

MAT6150. Mécanique des Fluides.

Robert G. Owens

4 septembre 2014

1 Des idées préliminaires

1.1 Solides, liquides et gaz

Selon Rhyming "Lorsqu'une force est appliquée à un solide celui-ci subit une déformation. Cette déformation est dite élastique si elle disparaît lorsque la force n'est plus appliquée ou au contraire plastique si elle demeure permanente après la disparition de cette même force. Les fluides se comportent différemment car la déformation d'un fluide peut augmenter continuellement et sans limites sous l'effet d'une force même très faible; on dit alors que les fluides s'écoulent.

La différence entre le comportement physique des liquides et des gaz se manifeste principalement dans le phénomène d'expansion. Sous l'influence de la force de gravité une certaine quantité de liquide versée dans un récipient remplit le fond du récipient et forme une surface horizontale libre. Par contre, un gaz remplit la totalité d'un espace fermé auquel il a accès, donc les gaz sont expansibles et les liquides ne le sont pas. Ce comportement est étroitement lié à la compressibilité. Celle-ci peut être assimilée à la résistance du fluide à un changement de volume. Les liquides ont une compressibilité très faible. Donc, les forces qui s'appliquent à un changement de volume sont très puissantes. À l'opposé, la compressibilité des gaz est très élevée. En d'autres termes, les liquides peuvent être considérés comme hautement incompressibles et les gaz comme hautement compressibles."

1.2 Trajectoires et lignes de courant

Afin de décrire un écoulement du point de vue cinématique on a besoin de connaître le champ de vitesse donné par le vecteur vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est le vecteur position. Ce champ vectoriel peut être illustré par deux méthodes différentes. (i) En suivant une particule de fluide dans son mouvement et en relevant l'endroit où se trouve la particule quand le temps varie, on obtient la trajectoire de la particule. Étant donné que la relation entre le vecteur vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ et le vecteur position \mathbf{x} est obtenue par

$\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, les trajectoires des particules sont les intégrales des équations différentielles suivantes

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad \frac{dx_3}{dt} = v_3(x_1, x_2, x_3, t), \quad (1)$$

dans lesquelles t est une variable. Pour intégrer les équations (1) on a besoin des conditions initiales qui, au temps $t = t_0$, donnent la position exacte, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, de la particule qu'on veut suivre (fig. 1). Le résultat de l'intégration se présente sous forme paramétrique où t est le paramètre.

(ii) L'autre méthode consiste à déterminer dans le champ de vitesse des courbes qui, à un instant t fixe, possèdent en chacun de leurs points une tangente parallèle au vecteur vitesse \mathbf{v} . Ces courbes sont les lignes de courant. Pour obtenir ces lignes on observe que dans chaque plan x_1x_2 , x_2x_3 et x_1x_3 l'inclinaison de la projection de la ligne de courant passant par un point P est donnée par rapport aux composantes du vecteur vitesse correspondant

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \frac{dx_2}{dx_3} = \frac{v_2}{v_3}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{v_3}{v_1}. \quad (2)$$

Mathématiquement, donc, une ligne de courant $x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s), x_3 = x_3(s)$ peut être obtenue en résolvant

$$\frac{dx_1/ds}{v_1} = \frac{dx_2/ds}{v_2} = \frac{dx_3/ds}{v_3}. \quad (3)$$

Les lignes de courant changent de position par rapport au temps. Si l'écoulement est stationnaire (c'est à dire, $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{0}$), les particules suivent continuellement les mêmes trajectoires, engendrant ainsi les mêmes lignes de courant.

1.2.1 Exemple: lignes de courant (§1.2.2 de Ryhming)

Déterminer les lignes de courant d'un écoulement stationnaire autour d'un cylindre très long et de section circulaire décrit dans un référentiel fixe par rapport à l'axe du cylindre (fig. 2). En utilisant les coordonnées polaires r, θ dans le plan xy , telles que $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, on peut montrer (voir §??) que les composantes v_r et v_θ du vecteur vitesse dans les directions r et θ sont

$$v_r = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta, \quad (4)$$

où a est le rayon du cylindre, et U_∞ la vitesse de l'écoulement à l'infini.

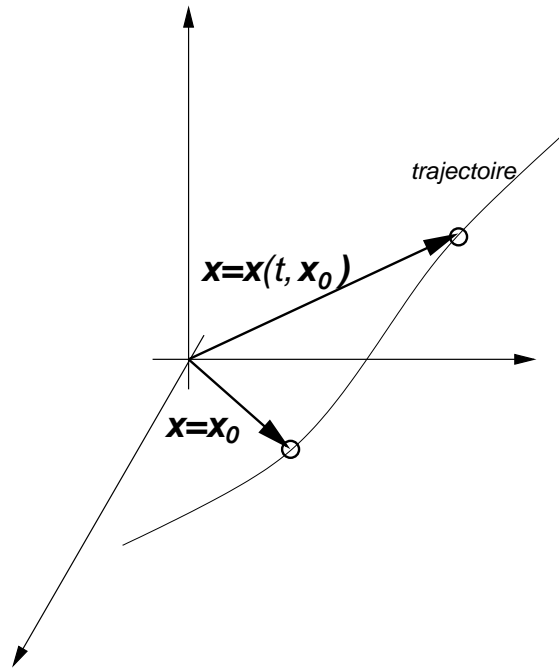


Figure 1: Trajectoire d'une particule qui, à $t = t_0$ se trouve en $x = x_0$.

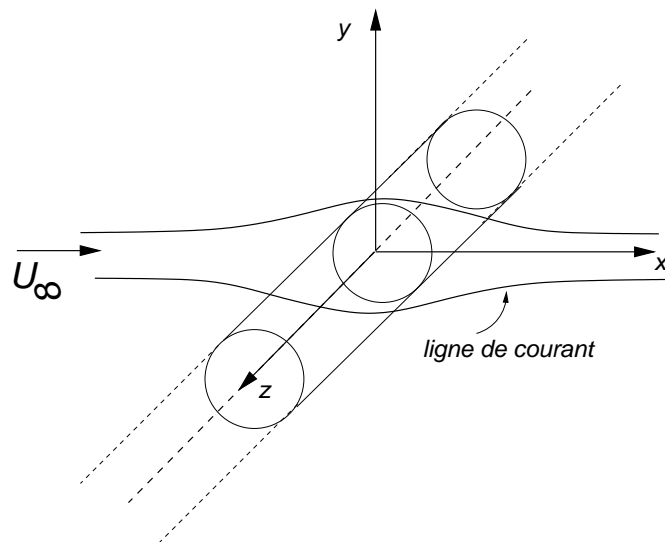


Figure 2: Écoulement stationnaire autour d'un cylindre infini.

À partir de la définition des lignes de courant selon (2) nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}, \quad (5)$$

où v_x et v_y sont les composantes du vecteur vitesse dans les directions x et y respectivement. Mais les composantes de vitesse sont données sous forme polaire. Par la décomposition d'un élément le long de la ligne de courant dans les directions r et θ (fig. 3), nous pouvons écrire

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{v_\theta}{v_r}. \quad (6)$$

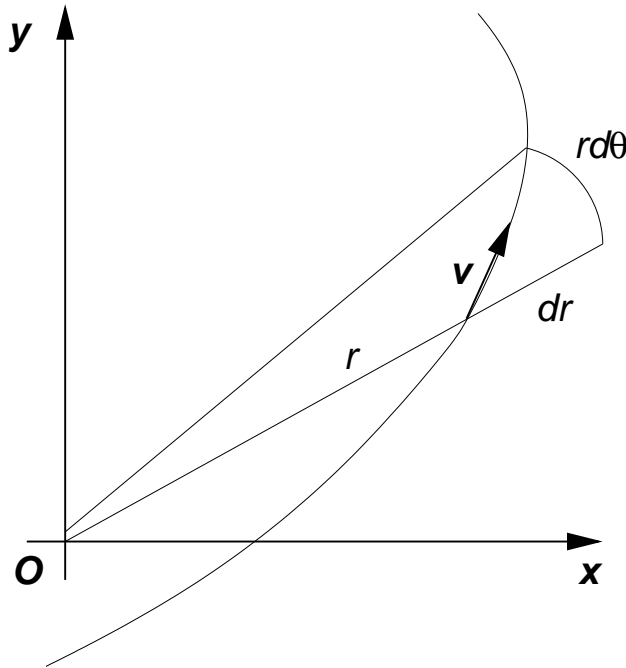


Figure 3: Une décomposition du vecteur vitesse v en composantes polaires (v_r, v_θ) , démontrera que $rd\theta/dr = v_\theta/v_r$.

Ensuite, par la substitution de (4) dans (6) on obtient

$$\int \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2 - a^2} \right) \frac{dr}{r} = - \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta}. \quad (7)$$

L'intégration donne

$$\log \left(\frac{r^2 - a^2}{r} \right) = -\log(\sin \theta) + \log C, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (8)$$

où C est une constante d'intégration. Pour le domaine $r > a$ on obtient

$$C = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) r \sin \theta = y \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (9)$$

On constate que quand $r \rightarrow \infty$, $y \rightarrow C$, c'est-à-dire $y = C$ est l'asymptote d'une ligne de courant: les lignes de courant contournent le cylindre. En particulier, la ligne de courant obtenue pour $C = 0$ est donnée d'une part par $y = 0, r > a$ et d'autre part par $y \neq 0, r = a$. Donc, le cercle $r = a$ fait partie d'une ligne de courant.

1.2.2 Exemple (Exercice 1.8 de Acheson)

Considérer l'écoulement instationnaire

$$v_x = u_0, \quad v_y = kt, \quad v_z = 0, \quad (10)$$

où u_0 et k sont des constantes positives. Démontrer que les lignes de courant sont les lignes droites, et les dessiner à deux temps différents. Démontrer qu'une particule de fluide suit un trajectoire parabolique au fil du temps.

Solution:

1.3 La dérivée particulaire/matérielle

Notez que bien qu'un écoulement puisse être stationnaire (c'est à dire, le vecteur vitesse \mathbf{v} est constant en un point fixe en espace, tel que $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{0}$), \mathbf{v} peut changer lorsqu'on suit une particule de fluide particulière. Soit $f(x_1, x_2, x_3, t)$ une quantité d'intérêt scalaire ou vectorielle (par exemple, la densité ρ ou la vitesse \mathbf{v}). La dérivée particulaire de f "suivant le fluide", qu'on désigne par Df/Dt , est

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t), \quad (11)$$

où $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ changent en fonction du temps à la vitesse locale $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = v_3. \quad (12)$$

Utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (13)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f. \end{aligned} \quad (14)$$

1.4 Accélération

Pour calculer l'accélération d'une particule de fluide de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ il faut tenir compte du fait que, pendant l'intervalle de temps Δt , la particule se déplace à une autre position qui est $\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t + O(\Delta t^2)$. L'accélération \mathbf{a} de la particule est définie par

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t + O(\Delta t^2), t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}. \quad (15)$$

En développant la fonction du premier terme du membre de droite dans cette expression selon le théorème de Taylor on obtient

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t + O(\Delta t^2), t + \Delta t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} v_1 \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} v_2 \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} v_3 \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (16)$$

Ensuite, par la substitution de ce développement dans la définition (15) on obtient

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \equiv \frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \quad (17)$$

2 Dynamique des fluides idéaux

On définira un fluide idéal comme un ayant les propriétés suivantes:

1. Le fluide est *incompressible*, donc la densité de chaque particule de fluide reste invariable le long de sa trajectoire, d'où

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (18)$$

2. Le fluide est initialement homogène. La relation (18) implique seulement que la densité de chaque particule ne change pas durant son mouvement. Par conséquent, si à un instant initial la densité d'une particule $\rho = \rho_0$ alors la densité de la particule considérée reste égale à ρ_0 au cours du temps. Il s'en suit que si le fluide est homogène à un instant initial il restera homogène. Ainsi, pour le fluide initialement homogène et incompressible on admet que la densité est constante.
3. La force exercée sur un élément de surface d'une superficie δS dans le fluide est

$$p\mathbf{n}\delta S, \quad (19)$$

où $p(x_1, x_2, x_3, t)$ est une fonction scalaire, indépendante du vecteur unitaire normal à élément de surface \mathbf{n} , qui s'appelle *la pression*. Pour être plus précis, $p\mathbf{n}\delta S$ est la force exercée sur le fluide vers lequel \mathbf{n} pointe par le fluide de l'autre côté de la surface.

On suppose, en plus, que tous les changements d'état du fluide sont adiabates, c'est à dire qu'il n'y a pas de transfert de chaleur ni de rayonnement.

2.1 Les équations de base

À la page 5 de Ryhming on lit: "L'état d'écoulement d'un fluide est donné par le vecteur vitesse \mathbf{v} , la densité ρ , la pression p et la température T . Le vecteur vitesse \mathbf{v} a les composantes v_1 , v_2 et v_3 dans les directions x_1 , x_2 et x_3 respectivement d'un repère en général orthogonal et curviligne. On dispose des équations suivantes pour déterminer les quatre variables dépendantes inconnues v_1 , v_2 , v_3 et p comme fonctions de x_1 , x_2 , x_3 et t .

- L'équation de continuité qui exige la conservation de la masse de la particule de fluide.
- L'équation de la quantité de mouvement qui traduit la loi de Newton appliquée à des particules de fluide et qui est exprimée sous la forme

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \sum \mathbf{F}. \quad (20)$$

Le membre de gauche indique le taux de variation de la quantité de mouvement de la particule de masse m , et $\sum \mathbf{F}$ la somme vectorielle des forces qui exercent une influence sur la particule. En appliquant (20) à un fluide idéal, on obtient les équations d'Euler, établies par Euler pour la première fois en 1755. Pour un fluide newtonien les équations sont dénommées équations de Navier-Stokes, d'après Navier (1822) et Stokes (1845) qui furent les premiers à les formuler."

Avant d'obtenir les équations d'Euler pour un fluide idéal, on introduit un théorème très important.

2.1.1 Théorème du transport de Reynolds. (Exercice 6.13 Acheson.)

Théorème. Soit $V(t)$ un volume matériel et $G(\mathbf{x}, t)$ une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle quelconque. Alors

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G dV = \int_{V(t)} \left(\frac{DG}{Dt} + G \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV$$

Démonstration.

2.1.2 Conservation de la masse

La masse du fluide occupant un volume matériel $V(t)$ est $\int_{V(t)} \rho dV$ et la conservation de la masse requiert que

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (21)$$

On utilise le théorème du transport de Reynolds et (21) devient

$$\int_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0, \quad (22)$$

tel que (22) est vrai pour tout volume fermé V , et en supposant que la fonction à intégrer est continue, on en déduit que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (23)$$

Pour un fluide incompressible ($D\rho/Dt = 0$) et d'après (23), on conclut que le champ de vitesse doit être solénoïdal, c'est à dire

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (24)$$

Du théorème de la divergence l'équation (24) implique que pour un volume V fermé et fixe, bien qu'il y ait du fluide qui entre et qui sorte au travers de la frontière S , le flux net est

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement du fluide occupant le volume $V(t)$ est

$$\int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV, \quad (25)$$

et la conservation de la quantité de mouvement (Euler) pour un fluide idéal donne

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = - \int_{S(t)} p \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV, \quad (26)$$

où le vecteur \mathbf{g} est la force massique par unité de masse (par exemple, la gravité). En faisant passer la dérivée temporelle du membre de gauche de (26) dans l'intégrale par le théorème du transport de Reynolds, et en utilisant (23), on a

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = - \int_{S(t)} p \mathbf{n} dS = - \int_{V(t)} \nabla p dV + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV. \quad (27)$$

Puisque (27) est vrai pour tout volume fermé V , et en supposant que la fonction à intégrer est continue, on en déduit que

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (28)$$

Les equations (24) et (28) (les équations d'Euler) sont les équations de base pour un fluide idéal.

Définition (*Force conservative*): Un champ vectoriel \mathbf{F} défini sur un domaine \mathcal{D} est conservatif si, pour deux points quelconques P et $Q \in \mathcal{D}$, l'intégrale curviligne

$$\int_P^Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x},$$

a la même valeur de long de tout chemin lisse par morceaux entre P et Q entièrement contenu dans \mathcal{D} . Alors, si $P = (x, y, z)$ et un point fixe $O \in \mathcal{D}$

$$\varphi(P) = \int_O^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \varphi.$$

Puisque la force gravitationnelle est conservative elle peut être écrite en fonction d'un gradient d'un potentiel:

$$\mathbf{g} = -\nabla \chi. \quad (29)$$

À l'aide de l'identité vectorielle ((A.9) d'Acheson)

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right), \quad (30)$$

les équations d'Euler peuvent maintenant être exprimées sous la forme (de Lamb)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \chi \right). \quad (31)$$

2.2 Le théorème de Bernoulli (1738)

Si l'écoulement est stationnaire l'équation (31) se réduit à

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \chi \right). \quad (32)$$

En prenant le produit scalaire de (32) avec \mathbf{v} on obtient

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \chi \right) = 0, \quad (33)$$

de sorte que pour un fluide idéal $H := p/\rho + v^2/2 + \chi$ est constant le long d'une ligne de courant (Bernoulli). H est donc *un invariant de Riemann* (voir la Section 2.3 pour la démonstration que les lignes de courant sont des courbes caractéristiques dans un écoulement stationnaire).

2.2.1 Exemple: le théorème de Torricelli (§4.1.8 de Ryhming)

Il s'agit de calculer la vitesse d'un fluide incompressible débouchant d'un petit orifice situé au fond d'un réservoir ouvert de grand diamètre. Pour obtenir la vitesse v , (33) est applicable, le terme χ se référant alors au potentiel de la gravité terrestre. Par conséquent, en fixant l'axe z selon la verticale, on obtient selon (29)

$$\mathbf{g} = -\nabla\chi = -g\mathbf{k}, \quad (34)$$

où $\chi = gz$.

Ainsi, (33) s'écrit pour le cas traité

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = \text{constante}, \quad (35)$$

le long de chaque ligne de courant. Puis l'application de (35) aux niveaux $z = h$ et $z = 0$ selon la figure 4, donne

$$0 + \rho gh + p_0 = \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 + p_0, \quad (36)$$

puisque la pression atmosphérique p_0 s'applique en tout lieu de la périphérie du réservoir. La vitesse cherchée devient alors

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (37)$$

ce qui exprime *le théorème de Torricelli*. Observons que le résultat est le même que si une particule de fluide tombait d'une hauteur de h et est indépendant de la direction du jet sortant.

2.3 Caractère mathématique des équations d'Euler.

Pour simplifier on ne considérera que les équations bidimensionnelles instationnaires:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Le système (38) peut être réécrit sous la forme

$$\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_3 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (39)$$

où $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ et \mathbf{A}_3 sont des matrices 3×3 et le vecteur

$$\mathbf{U} = (v_1, v_2, p)^T. \quad (40)$$

Considérer maintenant une surface S ayant l'équation

$$\varphi(x, y, t) = 0, \quad (41)$$

et sur laquelle les dérivées $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ et $\partial\varphi/\partial t$ existent partout. On supposera par la suite que $\partial\varphi/\partial y \neq 0$. L'intersection entre cette surface et le plan $t = cte$ est une courbe, le long de laquelle une dérivée tangentielle de U (qu'on note ici par $\partial U/\partial s_1$) est donnée par

$$\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\partial U}{\partial s_1} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, 0 \right) \cdot \nabla U = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (42)$$

D'une manière pareille, notant une dérivée tangentielle de U le long de l'intersection entre la surface (41) et le plan $x = cte$ par $\partial U/\partial s_2$, on aura

$$\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\partial U}{\partial s_2} = \left(0, -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \cdot \nabla U = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (43)$$

On peut maintenant éliminer $\partial U/\partial t$ et $\partial U/\partial x$ de l'équation (39) en utilisant (42)-(43). Ceci nous amène à

$$\begin{aligned} \left(A_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + A_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_3 \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial y} = & -A_1 \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\partial U}{\partial s_2} \\ & - A_2 \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\partial U}{\partial s_1}. \end{aligned} \quad (44)$$

Si le déterminant

$$\det \left(A_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + A_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_3 \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right), \quad (45)$$

est non-zéro, alors l'équation (44) peut être résolue pour $\partial U/\partial y$ et ensuite les autres premières dérivées partielles de U peuvent être déterminées de (42) et (43). Lorsque le déterminant (45) est égal à zéro, S est une surface caractéristique. Notons les composantes $x-$, $y-$ et $t-$ du vecteur normal unitaire à la surface S par n_1 , n_2 et n_t , respectivement. Alors, pour que S soit une surface caractéristique,

$$\det \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & 0 \\ n_t + v_1 n_1 + v_2 n_2 & 0 & \frac{1}{\rho} n_1 \\ 0 & n_t + v_1 n_1 + v_2 n_2 & \frac{1}{\rho} n_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (46)$$

qui veut dire que

$$\begin{aligned} n_1 \left[\frac{1}{\rho} n_1 (n_t + v_1 n_1 + v_2 n_2) \right] - n_2 \left[-\frac{1}{\rho} n_2 (n_t + v_1 n_1 + v_2 n_2) \right] &= 0, \\ \Rightarrow \frac{1}{\rho} (n_1^2 + n_2^2) (n_t + v_1 n_1 + v_2 n_2) &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Il y a donc deux solutions complexes conjuguées et une solution réelle et le système est, par conséquent, de type mixte. La courbe ayant un vecteur tangent $\mathbf{t} = (v_1, v_2, 1)$ se situe sur la surface caractéristique réelle dont les composantes du vecteur normal satisfont

$$n_t + v_1 n_1 + v_2 n_2 = 0, \quad (48)$$

puisque $\mathbf{t} \cdot (n_1, n_2, n_t) = 0$. Une dérivée $\partial/\partial s$ d'une fonction f dans une direction tangentielle le long de cette courbe peut-être définie comme

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{t} \cdot \nabla f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (49)$$

ce qui est la dérivée particulaire introduite en Section 1.3. Donc, nous identifions la courbe comme la trajectoire d'une particule de fluide. Dans le cas stationnaire cette trajectoire est la même qu'une ligne de courant.

3 Rotationnel de la vitesse d'écoulement.

Il faut noter que le théorème de Bernoulli ne dit que H reste invariant le long de chaque ligne de courant. La valeur constante de H peut changer, en général d'une ligne de courant à une autre. Il y a un cas important, cependant, où H est constant partout dans le champ d'écoulement. C'est lorsque l'écoulement est stationnaire et *irrotationnel*.

3.1 Ecoulement irrotationnel

Définition Un écoulement irrotationnel est un écoulement dont le champ vitesse satisfait à

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (50)$$

Le vecteur tourbillon ω est défini comme suit:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (51)$$

et donc est égal à zéro, par définition, pour un écoulement irrotationnel.

On peut démontrer (voir les notes de cours de MAT1410, par exemple) que dans un domaine simplement connexe un champ vectoriel irrotationnel ayant des dérivées partielles premières continues est conservatif et un champ vectoriel conservatif ayant des dérivées partielles premières continues est irrotationnel.

Considérons maintenant le vecteur tourbillon d'un écoulement bidimensionnel où (utilisant des coordonnées cartésiennes) nous écrivons (x, y) au lieu de (x_1, x_2) et (u, v) au lieu de (v_1, v_2) . Dans ce cas-ci

$$\mathbf{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0), \quad (52)$$

et $\omega = (0, 0, \omega)$ où

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (53)$$

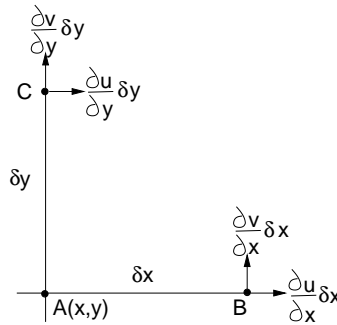


Figure 4: Les composantes de vitesse montrées ici sont relatives à celles de la particule fluide en A.

Suivant Acheson (§1.4) on peut donner une interprétation du vecteur tourbillon en deux dimensions en considérant deux éléments linéaires et courts de fluide AB et AC qui sont perpendiculaires à un moment donné, comme montré dans la figure 4. La y ème composante de la vitesse en B moins celle en A est

$$v(x + \delta x, y, t) - v(x, y, t) \approx \frac{\partial v}{\partial x} \delta x, \quad (54)$$

de sorte que $\partial v / \partial x$ est approximativement égal à la vitesse angulaire de l'élément de fluide AB . De la même manière, $\partial u / \partial y$ représente la vitesse angulaire instantanée (en sens inverse) de la ligne AC . Donc en n'importe quel point dans le fluide

$$\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (55)$$

est approximativement la vitesse angulaire moyenne de deux lignes courtes de fluide qui sont, en ce moment-ci, mutuellement perpendiculaires. ω est donc une mesure de la rotation *locale* des éléments de fluide.

On souligne que le vecteur tourbillon, cependant, n'a rien à voir avec la rotation *globale* d'un fluide, comme illustrée dans le prochain exemple.

3.1.1 Exemples (§1.4 d'Acheson)

Un exemple pour démontrer la distinction entre le vecteur tourbillon et la rotation globale d'un fluide est donné par le champ de vitesse décrit en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par

$$\mathbf{v} = \frac{k}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad (56)$$

où k est une constante. Le vecteur tourbillon de cet écoulement est

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\theta & v_z \end{vmatrix}. \quad (57)$$

Bien que le fluide tourne globalement on voit que l'écoulement est irrotationnel presque partout puisque $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ sauf en $r = 0$. (Remarque:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \frac{k}{a} \int_{\theta=0}^{2\pi} a d\theta = 2\pi k,$$

pour toute courbe fermée \mathcal{C} qui entoure l'origine, ce qui démontre que \mathbf{v} n'est pas conservatif partout.)

Notons que la z ème composante du vecteur tourbillon d'un autre écoulement dont le champ vitesse est

$$\mathbf{v} = \Omega r \mathbf{e}_\theta, \quad (58)$$

(avec Ω une constante), est simplement égale à 2Ω . Voir la figure 5.

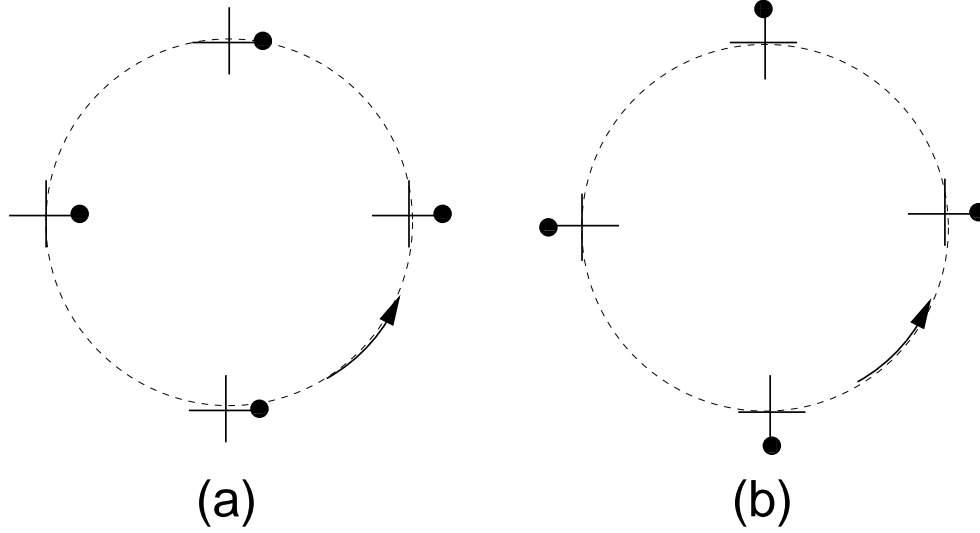


Figure 5: Parcours d'une petite roue à palettes placée dans le champ de vitesse (a) $v = (k/r)e_\theta$ (56), (b) $v = \Omega r e_\theta$ (58).

3.2 L'équation du rotationnel de la vitesse

Sous sa forme (31) l'équation d'Euler peut être écrite

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \omega \times v = -\nabla H, \quad (59)$$

et en prenant le rotationnel de cette équation on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times v) = 0. \quad (60)$$

Utilisant l'identité

$$\nabla \times (F \times G) = (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G + F(\nabla \cdot G) - G(\nabla \cdot F),$$

(voir (A.6) d'Acheson) (60) devient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)v + \omega \nabla \cdot v - v \nabla \cdot \omega = 0. \quad (61)$$

Le quatrième terme disparaît parce que le fluide est incompressible tandis que le cinquième terme disparaît parce que $\nabla \cdot \nabla \times \equiv 0$. Nous avons alors l'équation du rotationnel de la vitesse:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)v. \quad (62)$$

Pour un écoulement bidimensionnel

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left((0, 0, \omega) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (u(x, y, t), v(x, y, t), 0) = \mathbf{0}. \quad (63)$$

Il s'en suit alors que

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0, \quad (64)$$

et on conclut que pour l'écoulement bidimensionnel d'un fluide idéal, soumis à une force massique conservative, le vecteur tourbillon de chaque élément individuel de fluide est conservé.

3.3 Théorèmes de circulation d'un écoulement idéal

Définition La *circulation* Γ , autour d'une courbe fermée $\mathcal{C}(t)$ est définie par

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds, \quad (65)$$

où \mathbf{t} est un vecteur tangentiel unitaire à la courbe et ds est un élément de longueur d'arc. La courbe \mathcal{C} est traversée dans le sens positif (selon la règle de la main droite).

3.3.1 Théorème de circulation de Kelvin

Théorème. Dans l'écoulement d'un fluide idéal soumis à un champ de force conservatif, tel que $\mathbf{g} = -\nabla\chi$, la circulation Γ autour d'une courbe arbitraire et fermée, qui se meut avec le fluide, demeure constante.

Démonstration. Pour vérifier cet énoncé, considérons une courbe \mathcal{C} arbitraire mais fermée, qui se meut avec l'écoulement. Les mêmes particules de fluide font ainsi toujours partie de la courbe. Ensuite, en calculant le taux de changement de Γ par rapport au temps en suivant la courbe dans son mouvement; nous obtenons

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = (\text{exercice}) \oint_{\mathcal{C}(t)} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{x}. \quad (66)$$

En utilisant l'équation d'Euler

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = - \oint_{\mathcal{C}(t)} \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \chi \right) \cdot d\mathbf{x} = - \left[\frac{p}{\rho} + \chi \right]_{\mathcal{C}} = 0, \quad (67)$$

puisque \mathcal{C} est une courbe fermée et l'expression à l'intérieur des parenthèses, qui représente un potentiel, est univoque.

Le théorème de Kelvin peut être exprimé sous une autre forme. Selon (65) et faisant appel au théorème de Stokes on a

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{S}(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (68)$$

où \mathcal{S} est une surface délimitée par la courbe \mathcal{C} . Par conséquent, (67) implique que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (69)$$

Ainsi le débit tourbillonnaire au travers de la surface \mathcal{S} , qui se meut avec le fluide dans un écoulement idéal et soumis à un champ de force conservatif, demeure constant.

3.3.2 Théorèmes de circulation de Helmholtz

Définition Un fil tourbillonnaire $x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s), x_3 = x_3(s)$ est défini comme une courbe dans l'espace qui, à un instant t fixe, possède en chacun de ses points une tangente parallèle au vecteur tourbillon (fig. 6a). L'équation différentielle d'une telle courbe est donc

$$\frac{dx_1(s)/ds}{\omega_1} = \frac{dx_2(s)/ds}{\omega_2} = \frac{dx_3(s)/ds}{\omega_3}. \quad (70)$$

Les fils tourbillonnaires peuvent engendrer des surfaces tourbillonnaires et, en particulier, des tubes tourbillonnaires (fig. 6b). Puisque

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (71)$$

on obtient

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (72)$$

exprimant le fait que $\boldsymbol{\omega}$ est un champ vectoriel solénoïdal. Par conséquent, en appliquant le théorème de la divergence à un tube tourbillonnaire, (voir fig. 6b), on obtient

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV = 0 = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (73)$$

La surface \mathcal{S} fermée est constituée par les deux sections \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , et le tube tourbillonnaire entre ces deux sections. Le vecteur \mathbf{n} de cette surface est orienté dans le sens opposé du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ en \mathcal{S}_1 mais dans le sens de $\boldsymbol{\omega}$ en \mathcal{S}_2 . Sur le tube tourbillonnaire, \mathbf{n} est perpendiculaire à la paroi, et, selon la définition du tube tourbillonnaire, $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ sur la paroi du tube. On trouve ainsi

$$-\int_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (74)$$

Par conséquent, le débit tourbillonnaire est constant tout le long du tube (Théorème 1).

Il s'en suit qu'un tube ou un fil tourbillonnaire ne peut pas commencer ou se terminer dans le fluide. Ainsi, les fils tourbillonnaires ne peuvent se présenter que de trois manières différentes

- en étant de longueur infinie, même dans un volume limité;
- en suivant des courbes fermées;

- en commençant et en se terminant aux surfaces-frontières du fluide (où on peut générer $\omega \neq 0$).

En appliquant le théorème de Stokes, les deux intégrales dans (74) s'écrivent

$$-\int_{\mathcal{S}_1} \omega \cdot n dS = \int_{\mathcal{S}_2} \omega \cdot n dS = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \Gamma, \quad (75)$$

où les deux courbes fermées \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont parcourues dans le même sens. Ces intégrales définissent ainsi la circulation Γ autour du tube tourbillonnaire. La circulation Γ autour du tube est donc la même pour toutes coupes transversales et ne dépend pas du temps non plus (voir le théorème de circulation de Kelvin), et peut être utilisée comme une mesure de l'intensité du tube tourbillonnaire.

Théorème 2. Pour un fluide idéal qui se déplace dans la présence d'une force massique conservative, les éléments de fluide qui se sont situés sur un fil tourbillonnaire à un moment donné, demeurent sur un fil tourbillonnaire, c'est à dire, les fils tourbillonnaires se déplacent avec le fluide.

Démonstration. On définit une surface tourbillonnaire comme une surface telle que ω est un vecteur tangent à la surface en chaque point. On visualise le fil tourbillonnaire, dans sa configuration initiale, comme l'intersection de deux surfaces tourbillonnaires \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 (voir la figure 7). On marque maintenant les éléments de fluides appartenant à une de ces deux surfaces (\mathcal{S}_1) et on considère une courbe fermée \mathcal{C} qui se meut avec le fluide et qui est contenue dans la surface marquée et qui délimite une portion de surface \mathcal{S}^* . En $t = 0$ la circulation autour de \mathcal{C} est zéro, puisque par le théorème de Stokes

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{S}^*} \omega \cdot n dS, \quad (76)$$

et $\omega \cdot n$ est zéro sur \mathcal{S}^* . Au fil du temps la circulation autour de \mathcal{C} restera zéro, par le théorème de circulation de Kelvin. Puisque la même chose est vrai pour chaque circuit \mathcal{C} , en utilisant le théorème de Stokes de nouveau on constate que $\omega \cdot n$ restera zéro en chaque point de la surface marquée. Cette surface reste une surface tourbillonnaire au fil du temps, donc. La même chose peut être dite au sujet de la surface consistant des particules de fluides appartenant initialement à l'autre surface (\mathcal{S}_2). Par conséquent l'intersection des deux surfaces reste un fil tourbillonnaire.

3.3.3 Exemple (§5.3 d'Acheson)

Considérons une section de longueur ℓ d'un tube tourbillonnaire mince: on peut supposer que le vecteur tourbillon est constant au travers d'une coupe transversale et que, par conséquent, Γ est approximativement égale au produit $\omega \delta S$ où δS est la superficie de la coupe transversale du tube, supposée d'être approximativement uniforme tout le long du tube. Puisque δS est aussi la superficie de la coupe transversale du fluide qui occupe le tube et le fluide doit conserver son volume, δS diminuera lorsque la longueur

ℓ augmente. Donc, ω est proportionnelle à ℓ et un étirement des tubes tourbillonnaires intensifie la grandeur du vecteur tourbillon. Un exemple est vu dans les tornades: l'air chaud ascendant peut étirer des tubes tourbillonnaires et la grandeur du vecteur tourbillon est par conséquent amplifiée. Lorsque les nuages de l'orage s'avancent, l'entonnoir de la tornade peut s'incliner, ce qui illustre le deuxième théorème de Helmholtz, décrit ci-dessus.



Figure 8: Une tornade

Pour d'autres exemples (le ralentissement de la rotation dans une tasse de thé, l'écoulement rotatif dans une conduite, la flexion et l'étirement des fils tourbillonnaires) voir §5.2 d'Acheson et §4.2.4 et §4.2.5 de Ryhming.