Ecole Centrale de Nantes
Université de Nantes
APN, MACS, MFA Année 2019-2020

Schémas combinés volumes Finis/éléments finis pour des écoulements en milieu poreux

Mazen SAAD

Table des matières

1 Exercices **4**

1 Exercices

Exercice 1.1 (Matrices monotones)

1. On dit qu'une matrice A est **monotone** ssi (A inversible et $A^{-1} \geq 0$). Montrer que A monotone ssi ($Ax \geq 0$ alors $x \geq 0$).
2. (Exemples de matrices monotones). Soit A une matrice vérifiant $a_{i,j} \leq 0 \ \forall i \neq j$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$ pour tout $i = 1, N$. Montrer que
   (a) $a_{i,i} > 0$.
   (b) Ecrire $A = D(I - M)$ avec D la diagonale de A et M à préciser.
   (c) Montrer que $\rho(M) < 1$ (ρ rayon spectrale) et A monotone.
3. En déduire que si A une matrice inversible vérifiant $a_{i,j} \leq 0 \ \forall i \neq j$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geq 0$, alors A monotone.

Exercice 1.2 (Condition suffisante pour la stabilité l^∞)
Soit A une matrice vérifiant

— La matrice A est **monotone**

— $\exists$ un vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $AV \geq \mathcal{E}$ avec $\mathcal{E} = (1, \cdots, 1)$

Alors $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|V\|_\infty$.

Exercice 1.3 (Equation de Laplace en 1D sur un maillage non uniforme)
On considère le problème suivant

$$-\partial_x(\lambda(x)\partial_x u)(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0, L[\tag{1.1}$$

$$u(0) = u(L) = 0 \tag{1.2}$$

avec f régulière, dans $C^0(]0,1[)$, $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$.

On souhaite approcher la solution du problème sur un maillage irrégulier. Pour cela, on divise l'intervalle $]0, L[$ en N intervalles de longueur h_1, h_2, $...h_N$. On note x_i le centre de la maille $M_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$, alors $x_{\frac{1}{2}} = 0$ et $x_{N+\frac{1}{2}} = L$

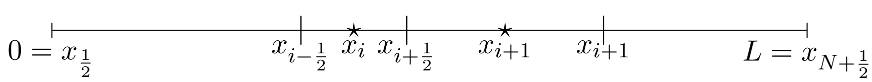

Figure 1 – Maillage.

Le principe des volumes finis consiste à intégrer l'équation sur chaque maille M_i :

$$\lambda(x_{i-\frac{1}{2}})\partial_x u(x_{i-\frac{1}{2}}) - \lambda(x_{i+\frac{1}{2}})\partial_x u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx, \text{ pour } i = 1, 2, ..., N. \tag{1.3}$$

Pour approcher la dérivée $\partial_x u$ aux interfaces, on considère l'approximation la plus naturelle

$$\partial_x u(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \text{ pour } i = 2, N-1 \tag{1.4}$$

avec $h_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_{i+1}+h_i}{2} = x_{i+1} - x_i$. C'est une approximation centrée par rapport au point $\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ qui est différent du point $x_{i+\frac{1}{2}}$ en général.

En posant $f_i = \frac{1}{h_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx$, on considère alors le schéma numérique :

$$\lambda_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \lambda_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} = h_i f_i \text{ pour } i = 2, N-1 \tag{1.5}$$

Pour traiter les conditions aux limites, par exemple pour la maille M_1, on approche alors la dérivée par une dérivée décentrée

$$\partial_x u(x_{\frac{1}{2}}) = \frac{u_1 - u_{\frac{1}{2}}}{x_1 - x_{\frac{1}{2}}}, \tag{1.6}$$

On a $u_{\frac{1}{2}} = u(0) = 0$, et on note pour garder les mêmes notations $h_{\frac{1}{2}} = x_1 - x_{\frac{1}{2}}$.

1. Préciser alors la condition aux limites à droite.
2. Ecrire précisément le sytème linéaire à résoudre, en prolongeant la formule pour (1.5) pour $i = 1, N$
3. Montrer que le système se traduit sous forme matricielle

   $$A_h U_h = F_h$$

   avec

   $$U_h = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^T, \quad F_h = (h_1 f_1, h_2 f_2, \cdots, h_N f_N)^T$$

   Préciser A_h. Montrer que A_h est inversible en localisant les valeurs propres de A_h. Montrer que A_h est monotone.
4. On va montrer **le principe du maximum discret**, à savoir si $F_h \geq 0$ alors $u_h \geq 0$. Pour cela, soit i_0 un plus petit indice tel que

   $$u_{i_0} = \min_i u_i < 0$$

   Ecrire la ligne i_0 du système linéaire et conclure.
5. Montrer que le principe du maximum assure que la matrice A_h est inversible.
6. **Formulation variationnelle discrète.**

   (a) Définir les flux $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$, pour $i = 0, N$ de telle sorte que

   $$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}(u_h) = h_i f_i \text{ pour } i = 1, N \tag{1.7}$$

   (b) **Intégration par parties.** Soit $v_h = (v_1, v_2 \cdots v_N)$. Montrer que

   $$\sum_{i=1}^{N-1}(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}})v_i = \sum_{i=1}^{N-1}\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}(v_i - v_{i+1}) + \mathcal{F}_{N+\frac{1}{2}}v_N - F_{\frac{1}{2}}v_1$$

   En prenant $v_0 = v_{N+1} = 0$, On déduit **la formule d'intégration par parties discrètes**

   $$\sum_{i=1}^{N-1}(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}})v_i = \sum_{i=0}^{N}\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}(v_i - v_{i+1})$$

(c) En prenant $u_0 = u_{N+1} = 0$, montrer que

$$(A_h u_h, v_h) = \sum_{i=0}^{N} h_{i+\frac{1}{2}} \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right). \tag{1.8}$$

Montrer que A_h est définie positive.

(d) On définit un gradient discret ∂_x^h constant par interface comme suit :

$$\partial_x^h u_h(x) = \begin{cases} \frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}, i = 1, N-1 \\ \frac{u_1 - 0}{h_{\frac{1}{2}}} & \text{si } x \in]0, x_1[\\ \frac{0 - u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}} & \text{si } x \in]x_N, L[\end{cases}$$

Définir la fonction $\lambda_h(x)$ constante par interface et en déduire que (1.8) est équivalente à

$$(A_h u_h, v_h) = \int_0^L \lambda_h \partial_x^h u_h(x) \partial_x^h v_h(x)\, dx = \int_0^L f_h(x) v_h(x)\, dx \tag{1.9}$$

7. **Inégalité de Poincaré en 1D.** Montrer que

$$\|u_h\|_{L^2} := \left(\sum_{i=1}^{N} h_i |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{L} \|u_h\|_\infty \leq L \|\partial_x^h u_h\|_{L^2} := L \left(\sum_{i=0}^{N} h_{i+\frac{1}{2}} |\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

8. **Estimation H^1 discrete.** Montrer qu'il existe C indépendante de h, telle que

$$\lambda_0 \|\partial_x^h u_h\|_{L^2(0,L)} \leq C \|f_h\|_2 \leq C \|f\|_{L^2(0,L)}$$

9. **Convergence vers une solution faible**.

(a) Montrer que qu'il existe une sous suite, encore notée, $(u_h)_h$ telle que

$$u_h \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, L) \tag{1.10}$$

$$\partial_x^h u_h \rightharpoonup \xi \text{ faiblement dans } L^2(0, L) \tag{1.11}$$

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$. Montrer que si

$$E_h = \int_0^L \partial_x^h u_h(x) \varphi(x)\, dx + \int_0^L u_h \partial_x \varphi dx \to 0, \text{ quand } h \to 0 \tag{1.12}$$

alors $\xi = \partial_x u \in \mathcal{D}'(0, L)$ (au sens des distributions).

(c) Montrer que

$$\int_0^L u_h \partial_x \varphi dx = -\sum_{i=0}^{N} (u_{i+1} - u_i) \varphi(x_{i+\frac{1}{2}}).$$

En utilisant la définition du gradient discret, développer $\int_0^L \partial_x^h u_h(x) \varphi(x) dx$. En déduire qu'il existe une fonction $c_i(\varphi)$ dépendante de φ telle

$$E_h = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right) c_i(\varphi) h_{i+\frac{1}{2}}^2.$$

Montrer (1.12) et conclure.

(d) Soit $v \in \mathcal{D}(0, L)$, on considère $v_h(x)$ la fonction constante par morceaux associée à $(v(x_i))_{i=1,N}$. Passer à la limite dans la formulation variationnelle discrète (1.9) et préciser la formulation décrite par la solution u.

10. **Consistance.** Dans cette partie, pour alléger les notations on considère $\lambda = 1$. On définit l'erreur de troncature $T_h =^t (T_0, T_1, ..., T_N)$ avec

$$(T_h)_i = \frac{1}{h_i}\Big(\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}}\Big) - f_i := (\tilde{A}_h \overline{U}_h)_i - f_i$$

avec $u(x_i)$ est la valeur de la solution exacte au point x_i, le vecteur $\overline{U}_h = (u(x_i))_i$, la matrice $\tilde{A}_h$ est la matrice A_h où chaque ligne i est divisée par h_i.

   (a) Soit $f = 1$, donner la solution exacte $u(x)$.Considérer le maillage tel que $h_{2i} = h$ et $h_{2i+1} = 2h$. Calculer T_{2i} et T_{2i+1}. Montrer que le schéma n'est pas consistant.

   (b) Ecrire le développement de Taylor de $\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}}$ au point $x_{i+\frac{1}{2}}$ à l'ordre 4 et montrer que l'erreur de consistance s'écrit comme suit :

$$T_h = T_h^0 + T_h^1, \tag{1.13}$$

   avec

$$T_h^0 = \frac{1}{h_i}(u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}})) - \frac{1}{h_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx + O(h^2) \tag{1.14}$$

$$T_h^1 = \frac{1}{h_i}(\alpha_{i+\frac{1}{2}} - \alpha_{i-\frac{1}{2}}) + O(h) \tag{1.15}$$

   En déduire que le schéma est consistant ssi le maillage est uniforme.

   (c) (Consistance faible). Montrer que T_h^1 est l'image par l'opérateur aux différences d'une fonction ψ_h définie constante par maille, telle que

$$T_h^1 = \tilde{A}_h \psi_h + O(h) \text{ et } (\psi_h)_i = \frac{h_i^2}{4}u''(x_i) \text{ sur }]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[. \tag{1.16}$$

   (d) **Stabilité L^∞.** On définit $v(x) = x - x^2$, montrer que

$$(\tilde{A}_h V_h)_i = 1 + \frac{h_{i-1}h_{i+1}}{2h_i}.$$

   En déduire

$$\|\tilde{A}_h^{-1}\|_\infty \leq 1/4.$$

   (e) **(Ordre de convergence)** Nous allons démontré que la consistance faible et la stabilité assure la convergence su schéma.
   Montrer que

$$\|\overline{U_h} - U_h\|_\infty \leq \|\tilde{A}_h^{-1}\|_\infty \|T_h^0\|_\infty + \|\psi_h\|_\infty + O(h)\|\tilde{A}_h^{-1}\|_\infty.$$

   Conclure.

Exercice 1.4 (Equation de Laplace avec terme convectif sur un maillage triangulaire)
On considère l'équation elliptique suivante

$$-\Delta u(x) + \operatorname{div}(\mathbf{V}(x)u(x)) + bu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{1.17}$$

avec la condition aux limites suivante :

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.18}$$

On suppose :

(i) Ω est un ouvert borné polygonal de $\mathbb{R}^2$,

(ii) $b \geq 0$

(iii) $f \in L^2(\Omega)$

(iv) $\mathbf{V} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ et $\operatorname{div} \mathbf{V}(x) \geq 0$.

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation admissible et satisfaisant la condition d'orthogonalité de Ω. On note

(a) $\sigma_{KL} = \partial K \cap \partial L$, pour $K, L \in \mathcal{T}$.

(b) x_K le centre de K, et $x_K x_L$ est orthogonal à σ_{KL}.

(c) $d_{KL} = \|x_L - x_K\|$ si $\sigma_{KL} \not\subseteq \partial\Omega$ et $d_{K_\sigma} = \|x_K - x_\sigma\|$ si $\sigma = \partial K \cap \partial\Omega$.

(d) **Les voisins :** $\mathcal{N}_K^o = \{L; \sigma_{KL} \not\subseteq \partial\Omega\}$, $\mathcal{N}_K^\sigma = \{\sigma; \sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega\}$ et $\mathcal{N}_K = \mathcal{N}_K^o \cup \mathcal{N}_K^\sigma$.

(e) **Coefficient de transmissibilité :** $\tau_{KL} = |\sigma_{KL}|/d_{KL}$ et $\tau_{K_\sigma} = |\sigma_{K_\sigma}|/d_{K_\sigma}$

(f) $\mathcal{E}^o = \{\sigma_{KL}; \sigma_{KL} \not\subseteq \partial\Omega\}$: ensemble des segments à l'intérieur du domaine.

(g) $\mathcal{E}^\sigma = \{\sigma_{K_\sigma}; \sigma_{K_\sigma} \subset \partial\Omega \cap \partial K\}$

On considère le schéma numérique suivant : Pour tout K

$$\sum_{L \in N_K^o} \tau_{KL}(u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in N_K^\sigma} \tau_{K_\sigma} u_K + \sum_{L \in N_K^o} V_{KL} u_{KL} + \sum_{\sigma \in N_K^\sigma} V_{K_\sigma} u_{K_\sigma} + b|K|u_K = |K| f_K, \tag{1.19}$$

où

$$V_{KL} = \int_{\sigma_{KL}} \mathbf{V}(x) \cdot n_{KL} dx, \text{ et } V_{K_\sigma} = \int_{\sigma_{K_\sigma}} \mathbf{V}(x) \cdot n_{K_\sigma} dx,$$

$$u_{KL} = \begin{cases} u_K & \text{si } V_{KL} \geq 0 \\ u_L & \text{si } V_{KL} < 0, \end{cases} \text{ et } u_{K_\sigma} = \begin{cases} u_K & \text{si } V_{K_\sigma} \geq 0 \\ 0 & \text{si } V_{K_\sigma} \geq 0, \end{cases}$$

$f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f(x) dx$, $|K| = \text{aire}(K)$, $|\sigma_{KL}| = \text{mesure}(\sigma_{KL})$.

1. On note $V_{KL}^+ = \max(0, V_{KL})$ et $V_{KL}^- = \min(0, V_{KL})$. Soit $G_{KL} = V_{KL} u_{KL}$ le flux convectif à l'interface σ_{KL}, c'est un schéma **upwind ou upstream ou décentré**. Exprimer le flux en fonction de V_{KL}^+ et V_{KL}^- et montrer que le flux est consevatif :

$$G_{KL} = -G_{LK}.$$

2. Ecrire le système linéaire associé à la figure 2.

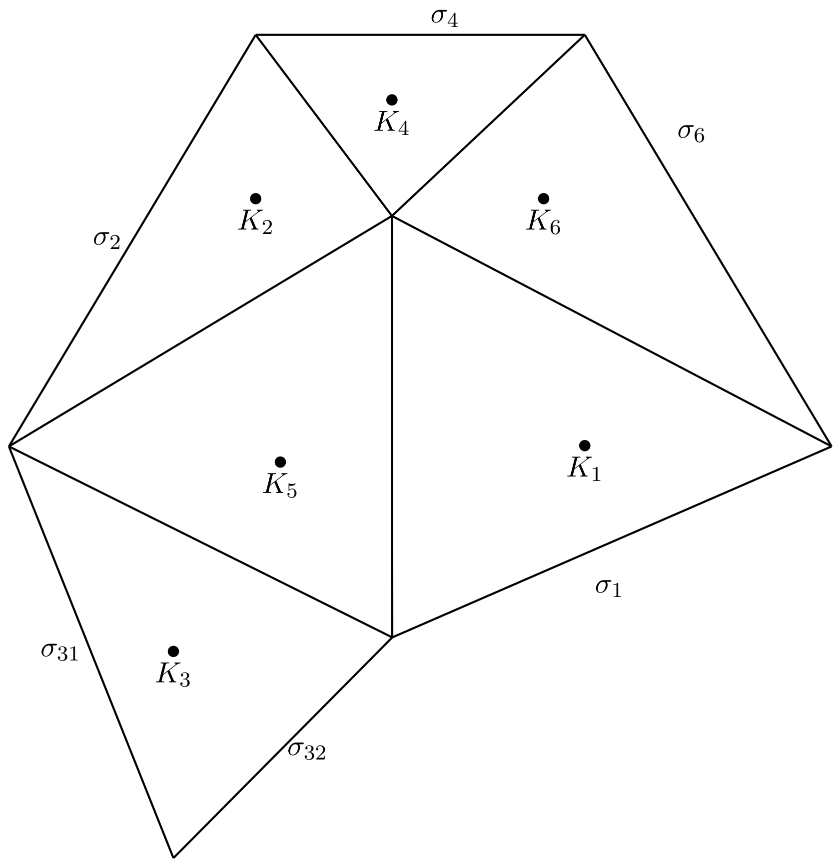

FIGURE 2 – Maillage

3. On va montrer **le principe du maximum** suivant :
   Si $f_K \geq 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}$, alors $u_K \geq 0$ pour tout $K \in \mathcal{T}$.
   Pour cela, soit $K_0 = \operatorname{argmin}_{K \in \mathcal{T}_h} u_K$. On suppose $u_{K_0} < 0$. Ecrire l'équation satisfaite par K_0. Montrer que le terme convectif vérifie :
   $$\sum_{L \in N_{K_0}} V_{K_0 L} u_{K_0 L} \leq u_{K_0} \sum_{L \in N_{K_0}} V_{K_0 L} \leq 0.$$
   Déduire une contradiction sur l'équation de K_0 et conclure.
4. **Terme convectif cas continu**. Montrer que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,
   $$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{V}u)u\,dx = -\int_\Omega \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{u^2}{2}\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{V})\frac{u^2}{2}\,dx \geq 0$$
5. **Terme convectif cas discret**. On note
   $$G_{conv} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{L \in N_K^o} V_{KL} u_{KL} + \sum_{\sigma \in N_K^\sigma} V_{K_\sigma} u_{K_\sigma} \right) u_K.$$
   Montrer que
   $$G_{conv} = \sum_{\sigma_{KL}} \left(\frac{V_{KL}}{2}(u_K^2 - u_L^2) + \frac{|V_{KL}|}{2}(u_K - u_L)^2 \right), \tag{1.20}$$

avec la notation $u_L = 0$ si $\sigma_{KL} \in \partial\Omega$.
Montrer que

$$\sum_{\sigma_{KL}} \frac{V_{KL}}{2}(u_K^2 - u_L^2) = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} u_K^2 \int_K \mathrm{div}(\mathbf{V})\, dx. \qquad (1.21)$$

En déduire que

$$G_{conv} \geq 0.$$

6. On note $u_h(x)$ la fonction définit constante par triangle, c'est-à-dire : $u_h(x) = u_K$ pour $x \in K$. Définir, d'après le cours, le gradient discret noté $\nabla_h u_h$ constant par diamond. On définit alors la norme discrète suivante :

$$\|u_h\|_{1,h} = \Big(\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}^o} \tau_{KL} |u_K - u_L|^2 + \sum_{\sigma_{K_\sigma} \in \mathcal{E}^\sigma} \tau_{K_\sigma} |u_K|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

   Soit $\psi_h(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \psi_K \mathbf{1}_K(x)$. Montrer que le schéma (1.19) est équivalent à la formulation variationnelle discrète

$$\left(\sum_{\sigma_{KL} \in \mathcal{E}^o} \tau_{KL}(u_K - u_L)(\psi_K - \psi_L) + \sum_{\sigma_{K_\sigma} \in \mathcal{E}^\sigma} \tau_{K_\sigma} u_K \psi_K \right)$$
$$+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(\sum_{L \in N_K^o} V_{KL} u_{KL} + \sum_{\sigma \in N_K^\sigma} V_{K_\sigma} u_{K_\sigma} \Big) \psi_K + b \int_\Omega u_h \psi_h \, dx = \int_\Omega f_h \psi_h \, dx, \qquad (1.22)$$

7. En utilisant l'inégalité de Poincaré, montrer que la norme H^1-discrète est bornée : $\exists C > 0$ telle que

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C.$$

   Que peut-on déduire sur la convergence de la suite $(u_h)_h$.
8. **Projection dans L^2.**
   (a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, vérifier que $\varphi_h(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varphi(x_K) \mathbf{1}_K(x)$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ (et dans $L^p(\Omega), p \geq 1$).
   (b) Pour $f \in L^2(\Omega)$, la fonction $f_h(x) := \pi_h f := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} f_K \mathbf{1}_K(x)$ et f_K est la moyenne sur K. Montrer que i) $\|\pi_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$, ii) Par densité de $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, montrer que $\pi_h f \longrightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$, iii) $\pi_h f \longrightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ $p \geq 1$.
9. **Convergence.** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit $\varphi_h(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varphi(x_K) \mathbf{1}_K(x)$, on considère alors $\varphi_h(x)$ comme fonction test dans (1.23) et on note chaque terme comme suit : $T_h^d + T_h^c + T_h^b = T_h^f$.
   (a) Montrer que T_h^d s'écrit :

$$T_h^d = \int_\Omega \nabla_h u_h \cdot (\nabla\varphi)_h \, dx \qquad (1.23)$$

   où $(\nabla\varphi)_h$ est une fonction définie constante par diamond comme le gradient de ϕ en un point du diamond. Passer à la limite.
   (b) Montrer la convergence de T_h^b et T_h^f.

(c) **Terme Convectif.**

i. Le cas continue. Montrer que, pour $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{V}u)\varphi dx = \int_\Omega u\psi \mathrm{div}\mathbf{V} dx - \int_\Omega u \mathrm{div}(\mathbf{V}\varphi) dx.$$

ii. Vérifier que

$$T_h^c = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K} u_K V_{KL}\varphi(x_K) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K}(u_{KL}-u_K)V_{KL}\varphi(x_K) := (T_h^c)_1 + (T_h^c)_2$$

iii. Montrer que

$$(T_h^c)_1 = \int_\Omega u_h\varphi_h \mathrm{div}\ \mathbf{V} dx.$$

Passer à la limite.

iv. Vérifier que

$$\begin{aligned}(T_h^c)_2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K}(u_{KL}-u_K)\int_{\sigma_{KL}} \mathbf{V}\cdot n_{KL}(\varphi(x_K)-\varphi(x))\, dx \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K} u_{KL}\int_{\sigma_{KL}}(\mathbf{V}\cdot n_{KL}\varphi(x))\, dx - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{L\in N_K} u_K\int_{\sigma_{KL}}(\mathbf{V}\cdot n_{KL}\varphi(x))\, dx \\ &:= (R_h^c)_1 + (R_h^c)_2 + (R_h^c)_3\end{aligned}$$

v. Montrer que

$$|(R_h^c)_1| \le C(\varphi)h\|u_h\|_{1,h}.$$

vi. En intégrant par parties, montrer que $(R_h^c)_2 = 0$.

vii. Montrer que

$$(R_h^c)_3 = -\int_\Omega u_h \mathrm{div}(\varphi\mathbf{V})\, dx.$$

Conclure.

10. Ecrire la formulation variationnelle satisfaite par u.