CHAP1-modeles-macs

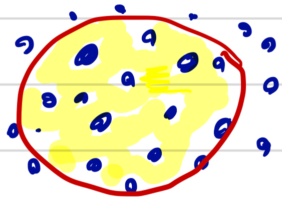
Chap 1. Modèles d'écoulements en milieu poreux

Un milieu poreux est un domaine contenant de la matière solide (pores) tels que sable, argile, ...

Un milieu poreux est caractérisé par:

- Porosité (ϕ). Elle indique la proportion de fluide pouvant imprégner la roche

$$\phi = \frac{\text{Volume de pores (vide)}}{\text{Volume total}}$$

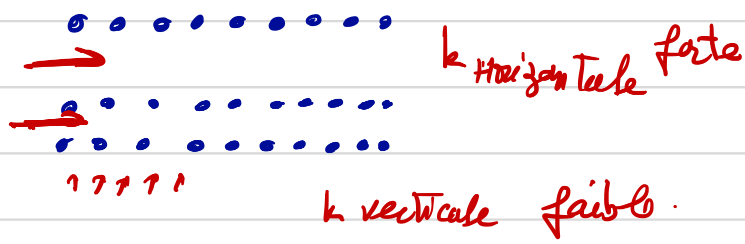


- La perméabilité intrinsèque (K)

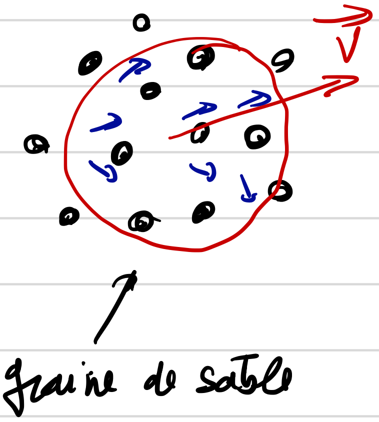
Elle traduit la résistance exercée par la roche à l'écoulement. Elle dépend de la nature des matériaux en présence et de la répartition géométrique des pores.

$$K(x) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

en dimension 2



- La vitesse macroscopique (vitesse de Darcy).



→ vitesse microscopique en milieu poreux n'est pas intéressante.

→ $\vec{V}$ une vitesse macroscopique associée à un volume donné.

I.1 Ecoulement monophasique

On suppose que le milieu poreux est saturé par une seule phase : gaz (gisement gazier) ou huile ou eau.

Conservation de la masse :

$$\partial_t\big(\phi(x,p)\,\rho(p)\big) + \operatorname{div}\big(\rho(p)\vec{V}\big) = 0 \qquad (1)$$

Conversation de la quantité de mouvement (loi de Darcy).

$$\vec{V} = -\frac{K(x)}{\mu}\big(\nabla p - \rho(p)\,\vec{g}\big). \qquad (2)$$

avec $\rho(p)$ = densité du fluide, ϕ : la porosité, $\vec{g}$ vecteur gravité
μ = viscosité du fluide.

On a une seule inconnue la pression.

Equation simplifiée : $\phi(x,p) = \phi$ = constante (milieu poreux homogène)

- $K(x) = k\,Id$ (milieu homogène isotrope)
- $\vec{g} = 0$ (coupe horizontale)

L'équation (1) devient :

$$\phi\,\partial_t\rho(p) - \frac{k}{\mu}\operatorname{div}\big(\rho(p)\nabla p\big) = 0$$

On pose $u = \rho(p)$ et pour $\rho(p) = p^n$ (loi puissance) ; $d = \frac{k}{\mu\phi}$.

L'équation se réduit à :

$$\boxed{\partial_t u - d\,\Delta u^m = 0, \quad d > 0, \quad m > 1.}$$

C'est l'équation en milieu poreux.

- **Ecoulement incompressible.** $\rho(p) = \rho_0$ = constante, $\phi(x,p) = \phi_0$ = constante

L'équation (1) devient : $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ et $\vec{V} = -\frac{K(x)}{\mu}\big(\nabla p - \rho_0\vec{g}\big)$.

$$\Rightarrow \quad -\operatorname{div}\left(\frac{K(x)}{\mu}\big(\nabla p - \rho_0\vec{g}\big)\right) = 0 \Rightarrow \left[-\operatorname{div}\big(K(x)\nabla p\big) = f\right].$$

I.2 Ecoulement monophasique à plusieurs constituants.

On suppose que le fluide saturant est un mélange de composants miscibles. La composition du fluide est décrite par la concentration massique de chaque constituant :

$$c_i = \frac{\text{masse du composant } i}{\Sigma \text{ de masse des composants}}$$

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.

Conservation de la masse du ième composant :

$$\partial_t\left(\phi(x,p)\,\rho(p,c)\,c_i\right) + \mathrm{div}\left(\rho(p,c)\,\vec{V}\,c_i\right) + \mathrm{div}\,J_i = 0, \quad i=1,n$$

Loi de Darcy : $\vec{V} = \dfrac{-K}{\mu(c)}\left(\nabla p - \rho(p,c)\,\vec{g}\right)$

- J_i est le flux massique pour le composant i : $\quad c=(c_1,\dots,c_n)$

$$J_i = -\rho(p,c)\,\lambda(\vec{V},c)\,\nabla c_i$$

$$\lambda = d_m(c)\,I_d + D(V)$$

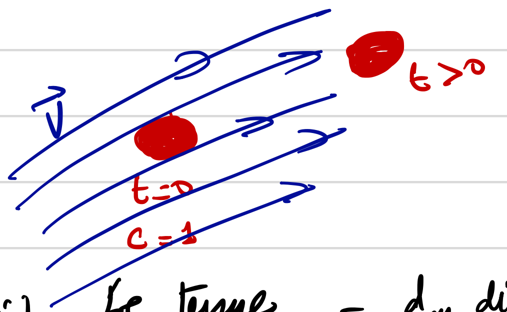
$d_m(c)\,I_d$: diffusion moléculaire ; $D(V)$: Tenseur de dispersion mécanique

Nb d'inconnues : c_i, $i=1,n$ et p $\quad$ ($n+1$ inconnues)

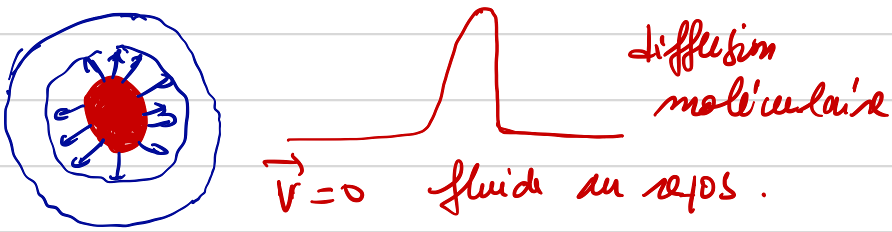
Nb d'éqs : n éqs de conservation de la masse et $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.

Remarques :

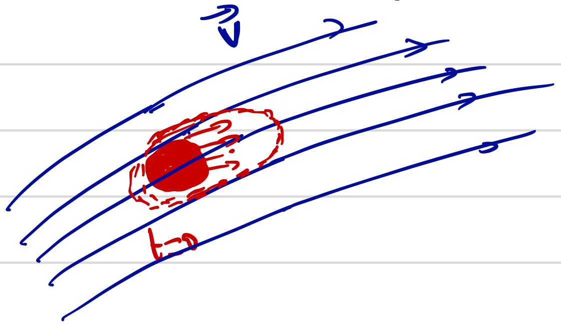
i) Le terme $\mathrm{div}(\rho\,\vec{V}\,c)$ modélise le transport des polluants à la vitesse de l'écoulement



ii) Le terme $-d_m\,\mathrm{div}(\rho(p,c)\,\nabla c)$ modélise la diffusion moléculaire



iii) Le terme $-\mathrm{div}\left(D(V)\,\rho(p,c)\,\nabla c\right)$



étalement du front de propagation dû à $\vec{V}$.

Les modèles classiques :

pour le Transport : $\quad \partial_t c + \mathrm{div}\left(\vec{V}\,f(c)\right) = 0$

pour la diffusion : $\quad \partial_t c - d\,\Delta c = 0$ ou

$$\partial_t c - \mathrm{div}(K\,\nabla c) = 0.$$

II Ecoulement diphasique immiscible et incompressible

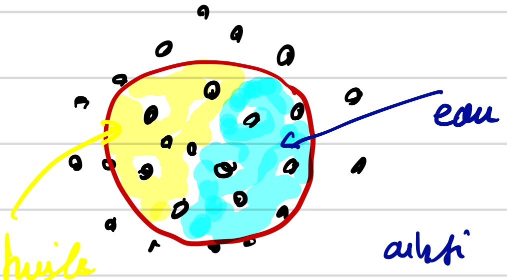
on considère deux phases : eau et huile. On suppose

i) Les fluides sont incompressibles c-à-d la densité de chaque phase est une constante.

ii) $\phi(x)$ dépend de x seulement.

Comment distinguer les deux phases :

on définit la saturation de chaque phase :



$$S_i = \frac{\text{volume occupé par la phase } i}{\text{volume de pores (vide)}}$$

ainsi $$\phi S_i = \frac{\text{volume occupé par la phase } i}{\text{volume total}}.$$

Ici, on a deux phases notées :

S_w = saturation de l'eau

S_o = saturation de l'huile.

Conservation de la masse pour chaque phase :

(1) $\phi(x)\, \partial_t S_w + \operatorname{div} \vec{V}_w = 0$ (eau)

(2) $\phi(x)\, \partial_t S_o + \operatorname{div} \vec{V}_o = 0$ (huile)

(3) $S_w + S_o = 1$

Les vitesses sont données par la loi de Darcy-Muscat :

(4) $V_w = -\dfrac{K(x)}{\mu_w} k_{rw}(S_w) \left(\nabla p_w - \rho_w \vec{g} \right)$

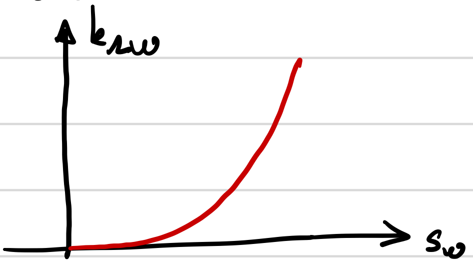
(5) $V_o = -\dfrac{K(x)}{\mu_o} k_{ro}(S_o) \left(\nabla p_o - \rho_o \vec{g} \right)$

avec p_η la pression de la phase η

μ_η la viscosité de la phase η

$k_{r\eta}$ la perméabilité relative de la phase η.

La perméabilité relative est une fonction croissante de la saturation.

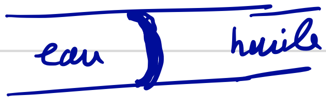


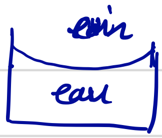
elle traduit le fait que plus la phase est présente plus elle est mobile.

bilan : Inconnues (S_w, S_o, p_w, p_o) (4 inconnues)

Eqs : (1), (2), (3) (3 éqs)

Pression capillaire. La présence de deux fluides entraîne un déplacement dû à la courbure de l'interface entre les deux fluides





(6) $P_w - P_o = P_c(S_w)$ et $S_w \longrightarrow P_c(S_w)$ est croissante.

Modèle mathématique du pb. diphasique simplifié: $\phi(x) = \phi$ = constante, $\vec{g} = 0$ (pas de gravité).

$$\begin{cases} \phi\, \partial_t S_w + \mathrm{div}\, V_w = 0 & (1) \\ \phi\, \partial_t S_o + \mathrm{div}\, V_o = 0 & (2) \\ S_w + S_o = 1 & (3) \\ V_w = -K M_w \nabla P_w & (4) \\ V_o = -K M_o \nabla P_o & (5) \\ P_w - P_o = P_c(S_w) & (6) \end{cases}$$

on a noté $M_\eta = \dfrac{k_{r\eta}}{\mu_\eta}$ la mobilité.

Il suffit d'avoir une saturation et une pression pour résoudre le pb. Par exemple, (S_w, P_w), alors $S_o = 1 - S_w$ et $P_o = P_w - P_c(S_w)$

Equation de la pression. On somme (1) + (2) $\Rightarrow$

$$\phi\, \partial_t \underbrace{(S_w + S_o)}_{=1} + \mathrm{div}(V_w + V_o) = 0 \Rightarrow \mathrm{div}(V_w + V_o) = 0.$$

On note $V = V_w + V_o$ = la vitesse totale vérifie

(7) $\boxed{\mathrm{div}\, V = 0}$ Ecoulement incompressible.

$$\begin{aligned} \vec{V} &= -K M_w \nabla P_w - K M_o \nabla P_o = -K M_w \nabla P_o - K M_o \nabla P_o - K M_w \nabla P_c(S_w) \\ &= -K M \nabla P_o - K M_w P_c'(S_w) \nabla S_w, \quad \text{et } M = M_w + M_o. \\ &= -K M \nabla P_o - K \nabla q(S_w), \quad \text{avec } q'(S_w) = M_w P_c'(S_w) \\ &= -K M \nabla P \end{aligned}$$

$P = P_o + \tilde{q}(S_w)$ et $\tilde{q}'(S_w) = \dfrac{q'(S_w)}{M(S_w)}$.

P est la pression globale..

Equation elliptique en pression globale:

(8) $-\mathrm{div}(K M \nabla P) = 0.$

on exprime la vitesse de l'eau en fonction de la vitesse totale :

$$V_w = f_w(S_w)\,\vec{V} - K\,\alpha(S_w)\,\nabla S_w$$

avec . $f_w(S_w) = \dfrac{M_w}{M}$ fraction des flux

. $\alpha(S_w) = \dfrac{M_o M_w}{M} P_c'$ terme capillaire de diffusion

enfin, on cherche (S_w, P) solution de :

$$\begin{cases} \phi\, \partial_t S_w + \underbrace{\mathrm{div}\left(f_w(S_w)\, V\right)}_{\text{Terme de Transport}} - \underbrace{\mathrm{div}\left(K\,\alpha(S_w)\,\nabla S_w\right)}_{\text{Terme de diffusion capillaire.}} = 0 \\ \mathrm{div}\, V = -\,\mathrm{div}\left(K\, M\, \nabla P\right) = 0 \end{cases}$$