Projet : Méthodes semi-Lagrangiennes pour la simulation numérique des plasmas

À rendre pour le vendredi 27 mars 2020.

Consignes

— Ce n'est pas obligatoire, mais le projet peut être réalisé à deux.

— Le projet se composera d'un programme en Fortran ou en C/C++ et d'un rapport tapé en LaTeX limité à 20 pages.

— Les différents fichiers nécessaires à l'exécution du programme devront être déposés sur Madoc sous forme d'une archive .zip.

— Le rapport (qui ne contiendra pas de code mais pourra y faire référence) devra également être déposé sur Madoc.

— Le tout est à rendre au plus tard le vendredi 27 mars 2020 à 18h.

La notation tiendra compte

— du respect des consignes,

— de la qualité de la rédaction,

— des résultats numériques présentés,

— de la capacité de l'étudiant à interpréter les résultats, à pointer les difficultés, à prendre du recul sur son travail.

Sujet

On considère le système de Vlasov-Poisson d'inconnues $f : [0,T] \times [0,L]_{per} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $E : [0,T] \times [0,L]_{per} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f - E(t,x)\partial_v f = 0 \text{ dans } (0,T) \times [0,L]_{per} \times \mathbb{R}, \\ \partial_x E = 1 - \int_{\mathbb{R}} f dv \text{ dans } (0,T) \times [0,L]_{per} \\ \int_{[0,L]_{per}} E dx = 0 \text{ dans } (0,T), \\ f(t=0,x,v) = f_0(x,v), \end{cases} \tag{1}$$

où $f_0(x,v) : [0,L]_{per} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction initiale donnée.

On souhaite simuler le **cas test de l'amortissement Landau** (Landau damping) en utilisant une **méthode semi-Lagrangienne** que l'on comparera à une **méthode aux différences finies** (sur un maillage de l'espace des phases (x,v)).

Remarque : pour discrétiser l'espace des vitesses qui est $\mathbb{R}$, on suppose que le nombre de particules physiques qui ont une très grande vitesse en valeur absolue est négligeable. Sous cette hypothèse, on propose de couper l'espace des vitesses et de considérer $v \in [-V_{max}, V_{max}]$, avec par exemple $V_{max} = 10$. On discrétise alors l'intervalle $[-V_{max}, V_{max}]$ et on impose des conditions de Dirichlet homogènes en vitesse : $f(t,x,-V_{max}) = f(t,x,V_{max}) = 0$, $\forall t \in (0,T)$, $x \in [0,L]_{per}$.

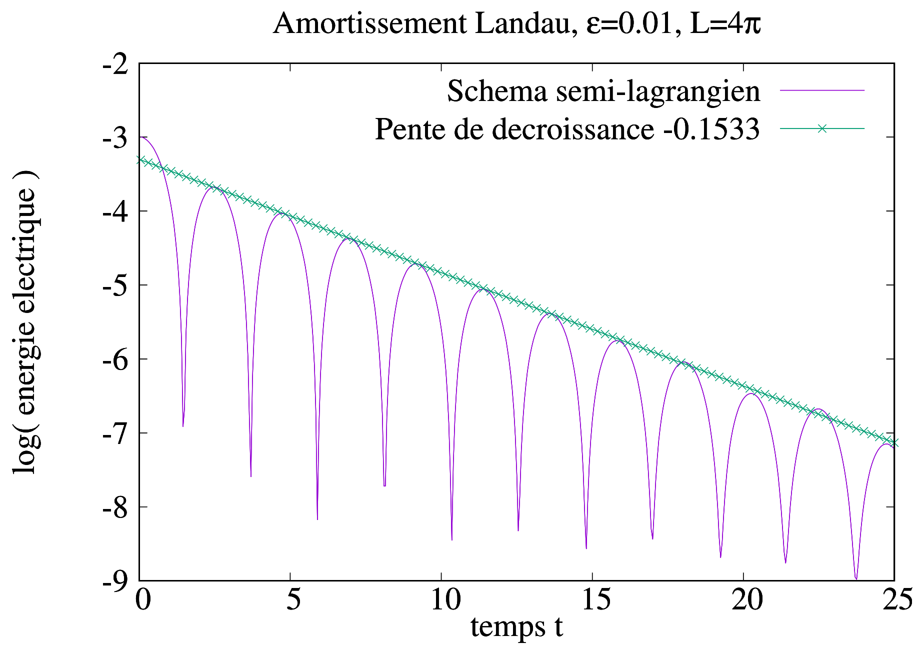
Le cas test de l'amortissement Landau consiste à perturber légèrement un équilibre Maxwellien et correspond à une condition initiale de la forme

$$f_0(x,v) = (1 + \varepsilon \cos(kx)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{L}, \tag{2}$$

où $\varepsilon \in \mathbb{R}$ est l'amplitude de la perturbation, que l'on pourra fixer à une valeur entre 0.001 et 0.1 par exemple. L'équilibre étant stable, il y a un retour à l'équilibre qui se traduit par une décroissance en temps de l'énergie électrique (3) définie par

$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{\int_{[0,L]} \frac{E(t,x)^2}{2} dx}. \tag{3}$$

Si on trace le logarithme de l'énergie électrique (3) en fonction du temps, on obtient un amortissement dont on représente l'allure sur la figure suivante (avec $\varepsilon = 0.01$, $L = 4\pi$, $k = 0.5$).



Cette quantité oscille, mais décroît globalement. Il est possible de calculer la pente de cette décroissance.

Le but de ce projet est de retrouver une décroissance de ce type et de comparer les résultats obtenus par une méthode semi-Lagrangienne et par une méthode aux différences finies. On pourra en complément

- discuter du choix de l'interpolation dans la méthode semi-Lagrangienne,
- discuter du choix du splitting dans la méthode semi-Lagrangienne,
- proposer de résoudre l'équation de Poisson par FFT,
- valider les méthodes numériques sur un problème de Vlasov dont on connaît la solution exacte, par exemple en considérant le champ électrique non pas donné par l'équation de Poisson mais par $E(t,x) = x$. On pourra s'intéresser au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f - x\partial_v f = 0, \ \forall t \in (0,T), \ \forall x \in [-5,5], \ \forall v \in [-5,5], \\ f(t,-5,v) = f(t,5,v) = 0, \ \forall t \in (0,T), \ \forall v \in [-5,5], \\ f(t,x,-5) = f(t,x,5) = 0, \ \forall t \in (0,T), \ \forall x \in [-5,5], \\ f(0,x,v) = \exp\left(-10x^2\right)\exp\left(-v^2\right), \ \forall x \in [-5,5], \ \forall v \in [-5,5], \end{cases}$$

dont la solution est $f(t,x,v) = \exp\left(-10\left(x\cos(t) - v\sin(t)\right)^2\right)\exp\left(-\left(x\sin(t) + v\cos(t)\right)^2\right)$.