Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^d$, de frontière C^1. Nous notons par n la normale extérieure au bord de Ω.

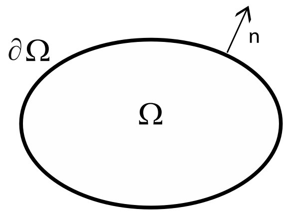

FIGURE 1.1 – Domaine Ω

Considérons le problème défini, pour toute donnée $f \in L^2(\Omega)$, sur l'ouvert Ω

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \text{ dans } \Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.1}$$

l'algorithme de Dirichlet-Neumann pénalisé barycentriquement :

sur un domaine Ω partagé en deux sous domaine $\Omega1$ et $\Omega2$

Enonçons l'algorithme de Dirichlet-Neumann pénalisé barycentriquement :

Soit $u_1^0 \in H^1(\Omega_1)$ et $u_2^0 \in H^1(\Omega_2)$ donnés tels que $\Delta u_1^0 \in L^2(\Omega_1)$ et $\Delta u_2^0 \in L^2(\Omega_2)$. Pour $n \geq 1$ et $0 < \theta < 1$, nous posons :

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_1^n & = & f_{|\Omega_1} & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ u_1^n & = & u_2^n & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \\ \text{et } \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_2^n & = & f_{|\Omega_2} & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \\ \dfrac{\partial u_2^n}{\partial n_2} & = & -\theta \dfrac{\partial u_1^{n-1}}{\partial n_1} + (1-\theta) \dfrac{\partial u_2^{n-1}}{\partial n_2} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \end{array} \tag{2.5}$$

Nous posons :

$$\lambda^n = u_{1|\Gamma}^n = u_{2|\Gamma}^n.$$

algorithme discrétisé 2.13

Algorithme de Dirichlet-Neumann symétrisé pour le problème de

Poisson

Nous définissons l'algorithme de Dirichlet-Neumann dit symétrisé par :

Pour m=1,2, soit $v_m{}^0$, $\omega_m{}^0 \in H_m$ donnés tels que $\Delta v_m{}^0$ et $\Delta\omega_m{}^0 \in L^2(\Omega_m)$.

Pour $n \geq 1$ et $0 < \theta < 1$, nous considérons la solution du problème couplé :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v_1^n & = & f_{|\Omega_1} & \text{dans } \Omega_1 \\ v_1^n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ v_1^n & = & v_2^n & \text{sur } \Gamma \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v_2^n & = & f_{|\Omega_2} & \text{dans } \Omega_2 \\ v_2^n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \\ \dfrac{\partial v_2^n}{\partial n_2} & = & -\theta \dfrac{\partial v_1^{n-1}}{\partial n_1} + (1-\theta)\dfrac{\partial v_2^{n-1}}{\partial n_2} & \text{sur } \Gamma \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta \omega_1^n & = & f_{|\Omega_1} & \text{dans } \Omega_1 \\ \omega_1^n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ \dfrac{\partial \omega_1^n}{\partial n_1} & = & -\theta \dfrac{\partial \omega_2^{n-1}}{\partial n_2} + (1-\theta)\dfrac{\partial \omega_1^{n-1}}{\partial n_1} & \text{sur } \Gamma \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcll} -\Delta \omega_2^n & = & f_{|\Omega_2} & \text{dans } \Omega_2 \\ \omega_2^n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \\ \omega_2^n & = & \omega_1^n & \text{sur } \Gamma \end{array}\right.$$

Nous posons

$$(u_1^n, u_2^n) = (\frac{v_1^n + \omega_1^n}{2}, \frac{v_2^n + \omega_2^n}{2}). \tag{3.1}$$

Soit Ω un ouvert borné de R^d modélisant une cavité acoustique. Soit $\partial\Omega$ son bord où nous imposons une condition de Dirichlet homogène (le cas avec donnée de Neumann au bord peut-être traité de la même façon). Nous supposons que $\partial\Omega$ est C^1-régulier et nous considérons le problème global suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u + k^2 u & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Le vecteur u représente l'onde acoustique et k le nombre d'ondes.

θ-algorithme pour le problème de Helmholtz

La recherche de la solution du problème (5.1) se fera à l'aide d'une méthode indirecte, dite la méthode du θ-algorithme.
Nous décomposons le domaine Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2

et nous notons, pour $m = 1, 2$

$$u_m = u_{|\Omega_m} \quad \text{et} \quad f_m = f_{|\Omega_m}.$$

Soit $\gamma \in \mathbb{R}^\star$. Nous nous proposons de résoudre le problème suivant, pour $m = 1, 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u_m + k^2 u_m & = & f_m & \text{dans } \Omega_m \\ u_m & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_m \setminus \Gamma \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial n_m} - i\gamma j \rho_m^\Gamma u_m & = & -\dfrac{\partial u_{m'}}{\partial n_{m'}} - i\gamma j \rho_{m'}^\Gamma u_{m'} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Où $m' = 1,2$, $m' \neq m$.