6 Ecoulements à nombre de Reynolds faible.

L'analyse d'un écoulement caractérisé par un nombre de Reynolds faible ($Re \ll 1$) peut être réalisée de façon approximative lorsque certains termes dans les équations de Navier-Stokes deviennent négligeables.

Un exemple provient du cas d'un écoulement à vitesse très faible: les termes non linéaires (d'inertie) peuvent devenir plus petits que les termes visqueux puisque

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}| &= O(U^2/L), (\text{terme d'inertie}) \\ |\nu\nabla^2\boldsymbol{v}| &= O(\nu U/L^2), (\text{terme visqueux}) \end{aligned} \tag{269}$$

et le rapport entre les deux termes devient

$$\frac{|(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}|}{|\nu\nabla^2\boldsymbol{v}|} = O\left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right) = O(Re). \tag{270}$$

Par conséquent, pour un écoulement qui est suffisamment lent ($U \ll 1$) et en supposant que l'écoulement est stationnaire (ou presque), (235) se simplifie en *les équations stationnaires de Stokes*:

$$0 = -\nabla p + \eta\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{271}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{272}$$

Une autre manière d'obtenir le même résultat est d'introduire les nouvelles variables adimensionnelles

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}/L,\ t^* = t/(L/U),\ \boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}/U,\ p^* = p/(\eta U/L).$$

Cette fois on obtiendra

$$Re\frac{D\boldsymbol{v}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2}\boldsymbol{v}^*. \tag{273}$$

Si on suppose que les termes dans la dérivée matérielle restent bornée lorsque $Re \to 0$ on obtient la même équation de Stokes en laissant tendre vers zéro le nombre de Reynolds.

6.1 Unicité des écoulements lents

Soit V un volume occupé par un fluide visqueux et borné par une frontière fermée S. On suppose que la vitesse $\boldsymbol{v}$ est prescrite comme $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B$ sur S. Il y a alors tout au plus une solution $\boldsymbol{v}$ des équations de Stokes en V qui satisfait cette condition limite.

Démonstration. Supposons qu'il existe une autre vitesse $\boldsymbol{v}^*$ qui satisfait aussi les équations de Stokes (avec une pression correspondante p^*, disons) et la condition limite $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}_B$ sur S. On définit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{v}$ et $P = p^* - p$.

En soustrayant les équations de Stokes pour $(\boldsymbol{v}, p)$ et $(\boldsymbol{v}^*, p^*)$ on obtient

$$0 = -\nabla P + \eta\nabla^2\boldsymbol{u},\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{274}$$

avec $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ sur S. Sous la forme des composantes les équations (274) s'écrivent

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}, \ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{275}$$

On multiplie la première de ces équations par u_i pour arriver à l'équation

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_i}(Pu_i) + \eta u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}, \tag{276}$$

puisque $\partial u_i / \partial x_i = 0$. On intégre sur V et on emploi le théorème de la divergence pour voir que

$$0 = -\int_S P u_i n_i \, dS + \eta \int_V u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2} \, dV. \tag{277}$$

Le premier membre de droite disparait et donc

$$\begin{aligned} \eta \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] dV = 0, \\ \Rightarrow \eta \int_S u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \, dS - \eta \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dV = 0, \\ \Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dV = 0. \end{aligned} \tag{278}$$

On conclut que $\boldsymbol{u}$ est une constante partout. Puisque $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ sur S cette constante est égale à zéro et donc $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^*$. ■

Une conséquence de l'unicité de la solution $\boldsymbol{v}$ des équations de Stokes avec des conditions limites de type Dirichlet $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B$ est que lorsqu'on remplace $\boldsymbol{v}_B$ avec $-\boldsymbol{v}_B$, la solution du problème ainsi "inversé" est $-\boldsymbol{v}$. La nouvelle pression devient $cte - p$.

6.2 Mouvement lent d'une sphère

On cherche une solution aux équations de Stokes pour l'écoulement uniforme autour d'une sphère, et donc un champ de vitesse axisymétrique sous la forme

$$\boldsymbol{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi) = (v_r(r,\theta), v_\theta(r,\theta), 0), \tag{279}$$

où on utilise des coordonnées sphériques (r,θ,ϕ). Pour satisfaire la condition d'incompressibilité exactement on peut introduire une fonction de courant ψ sous la forme

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{280}$$

Alors,

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \left(0, 0, -\frac{1}{r\sin\theta}E^2\psi\right), \tag{281}$$

où E^2 désigne l'operateur différentiel

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right). \tag{282}$$

En écrivant l'équation (271) sous la forme

$$\nabla p = -\eta\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v}), \tag{283}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\eta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}E^2\psi,\\ \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} &= -\frac{\eta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}E^2\psi,\end{aligned} \tag{284}$$

et en éliminant la pression (par différentiation) on trouve que $E^2(E^2\psi) = 0$, c.à.d.,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi = 0. \tag{285}$$

Les conditions limites sont

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \text{ en } r = a, \tag{286}$$

avec la condition que l'écoulement devient uniforme lorsque $r \longrightarrow \infty$:

$$v_r \sim U\cos\theta \text{ et } v_\theta \sim -U\sin\theta \text{ lorsque } r \longrightarrow \infty. \tag{287}$$

La condition ci-dessus peut être reécrite

$$\psi \sim \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta \text{ lorsque } r \longrightarrow \infty, \tag{288}$$

et on essayera de trouver une solution de la forme

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta. \tag{289}$$

On voit que

$$E^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) f \sin^2 \theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right) f \sin^2 \theta, \tag{290}$$

et donc que

$$E^4 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 f \sin^2 \theta. \tag{291}$$

Par conséquent, une solution de type (289) est possible pourvu que

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 f = 0. \tag{292}$$

Cette équation a des solutions de la forme $f = r^\alpha$ à condition que

$$\begin{aligned} &(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) - 2(\alpha-2)(\alpha-3) - 2\alpha(\alpha-1) + 4) r^{\alpha-4} = 0, \\ &\Rightarrow [(\alpha-2)(\alpha-3) - 2][\alpha(\alpha-1) - 2] = 0, \\ &\Rightarrow \alpha = -1, 1, 2 \text{ ou } 4, \end{aligned} \tag{293}$$

et donc

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4. \tag{294}$$

Les conditions vers l'infini impliquent que

$$f \sim \frac{1}{2} U r^2,$$

lorsque $r \to \infty$ ce qui nécessite que $C = U/2$ et que $D = 0$. D'après les conditions limites (286) nous avons $f(a) = f'(a) = 0 \Rightarrow A = Ua^3/4$ et $B = -3Ua/4$. La solution ψ est maintenant écrite

$$\psi = \frac{U}{4} \left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar \right) \sin^2 \theta, \tag{295}$$

d'où on obtient les composantes de vitesse:

$$v_r = \frac{U}{2} \left(2 + \frac{a^3}{r^3} - 3\frac{a}{r} \right) \cos\theta, \; v_\theta = -\frac{U}{4} \left(4 - \frac{a^3}{r^3} - 3\frac{a}{r} \right) \sin\theta. \tag{296}$$

Pour calculer la traînée D de la sphère on commence en calculant

$$E^2 \psi = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) \left(\frac{U}{4} \left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar \right) \sin^2 \theta \right) = \frac{3aU}{2r} \sin^2 \theta, \tag{297}$$

et après on intègre les equations (284) pour obtenir

$$p = p_\infty - \frac{3Ua\eta}{2r^2}\cos\theta. \tag{298}$$

La formule pour D est

$$D = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi, \tag{299}$$

où $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta$ désigne un vecteur unitaire dans la direction de l'écoulement (suivant l'axe $\theta = 0$). Donc

$$\begin{aligned} D &= 2\pi a^2\int_{\theta=0}^{\pi}(\sigma_{\theta r}\boldsymbol{e}_\theta + \sigma_{rr}\boldsymbol{e}_r)\cdot(\boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta)\sin\theta\, d\theta, \\ &= 2\pi a^2\int_{\theta=0}^{\pi}(\sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{\theta r}\sin\theta)\sin\theta\, d\theta, \\ &= 6\pi\eta Ua, \end{aligned} \tag{300}$$

où nous avons utilisé les résultats (voir (A.44) d'Acheson)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\theta} &= \eta r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{\eta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}, \end{aligned} \tag{301}$$

avec v_r et v_θ données par (296) et la pression p donnée par (298). La vitesse terminale U d'un ballon qui tombe (lentement) dans une étendue infinie d'un fluide très visqueux peut être calculée maintenant du fait qu'en ce moment-là la traînée est en équilibre avec le poids net du ballon:

$$6\pi\eta Ua = \frac{4}{3}\pi a^3(\rho_{\text{sphère}} - \rho_{\text{fluide}})g. \tag{302}$$

6.3 Ecoulement dans une couche mince

Il s'agit d'un écoulement dans l'espace formé par deux parois rigides $z = 0$ et $z = h(x,y)$. Soit U une vitesse horizontale typique et L une longueur caractéristique de l'écoulement. Supposons, en plus, que $h \ll L$. Pour que la condition de non-glissement sur les parois en $z = 0$ et $z = h$ soit satisfaite les composantes de vitesse dans les directions x et y changeront de l'ordre de U sur une distance de z de l'ordre de h. C'est à dire, $\partial u/\partial z$ ou $\partial v/\partial z$ sont de $O(U/h)$, et $\partial^2 u/\partial z^2$ ou $\partial^2 v/\partial z^2$ sont de $O(U/h^2)$. Cependant, les dérivées de u ou v par rapport à x ou y sont beaucoup plus faibles: $\partial u/\partial x$ est de $O(U/L)$, $\partial^2 u/\partial x^2$ est de $O(U/L^2)$ avec des résultats pareils pour v.

L'ordre de grandeur de la troisième composante de vitesse w est obtenu de l'équation d'incompressibilité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{303}$$

d'où on voit que $\partial w/\partial z$ est de $O(U/L)$ et donc que w est de $O(Uh/L)$. On obtient alors

$$
\begin{aligned}
\nu\nabla^2\boldsymbol{v} &\sim \nu\left(\frac{U}{L^2}+\frac{U}{L^2}+\frac{U}{h^2}\right) \quad \text{(deux premières composantes)},\\
\nu\nabla^2\boldsymbol{v} &\sim \nu\left(\frac{Uh}{L^3}+\frac{Uh}{L^3}+\frac{Uh}{Lh^2}\right) \quad \text{(z-ième composante w)},\\
(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} &\sim \frac{U^2}{L}\left(1,1,\frac{h}{L}\right).
\end{aligned} \tag{304}
$$

On conclut de (304) que le terme visqueux des équations de Navier-Stokes peut être approximé par

$$\nu\nabla^2\boldsymbol{v} \approx \nu\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial z^2}, \tag{305}$$

et que le terme d'inertie peut être négligé par rapport au terme visqueux si

$$\frac{|(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}|}{|\nu\nabla^2\boldsymbol{v}|} \sim O\left(\frac{UL}{\nu}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right) \ll 1. \tag{306}$$

On note qu'on n'a pas besoin que le nombre de Reynolds UL/ν soit petit pour que les forces visqueuses dominent. Les équations de Navier-Stokes sont réduites maintenant à

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial x} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \frac{\partial p}{\partial y} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\ \frac{\partial p}{\partial z} = \eta\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{307}
$$

Puisque w est plus petite par un facteur de h/L que les deux autres composantes de vitesse il s'en suit que $\partial p/\partial z$ est beaucoup plus petite que $\partial p/\partial x$ ou $\partial p/\partial y$ et que la pression p peut être considerée en fonction uniquement de x et de y. En intégrant les deux premières équations ci-dessus par rapport à z on obtient

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}z^2 + Az + B, \tag{308}$$

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial y}z^2 + Cz + D, \tag{309}$$

où $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$, A, B, C et D sont tous des fonctions de x et y seulement. En ce qui concerne le tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{310}$$

on voit que puisque $p \sim O(\eta UL/h^2)$ (voir (307)) et que la composante la plus grande du seconde membre de droite de (310) est $O(\eta U/h)$,

$$\sigma_{ij} \approx -p\delta_{ij}. \tag{311}$$

6.3.1 Exemple 1: Palier portant bidimensionnel

Il s'agit de l'écoulement dans un espace étroit formé par deux parois non parallèles. Une de ces parois est fixe et l'autre se meut à la vitesse U. La distance $h(x)$ entre les deux parois est donc une fonction de x. Pour un palier portant le rapport $h_{max}/L \ll 1$, où L est la longueur du saumon.

L'équation de la continuité est exprimée en fonction du débit volumique, qui doit être le même à travers chaque section $x =$ constante

$$Q = \int_0^{h(x)} u \, dz = \text{constante}. \tag{312}$$

Les conditions limites sont

$$z = 0 : u = U, \; z = h(x) : u = 0, \; x = 0 : p = p_B, \; x = L : p = p_B. \tag{313}$$

La solution de

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{314}$$

est donnée par (308); en appliquant (313) pour obtenir les constantes A et B, on obtient

$$u = U\left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{z}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)\frac{h^2}{2\eta}\left(\frac{dp}{dx}\right). \tag{315}$$

Le gradient de pression est déterminé en faisant appel à (312). L'intégration par rapport à z de (315) donne ainsi

$$Q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\eta}\left(\frac{dp}{dx}\right). \tag{316}$$

Puisque Q est une constante, on obtient donc la variation de la pression en intégrant (316) par rapport à x:

$$p(x) = p_B + 6\eta U \int_0^x \frac{dx'}{h^2(x')} - 12\eta Q \int_0^x \frac{dx'}{h^3(x')}, \tag{317}$$

où la condition $p(0) = p_B$ a été respectée. En utilisant également $p(L) = p_B$, on obtient

$$Q = \frac{U}{2} \int_0^L \frac{dx'}{h^2(x')} \bigg/ \int_0^L \frac{dx'}{h^3(x')} \tag{318}$$

Il s'en suit que le débit volumique et la distribution de pression sont fixés dès que la fonction $h(x)$ est connue. Dans le cas spécial d'un palier portant plan avec $h(x)$ qui se varie linéairement entre h_1 en $x = 0$ et h_2 en $x = L$:

$$h(x) = \left(\frac{h_2 - h_1}{L}\right)x + h_1, \tag{319}$$

$$Q = \frac{Uh_1h_2}{(h_1 + h_2)}, \tag{320}$$

et donc

$$\frac{p(x) - p_B}{6\eta UL} = \frac{(h_1 - h(x)))(h_2 - h(x))}{(h_2^2 - h_1^2)h(x)^2}. \tag{321}$$

Puisque $h(x)$ se situe entre h_1 et h_2 il est clair que si $h_2 < h_1$ alors p sera superieure à p_B partout dans la couche et donc qu'il y aura une force nette vers le haut pour porter une charge.

Ce problème bidimensionnel a été traité par Reynolds en 1878.

6.3.2 Exemple 2: Ecoulement dans une cellule de Hele-Shaw (1898)

Supposons que les frontières en haut et en bas sont tous les deux plates et parallèles tel que h est constante. On suppose que l'écoulement entre les deux plaques est engendré par des gradients horizontales de pression et est autour des cylindres ayant l'axe dans la direction z. En utilisant les conditions de non-glissement en $z = 0$ et $z = h$ on trouve de (308) et (309) que

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} z(h-z), \\ v &= -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial y} z(h-z). \end{aligned} \tag{322}$$

Le fait que p n'est en fonction que de x et y veut dire que bien que la vitesse soit en fonction de z, le rapport v/u ne l'est pas. Donc, la direction de l'écoulement est indépendante de z et par conséquent les lignes de courant le sont aussi. En plus, l'élimination de la pression p de (322) donne

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{323}$$

Donc, dans n'importe quel plan z=constante, l'écoulement autour d'un cylindre correspondra à l'écoulement bidimensionnel et irrotationnel autour de ce cylindre. Notez, cependant, que la circulation Γ autour d'une courbe C fermée quelconque se situant dans un plan horizontal, qu'elle entoure le cylindre ou non, doit être zéro. Ceci découle de

$$\Gamma = \oint_C u\,dx + v\,dy = -\frac{1}{2\eta} z(h-z) \oint_C \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy = -\frac{1}{2\eta} z(h-z)[p]_C = 0, \tag{324}$$

où $[p]_C$ désigne le saut de pression en passant une fois autour de C.