_{per} \times \mathbb{R}$ où $[0, 1]_{per}$ désigne le segment unité périodique. On se placera dans le cas où il n' y a aucun problème d'intégrabilité en vitesse. Le problème modèle est l'équation de Vlasov-Ampère pour des ions, d'inconnues la densité $f : [0, +\infty) \times [0, 1]_{per} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, et le champ électrique $E : [0, +\infty) \times [0, 1]_{per} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f + E\partial_v f = 0, \quad t > 0, \quad (x, v) \in \Omega, \\ \partial_t E = -\int_{\mathbb{R}} f v dv, \quad t > 0, \quad x \in [0, 1]_{per}, \\ E(t = 0, .) = E_0(.), \quad f(t = 0, ., .) = f_0(., .). \end{cases}$$

On prendra des données initiales régulières et telles que :

$$0 \leq f_0(x, v) \leq \|f_0\|_{L^\infty(\Omega)},$$

avec

$$\int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x, v) dx dv = 1 \text{ et } \int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} f_0(x, v) v dv = 0.$$

Exercice 1 Estimations a priori

1. Montrer la loi de Gauss sous la forme :

$$\text{si } \partial_x E_0(x) = \int_{\mathbb{R}} f_0(x, v) dv - 1 \text{ alors } \partial_x E(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv - 1 \quad \forall t > 0.$$

2. On définit l'énergie pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{[0,1]_{per}} \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) v^2 dx dv + \frac{1}{2} \int_{[0,1]_{per}} E^2(t, x) dx$. Montrer que l'énergie est constante au cours du temps, $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0$ pour tout $t > 0$.
3. Rappeler pourquoi

$$0 \leq f(t, x, v) \leq \|f_0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall (t, x, v) \in [0, +\infty) \times \Omega.$$

4. On définit la densité $n(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv$. Soit $R > 0$ fixé. Montrer l'inégalité

$$0 \leq n(t, x) \leq \int_{|v| \leq R} f(t, x, v) dv + \frac{1}{R^2} \int_{|v| > R} f(t, x, v) v^2 dv.$$

Montrer en choisissant un R optimal qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$n(t, x) \leq C \|f_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) v^2 dv \right)^{\frac{1}{3}}.$$

En déduire que les solutions du problème modèle sont telles que $n(t) \in L^3([0, 1]_{per})$.

Exercice 2 Etude d'un schéma numérique de différences finies

On se donne $\Delta t, \Delta x, \Delta v$ strictement positifs. On considère les inconnues discrètes $f_{i,j}^n \approx f(t_n, x_i, v_j)$ et $E_i^n \approx E(t_n, x_i)$ avec $t_n = n\Delta t$, $x_i = i\Delta x$ et $v_j = j\Delta v$. Pour simplifier l'analyse, on suppose que le domaine est borné en vitesse et muni de conditions périodiques aussi dans cette direction : $v_j \in [-A, A]$ pour un $A > 0$ assez grand. Les inconnues discrètes vérifient le schéma en trois étapes :

$$\text{I)} \quad \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} = -\sum_j f_{i,j}^n v_j \Delta v,$$

$$\text{II)} \quad \frac{f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = -E_i^{n+1} \frac{1}{\Delta v} \begin{cases} f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n \text{ si } E_i^{n+1} \geq 0, \\ f_{i,j+1}^n - f_{i,j}^n \text{ si } E_i^{n+1} < 0. \end{cases}$$

$$\text{III)} \quad \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -v_j \frac{1}{\Delta x} \begin{cases} f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \text{ si } v_j \geq 0, \\ f_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \text{ si } v_j < 0. \end{cases}$$

1. Préciser les indices pour lesquels chaque étape du schéma est définie.
2. On suppose que l'on a pu choisir à chaque pas de temps, le pas de temps Δt qui satisfait la condition CFL :

$$\max_i |E_i^{n+1}| \Delta t \leq \Delta v, \text{ et } A\Delta t \leq \Delta x.$$

   Montrer que si $0 \leq f_{i,j}^0 \leq C$ pour tout (i, j) alors on a pour tout pas de temps n

$$0 \leq f_{i,j}^n \leq C, \forall i, j.$$

3. Montrer l'égalité

$$\frac{(E_i^{n+1})^2 - (E_i^n)^2}{\Delta t} + \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)^2}{\Delta t} = -2E_i^{n+1} \sum_j f_{i,j}^n v_j \Delta v.$$
