

# Schémas combinés volumes Finis/éléments finis pour des écoulements en milieu poreux

**Mazen SAAD**

Ecole Centrale de Nantes  
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Cursus MACS, X3MA040

Nantes 2020

## Plan

- ➊ Introduction et modèles pour des écoulements en milieu poreux
- ➋ Découvrir la méthode des volumes finis sur un maillage non uniforme en 1D
- ➌ Méthode de volumes finis pour l'équation de Poisson
- ➍ Théorème de Lax-Wendroff sur un maillage triangulaire pour une équation de transport non linéaire
- ➎ Schémas combinés EF-VF pour une équation de diffusion-convection anisotrope
- ➏ VF équation parabolique

## ① Modèles en milieu poreux

- Ingénierie pétrolière
- Environnement : pollution air, eau, sol
- Transport d'éléments radioactifs
- Bio-réacteur en ingénierie tissulaire

## ② Modèles en milieu poreux

- Modèles d'écoulement en milieu poreux
- Ecoulement monophasique
- Cas des écoulements diphasiques incompressibles et immiscibles

## ③ Maillage orthogonale admissible

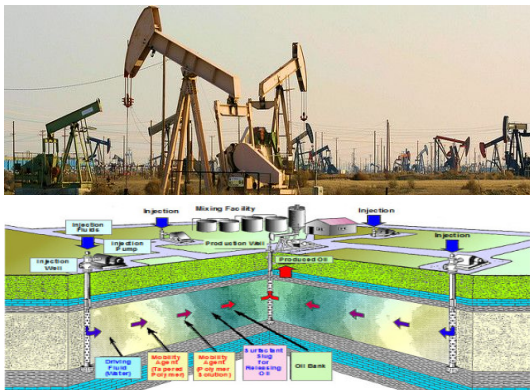
# Ingénierie pétrolière

Comprendre la migration des hydrocarbures

Améliorer la production des gisements pétroliers, ....

**Récupération primaire du pétrole.** Le pétrole jaillit du sol à cause de la forte pression dans le gisement

**Récupération secondaire du pétrole.** Injecter de l'eau afin de déplacer le pétrole vers les puits de production.

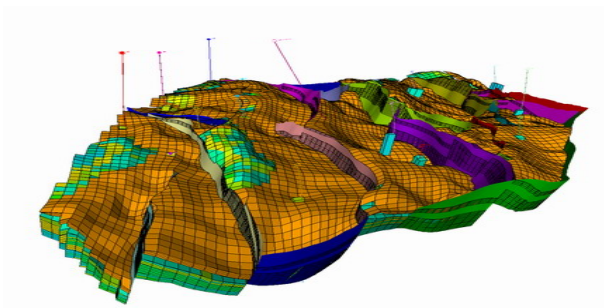


**Récupération tertiaire du pétrole.** Injection de polymère (mousse, produit chimique...)

# Ingénierie pétrolière

Comprendre la migration des hydrocarbures

Améliorer la production des gisements pétroliers, ....



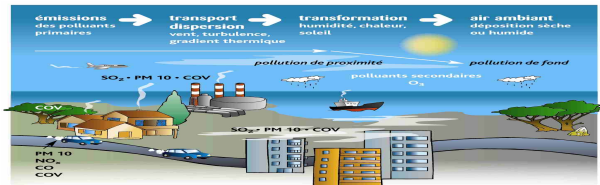
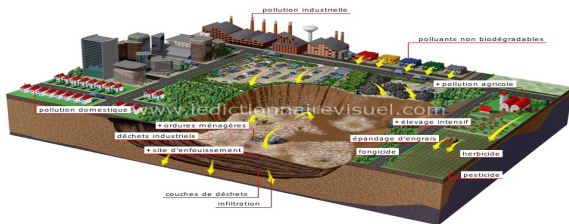
Améliorer la production des puits de 1 % = 2 ans de consommation mondiale.

L'expérimentation à grande échelle est difficile.

La simulation numérique est un bon compromis.

# Environnement : pollution air, eau, sol

Les polluants sont libérés dans l'environnement par des **sources naturelles** : volcans, océans, végétation et par des **sources liées aux activités humaines** : industrie, transport, chauffage ...



# Environnement : pollution air, eau, sol

Modélisation : Combiner plusieurs phénomènes : transport, diffusion, réaction

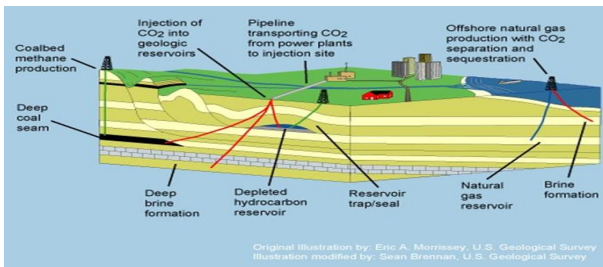
- Transport des polluant.
- Diffusion moléculaire
- Réaction



# Environnement : pollution air, eau, sol

Le **Captage et stockage du CO<sub>2</sub>** consiste

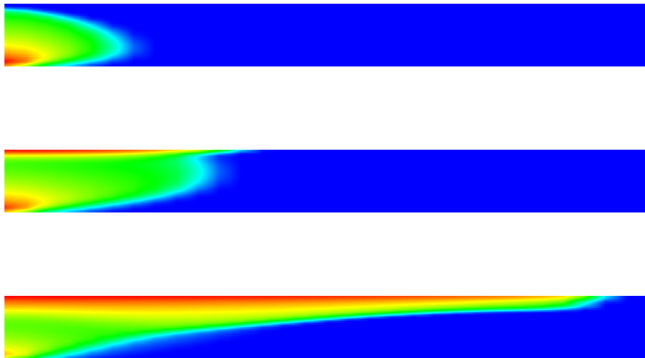
- à capter le CO<sub>2</sub> produit par les installations industrielles avant son rejet dans l'atmosphère
- à l'injecter dans des structures géologiques adéquates pour l'y stocker sur des longues périodes





# Environnement : pollution air, eau, sol

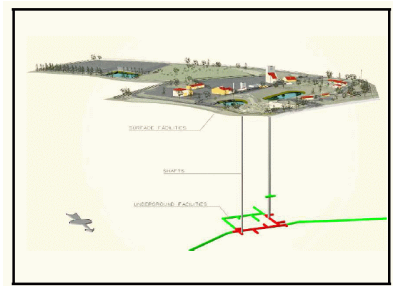
**Captage et stockage du CO<sub>2</sub>.** La simulation numérique est le moyen pour étudier la faisabilité ...



# Stockage des déchets radioactifs

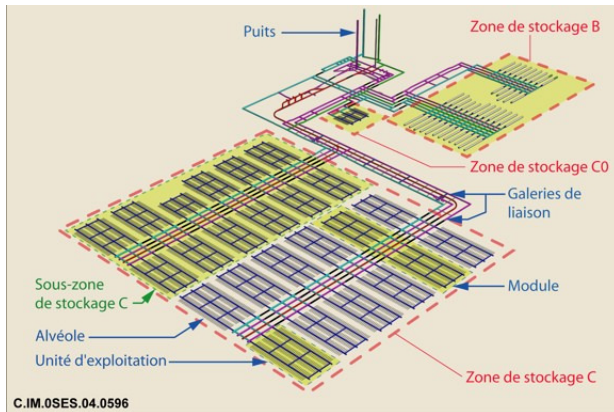
GdR MoMaS initié par l'ANDRA

L'ANDRA l'agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs étudie la faisabilité du stockage dans le sous sol. Le site se situe à 450 m de profondeur. Le choix du site fait l'objet de plusieurs études : sismiques, hydrologiques, réactions chimiques. Toutefois, il paraît légitime de penser qu'au cours des milliers ou des millions d'années de vie des radionucléides, une fuite se produise dans le site, par corrosion des conteneurs, fractures, ou déformations géologiques.



**Simuler la fuite éventuelle des radionucléides**

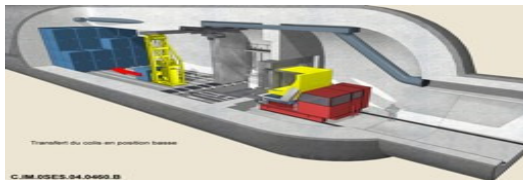
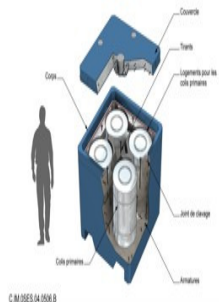
# Stockage des déchets radioactifs



Plan du site de stockage

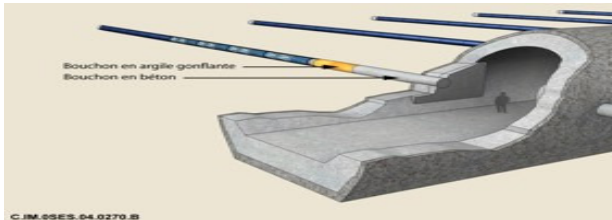
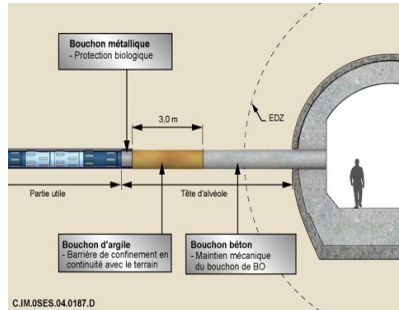
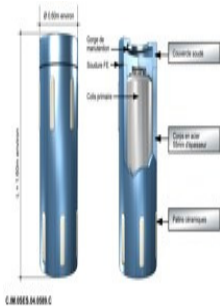
# Stockage des déchets radioactifs

Alvéole B : déchets à moyenne activité



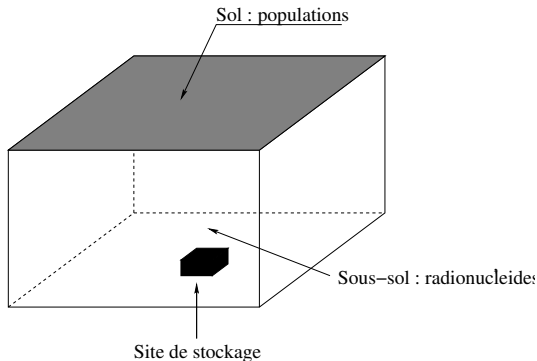
# Stockage des déchets radioactifs

## Alvéole C : déchets à très haute activité



# Modélisation de transport des éléments radioactifs

Simuler une fuite éventuelle des radionucléides de leur site de stockage



Une seule phase EAU dans un milieu poreux hétérogène  
Des composés chimiques miscibles à l'eau.

Écoulement monophasique avec plusieurs constituants miscibles à l'eau

# Modèles d'écoulement en milieu poreux

Un **milieu poreux** est un domaine contenant des pores tels que le sable, argile, ... i.e. de la matière solide.

Un milieu poreux est caractérisé par deux paramètres :

- **La porosité ( $\Phi$ )** indique la proportion de fluide pouvant imprégner une roche:

$$\Phi = \frac{\text{Volume de pores (vide)}}{\text{Volume total}}$$

- **La perméabilité intrinsèque  $K$**  traduit la résistance exercée par la roche à l'écoulement, elle dépend de la nature des matériaux en présence et de la répartition géométriques des pores dans le milieu.  $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$
- **Vitesse de Darcy.** Comme il n'est pas possible, dans les applications que nous envisageons ici, de décrire la vitesse d'un fluide à l'échelle de pore, on est conduit à définir soit expérimentalement, soit mathématiquement pour les cas simples, **une vitesse globale ou macroscopique du milieu (Loi de Darcy)** ceci dû au fait qu'on s'intéresse à la récupération du pétrole ou à la dépollution et regarder l'écoulement au voisinage des pores ne donne pas de renseignements pertinents.

*dessin : vitesse macroscopique*

# Ecoulement monophasique

On suppose ici que le fluide saturant est une seule phase : gaz, ou huile ou eau. Ce modèle est utilisé pour le gisement gazier.

## Conservation de la masse

$$\partial_t(\Phi(x, p)\rho(p)) + \operatorname{div}(\rho(p)\mathbf{V}) = 0. \quad (1)$$

## Conservation de la quantité de mouvement

$$\mathbf{V} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu}(\nabla p - \rho(p)\mathbf{g}) \quad (2)$$

avec  $\Phi$  : la porosité,  $p$  : la pression du fluide,  $\rho(p)$  : la masse volumique du fluide,  $\mu$  : la viscosité cinématique,  $\mathbf{K}$  : le tenseur des perméabilité,  $\mathbf{g}$  : le vecteur de la gravité



On va décrire la cas d'écoulement diphasiques :

On suppose que

– le fluide est incompressible :  $\rho_j$  ne dépend pas de  $P_j$ ,

–  $\Phi$  ne dépend pas de  $P_j$

pour fixer les idées on considère deux phases eau et huile. On note  $S_w$  la saturation de l'eau, et  $S_o$  la saturation de l'huile.

*Conservation de la masse de phase eau :*

$$\Phi(x)\partial_t S_w + \operatorname{div}(\mathbf{V}_w) = 0, \quad (3)$$

*Conservation de la masse de phase huile :*

$$\Phi(x)\partial_t S_o + \operatorname{div}(\mathbf{V}_o) = 0, \quad (4)$$

$$S_w + S_o = 1 \quad (5)$$

$$\mathbf{V}_w = -\frac{K}{\mu_w} k_{rw}(S_w)(\nabla P_w - \rho_w \mathbf{g}) \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_o = -\frac{K}{\mu_o} k_{ro}(S_o)(\nabla P_o - \rho_o \mathbf{g}) \quad (7)$$

La courbure de la surface de contact entre deux fluides entraine une différence de pression appelé pression capillaire. Les expériences ont montré que les pressions capillaires sont fonctions de saturations. On définit alors Pression capillaire

$$p_c(S_w) = P_w - P_o \quad (8)$$

Exemples de  $p_c$  :

Nous avons 4 équations et 4 inconnues.

**Formulation mathématique du problème diphasique.** Il suffit de connaître une saturation et une pression pour déterminer toutes du problème.

On note

$$S := S_w, S_o = 1 - S$$

Tout d'abord, nous allons équation de la pression. En sommant les équations (3) et (4), on a

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_o) = 0$$

On définit la vitesse totale par  $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_w + \mathbf{V}_o$ , elle s'écrit

$$\mathbf{V}_T = -KM_w(\nabla P_w - \rho_w \mathbf{g}) - KM_o(\nabla P_o - \rho_o \mathbf{g})$$

On note

$M_i = k_i/\mu_i$  la mobilité de la phase  $i = w, o$

$M = M_w + M_o$  la mobilité totale

$\nu_i = M_i/M$  la fraction des flux pour la phase  $i = w, o$ .

Ainsi, la vitesse s'écrit de façon équivalente :

$$\mathbf{V}_T = -KM(S)(\nabla P_o + \nu_w(S)P'_c(S)\nabla S) + K(M_w\rho_w + M_o)\mathbf{g},$$

il est toujours possible de définir une fonction  $\tilde{p}(S)$  telle que  $\frac{d\tilde{P}}{dS}(S) = \nu_w(S)\frac{dP_c}{dS}(S)$ , en notant  $P = P_o + \tilde{P}$ , la vitesse totale s'écrit :

$$\mathbf{V}_T = -KM(S)\nabla P + K(M_w\rho_w + M_o\rho_o)\mathbf{g}.$$

Ensuite, on exprime la vitesse d'eau en fonction de la pression globale et de la saturation, il vient

$$\mathbf{V}_w = \nu_w(S)\mathbf{V}_T - KMM_wM_o(\nabla P_c + (\rho_o - \rho_w)\mathbf{g}).$$

En résumé, on cherche  $(S, P)$  solution du système :

$$\Phi(x)\partial_t S + \operatorname{div}(\nu_w(S)\mathbf{V}_T) - \left(KM(S)M_w(S)M_o(S)(\nabla P_c(S) - (\rho_o - \rho_w)\mathbf{g})\right) = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{V}_T = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_T = -KM(S)\nabla P + K(M_w\rho_w + M_o\rho_o)\mathbf{g} \quad (11)$$

Le terme  $(\nu_w(S)\mathbf{V}_T) = \mathbf{V}_T \cdot \nabla \nu_w(S)$  est un terme de transport,

le terme  $-(KM(S)M_w(S)M_o(S)\nabla P_c(S))$  est un terme d'ordre et correspond à la diffusion moléculaire,

le terme  $(KMM_wM_o(\rho_o - \rho_w)\mathbf{g})$  correspond à un terme de transport dans la direction de la gravité.